UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Zoranka Desnica

VREMENSKE SERIJE U FINANSIJAMA:

ARCH I *GARCH*

-završni rad -

Novi Sad, oktobar 2009.

PREDGOVOR

Oblast iz koje potiče tema ovog rada jeste ekonometrija, relativno mlada nauka nastala tridesetih godina prošlog veka.
Naziv ekonometrija u naučnu literaturu uveo je Ragner Frisch 1926. godine, norveški ekonomista i statističar, koji je zajedno sa Janom Tingerbenom dobitnik Nobelove nagrade iz područja ekonomske nauke.

Koren reči ekonometrija sastoji se od tri grčke reči : σπίτι (kuća), νόμος (zakon) i μέτρα (mera). Od prve dve reči je nastala reč ekonomija, pa kada dodamo i treću dobijamo “merenje u ekonomiji” , a to i jeste jedan od najjednostavnijih načina da shvatimo ekonometriju.
Tinter, G. (1968) je rekao da je ekonometrija specifičan pogled na ulogu ekonomije , koja se ogleda u primenama statistike na ekonomsku bazu podataka da bi se pružila empirijska osnova modeliranju, te da bi se dobili precizniji numerički rezultati.
Ekonometriaj je , dakle , jedna od grana ekonomije koja na specifičan način povezuje ekonomiju, matematiku, statističke metode i stvarne podatke.

Modele koje izučavamo i analizaramo su *ARCH* i *GARCH* , mehanizmi za procenu volatilnosti tržišta i pre svega, tehnike za predviđanja prinosa na tržištu. Oni pretstavljaju osnovne modele , koje je prvi put pretstavio Engle (1982 .), ali su do danas doživeli mnoge probražaje i transformacije da bi se povećala njihova efikasnost i učinkovitost. Prikazani su njihove osnovne karakteristike, teoreme koje ih bolje opisuju, dok je na samom kraju pomoću paketa MATLAB, prikazana primena ovih modela tako što se predviđa kolika će biti promena cena akcija za nekoliko dana unapred.

Ovom prilikom bih se zahvalila svim profesorima i asistentima sa kojima sam sarađivala tokom svojih studija, na ukazanom strpljenju i znanju. Posebno bih želela da se zahvalim svojoj profesorici i mentoru, *Dr Zorani Lužanin*, za sve sugestije i svu pomoć koju mi je pružila pri izradi ovog rada, kao i za svo znanje koje sam stekla pored nje .

Novi Sad, 28. septembar 2009. Zoranka Desnica

SADRŽAJ

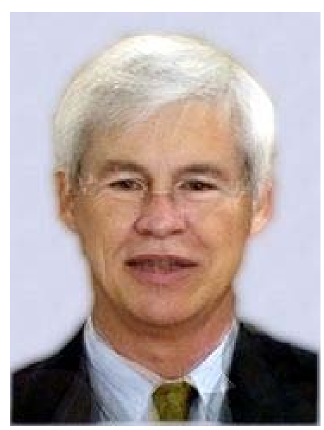
1. UVOD

U današnjoj modernoj ekonomskoj literaturi, gotovo je nemoguće govoriti o bilo kakvom vidu poslovanja, a da se u obzir ne uzmu rizici i posledice koje oni mogu doneti. Uopšteno govoreći, rizik definišemo kao neizvesnost budućeg ishoda. Jedan od najpoznatijih oblika je tržišni rizik ili neizvesnost u promenama cena akcija. Smatra se da je tržišni rizik najveći rizik koji je prisutan u investicijskom poslovanju sa akcijama. Najčešći uzroci promena cena su nesklad u ponudi i potražnji na tržištu i promena kamatnih stopa. Sa druge strane, tržišni rizik je najlakše identifikovati i kvantifikovati jer se cene akcija beleže prilikom svake transakcije, a preko cena lako je dalje pratiti i prinose koje te akcije donose.

U stručnoj terminologiji koristi se reč ***volatilnost*** kako bi se direktno opisao rizik promene vrednosti akcije (ili nekog drugog finansijskog derivata). Volatilnost pretstavljai mehanizam za meranje rizika i upravljanje njime, a koristi se i za procenu vrednosti derivata, upravljanje aktivom i optimizaciju portfolija.

Sa matematičkog gledišta, što će kasnije biti i detaljno predstavljeno, volatilnost pretstavljauslovnu standardnu devijaciju prinosa, a analitički modeli koje koristimo da bi je prikazali su *ARCH* i *GARCH*. Navedeni modeli su postali široko primenjivani u analizi podataka vremenskih serija u kojima je prisutna heteroskedastičnost, tj. pojava da varijanse grešaka koje pravimo nisu konstantne , nego da se menjaju kako t menjamo. Osnovni cilj ovih modela jeste izračunavanje neke od mera volatilnosti (poput standardne greške), koju je moguće koristiti pri donošenju različitih finansijskih odluka, poput analize rizika, izbora portfolija ili formiranja cena hartija od vrednosti.

Američki ekonomista Robert Fry Engle III (rođen 10.11.1942) je prvi predstavio ovakve koncepte za proveru volatilnosti u svom radu *Autoregressive Conditional Heteroskedasticity With Estimates of the Variance of UK Inflation* Econometrica 50 (1982): 987-1008.. On je uočio da prethodni modeli koji su pretpostavljali konstantnu volatilnost za predviđanje kretanje cena akcija i ostalih derivata nisu davali najbolje rezultate. Stoga je razvio nove statističke modele koji su pretpostavljali da cene akcija i cene ostalih derivata imaju periodično malu i visoku volatilnost i od tada su ovi modeli ključni u modernoj teoriji cena finasijskih derivata i u praksi. Godine 20003, zajedno sa profesorem Clive Granger dobija i Nobelovu nagradu u ekonomiji za “metode analiziranja ekonomskih vremenskih serija sa vremenski promenljivom volatilnošću (ARCH)”.



Robert Engle je diplomirao fiziku 1964. godine na koledžu Williams , na kojoj je i magistrirao na Univerzitetu Cornell, dok je 1969. doktorirao iz oblasti ekonomije. Nakon završenih doktorskih studija predaje na univerzitetu M.I.T. do 1974. Akademsku karijeru nastavlja na USCD , najpre kao vanredni, a zatim i kao redovni profesor od 1977. godine. U periodu od 1990. do 1994. godine, Engle se nalazi na čelu odseka za ekonomiju ovog univerziteta. Tokom poslednje decenije profesor Engle ,u ulozi gostujućeg predavača drži brojna predavanja, namenjena kako akademskoj, tako i široj javnosti. Član je Američke akademije nauka i umetnosti, kao i Društva ekonometričara.

Engle – ov najveći doprinos je upravo otkriće metoda za analizu nepredvidljivih kretanja cena na tržištu i kretanja kamatnih stopa, tj. uvođenje modela koji na vrlo dobar način uspevaju da, sa odredjenom preciznošću, predvide i prate put kretanja cene akcija.

U nastavku je prvo predstavljen pojam i model volatilnosti.

2. VOLATILNOST

U ekonomskom smislu, pod volatilnošću se podrazumeva mera nepredvidive promene neke promenljive u određenom vremenskom periodu. Pojednostavljeno govoreći, volatilnost nekog finansijskog instrumenta nam govori o veličini promena njegove cene u nekom proteklom periodu. Najčešće se računa kao standardna devijacija promene cene. Volatilnost je jedan od indikatora rizika: što je volatilnost finasijskog instrumenta veća, to je veća i njegova rizičnost. Mnogi finansijski modeli, kao na primer model rizične vrednosti ili Black-Scholes formula uključuju nezavisno ocenjenu ili predviđenu vrednost volatilnosti. Za ocenjivanje volatilnosti korišćeni su i podaci o makroekonomskim faktorima, međutim, smatra se da najbolje rezultate daju informacije o prošlim vrednostima stopa prinosa
.Stoga je i mnogo bolji način da se volatilnost predstavi preko uslovne standardne devijacije odgovarajućih finansijskih derivata (npr. prinosa). U nastavku je dat ukratko pregled uslovnih slučajnih promenljivih, pre definisanja samog modela.

2.1 Uslovne slučajne promenljive

Često je u praksi potrebno reći nešto o veličini koja nije direktno dostupna merenju, ali se raspolaže podacima o nekoj drugoj veličini, koja od ove prve zavisi. Upravo nam se takva situacija javlja kada mi, na primer, želimo da odredimo prinose nekih akcija u budućem periodu, a raspolažemo sa podacima o prinosima u nekom prošlom periodu, te nam oni pretstavljaju tu drugu veličinu . U takvim slučajevima od velike koristi su uslovne raspodele.

Pre same definicije, podsetićemo se definicija $\sigma-$ algebre i (bezuslovnih) slučajnih promenljivih.

Definicija 1 ($\sigma-$ algebra): Neka je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}\,(\,\Omega\,)$ ($\mathcal{P}$ - partitivni skup). Ako su zadovoljeni uslovi:

1) $\Omega \in \mathcal{F}$
2) $\mathrm{A} \in \mathcal{F} \implies \overline{\mathrm{A}} \in \mathcal{F}$
3) $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{F} \implies \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{F}$, za svaki prebrojiv skup I

tada je $\mathcal{F}$ $\sigma-$ algebra nad Ω , gde je Ω skup svih mogućih ishoda.

Definicija 2: Neka je $(\,\Omega\,,\mathcal{F},P\,)$ prostor verovatnoća. Preslikavanje $\mathbb{X} : P \rightarrow R^n$ se zove n – dimenzionalna slučajna promenljiva ako važi da za svako $B \in \mathcal{B}^n$

$$\mathbb{X}^{-1}\,(\,B\,) \in \mathcal{F}$$

gde je $\mathcal{B}^n$ Borelova $\sigma-$algebra u $\mathcal{B}^n$

Kažemo da je $\mathbb{X}$ $\mathcal{F}-$ merljivo.

Uslovna funkcija raspodele slučajne promenljive X u odnosu na događaj $\{Y = y\}$, gde su X i Y neprekidne slučajne promenljive, data je sa

$$F_{X|Y}(x|y) = P\{X \leq x|Y = y\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(u,y)}{f_Y(y)} \ du$$

U gornjem izrazu $f(x,y)$ je zajednička funkcija gustine slučajnih promenljivih X i Y, a $f_y(y)$ je marginalna funkcija gustine slučajne promenljive Y.
Polazeći od definicije uslovne verovatnoće lako se može doći do navedene formule za uslovnu funkciju raspodele:

$$P\{X \leq x|Y = y\} = \frac{P\{X \leq x, y \leq Y \leq y + \Delta y\}}{P\{y \leq Y \leq y + \Delta y\}} = \frac{\int_{-\infty}^{x} \int_{y}^{y+\Delta y} f(u,v)dudv}{\int_{y}^{y+\Delta y} f_Y(v)dv}$$
$$= \frac{\left(\int_{-\infty}^{x} f(u,y)\,du\right)\Delta y}{f_Y(y)\Delta y} = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(u,y)}{f_Y(y)} \ du$$

Uslovna gustina verovatnoće slučajne promenljive X u odnosu na događaj $\{Y = y\}$ data je sa

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

I za uslovne raspodele mogu se definisati numeričke karakteristike kao što su očekivanje i varijansa.

Uslovno matematičko očekivanje slučajne promenljive X u odnosu na događaj $\{ Y = y \}$ definiše se sa :

$$E(X|Y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, f_{x|y}(x|y)dx$$

Odgovarajuća *uslovna varijansa* data je sa

$$var\ (X|Y) = E((X - E(X|Y))^2|Y)$$

Primetimo da su i uslovno očekivanje i uslovna varijansa funkcije argumenta y .

Uslovno matematičko očekivanje ima sledeće interesantno svojstvo:

$$E(X) = E(E(X|Y))$$

Ono prosto kaže da se usrednjavanjem po Y uslovnog očekivanja od X dobija obično (bezuslovno) očekivanje od X. Dokaz je relativno jednostavan:

$$E\big(E(X|Y)\big) = E\left(\int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{x|y}(x|y)\, dx\right) = \int_{-\infty}^{\infty} (\int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{x|y}(x|y) dx) f_Y(y) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\, \underbrace{f_{x|y}(x|y) f_Y(y)}_{f(x,y)}\, dy\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\, \underbrace{(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy)}_{f_X(x)} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx = E(X)$$

□

Za uslovnu varijansu, koju ćemo takođe koristiti, slično važi:

$$var(\, X\,) = \, E(\, var(\, X|Y\,)\,) + \, var(\, E(\, X|Y\,)\,)$$

Naime, kao što za (marginalnu) slučajnu promenljivu X definišemo varijansu

$$var\,(\, X\,) = E\,(\, X^2\,) - \, E\,(\, X\,)^2$$

na isti način možemo definisati i varijansu za uslovnu slučajnu promenljivu X|Y :

$$var(\, X|Y\,) = E(\, X^2\, |Y\,) - E\,(\, X|Y\,)^2$$

Računajući očekivanje gornjeg izraza dobijamo sledeće:

$$E\,\big(var(\, X|Y\,)\big) = \underbrace{E\,(\, E(\, X^2\, |Y\,))}_{E\,(\, X^2\,)} - E\,(\,[E\,(\, X|Y\,)]^2)$$

Ako primenimo formulu $var\,(\, X\,) = E\,(\, X^2\,) - \, E\,(\, X\,)^2$ na $E\,(\, X|Y\,)$ dobijamo

$$var\,\big(E\,(\, X|Y\,)\big) = E\,(\,[E(\, X\, |Y\,)]^2) - \underbrace{[E\,(\, E\,(\, X|Y\,))]^2}_{(E\,(\, X\,))^2}$$

Sabiranjem $E\,\big(var(\, X|Y\,)\big) = \underbrace{E\,(\, E(\, X^2\, |Y\,))}_{E\,(\, X^2\,)} - E\,(\,[E\,(\, X|Y\,)]^2)$ i $var\,\big(E\,(\, X|Y\,)\big) = E\,(\,[E(\, X\, |Y\,)]^2) - \underbrace{[E\,(\, E\,(\, X|Y\,))]^2}_{(E\,(\, X\,))^2}$, dobijamo traženi izraz:

$$E\,\big(var(\, X|Y\,)\big) + \, var\,\big(E\,(\, X|Y\,)\big) = \, E\,(\, X^2\,) - \,\big(E\,(\, X\,)\big)^2 = var\,(\, X\,)$$

U daljem radu, umesto neke slučajne promenljive Y , koristićemo istorijske podatke sa kojima raspolažemo do nekog vremenskog trenutka t. Ti podaci nam predstavljaju **skup informacija**

dostupnih do vremena $\boldsymbol{t}$ i obeležavamo ga sa $\boldsymbol{\mathcal{F}_t}$. $\mathcal{F}_t$ nam pretstavljajednu sigma – algebru generisanu podacima iz prošlosti.
Preko skupa $\mathcal{F}_t$ ćemo predstaviti i model volatilnosti, a kasnije i *ARCH* i *GARCH* modele.

2.2 Model volatilnosti

Opšta struktura modela volatilnosti prikazana je na sledeći način:

$$y_t = \mu_t + \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\mu_t = E(y_{t+1}|\mathcal{F}_t)$$

$$\sigma_t^2 = var\ (y_{t+1}|\mathcal{F}_t)$$

$$\varepsilon_t \ \ i.i.d$$

$$E(\varepsilon_t) = 0$$

$$var(\varepsilon_t) = 1$$

gde je y_t – prinos u trenutku t, dok je ε_t – greška koja se pravi prilikom linearne regresije (skraćenica i.i.d. nam označava “independently and identically distributed” tj. slučajne promenljive ε_t imaju sve istu raspodelu i nezavisne su).
Cilj analize volatilnosti jeste upravo da objasni uzrok njenog nastanka. Vremenske serije nam dobro služe za predikcije, ali nisu dobar model da volatilnost. Naime, ona nastaje kao posledica nekih prošlih događaja, pa se zato i objašnjava preko uslovnih slučajnih promenljivih:

$$\sigma_t^2 = var\ (y_{t+1}|\mathcal{F}_t)$$

pa tako može da nastane kao reakcija na neku vest , novost, koja je uglavnom iznenadna i neočekivana. Medjutim, vreme te vesti ne mora biti neočekivano i iznenađujuće, što ipak ostavlja prostora da se neke komponente volatilnosti predvide. Ono što je takođe vrlo zanimljivo posmatrati jeste kako vesti na jednom tržištu utiču na kretanja na nekom drugom tržištu, tj. moguće je posmatrati kako volatilnost jednog uslovljava volatilnost drugog tržišta. Engle je ovu pojavu nazvao “*heat wave*” efekat. Slična pitanja se nameću kada gledamo samo jedno tržište, tj. da li volatilnost jednog finansijskog derivata utče na neki drugi ? Može se pokazati postojanje određenog stepena zavisnosti, ali ono što generalno važi jeste da volatilnost celog tržišta utiče na volatilnost svake pojedinačne akcije.

Modele koje ćemo u nastavku predstaviti su noviji mehanizmi u ekonometriji pomoću kojih na neki način možemo volatilnost predvideti, a to su *ARCH* i *GARCH*.

3. *ARCH* i *GARCH* modeli

S namerom da doprinese razvoju makroekonometrije racionalnih očekivanja, profesor Robert Engle je u svom članku, jednom od najšešće citiranih u oblasti finansijske ekonometrije, objavljenom 1982. u casopisu *Econometrica*, dao prvu formulaciju tzv. *ARCH* (autoregresivna uslovna heteroskedastičnost) modela, što se zapravo i smatra osnivanjem *finansijske ekonometrije*.
Engle je, polazeći od tradicionalnog pristupa ugrađivanja neizvesnosti u varijansu, pokušao da modelira odziv ekonomskih agenata na neizvesne ishode. Pretpostavka o konstantnoj varijansi dovodi do niza problema koji je Engle rešio uvođenjem vremenski promenljive varijanse, što je omogućilo dekomponovanje funkcije verodostojnosti na njene uslovne gustine i dovelo do formulisanja *ARCH* familije uslovno heteroskedastičnih procesa.
Kao što smo već rekli, *ARCH* je model koji služi za procenu volatilnosti. ARCH je skraćenica od *AutoRegressive Conditional Heteroskedastic models,* što u prevodu znači **modeli autoregre - sivne uslovne heteroskedastičnosti.** Uslovne sličajne promenljive smo već razmatrali tako da ćemo u nastavku reći nešto više o linearnoj regresiji i njenom specijalnom obliku - autoregresiji i o heteroskedastičnosti pre upoznavanja sa samim modelom *ARCH*.

3.1 Linerana regresija

Linearna regresija pokazuje da li između dve pojave postoji linearna (pravolinijska) veza i ako postoji koja je njena jačina pri čemu je bitno koja pojava je zavisna promenljiva (Y) a koja nezavisna (X) promenljiva. Nezavisna promenljiva X se naziva objašnjavajućom promenljivom ili faktorom jer njome pokušavamo da objasnimo varijacije zavisne promenljive Y.
Najjednostavniji oblik te funkcionalne zavisnosti je linearna zavisnost:

$$y = \alpha + \beta x + \varepsilon, \ \ \alpha, \beta \in \mathcal{R}$$

gde se zavisna promenljiva y izražava preko nezavisne promenljive x , dok je ε greška koju pravimo prilikom linearne regresije . Ovakvim modelom pokušavamo da objasnimo veličinu y preko samo jedne veličine, a svi ostali uticaji se zanemaruju.Ovo je model *proste linearne regresije.* Takav pristup je u praksi sasvim opravdan jer smo najčešće u nemogućnosti da sagledamo sve uticaje na veličinu y pa uzimamo u obzir samo najbitnije.
Moguće je da smo analizom zaključili da je y u značajnoj linearnoj zavisnosti od više promenljivih, pa bi tada određivali model oblika

$$y = \alpha + \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_i \ + \ \varepsilon, \ \ \alpha, \beta_i \in \mathcal{R}, \ \ i = 1, \dots, k$$

a ovo je model *višestruke linearne regresije.*

U praksi, u slučaju proste linearne regresije, mi imamo parove (x_i, y_i) i ideja je da provučemo pravu koja će imati najmanja odstupanja od tih tačaka. Naravno da nikada nećemo imati idealan slučaj da jednom pravom možemo sve te tačke obuhvatiti, nego ćemo uvek praviti određenu grešku, koju često nazivamo i beli šum i označavamo sa $\varepsilon_i,\ \ i = 1, \dots, n$.

Standardne pretpostavke koje važe za $\varepsilon_i,\ \ i = 1, \dots, n$ su :

1) normalnost : $\varepsilon_i,\ \ i = 1, \dots, n$ imaju normalnu raspodelu
2) $E(\varepsilon_i) = 0,\ \ i = 1, \dots, n$
3) homoskedastičnost: $var(\varepsilon_i) = \sigma^2,\ \ i = 1, \dots, n$
4) odsustvo autokorelacije: $cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0,\ \ i = 1, \dots, n;\ \ \ j = 1, \dots, n$
5) nestohastičnost nezavisne promenljive, tj. $x_i,\ \ i = 1, \dots, n$ su determinističke.

Prva i četvrta osobina su glavne odlike procesa ***beli šum***, pa se zato često u literaturi nailazi i na ovaj termin za stohastički proces $\{\varepsilon_i,\ \ i = 1, \dots, n\}$.

Neka je $(x_1, \dots, x_n)$ neki uzorak koji ćemo koristi u proceni regresione prave. Za različite $x_i,\ i = 1, \dots, n$ dobijamo različite vrednisti $y_i = \alpha + \beta\ x_i + \varepsilon_i,\ i = 1, \dots, n$. Na osnovu standardnih pretpostavki, za $y_i,\ \ i, 1, \dots, n$ važi:

1) $y_i,\ \ i, 1, \dots, n$ imaju normalnu raspodelu
2) $E(y_i) = E(\alpha + \beta x_i + \varepsilon_i) = \alpha + \beta x_i + \underbrace{E(\varepsilon_i)}_{0} = \alpha + \beta x_i,\quad i, 1, \dots, n$
3) $var(y_i) = var(\alpha + \beta x_i + \varepsilon_i) = var(\varepsilon_i) = \sigma^2,\quad i, 1, \dots, n$
4) $cov(y_i y_j) = E\Big(\big(y_i - E(y_i)\big)\big(y_j - E(y_j)\big)\Big) = E\Big(\big(\alpha + \beta x_i + \varepsilon_i - (\alpha + \beta x_i)\big)\big(\alpha +$

βxj+εj−α+βxj= Eεiεj= 0, jer je

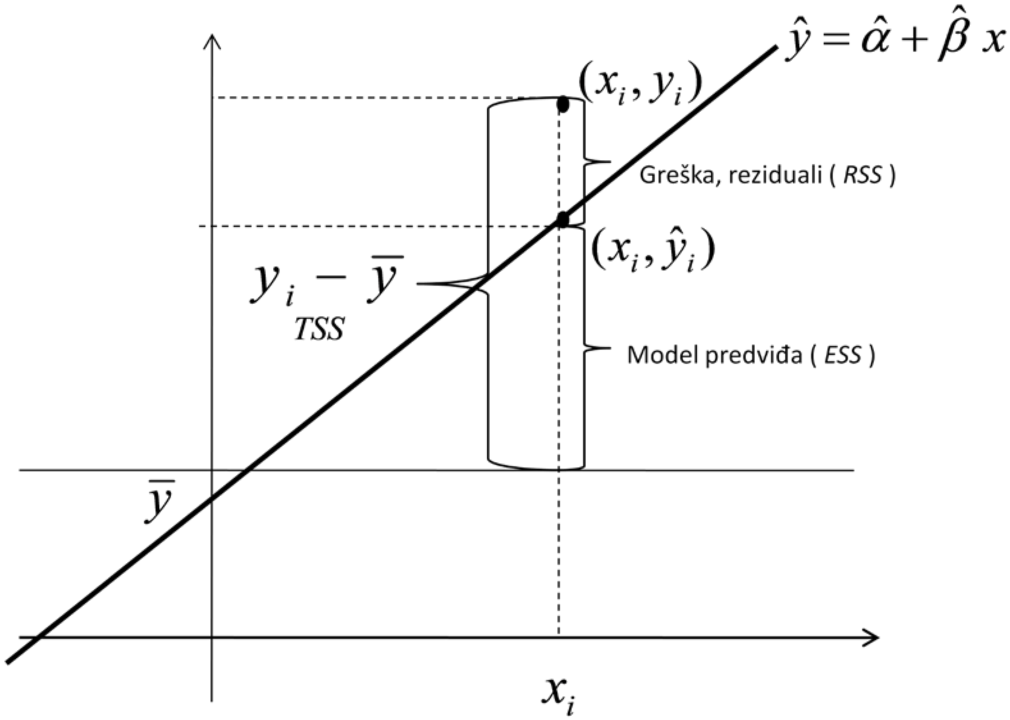
$$cov(\varepsilon_i \varepsilon_j) = E\left(\left(\varepsilon_i - \underbrace{E(\varepsilon_i)}_{0}\right)\left(\varepsilon_j - \underbrace{E(\varepsilon_j)}_{0}\right)\right) = E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0$$

Znači da važi : $\boldsymbol{y_i :\ \ N\ (\alpha + \beta x_i,\ \sigma^2)}$

Sledeći problem koji se javlja jeste ocena parametara α i β pomoću nekih od dobro poznatih metoda: metoda najmanjih kvadrata, metoda momenata, blue metoda, itd. Te ocene označavamo sa $\hat{\alpha}$ i $\hat{\beta}$, koje ubacujemo u jednačinu regresione prave. Iz $E(y_i) = \alpha + \beta x_i,\ i = 1, \dots, n$ dobijamo

$$\widehat{y_i} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i, \qquad i = 1, .., n$$

što pretstavljaprocenjeni regresijski model.



