



**UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI
FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU
I INFORMATIKU**



Botoš Žofia

Modelirani zadaci u matematici

-master rad-

Mentor: dr Arpad Takači

Novi Sad, 2014.

Literatura

Predgovor	4
1. Matematičko modeliranje.....	6
1.1. Istorija modeliranja	6
1.2. Definicija.....	11
1.3. Tipovi modela	12
1.4. Proces modeliranja	13
1.5. Otvoreni zadaci	16
1.5.1. Primer za situaciju problema	17
1.5.2. Primer za mutan problem	18
1.5.3. Primer za interpretacioni problem	18
1.5.4. Primer za problem pretraživanja strategije	19
1.5.5. Primer za interpretacioni zadatak	19
1.5.6. Primer za jednostavan otvoren zadatak	20
1.5.7. Primer za osmišljavanje zadatka.....	21
1.5.8. Primer za osmišljavanje početnog stanja.....	21
1.6. Obuveni zadaci i zadaci bliski realnosti.....	21
1.6.1. Obuveni zadatak	22
1.6.2. Zadaci bliski realnosti.....	22
1.6.3. Zadaci modeliranja	24
1.7. Način obrade zadatka	25
1.8. Ciljevi modeliranja.....	25
1.8.1. Razvijanje kompetencija.....	25
1.8.2. Motivacija.....	26
2. Mogućnost izrade zadataka	27
3. Izrađeni zadaci.....	28
3.1. Zadaci planiranja	28
3.1.1. Ugrađeni orman	28
3.1.2. Izgradnja stepeništa po principu „sam svoj majstor”	31
3.1.3. Alternativna božićna jelka	34
3.2. Zadaci za prognoziranje	38
3.2.1. Opasno otapanje	38
3.3. Objašnjavajući zadaci.....	41
3.3.1. Lego-lopta.....	41
3.4. Opisni zadaci	43
3.4.1. Mafin sa duplim čokoladnim nadevom.....	43
3.4.2. Venecijanska gondola.....	48

3.4.3. Pumpanje lopte	52
4. Mogućnosti praktičnih primena jednog modela	63
4.1. Ekspencijalni rast (Maltusov model).....	64
4.2. Logistički rast (Verhulstov model)	66
4.3. Interakcija između populacija	71
4.3.1. Model ulova-grabljivica	75
4.3.2. Takmičenje između dve vrste	77
4.4. Modeli borbe	81
4.4.1. Tradicionalna borba	81
4.4.2. Gerilska borba.....	83
4.4.3. Mešovita borba (gerilsko-tradicionalna)	84
4.5. Oscilacija	85
4.5.1. Harmonijska oscilacija	87
4.5.2. Prigušene oscilacije	88
5. Geometrijsko prikazivanje približnog rešenja.....	90
5.1. Jednokoračni postupci	90
5.1.1. Ojler-Košijev postupak.....	90
5.1.2. Poboljšan Ojlerov postupak.....	92
5.1.3. Runge-Kuta metod.....	93
5.2. Greška metode približavanja	95
5.3. Metode prediktor-korektor	100
5.4. Primer sa sladoledom	104
Zaključak	106
Literatura	107
Biografija.....	109
Ključna dokumentacija.....	110

Predgovor

Reforma obrazovanja je danas važna tema u Srbiji, budući da straživanja često ukazuju na to da učenici ne poseduju dovoljno praktičnog znanja. Zbog toga je bitno da se nastavnici upoznaju sa novijim nastavnim metodama i da pored leksičkog znanja postave akcenat i na prikazivanje praktične primene znanja i predavanja. Zadaci matematičkog modeliranja služe upravo tom cilju: da stvarnost povežemo sa matematičkim znanjem. Cilj matematičkog modeliranja je da obuhvati što više raznih oblasti nauke, kao što su medicina, biologija, tehničke i fizičke nauke, socijalne nauke, psihologija, ekonomija i da se prikažu matematički modeli pojedinih pojava iz pomenutih oblasti. Matematičko modeliranje realnih pojava doprinosi primeni matematike u tokovima savremene civilizacije, što predstavlja temelj naučnog i tehničkog napretka.

Iako je za mene matematika uvek bila lep i zanimljiv predmet, ja sam svesna toga da je većina ljudi nije volela ili je ne voli. Smatram da zadaci modeliranja mogu da pomognu u tome da i ljudi koji nisu u velikoj meri naklonjeni matematici, zavole ovu nauku i da uvide da od nje ima koristi i u svakodnevnom životu. Na žalost, ovom temom se bavi dosta mali broj ljudi, a malo ima i literature na srpskom jeziku. Od stranih knjiga se služimo knjigama na nemačkom i engleskom jeziku. Kao pomoć nam služi materijal projekta LEMA (Learning and Education through Modelling and Applications). Cilj ovog master rada je bila izrada i proba materijala za dalji razvoj nastavnika, materijal koji podučava nastavnike koji predaju u nižim i višim razredima osnovnih škola, kao i u srednjim školama primeni zadataka modeliranja. Cilj, naravno, nije da zadaci modeliranja preuzmu mesto „tradicionalnih“ zadataka, već da oni služe kao dopuna drugim tipovima zadataka. Svojom tezom bih želela da pružim uvid u svet zadataka modeliranja, i kao glavni cilj postavljam izradu zadataka ovog tipa i opis mogućih rešenja, i uz to i upoznavanje jednog novog pristupa koji mi može biti od koristi u mojoj kasnijoj karijeri.

Cilj rada je još i da razmotrim one elemente koji imaju ulogu formiranja shvatanja i gledišta u matematičkom modeliranju, koje se u praksi koriste i na polju obuke i u modeliranju.

Na početku rada su dati osnovni pojmovi potrebni za razumevanje rada u celini. Između ostalog, to su istorija modeliranja, zadatak modeliranja i ciljevi modeliranja. Objašnjeni su tipovi modela i proces modeliranja sa raznim zadacima. Glavna tema je još

moгуćnost izrade modeliranog zadatka - kako izmisliti i posle formirati zadatak. Literatura korišćena pri izradi ovog poglavlja je [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12].

U drugoj glavi se govori o mogućnosti izrade zadataka, gde se postavlja pitanje gde da nađemo zadatke modeliranja. [4]

Treća glava je posvećena upravo temi izrađenih zadataka. Ovde se nalaze primeri sa rešenjima za razne tipove zadataka, kao što su zadaci planiranja, prognoziranje, objašnjavajući i opisni zadaci. Probala sam tako formirati zadatke, da zadovoljavaju svakom nivou uzrasta od osnovne škole, kroz srednje škole do fakulteta.

U četvrtom delu daje se praktična primena matematičkog modela: Maltusov model (ekspencijalni rast), Verhulstov model (logistički rast), Interakcija između populacija: Model ulova-grbljivica i takmičenje između dve vrste, Model borbe: Tradicionalna borba, Gerilska borba, Mešovita borba i na kraju Model oscilacije: Harmonijska oscilacija i prigušene oscilacije . Ovaj deo je zasnovan na literaturi [10, 13, 14].

U zadnjoj glavi je prikazano nekoliko ilustracija približnih geometrijskih rešenja kao što su jednokoračni postupci (Ojler-Košijev postupak, Poboljšani Ojlerov postupak, Runge Kuta metod), greška jednokoračnog postupka i na kraju jedan primer za Njutnov zakon hlađenja. Literatura korišćena pri izradi ovog poglavlja je [10, 11, 12, 13, 14].

Konačno, recimo da je matematičko modeliranje je spoj matematike sa drugim naukama. Cilj je da se učenik ili student osposobi da razne pojave iz života predstavi matematičkim jezikom. Time se stiče stav o ulozi matematike u celokupnoj nauci i omogućava njena primenljivost u raznim oblastima.

1. Matematičko modeliranje

„Sve što čujem zaboravim, što vidim zapamtim, a što uradim - znam.”

kineska poslovice

1.1. Istorija modeliranja

Reč modeliranje je potiče od latinske reči *modellus*, što znači preslikati realnost. Antropolozi tvrde da sposobnost kreiranja apstraktnih modela jedna od najznačajnijih razlika između *homo sapiens* i *homo neandertalensis*. Iako apstraktno predstavljanje „stvarnih predmeta” postoji još od kamenog doba, kako to možemo videti na nekim pećinskim slikama. Veliki prelom u modeliranju nastao je u drevnom Bliskom istoku i Grčkoj. Prvi otkriveni modeli su *brojevi*; brojanje i pisanje brojeva (npr. urezivanje brojeva u kosti) i oni potiču iz 30000 godine p. n. e. Sledeće oblasti u modeliranju su bile astronomija i arhitektura, otprilike 4000 godina p. n. e.

Opštepoznato je da su 2000 godina p. n. e. već najmanje tri civilizacije spomenimo (Vavilon, Egipat, Indija) posedovale matematičko znanje i da su koristili neke vrste matematičkih modela za olakšavanje svakodnevnog života. Matematiku su najviše koristili na algoritamski način za rešavanje konkretnih problema.

U vreme helenizma su razvoj filozofije i njen odnos sa matematikom rezultirali pojavu deduktivnih metoda, što je doprinelo razvoju teorije matematike. Od Talesa iz Mileta (oko 600 god. p.n.e) geometrija je postala važan deo analize stvarnosti i preko analitičke geometrije je izazvala razvoj matematike nezavisno od upotrebe. Tales je bio osnivač jonske iliti miletske škole i bio je prvi grčki prirodnjački filozof – tj. neko ko je istraživao prirodu stvari kao dela jedinstvene celine. Bio je prvi koji svet nije smatrao kao rezultat volje nekih bogova, već je pokušavao da objasni nastanak sveta s posebnim osvrtom na način na koji je svet nastao i na materijale od kojih je nastao.

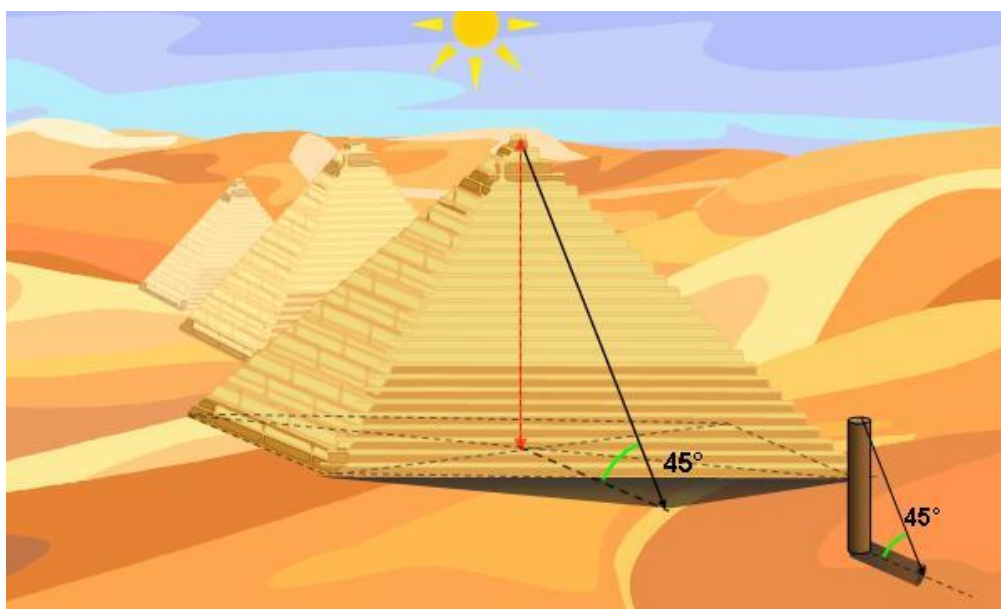
Tales se bavio i astronomskim posmatranjem i kosmološkim problemima kao što je na primer stabilnost Zemlje, prerekao je pomračenje sunca koje se dogodilo 28. maja 585. godine p. n. e, a koje je, pretpostavlja se, doprinelo završetku rata između Lidana i Medana. Moguće je da je u Vaviloniji došao do zapisa tamošnjih sveštenika, naime, oni su već od 721.

g. p. n. e. u verske svrhe posmatrali delimična i potupna pomračenja sunca. Moguće je i da je do ovih saznanja došao na svom putu u Egipat. Pored ovih stvari, razvio je metod za merenje visine predmeta, tako što je merio dužinu senki tih predmeta.

Njemu se pripisuje i uvođenje pojma ugla, kao i uvid u jednakost unakrsnih uglova. On je primetio i da su dva trougla podudarna ako imaju jednaku po jednu stranicu i oba ugla nalegla na tu stranicu. Utvrdio je da je zbir unutrašnjih uglova 180 stepeni i definisao je jednu od prvih teorema u geometriji, teoremu koja je nazvana po njemu. Na osnovu ovoga krug koji je nacrtan na jednu duž (tj. krug čiji prečnik predstavlja ova duž) nazivamo Talesovim krugom. Talesova je zasluga i teorema o paralelnim pravama koje seku dve druge prave i zbog toga se u nekim jezicima (italijanski, francuski, španski, ruski) ova teorema naziva i Talesovom malom teoremom. Hieronim sa Rodosa je tvrdio da je Tales izmerio i visinu Keopsove piramide:

“Hieronim kaže da je pomoću njihovih senki izmerio visinu piramida. Da bi uspeo prvo je uočio momenat kada je senka štapa bila iste dužine kao i visina samoga štapa.”

(Diogen Laertije: Život i mišljenja znamenitih filozofa, I. 27)



1. SLIKA: TALES IZMERIO VISINU PIRAMIDA

Eudem je Talesu pripisivao pribor za merenje udaljenosti brodova koji plove na moru. Ako znamo odgovarajuću nadmorsku visinu, ovo računanje se može izvesti i sa jednim primitivnim priborom, pomoću dva štapića koja sastavljena liče na krake šestara.

Njemu se pripisuje i montaža vodomera.

Proklo, po Eudemu, pripisao je Talesu još tri teoreme:

1. Prečnik polovi krug
2. Uglovi na osnovici jednokrakog trougla su jednaki
3. Naspramni uglovi koje formiraju dve prave koje se seku su jednaki.

Pošto je Tales dao osnove smatra se da je Pitagora sa Samosa bio prvi matematičar koji je dalje razvijao teoriju brojeva, kao i, ono najvažnije, on je započeo i potrebu *dokazivanja*, da bi dobio nove rezultate iz već poznatih teorema.

Značajni filozofi, kao što su Aristotel, Eudoks i još mnogi drugi, doprineli su dosadašnjim saznanjima i u narednih 300 godina posle Talesa i ostale grane matematike su krenule da se razvijaju. Međutim, najveće ostvarenje je postigao Euklid iz Aleksandrije. On je autor poznatog antičkog udžbenika iz matematike, pod naslovom „Elementi”. U njemu je opisao osnove matematike (euklidska geometrija). U „Elementima” iako geometrijskim metodama ali jasno opisuje euklidski algoritam, koji se koristi (i) za pronalaženje najvećeg zajedničkog delioca dva broja ili količine. U „Elementima” osobine geometrijskih objekata izvodi iz relativno malog broja aksioma, i tako je i postao pionir aksiomatske metode moderne matematike. Ostali njegovi radovi govore o perspektivi, konusnim presecima i sfernoj geometriji. Iako većina rezultata prikazana u „Elementima” potiče od drugih matematičara, Euklidova je zasluga da ih je prikazao u jedinstvenoj, logički koherentnoj konstrukciji. Sem toga što je izvršio i nekoliko nedostajućih računa, sem što je Euklid dodao izvestan broj novih rezultata i delove sa teorijom brojeva i prostornom geometrijom.

Euklidova knjiga je vekovima služila kao osnova za predavanje matematike i ovo znanje je iskoristio Eratosten, jedan od prvih „primenjenih matematičara” da bi izračunao udaljenost između Zemlje i Sunca i Zemlje i Meseca. Prihvatio je činjenicu da pomračenje meseca uzrokuje Zemljina senka, a posmatranjem senke je nedvosmisleno zaključio da je Zemlja okrugla. Kada su mu čuvari brane javili da u gradu Asuanu (koji se nalazi skoro tačno na severnom povratniku) za vreme letnje ravnodnevnicе Sunce u podne ne baca senku – a čak i u dno najdubljeg vodomera Nila stižu sunčani zraci – našao je u principu pravilnu metodu za

izračunavanje obima Zemlje, jer u isto vreme je u Aleksandriji izmerivši dužinu senke jednog stuba, našao da je upadni ugao sunčanih zraka 7,2 stepena. Pretpostavivši da Zemlja ima oblik lopte postavio je odnos dužina i uglova:

$$\text{Udaljenost dva grada/obim Zemlje} = \text{izmereni ugao}/360^\circ$$

Na osnovu priče putnika Eratosten je udaljenost između dva grada procenio na 5000 stadiona, i na osnovu toga je izračunao obim zemlje:

$$5000 \cdot 360/7,2 = 250\,000 \text{stadiona.}$$

Bilo je više mernih jedinica koje su se nazivale stadion i ne zna se tačno koju je Eratosten upotrebio. Ako je za svoja merenja koristio stadion na Olimpiji koji je dugačak 185 m onda je obim Zemlje na osnovu ovoga 46 250–46 280 km; otprilike 15% više od realne vrednosti. A ako je koristio egipatski stadion, koji iznosi 157 m, onda je rezultat 39 250 km, što je svega za 2% manje od stvarne vrednosti. Pored ovoga je došao i do uspešnog metoda za izbor prostih brojeva iz ne mnogo velikog skupa, pa je ovaj način rešavanja nazvan po njemu, Eratostenovo sito.

U astronomiji je Ptolomej na osnovu Pitagorine ideje (o opisu nebeskih pojava krugovima) 150. godine n. e. Ptolomej je razvio matematički model Sunčevog sistema, uz pomoć kojeg je mogao da prorekne kretanje meseca i planeta oko Sunca. Ovaj model je bio toliko tačan da je ostao u upotrebi sve do 1619. godine kada se Johan Kepler pojavio sa jednostavnijim i boljim modelom za prikazivanje okretanja planeta. Ovaj model su Njutn i Ajnštajn malo doradili i kao takav je i danas u upotrebi.

Modeliranje stvarnih problema, a naročito ako su u pitanju matematički modeli, bili su u tolikoj meri bitni sa aspekta razvoja čovečanstva, da su nezavisno od svega slične metode izradili u Kini, Indiji i u islamskim zemljama.

Najpoznatiji arapski matematičar je bio Abu Abdalah Muhamad ibn Musa al-Hvarizmi (VIII vek). On je izradio koncept matematičkih algoritama (zbog čega ga neki nazivaju praocem računarske tehnike) i sama reč *algoritam* potiče od pogrešnog latinskog prevoda njegovog imena. Osim ovog se još brojni njegovi radovi bave algebrom, trigonometrijom, astronomijom, geografijom i kartografijom. Sistematično i logično približavanje u slučaju linearnih i kvadratnih jednačina je dovelo do osnova algebre, čiji naziv potiče iz rada pod naslovom „Hisab al-džabr va l-mukabala” (حساب الجبر والمقابلة na arapskom) koji je nastao oko 830. godine (reč *algebra* potiče iz reči *al-džabr* koji se pominje u naslovu).

Na zapadu su sve do 11. veka razvijali matematičke modele, u početku isključivo radi merenja zemlje.

Moguće je da je najveći zapadni matematičar posle antičkih Grka bio Fibonači, Leonardo da Piza (~1170 – ~ 1240). Leonardo je u mladosti putovao sa ocem, trgovcem da bi mu pomagao. Usled toga je mnogo odlazio u istočne zemlje i tako se upoznao sa hindu-arapskim pisanjem brojeva. Uvideo je da je aritmetika jednostavnija i korisnija sa hinduističkim brojevima nego sa rimskim. Fibonači je proputovao Mediteran da bi učio kod vodećih arapskih matematičara tog veka. Sa putovanja se vratio kući oko 1200. godine. 1202. godine, u svojoj 32. godini života izdao je knjigu pod naslovom „Liber Abaci” („Knjiga abakusa”, zapravo „Knjiga o računanju”) koja je sadržala sve što je naučio. Koristio je reč „abakus” u aritmetičkom smislu i time je u Evropi prikazao hindu–arapski način pisanja. Jedinstvena novina u knjizi je bio nov način pisanja brojeva, koji je bio po principu lokalne vrednosti: ” Postoji 10 hindu znakova: 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0. Pomoću ovih znakova možemo zabeležiti bilo koji broj koji želimo.” Ova činjenica je vrlo bitna, jer se na ovaj način uvela nula u Evropu, kao apstraktan model ničega.

Umetnici, kao što su bili slikar Đoto (1267-1336) i renesansni arhitekta i vajar Filipo Bruneleski (1377-1446), razvili su nove geometričke principe, kao što je perspektiva.

U vekovima koji su potom sledili uočeno je sve više matematičkih veza i u isto vreme je rasla i kompleksnost modela. Bitno je da se napomene da je uprkos tome što su Diofan i Abu Abdalah redovno koristili promenljive, ipak je Vijetova zasluga usavršavanje teorije jednačina i modernizacija algebarskih oznaka. Vijet je bio među prvima koji je koeficijente jednačina označavao slovima. Uprkos tome, prošlo je više od 300 godina dok su Kantor i Rasel pojasnili ulogu promenljivih i formulisali odgovarajuće nove matematičke teorije. Matematičko opisivanje osnovnih principa fizike i prirode su postali glavna pokretačka snaga za modeliranje i razvoj matematičkih teorija. Vremenom je došlo do opšteg uverenja da se društvo, isto kao i priroda može matematički analizirati. Naime pokazalo se da je moguće da društvo funkcioniše po zakonitostima koje se uglavnom može opisati i u matematičkoj formi. Vremenom se i ekonomija pojavljuje i danas se u sve većem broju primenjuju modeli i njihova analiza.

1.2. Definicija

Modelirati (tal. modéllare, fr. modeler) raditi (ili izraditi) po izvesnom uzorku; izraditi u malom obliku, predstaviti u manjim razmerama; izraditi (ili izrađivati) modele.¹

Model (tal. modéllo, fr. modéle, l. modullus), 1.v. modul; 2. obrazac, uzorak, muštra; 3. umetničko potpuno ili delimično gola osoba prema kojoj umetnik radi sliku ili kip; 4. u građevinarstvu ili tehnici: uzorak predmeta koji treba izvoditi, izrađen od jeftinog materijala I, obično, u smanjenom obliku; 5. kalup po kome se što izrađuje, na primer liju se u pesku mašinski delovi i dr.

Modeliranje je postupak dobijanja matematičkog opisa neke pojave koja se odvija u realnom svetu, kao što su na primer fizički, hemijski ili elektrotehnički procesi, različite oblasti ekonomije, biologije, sociologije, itd. Sa jedne strane, ovaj opis mora biti relativno jednostavan, a sa druge strane i dovoljno tačan da bi odgovarao svojoj nameni koja je definisana od strane kreatora modela. Suština postupka modeliranja je da se izaberu samo one osobine posmatranog procesa koje predstavljaju potrebne i dovoljne karakteristike da se proces opiše dovoljno tačno sa stanovišta namene modela.

Zadatak modeliranja je da osvetli glavne osobine i fenomene realnog procesa i da ih prevedu na neki apstraktan jezik, kao što je jezik matematike. Na taj način, modeliranje predstavlja integralan deo nauke i tehnologije, koji obuhvata skoro sve oblasti ljudskog delovanja.