Slika 1

Na *Slici1* prikazana je prava linearne regresije i aritmetička sredina promenljive *y*, jedna tačka iz uzorka(x_i, y_i) i tačka ($x_i, \hat{y}_i$) ocenjena regresionim modelom. Odstupanje vrednosti y_i od aritmetičke sredine $\bar{y}$ označili smo kao *total*. To odstupanje može da se podeli na dva dela, deo koji pretstavljaodstupanje ocenjene vrednosti $\hat{y}_i$ i od $\bar{y}$ (model) i odstupanje vrednosti iz uzorka y_i od ocenjene vrednosti $\hat{y}_i$ (greška, reziduali). Što je tačka (x_i, y_i) bliža tački ($x_i, \hat{y}_i$) to je ta vrednost iz uzoka bolje opisana vrednošću iz modela. Ako bismo posmatrali kvadrate odstupanja svih tačkaka iz uzorka i svih ocenjenih vrednosti , na osnovu modela, od $\bar{y}$ sumirali ih, posle odredjenih transformacija dobili bismo :

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}_{TSS} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2}_{ESS} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}_{RSS}$$

gde je:

TSS (total sum of square) – ukupna greška koju pravimo regresionim modelom
ESS (explaind sum of square) - odnosi se na deo varjanse podataka *y* koji se može objasniti modelom.
RSS (reziduals sum of square) - odnosi se na deo varijanse podataka *y* koju pripisujemo greški modela, tj. odstupanjima vrednosti iz uzorka od vrednosti ocenjenih modelom.

Pogledom na *Sliku 1* vidimo da nam je u interesu da *ESS* bude što veće, odnosno *RSS* što manje. Primetimo da *ESS* može najviše da bude jednako *TSS*, kada se tačke (x_i, y_i) i ($x_i, \hat{y_i}$) poklapaju. Ako napravimo količnik koji obeležavamo sa R^2 (*R* – kvadrat)

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS}$$

on nam može reći koliko je od veličine *y* objašnjeno linearnom zavisnošću preko veličine *x* . Što je *ESS* bliže *TSS* time je R^2 bliže jedinici pa *x* bolje objašnjava *y*.
U nastavku ćemo reći nešto više o višestrukoj regresiji i testovima značajnosti koje ćemo koristiti kasnije , u praktičnom delu.
Model višestruke linearne regresije je oblika:

$$y = \alpha + \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_i \ + \ \varepsilon, \ \ \alpha, \beta_i \,\epsilon\, \mathcal{R}, \ \ i = 1, \dots, k$$

gde je *y* zavisna promenljiva, $x_1, \dots, x_k$ su nezavisne promenljive, α , $\beta_1, \dots, \beta_k$ su parametri koje treba ocenit, dok je ε slučajna promenljiva. Ako želimo da vezu između y i $x_1, \dots, x_k$ utvrdimo na osnovu *n* opažanja (merenja) , tada dobijamo sistem od *n* jedanakosti:

$$\begin{gathered}
y_1 \ = \ \alpha + \ \beta_1 x_{11} + \ \beta_2 x_{12} + \ \dots + \ \beta_k x_{1k} + \ \varepsilon_1 \\
y_2 \ = \ \alpha + \ \beta_1 x_{21} + \ \beta_2 x_{22} + \ \dots + \ \beta_k x_{2k} + \ \varepsilon_2 \\
\vdots \\
y_n \ = \ \alpha + \ \beta_1 x_{n1} + \ \beta_2 x_{n2} + \ \dots + \ \beta_k x_{nk} + \ \varepsilon_n
\end{gathered}$$

Sistem možemo zapisati i u matričnom obliku

$$Y = \ X\,\beta + \ \varepsilon$$

gde je

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{k1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & \cdots & x_{kn} \end{bmatrix}, \qquad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

U analizi modela polazi se od određenih pretpostavki koje se odnose na prirodu uključenih promenljivih. Te pretpostavke glase:

- Veza između zavisne promenljive i odabranog skupa nezavisnih promenljivih je linearna
- Promenljive $x_1, \dots, x_k$ nisu slučajne vrednosti i njihove vrednosti su fiksne.
- Matrica *X* je punoga ranga : *rang (X) = k+1*
- Slučajne promenljive $\varepsilon_i,\ i = 1, \dots, n$ imaju centriranu normalnu raspodelu sa konstantnom varijansom σ^2 i međusobno su nekorelisane, tj. :

$$E\ (\varepsilon_i\ ) = 0, \qquad var\ (\ \varepsilon_i\ ) = \sigma^2$$
$$Cov\left(\ \varepsilon_i\ , \varepsilon_j\ \right) = E\left(\ \varepsilon_i\ \ \varepsilon_j\ \right) = 0, i \neq j, i, j = 1, \dots, n$$

Procenjeni regresijski model glasi:

$$\hat{y} = \hat{\alpha} + \sum_{i=1}^{k} \hat{\beta}_i x_i$$

Procenjeni parametar $\hat{\beta}_i, i = 1, \dots, k$ pretstavlja parcijalni izvod $\frac{\partial\ \hat{y}}{\partial\ \ x_i}$, te se tumači kao promena regresijske vrednosti zavisne promenljive za jedinični porast nezavisne promenljive , uz pretpostavku da su ostale regresijske promenljive ostale nepromijenjene (regresijske vrednosti $\hat{y}_i,\ i = 1, \dots, n$ su procenjene vrednosti zavisne promenljive za zadate vrednosti nezavisnih promenljivih, $\hat{x}_{i1}, \dots, \hat{x}_{ik},\ i = 1, \dots, n$). Konstantni član $\hat{\alpha}$ nema bitnu ekonomsku interpretaciju.

Bitan deo regresijske analize je tabela analize varijanse:

IZVOR VARIJACIJE	***STEPENI SLOBODE***	***SUME KVADRATA***	***SREDINE KVADRATA***	***F - VREDNOST***
PROTUMAČEN MODELOM	*k*	*ESS*	*ESS/k*	$\frac{ESS/k}{RSS/(n-(k+1))}$
NEPROTUMAČENA ODSTUPANJA	*n- (k+1)*	*RSS*	*RSS/(n–(k+1))*	/
UKUPNO	*n-1*	*TSS*		/

Rezidualna suma kvadrata podeljena sa (*n–(k+1))* stepeni slobode je procenjena varijansa regresije:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{RSS}{n\text{–}\ (\ k + 1\ )}$$

Koren iz procenjene varijanse regresije je procena standardne devijacije regresije i može se tumačiti kao prosečno odstupanje empirijskih od regresijskih vrednosti.
Do intervalne procene parametra $\hat{\beta}_i\ , i = 1, \dots, k$ dolazi se na sledeći način:

$$P\left\{-t_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\beta_i - \widehat{\beta_i}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2_{\widehat{\beta_i}}}} \leq t_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1-\alpha$$

gde je

$1-\alpha$ – pouzdanost procene (α je mali broj, najčešće *0.05* ili *0.01*)
$t_{\frac{\alpha}{2}}$ – koficijent pouzdanosti koji pripada *t* – raspodeli (studentovoj) sa *n–(k+1)*stepeni slobode.
Test statistika kojom proveravamo da li tražene vrednosti pripadaju intervalu poverenja ili ne , u ovom slučaju,može biti zbirna (sve parametre istovremeno proverava) ili pojedinačna (pojedinačni test).

Zbirni test (Fisher – ov test) proverava sledeće hipoteze:

$$H_0 : \beta_1 = \cdots = \beta_k$$

naspram

$$H_1 : \exists\, \beta_i \neq 0, i = 1, \dots, k$$

Test veličina je:

$$F = \frac{ESS/k}{RSS/(n-(k+1)))}$$

Ako je $F > F_\alpha$ (F_α - tablična vrednost) tada odbacujemo nultu hipotezu, dok je u suprotnom slučaju prihvatamo .

Pojedinačni test (t – test) proverava svaki parametar posebno na sledeći način:

$$H_0 : \beta_i = 0, i = 1, \dots, k$$

naspram

$$H_1 : \beta_i \neq 0, i = 1, \dots, k$$

Test veličina je:

$$t = \frac{\hat{\beta}_i}{\sigma_{\widehat{\beta}_i}}, \qquad i = 1, \dots, k$$

Ako je $|t| > t_{\frac{\alpha}{2}, n-(k+1)}$ ($t_{\frac{\alpha}{2}, n-(k+1)}$- tablična vrednost za studentovu raspodelu) tada odbacujemo nultu hipotezu, dok je u suprotnom slučaju prihvatamo .
Kao i malopre, i ovde možemo posmatrati regresione koeficijente. Možemo posmatrati uticaj svakog pojedinačnog $x_j, j = 1, \dots, k$ na $\hat{y}$ uz pretpostavku da su ostali $x_i, i \neq j$, $i = 1, \dots, k$

nepromenjeni (takozvani ***parcijalni koeficijenti inetgracije***), ali nam je kod višestruke regresije mnogo zanimljivije da gledamo ***Pearson - ov koeficijente korelacije*** . On prima vrednosti od minus do plus jedan. Vrednost koeficijenta jednaka nuli govori da ne postoji linearna korelacija među pojavama, plus jedan da je potpuna i pozitivna a minus jedan da je potpuna i negativnog smera. Što je koeficijent po apsolutnoj vrednosti bliži jedinici veza je uža. Mala vrednost ne mora nužno da znači slabu vezu među pojavama jer povezanost pojava može biti uska ali krivolinijska pa je primena koeficijenta linearne korelacije u tom slučaju neprimerena.

Ako posmatramo sistem:

$$y_1 = \alpha + \beta_1 x_{11} + \beta_2 x_{12} + \varepsilon_1$$
$$y_2 = \alpha + \beta_1 x_{21} + \beta_2 x_{22} + \varepsilon_2$$
$$\vdots$$
$$y_n = \alpha + \beta_1 x_{n1} + \beta_2 x_{n2} + \varepsilon_n$$

tada zavisnost između $x_1 = [x_{11} \quad \cdots \quad x_{n1}]^T$ i $x_2 = [x_{12} \quad \cdots \quad x_{n2}]^T$ izražavamo Pearson – ovim koeficijentom u oznaci r_{12}^2:

$$r_{12}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1} - \overline{x_1})(x_{i2} - \overline{x_2})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1} - \overline{x_1})^2} \sum_{i=1}^{n}(x_{i2} - \overline{x_2})^2}$$

U zavisnosti od toga kakav broj dobijemo za rezultat, mali ili veliki, pozitivan ili negativan možemo govoriti o lineranoj zavisnosti x_1 i x_2.

3.2 Vremenske serije i autoregresivni modeli (*AR* - modeli)

Uspeh svake ekonometrijske analize zavisi od raspoloživosti i pouzdanosti podataka na kojima se ona zasniva. U ekonometrijskim istraživanjima vrlo često se koriste podaci ***vremenskih serija***.

Vremenska serija pretstavljaskup podataka o vrednostima neke promenljive za niz uzastopnih perioda. Ekonometrijski modeli koji koriste podatke vremenskih serija pogodni su za analizu kretanja i razvoja pojave u vremenu, ispitivanje uzročno-posledičnih veza i predvidanje. Dinamika pojave, odnosno podaci o njoj, najcešće se prate u godišnjim, kvartalnim i mesečnim intervalima.

Jedna je od klasičnih karakteristika finansijskih vremenskih serija je da stope prinosa R_t nisu međusobno značajno autokorelisane, tj. da je vrednost autokorelacionog koeficijenta blizu nule. Ovo znači istovremeno i to da je raspored pozitivnih i negativnih vrednosti stopa prinosa slučajan i ne prati neku određenu sistematsku šemu.

U praksi, većina stopa prinosa finansijskih vremenskih serija ima simetričan raspored, ali je izdužen i ima debele repove (*eng. thick tails*).

Kao ***mera asimetrije*** *(eng. skewness)* može se koristiti sledeći izraz:

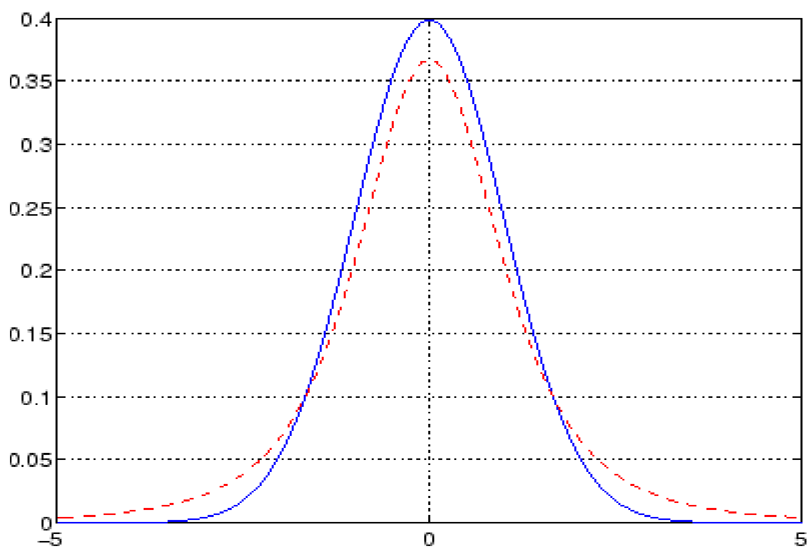
$$S = \frac{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(R_t - \bar{R})^3}{\left(\sqrt{\frac{1}{n}(R_t - \bar{R})^2}\right)^3} = \frac{E((R_t - \bar{R})^3)}{\sigma_t^3}, \quad \bar{R} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} R_t$$

Za $S = 0$ raspored je simetričan, za $S < 0$ postoji asimetrija ulevo, a za $S > 0$ raspored stopa prinosa je asimetričan udesno.

Mera spljoštenosti (*eng. kurtosis*) je :

$$K = \frac{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(R_t - \bar{R})^4}{\left(\frac{1}{n}(R_t - \bar{R})^2\right)^2} = \frac{E((R_t - \bar{R})^4)}{\sigma_t^4}, \quad \bar{R} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} R_t$$

Normalna raspored ima koeficijent spljoštenosti $K = 3$, za spljošten raspored je $K < 3$ (*eng. platykurtic*), a za raspored izduženiji u odnosu na normalan je $K > 3$ (*eng. leptokuric*). Dakle, za veliki broj serija stopa prinosa je $S \approx 0$ dok je $K > 3$, što znaci da u odnosu na normalnu rasporedu postoji relativno veliki broj vrednosti oko srednje vrednosti, veliki broj ekstremno velikih vrednosti kao i veliki broj veoma malih vrednosti. Raspodela kod vremenskih serije je izduženija, špicastija i ima debele repove (*Slika 2*).



Slika 2

(normalna raspodela je prikazana plavom linijom dok je leptokarična raspodela prikazana isprekidanom crvenom linijom).

Ekonometrija vremenskih serija razvila je modernu metodologiju u nastojanju da odgovori izazovima empirijskih istraživanja, i sa ciljem da otkrije dinamiku ekonomskih varijabli radi uspešnijeg predviđanja. U ekonometriji se posebna pažnja poklanja autonomnom vremenskom razvoju promenljive, koja je uglavnom slučajna, odnosno pojave koju ona pretstavljatako što posmatramo tu promenljivu u određenim vremenskim trenucima $t,\ \ t = 1,2,3, ...$ i pokušavamo da na osnovu tako dobijenih podataka procenimo vrednost promenljive u trenutku $t + 1$.

Ovo pretstavljai oblik linearne regresije koja se često u praksi koristi i koji nazivamo ***autoregresivni modeli (AR – modeli)***. Naime, autoregresivni model $\{X_t(w),\ t \geq 0\ \}$ je vrsta slučajnih procesa koji se koristi da bi modelirao i predvideo neki fenomen, bilo društevni bilo prirodni.

AR model reda *p* , u oznaci *AR (p)* je definisan na sledeći način:

$$X_t = c + \sum_{i=1}^{p} \varphi_i X_{t-i} + \varepsilon_t, \qquad t = 1,2,3\ldots$$

gde su $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ parametri, c je konstanta, dok je ε_t greška (beli šum) koji se javlja prilikom ovakve regresije.
Još jedna vrlo bitna stvar kod autoregresivnih modela jeste pojam ***stacionarnosti***. Razlikujemo stacionarnost u jakom i stacionarnost u slabom smislu.

Stacionarnost u jakom smislu stohastičkog procesa podrazumeva da funkcija raspodele ostaje ista bez obzira na posmatrani trenutak *t*, a kao posledicu dobijamo da se karakteristike kao što su matematičko očekivanje i varijansa stohastičkog procesa ne menjaju kako *t* menjamo. Naime ako je $F_{X_{t_1},\ldots,X_{t_k}}(x_{t_1}, \ldots, x_{t_k})$ zajednička funkcija raspodele za proces $\{X_t(w), t \geq 0,$ $w \epsilon \Omega\}$ u vremenskim trenucima $X_{t_1}, \ldots, X_{t_k}$, tada se za proces $\{\ X_t(w), t \geq 0,\ w\ \epsilon\ \Omega\ \}$ kaže da je ***stacionaran u jakom smislu*** ako za $\forall k \epsilon \mathbb{N}$, $\forall t = 1,2, \ldots,$ $\forall \tau$ i $\forall t_1, \ldots, t_k$ važi:

$$F_{X_{t_1},\ldots,X_{t_k}}\left(x_{t_1}, \ldots, x_{t_k}\right) = F_{X_{t_1+\tau},\ldots,X_{t_k+\tau}}(x_{t_1}, \ldots, x_{t_k})$$

Kod ***stacionarnosti u slabom smislu*** tražimo da momenti prvog i drugog reda ne variraju u odnosu na vreme, odnosno za proces $\{X(t), t \geq 0\}$ mora da važi:

$$\underbrace{E\big(X(t)\big) = m_x(t)}_{moment\ \ prvog\ \ reda} = m_x(t + \tau), \ \ \forall\ \tau\ \epsilon\ \mathcal{R}$$

$$\underbrace{E\big(X(t_1)X(t_2)\big) = R_x(t_1, t_2)}_{moment\ \ drugog\ \ reda} = R_x(t_1 + \tau, t_2 + \tau), \quad \forall \tau\ \epsilon\ \mathcal{R}$$

Najjednostavniji primer *AR(p)* procesa je *AR(1):*

$$X_t = c + \varphi X_{t-1} + \varepsilon_t, \qquad t = 1,2,..$$

gde je $E(\varepsilon_t) = 0$ i $var(\varepsilon_t) = \sigma^2$,a vrlo česta je pretpostavka da je $E(X_t) = \mu,\;\; t = 1,2,3, \dots$, tj. da postoji stacionarnost u slabom smilsu.

Lako se dobija čemu su jednaki μ i $var(X_t)$:

$$\underbrace{E(\,X_t\,)}_{\mu} = c + \varphi\,\underbrace{E(\,X_{t-1}\,)}_{\mu} + \underbrace{E(\,\varepsilon_t\,)}_{0} \;\Rightarrow\; \mu = c + \varphi\mu \;\Rightarrow\; \mu = \frac{c}{1-\varphi}$$

Na sličan način se pokazuje da je

$$var(\,X_t\,) = E\left(\,{X_t}^2\,\right) - \mu^2 = \frac{\sigma^2}{1-\varphi^2}$$

3.3 Heteroskedastičnost

U prethodnoj glavi, treća standardna pretposatvka koja je važila za grešku prilikom linearne regresije ($\varepsilon_i\,,\; i = 1, \dots, n$) je glasila:

$$var(\varepsilon_i) = \sigma^2,\;\; i = 1, \dots, n$$

i ovu osobinu nazivamo ***homoskedastičnost***. Ona nam jednostavno kaže da je varijansa grešaka koje su naravno slučajne promenljive, uvek ista.

Kada ovu pretpostavku narušimo, dobijamo ***heteroskedastičnost*** koju možemo na sledeći način prikazati:

$$var(\varepsilon_i) = {\sigma_i}^2,\;\; i = 1, \dots, n$$

Volatilnost na neki način možemo da posmatramo i kao moment drugog reda vremenskih serija. Opisuje dinamiku promene vrednosti u određenom vremenskom periodu. Jedno od empirijski utvrđenih svojstava vremenskih serija finansijskog tržišta je promenljiva volatilnost u vremenu, koja upravo pretstavljaheteroskedastičnost procesa. Također, empirijski je utvrđeno da se volatilnost vremenske serije često grupiše u vremenu, odnosno da nakon malih vrednosti volatilnosti tržišta često slede male, a nakon velikih vrednosti volatilnosti često slede velike promene. Naravno, ovo ne mora biti slučaj na svakom tržištu, ali na većini tržišta je utvrđeno da ovaj zakon važi.

Sada smo definisali dovoljno pojmova da bismo mogli da predstavimo *ARCH(q)* model.

3.4 *ARCH(q)* model

Autoregresivni uslovno heteroskedastični model *(ARCH)* prvi je predstavio profesor Robert F. Engle, koji na eksplicitan način prikazuje vremenski promenljivu uslovnu varijansu (disperziju). Model uslovnu varijansu pretstavljakao linearnu kombinaciju grešaka $\varepsilon_t,\ t = 1,2 \ldots$ iz prošlosti:

$$y_t = \mu_t + \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\mu_t = \mu$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i\ a_{t-i}^2$$

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim N\ (0,1),\ \ i.i.d.$$

gde je y_t – prinos u trenutku t, dok je ε_t – greška koja se pravi prilikom linearne regresije.

Ovakav model ima brojne karakteristike koja ga čine vrlo atraktivnim u ekonometrijskim primenama. Naime, u ekonometrijskim istaživanjima je utvrđeno da perdviđanje nekih događaja u budućnosti zavisi i varira u odnosu na neki pethodni period. Takođe je utvrđeno da se male i velike greške grupišu u nekim dodirnim vremenskim periodima (*eng. clustering*). Sve ovo ukazuje na veliku korisnost *ARCH* modela jer se prognozirana varijansa može menjati vremenom, a i predviđanje je zasnovano na greškama iz ranijih vremenskim periodima.
Dalje , postoji velika primena *ARCH* modela i u monetarnoj teoriji i teoriji finansija. Po najjednostavnijoj pretpostavci , portfolio finansijskih sredstava se može posmatrati kao funkcija matematičkog očekivanja i varijanse prinosa. Svaka promena tražnje na tržištu se odražava i na očekivanje i varijansu prinosa. Ako se očekivanje procenjuje na osnovu standardne linearne regresije ili nekog od modela vremenskih serija , za varijansu uzimamo da je konstantna u vremenu što pretstavljaveliko ograničenje, te se opet *ARCH* uzima kao mnogo bolji model.