Zadaci modeliranja su zapravo zadaci koji očekuju od učenika da sastave ovakve matematičke modele, i da pomoću njih reše svoj zadatak, a posle toga da budu u stanju da ocene dobijene rezultate i da ih uporede sa stvarnošću. Ovo, zapravo, nazivamo modeliranjem.

Po nabranju Katje Mas², opšte karakteristike modeliranih zadataka su sledeće:

- otvorenost
- kompleksnost
- bliskost realnosti

¹<http://www.vokabular.org>

²Leuders, T. und Maas, K. (Hrsg.). (2007). Und man braucht sie doch! Die Nützlichkeit von Mathematik erfahrbar machen. PM Themenheft Praxis der Mathematik, 49(1).

- autentičnost
- zadatak je koncentrisan na problem
- mogu da se reše svođenjem procesa modelovanja

1.3. Tipovi modela

Možemo kreirati razne tipove modela u zavisnosti od cilja koji hoćemo da postignemo:

- opisni tip: cilj ovog tipa modela je da opiše, preslika jednu pojavu; Npr. opisati oblik Ajfelovog tornja pomoću funkcije;
- normativni tip: cilj mu je da prikaže i propiše procese koji nastaju pod datim uslovima. Npr. formula slobodnog pada u fizici;
- prognozirani tip: cilj ovih modela je da pomoću njih možemo nešto da predvidimo. Npr. kada će nestati zalihe nafte sveta;
- objašnjavajući tip: cilj ovih modela je da daju objašnjenja, da bi se postiglo bolje razumevanje, npr. matematičko-fizički model daje objašnjenje na pitanje zašto mehur ima oblik sfere.

Naravno, može da se desi da zadatak ima razne ciljeve i zato ga možemo svrstati u više kategorija. Možemo naći, na primer, objašnjavajuće-opisni ili normativno-prognozirani tip modeliranog zadatka.

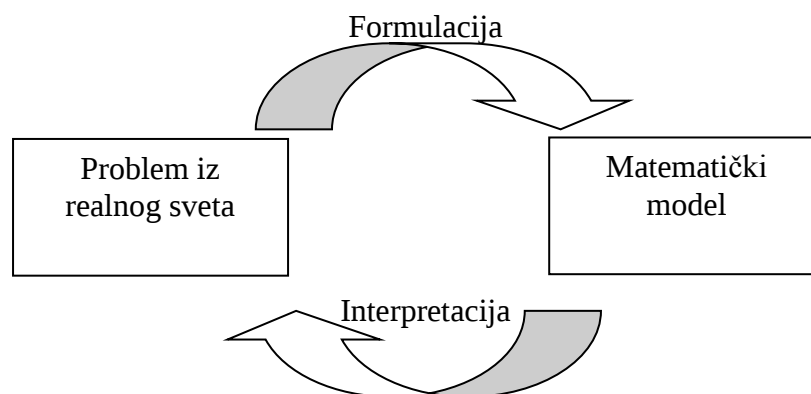
Po drugoj raspodeli:

- O taktičkom modelu govorimo ako je cilj modeliranja izrada predikcije (osnovana predviđanja, prognoze) u vezi sa rešavanjem nekog praktičnog problema.
- Reč je o strateškom modelu ako je cilj modeliranja demonstracija veza između nekih pojava, a s obzirom na istraživačke, obrazovne svrhe ili možda s obzirom na izražavanje stanovišta.
- Simulacioni model je onaj tip koji je u mogućnosti da pokaže slično ponašanje kao kod ispitane pojave, tj. kada se može postaviti nedvosmislena veza između elemenata ponašanja modela i elemenata ponašanja stvarnog sistema. Simulacioni model dakle, kao što mu i ime govori, simulira sistem.

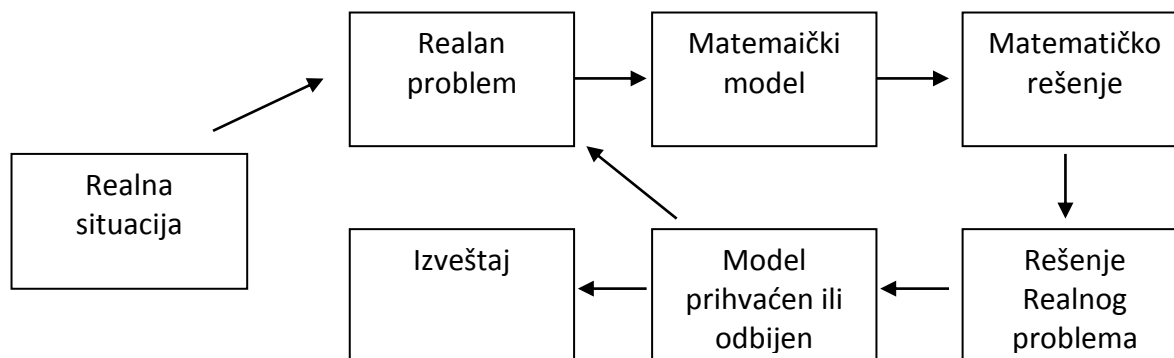
- Opisni model izražava neku vezu u matematičkoj formi, prikazuje pojavu ali je ne simulira. Kao primer možemo uzeti regresivnu pravu ili krivu.
- Diskretan model radi na diskretnoj skali, dakle njegova prostorna ili vremenska rezolucija se ne podrazumeva u skupu realnih brojeva, već samo u skupu prirodnih brojeva. Jednostavan primer je naplata putarine na autoputu.
- Kontinuirani model podrazumeva promenljive na celom kontinuumu (u skupu realnih brojeva).
- Model sa mešovitom ili celom vrednošću ima i promenljive i sa celom vrednošću i neprekidne promenljive.
- O determinističkom modelu govorimo ako model na određene ulazne podatke kao rezultat daje tačno određene brojeve. U determinističkom modelu se nedvosmisleno određuje output modela pomoću određenih parametara i input podataka.
- Stohastički model, suprotno od prethodnog, čiji izlaz nije definisan nego slučajan broj. Stohastičke modele razvijamo u slučaju da bismo u ispitanom procesu uzeli u obzir i ulogu verovatnoće. Simulacione modele u grupi stohastičkih u širem smislu nazivamo i Monte Karlo modelima ili Monte Karlo simulacijama.

Takozvani modeli velikih sistema mogu da sadrže više različitih tipova gore navedenih submodela, kao što su na primer modeli globalnog atmosferskog zagrevanja (GCM) ili modeli ekosistema koji su razvijeni pomoću biomatematičkih i bioinformatičkih sredstava, a znače bitan deo informativnog sistema okoline.

1.4. Proces modeliranja



Po Gloriji Stilman³ proces modeliranja izgleda ovako[8],[9]:



Pomoću jednog zadatka LEMA projekta (LEMA=Learning and Educating through Modelling and Applications project) ćemo pokazati najvažnije korake procesa. Zadatak Havijera Garsije „Potpisom protiv novog zakona” zvuči ovako:

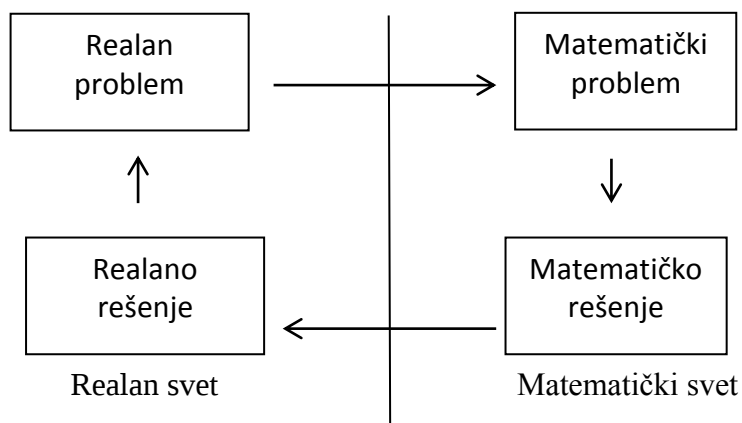
25. aprila 2006. godine je jedan član španske opozicione stranke predstavio parlamentu 4 000 000 sakupljenih potpisa koji su bili prikupljeni zbog nezadovoljstva javnosti jednim



novim zakonom koji je španska vlada donela.

Sve španske novine prikazale su slike sa velikim kutijama i sa 10 kombinovanih vozila, koja su dostavila potpisane dokumente u parlament. Postavlja se pitanje da li je ovo bilo samo politički trik, ili je stvarno bilo potrebno 10 ovih prevoznih sredstava da dostave 4 000 000 potpisa.

³Gloria Sillman, University of Melbourne, Melbourne Australia. Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling: ICTMA14 (International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling)



2. SLIKA

Tokom modeliranja krećemo od problema iz realnog života i pokušavamo da ga rešimo.

Zapravo želimo da saznamo da li ove slike realno opisuju posmatranu situaciju.

Problemi u realnom životu su kompleksni i komplikovani, zato prvo moramo pojednostaviti i odrediti naše konkretne zadatke.

Treba da izračunamo da li je bilo potrebno 10 kombija za dostavljanje 4 miliona potpisa, to jest treba da saznamo težinu i zapreminu dostavljenog papira.

U sledećem koraku pomoću realnog modela stvaramo matematički model, koji možemo da rešimo matematičkim metodama. U slučaju prostih zadataka nekad je teško odvajati ova dva modela jer korišćenje podataka direktno dovodi do jednog matematičkog modela.

Prvo moramo saznati koliko potpisa može biti na jednom listu. Iz ovoga možemo izračunati količinu potrebnog papira. Ako znamo koliko listova su dostavili, onda možemo odrediti i zapreminu i težinu. Na osnovu ovih informacija možemo odlučiti da je bilo potrebno 10 kombija.

U nastavku matematičke operacije stižemo do matematičkog rešenja.

Ako pretpostavimo da na jednom listu ima 20 potpisa, onda nam ukupno treba 200 000 listova. Ako su stvarno 10 kombija dostavila potpise, onda je u svakom bilo 20 000 potpisa. U jednom pakovanju papira za fotokopiranje ima 500 listova, to znači da je bilo $20\,000:500=400$ pakovanja papira.

*Na osnovu podataka koji se nalaze na pakovanju fotokopir papira, težina 1m^2 fotokopir papira je 80 g. Ukupna površina jednog pakovanja papira je: $210*297*500=31,19*10^6\text{ mm}^2=31,19\text{m}^2$. To znači da je težina $40*31,19*0,08\approx 100\text{kg}$. Prema tome jedan kombi je dostavio 10 kg papira.*

*Veličine jednog pakovanja fotokopir papira su sledeća: 23cm*32cm*8cm.*

*U jednoj kutiji ima 5 pakovanja, što znači da su veličine kutije otprilike 23cm*32cm*40cm. U jednom kombiju treba da bude 8 ovakvih pakovanja.*

Veličine jednog kombija su: (Ford Transit)

dužina: 255,8 cm

širina: 171,9 cm

visina: 133,8 cm

nosivost: max. 1028kg.

Važno je da posle dobijenih podataka razmislimo o sledećem: kakve veze ima rešenje sa realnim životom, da bismo procenili rezultate.

Na osnovu nosivosti kombija, jedan kombi bi mogao 100 puta vise papira da dostavi. Ako gledamo težinu papira, onda je jedan kombi dovoljan. Sad se postavlja pitanje, da li ima dovoljno mesta u kombiju da se utovari tolika količina papira. Na osnovu veličine kombija izračunamo da u jednom kombiju možemo staviti najviše 147 kutija papira (u jedan red 49 kutija, a imamo 3 reda). To znači da bi jedan kombi bio dovoljan za dostavu.

Zaključujemo da nije bilo potrebno 10 kombija za dostavu 4 000 000 potpisa u parlament.

1.5. Otvoreni zadaci

Većina tradicionalnih zadataka je zatvorena. Među glavnim obeležjima zadataka modeliranja se nalazi i otvorenost. Zadatak je zatvoren, ako su početno stanje i ciljno stanje, kao i način ostvarivanja nedvosmisleno definisani. O otvorenim zadacima govorimo ako kod izlaganja zadatka nije jasno dato početno stanje (postavljanje zadatka) , ciljno stanje (rezultat) ili ono što povezuje ova dva stanja, tj. način rešavanja zadatka.

Dakle, ako zadatak nije zatvoren, onda je otvoren. Ukupno, dakle, razlikujemo 8 tipova zadataka prema otvorenosti, a to su sledeći⁴:

	početak	način rešenja	cilj
problem-situacija	otvoren	otvoren	otvoren
mutan problem	otvoren	otvoren	zatvoren
interpretacioni problem	zatvoren	otvoren	otvoren
problem pretraživanja strategije	zatvoren	otvoren	zatvoren
interpretacioni zadatak	zatvoren	zatvoren	otvoren
jednostavan otvoren zadatak	zatvoren	zatvoren	zatvoren
osmišljavanje zadatka	otvoren	zatvoren	otvoren
osmišljavanje početnog stanja	otvoren	zatvoren	zatvoren

1.5.1. Primer za situaciju problema



3. SLIKA

⁴ Greefrath, G. (2007): Modellieren lernen mit offenen realitätsnahen Aufgaben. Köln: Aulis Verlag

Na slici se nalazi jedan ekvatorijalni sunčani sat (slika br. 3). Napravi sličan sat!

Kod ovog zadatka nemamo tačne podatke o početnom stanju, već samo jednu sliku na osnovu koje možemo da krenemo. Način rešavanja takođe nije striktno dat, učenici mogu rešiti zadatak na razne moguće načine, s tim da krajnji rezultat zadatka s obzirom na izabrano početno stanje i na način rešavanja zadatka može biti različit.

1.5.2. Primer za mutan problem

Koliko košta malterisanje kuće koja se nalazi na slici? (slika br.4)

Kod ovog zadatka je samo željeno ciljno stanje jasno definisano. Početne informacije nam



4. SLIKA

slika ne pruža jasno, potrebne vrednosti možemo samo proceniti, odnosno moramo prikupiti i aktuelne cene malterisanja, i na osnovu ovoga možemo na više načina da izračunamo troškove.

1.5.3. Primer za interpretacioni problem

Napravi kutiju u koju mogu da stanu 4 ping-pong loptice prečnika 4 cm.

Ovde smo dali konkretne informacije za početno stanje, i one su dovoljne za rešavanje zadatka. Ali, načini rešavanja mogu biti mnogo različiti, lopte se mogu smestiti na različite načine, i ovako možemo mnogo kutija da planiramo, dakle, i ciljno stanje je otvoreno.

1.5.4. Primer za problem pretraživanja strategije

Izračunaj koja se pica najviše isplati od ponuđenih!

Pica prečnika 28 cm: 900 dinara

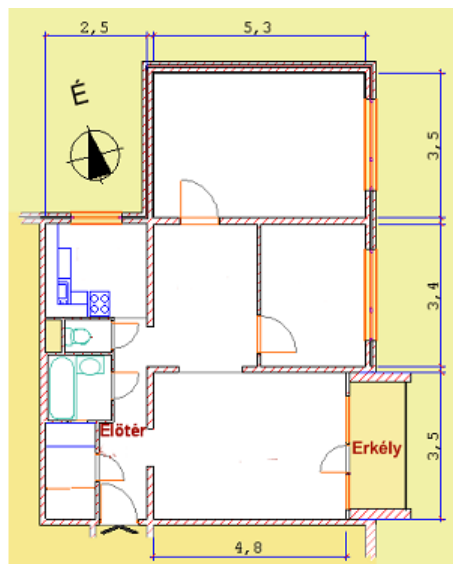
Pica prečnika 32 cm: 1290 dinara

Pica prečnika 45 cm: 1480 dinara.

Ovde su sasvim jasni i početno i ciljno stanje. Date su veličine pica i njihove cene, i mi biramo onu koja nam se najviše isplati. Na više načina možemo da uporedimo vrednosti. Na primer, možemo uzeti međusobni odnos cena i onda možemo uporediti njihove vrednosti. Ili, možemo i u paru da uzmemo površinu pica i odnos njihovih cena, ili uzeti po parovima odnose površine pica i njihovih cena i onda njih da upoređujemo, a možemo i da računamo sa cenom koja pripada jedinstvenoj površini, i tako dalje.

1.5.5. Primer za interpretacioni zadatak

Koja prostorija bi bila najidealnija za dečiju sobu na slici br. 5? Uzeti u obzir raspored soba, njihove veličine i oblike!



5. SLIKA

Kod interpretaconih zadataka je samo ciljno stanje nejasno. Znamo odakle krećemo i kako treba da stignemo do rešenja, ali uprkos tome svako bi mogao da ima drugo rešenje, jer ne treba imati u vidu one aspekte koji se mogu izračunati na egzaktan način.

1.5.6. Primer za jednostavan otvoren zadatak

Izračunaj osnovnu površinu stana koji se nalazi na slici br. 6.



6. SLIKA

Kod jednostavnih otvorenih zadataka je bitno da se doda i to da iako su na osnovu tabele sva tri koraka zatvorena, svakako je važno da ne bude sasvim jasan način rešavanja zadatka, jer inače on ne bi bio otvoren. Za ovaj zadatak se ne može reći da mu je sasvim jasan način rešavanja, jer se on, na primer, može na više načina rešiti: osnovna površina se može izračunati kao zbir odnosno razlika površina trouglova i pravougaonika.

1.5.7. Primer za osmišljavanje zadatka

Osmisli zadatak vezan za sliku (Slika br. 7) koji se može izračunati formulom za klasičnu verovatnoću!



7. SLIKA

Ovde smo jasno dali samo način transformacije, početno stanje, a ciljno stanje osmišljavaju učenici. Pošto data slika ne sadrži konkretne podatke koji ograničavaju mogućnosti, učenici mogu da osmisle mnogo različitih početnih i ciljnih stanja.

1.5.8. Primer za osmišljavanje početnog stanja

Osmisli zadatak koji se rešava linearnom jednačinom i rezultat je 5!

U odnosu na prethodni zadatak razlika je u tome što smo pored načina rešavanja ograničili i rezultat, dakle, ovde je otvoreno samo početno stanje.

1.6. Obuveni zadaci i zadaci bliski realnosti

Kod zadataka modeliranja veliki značaj se daje vezi između matematičkog sveta i stvarnog sveta. Zbog toga treba da raščistimo prirodu i ulogu obuvenih zadataka, zadataka koji su

bliski realnosti i zadataka modeliranja u nastavi matematike. Naravno, ova tri tipa se ne odvajaju oštro jedan od drugog.

1.6.1. Obuveni zadatak

Kod obuvenih zadataka, kako bismo shvatili matematički problem, pomoć će nam svakodnevni život, odnosno stvaran svet. U ovim slučajevima oblikujemo zadatak oko datog matematičkog sadržaja, tako da matematički sadržaj bude što razumljiviji, tj. da bismo njegovo prepoznavanje uvećavali u različitim kontekstima. I kod ovih zadataka treba da se trudimo da izmišljena situacija bude što manje nametljiva.

Primer za obuvane zadatke:

Hteli bismo da podelimo sobu, koja ima oblik jednakokrakog trapeza, na dva jednaka dela, tako da zid koji je deli bude paralelan sa osnovama. Koliko će biti dugačak ovaj zid, ako su paralelne strane trapeza dugačke 8 m i 4 m, a kraci su dugi 5 m? (debljina zidova je zanemarljiva).

Iz teksta zadatka se odmah primećuje da je ovde „uvijen” geometrijski zadatak. Veoma je retko da jedna soba ima oblik trapeza, još je ređe da se kod zidanja zanemari debljina zidova. Za rešavanje ovog zadatka treba jednostavno „odmotati” zadatak i „izvaditi” originalan model koji je „umotan”.

1.6.2. Zadaci bliski realnosti

U slučaju zadataka koji su bliski realnosti, zadatke osmišljavamo na osnovu situacija iz stvarnog sveta ili na osnovu podataka iz stvarnog života. Ovde je naglasak na tome, da matematika pomogne učenicima da shvate neki problem iz stvarnog života, da prikaže neku njenu osobinu i da je ispita preko te pojave.

Primer za zadatak koji je blizak stvarnosti:

Izračunaj da li je zaista toliki popust na proizvode, kako se tvrdi u reklami!



8. SLIKA

Primer za obuvan zadatak koji je blizak stvarnosti :

Motorni čamac na reci prelazi 6 km uz vodu za isto vreme kao što niz vodu prelazi 8 km. Od tačke kretanja do 42 km uzvodno i nazad stiže za 4 sata i 5 minuta. Kojom brzinom se kreće ovaj čamac?

U ovom zadatku se stvarnost i matematika uzajamno pomažu u razumevanju i prikazivanju.

Može da se desi da je neki zadatak „pseudo-realan”, to jest opisuje situaciju uzetu iz stvarnog sveta, ali u nekom detalju ipak ne odgovara stvarnosti.

Zadatak:

U državi sa milion stanovnika planiraju uvođenje jednog jeftinog testiranja na AIDS. Znamo da je zaražen otprilike svaki hiljaditi stanovnik. Ispostavilo se da je kod 99,9% bolesnih ljudi test dao pozitivan rezultat, ali na žalost i kod 0,1% zdravih ljudi takođe. Pored ovakvih parametara odbacili su testiranje. Jedan matematičar je predložio da se testiranje izvrši dva puta zaredom, i da bolesnike šalju kod lekara samo ako oba testiranja daju pozitivan rezultat. Na ovaj način je moglo da se uvede testiranje. Sa sledeća dva pitanja ćemo pokušati da odgonetnemo kako je ovo moguće.

- a) *Izračunaj kolika je verovatnoća da je neko bolestan, ako prvi test bude pozitivan!*
- b) *Izračunaj kolika je verovatnoća da je neko oboleo, ako test dva puta da pozitivan rezultat!*

Sa ovim zadatkom je u suštini problem to što nisu uzeli u obzir da test ne daje pogrešne rezultate slučajno, već zato što pacijenti koji nisu oboleli od HIV-a, a rezultati su im pozitivni, imaju u organizmu nešto što nije HIV, samo liči na njega i uzrokuje grešku. Zbog

toga je vrlo moguće da će i drugi test biti pozitivan. Na ovaj način, dakle, drugo testiranje neće mnogo pomoći da bi rezultati bili uverljivi. U suprotnom, ako bi test sasvim slučajno dao pozitivne rezultate, onda bi dva testiranja zaista smanjila mogućnost pogrešnog rezultata.

1.6.3. Zadaci modeliranja

Značajan broj zadataka koji su bliski stvarnosti su ujedno i zadaci modeliranja. Ali, naravno postoje i izuzeci jer zadaci modeliranja moraju da ispunjavaju više uslova, a ako jedan od tih uslova nije ispunjen, zadatak još uvek može biti blizak stvarnosti ali ne i zadatak modeliranja. [4]

Primer za zadatak modeliranja:

Koliko drveća možemo da spasimo od seče, ako bismo reciklirali najveći broj papira koji se baci?

Primer za zadatak koji je blizak stvarnosti, ali nije zadatak modeliranja:

Profil Ajfelovog tornja na odgovarajućem intervalu opisan je pomoću sledeće logaritamske funkcije

$$y = 91 \cdot \left| \ln \frac{|x|}{62,5} \right|$$

Prvi nivo tornja je na visini od 57,63 m, drugi nivo je na 115,75 m, a treći je na visini od 276,13 m.