Sada ćemo nešto više reći o $\{a_t,\ \ t = 1,2 \ldots\}$ koji možemo pomatrati i kao diskretan stohastički proces sa uslovnim matematičkim očekivanjem i varijansom.
Neka $E_{t-1}[\cdot]$ uslovno očekivanje gde je dostupan skup informacija do trenutka $t-1\ \ \mathcal{F}_{t-1}$, tj.

$$E_{t-1}[\cdot] = E[\cdot\ |\mathcal{F}_{t-1}]$$

Analogno definišemo i za varijansu:

$$var_{t-1}[\cdot] = var[\cdot\ |\mathcal{F}_{t-1}]$$

Definicaija 3 : Za proces $\{a_t,\ t = 1,2,..\}$ kažemo da prati ARCH model ako važi :

$$E_{t-1}[a_t] = 0,\ \ t = 1,2,... \qquad (1)$$

i uslovna varijansa :

$$\sigma_t^2 \equiv var_{t-1}[a_t] = E_{t-1}[{a_t}^2],\ \ t = 1,2,... \qquad (2)$$

zavise od $\sigma -$ algebre koja je generisana informacijama iz prošlosti: $\{\varepsilon_{t-1},, \varepsilon_{t-2}, ...\}$.
Dalje, $\{y_t,\ t = 1,2,..\}$ pretstavljastohastički proces prinosa sa sledećim matematičkim očekivanjem:

$$\mu_t \equiv E_{t-1}(\, y_t \,), \qquad t = 1,2,..$$

Ovde podrazumevamo da je i μ_t i ${\sigma_t}^2$ merljivo u odnosu na trenutak $t - 1$. Preko $\{y_t,\ t = 1,2,..\}$ možemo $\{a_t,\ t = 1,2,..\}$ definisati na sledeći način :

$$a_t \equiv y_t - \mu_t$$

Na osnovu (1) i (2) dobijamo da proces

$$\varepsilon_t = \frac{a_t}{\sigma_t}$$

ima uslovno očekivanje nula ($E_{t-1}[\varepsilon_t] = 0$) dok je varijansa, koja se ne menja s vremenom, jednaka jedan, tj. smatramo da je $\varepsilon_t \sim N\,(0,1),\ \ i.i.d$.

Takođe, ${a_t}^2$ možemo da posmatramo kao i nepristrasan ocenjivač za σ_t^2 , pod pretpostavkom da su ε_t i σ_t međusobno nezavisne :

$$E({a_t}^2) = \underbrace{E(\varepsilon_t^2)}_{var\,(\varepsilon_t)=1}\ E(\sigma_t^2) = E(\sigma_t^2) = \sigma_t^2$$

(ovde smo gledali “obično” matematičko očekivanje).

Kao što smo rekli, bitna odlika ovih vremenskih serija jeste pojava leptokurtičnosti, što se u ovom slučaju lako pokazuje. Naime, ako je uslovna raspodela za $\varepsilon_t,\ t = 1,2,...$ vremenski nepromenljiva sa konačnim četvrtim momentom, tada je četvrti momenat za a_t

$$E(a_t^4) = E(\varepsilon_t^4)\, E(\sigma_t^4) \geq E(\varepsilon_t^4)\ \underbrace{E(\sigma_t^2)^2}_{E(a_t^2)^2} = E(\varepsilon_t^4)\, E(a_t^2)^2$$

tj. važi

$$E(a_t^4) \geq E(\varepsilon_t^4)\, E(a_t^2)^2$$

na osnovu Jensen – ove nejednakosti[1]. Nejednakost je tačna ako je uslovna varijansa konstantna. Naime, ako je $\varepsilon_t \sim N\ (0{,}1)$, onda je $E(\varepsilon_t^4) = 3$, pa je (bezuslovna) raspodela za a_t leptokurtična (*eng. leptokurtic*):

$$E(a_t^4) \geq 3\ E(a_t^2)^2$$

$$\frac{E(a_t^4)}{E(a_t^2)^2} = \frac{E(a_t^4)}{\sigma_t^2} = K \geq 3$$

a kao što smo već spomenuli, ovo jeste uslov koji kaže da je raspodela leptokurtična (str. 10).

Koeficijen spljošenosti K , se može izraziti kao funkcija uslovne varijanse. Naime, ako je $a_t|\mathcal{F}_{t-1} \sim N\ (\ 0, {\sigma_t}^2)$, tada je

$$\frac{E_{t-1}(a_t^4)}{E_{t-1}(a_t^2)^2} = 3 \Rightarrow E_{t-1}(a_t^4) = 3\ E_{t-1}(a_t^2)^2$$

Sada, na osnovu osobine koja važi za uslovne slučajne promenljive $E(X) = E\big(E(X|\mathcal{F}_{t-1})\big) = E(E_{t-1}(X))$, je

$$E(a_t^4) = 3\ E\ (E_{t-1}(a_t^2)^2) \geq 3\ [E\ (E_{t-1}(a_t^2))]^2 = 3\ E(a_t^2)^2$$

Dalje je:

$$E(a_t^4) - 3\ E(a_t^2)^2 = 3\ E\ (E_{t-1}(a_t^2)^2) - 3\ [E\ (E_{t-1}(a_t^2))]^2$$

$$E(a_t^4) = 3\ E(a_t^2)^2 + 3\ E\ (E_{t-1}(a_t^2)^2) - 3\ [E\ (E_{t-1}(a_t^2))]^2$$

Koeficijent spljoštenosti K računamo po formuli :

$$K = \frac{E(a_t^4)}{E(a_t^2)^2} = 3 + 3\ \frac{E\ (E_{t-1}(a_t^2)^2) - \ [E\ (E_{t-1}(a_t^2))]^2}{E(a_t^2)^2} = 3 + 3\ \frac{var(E_{t-1}(a_t^2))}{E(a_t^2)^2}$$
$$= \quad 3 + 3\frac{var(\sigma_t^2)}{E(a_t^2)^2}$$

Poslednji izraz može biti jako koristan za izračunavanje K kada su nam na raspolaganju vrednosti varijanse i disperzije.

[1] Jensen – ova nejednakost :
$E(g(x)) \leq g(E(x))$, ako je $g(\cdot)$ konkavna funkcija tj.
$E(g(x)) \geq g(E(x))$, ako je $g(\cdot)$ konveksna funkcija

Druga bitna osobine *ARCH* procesa je uslovna nekorelisanost. Na osnovu zakona o iterativnim očekivanjima[2], sledi:

$$E_{t-1}(a_t) = 0 \Rightarrow E_{t-h}(E_{t-1}(a_t)) = E_{t-h}(0) = 0$$

Iz ove osobine dobijamo da je proces $\{a_t,\ t = 1,2..\}$ uslovno nekorelacijski:

$$Cov_{t-h}(a_t, a_{t+k}) = E_{t-h}(a_t a_{t+k}) - E_{t-h}(a_t)\, E_{t-h}(a_{t+k}) = E_{t-h}(a_t a_{t+k})$$
$$= E_{t-h}(E_{t+k-1}(a_t a_{t+k})) = E_{t-h}\left(a_t \underbrace{E_{t+k-1}(a_{t+k})}_{0}\right) = 0$$

U nastavku ćemo definisati *simetričnost* i *regularnost* ARCH procesa.

Neka je $\xi_t \in R^q$ vektor iz prostora uzoraka Ξ čiji su elementi $\xi_t{}' = (\xi_{t-1}, \dots, \xi_{t-q})$. Za svako ξ_t, neka je $\xi_t{}^*$ takav vektor koji ima sve iste komponente kao ξ_t, osim m -te komponente koja je dobijena tako što je m -ta komponenta ξ_t pomnožena sa -1 gde $m = 1, \dots, q$

Definicija 4 **:** *ARCH (q)* proces je ***simetričan*** ako važi:

a) $\sigma^2(\xi_t) = \sigma^2(\xi_t{}^*)$, za svako $m = 1, \dots, q$ i $\xi_t \in \Xi$

b) $\frac{\partial\, \sigma^2(\xi_t)}{\partial\, \alpha_i} = \frac{\partial\, \sigma^2(\xi_t{}^*)}{\partial\, \alpha_i}$, za svako $m = 1, \dots, q$, $i = 1, \dots, q$ i $\xi_t \in \Xi$

c) $\frac{\partial\, \sigma^2(\xi_t)}{\partial\, \xi_{t-m}} = -\frac{\partial\, \sigma^2(\xi_t{}^*)}{\partial\, \xi_{t-m}}$, za svako $m = 1, \dots, q$ i $\xi_t \in \Xi$

Definicija 5 : *ARCH (q)* proces je ***regularan*** ako :

a) $\min(\sigma^2(\xi_t)) > \delta$, za neko $\delta > 0$ i $\xi_t \in \Xi$

b) $E\left(\left|\frac{\partial\, \sigma^2(\xi_t)}{\partial\, \alpha_i}\right| \left|\frac{\partial\, \sigma^2(\xi_t)}{\partial\, \xi_{t-m}}\right| \,\Big|\, \mathcal{F}_{t-m-1} \right)$ postoji za svako $m = 1, \dots, q$, $i = 1, \dots, q$ i $\xi_t \in \Xi$

Prvi uslov za regularnost je veoma važan i lako se proverava i zahteva da varijansa uvek bude pozitivna. Drugi uslov je u nekim slučajevima teško proveriti , ali bi trebao da važi ako je proces stacionaran sa ograničenim izvodima, jer ako bezuslovno očekivanje postoji ,onda postoji i uslovno.
Sledeća teorema nam daje potreban uslov regularnosti *ARCH (q)* procesa.

[2] Iterativna očekivanja - osobina uslovnog očekivanja kod vremenskih serija: $E_t(X) = E_t(E_{t+1}(X))$

Teorema 1 (na osnovu rada Engle [3]) :

ARCH (q) proces zadovoljava uslove regularnosti (definisane u **Definiciji 2**) ako je $\alpha_0 > 0$ i $\alpha_1, \dots, \alpha_q \geq 0$.

Dokaz : Pod pretpostavkom da je $\sigma^2 (\xi_t) \geq \alpha_0 > 0$, dobijamo uslov pod a).
Neka je dalje

$$\phi_{i,m,t} = E \left(\left| \frac{\partial \, \sigma^2(\xi_t)}{\partial \, \alpha_i} \right| \left| \frac{\partial \, \sigma^2(\xi_t)}{\partial \, \xi_{t-m}} \right| \, \middle| \, \mathcal{F}_{t-m-1} \right) = 2 \, \alpha_m \, E \left(|\xi_{t-i}|^2 |\xi_{t-m}| \, |\mathcal{F}_{t-m-1} \right)$$

Sada posmatramo tri slučaja : $i > m$, $i = m$ i $i < m$.
Ako je $i > m$, tada $\xi_{t-i} \in \mathcal{F}_{t-m-1}$ i uslovno očekivanje od $|\xi_{t-m}|$ je konačno jer je uslovna gustina normalna.
Ako je $i = m$, onda očekivanje postaje $E \left(|\xi_{t-m}|^3 \, |\mathcal{F}_{t-m-1} \right)$. Ponovo, pošto je uslovna gustina $\{\xi_t, \; t = 1,2,..\}$ normalna, svi momenti postoje uključujući i dato očekivanje.
Ako je $i < m$, razlažemo očekivanje na dva dela, u odnosu na period $t - i - 1$:

$$\begin{aligned} \phi_{i,m,t} &= 2 \, \alpha_m \, E \left(|\xi_{t-m}| \, E\left({\xi_{t-i}}^2 \middle| \mathcal{F}_{t-i-1} \right) |\mathcal{F}_{t-m-1} \right) \\ &= 2 \, \alpha_m \, E \left(|\xi_{t-m}| \, \left(\alpha_0 + \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \, {\xi_{t-i-j}}^2 \right) \right) |\mathcal{F}_{t-m-1})) \\ &= 2 \, \alpha_m \; \alpha_0 \; E \left(\xi_{t-m} \, |\mathcal{F}_{t-m-1} \right) + \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \, \phi_{i+j,m,t} \end{aligned}$$

U poslednjem redu gornje jednakosti početni indeks za ϕ je veći od polaznog ($i + 1 > i$) te stoga početni obuhvata prošli period , što ukazuje na postojanje željenog očekivanja. Ako preostanu sabirci gde je $i + j < m$, rekurzija može da se ponovi. Kako su svi lag – operatori $(\alpha_j, \; j = 1, \dots, q)$ konačni (na osnovu pretpostavke), možemo $\phi_{i,m,t}$ zapisati kao zbir apsolutnog momenta trećeg reda od ξ_{t-m} u odnosu na $\mathcal{F}_{t-m-1}$ i apsolutnog momenta prvog reda. Kako opet imamo normalnu gustinu, oba momenta postoje, na osnovu čega sledi uslov regularnosti prikazan u b).

□

U nastavku je prikazana uopštenija varijanta ovog modela – *GARCH.*

3.5 *GARCH (p,q)*

Godine 1986 , Bollerslev i Taylor su nezavisno jedan od drugog uopštili Engle – ov model da bi ga napravili više realinim . Ova generalizacija *ARCH* modela se naziva *GARCH* (*Generalised AutoRegressive Conditional Heteroskedastic models*) i on izgleda:

$$y_t = \mu_t + \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\mu_t = \mu$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \; a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \, \sigma_{t-j}^2$$

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim N\,(0,1), \;\; i.i.d.$$

gde je $\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0 \, , \beta_j \geq 0, \; i = 1, \dots, p; \;\; j = 1, \dots, q$.

Osnovna ideja je da uslovna varijansa od a_t, σ_t^2 , ima autoregresivnu strukturu i da bude pozitivno korelisana sa prošlim vrednostima . *GARCH* model ima više fleksibilnu parametarsku strukturu nego A*RCH*. Dok za *ARCH* zahtevamo dosta veliko *q* (broj sabiraka u *ARCH* modelu) da bi model bio što precizniji i bolji, u praksi se često pokazuje da je dovoljan *GARCH (1,1)* da bi se opisao veliki broj finansijskih serija na prilično tačan način. Kao što vidimo, volatilnost ovde opisujemo preko grešaka koje smo pravili u prošlosti (kao i kod *ARCH* – a) ali i preko prošlih varijansi , što i pretstavljageneralizaciju *ARCH* – a.
GARCH model pripada klasi determinističkih uslovnih heteroskedastičnih modela u kojima je uslovna varijansa funkcija promenljivih koje su dostupne u trenutku *t.*

GARCH (1,1) je najpopularniji model koji ima i najveću primenu:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \, a_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

On se može napisati i u drugačijem obliku koji je nekada lakši za primenu:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 [1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{k} (\alpha_1 \, \varepsilon_{t-i}^2 + \beta_1)]$$

što se lako i pokazuje:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \underbrace{a_{t-1}^2}_{\varepsilon_{t-1}{}^2\sigma_{t-1}{}^2} + \beta_1\sigma_{t-1}^2 = \alpha_0 + \sigma_{t-1}^2(\alpha_1\,\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1)$$

$$\sigma_{t-1}^2 = \alpha_0 + \sigma_{t-2}^2(\alpha_1\,\varepsilon_{t-2}^2 + \beta_1)$$

pa kada poslednju jednakost ubacimo u prethodnu i nastavimo tako dalje i za $\sigma_{t-2}^2, \sigma_{t-3}^2, ...$ dobijamo:

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 = \alpha_0 + [\alpha_0 + \sigma_{t-2}^2(\alpha_1\,\varepsilon_{t-2}^2 + \beta_1)](\alpha_1\,\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1) \\ = \alpha_0 + \alpha_0(\alpha_1\,\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1) + \sigma_{t-2}^2(\alpha_1\,\varepsilon_{t-2}^2 + \beta_1)(\alpha_1\,\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1) \\ = \alpha_0 + \alpha_0(\alpha_1\,\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1) + \alpha_0(\alpha_1\,\varepsilon_{t-2}^2 + \beta_1)(\alpha_1\,\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1) \\ + \sigma_{t-3}^2(\alpha_1\,\varepsilon_{t-3}^2 + \beta_1)(\alpha_1\,\varepsilon_{t-2}^2 + \beta_1)(\alpha_1\,\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1) = \cdots \\ = \alpha_0\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{k}(\alpha_1\,\varepsilon_{t-i}^2 + \beta_1)\right] \qquad (3)\end{aligned}$$

Još jedna vrlo bitna karakteristika *GARCH* procesa jeste stacionarnost. U nastavku dajemo dve propoziciji za slabu i jaku stacionarnost, redom, od kojih ćemo prvu i pokazati uz pomoć rada Posedel [6].

Propozicija 1:

Za proces $\{a_t,\ t = 1,2,..\}$ koji zadovoljava *GARCH (p,q)* model sa nenegativnim koeficijentima $\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, \beta_j \geq 0,\ i = 1, ..., p;\ j = 1, ..., q$ kažemo da je slabo (kovarijansno) stacionaran ako i samo ako važi:

$$\sum_{i=1}^{p}\alpha_i + \sum_{j=1}^{q}\beta_j < 1$$

Dokaz: Prvo $a_t = \sigma_t\varepsilon_t$ (4) uvrstimo u izraz za σ_t^2 : $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{q}\alpha_j\ a_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^{p}\beta_i\,\sigma_{t-i}^2$ pa dobijamo sledeće:

$$\begin{aligned}
\sigma_t^2 = {} & \alpha_0 + \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \ \sigma_{t-j}{}^2 \varepsilon_{t-j}{}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \, \sigma_{t-i}^2 \\
& = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \ \varepsilon_{t-j}{}^2 \left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_j \ \sigma_{t-i-j}{}^2 \varepsilon_{t-j-i}{}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \, \sigma_{t-j-i}^2 \right) \\
& + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_j \ \sigma_{t-i-j}{}^2 \varepsilon_{t-j-i}{}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \, \sigma_{t-j-i}^2 \right) = \cdots \\
& = \alpha_0 \sum_{k=0}^{\infty} M\,(\,t, k\,)
\end{aligned}$$

gde $M\,(\,t, k\,)$ sadrži sve izraze oblika:

$$\prod_{i=1}^{q} \alpha_i^{a_i} \prod_{j=1}^{p} \beta_j^{b_j} \prod_{l=1}^{n} \eta_l^2 - S_l$$

gde je

$$\sum_{i=1}^{q} a_i + \sum_{j=1}^{p} b_j = k, \sum_{i=1}^{q} a_i = n \qquad (\,5\,)$$

dok je S_l niz brojeva takav da je : $1 \le l \le n$

$1 \le S_1 < S_2 \ldots < S_n < \max(\,kq\,, (\,k-1\,)\,q + p\,).$

Sledi da je

$$M\,(\,t, 0\,) = 1$$

$$M\,(\,t, 1\,) = \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \ \varepsilon_{t-j}{}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i$$

$$M\,(\,t, 1\,) = \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \ \varepsilon_{t-j}{}^2 \left(\sum_{j=1}^{q} \alpha_j \ \varepsilon_{t-i-j}{}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \right) + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \left(\sum_{j=1}^{q} \alpha_j \ \varepsilon_{t-i-j}{}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \right)$$

$$\vdots$$

$$M\,(\,t,k+1\,) = \sum_{j=1}^{q} \alpha_j\ \ {\varepsilon_{t-j}}^2\, M\,(\,t-j,k\,) + \sum_{i=1}^{p} \beta_i\ M(\,t-i\,,k\,) \qquad (\,6\,)$$

Pošto za ε_t , $t = 1,2,..$ važi da su $i.i.d$, momenti od $M\,(\,t,k\,)$ ne zavise od t pa važi

$$E\,(\,M\,(\,t,k\,)\,) = E\,(\,M\,(\,s,k\,)\,)\,, \qquad \forall\ k,s\,,t \in N$$

Na osnovu poslednje dve jednakosti dobijamo

$$\begin{aligned} E\,(\,M\,(\,t,k+1\,)\,) &= \left(\sum_{j=1}^{q}\alpha_j + \sum_{i=1}^{p}\beta_i\right) E\,(\,M\,(\,t,k\,)\,) = \cdots \\ &= \left(\sum_{j=1}^{q}\alpha_j + \sum_{i=1}^{p}\beta_i\right)^{k+1} E\left(\underbrace{M\,(\,t,0)}_{1}\right) = \left(\sum_{j=1}^{q}\alpha_j + \sum_{i=1}^{p}\beta_i\right)^{k+1} \end{aligned}$$

Na osnovu (4), (5), (6) sledi

$$E(\,a_t^2\,) = \alpha_0 + E\left(\sum_{k=0}^{\infty} M\,(\,t,k\,)\right) = \alpha_0 + \sum_{k=0}^{\infty} E\,(\,M\,(\,t,k\,)\,)\,.$$

Geometrijski red

$$\sum_{k=0}^{\infty} E\,(\,M\,(\,t,k\,)\,)$$

gde je

$$E\,(\,M\,(\,t,k\,)\,) = \left(\sum_{j=1}^{q}\alpha_j + \sum_{i=1}^{p}\beta_i\right)^{k}$$

konvergira ako i samo ako važi

$$\sum_{j=1}^{q}\alpha_j + \sum_{i=1}^{p}\beta_i < 1$$

U našem slučaju je

$$E(\, a_t^2 \,) = \frac{\alpha_0}{1 - \left(\sum_{j=1}^{q} \alpha_j + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \right)}$$

što pokazuje da se postojanje slabe stacionarnosti identifikuje sa slučajem da je

$$\sum_{j=1}^{q} \alpha_j + \sum_{i=1}^{p} \beta_i < 1$$

□

<u>*Propozicija 2 :*</u>

Procesi $\{a_t,\ t = 1,2,..\}$ i $\{\sigma_t{}^2,\ t = 1,2,..\}$ su strogo stacionarni ako i samo ako je

$$E\ (\ \ln(\alpha_1\ \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1\ )\ ) < 0$$

Naime, na osnovu Jensen – ove jednakosti važi:

$$E\ (\ \ln(\alpha_1\ \varepsilon_t^2 + \beta_1\ )\ ) \le \ln\left(E(\alpha_1\ \varepsilon_t^2 + \beta_1) \right) = \ln(\alpha_1 + \beta_1)$$

Kada je $\alpha_1 + \beta_1 = 1,$ model je striktno stacionaran.

Slično, za *ARCH (q)* proces kažemo da je kovarijansno stacionaran ako i samo ako je suma pozitivnih parametara manja od 1, dok je striktno stacionaran ako mu je suma parametara strogo manja od 1.
Primera radi, ako posmatramo *ARCH (1)* gde je $\alpha_0 = 0,\ \alpha_1 = 1\ i\ \ \sigma_t^2 = 1$ dobijamo

$$E\ (\ln(\varepsilon_t^2\ )\ ) \le \ln(\ E\ (\ \varepsilon_t^2\ )) = \ln(\ 1\ ) = 0$$

pa vidimo da je proces striktno stacionaran, ali ne i kovarijansno.

Sada ćemo se malo detaljnije pozabaviti striktnom stacionarnošću. Naime, iz načina na koji je definisan *GARCH* proces, vidimo da je dovoljno posmatrati stacionarnost procesa $\{\sigma_t{}^2,\ t = 1,2,..\}$ i pošto smo rekli da pretstavlja dosta dobar model i za *GARCH* modele višeg reda, analiziramo *GARCH (1,1).* Sledeća teorema nam daje osnovni rezultat za stohastičke diferencijalne jednačine koji ćemo koristiti da bismo pokazali stacionarnost procesa $\{\sigma_t{}^2,\ t = 1,2,..\}$.

Teorema 2:

Neka je $\{Y_t,\ t = 1,2,..\}$ stohastički proces definisan na sledeći način:

$$Y_t = A_t + B_t\ Y_{t-1}\ ,\ \ t = 1,2,...$$

ili eksplicitno

$$Y_t = Y_0 \prod_{j=1}^{t} B_j + \sum_{m=1}^{t} A_m \prod_{j=m+1}^{t} B_j$$

i neka je Y_0 nezavisno od niza $\{\ (A_t, B_t),\ t \geq 0\ \}$. Pretpostavimo da važi sledeće:

$$E\ (\ \ln(\ |A|\ )\ ) < +\infty$$

i

$$-\infty \leq E\ (\ \ln(\ |B|\ )\ ) < 0$$

Tada :

a) $Y_t \xrightarrow{p} Y$, gde je Y slučajna promenljiva koja zadovoljava sledeći identitet:
b)

$$Y = A + B\ Y \qquad (\ 5\ )$$

$(\ Y\ i\ (\ A, B\ )$ su nezavisni)
c) Jednakost (5) ima jedinstveno rešenje sledećeg oblika:

$$Y = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \prod_{j=1}^{m-1} B_j \quad (\ 6\ )$$

koje je absolutno konvergentno sa verovatnoćom jedan.
d) Ako stavimo $Y_0 = Y$ u (6) onda je proces $\{Y_t,\ t = 1,2,..\}$ stiktno stacionaran.

Ako pretpostavimo uslove za momente:

$$E(\ |A|^{\ p}) < +\infty\ \ i\ \ E(\ |B|^{\ p}\ ) < 1\ \ ,\qquad p \geq 1$$

tada:

e) $E(\,|Y|^{\,p}\,) < +\infty$ i još važi $E(\,|Y|\,) < +\infty$
f) Ako je $E(\,|Y_0|^{\,p}\,) < +\infty$ onda je

$$E(\,|Y_t|^{\,p}\,) \xrightarrow{p} E(\,|Y|^{\,p}\,),\ \ t \to \infty$$

g) Momenti $E(\,Y^m\,)$ su jedinstveno određeni sledećim jednačinama:

$$E(\,Y^m\,) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} E(\,B^k A^{m-k}) E(\,Y^k\,), \qquad m = 1,2,\dots,\lfloor p \rfloor$$

gde je $\lfloor p \rfloor$ *floor* – funkcija.

Sledećom teoremom pokazujemo stacionarnost procesa sa uslovnom varijansom : $\{\sigma_t{}^2,\ t = 1,2,..\}$.

<u>Teorema 3:</u>

Neka je *GARCH (1,1)* proces definisan na uobičajeni način.
Pretpostavimo sledeće:

$$E\ [\ln(\,\alpha_1\varepsilon_0^2 + \beta_1)] < 0$$

i neka je σ_0^2 nezavisno od procesa $\{\varepsilon_t,\ t = 1,2,..\}$.
Tada važi:

a) Proces $\{\sigma_t{}^2,\ t = 1,2,..\}$ je striktno stacionaran ako

$$\sigma_0{}^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_0 \prod_{j=1}^{m-1} (\,\alpha_1\varepsilon_{j-1}^2 + \beta_1) \quad (7)$$

i konvergira apsolutno sa verovatnoćom jedan.
b) Pretposatvimo da je proces $\{\sigma_t{}^2,\ t = 1,2,..\}$ striktno satcionaran i da je $\sigma_0{}^2 = \sigma$ i $\varepsilon_0 = \varepsilon$. Neka je dalje $E\ (\alpha_1\varepsilon_0^2 + \beta_1)^p < 1,\ p \geq 1$.
Tada je $E\ (\sigma^2)^m < \infty,\ \ 1 \leq m \leq \lfloor p \rfloor$. Takođe za m koje je ceo broj važi sledeće:

$$E\ (\,\sigma^{2m}\,) = (1 - E\ (\alpha_1\varepsilon^2 + \beta_1)^m)^{-1} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} E(\,\alpha_1\varepsilon^2 + \beta_1)^k\, \alpha_0^{m-k}\ x\ E\ (\,\sigma^{2k}\,) < \infty$$

<u>Dokaz:</u> *GARCH (1,1)* po standardnoj definiciji je :

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1\sigma_{t-1}^2$$

pa iz

$$a_{t-1}^2 = \sigma_{t-1}^2 \, {\varepsilon_{t-1}}^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \left(\alpha_1 {\varepsilon_{t-1}}^2 + \beta_1 \right) \sigma_{t-1}^2$$

što ako uzmemo da je $Y_t = \sigma_t^2$, $A_t = \alpha_0$, $B_t = \alpha_1 {\varepsilon_{t-1}}^2 + \beta_1$, dobijamo diferencijalnu jednačinu iz prethodne teoreme:

$$Y_t = A_t + B_t \, Y_{t-1} , \; t = 1,2,\ldots$$

Na osnovu pretpostavke , znamo da je

$$E\,(\ln(|A|)) < +\infty$$

$$E\,(\ln(|B|)) = E(\ln(\alpha_1 {\varepsilon_{t-1}}^2 + \beta_1)) < 0$$

pa na osnovu ***Teoreme 2*** znamo da je proces $\{{\sigma_t}^2, \; t = 1,2,..\}$ striktno stacionaran sa jedinstvenom raspodelom koja je data izrazom (7) čime smo pokazali tvrđenje pod a)
U tvrđenju pod b) smo prvo pretpostavili da je $E\,(\alpha_1 \varepsilon_0^2 + \beta_1)^p < 1, \; p \geq 1$ pa sledi da je $E\,(|B|^{\,p}) < 1$, $p \geq 1$, pa na osnovu dela f) prethodne teoreme sledi tvrđenje pod b)

□

U nastavku ćemo posmatrati neke odlike procesa $\{a_t, \; t = 1,2,..\}$. Matematičko očekivanje procesa $\{a_t, \; t = 1,2,..\}$ je jednako nula :

$$E(a_t) = E(\sigma_t \varepsilon_t) = E(E(\sigma_t \varepsilon_t \, | \mathcal{F}_{t-1})) = E(\sigma_t \, E(\varepsilon_t \, | \mathcal{F}_{t-1})) = E(\sigma_t \cdot 0) = 0$$

Na sličan način se pokazuje da a_t nije u korelaciji sa a_{t+h} , $\forall \, h > 0$

$$\begin{aligned} E(a_t \, a_{t+h}) &= E(a_t \sigma_{t+h} \varepsilon_{t+h}) = E(E_{t+h-1}(a_t \sigma_{t+h} \varepsilon_{t+h})) = E(a_t \, \sigma_{t+h} \, E_{t+h-1}(\varepsilon_{t+h})) \\ &= E(a_t \, \sigma_{t+h} \cdot 0) = 0 \end{aligned}$$

Jedna vrlo bitna odlika ovog modela jeste da je varijansa (bezuslovna) procesa $\{a_t, \; t = 1,2,..\}$ asimptotski konsatna u vremenu, tj. vremenski je nezavisna:

$$var(a_t) = var\left(\underbrace{E_{t-1}(a_t)}_{0} \right) + E\left(\underbrace{var_{t-1}(a_t)}_{\sigma_t^2} \right) = E(\sigma_t^2)$$

Primetimo još da je :

$$var(a_t) = E({a_t}^2) - \underbrace{E(a_t)^2}_{0} = E({a_t}^2)$$

odnosno dobijamo da je $E(\, {a_t}^2\,) = E(\, \sigma_t^2\,)$ (8)

Da bismo izračunali čemu je jednako $E(\, {a_t}^2\,)$, definisaćemo prvo jedan proces na sledeći način:

$$z_t = {a_t}^2 - {\sigma_t}^2 = {\sigma_t}^2\,(\,{\varepsilon_t}^2 - 1)$$

Na potpuno analogan način se pokazuje da je očekivanje od z_t nula , kao i da ne postoji serijska korelacija. Glavna poenta ovakve definicije je da z_t možemo da tretiramo kao beli šum. Odavde sada možemo izraziti ${a_t}^2$:

$$\begin{aligned} {a_t}^2 &= z_t + {\sigma_t}^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i\; a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j\, \sigma_{t-j}^2 + z_t \\ &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i\; a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j\, a_{t-j}^2 - \sum_{j=1}^{q} \beta_j z_{t-j} + z_t \end{aligned}$$

Ako uvedemo oznake $R = \max(\,p, q\,)$, $\alpha_i = 0,\ i > p$ i $\beta_i = 0,\ j > q$,onda gore napisano postaje:

$$ {a_t}^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{R} (\,\alpha_i + \beta_j\,)\, a_{t-i}^2 - \sum_{j=1}^{q} \beta_j z_{t-j} + z_t \qquad (9)$$

Sada, kad pretpostavimo da je proces $\{a_t,\ t = 1,2,..\}$ stacionaran (iz čega sledi $E(\,{a_t}^2\,) = E(\,{a_{t+h}}^2\,),\ \forall\, h > 0$) lako računamo $E(\,{a_t}^2\,)$, odnosno (bezuslovnu) varijansu σ^2 (na osnovu (8)) :

$$\begin{aligned} \sigma^2 \equiv E(\,{a_t}^2\,) &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{R} (\,\alpha_i + \beta_i\,)\, \underbrace{E(\,a_{t-i}^2\,)}_{E(\,{a_t}^2\,)} - \sum_{j=1}^{q} \beta_j\, \underbrace{E(\,z_{t-j}\,)}_{0} + \underbrace{E(\,z_t\,)}_{0} \\ &= \alpha_0 + \underbrace{E(\,{a_t}^2\,)}_{\sigma^2} \sum_{i=1}^{R} (\,\alpha_i + \beta_j\,) \end{aligned}$$

iz čega sledi:

$$\sigma^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^{R} (\,\alpha_i + \beta_i\,)}$$

Ovo može biti prikazano i na direktan i vrlo jednostavan način:

$$\sigma^2 = E({a_t}^2) = E\left(E\left(a_t^2 \mid \mathcal{F}_{t-1}\right)\right) = E\left(\sigma^2\right) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \, E(a_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \, E\left(\sigma_{t-j}^2\right)$$

$$= \alpha_0 + \sigma^2 \sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \sigma^2 \sum_{j=1}^{q} \beta_j = \alpha_0 + \sigma^2 \left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \right)}$$

Ovaj rezultat prikazuje važnost *Propozicije 1.*

Kao što smo već rekli, osnovna namena , kako *ARCH – a*, tako i *GARCH – a*, jeste procena i predviđanje volatilnosti za neki budući period.
Najbolje predviđanje za proces $\{a_t, \ t = 1,2,..\}$ nam daje $E_t\ (a_{t+h})$ koje je jednako nuli ako je $h > 0$.
Analiziraćemo jednakost (9) da bismo utvrdili šta je optimalna prognoza za ${a_t}^2$.
Neka je $h > 0$ i prisetimo se da je $E_t\ (z_{t+h}) = 0$ (ne postoji serijska korelacija). Iz (9) dobijamo:

$$E_t({a_{t+h}}^2) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{R} (\alpha_i + \beta_j)\ E_t\ (a_{t+h-i}^2) - \sum_{j=1}^{q} \beta_j\ E_t\ (z_{t+h-j}) + \underbrace{E_t\ (z_{t+h})}_{0}$$

$$= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{R} (\alpha_i + \beta_j)\ E_t\ (a_{t+h-i}^2) - \sum_{j=1}^{q} \beta_j\ E_t\left(z_{t+h-j}\right) \qquad (10)$$

Rekurzivna formula data sa (10) se koristi najviše za predviđanje volatilnosti, sa sledećim ograničenjima:

- $E_t({a_{t+h-i}}^2)$ je dato rekurzino na osnovu (10) ako je $h > i, \ i = 1, \dots, R$
- $E_t({a_{t+h-i}}^2) = a_{t+h-i}^2$ ako je $h \le i, \ i = 1, \dots, R$
- $E_t\left(z_{t+h-j}\right) = 0, \ h > j, \ j = 1, \dots, q$
- $E_t\left(z_{t+h-j}\right) = z_{t+h-j}$ ako je $h \le j, \ j = 1, \dots, q$

Ako je $h > p$, (10) postaje

$$E_t({a_{t+h}}^2) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{R} (\alpha_i + \beta_j)\ E_t\ (a_{t+h-i}^2) \qquad (11)$$

što pretstavlja diferencnu jednačinu niza $\left\{E_t(\, a_{t+h}{}^2\,)\right\}_{h=p+1}^{+\infty}$. Klasična teorija diferencnih jednačina kaže da ako su rešenja polinoma

$$p(\, z\,) = 1 - (\, \alpha_1 + \beta_1)z - \cdots - (\, \alpha_R + \beta_R)z^R$$

veća od jedan (leže van jedinične kružnice) , onda rešenje u (11) konvergira ka

$$\frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^{R}(\, \alpha_i + \beta_i\,)}$$

što smo pokazali da je (bezuslovno) očekivanje od a_t^2. Drugim rečima, kako nam se vremenski horizont predviđanja povećava, skup informacija $\mathcal{F}_t$ ima sve manji uticaj na predviđanje volatilnosti, i asimptotski gledano, gotovo da i nema nikakvog uticaja !

Jedna vrlo bitna karakteristika ovih vremenskih serija jeste pojava debelih repova , koja je odlika onih raspodela koje nemaju konačne momente. Jednostavnosti radi, posmatramo model *GARCH (1,1)* za koji smo rekli da je dosta dobar model za većinu vremenskih serija. Pretpostavimo prvo sledeće:

$$E\, (\, \alpha_1\, \varepsilon_t^2 + \beta_1)^{\frac{q}{2}} > 1 \qquad (\, 12\,)$$

za neko $q > 0$. Ovaj uslov je zadovoljen ako važi $\varepsilon_t \sim N\ (0{,}1)$, što ovde jeste slučaj.
Iz izraza:

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1\, a_t^2 + \beta_1 \sigma_t^2 = \alpha_0 + (\alpha_1\, \varepsilon_t^2 + \beta_1)\, \sigma_t^2$$

na osnovu nezavisnosti ε_t i $\mathcal{F}_t$, dobijamo:

$$E(\, \sigma_{t+1}^q\,) = E\, (\, \alpha_0 + (\alpha_1\, \varepsilon_t^2 + \beta_1)\sigma_t^2)^{\frac{q}{2}} \geq E(\, (\alpha_1\, \varepsilon_t^2 + \beta_1)\sigma_t^2)^{\frac{q}{2}} = E(\, \alpha_1\, \varepsilon_t^2 + \beta_1)^{\frac{q}{2}}\ E(\, \sigma_t^q\,)$$

Ako bi $E(\, \sigma_t^q\,)$ bilo konačno, onda bi, na osnovu stacionarnosti, sledilo da je $E(\, \sigma_t^q\,) = E(\, \sigma_{t+1}^q\,)$. Posle skraćivanja dobijamo

$$1 \geq E(\, \alpha_1\, \varepsilon_t^2 + \beta_1)^{\frac{q}{2}}$$

što je u kontradikciji sa pretpostavkom (12). Sledi da je $E(\, \sigma_t^q\,)$ beskonačno, iz čega sledi da je i $E(\, a_t^2\,)$ beskonačno, što znači da $\{a_t,\ t = 1{,}2{,}..\}$ nema sve konačne momente, što je odlika raspodela sa debelim repovima.

Da bismo videli kako ovo sve funkcioniše u praksi, potrebno nam je da ocenimo pretstavljene modele, što je prikazano u narednom poglavlju.

4. OCENJIVANJE NEPOZNATIH PARAMETARA

Postoje razni načini i mehanizmi za ocenjivanje parametara :

- Metoda momenta (distribucija poplacije ocenjje se odgovarajućim momentom uzorka)
- Metoda najmanjih kvadrata (minimizira se kvadrat razlike odstupanja stvarnih od procenjenih vrednosti)
- Metoda maksimalne verodostojnosti (metoda izbora jedne vrednosti parametara modela kao ocene parametara, ali tako da funkcija verodostojnosti ima sto je moguce vecu vrednost.)
- Metoda najboljeg linearnog nepristasnog ocenjivača (ocenjivač je linearan i ima minimalnu verijansu u odnosu na ocenjivače dobijene drugim metodama), itd.

Mi u primeru na kraju koristimo metodu maksimalne verodostjnosti tako da nju u nastavku prikazujemo.

4.1. Funkcija verodostojnosti

Procedura ocenjivanja parametara u ovim modelima se zasniva na maksimizaciji funkcije verodostojnosti pod pretpostavkom da je raspodela za $\{\varepsilon_t,\ t = 1,2,..\}$ takva da sve slučajne promenljive imaju isto očekivanje i disperziju i da su međusobno nezavisne.
Neka je $f(\,\varepsilon_t(\,\theta\,);\eta\,)$ funkcija gustine za za $\varepsilon_t \equiv \frac{a_t(\,\theta\,)}{\sigma_t\,(\,\theta\,)}$, $\varepsilon_t \sim N\ (0,1), \eta \in H \subseteq R^k$.
Neka $(y_T, y_{T-1} \dots, y_1)$ realizovani uzorak *ARCH* modela i $\psi' \equiv (\,\theta', \eta'\,) \in R^{(m+k\,)x1}$ je vektor ocenjenih parametara za procenu uslovnog očekivanja, varijanse i funkcije gustine.
Da bismo videli kako izgleda funkcija verodostojnosti za $y_t,\ t = 1,2,\dots$, moramo prvo jednu transformaciju da izvršimo :

$$f(\,y_t;\psi\,) = f(\,\varepsilon_t(\,\theta\,);\eta\,)\,|J|, \quad t = 1,2,\dots$$

gde je jakobijan dat na sledeći način

$$|J| = \frac{\partial\,\varepsilon_t}{\partial\,y_t} = \frac{1}{\sigma_t(\,\theta\,)},\ \ t = 1,2,\dots \quad (\,y_t = \mu_t + \sigma_t\varepsilon_t\,)$$

Tada logaritamska funkcija verodostojnosti, posmatrana u nekom momentu t , izgleda :

$$l_t\,(\,y_t;\psi\,) = \ln(\,f(\,y_t;\psi\,)\,) = \ln(\,f(\,\varepsilon_t(\,\theta\,);\eta\,)) - \frac{1}{2}\ln(\,\sigma_t^2\,(\,\theta\,))\,,\ \ t = 1,2,\dots$$

dok za ceo uzorak, ona izgleda

$$L_T\ (\ y_T, y_{T-1} \dots, y_1\ ;\ \psi\ ) = \sum_{t=1}^{T} l_t\ (\ y_t; \psi\ )$$

Maksimum gornje funkcije nazivamo *ocenjivač* za prave vrednosti parametara $\psi_0^{'} \equiv (\ \theta_0^{'}, \eta_0^{'}\ )$ i označavaćemo ga sa $\widehat{\psi_T}$.
Ako pretpostavimo da su uslovna gustina, $\mu_t\ (\ \theta\ )$ i $\sigma^2{}_t\ (\ \theta\ )$ diferencijabilne funkcije za sve $\psi \in \Theta \times \mathrm{H} \equiv \Psi$, ocenjivač $\widehat{\psi_T}$ je rešenje sledeće jednakosti:

$$S_T\ (\ y_T, y_{T-1} \dots, y_1\ ;\ \psi\ ) = \sum_{t=1}^{T} s_t\ (\ y_t; \psi\ ) = 0$$

gde je $s_t \equiv \frac{\partial\ l_t\ (\ y_t; \psi\ )}{\partial\ \psi}$. Gornja jednakost pretstavljaset od $m + k$ - jednačina čije se rešenje pronalazi nekim od tehnika numeričke optimizacije, dok je s_t vektor dimenzija $m + k$.

Izvodi po parametru θ su:

$$\frac{\partial\ l_t\ (\ y_t; \psi\ )}{\partial\ \theta} = f(\ \varepsilon_t(\ \theta\ ); \eta\ )^{-1}\ f^{'}(\ \varepsilon_t(\ \theta\ ); \eta\ )\ \frac{\partial\ \varepsilon_t\ (\ \theta\ )}{\partial\ \theta} - \frac{1}{2}\ (\ \sigma_t^2\ (\ \theta\ )\ )^{-1}\ \frac{\partial\ \sigma_t^2}{\partial\ \theta} \quad (\ 13\ )$$

gde je $f^{'}(\ \varepsilon_t(\ \theta\ ); \eta\ ) = \frac{\partial\ f(\ \varepsilon_t(\ \theta\ ); \eta\ )}{\partial\ \varepsilon_t}$ i

$$\frac{\partial\ \varepsilon_t\ (\ \theta\ )}{\partial\ \theta} = \frac{\partial}{\partial\ \theta}\left(\frac{a_t\ (\ \theta\ )}{\sqrt{\sigma_t^2}}\right) = \frac{-\frac{\partial\ \mu_t\ (\ \theta\ )}{\partial\ \theta}\ \sqrt{\sigma_t^2} - \frac{1}{2}\ (\ \sigma_t^2\ )^{-1/2}\ \frac{\partial\ \sigma_t^2}{\partial\ \theta}\ a_t\ (\ \theta\ )}{\sigma_t^2}$$
$$= -\frac{\partial\ \mu_t\ (\ \theta\ )}{\partial\ \theta}\ (\ \sigma_t^2\ )^{-1/2} - \frac{1}{2}\ (\ \sigma_t^2\ )^{-3/2}\ \frac{\partial\ \sigma_t^2}{\partial\ \theta}\ a_t\ (\ \theta\ )$$

gde je

$$a_t\ (\ \theta\ ) \equiv y_t - \mu_t\ (\ \theta\ )$$

S obzirom da pretpostavljamo da $\varepsilon_t \sim N\ (\ 0{,}1\ )$, tada je funkcija gustine sledeća:

$$f\ (\ \varepsilon_t\ (\ \theta\ );\ \eta\ ) = \frac{1}{\sqrt{2\ \pi}}\ e^{-\frac{\varepsilon_t{}^2\ (\ \theta\ )}{2}}$$

Normalna raspodela je jedinstveno određena sa prva dva momenta , pa zato jedino parametri za uslovno očekivnje i varijansu ulaze u funkciju verodostojnosti, tj. $\psi = \theta$ koja sada izgleda:

$$l_t = -\frac{1}{2}\ln(2\,\pi) - \frac{1}{2}\,\varepsilon_t\,(\theta)^2 - \frac{1}{2}\ln\,(\sigma_t^2) \qquad (14)$$

pa na osnovu (13) dobijamo :

$$\begin{aligned} s_t &= -\varepsilon_t\,\frac{\partial\,\varepsilon_t}{\partial\,\theta} - \frac{1}{2}\,(\sigma_t^2)^{-1}\,\frac{\partial\,\sigma_t^2\,(\theta)}{\partial\,\theta} \\ &= -\frac{a_t\,(\theta)}{\sqrt{\sigma_t^2}}\,\frac{\partial\,(a_t\,(\theta)\,(\sigma_t^2)^{-1/2})}{\partial\,\theta} - \frac{1}{2}\,(\sigma_t^2)^{-1}\,\frac{\partial\,\sigma_t^2\,(\theta)}{\partial\,\theta} \\ &= -\frac{a_t\,(\theta)}{\sqrt{\sigma_t^2}}\,\frac{\partial\,((y_t - \mu_t\,(\theta))\,(\sigma_t^2)^{-1/2})}{\partial\,\theta} - \frac{1}{2}\,(\sigma_t^2)^{-1}\,\frac{\partial\,\sigma_t^2\,(\theta)}{\partial\,\theta} \\ &= \frac{a_t\,(\theta)}{\sqrt{\sigma_t^2}}\,\frac{\partial\,\mu_t\,(\theta)}{\partial\,\theta}\,(\sigma_t^2)^{-1/2} + \frac{1}{2}\,(\sigma_t^2)^{-3/2}\,\frac{\partial\,\sigma_t^2\,(\theta)}{\partial\,\theta}\,\frac{{a_t}^2\,(\theta)}{\sqrt{\sigma_t^2}} \\ &- \frac{1}{2}\,(\sigma_t^2)^{-1}\,\frac{\partial\,\sigma_t^2\,(\theta)}{\partial\,\theta} \\ &= \frac{\partial\,\mu_t\,(\theta)}{\partial\,\theta}\,\frac{a_t\,(\theta)}{\sigma_t^2} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial\,\sigma_t^2\,(\theta)}{\partial\,\theta}\,\frac{{a_t}^2\,(\theta)}{(\sigma_t^2)^2} - \frac{1}{2}\,(\sigma_t^2)^{-1}\,\frac{\partial\,\sigma_t^2\,(\theta)}{\partial\,\theta} \end{aligned}$$

tj. važi da je :

$$s_t = \frac{\partial\,\mu_t\,(\theta)}{\partial\,\theta}\,\frac{a_t\,(\theta)}{\sigma_t^2} + \frac{1}{2}\,(\sigma_t^2)^{-1}\,\frac{\partial\,\sigma_t^2\,(\theta)}{\partial\,\theta}\left[\frac{{a_t}^2\,(\theta)}{\sigma_t^2} - 1\right]$$

Ako stavimo $\theta = (\alpha', \beta')'$ gde nam je α vektor parametara za uslovno očekivanje, a β vektor za uslovnu varijansu, tada naš vektor s_t ima sledeći oblik:

$$s_t = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\,l_t}{\partial\,\alpha} \\ \dfrac{\partial\,l_t}{\partial\,\beta} \end{bmatrix}$$

gde je

$$\frac{\partial\,l_t}{\partial\,\alpha} = \frac{\partial\,\mu_t\,(\alpha)}{\partial\,\alpha}\,\frac{a_t\,(\alpha)}{\sigma_t^2\,(\beta)}$$

$$\frac{\partial\, l_t}{\partial\, \beta} = \frac{1}{2}\,(\,\sigma_t^2\,(\,\beta\,))^{-1}\,\frac{\partial\, \sigma_t^2\,(\,\beta\,)}{\partial\, \beta}\left[\frac{{a_t}^2\,(\,\alpha\,)}{\sigma_t^2\,(\,\beta\,)} - 1\right]$$

Weiss (1986) je pokazao da su ocenjivači za $\alpha\ \ i\ \beta$ dobijeni na ovaj način konzistentni i asimptotski normalni , pod uslovom da normalizovani proces $\{\varepsilon_t,\ t = 1,2,..\}$ ima konačan četvrti momenat.

Mnogo nam je interesantnije da posmatramo izvode po β jer oni predstavljaju parametre za uslovnu varijansu preko koje i analiziramo volatilnost. S obzirom da je β vektor parametara, poslednji izraz nam pretstavljagradijent funkcije l_t.