Kolika je širina osnove tornja?

Kolika je širina terase na drugom nivou?

Zadatak je veoma blizak stvarnosti, jer Ajfelov toranj postoji, i njegov oblik zaista podseća na grafikon date funkcije. Ali učenici ne treba da urade zadatak modeliranja da bi dobili rezultat. Treba samo da računaju na osnovu datih informacija, model (funkcija) im je već na raspolaganju. Osim toga, zadatak nije otvoren, postoji jedna vrsta početnog stanja i jedna vrsta ciljnog stanja, a način rešavanja je takođe zatvoren. Da je zadatak bio, na primer, da se nađe funkcija koja opisuje Ajfelov toranj na osnovu jedne slike, onda bismo već mogli da razgovaramo o zadatku modeliranja.

1.7. Način obrade zadatka

Učenike вреди popstepeno pripremati na rešavanje zadataka modeliranja. Prvo treba da ih navikavamo na kraće i lakše zadatke, koji su koncentrisani na razvijanje samo određenih sposobnosti, sve dok ne stignu do nivoa na kojem umeju da reše ceo ciklus modeliranja. Mislim da je važno da ovo imamo u vidu, jer u suprotnom učenici lako gube interesovanje prema ovakvim zadacima. U zavisnosti od tipa zadatka možemo da biramo organizovanje rada, uzevši u obzir vreme koje zadatak zahteva da bi se rešilo i okruženje koje je potrebno da bi se zadatak rešio.

Što se tiče mesta obrade, rešavanje može da se odvija kod kuće i/ili u školi. Takođe, zadatak za istraživanje možemo zadati i za domaći zadatak da bismo sve podatke imali za rešavanje zadatka u školi.

Za rešavanje zadataka modeliranja po pitanju nastavnih metoda najviše odgovara rad u grupi i rad u parovima.

1.8. Ciljevi modeliranja

1.8.1. Razvijanje kompetencija

I u pogledu razvitka učenika je korisno ako se upoznaju sa zadacima modeliranja, jer na ovaj način im se mogu razvijati različite sposobnosti.

Prema nacionalnom Zakonu o osnovama sistema obrazovanja i vaspitanja u toku obrazovanja se razvijaju takozvane ključne kompetencije. Kao deo matematičke kompetencije od izuzetne važnosti je da smo sposobni da naše matematičko znanje koristimo u svakodnevnom životnim situacijama, da prepoznamo i razumemo probleme koje je moguće rešiti matematičkim sredstvima. Po mom mišljenju, odgovarajućim zadacima modeliranja moguće je ove sposobnosti razvijati.

1.8.2. Motivacija

Nije poslednji aspekt da zadaci modeliranja pomažu da probude interesovanje kod učenika, jer oni ne smatraju matematiku toliko dalekom od stvarnosti, apstraktnom naukom. Odabirom odgovarajućih tema za obradu i odgovarajućeg načina rešavanja možemo dalje buditi znatiželju učenika.

2. Mogućnost izrade zadataka

Može se postaviti pitanje gde da nađemo zadatke modeliranja. Na raspolaganju imamo više mogućnosti. [4]

- Možemo da koristimo već postojeće zbirke iz zadataka modeliranja. Da bismo ovo postigli treba da se služimo znanjem stranog jezika, na nekom nivou, jer – kako sam već napomenula – malo je literature na mađarskom ili srpskom jeziku koje se tiču ove teme.
- Možemo posegnuti i za idejama iz već postojećih, „tradicionalnih“ zbirki; možemo sastavljati otvaranje zadataka i preradu zadataka.

Primer:

Tekstualni zadatak:

Iz jedne česme za jednu sekundu isteče 0,25 dl vode.

- a) *Koliko vode isteče za 24 minuta?*
- b) *Kolika je težina vode koja je istekla za 24 minuta, ako 1l vode teži 1 kg?*

1. zadatak modeliranja:

Koliko vode isteče iz jedne česme koju su zaboravili da zatvore?

Ovde smo, pre svega otvaranjem prvobitno zatvorenog zadataka postigli da dobijemo zadatak modeliranja. Da bi učenici rešili zadatak moraju da izvrše merenja i na osnovu njih sastave matematički model kojim bi potom rešili zadatak.

Međutim, možemo da razmišljamo i o rešavanju zadatka u drugom smeru. Ostajući pri temi, a menjajući kontekst možemo da sastavimo i druge zadatke. Na primer:

2. zadatak modeliranja:

U današnje vreme često čujemo zastrašujuće vesti o tome kako nam se zbog neosnovanog trošenja vode veoma brzo troše zalihe vode za piće. Razmisli o tome, da li ti imaš neke loše navike, koje se tiču nepotrebnog trošenja vode! Koliko vode bi uštedeo da se ostaviš ovih navika?

3. Izrađeni zadaci

U ovom poglavlju se nalaze zadaci koje sam ja izradila i njihova moguća rešenja. Grupisanje zadataka je težak posao jer iz bilo kog aspekta da ih gledamo, teško ih je svrstati u pojedine kategorije. Zbog toga sam se trudila da pronađem njihove najspecifičnije osobine, i na osnovu njih da ih razvrstam.

3.1. Zadaci planiranja

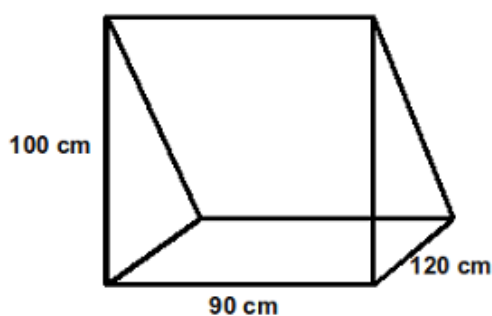
3.1.1. Ugrađeni orman



9. SLIKA

U potkrovlju, u jednom delu sobe, ispod krova, pravimo ugrađeni orman. (Slika br. 9). Radovi su skoro završeni, ali bismo voleli da postavimo još jednu policu u ormanu. Odluči gde će polica biti i kolike će debljine ona biti. Izračunaj kolika ploča će ti biti potrebno.

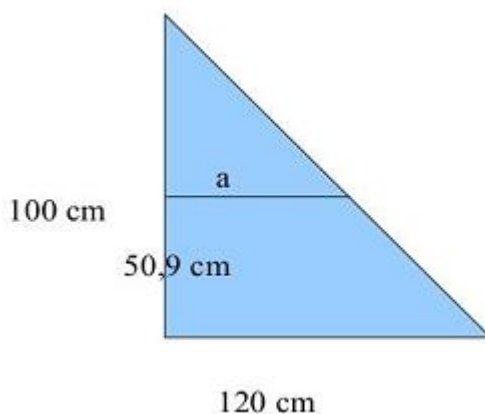
Dimenzije ormara ćeš videti na sledećoj skici:



10. SLIKA

Moguće rešenje:

Da bismo rešili zadatak prvo treba da izračunamo gde će tačno biti naša polica, i treba da uzmemo u obzir debljinu ploče koju ćemo da koristimo. Kod planiranja možemo imati u vidu više aspekata, na primer, šta bismo voleli da držimo u ormanu i u kom rasporedu bismo to skladištili. Ovde bih držala odeću i cipele i zbog toga mi se čini da bi polica trebalo da bude na srednjoj visini. Pri izboru ploče moramo da imamo u vidu i težinu koju ona mora da drži, kao i to da li će ona biti sakrivena vratima ili zavesom, ili ne. Pošto bismo voleli orman koji je prekriven zavesom, onda ploča ne mora da bude lepa, odgovaraće nam i prirodna strnjika, ona je najjeftinija. Ako bismo proverili u katalogima ili na internetu, videli bismo da je najčešća debljina ploča 18 mm, ovo je dovoljno debelo da izdrži teret odeće. Kada budemo imali konkretnu predstavu o ormanu, možemo izračunati veličinu potrebne police. Ako ćemo je staviti na srednju visinu, onda to znači da će gornja površina ploče biti 9 mm iznad srednje visine ormana. Dakle, računanje moramo vršiti u skladu sa ovim jer maksimalna veličina police zavisi od visine na kojoj je gornja površina police, budući da se orman sužava prema gore. Prema tome, možemo da prikazemo sledeću skicu:



11. SLIKA

Mali trougao koji je nastao gore je sličan prvobitnom trouglu, a srazmera ove sličnosti je $\frac{49,1}{100}$.

Iz ovog se može izračunati veličina police:

$$\frac{49,1}{100} * 120 = 58,92cm.$$

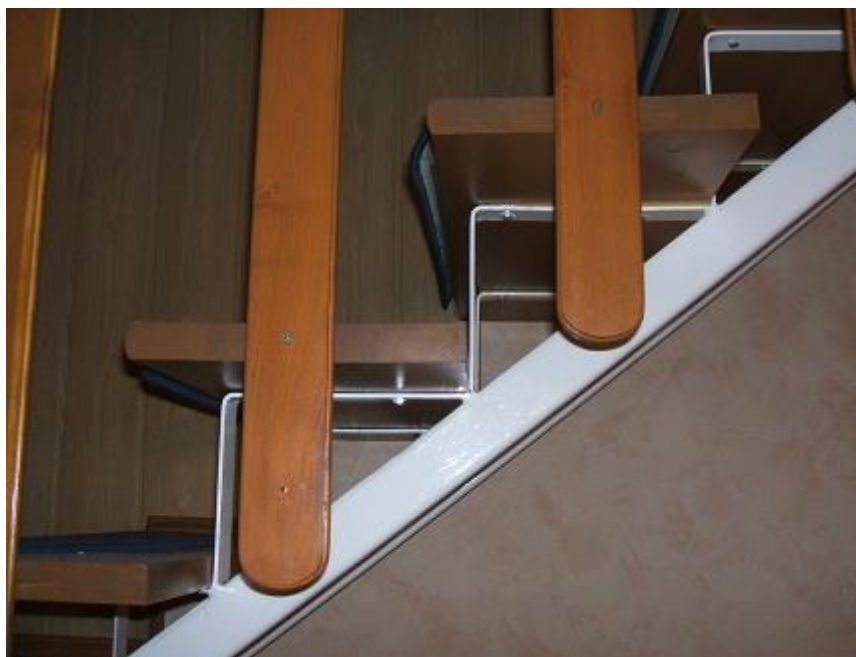
Pošto je širina ormana 90 cm , onda bi nam bila potrebna ploča veličine $90\text{ cm} \times 58,92\text{ cm}$. U stvarnosti ne bismo mogli da tražimo ovoliku ploču u prodaji, zato je dobro ako kupimo ploču dimenzija $90\text{ cm} \times 59\text{ cm}$.

Naše računanje je pripremljeno za idealan matematički model, ali je moguće da naša merenja ni u stvarnosti ne budu besprekorno precizna i da bismo rešili ovakav problem, ona nisu ni potrebna.

Naravno rešenja zavise od toga kakve smo ormane planirali na početku.

Napomena: Zadatak može dati i dalje ideje na planu planiranja polica. Možemo na primer praviti „tradicionalnu” policu ili orman, koji mogu imati elemente u obliku luka ili elemente koji nisu pod pravim uglom, a možemo i da zalepimo foliju na ivicu ploče, što nam donosi nov izdatak.

3.1.2. Izgradnja stepeništa po principu „sam svoj majstor“



12. SLIKA

Voleli bismo da napravimo stepenište za kuću, kao što je na slici (Slika br.12). Stepenište bi vodilo iz dnevne sobe ka potkrovlju, osnovna površina dnevne sobe je 4,5m x 4,5m, unutrašnja visina je 270 cm. Po rečima našeg poznanika, koji je građevinar, ploče udobnih stepenica su 17-20 cm jedna iznad druge, i 20-25 cm jedna ispred druge. Koliku rupu moramo da izbušimo u plafonu, odnosno, koliko dugačka cev i koliko metalnih ploča će nam biti potrebno da bismo izgradili stepenice?