Hesijan funkcije , koji ćemo označavati sa $\frac{\partial^2\, l_t}{\partial\, \beta\, \partial\, \beta'}$, je dat na sledeći način:

$$\frac{\partial^2\, l_t}{\partial\, \beta\, \partial\, \beta'} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{(\,\sigma_t^2\,(\,\beta\,))^2}\,\frac{\partial\, \sigma_t^2\,(\,\beta\,)}{\partial\, \beta}\,\frac{\partial\, \sigma_t^2\,(\,\beta\,)}{\partial\, \beta'}\left(\frac{{a_t}^2\,(\,\alpha\,)}{\sigma_t^2\,(\,\beta\,)}\right) + \left[\frac{{a_t}^2\,(\,\alpha\,)}{\sigma_t^2\,(\,\beta\,)} - 1\right]\frac{\partial}{\partial\, \beta'}\left[\frac{1}{2\sigma_t^2\,(\,\beta\,)}\ \frac{\partial\, \sigma_t^2\,(\,\beta\,)}{\partial\, \beta}\right]$$

Novi pojam koji uvodimo, ***matrica informacija***, definišemo preko hesijana. Naime, matricu informacija definišemo kao negativno očekivanje hesijana gledano po svim vremenskim periodima pa dobijamo sledeće:

$$I_{\beta\beta} = \sum_t \frac{1}{2\,T}\,E\left[\frac{1}{(\,\sigma_t^2\,(\,\beta\,))^2}\,\frac{\partial\, \sigma_t^2\,(\,\beta\,)}{\partial\, \beta}\,\frac{\partial\, \sigma_t^2\,(\,\beta\,)}{\partial\, \beta'}\right]$$

jer je

$$E\left(\frac{{a^2}_t}{\sigma_t^2}\right) = \frac{1}{\sigma_t^2}\,E(\,\sigma_t^2\,\varepsilon_t^2) = E(\,\varepsilon_t^2\,) = var\,(\,\varepsilon_t^2\,) = 1$$

Konzistentni ocenjivač matrice informacija je :

$$\widehat{I_{\beta\beta}} = \sum_t \frac{1}{2\,T}\left[\frac{1}{(\,\sigma_t^2\,(\,\beta\,))^2}\,\frac{\partial\, \sigma_t^2\,(\,\beta\,)}{\partial\, \beta}\,\frac{\partial\, \sigma_t^2\,(\,\beta\,)}{\partial\, \beta'}\right]$$

Ako sada na primer posmatramo *ARCH (p)* model:

$$\sigma_t^2 = \beta_0 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i\ a_{t-i}^2$$

tada matrica informacija i gradijent imaju prilično jednostavnu formu.

Neka je $x_t = \left[1, a_{t-1}^2, \dots, a_{t-i}^p\right]$ i $\beta' = \left[\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p\right]$ ($\beta' = \beta^T$) pa poslednju jednakost možemo zapisati u vektorskom obliku na sledeći način:

$$\sigma_t^2 = x_t \, \beta$$

Gradijent je

$$\frac{\partial \, l}{\partial \, \beta} = \frac{1}{2 \, \sigma_t^2} \; x_t \left[\frac{{a_t}^2}{\sigma_t^2} - 1\right]$$

dok je ocenjena informaciona matrica

$$\widehat{I_{\beta\beta}} = \sum_t \frac{1}{2\,T} \left[\frac{{x_t}' x_t}{(\,\sigma_t^2\,(\,\beta\,))^2}\right]$$

4.2. Ocenjivanje modela *GARCH (1,1)*

Na kraju ćemo posebnu pažnju obratiti na *GARCH (1,1)* jer ćemo i praktičan deo prikazati preko ovog modela jer smo za njega već rekli da je dosta dobra aproksimacija uopštenijih *GARCH (p,q)* modela.

I dalje ćemo podrazumevati da važi da su $\{\varepsilon_t,\; t = 1,2,..\}$ $i.i.d.$ niz sličajnih promenljivih ali da ne moraju imati normalnu (gausovu) raspodelu.
Posmatramo niz $\{y_t,\; t = 1,2,..,n\}$:

$$y_t = \mu_0 + a_{ot} \;\; , t = 1, \dots, n$$

gde je sa a_{ot} predstavljena tačna vrednost *GARCH (1,1)* procesa i važi

$$a_{ot} = \sigma_{0t}\varepsilon_t \; , \;\; \mathcal{F}_t = \sigma\,(\,\{a_{os}\,, s \le t\}\,)$$

dok je $\{\varepsilon_t,\; t = 1,2,..\}$ $i.i.d.$ niz . Varijansa *GARCH (1,1)* procesa je:

$$\sigma_{0t}^2 = w_0\,(\,1 - \beta_o\,) + \alpha_0 a_{0t-1}^2 + \beta_0 \sigma_{0t-1}^2$$

(w_0 je slobodan član)

Na osnovu ***<u>Teoreme 2</u>*** , strogo stacionarno rešenje gornje jednakosti je

$$\sigma_{0t}{}^2 = w_0 + \alpha_0 \sum_{k=0}^{\infty} \beta_0^k \, a_{0t-1-k}^2$$

ako je $E(\ln(\alpha_0 \varepsilon^2 + \beta_0)) < 0$. Ovo nam pokazuje da je proces opisan sledećim parametrima:

$$\theta_0 = (\mu_0, w_0, \alpha_0, \beta_0)$$

čije ocenjene vrednosti označavamo:

$$\hat{\theta} = (\hat{\mu}, \widehat{w}, \hat{\alpha}, \hat{\beta})'$$

Model pomoću kojeg te ocenjene vrednosti dobijamo je:

$$y_t = \mu + a_t \ , t = 1, \dots, n$$

$$\sigma_t^2(\theta) = w\,(1 - \beta) + \alpha a_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2(\theta), \ \ t = 2, \dots, n$$

gde je $\sigma_1^2(\theta) = w$.
Na osnovu ovakve notacije, sledeći izraz nam pretstavljauslovnu varijansu:

$$\sigma_t{}^2 = w + \alpha \sum_{k=0}^{t-2} \beta^k \, a_{t-1-k}^2$$

Definišimo sada kompaktni skup parametara (zatvoren je i ograničen):

$$\Theta = \{\theta : \mu_l \le \mu \le \mu_d \ , 0 < w_l \le w \le w_d, 0 < \alpha_l \le \alpha \le \alpha_d, 0 < \beta_l \le \beta \le \beta_d 1\} \, \epsilon \, \{\theta : E(\ln(\alpha_0 \varepsilon^2 + \beta_0)) < 0\}$$

Ako pretpostavimo dodatno da $\theta_0 \, \epsilon \, \Theta$ sledi da je $\alpha_0 > 0$, $\beta_0 > 0$.
Kao što smo već spominjali, naravno ako stoji pretpostavka da $\varepsilon_t \sim N$ (0,1), log – funkcija verodostojnosti ima sledeću formu:

$$L_T\,(\theta) = \frac{1}{2\,T} \sum_{t=1}^{T} l_t\,(\theta)\,, \text{gde je } \ l_t\,(\theta) = -\left(\ln \sigma_t^2\,(\theta) + \frac{a_t^2}{\sigma_t^2\,(\theta)} \right)$$

Kada $\{\varepsilon_t, \ t = 1,2, ..\}$ nemaju normalnu raspodelu, tj $\{\varepsilon_t, \ t = 1,2, ..\}$ ne pretstavljagausov proces (beli šum), tada funkciju verodostojnosti nazivamo **kvazi funkcija verodostojnosti**.

Informacijski skup nam je uvek dostupa, ali ipak , zbog njegove ograničnosti (uvek gledamo samo donekle u prošlos, počevši od nekog momenta), nije skroz odgovarajući da bismo detaljno analizairali ocenjivački model.

Zato definišemo model uslovne varijanse za koji unapred znamo da je strogo stacionaran [3] :

$$\sigma_{ut}{}^2 = w + \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \, a_{t-1-k}^2 , \quad a_t = y_t - \mu$$

Kvazi – funkcija verodostojnosti u ovom slučaju je

$$L_{uT}\ (\theta) = \frac{1}{2\,T} \sum_{t=1}^{T} l_{ut}\ (\theta)\,, \text{gde je } \ l_{ut}\ (\theta) = -\left(\ln \sigma_{ut}^2\ (\theta) + \frac{a_t^2}{\sigma_{ut}^2\ (\theta)} \right)$$

Za neke interesantne rezultate koje čemo videti definišemo još i $\sigma_{\varepsilon t}{}^2$ na sledeći način :

$$\sigma_{\varepsilon t}{}^2 = w + \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \, a_{0t-1-k}^2$$

Vidimo da je $\sigma_{\varepsilon t}{}^2$ skoro identično sa $\sigma_{ut}{}^2$, razlika je što ne gledamo reziduale (a_t^2) nego stvarne vrednosti (zaista ostvarene) - a_{0t}^2
Sada možemo nešto više reći o konvergenciji u verovatnoći ocenjivačkog modela. Pre glavne teoreme, navešćemo uslove koje podrazumevamo da važe za proces $\{\varepsilon_t,\ t = 1,2,..\}$ i dve leme bez dokaza. Prva od njih će nam pokazati da stacionarni i nestacionarni modeli nisu baš tako „udaljeni“ jedan od drugog

Za proces $\{\varepsilon_t,\ t = 1,2,..\}$ pretpostavljamo da važi sledeće:

1) $\varepsilon_t,\ t = 1,2, \dots ,\ i.i.d$ je niz slučajnih promenljivih takav da važi $E\,(\varepsilon_t) = 0,\ t = 1,2, \dots$

2) $\varepsilon_t{}^2,\ t = 1,2, \dots$ su nedegerativne slučajne promenljive

3) Za neko $\delta > 0$ postoji $S_\delta < \infty$ tako da je $E\,(\varepsilon^{2+\delta}{}_t) \leq S_\delta < \infty$

4) $E(\ \ln(\alpha_0 \varepsilon^2{}_t + \beta_0)) < 0$

5) Tačka θ_0 se nalazi u unutrašnjosti skupa Θ

6) Ako za neko $t = 1,2, \dots$ važi

[3] Koristimo u indeksu oznaku u da ne bismo mešali sa definicijom ocenjvačkog modela za $\sigma_t{}^2$ što smo gore naveli.

$$\sigma_{0t}{}^{2} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, a_{t-k}^2 \quad \text{i} \quad \sigma_{0t}{}^{2} = c_0{}^{*} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k{}^{*}\, a_{t-k}^2$$

onda je $c_i = c_i{}^{*}, \ \forall\ i \geq 1$

Uslove 1) – 6) zovemo **elementarni uslovi**.

<u>Lema 1 :</u>

Uniformno po θ važi:

$$B^{-1}\sigma_{\varepsilon t}{}^{2}\,(\theta) \leq \sigma_{ut}{}^{2}(\theta) \leq B\, \sigma_{\varepsilon t}{}^{2}(\theta)$$

gde je $B = 1 + 2\,(1 - \beta_d)^{-\frac{1}{2}}\,(C_d - C_l) \times \max\left(\frac{\alpha_d}{w_l}, 1\right) + \frac{\alpha_d}{w_l\ (1-\beta_d)}\,(C_d - C_l)^2$

<u>Lema 2 :</u>

Ako elementarni uslovi važe, onda:

1) Proces $\{\sigma_{ut}{}^{2},\ t = 1,2,..\}$ je striktno stacionaran

2) Proces $\{l_{ut},\ t = 1,2,..\}$, kao i prvi i drugi izvod po θ su striktno stacionarni procesi

3) Za neko $p \in (0, 1)$ i $\forall\, \theta \in \Theta$ važi

$$E(\,|\,\sigma_{ut}{}^{2}(\theta)|^{p}\,) \leq H_p < \infty$$

Pre dokaza , definisaćemo podelu parametarskog skupa (ponovo koristimo Posedel [6]).

Neka je $R_l = R\,(K_l^{-1}\,\alpha_l < 1)$ gde je $R\,(\psi) = \frac{2+\psi\,P}{2+\psi}$, $\psi > 0,\ P = 1 - \frac{1}{2^{\frac{2+\delta}{\delta}} S_\delta^{\frac{2}{\delta}}} \in (0,1)$, S_δ je definisano u elementarnim uslovima, $K_l = \frac{w_d}{w_0} + \frac{\alpha_d}{\alpha_0} < \infty$. Neka su η_l i η_d pozitivne konsatnte tako da važi:

$$\eta_l < \beta_0\left(1 - R_l^{\frac{1}{12}}\right), \ \ \eta_d < \beta_0\left(1 - R_0^{\frac{1}{12}}\right) \quad (R_0 = R(\alpha_0) < 1)$$

Za $r \geq 1$, definišemo:

$$\beta_{rl} = \beta_0\, R_l^{\frac{1}{r}} + \eta_l < \beta_0 \quad i \quad \beta_{rd} = \frac{\beta_0 - \eta_l}{R_0^{\frac{1}{r}}} > \beta_0$$

i podskupove parametarskog skupa

$$\Theta_l^r = \{\theta \,\epsilon\, \Theta :\ \beta_{rl} \leq \beta \leq \beta_0\} \quad i \quad \Theta_l^r = \{\theta \,\epsilon\, \Theta :\ \beta_0 \leq \beta \leq \beta_{rd}\}$$

tako da je $\Theta^r = \Theta_l^r \cup \Theta_d^r$.
Vrednosti η_l i η_d zavise od R_l i R_0 koje su u funkciji parametarskog skupa. Naravno, uvek možemo izabrati takvo $r \geq 1$ tako da važi $\theta = \theta^{rmax} \subseteq \theta^r$

<u>Teorema 3 :</u>

Pretpostavljajući da elementarni uslovi važe za $\theta \,\epsilon\, \Theta$,sledi :

1) $E\left(\frac{a_t^2}{\sigma_{ut}{}^2(\theta)}\right) \leq H_1 \equiv \frac{(\mu_d - \mu_l)^2}{w_l} + B\, H_c$, gde je $H_c = \frac{w_0}{w_l} + \frac{\alpha_0}{\alpha_l \eta_l} < \infty$

Pod ovim uslovom važi još

2) $L_{uT}(\theta) \xrightarrow{p} L(\theta)$, kada T $\to \infty$, $L(\theta) = \mathrm{E}\left(\frac{l_{ut}(\theta)}{2}\right)$

<u>Dokaz:</u> Na osnovu definicije H_c, sledi da je $\left\|\frac{\sigma_{0t}{}^2}{\sigma_{\varepsilon t}{}^2}\right\|_r \leq H_c$ gde sa $\|\cdot\|$ definisana euklidska norma. Otuda je , na osnovu <u>*Leme 1*</u> i oznake $g = \mu_0 - \mu$ sledi

$$E\left(\frac{a_t^2}{\sigma_{ut}{}^2}\right) = E\left(\frac{(a_{0t} + g)^2}{\sigma_{ut}{}^2}\right) = BE\left(\frac{a_{0t}^2}{\sigma_{\varepsilon t}{}^2}\right) + 2\,g\ E\left(\frac{1}{\sigma_{ut}{}^2}\,E\left(a_{0t}\,|\mathcal{F}_{t-1}\right)\right) + E\left(\frac{g^2}{\sigma_{ut}{}^2}\right)$$
$$\leq BE\left(\frac{a_{0t}^2}{\sigma_{\varepsilon t}{}^2}\right) + \frac{g^2}{w_l} = BE\left(\frac{\sigma_{0t}^2}{\sigma_{\varepsilon t}{}^2}\right) + \frac{g^2}{w_l} \leq B\left\|\frac{\sigma_{0t}^2}{\sigma_{\varepsilon t}{}^2}\right\|_1 + \frac{g^2}{w_l}$$

što znači da je

$$\mathrm{E}\left(\frac{a_t^2}{\sigma_{ut}{}^2}\right) \leq B\,H_c + \frac{g^2}{w_l} \leq B\,H_c + \frac{(\mu_d - \mu_l)^2}{w_l} \equiv H_1$$

čime smo pokazali prvo tvrđenje. Dalje imamo

$$E\left(|l_{ut}|\right) = E\left(\left|\ln\sigma_{ut}^2(\theta) + \frac{a_t^2}{\sigma_{ut}^2(\theta)}\right|\right) \leq E\left(|\ln\sigma_{ut}^2|\right) + E\left(\frac{a_t^2}{\sigma_{ut}^2(\theta)}\right)$$

Za $x \geq 1$ generalno važi $\ln x < \frac{1}{p}\,x^p$, $p \,\epsilon\, (0, 1)$ pa na osnovu toga sledi

$$E\ (\ |\ln \sigma_{ut}^2|) \ \leq |\ln w_l\ | + \ E\ \left(\left| \ln \frac{\sigma_{ut}^2(\ \theta\ )}{w_l} \right| \right) \leq |\ln w_l\ | + \frac{1}{p} E\ \left(\left| \frac{\sigma_{ut}^2(\ \theta\ )}{w_l} \right|^p \right)$$
$$= \ |\ln w_l\ | + \frac{1}{p\ w_l}\ E\ (\ \sigma_{ut}^{2p}(\ \theta\ )\ )$$

jer je $\frac{\sigma_{ut}^2(\ \theta\ )}{w_l} \geq 1$. Konačno, na osnovu <u>*Leme 2*</u> sledi

$$E\ (\ |l_{ut}|\ ) < \ \infty$$

Pošto je $\{l_{ut}\ \ ,\ t = 1,2, \ldots\}$ strogo stacionaran niz, sledi

$$L_{uT}\ (\ \theta\ ) = \ \frac{1}{2\ T} \sum_{t=1}^{T} l_{ut}\ (\ \theta\ ) \xrightarrow{p} L\ (\ \theta\ ) = \ \frac{1}{2}\ E\ (\ \ l_{ut}\ (\ \theta\ )\ ), \qquad \forall\ \theta\ \epsilon\ \ \Theta$$

□

Naravno, nas će uvek interesovati i ocenjivač koji dobijamo maksimazacijom funkcije verodostojnosti.

Definicija 6: Kvazi (pseudo) ocenjivač $\widehat{\theta_T}$ vrednosti θ_0 (stvarna vrednost) je rešenje sledećeg izraza

$$\underbrace{argmax}_{\theta\ \in \Theta}\ L_T\ (\ \theta\ )$$

tj.

$$\widehat{\theta_T} = \ \underbrace{argmax}_{\theta\ \in \Theta}\ L_T\ (\ \theta\ )$$

Takođe, pod pretpostavkom da elementarni uslovi važe, pseudo ocenjivač ima asimtotski normalnu raspodelu, tj. važi

$$\sqrt{T}\ \left(\ \widehat{\theta_T}\ - \ \theta_0\ \right) \xrightarrow{d} \ N\ (\ 0, B_0^{-1}\ A_0\ B_0^{-1})$$

gde nam $\boldsymbol{B_0}$ pretstavlja***matricu informacija*** (negativno očekivanje hesijana funkcije verodostojnosti):

$$B_0 = B(\ \theta_0\ ) = \ -\frac{1}{T} E_0\ \left(\frac{\partial^2 \log L\ (\ \theta\ )}{\partial\ \theta\ \ \partial \theta'} \right) = \ -E_0\ (\ \nabla^2\ \ l_{ut}\ (\ \theta_0\ ))$$

dok je A_0 definisano na sledeći način:

$$A_0 = \frac{1}{T} E_0 \left(\frac{\partial \log L\ (\ \theta\ )}{\partial\ \theta} \ \frac{\partial \log L\ (\ \theta\ )}{\partial\ \theta\ '} \right) = E_0\ (\ \nabla l_{ut}\ (\ \theta_0\ )\ \nabla l_{ut}\ (\ \theta_0\ )'\ )$$

Zbog načina na koji smo definisali A_0, tu matricu možemo predstaviti na sledeći način:

$$A_0 = -\frac{1}{2}\ (\ E\ (\ \varepsilon_0^4) - \ 1\ )\ B_0$$

a sa obzirom da važi $\varepsilon_0 \sim N\ (\ 0{,}1\ )$ sledi da je $E\ (\ \varepsilon_0^4) = 3$ (koeficijent spljoštenosti kod normalne raspodele je tri), pa je

$$A_0 = -\frac{1}{2}\ (\ 3 - \ 1\ )\ B_0 = -B_0$$

tj.

$$B_0 = -A_0$$

a upravo na ovaj način smo i definisali matricu informacija B_0 (negativno očekivanje hesijana)

5. MODELIRANJE *GARCH (1,1)* MODELA U MATLAB-u

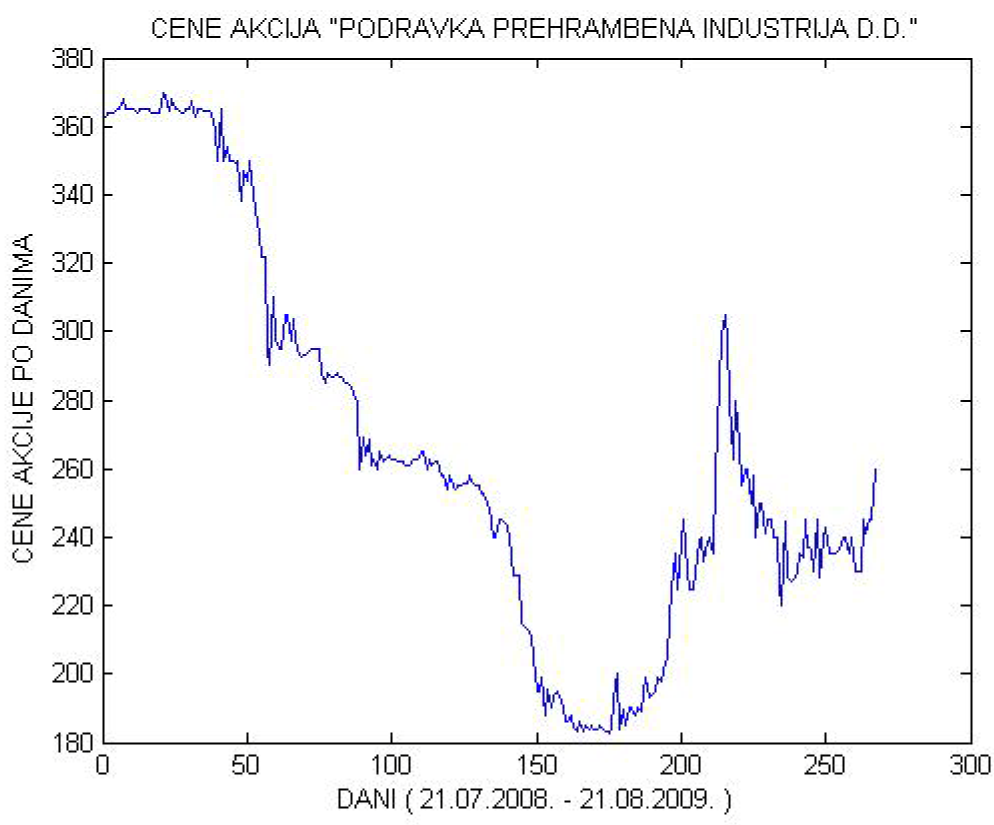
Jedan od vrlo dobrih programskih paketa za simlaciju i proveru *GARCH* modela jeste MATLAB, koji zahvaljujući nizu ugrađenih funkcija nam dosta olakšava rad.

MATLAB je softverski paket namenjen za rešavanje matematičkih problema, analizu podataka i grafički prikaz. On u sebi integriše numeričku analizu i matričnu analizu, dok sve probleme rešava numerički. Pored matematičkih, koristi se i za rešavanje mnogih inženjerskih i istraživačkih problema. Poslednjih godina je izuzetno korišćen u izučavanju i simuliranju finansijskih problema ito zbog specijalnih skupova alata koje sadrži u sebi (takozvani *toolbox*): *Financial Toolbox, Financial Time Series Toolbox i GARCH Toolbox* .

- **Analiza akcija Podravka d.d.**

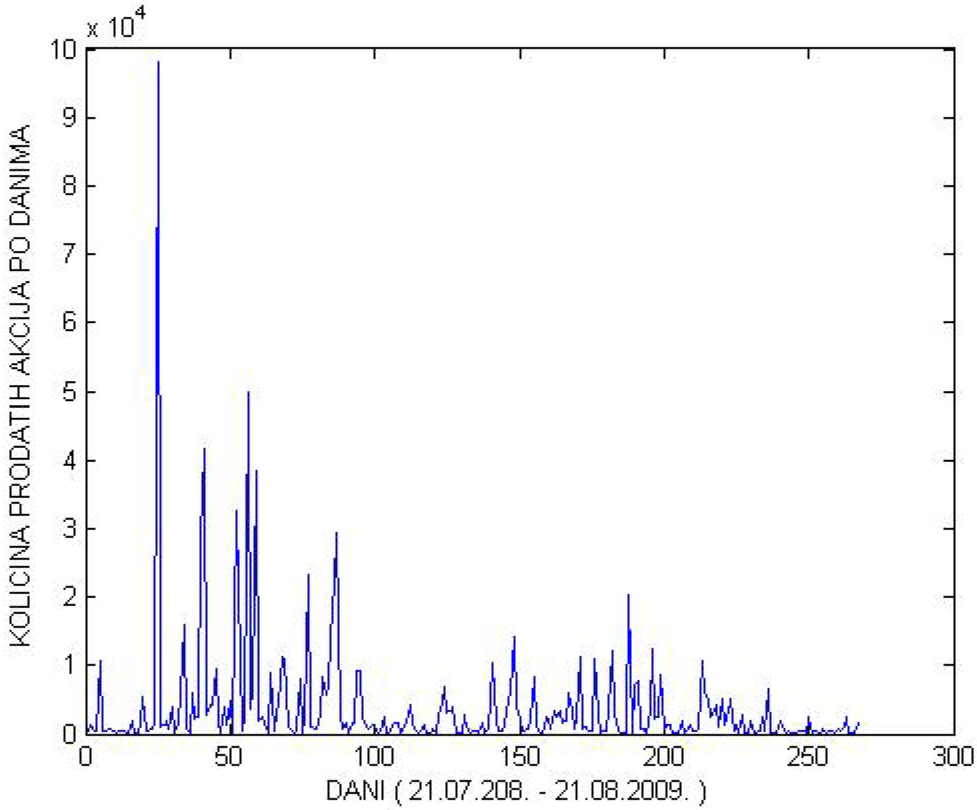
Kako bi što bolje prikazali modeliranje kretanja cena u MATLAB programu, sprovešćemo analizu akcija firme Podravka prehrambrena industrija d.d. u periodu od 21.07.2008. do 21.08.2009. Taj period obuhvata ukupno 267 dana trgovanja akcijama.

Počinjemo prvo sa unošenjem dnevnih cena u MATLAB pomoću komande *Import Data*.



Slika 3

Na *Slici 3* smo prikazali kretanje cena u datom periodu koje su pretstavljene u kunama.



Slika 4

Na *Slici 4* je prikazan broj kupljenih akcija po danima . Vidimo da je ispoštovan jedan od osnovnih tržišnih zakona – što je veća potražnja veća je i cena akcija.

U nastavku smo za dobijanje logaritamskih prinosa koristili ugrađenu funkciju *Price2ret* :

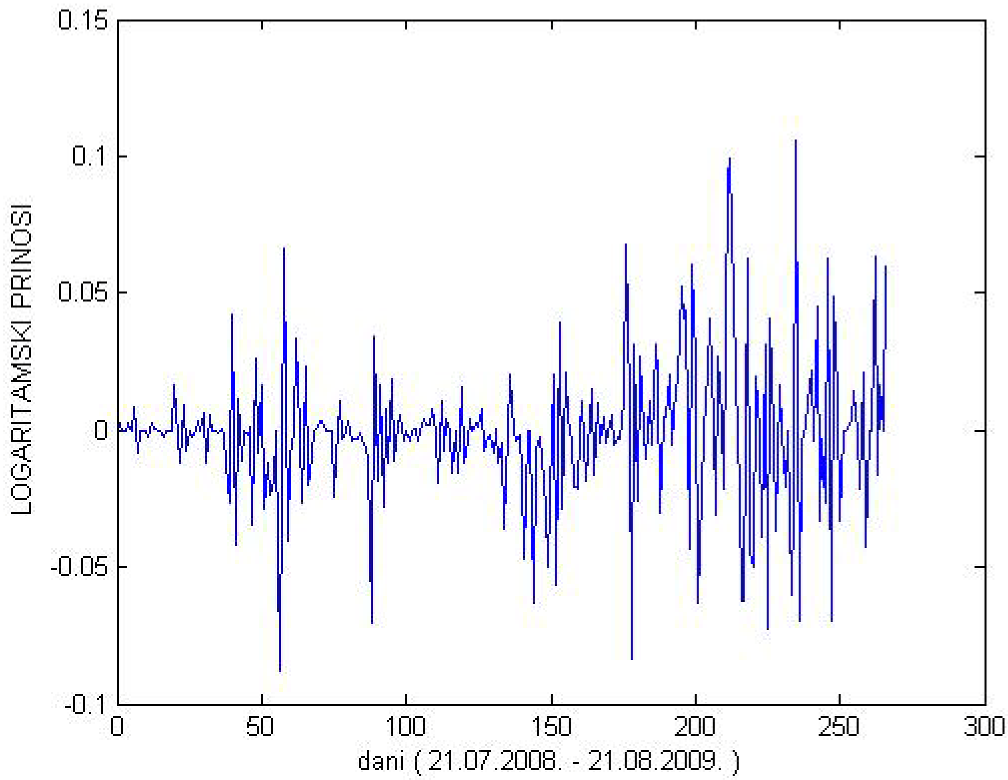
prinosi=price2ret(cena) (pretvara vremensku seriju cena u vremensku seriju logaritamskih prinosa)

Ugrađena funkcija *Price2ret* konvertuje vremenske serije cena u logaritamske serije prinosa akcija na sledeći način:

$$y_t = \log P_t - \log P_{t-1} = \log \frac{P_t}{P_{t-1}} = \log(1 + \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}) , t = 1,2, \dots , n$$

Na osnovu Taylor – ovog razvoja , vidimo da je y_t (logaritamski prinos), $t = 1, \dots , n$ približno jednak relativnom prinosu $\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$, $t = 1, \dots , n$. Razlog zašto se se koriste logaritamski prinosi, a ne relativni, jeste njihova osobina aditivnosti . Takođe, *GARCH* model zahteva prinose umesto cena, a na ovaj način transformišemo podatke u stacionarnu vremensku seriju.

Na *Slici 5* su prikazani logaritamski prinosi dobijeni pomoću gore navedene MATLAB funkcije.



Slika 5

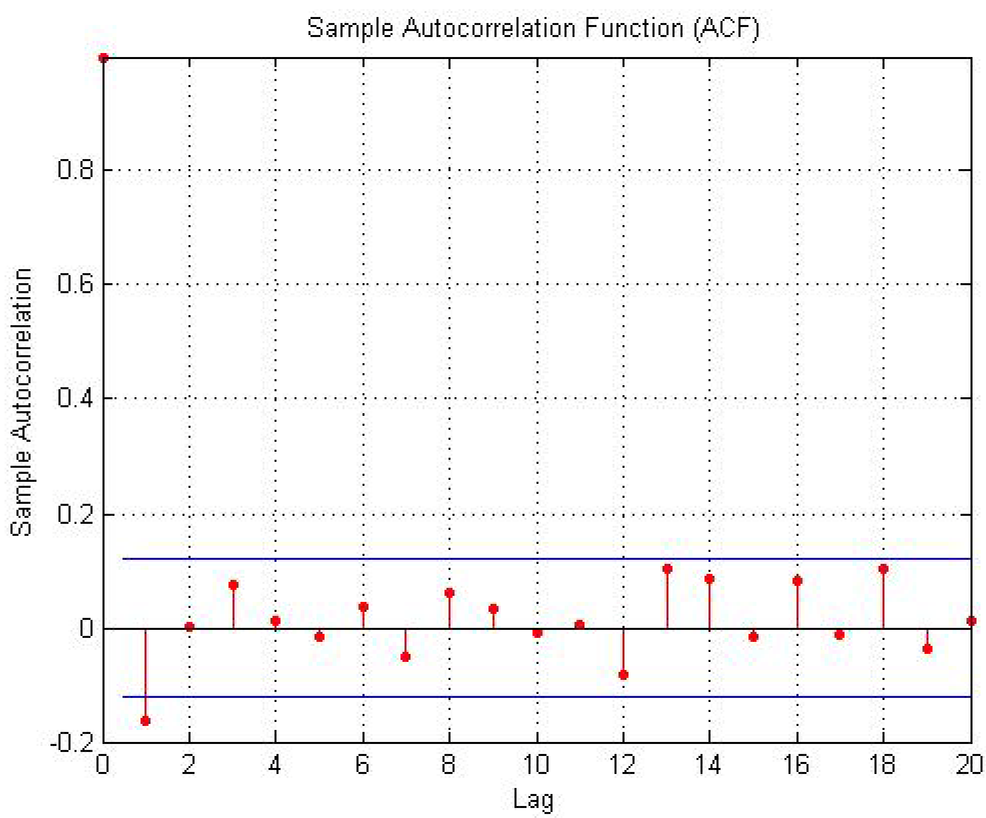
U *Tabeli 1* je dat pregled osnovnih karakteristika vremenske serije *prinosi* :

FUNKCIJA U MATLAB	VREDNOST
MEAN (PRINOSI) - OČEKIVANA VREDNOST UZORKA ZA PRINOSE	-0,0013
STD (PRINOSI) - STANDARDNA DEVIJACIJA	0,0271
SKEWNES (PRINOSI) - MERA ASIMETRIJE	0,2467
KURTOSIS (PRINOSI) - MERA SPLJOŠTENOSTI	**5,6823**

Tabela 1

Uočava se velika vrednost mere spljoštenosti (veća je od tri) što govori o „debelim repovima" posmatrane vremenske serije.

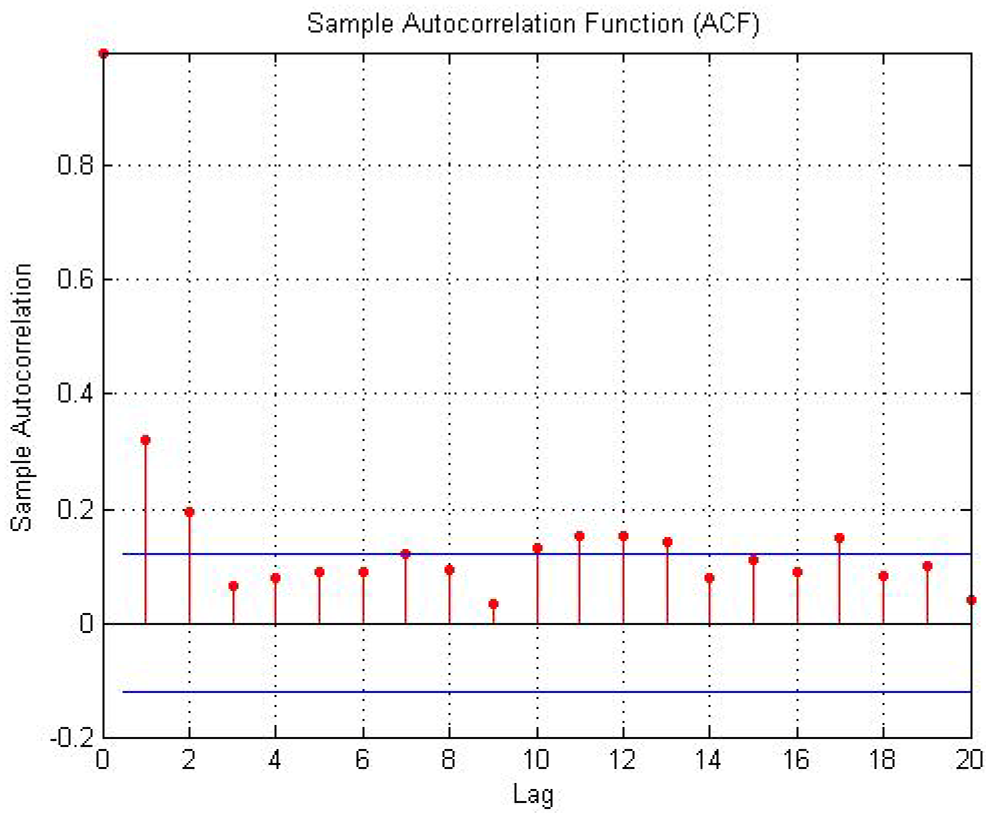
Ono što je još interesantno da posmatramo jeste autokorelacionu povezanost prinosa koju možemo očitati sa sledećeg grafika (dobijamo ga uz pomoć funkcije *autocorr (prinosi)*):



Grafik1

Vidimo da su vrednosti koeficijenata dosta male, što upućuje da povezanost među prinosima gotovo i ne postoji (*Grafik 1*).

Mnogo drugačiji rezultat se dobija ako se posmatra kvadrat prinosa (*Grafik 2*):



Grafik 2

gde se uočava postojanje malo značajnije korelacione zavisnosti.
Vrednovanje korelacije se može odrediti korišćenjem Ljung – Box – ovog testa kod koga za nultu hipotezu uzimamo da nema autokorelacije, naspram alternativne da ona postoji. Test statistika je

$$Q = N\,(\,N + 2\,)\sum_{k=1}^{20} \frac{r_k^2}{(\,N - k)}$$

$$Q \sim \chi^2_{1-\alpha,20}$$

$$H_0 : Q = 0$$
$$H_1 : Q > 0$$

Za naš uzorak , test je potvrdio značajno prisustvo heteroskedastičnosti
(u MATLAB koristili funkciju *lbqtest(prinosi.^2)* koja nam je kao rezultat vratila *1* što znači odbacivanje nulte hipoteze).

Kao što vidimo sa *Slike 5* , najveći gubitak (negativni prinos) je bio 57. dan trgovanja , što ne čudi jer je taj dan cena akcije pala sa 322 kune na 295 kune, a kupljeno je 3568 akcija. U *Tabeli 2* su prikazani samo podaci oko tog datuma dok je celukupna tabela prikazana u šestoj glavi Dodatak:

DANI	***DATUM***	***CENA***	***KOLIČINA***	***LOGARITAMSKI PRINOS***
56	9.10.2008	322,00	49852	0,000000
57	10.10.2008	295,00	3568	**-0,087576**
58	13.10.2008	290,00	6252	-0,017094

Tabela 2

Naravno da nas interesuje i dobitak (iako veći uticaj na formiranje cena akcija imaju gubici a ne dobici). Najveća dobit se desila 236. dan kada je prinos bio 0.10551. U *Tabeli 3* smo prikazali ponovo samo podatke za dane oko tog datuma:

DANI	***DATUM***	***CENA***	***KOLIČINA***	***LOGARITAMSKI PRINOS***
235	3.7.2009	220,00	478	-0,026952
236	6.7.2009	244,48	6598	**0,105506**
237	7.7.2009	228,00	7	-0,069788

Tabela 3

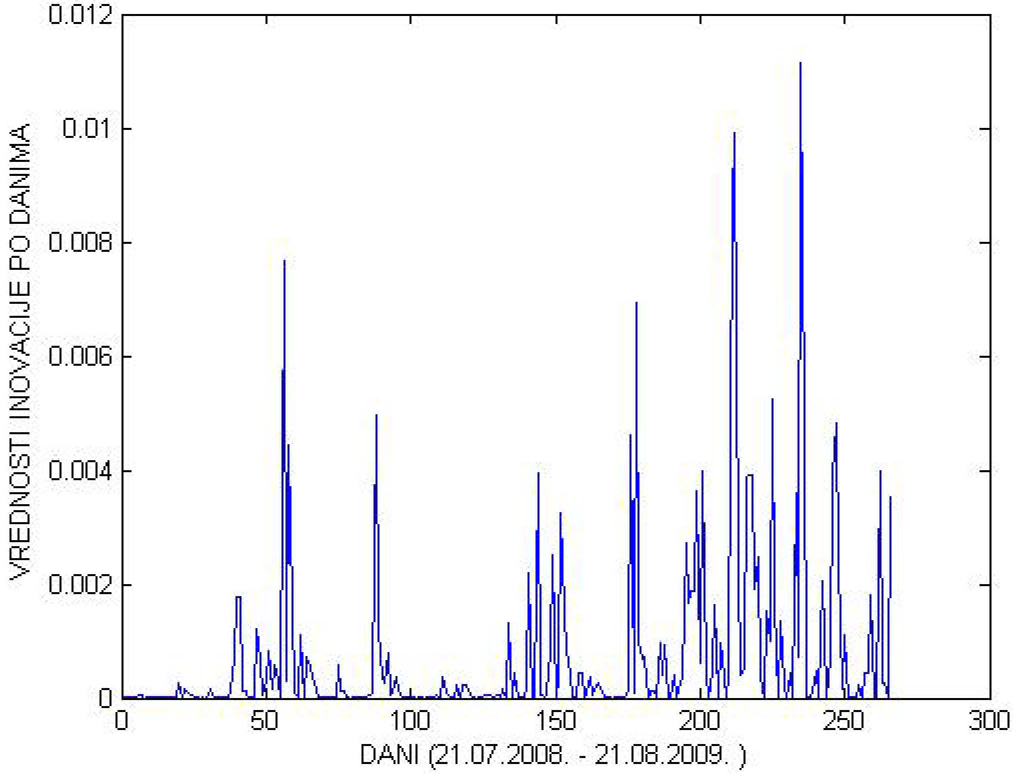
Na sledećoj slici su prikazane vrednosti, ali kvadrirane ,niza $\{a_t,\ t = 1,2,\dots\}$ koji se često u literaturi naziva inovacija. U MATLAB programu ove vrednosti dobijamo na sledeći način:

*niza=prinosi.*prinosi* (pretstavlja a^2 uz pretpostavku da je srednji logaritamski prinos jednak nuli)

Naime, MATLAB ovaj niz posmatra kao rezidual što je opravdano jer možemo niz $\{a_t,\ t = 1,2,\dots\}$ zapisati na sledeći način:

$$a_t{}^2 = \sigma_t{}^2 \varepsilon_t{}^2 = (y_t - \mu_t)^2$$

pa vrednosti niza $\{a_t,\ t = 1,2,\dots\}$ možemo tumačiti kao standardne devijacije prinosa.



Slika 6

Sa *Slike 6* vidimo da oko 230. dana (preciznije, ponovo 236. dana trgovanja) opet imamo neku vrstu šoka i naglog porasta vrednosti inovacije za taj dan (ona iznosi 0.01113 i najveća je za posmatrni period). To je razumljivo jer, kao što vidimo iz poslednje formule, vrednosti inovacije i logaritamskog prinosa su direktno srazmerne. U *Tabeli 4* je dodata nova kolona u odnosu na *Tabel 2 i 3* – vrednosti inovacije:

DANI	***DATUM***	***CENA***	***KOLIČINA***	***LOGARITAMSKI PRINOS***	***VREDNOST INOVACIJE***
235	3.7.2009	220,00	478	-0,026952	0,000726
236	6.7.2009	244,48	6598	**0,105506**	**0,011132**
237	7.7.2009	228,00	7	-0,069788	0,004870

Tabela 4

Vrednost inovacije, prikazana za najveći gubitak u datom periodu, je data u *Tabeli 5:*

DANI	***DATUM***	***CENA***	***KOLIČINA***	***LOGARITAMSKI PRINOS***	***VREDNOST INOVACIJE***
56	9.10.2008	322,00	49852	0,000000	0,000000
57	10.10.2008	295,00	3568	**-0,087576**	**0,007670**
58	13.10.2008	290,00	6252	-0,017094	0,000292

Tabela 5

Na osnovu poslednje dve tabele, vidimo da je inovacija veća kod pozitivnog prinosa, pa pošto ona direktno utiče na prinos, veća je promena prinosa kod pozitivne inovacije (na dan 7.7.2009) nego kod negativne.

U nastavku proveravamo da li niz *prinosi* dolazi iz normalne raspodele (jer nam to zahteva MATLAB funkcija *ugarch* koju u nastavku koristimo) i to radimo pomoću testa normalnosti (Jarque – Bera test) čija je test statistika:

$$JB = \frac{T}{6}\,(S^2 + \frac{(K-3)^2}{4})$$

pri tome se kod ovog testa obično koristi hi – kvadrat distribucija sa dva stepena slobode za određivanje kritične vrednosti ($JB \sim \chi^2_{1-\alpha;2}$, α je neki mali broj).

Hipoteze koje proveravamo su:

$$H_0 : JB = 0$$

nasuprot

$$H_1 : JB > 0$$

To u MATLAB radimo na sledeći način:

[h,p] = jbtest(prinosi) (funkcija provera *JB* – test statistiku i vraća vrednosti *h* i *p;* ako je $h = 1$ i $p < 0.05$ odbacujemo nultu hipotezu, u suprotnom je prihvatamo)

U našem slučaju dobijamo da je $h = 0$ dok je $p = 0.061$ što znači da prihvatamo nultu hipotezu da niz *prinosi* dolazi iz normalne raspodele.

Dalje , koristimo alate koji su nam na raspolaganju u programskom paketu za procenu parametara:

[Kappa , Beta , Alpha] = ugarch(prinosi, 1 , 1) (ugarch funkcija računa parametre za *GARCH (1,1)* koristeći ugrađenu funkciju verodostojnosti)

Na osnovu gornje funkcije dobijamo ocenjene vrednosti parametara:

Beta = 0.596054($\hat{\beta}$)

Alpha = 0.40395 ($\hat{\alpha}$)

Kappa = 5.7597e-005 ($\hat{w}$)

Vidimo da smo dobili $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 0.40394 + 0.59605 = 0.999 < 1$ pa na osnovu *Propozicije 1* dobili smo da je proces slabo stacionaran.

Iste rezultate, uz malu detaljniju analizu dobijamo i na sledeći način:

spec11 = garchset('P',1,'Q',1,'Display','off');
[coeff11,errors11,LLF11] = garchfit(spec11,prinosi);
garchdisp(coeff11,errors11)

(funkcija *garchset (param1,val1,param2,val2,...)* vraća procenjene vrednosti parametara. U slučaju *GARCH (1,1),* imamo da je *param1* = P, *param2* = Q, dok je *val1* = 1 i *val2* = 1 funkcija *garchfit* procenjuje parametre metodom maksimalne verodostojnosti, dok funkcija *garchdisp (Coeff,Errors)* prikazuje tabelarno procenjene parametre, standardne greške i T – statistike).
Kao rezultat dobijamo sledeću tabelu:

PARAMETRI	**PROCENJENA VREDNOST**	**STANDARDNA GREŠKA**	**T-STATISTIKA**
$\hat{\mu}$	-0.00046651	0.0013036	-0.3579
$\hat{\alpha}$	0.40395	0.10212	3.9556
$\hat{\beta}$	0.59605	0.055315	10.7755
$\hat{w}$	5.7597e-005	7.8264e-006	7.3593

Tabela 6

U poslednjoj koloni smo prikazali t – *statistiku*. T – *statistika* nam pretstavlja merilo za prikazivanje odstupanja procenjene vrednosti parametra od stvarne vrednosti. Ako je t – *statistika* veća od dva, onda smatramo da tačna vrednost parametra pripada 95 % intervalu poverenja .

Npr, pošto je t – *statistika* za $\hat{\beta}$ 6.7965, tada na nivou poverenja 0.95 smatramo da

$$\beta_0 \,\epsilon \left(0.5731 - \underbrace{6.7965}_{t-statis\,tika} \sqrt{\underbrace{0.0302}_{uzora\check{c}ka\ disperzija\ \ za\ prinos}}, 0.5731 + 6.7965\sqrt{0.0302}\right),$$

$tj.\ \beta_0 \,\epsilon\, (-0.608, 1.754)$

(uzoračku disperziju za niz prinosa smo dobili u MATLAB pomoću komande *std(prinosi)*)

Ovde smo koristili standardnu definiciju intervala poverenja za parametar β:

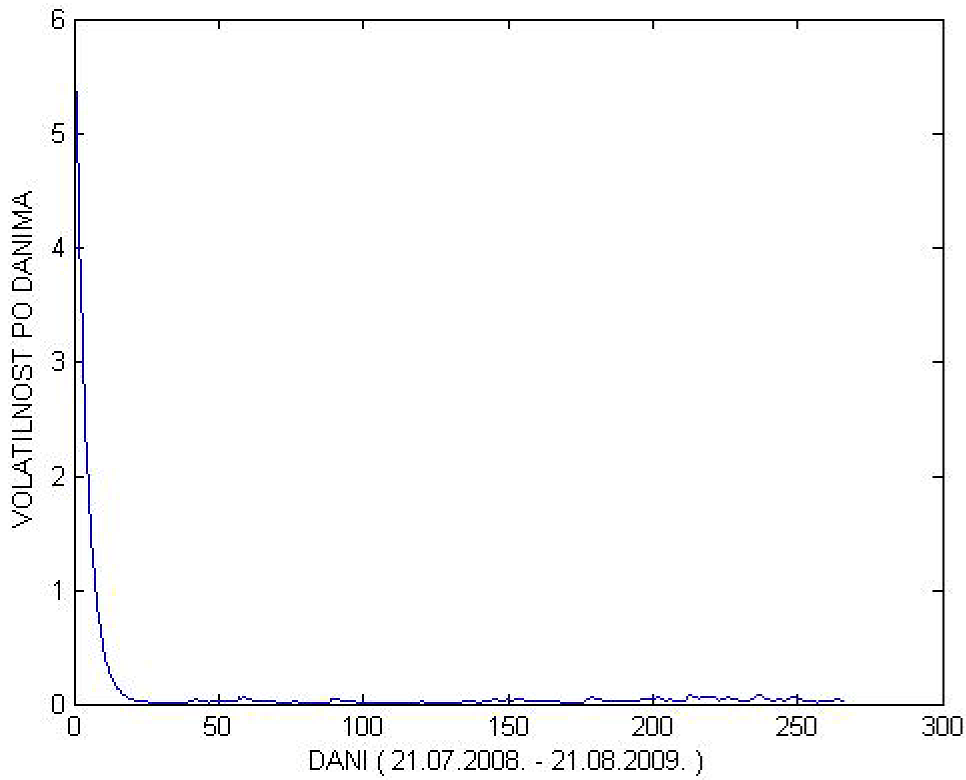
$$P\left\{\left|\frac{\hat{\beta} - \beta_0}{\underbrace{s^2}_{uzora\check{c}ka\ disperzija}}\right| \le t_{n-3,0.95}\right\} = 0.95 \implies \beta_0 \,\epsilon\, (\hat{\beta} - s^2 t_{n-3,0.95}, \hat{\beta} + s^2 t_{n-3,0.95})$$

Ako je t – *statistika* manja od dva, tada odgovarajući parametar malo doprinosi objašnjavanju modela, kao što je kod nas slučaj sa $\hat{\mu}$.