Moguće rešenje:

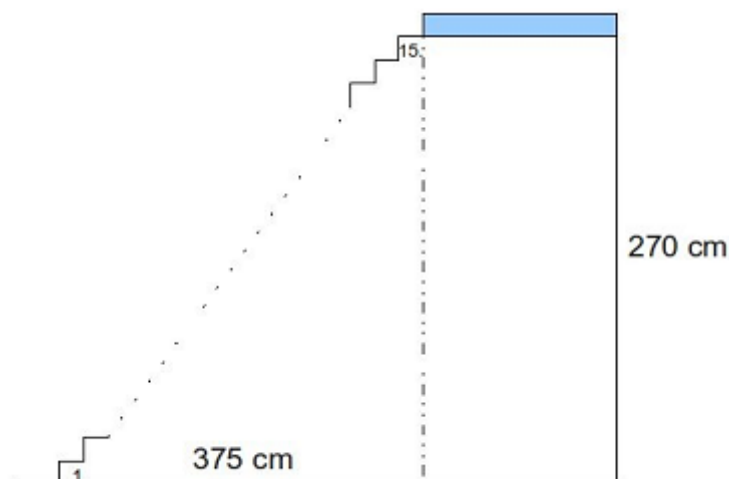
Pre izgradnje stepenica moramo da ih osmislimo. Tokom planiranja moramo više aspekata da uzmemo u obzir, kao što su unutrašnja visina stana i udobnost. Znamo da je unutrašnja visina stana 270 cm i da ćemo imati udobne stepenice ako su ploče na visini 17 – 20 cm jedna iznad druge. Moramo da odlučimo i koliko ćemo stepenica imati. Uzimajući u obzir udobnost možemo na sledeći način da računamo:

$$270: 17 \approx 15,88$$

$$270: 20 = 13,5.$$

Iz ovog sledi da će stepenice biti udobne ako im je broj između 14 i 16. Ja bih želela da napravimo 15 stepenika, tako da svaki stepenik dolazi na 18 cm. U zavisnosti od željenog ugla stepenica, svako može da bira dužinu koraka na ovu visinu, ja bih izabrala 25 cm.

Napomena: ovde se može ukazati na strminu linearne funkcije, i na način na koji se to može izračunati, jer strmina stepenika zavisi od visine na koju se uspinjemo na određenom odseku jednog napravljanog koraka.

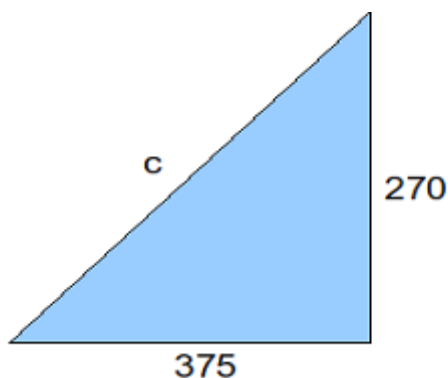


13. SLIKA

Prema ovome je cela dužina stepenika $15 \cdot 25 = 375 \text{ cm}$ (skiciran plan stepeništa se vidi na slici br. 13). Ovo staje u dnevnu sobu i ostaje dovoljno mesta da se može prići stepenicama. U slučaju da se stepenice planiraju u manju sobu, morali bismo sve ponovo da osmislimo. Pri bušenju otvora u plafonu moramo uzeti u obzir i opasnost da visoki ljudi mogu da udare glavom u plafon. Poželjno je početi sa bušenjem otvora tamo gde ostaje samo 2 m između plafona i stepenika. Bilo bi dobro da se počne sa bušenjem na granici između 3. i 4. stepenika, jer ako uzmemo da je debljina ploče za stepenik 3 cm, onda je udaljenost do plafona kod 3. stepenika $270 - 3 \cdot 18 - 3 = 213 \text{ cm}$, a kod 4. $270 - 4 \cdot 18 - 3 = 195 \text{ cm}$. Prva tri stepenika iznose dužinu $3 \cdot 25 = 75 \text{ cm}$, tako da je ostala dužina 300 cm, što znači da otvor mora da bude bar toliko dugačak. Širina otvora se slaže sa širinom stepenika, a to je najčešće 80 – 100 cm, ja bih zbog udobnosti izabrala 100 cm. Dakle, potreban otvor je dimenzija $300 \text{ cm} \times 100 \text{ cm}$.

Napomena: Ako ne želimo da štedimo na prostoru, možemo da napravimo otvor i na celu dužinu stepenika.

Znajući dužinu i visinu stepenica možemo izračunati dužinu metalne cevi koja nam je potrebna, pomoću Pitagorine teoreme:



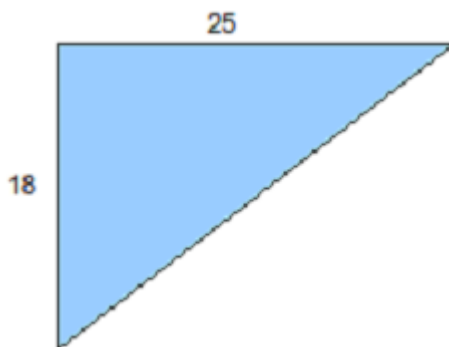
14. SLIKA

Pošto stepenice drže dve cevi, onda su nam za izradu stepeništa potrebne dve gvozdene cevi od 462 *cm*.

Dužinu ploča za držanje svakog stepenika možemo izračunati i prema broju stepenika:

$$\text{za jedan stepenik: } 18 + 25 = 43$$

$$\text{za celo stepenište: } 43 \cdot 15 = 645$$



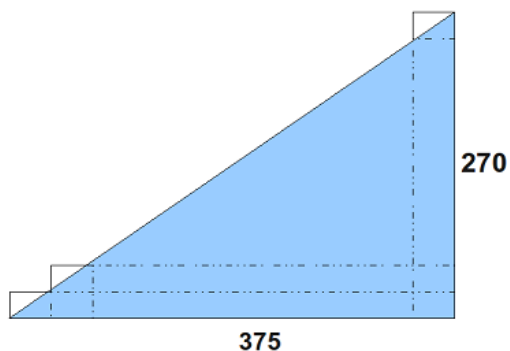
15. SLIKA

Međutim biće jednostavnije ako primetimo da je to isto kao i ukupan zbir cele visine stepenica i njene dužine, tj: $270 + 375 = 645 \text{ cm}$ (slika br. 15).

Pošto je svaki stepenik poduprt sa dve ploče, to je ukupno $2 \cdot 645 = 1290 \text{ cm}$.

Zaključujemo da je toliko duga ploča nam je potrebna.

Za vrednosti koje su dobijene kao rezultat možemo reći da su potpuno realne, i možemo da zamislimo ove stepenice u jednom stanu, i verovatno bi i njihova upotreba bila udobna.



16. SLIKA

Napomena: zadatak bi bio interesantniji ako bismo pravili kružne stepenice, ali time bi i računanje bilo mnogo kompikovanije.

3.1.3. Alternativna božićna jelka

U jednoj televizijskoj emisiji koja se bavi temama kućnih majstorija napravili su svojevrsnu „alternativnu božićnu jelku” kao prazničnu dekoraciju (slika br. 17):



17. SLIKA

1. Jednu letvu 5 cm širine i 3 cm debljine iseckali su na komade, tako da svaki komad bude 3 cm kraći od prethodnog, sekli su ih u paru da bi od svake dužine imali po dva komada. Najduže parče je bilo dugačko 60 cm.

2. Odsečene komade su izbušili na jednom kraju.

3. Na jednu dršku od metle navukli su ove ploče i estetski su ih okretali da bi dobili spiralan oblik. Gotovo drvo je bilo visoko otprilike do grudnog koša vođitelja emisije.

4. Na kraju su ga ukasili svećama i dekoracijom na vrhu.

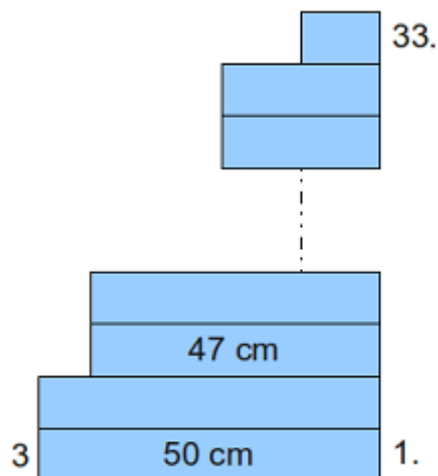
Osmisli svoju „alternativnu božićnu jelku"! Koliko drvenog materijala će ti biti potrebno? Proveri i koliko će sve ovo koštati!

Kao prvi korak, moramo da odlučimo koliko će visoka biti naša jelka. Ja bih, na primer, bila zadovoljna sa jelkom visine 1 m i širine 1 m.

Treba da osmislimo širinu prvog komada, kojim spirala kreće, kao i da znamo broj potrebnih komada sa kojima bismo postigli željenu visinu. (Ne moramo se držati toga da se letve skraćuju svaka po 3 cm i to možemo da modifikujemo po ukusu).

Ja bih svoje drvo pokrenula letvom od 50 cm (čak i ako će na ovaj način jelka biti uža od 1 m). Pošto je letva debljine 3 cm, nama će biti potrebno otprilike 33 komada da bismo postigli visinu od 1 m. Ako ćemo posle svakog drugog komada da skratimo dužinu letvica za po 3 cm-a, onda ćemo ovo shvatiti kao seriju od 33 elementa. Ovaj niz možemo da raščlanimo na dva aritmetička niza, jedan ima 16 članova, a drugi 17. Prvi članovi kod oba niza su $a_1 = 50$, a diferencija im je $d = -3$. Najkraća letvica odgovara poslednjem članu niza od 17 članova i zbog toga je njena dužina:

$$a_{17} = a_1 + (n - 1) \cdot d = 50 - 16 \cdot 3 = 2.$$



18. SLIKA

Komadić od 2 cm je suviše kratak i neupotrebljiv. Dakle, moramo da menjamo plan odsečenih drva. Ovo možemo na više načina da uradimo:

- Biće nam dovoljno manje nivoa i tako će nam i jelka biti malo niža,
- Za osnovu ćemo uzeti širu letvu,
- Manjom merom skraćujemo letvice
- Pravićemo više od dve letvice od određene dužine.

Neka nam sada odgovara drvo koje je 3 cm niže. To znači da će najviša letvica biti duga $2 + 2 \cdot 3 = 8 \text{ cm}$. A visina nivoa iznosi $30 \cdot 3 = 90 \text{ cm}$. Ako dodamo ovome još malo parče drške od metle koje gore viri moje drvo će biti odgovarajuće visine.

Dakle, plan drveta se kristalizovao: sastavićemo 30 komada letvica, jednu na drugu, najduža iznosi 50 cm, a najkraća 8 cm, dužina letvica se skraćuje sa 3 cm, posle svakog drugog komada. Da bi se one sastavile biće nam dovoljna jedna drška od metle, duga 1 m.

Napomena: drvo se može isplanirati i prema drugim aspektima. Možemo krenuti i od broja nivoa ili od konačne novčane vrednosti materijala. Tako bismo zapravo zadatak izvršili obrnutim redosledom. Ili možemo uraditi zadatak i na taj način što ćemo pretpostaviti da već imamo neku količinu drveta kod kuće, i kako ne bismo kupovali još moramo da radimo sa postojećom količinom.

Pogledajmo koliko materijala će nam biti potrebno za izradu ovog drveta! Zapravo, zanima nas zbir dužina svih letvica. Za izračunavanje ovog zbira možemo koristiti sumnu formulu aritmetičkog niza, jer niz dužina letvica može da se podeli na dva jednaka aritmetička niza, gde je:

$$a_1 = 50 \text{ i } d = -3.$$

Nama je potreban zbir prvih 15 članova ovoga niza:

$$S_{15} = \frac{50 + 8}{2} \cdot 15 = 435.$$

Pošto su se dva ovakva niza stopila dužina letve je $435 \cdot 2 = 870 \text{ cm}$. Dakle, toliko letvi nam je potrebno za našu božićnu jelku. Pitanje je u kojim dužinama se letve prodaju. Ako su ti parčadi suviše kratki onda može da se desi da ćemo mnogo neupotrebljivog materijala imati kao otpad i onda ćemo morati da kupimo znatno veću količinu drveta. Osim ovoga nama je potrebna i jedna drška od metle duga 1 m (a ovo svakako možemo samo ucelo da kupimo), ili neki drugi tanak štap.

Posle izračunavanja cene materijala možemo odrediti i troškove:

Letva 3x5	3 metara	21 din/m
Impregnirana letva 3x5	3 metara	25 din/m
Letva 3x5	do 4-6 m	35 din/m

Čini se da je najjeftinije rešenje da kupimo 3 letve od 3 m. Od ovoga može prilično ekonomično da se odseku letvice, na primer na sledeći način:

$$2 \cdot 50 + 2 \cdot 47 + 2 \cdot 44 + 17 = 299$$

$$2 \cdot 41 + 2 \cdot 38 + 2 \cdot 35 + 2 \cdot 32 + 8 = 300$$

$$2 \cdot 29 + 2 \cdot 26 + 2 \cdot 23 + 2 \cdot 20 + 2 \cdot 11 + 17 + 8 = 271$$

Na osnovu ovog računanja od $9 \cdot 21 = 189$ dinara možemo da kupimo potrebnu količinu drvenog materijala. Dršku od metle, na osnovu jedne liste sa interneta, u dužini

120 – 200 cm možemo kupiti za 80 – 100 dinara. Nama je dovoljna i najkraća. Ukupni izdatak za materijal je dakle $189 + 100 = 289$ dinara.

Možemo još, eventualno da dodamo i cenu svećica i stalak za jelku, mada je moguće da nam je ovog ostalo od prethodnih godina, što se naročito odnosi na stalak.

Pošto moje drvo nije mnogo visoko, niti je njegovo „stablo” debelo, jedan manji stalak će biti odgovarajući. Najjeftiniji koji sam našla je 500 dinara. Svećice sam našla onakve, kakve mi se dopadaju, u prodaji su u pakovanju od 30 komada, baš koliko je meni potrebno ako na svaku granu stavim po jednu. Ako uporedimo sa ostalim svećama i veličinama pakovanja, ove bih odabrala i to bi me koštalo 550 dinara.

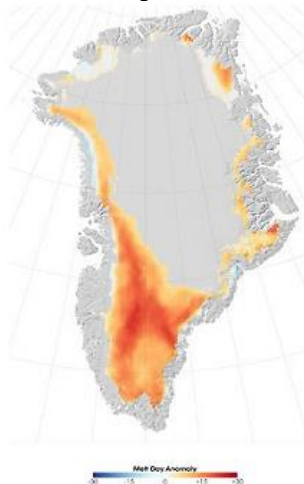
S tim zajedno moja božićna jelka bi me koštala $289 + 500 + 550 = 1339$ dinara.

Svako može sam da odluči da li mu se dopada ovaj ukras i da li bi trošio svoje vreme i novac na njega.

3.2. Zadaci za prognoziranje

3.2.1. Opasno otapanje

Površina Zemlje je 510 072 000 km², najveći deo ove površine pokriva voda - približno 70,8%. Grenland je najveće ostrvo na Zemlji, na njemu se nalazi jedna dvadesetina zaliha leda naše planete. Na osnovu satelitskih i mesnih meteoroloških sredstava se vidi da se otapanje leda na Grenlandu ubrzava. Od 2000. godine otopilo se 1500 milijardi tona leda, a to je za 5 mm povisilo nivo vode u okeanima.



19. SLIKA : SNIMAK, KOJI JE NAPRAVLJEN UZ POMOĆ POSMATRANOG POSTUPKA MIKROTALASNOG STVARANJA SLIKE, PRIKAZUJE OTAPANJE OPAŽANO 2007. GODINE. NARANDŽASTA POLJA PRIKAZUJU VIŠE, A PLAVA MANJE OTAPANJE U ODNOSU NA PROSEK IZ PERIODA 1988 – 2007 (IZVOR: NASA/EARTH OBSERVATORY)

Grenland poseduje ledenu površinu koja odgovara površini koja je 20 puta veća od teritorije Srbije (1 833 900 km²), to iznosi 2,85 miliona kubnih kilometara leda. Koje bi bile posledice otapanja ovog ledenog pokrivača?⁵

Moguće rešenje:

Da bismo otkrili posledice otapanja ledenog pokrivača sa Grenlanda moramo da utvrdimo koliko bi se povećao nivo vode na planeti.

Napomena: Ovo, naravno, daje samo teoretske vrednosti, jer voda popunjava prostor koji joj je na raspolaganju, a ne diže se stubasto. Međutim, dobijena vrednost ukazuje na opasnost koju nam donosi otapanje leda sa Grenlanda.

Možemo na više načina da se približimo problemu:

- Možemo pretpostaviti da je površina Zemlje ravna i da se voda stubasto diže iznad ove površine. Ovde ćemo, dakle, prvo da izračunamo vodenu površinu na Zemlji, tako što znamo njenu ukupnu površinu i znamo i procenat vodene površine:

$$510\,072\,000 \cdot 0,708 = 361\,130\,976$$

Dakle, vodeni pokrivač iznosi: 361 130 976 km².

Znamo da zapremina leda na Grenlandu iznosi 2,85 miliona km³, iz ovoga možemo da izračunamo visinu „vodenog stuba”:

$$2\,850\,000 : 361\,130\,976 \approx 0,00789.$$

Dakle, „stub” bi bio visok skoro 8 m. Naravno, znamo da se u stvarnosti voda prostire. A ovo zapravo znači da bi se posle otapanja veoma mnogo kopna našlo pod vodom. Čak i pored toga bi se nivo vode značajno podigao.

- Pretpostavimo da je Zemlja lopta i tako izračunajmo rast nivoa vode. Ako uzmemo da nivo vode raste za x km, onda možemo da vršimo računanje tako što oko centralne tačke prvobitne lopte nacrtamo drugu loptu, koja ima za x puta veći poluprečnik i 70,8% sloja, koji se stvara između dve lopte, shvatimo kao povišeni nivo vode. Dakle:

$$\left[\frac{4}{3}\pi(r+x)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 \right] \cdot 0,708 = 2\,850\,000.$$

⁵ Izvori: Science, <http://rs.wikipedia.org/>

Potreban nam je poluprečnik unutrašnje lopte, što možemo izračunati iz površine:

$$P = 4\pi r^2 = 510\,072\,000$$

$$r \approx 6371,047 \text{ km.}$$

Napomena: ovo nije potrebno računati po svaku cenu, jer je moguće da dužinu poluprečnika zemaljske lopte već znamo.

Ovako, kao vrednost x dobijamo kubnu funkciju i ona za rezultat ima samo jedan realan rezultat, a to je $x \approx 0,008$.

Napomena: očekivano je da ćemo dobiti vrlo sličan rezultat onom prethodnom, jer porast, koji je veoma mali u odnosu na prvobitan poluprečnik, takođe ne uvećava površinu lopte u velikoj meri.

Dakle, ponovo dobijamo rezultat koji govori da bi se nivo vode povećao za 8 m, ali i ovde moramo da obratimo pažnju na to da se voda prostire, dakle nivo mora bi poraslo za nešto manje, ali površine na obalama bi u velikoj meri bile pod vodom.

Napomena: možemo da pogledamo na nekoj geografskoj karti gde i u kolikoj meri bi voda pokrila kopno. O otapanju vode na Grenlandu možemo pronaći dosta članaka, od kojih neki pominju da naučnici tvrde da bi se nivo vode podigao za 7 m, dakle, rezultati koje smo mi dobili ne stoje daleko od njihovog proračuna.

Druga mogućnost rešavanja bi mogla da se javi spontano i u prosečnim grupama, ali rešavanje kubne jednačine bismo mogli samo fakultativno da radimo, ili uz pomoć grafičkog kalkulatora, odnosno računara.

3.3. Objašnjavajući zadaci

3.3.1. Lego-lopta



20. SLIKA

„Lopta” na slici (Slika br. 20) potiče iz jednog klipa sa interneta. Po mini-filmu ona je izgrađena od 5 miliona lego-kockica dimenzija 2x4. Učesnici su je skotrljali niz jednu ulicu sa dosta velikim nagibom, na kraju se lopta sudara sa jednim automobilom ali se ne raspada. Da li možeš da poveruješ ono što vidiš na snimku? Obrazloži svoj odgovor!

Moguće rešenje:

Da bismo mogli da sudimo o istinitosti video-snimka, moramo da procenimo potrebnu količinu kockica za izgradnju „lopte”, kao i da procenimo njenu težinu. Iz ovoga možemo da zaključimo i veličinu štete koju ona može da prouzrokuje kada se sudari sa automobilom. Za ovo je potrebno da izvršimo neka merenja.

Napomena: Ako se merenja vrše u školi onda je poželjno da se računanje vrši uz pomoć prosečnih vrednosti koje su učenici dobili. Prvo, da vidimo težinu lego-kockica. Dobićemo tačniji rezultat ako ne merimo kockice pojedinačno, nego odjednom izmerimo više njih:

10 komada: 22 g

20 komada: 44 g

Dimenzije kvadra koji se može sastaviti od 20 komada kockica su:

32 mm x 64 mm x 48 mm,

a zapremina je: $98304 \text{ mm}^3 = 98,304 \text{ cm}^3$.

Pretpostavimo da se napravljeno telo sastoji od 5 miliona komada kockica. To bi značilo da mu je zapremina

$$2,2 \text{ g} \cdot 5000\,000 = 11000\,000 \text{ g} = 11 \text{ t}.$$

Dakle, ako je zaista potrebno 5 miliona komada domina da bi se izgradila ovalika „lopta”, ona ne bi mogla da se sudari sa automobilom, a da on ostane nepovređen, jer bi ovaliki monstrum od 11 t koji se skotrlja niz nagib sigurno polupao auto.

Pogledajmo iz ugla zapremine da li je potrebno ovaliko lego-kockiza za ovu konstrukciju. Na osnovu videa ona bi trebalo da je visoka i široka oko 2 m. Da bi sve bilo jednostavnije izračunajmo zapreminu jedne lopte sa prečnikom od 2 m:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \approx 4,188790 \text{ m}^3 = 4\,188\,790 \text{ cm}^3$$

Naravno, ne možemo da izgradimo savršenu loptu, ali je vidljivo da nam je potrebno mnogo manje od 5 miliona kockica da bismo sagradili „loptu” ovih dimenzija:

$$4\,188\,790 : \frac{98,304}{20} \approx 852211,5.$$

Pošto je konstrukcija na snimku dosta uglasta i nikako ne dostiže oblik perfektne lopte, verovatno je da je potrebno i od ovoga manje kockica.

Da vidimo ponovo kolika će biti težina, ako je ovako posmatramo. Sa vrednostima koje su nam potrebne za perfektu loptu težina bi bila:

$$852211,5 \cdot 2,2 \text{ g} = 1874\,865,3 \text{ g} \approx 1,9 \text{ t},$$

što je preteško da ne bi prouzrokovalo nikakvu štetu.