U nastavku smo prikazali vrednosti za σ koje računamo na sledeći način:

sigma(1)=sqrt((Kappa/(1-Alpha-Beta))) (procena početne volatilnosti)
for i=2:(dani-1),
*sigma(i)=sqrt(Kappa + Beta*sigma(i-1)*sigma(i-1) + Alpha*prinosi(i-1)*prinosi(i-1));*
end

a na *Slici 7* je prikazana volatilnost po danima dobijena na ovaj način.



Slika 7

Za početnu vrednost sigme dobijamo 5.3539 i vidimo da se ona posle toga smanjuje i da uglavnom za period koji mi posmatramo ne prelazi vrednost 0.01. Ovako velike vrednosti na početku perioda posmatramja su u nekim radovima pitanje koje se posebno obrađuje, tj. ispitujuju se uzroci zašto *GARCH* modeli uglavnom procenjuju veliku početnu volatilnost, dok neki te velike vrednosti smatraju *outlier* - ima i ne uzimaju ih u analizu smatrajući da ne doprinose objašnjenju u modelu (Bollerslev [2]).

Sada *Tabeli 7* dodajemo novu kolonu – volatilnost po danima:

DANI	***DATUM***	***CENA***	***KOLIČINA***	***LOGARITAMSKI PRINOS***	***VREDNOST INOVACIJE***	***VOLATILNOST PO DANIMA***
235	3.7.2009	220,00	478	-0,026952	0,000726	0,04221
236	6.7.2009	244,48	6598	**0,105506**	**0,011132**	0,03756
237	7.7.2009	228,00	7	-0,069788	0,004870	**0,07360**

Tabela 7

Kao što vidimo na *Slici 7* i *Tabeli 7* , najveća volatilnost (ne računajući početne vrednosti) nam se javlja baš 237 dan, tj. dan nakon „šoka“ zbog velikog skoka prinosa. Ovo je bilo i prirodno da se desi jer sigmu za naredni dan uvek računamo na osnovu informacija iz prošlosti (procenjujemo *GARCH (1,1)* a kod njega gledamo vrednosti iz prethodnoh vremenskog perioda, a u ovom slučaju, od prethodnog dana). Vidimo da je ta nagla promena prinosa dovela do smanjeja tražnje i naglog pada cena taj dan - 7.7.2009.

Iz *Tabele 8* čitamo da se slična stvar dogodila i 58. dan - dan nakon velikog gubitka:

DANI	***DATUM***	***CENA***	***KOLIČINA***	***LOGARITAMSKI PRINOS***	***VREDNOST INOVACIJE***	***VOLATILNOST PO DANIMA***
56	9.10.2008	322,00	49852	0,000000	0,000000	0,02344
57	10.10.2008	295,00	3568	**-0,087576**	**0,007670**	0,01958
58	13.10.2008	290,00	6252	-0,017094	0,000292	**0,05832**

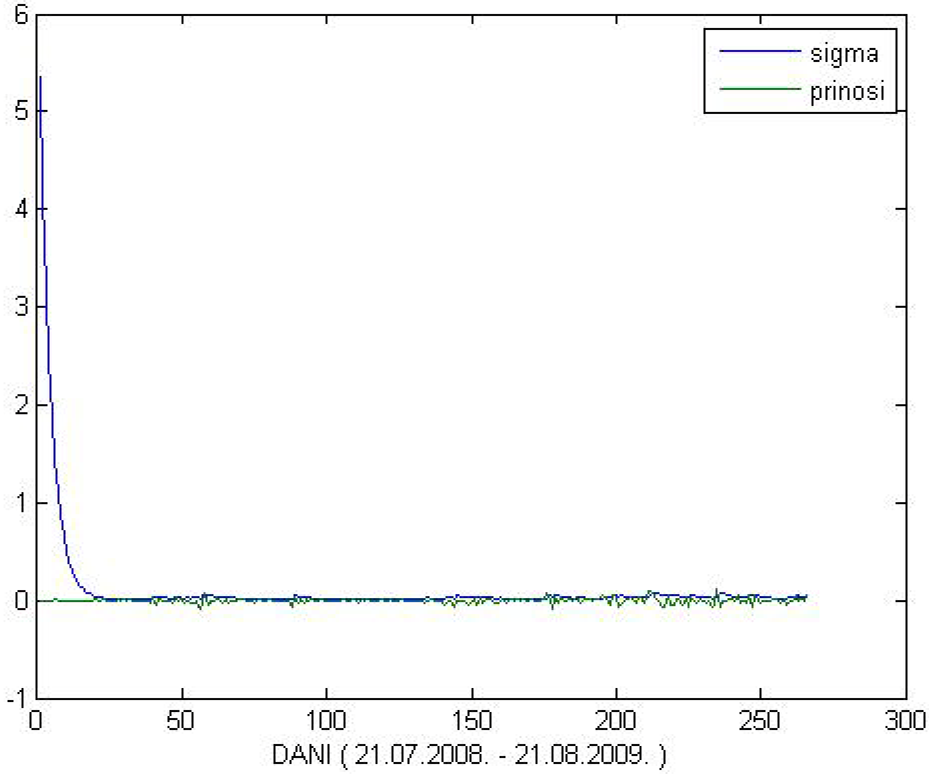
Tabela 8

Pnovo je velika promena prinosa dovela od značajnog povećanja dnevne volatilnosti narednog dana (13.10.2008.).
Naime , ono što je lepo jeste da smo na primer mi u ulozi ulagača, mi bi već 57. dana na osnovu *GARCH* modela znali volatilnost za sledećli dan a na osnovu nje imali i procenjene prinose na osnovu formule

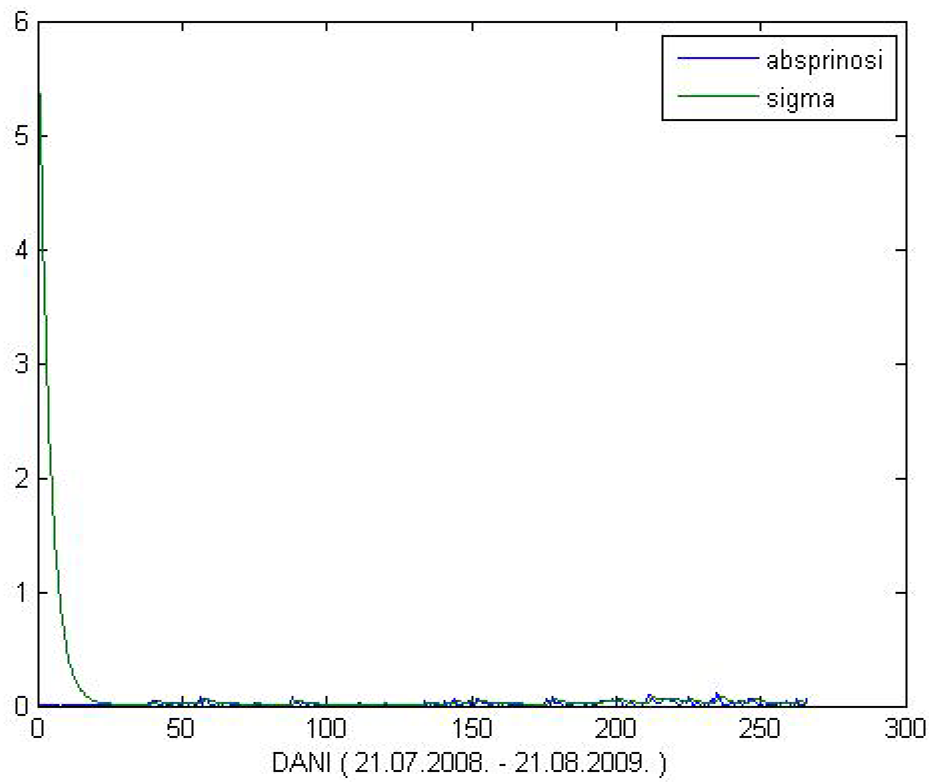
$$y_t = \mu_t + \sigma_t \varepsilon_t \ , \ \ t = 1, \dots, 268$$

(na osnovu našeg procenjenog modela prinos za 58. dan je -0.01665 , znači dosta sličan stvarno ostvarenom prinosu), tj. 57. dana bismo znali prinos za sledeći dan (procenjeni naravno) a samim tim bi ostvarili prednost u odnosu na druge ulagače.

Dalje, na *Slikama 8 i 9* su prikazane sigme i prinosi i sigme i apsolutni prinosi, respektivno , čisto da bi bilo lakše uočiti da veći skokovi prinosa utiču na veće skokove sigme, i da se krive „prate“ međusobno.

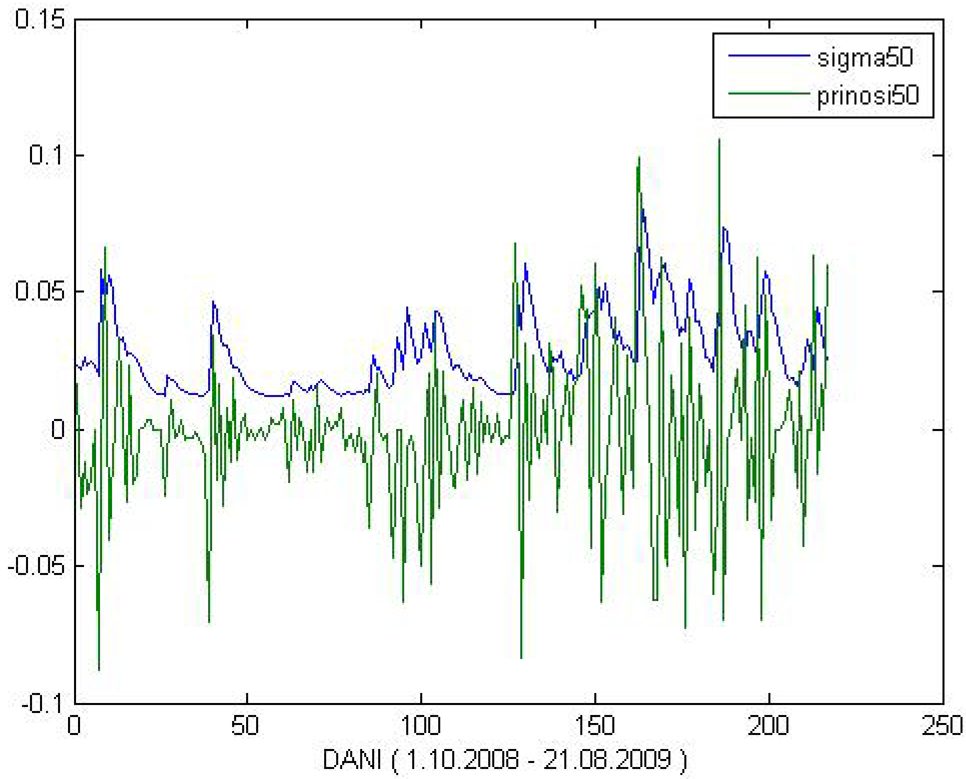

sigma
prinosi
6
5
4
3
2
1
0
-1
0
50
100
150
200
250
300
DANI (21.07.2008. - 21.08.2009.)

Slika 8


absprinosi
sigma
6
5
4
3
2
1
0
0
50
100
150
200
250
300
DANI (21.07.2008. - 21.08.2009.)

Slika 9

Da bismo ipak mogli malo bolje da pratimo kretanje volatilnosti i prinosa, gledaćemo period od 1.10.2008 – 21.08.2009., tj. na grafiku nećemo pretstaviti velike vrednosti sigme na početku perioda posmatranja:



Slika10

Sa *Slike 10* možemo mnogo bolje da uočimo slaganje krivih koje pretstavljaju prinose i volatilnost.

Sada, kada imamo sve vrednosti parametara, možemo naš model *GARCH (1,1)* eksplicitno izraziti:

$$\boldsymbol{y_t = \underbrace{-0.000466}_{(0.0013036)} + a_t}$$

$$\boldsymbol{\sigma_t^2 = \underbrace{5.7597e-005}_{(7.8264e-006)} + \underbrace{0.40395}_{(0.10212)}\ a_{t-1}^2 + \underbrace{0.59605}_{(\mathbf{0.055315})}\ \sigma_{t-1}^2}\ , \boldsymbol{t = 1, \dots, 268}$$

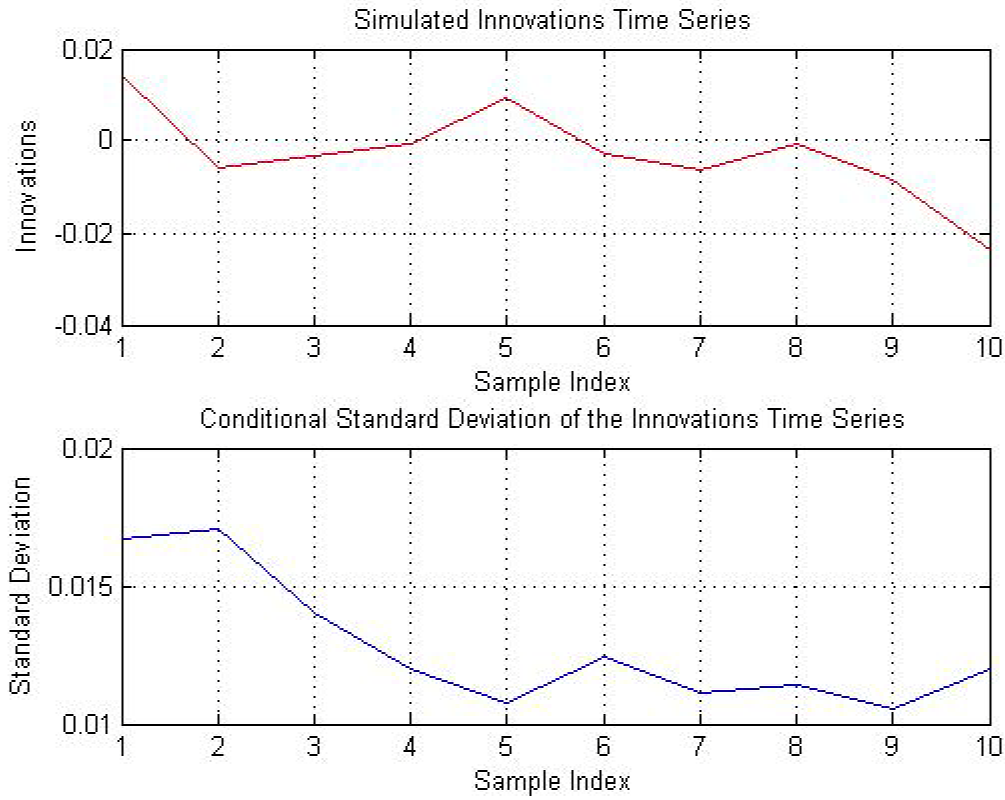
Gornji ocenjeni model ćemo označiti sa **(*)**

Na kraju, na *Slici 11* su prikazane simulirane vrednosti inovacija za narednih deset dana, znači od 22.08.2009 – 7.09.2009 (vikendom se ne trguje), a zatim standradne devijacije koje smo dobili na sledeći način:

[U , H] = ugarchsim(Kappa , Alpha , Beta ,10) (funkcija *ugarchsim* simulira vrednosti a_t za sledećih 10 koraka pa po *GARCH* (1,1) računa volatilnosti tj. standardne devijacije u tom period)

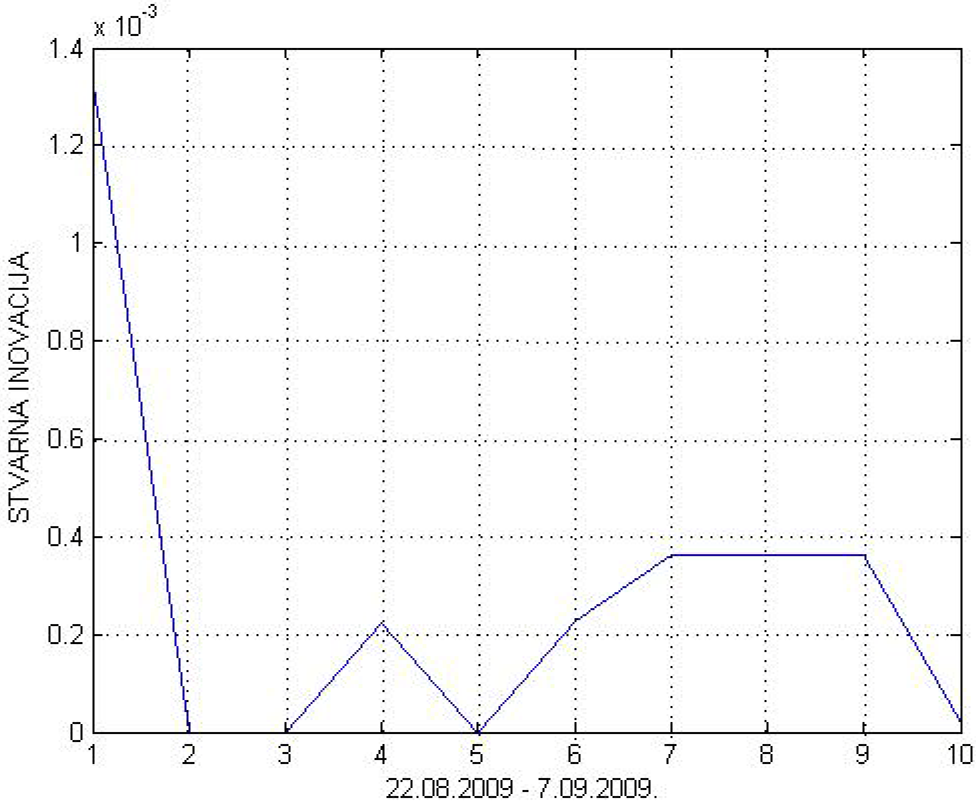
U nam pretstavljavektor inovacija (a_t) , dok je *H* vektor uslovnih varijansi (σ_t). Procena za naredni period se vrši na osnovu procenjenih vrednosti parametara, u našem slučaju, ocenjenog modela *GARCH (1,1)* **(*)**

Funkcija *ugarchplot(U,H)* crta a_t i volatilnost .



Slika 11

Iz stvarnih cena akcija u periodu 22.08.2009 – 07.09.2009 dobijamo niz stvarnih inovacija (*Slika 12*) što nam daje mogćnost da vidimo koliko dobro naš GARCH model opisuje stvarnost.



Slika 12

U *Tabeli 9* su upoređene stvarne i simulirane vrednosti inovacija za period 22.08.2009 – 07.09.2009:

DANI	STVARNE INOVACIJE	SIMULIRANE INOVACIJE
1	0,001340	0,014217
2	0,000000	-0,006020
3	0,000000	-0,003164
4	0,000224	-0,000607
5	0,000000	0,009200
6	0,000229	-0,002646
7	0,000363	-0,006174
8	0,000363	-0,000840
9	0,000363	-0,008325
10	0,000018	-0,023844

Tabela 9

Nažalost, kao što vidimo iz tabele, nismo dobili baš slične rezultate . Brojni su razlozi ovakvog stanja, a jedan od glavnih je uticaj krize na tržište, i šokovi koji se kao njene posledice skoro svakodnevno događaju. *GARCH* se i pokazao kao model koji nije baš odgovarajući kada su pitanju neka velika odstupanja na tržištu, te se stalnom modifikacijom, proširuje njegov domet i pospešuje njegova učinkovitost.

6. ZAKLJUČAK

Ovim radom smo prikazali samo mali deo teorije *ARCH* i *GARCH* modela, vrlo moćnih aparata u savremenoj ekonometrijskoj analizi. Ono što potvrđuje njihovu atraktivnost jeste što danas postoji puno podvrsta osnovnog modela, koji je ovde prikazan , a najpoznatiji su *IGARCH* (njihova glavna karakteristika je da je suma parametara jednaka jedinici) i na primer *ARCH* in Mean Model ili $ARCH - M$ kod koga je uslovno očekivanje u funkciji od σ^2 i mnogi, mnogi drugi. To samo pokazuje koliko se ovi modeli izučavaju, modifikuju i poboljšavaju jer svakom novom korekcijom daju sve bolje i bolje rezultate, i prevazilaze određene nedostatke.

Naravno, kao i svi modeli, ni ovi nisu savršen prikaz stvarnog stanja. Tako standardna devijacije nije uvek najbolji izbor za merilo rizika zato što prinos akcija nije simetrično distribuiran, pa tu nastupa *GARCH* koji to koriguje, ali donosi neke nove nedostatke, a neki od njih su što ne funkcioniše najbolje u kriznim situacijama (kada tržišta trpe velike šokove), konstantnost koeficijenata korelacije i slično.

Uprkos tome, *ARCH* i *GARCH* vrlo brzo izračunavaju "vrednost rizika" a samim tim daju brzu aproksimaciju tržišnog rizika. Uz korišćenje dobrih paketa, ova metoda postaje vrlo efikasan alat u današnjim modernim finansijskim tokovima. Analiza *ARCH* i *GARCH* modela, kao i njihov dalji razvoj otvaraju statistički prostor za izlaganje i testiranje brojnih teorija iz oblasti formiranja cena aktive i analize portfolija.

7. DODATAK

Ovde je prikazana detaljna tabela podataka koji se odnose na anlizu akcija firme „Podravka prehrambrena industrija d.d. " u petoj glavi. U tabeli su prikazan datumi trgovanja, cene akcije po danima, količina prodatih akcija takođe po danima, prinosi prodatih akcija, kao i njihove inovacije i dnevna volatilnost za period od 21.07.2008 – 21.08.2009 koji obuhvata ukupno 247 aktivnih dana trgovanja (vikendi su izuzeti) .

DAN	***DATUM***	***CENA***	***KOLIČINA***	***LOGARITAMSKI PRINOSI***	***VREDNOSTI INOVACIJE***	***VOLATILNOST PO DANIMA***
1	21.7.2008	363,00	493	/	/	/
2	22.7.2008	364,00	1283	0,002751	0,000008	5,35392
3	23.7.2008	363,99	338	-0,000027	0,000000	4,12551
4	24.7.2008	364,00	400	0,000027	0,000000	3,17895
5	25.7.2008	365,00	10750	0,002743	0,000008	2,44957
6	28.7.2008	364,94	371	-0,000164	0,000000	1,88755
7	29.7.2008	368,00	518	0,008350	0,000070	1,45448
8	30.7.2008	365,00	684	-0,008186	0,000067	1,12080
9	31.7.2008	365,00	431	0,000000	0,000000	0,86369
10	1.8.2008	364,97	337	-0,000082	0,000000	0,66556
11	6.8.2008	364,83	78	-0,000384	0,000000	0,51291
12	7.8.2008	364,00	516	-0,002278	0,000005	0,39530
13	8.8.2008	364,90	365	0,002469	0,000006	0,30470
14	11.8.2008	364,96	258	0,000164	0,000000	0,23491
15	12.8.2008	364,98	226	0,000055	0,000000	0,18117
16	13.8.2008	365,00	1984	0,000055	0,000000	0,13981
17	14.8.2008	364,00	64	-0,002743	0,000008	0,10800
18	18.8.2008	363,99	164	-0,000027	0,000000	0,08358
19	19.8.2008	364,00	1949	0,000027	0,000000	0,06485
20	20.8.2008	363,96	5478	-0,000110	0,000000	0,05054
21	21.8.2008	369,98	507	0,016405	0,000269	0,03967
22	22.8.2008	369,00	463	-0,002652	0,000007	0,03318
23	25.8.2008	364,50	788	-0,012270	0,000151	0,02672
24	26.8.2008	367,86	1896	0,009176	0,000084	0,02329
25	26.8.2008	365,00	98000	-0,007805	0,000061	0,02034
26	27.8.2008	364,88	1131	-0,000329	0,000000	0,01810
27	28.8.2008	363,88	1179	-0,002744	0,000008	0,01587
28	29.8.2008	363,88	2010	0,000000	0,000000	0,01449
29	1.9.2008	365,00	657	0,003073	0,000009	0,01349
30	2.9.2008	365,00	3963	0,000000	0,000000	0,01301
31	3.9.2008	367,35	198	0,006418	0,000041	0,01256
32	4.9.2008	363,00	1673	-0,011912	0,000142	0,01295

33	5.9.2008	364,99	5983	0,005467	0,000030	0,01465
34	8.9.2008	364,85	15854	-0,000384	0,000000	0,01403
35	9.9.2008	364,70	585	-0,000411	0,000000	0,01320
36	10.9.2008	364,25	184	-0,001235	0,000002	0,01268
37	11.9.2008	364,48	6042	0,000631	0,000000	0,01239
38	12.9.2008	363,95	2326	-0,001455	0,000002	0,01219
39	15.9.2008	359,47	2387	-0,012386	0,000153	0,01210
40	16.9.2008	350,00	28894	-0,026698	0,000713	0,01437
41	17.9.2008	365,00	41764	0,041964	0,001761	0,02167
42	18.9.2008	350,00	2739	-0,041964	0,001761	0,03243
43	19.9.2008	354,00	4269	0,011364	0,000129	0,03738
44	22.9.2008	350,00	4168	-0,011364	0,000129	0,03065
45	23.9.2008	350,00	9393	0,000000	0,000000	0,02584
46	24.9.2008	349,50	1734	-0,001430	0,000002	0,02130
47	25.9.2008	350,00	274	0,001430	0,000002	0,01810
48	26.9.2008	338,00	3888	-0,034887	0,001217	0,01589
49	29.9.2008	346,85	1203	0,025847	0,000668	0,02649
50	30.9.2008	344,00	4956	-0,008251	0,000068	0,02730
51	1.10.2008	349,86	10	0,016891	0,000285	0,02297
52	2.10.2008	339,99	32688	-0,028617	0,000819	0,02206
53	3.10.2008	335,89	21106	-0,012132	0,000147	0,02606
54	6.10.2008	327,99	373	-0,023801	0,000566	0,02281
55	7.10.2008	322,00	2622	-0,018432	0,000340	0,02442
56	9.10.2008	322,00	49852	0,000000	0,000000	0,02344
57	10.10.2008	295,00	3568	-0,087576	0,007670	0,01958
58	13.10.2008	290,00	6252	-0,017094	0,000292	0,05832
59	14.10.2008	309,99	38383	0,066659	0,004443	0,04685
60	15.10.2008	297,80	1932	-0,040118	0,001609	0,05627
61	16.10.2008	294,99	2507	-0,009481	0,000090	0,05090
62	17.10.2008	295,00	1712	0,000034	0,000000	0,04040
63	20.10.2008	305,00	73	0,033336	0,001111	0,03204
64	21.10.2008	305,00	9006	0,000000	0,000000	0,03344
65	22.10.2008	297,00	367	-0,026580	0,000706	0,02686
66	23.10.2008	303,94	3208	0,023098	0,000534	0,02780
67	24.10.2008	297,89	4495	-0,020106	0,000404	0,02707
68	27.10.2008	293,00	11297	-0,016552	0,000274	0,02563
69	28.10.2008	292,83	10946	-0,000580	0,000000	0,02363
70	29.10.2008	293,00	938	0,000580	0,000000	0,01973
71	30.10.2008	294,00	842	0,003407	0,000012	0,01699
72	31.10.2008	295,00	235	0,003396	0,000012	0,01528
73	3.11.2008	294,99	834	-0,000034	0,000000	0,01416
74	4.11.2008	295,00	8062	0,000034	0,000000	0,01328

75	5.11.2008	295,00	95	0,000000	0,000000	0,01273
76	6.11.2008	288,00	2322	-0,024015	0,000577	0,01239
77	6.11.2008	285,00	23268	-0,010471	0,000110	0,01957
78	7.11.2008	288,00	919	0,010471	0,000110	0,01814
79	10.11.2008	287,00	602	-0,003478	0,000012	0,01724
80	11.11.2008	287,00	631	0,000000	0,000000	0,01545
81	12.11.2008	288,00	2637	0,003478	0,000012	0,01411
82	13.11.2008	286,90	8395	-0,003827	0,000015	0,01343
83	14.11.2008	285,99	5613	-0,003177	0,000010	0,01305
84	17.11.2008	285,00	7230	-0,003468	0,000012	0,01275
85	18.11.2008	284,80	14309	-0,000702	0,000000	0,01260
86	19.11.2008	284,00	22290	-0,002813	0,000008	0,01232
87	20.11.2008	281,99	29510	-0,007103	0,000050	0,01228
88	21.11.2008	278,99	2691	-0,010696	0,000114	0,01293
89	24.11.2008	260,00	597	-0,070494	0,004969	0,01425
90	25.11.2008	269,00	1596	0,034030	0,001158	0,04687
91	26.11.2008	263,99	140	-0,018800	0,000353	0,04280
92	27.11.2008	268,45	1521	0,016753	0,000281	0,03590
93	28.11.2008	261,00	1687	-0,028144	0,000792	0,03060
94	1.12.2008	263,00	9101	0,007634	0,000058	0,03058
95	2.12.2008	259,95	9219	-0,011665	0,000136	0,02522
96	3.12.2008	264,89	2134	0,018825	0,000354	0,02214
97	4.12.2008	262,00	1315	-0,010970	0,000120	0,02219
98	5.12.2008	262,50	850	0,001907	0,000004	0,01997
99	8.12.2008	264,00	1240	0,005698	0,000032	0,01719
100	9.12.2008	263,00	911	-0,003795	0,000014	0,01568
101	10.12.2008	263,00	234	0,000000	0,000000	0,01446
102	11.12.2008	261,90	304	-0,004191	0,000018	0,01347
103	12.12.2008	261,90	2475	0,000000	0,000000	0,01313
104	15.12.2008	261,99	271	0,000344	0,000000	0,01263
105	16.12.2008	261,00	276	-0,003786	0,000014	0,01233
106	17.12.2008	261,00	1354	0,000000	0,000000	0,01239
107	18.12.2008	262,00	1599	0,003824	0,000015	0,01218
108	19.12.2008	262,50	1540	0,001907	0,000004	0,01231
109	22.12.2008	262,97	49	0,001789	0,000003	0,01219
110	23.12.2008	265,00	1099	0,007690	0,000059	0,01212
111	24.12.2008	265,00	1980	0,000000	0,000000	0,01298
112	29.12.2008	260,00	4120	-0,019048	0,000363	0,01255
113	30.12.2008	262,88	1700	0,011016	0,000121	0,01727
114	31.12.2008	261,00	777	-0,007177	0,000052	0,01684
115	5.1.2009	262,00	123	0,003824	0,000015	0,01571
116	7.1.2009	262,00	299	0,000000	0,000000	0,01448

117	8.1.2009	258,00	1294	-0,015385	0,000237	0,01349
118	9.1.2009	258,00	64	0,000000	0,000000	0,01617
119	12.1.2009	254,00	159	-0,015625	0,000244	0,01458
120	13.1.2009	257,99	637	0,015587	0,000243	0,01681
121	14.1.2009	254,97	255	-0,011775	0,000139	0,01800
122	15.1.2009	254,00	3025	-0,003812	0,000015	0,01749
123	16.1.2009	255,00	3408	0,003929	0,000015	0,01565
124	19.1.2009	255,00	6814	0,000000	0,000000	0,01446
125	20.1.2009	255,60	3199	0,002350	0,000006	0,01347
126	21.1.2009	256,00	3507	0,001564	0,000002	0,01293
127	22.1.2009	258,00	3872	0,007782	0,000061	0,01256
128	23.1.2009	256,00	17	-0,007782	0,000061	0,01325
129	26.1.2009	255,39	71	-0,002386	0,000006	0,01364
130	27.1.2009	254,99	35	-0,001567	0,000002	0,01305
131	28.1.2009	252,89	2633	-0,008270	0,000068	0,01262
132	29.1.2009	253,00	981	0,000435	0,000000	0,01341
133	30.1.2009	250,00	80	-0,011929	0,000142	0,01281
134	2.2.2009	248,82	479	-0,004731	0,000022	0,01458
135	3.2.2009	240,00	542	-0,036091	0,001303	0,01388
136	4.2.2009	240,00	12	0,000000	0,000000	0,02647
137	5.2.2009	244,98	1562	0,020538	0,000422	0,02176
138	6.2.2009	245,00	2	0,000082	0,000000	0,02258
139	9.2.2009	244,00	801	-0,004090	0,000017	0,01897
140	10.2.2009	243,59	5217	-0,001682	0,000003	0,01667
141	11.2.2009	240,00	10344	-0,014848	0,000220	0,01495
142	12.2.2009	229,00	1828	-0,046917	0,002201	0,01672
143	13.2.2009	229,00	570	0,000000	0,000000	0,03343
144	16.2.2009	228,97	417	-0,000131	0,000000	0,02685
145	17.2.2009	215,00	1227	-0,062953	0,003963	0,02203
146	18.2.2009	213,47	5165	-0,007142	0,000051	0,04422
147	19.2.2009	212,99	6213	-0,002251	0,000005	0,03520
148	20.2.2009	211,00	14228	-0,009387	0,000088	0,02820
149	23.2.2009	205,00	3804	-0,028848	0,000832	0,02377
150	24.2.2009	195,00	2095	-0,050010	0,002501	0,02704
151	25.2.2009	195,00	515	0,000000	0,000000	0,03883
152	26.2.2009	199,00	467	0,020305	0,000412	0,03086
153	27.2.2009	188,00	683	-0,056863	0,003233	0,02811
154	2.3.2009	195,50	2303	0,039118	0,001530	0,04290
155	3.3.2009	190,00	8329	-0,028536	0,000814	0,04209
156	4.3.2009	193,99	1290	0,020783	0,000432	0,03795
157	5.3.2009	194,80	29	0,004167	0,000017	0,03298
158	6.3.2009	193,99	28	-0,004167	0,000017	0,02665

159	9.3.2009	190,00	2622	-0,020783	0,000432	0,02205
160	10.3.2009	186,00	2182	-0,021277	0,000453	0,02283
161	11.3.2009	186,00	721	0,000000	0,000000	0,02347
162	12.3.2009	188,00	3249	0,010695	0,000114	0,01961
163	13.3.2009	184,50	2407	-0,018792	0,000353	0,01822
164	16.3.2009	183,20	3371	-0,007071	0,000050	0,01995
165	17.3.2009	186,00	1595	0,015168	0,000230	0,01772
166	18.3.2009	183,00	1972	-0,016261	0,000264	0,01836
167	19.3.2009	184,89	6024	0,010275	0,000106	0,01910
168	20.3.2009	183,98	3339	-0,004934	0,000024	0,01780
169	23.3.2009	184,85	800	0,004718	0,000022	0,01598
170	24.3.2009	183,99	2522	-0,004663	0,000022	0,01477
171	25.3.2009	183,99	11163	0,000000	0,000000	0,01399
172	26.3.2009	185,00	845	0,005474	0,000030	0,01317
173	27.3.2009	184,00	890	-0,005420	0,000029	0,01313
174	30.3.2009	183,50	338	-0,002721	0,000007	0,01310
175	31.3.2009	182,90	340	-0,003275	0,000011	0,01274
176	1.4.2009	185,00	10842	0,011416	0,000130	0,01257
177	2.4.2009	197,98	2953	0,067810	0,004598	0,01429
178	3.4.2009	199,98	215	0,010051	0,000101	0,04524
179	6.4.2009	184,00	300	-0,083282	0,006936	0,03624
180	7.4.2009	189,90	510	0,031562	0,000996	0,06046
181	8.4.2009	185,00	3613	-0,026142	0,000683	0,05130
182	9.4.2009	190,00	12063	0,026668	0,000711	0,04356
183	14.4.2009	190,00	3045	0,000000	0,000000	0,03838
184	15.4.2009	188,02	325	-0,010476	0,000110	0,03053
185	17.4.2009	190,00	124	0,010476	0,000110	0,02560
186	20.4.2009	189,02	69	-0,005171	0,000027	0,02216
187	21.4.2009	195,00	243	0,031147	0,000970	0,01897
188	22.4.2009	198,99	20340	0,020255	0,000410	0,02579
189	23.4.2009	193,04	226	-0,030357	0,000922	0,02488
190	24.4.2009	194,01	7198	0,005012	0,000025	0,02827
191	27.4.2009	195,00	7603	0,005090	0,000026	0,02328
192	28.4.2009	199,00	788	0,020305	0,000412	0,01974
193	29.4.2009	198,00	705	-0,005038	0,000025	0,02136
194	30.4.2009	201,15	184	0,015784	0,000249	0,01840
195	4.5.2009	205,00	3306	0,018959	0,000359	0,01896
196	5.5.2009	216,00	12513	0,052268	0,002732	0,02042
197	6.5.2009	225,00	2300	0,040822	0,001666	0,03761
198	7.5.2009	235,00	2607	0,043485	0,001891	0,03968
199	8.5.2009	225,01	8759	-0,043441	0,001887	0,04196
200	11.5.2009	239,00	785	0,060319	0,003638	0,04323

201	12.5.2009	244,98	1236	0,024713	0,000611	0,05143
202	13.5.2009	230,00	1215	-0,063097	0,003981	0,04331
203	14.5.2009	225,00	217	-0,021979	0,000483	0,05281
204	15.5.2009	225,00	140	0,000000	0,000000	0,04370
205	18.5.2009	230,00	185	0,021979	0,000483	0,03451
206	19.5.2009	239,49	2003	0,040432	0,001635	0,03100
207	20.5.2009	240,00	88	0,002127	0,000005	0,03594
208	21.5.2009	232,71	420	-0,030846	0,000951	0,02874
209	22.5.2009	239,00	1282	0,026671	0,000711	0,03057
210	25.5.2009	240,00	557	0,004175	0,000017	0,03002
211	26.5.2009	235,00	338	-0,021053	0,000443	0,02448
212	27.5.2009	258,00	836	0,093374	0,008719	0,02436
213	28.5.2009	285,00	10711	0,099530	0,009906	0,06286
214	29.5.2009	299,00	6040	0,047954	0,002300	0,08017
215	1.6.2009	305,00	5169	0,019868	0,000395	0,06934
216	2.6.2009	298,00	2514	-0,023218	0,000539	0,05543
217	3.6.2009	280,00	3054	-0,062304	0,003882	0,04583
218	4.6.2009	263,00	4340	-0,062636	0,003923	0,05368
219	5.6.2009	280,00	1001	0,062636	0,003923	0,05798
220	8.6.2009	268,00	5177	-0,043803	0,001919	0,06039
221	9.6.2009	255,00	1273	-0,049723	0,002472	0,05479
222	10.6.2009	260,00	3493	0,019418	0,000377	0,05333
223	12.6.2009	260,00	5180	0,000000	0,000000	0,04358
224	15.6.2009	250,00	345	-0,039221	0,001538	0,03443
225	16.6.2009	258,00	1350	0,031499	0,000992	0,03723
226	17.6.2009	240,00	153	-0,072321	0,005230	0,03582
227	18.6.2009	250,00	2842	0,040822	0,001666	0,05426
228	19.6.2009	250,00	230	0,000000	0,000000	0,04982
229	24.6.2009	241,00	10	-0,036664	0,001344	0,03913
230	26.6.2009	245,00	1800	0,016461	0,000271	0,03889
231	29.6.2009	245,00	25	0,000000	0,000000	0,03264
232	30.6.2009	240,01	54	-0,020578	0,000423	0,02627
233	1.7.2009	240,00	423	-0,000042	0,000000	0,02528
234	2.7.2009	226,01	2577	-0,060060	0,003607	0,02090
235	3.7.2009	220,00	478	-0,026952	0,000726	0,04221
236	6.7.2009	244,48	6598	0,105506	0,011132	0,03756
237	7.7.2009	228,00	7	-0,069788	0,004870	0,07360
238	8.7.2009	227,00	112	-0,004396	0,000019	0,07247
239	9.7.2009	227,52	19	0,002288	0,000005	0,05642
240	10.7.2009	230,00	2001	0,010841	0,000118	0,04416
241	13.7.2009	235,00	1041	0,021506	0,000463	0,03554
242	14.7.2009	234,11	39	-0,003794	0,000014	0,03154

243	15.7.2009	245,00	309	0,045467	0,002067	0,02557
244	16.7.2009	237,02	153	-0,033114	0,001097	0,03585
245	17.7.2009	236,36	60	-0,002788	0,000008	0,03558
246	20.7.2009	230,10	138	-0,026842	0,000720	0,02850
247	21.7.2009	244,95	384	0,062540	0,003911	0,02885
248	22.7.2009	228,50	298	-0,069518	0,004833	0,04626
249	23.7.2009	240,00	243	0,049103	0,002411	0,05737
250	24.7.2009	243,00	2424	0,012423	0,000154	0,05469
251	27.7.2009	235,07	176	-0,033178	0,001101	0,04354
252	28.7.2009	235,07	509	0,000000	0,000000	0,04038
253	29.7.2009	235,00	7	-0,000298	0,000000	0,03202
254	30.7.2009	235,57	274	0,002423	0,000006	0,02581
255	31.7.2009	236,50	662	0,003940	0,000016	0,02134
256	3.8.2009	240,00	102	0,014691	0,000216	0,01827
257	4.8.2009	240,00	320	0,000000	0,000000	0,01853
258	6.8.2009	235,00	474	-0,021053	0,000443	0,01616
259	7.8.2009	240,00	180	0,021053	0,000443	0,01981
260	10.8.2009	230,01	842	-0,042516	0,001808	0,02169
261	11.8.2009	230,00	430	-0,000043	0,000000	0,03273
262	12.8.2009	230,00	1126	0,000000	0,000000	0,02633
263	17.8.2009	245,00	2350	0,063179	0,003992	0,02165
264	18.8.2009	241,00	10	-0,016461	0,000271	0,04424
265	19.8.2009	245,00	57	0,016461	0,000271	0,03646
266	20.8.2009	245,01	123	0,000041	0,000000	0,03093
267	21.8.2009	260,00	1482	0,059383	0,003526	0,02501

LITERATURA

[1] Enders, W. (2004), “Applied Econometric Time Series”, John Wiley &Sons, inc.

[2] Bollerslev, T. (1986), “Generalized Autorregressive Conditional Heteroskedasticity”, Journal of Econometrics, 31, 307-327.

[3] Engle, R. (1982), “Autorregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of United Kingdom Inflation”, Econometrica, 50, 987-1008.

[4] Engle R.F., G. Gonzalez-Rivera (1991) "Semiparametric ARCH Models", Journal of Business and Economic Statistics, 19, 3-29.

[5] Maddala, G. S. (2001),” Introduction to Econometrics” , 3rd Edition, John Wiley &Sons, inc.

[6] Alexander, C. (2001), *Market Models: A Guide to Financial Data Analysis*, John Wiley & Son Ltd., New York

[7] Diebold, F. X. (1986), “Modelling the persistence of Conditional Variances: A Comment,” Econometric Reviews, 5, 51-56.

[8] Posedel, P. , “Properties and Estimation of GARCH(1,1) Model”.

[9] T. Bollerslev, R. F. Engle, and D. B. Nelson , “Arch models” , Northwestern University and N.B.E.R., University of California, San Diego and N.B.E.R., and University of Chicago and N.B.E.R.

[10] Radović,O , Jolović, A , “Volatilnost kao mera rizika i njeno predviđanje”, Ekonomske teme 2002, vol. 40, br. 1-2, str. 639-649

[11] http://zse.hr/

[12] MATLAB Help

Kratka biografija

Zoranka Desnica je rođena 11. juna 1985. godine u Novom Sadu. Osnovnu školu „Svetozar Marković - Toza“ završila je u Novom Sadu 2000. godine i nosilac je „*Vukove diplome*“. Gimnaziju „Svetozar Marković“, opšti smer, završila je u Novom Sadu 2004. godine, takođe kao nosilac „*Vukove diplome*“. Posle toga, upisala je Prirodno-matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku, smer Diplomirani matematičar - matematika finansija, gde je diplomirala 2008. sa prosečnom ocenom 9,94. Iste godine upisala je master studije iz primenjene matematike na istom fakultetu.

Aktivno se bavi savremenim plesom od svoje trinaeste godine.

Novi Sad, 21. septembar 2009. Zoranka Desnica

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO – MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:	
RBR	
Identifikacioni broj:	
IBR	
Tip dokumentacije:	*Monografska dokumentacija*
TD	
Tip zapisa:	*Tekstualni štampani materijal*
TZ	
Vrsta rada:	*Master teza*
VR	
Autor:	*Zoranka Desnica*
AU	
Mentor:	*Dr Zorana Lužanin*
MN	
Naslov rada:	*Vremenske serije u finansijama : ARCH i GARCH*
NR	
Jezik publikacije:	*Srpski (latinica)*
JP	
Jezik izvoda:	*s/e*
JI	
Zemlja publikovanja:	*Republika Srbija*
ZP	
Uže geografsko područje:	*Vojvodina*
UGP	
Godina:	*2009*
GO	
Izdavač:	*Autorski reprint*

IZ

Mesto i adresa: *Trg Dositeja Obradovića 4, 21000 Novi Sad*

MA

Fizički opis: *7 poglavlja / 79 strana / 4 lit.citata / 12 slika / 9 tabele / 2 grafika*

FO

Naučna oblast: *Matematika*

NO

Naučna disciplina: *Primenjena matematika*

ND

Ključne reči: *volatilnost, vremenske serije, heteroskedastičnost, ARCH (q), GARCH(p,q) , funkcija verodostojnosti, ocena parametara, testovi značajnosti*

PO UDK

Čuva se: *u biblioteci Departmana za matematiku i informatiku Prirodno – matematičkog fakulteta u NovomSadu*

ČU

Izvod: *Tema ovog rada su modeli za procenu i analizuvolatilnosti koja je pretstavljena uslovnom standardnom devijacijom najčešće prinosa i služi za merenje rizika i upravljanje njime. Ti modeli su ARCH i GARCH, posebna vrsta autoregresivnih modela koji procenjuju volatilnost na osnovu informacijskog skupa generisanog istorijskim podacima . Pretstavljena je i metoda za ocenu parametara – metoda maksimalne verodostojnosti . Na kraju je prikazana simulacija GARCH modela uz pomoć MATLAB softverskog paketa.*

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: *07.07.2009*

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: *Dr Nataša Krejić, redovni profesor*

Član: *Dr Zorana Lužanin, redovni profesor*

Član: *Dr Dora Seleši, docent*

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:	
ANO	
Identification number:	
INO	
Document type:	*Monograph type*
DT	
Type of record:	*Printed text*
TR	
Contents code:	*Master thesis*
CC	
Author:	*Zoranka Desnica*
AU	
Mentor:	*Dr Zorana Lužanin*
MN	
Title:	*Time series in finance : ARCH and GARCH*
XI	
Language of text:	*Serbian (latin)*
LT	
Language of abstract:	*s/e*
LA	
Country of publication:	*Republic of Serbia*
CP	
Locality of publication:	*Vojvodina*
UGP	
Publication year:	*2009*
PU	
Publisher:	*Auhtor’s reprint*
PU	

Publ. place: *Trg Dositeja Obradovića 4, 21000 Novi Sad*

PP

Physical description: *7 chapters/ 79 pages/ 4 references/12 pictures/ 9 tables / 2 graphs*

PD

Scientific field: *Mathematics*

SF

Scientific discipline: *Mathematical Modeling*

SD

Key words: *volatility, time series, heteroscedasticity, ARCH (q), GARCH (p, q), the likelihood function , estimate parameters, tests of significance*

UC

Holding data: *Department of Mathematics and Informatics' Library, Faculty of Science, Novi Sad*

HD

Abstract: *The topic of this paper are models for assessment and analysis of the volatility that is represented by the conditional standard deviation of return , often used to measure risk and manage it. These models are ARCH and the GARCH which estimate volatility based on data from the past, ie. on the basis of information set generated by historical data on volatility. Below is presented a method for assessing the parameters of the model - maximum likelihood method. At the end , we presente the simulation of GARCH models with the help of MATLAB software package.*

AB

Accepted by the Scientific Board on: *07. 07. 2009.*

Defended:

Thesis defend board: *Dr Nataša Krejić, full professor*

Member: *Dr Zorana Lužanin, full professor*

Member: *Dr Dora Seleši, docent*