Napomena: da bismo se približili rezultatima ne moramo da računamo sa tolikom preciznošću. Dovoljno je da procenimo na sledeći način:

$4\,000\,000 : 5 = 800\,000$ kockica nam je potrebno za izgradnju lopte, i one bi težile više od $800\,000 \cdot 2\,g = 1,6\,t$. To jest, težina konstrukcije koja se približava pravilnoj lopti iznosi najmanje 1,6 t.

A ako pretpostavimo da je zbog rupica u konstrukciji upotrebljeno samo 500 000 elemenata za izgradnju, „lopta” je ipak težila 1,1 t. Ovaj rezultat već odgovara težini jednog prosečnog auta, a ako se auto spusti – dosta brzo – niz nagib i sudari se sa drugim, onda će se sigurno oštetiti oba auta. Iz ovog možemo da zaključimo da bi se na automobilu moralo stvoriti bar neko manje oštećenje, a može se pretpostaviti i da bi sa lego-lopte otpao koji komad. Snimak je, dakle, najverovatnije lažan.

3.4. Opisni zadaci

3.4.1. Mafin sa duplim čokoladnim nadevom

Omiljeni Kristinin kolač je mafin sa duplim čokoladnim nadevom. Potražila je recept na internetu, ali nema kalup za mafin i zbog toga bi volela da testo ispeče u drugoj tepsiji. Sastojci su dovoljni za 12 komada mafina. Koji kalup da izabare od ponuđenih?

Mafin sa duplim čokoladnim nadevom

¼ šolje putera ili margarina

1/3 šolje + 2 supene kašike šećera

2 jaja

¾ šolje mleka

1 kafena kašike arome badema

1 kafena kašike arome vanilina (ili 2 kesice vanilin šećera)

1 ½ šolje brašna

½ šolje kakao praha (ne instant)

1 supena kašika praška za pecivo

¼ kafene kašike soli

½ šolje granulata čokolade za jelo

Priprema: ugrijemo rernu na 175° C, kalupe za muffin namažemo puterom. U jednu činiju stavimo šećer i puter i stavimo je u mikrotalasnu na 20-30 sekundi, da puter omekša. Dobro umutimo varjačom i dodamo jaja, mleko, arome badema i vanilina. U drugoj činiji pomešamo brašno, kakao, prašak za pecivo i so. Ovu mešavinu sa brašnom dodamo onoj sa puterom i mešamo tek toliko dok se oni dobro ne pomešaju. Na kraju umutimo i granulatu čokolade za jelo. Kalupe napunimo testom do 2/3 i pečemo 15-20 minuta.



24. SLIKA



23. SLIKA



22. SLIKA



21. SLIKA

Moguće rešenje:

Da bismo rešili zadatak moramo znati veličine kalupa za mafin i količinu testa koju dobijemo od ovog materijala. Posle toga bismo mogli da odredimo odgovarajuću formu za najpraktičnije pečenje kolača.

Da bismo izračunali zapreminu testa za mafin, možemo iskoristiti informaciju da se kalupi pune do $\frac{2}{3}$. A da bismo ovo izračunali moramo da znamo dimenzije jedne prosečne tepsije za mafin.

Napomena: ja sam spremila ove mafine a tepsiju koju sam ja koristila (Slika br. 23), testo je zaista napunilo otprilike $\frac{2}{3}$ tepsije. U ovoj tepsiji su donji prečnici udubljenja 5 cm, a gornji prečnici 8 cm, dok je dubina 33 mm. Ne možemo očekivati od učenika da nam ispeku mafin, ali mogu imati nekakva iskustva ili mogu izvršiti merenja kod kuće, i mogu da se oslone na ta merenja.

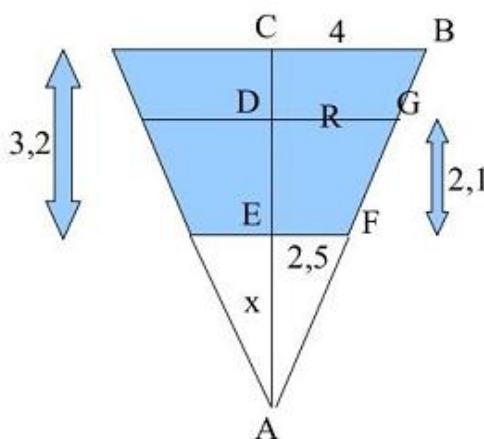
U ovom slučaju merenja vršimo na osnovu gore navedene tepsije za mafin, u čijim udubljenjima je testo visoko 20 – 22 mm.

Dakle, može se reći da je tačno ako računamo sa visinom od $\frac{2}{3}$ formi kao što je dato, zapravo sa 2,1 cm, jer je:

$$32 \cdot \frac{2}{3} = 21,33333 \dots \approx 21.$$

Kalupe za mafin možemo modelirati sa zarubljenom kupom, čije su dimenzije:

$$r = 2,5\text{cm}; R = 4\text{ cm}; m = 3,2\text{cm}.$$



25. SLIKA

Međutim, punimo ih testom samo do visine od 21 mm . Sada moramo da izračunamo poluprečnik gornjeg kruga, koji je u sastavu zarubljene kupe. Ovo možemo da uradimo, na primer, uz pomoć naših saznanja koje se odnose na podudarnost trouglova.

Ako produžimo krake trapeza, koji smo dobili iz preseka zarubljene kupe (Slika br. 26), dobićemo trougao. Truglovi ABC i AFE se podudaraju jer su oba pravougaona i imaju jedan zajednički oštri ugao. Iz ovoga sledi:

$$\frac{4}{3,2 + x} = \frac{2,5}{x}$$

$$x \approx 5,3.$$

Sada možemo da iskoristimo činjenicu da se trougao AEF podudara sa truglom ADG (isto tako i sa trouglom ABC, svejedno je koji ćemo koristiti):

$$\frac{R}{7,4} = \frac{2,5}{5,3}.$$

Dakle, dimenzije zarubljene kupe koja je popunjena testom su sledeće:

$$r = 2,5\text{cm}$$

$$m = 2,1\text{cm}.$$

sa podudarnošću sa prethodnim: $R \approx 3,5\text{cm}$

a zapremina joj je $V = \frac{m\pi}{3} \cdot (R^2 + Rr + r^2) \approx 60\text{cm}^3$.

Ovako možemo, otprilike, $12 \cdot 60 = 720\text{ cm}^3$ testa sipati u kalup. Ovo treba da uporedimo sa zapreminama tepsija sa slika.

Napomena: ako je cilj zadatka da se prisetimo ranijih matematičkih saznanja, onda vredi da se izvede odgovarajuća formula. Ali ako nam nije to cilj, onda možemo da koristimo i tabelu funkcija.

Zapremina silikonske tepsije u obliku pravougaonika (Slika br. 23) je:

$$V = a \cdot b \cdot c = 40 \cdot 28 \cdot 6 = 6720\text{cm}^3.$$

Iz odnosa zapremina se vidi da bi testo samo u tankom sloju pokrilo tepsiju. Dakle, u ovoj tepsiji bismo mogli peći samo vrlo tanak kolač, i nije svrsishodno da ga izaberemo.

Zapremina okrugle tepsije za tortu (slika br. 24):

$$V = r^2 \pi m = 10^2 \pi \cdot 6 \approx 1884 \text{ cm}^3.$$

Zapremina ove tepsije je nešto više nego dva puta veća od zapremine testa za mafin, iz čega se vidi da testo možemo u debelom sloju nasuti. Dok se peče, zapremina testa se povećava i zbog toga bismo mogli da ispečemo zaista lep kolač u ovom kalupu. Ova tepsija bi mogla biti dobar izbor.

Na poslednjoj slici (Slika br. 25) je tepsija za hleb. Zapreminu tepsije možemo uporediti sa zapreminom kvadra u nižim razredima ili zapreminom trapezoidne prizme, a u višim razredima možemo detaljno izračunati njenu zapreminu. Za ovo poslednje, na raspolaganju nam stoji više opcija, a željenu vrednost možemo da izračunamo kao zbir ili razliku zapremina piramida i prizmi, u zavisnosti od aspekta našeg približavanja zadatku. Jedna od mogućnosti je da prvo zamislimo ovaj oblik u jednom kvadru i da zatim „oduzmemo” 4 trostrane prizme sa strana ove forme. Na ovaj način dobićemo željeni oblik, ali smo na uglovima dva puta oduzeli piramide sa kvadratnom osnovom, koje smo dobili iz preseka prizmi. Zbog toga ćemo vrednost njihovih zapremina ponovo dodati:

$$V = V_{kvadar} - 2 \cdot V_{prizma_1} - 2 \cdot V_{prizma_2} + 4 \cdot V_{piramida}$$
$$V = 10 \cdot 24 \cdot 7 - 2 \cdot \frac{1 \cdot 7 \cdot 10}{2} - 2 \cdot \frac{1 \cdot 7 \cdot 24}{2} + 4 \cdot \frac{1 \cdot 1 \cdot 7}{3} \approx 1451,33 \text{ cm}^3.$$

Ako možemo da napunimo testom otprilike do pola ovaj kalup, posle pečenja bi verovatno testo napunilo tepsiju u potpunosti. I ovaj kalup bi bio dobar izbor za pečenje kolača, ali moramo uzeti u obzir da treba duže da se peče, jer se zbog debljine sporije peče.

Napomena: ako bismo počeli da računamo sa ukupnom zapreminom sastojaka za kolač (1 šolja=2,5 dl; supena kašika=15 ml; kafena kašika=5ml), onda ćemo dobiti otprilike 1114,25 cm³ kao rezultat. Ovo je dosta više nego koliko mi testa u stvarnosti imamo, jer različiti delići materija ispunjavaju preznine među drugim delićima druge materije. O ovome treba razgovarati sa učenicima pre rešavanja zadatka. Međutim, i ovaj način rešavanja zadatka nas može dovesti do pravog rešenja: ako imamo u vidu da ćemo imati manje testa od one vrednosti koje smo dobili kao rezultat, onda možemo izabrati tepsiju u koju možemo slobodno sipati testo.

3.4.2. Venecijanska gondola



26. SLIKA

Venecija je grad laguna, sedište severnoitalijanskog regiona Veneto. Leži na močvarnim lagunama Venecije, na severnom delu Jadranskog mora, koja se prostire između ušća dve značajne reke, Po i Piave. Grad je u potpunosti utkan u mrežu kanala, deo toga vidimo na slici (Slika br. 26). Kolika je najduža gondola koja bi mogla da skrene na ovoj raskrsnici kanala?

Moguće rešenje:

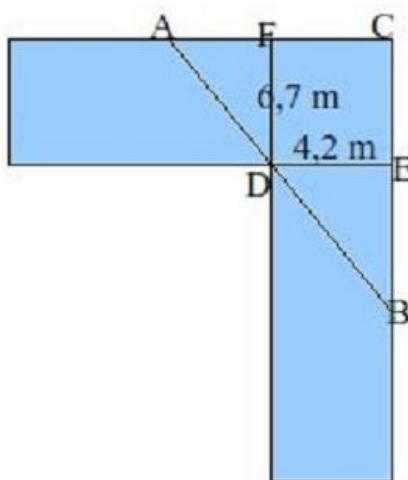
Naš zadatak je da utvrdimo maksimalnu dužinu gondole koja bi uspela da saobraća na ovoj raskrsnici. Vidljivo je da nema isto toliko prostora u svim pravcima kretanja. Moramo da proispitamo najekstremniju situaciju, kada gondola stoji upravo tako da dodiruje obale dvaju kanala, kao i ugao raskrsnice.

Da bi računanje bilo jednostavnije shvatimo gondolu kao duž. Moramo da nađemo najkraću duž među dužima, koji povezuju vrhove raskrsnica i na suprotne obale kanala, jer zapravo samo gondola te dužine, ili kraća, može ovde da skrene. Uzećemo da su kanali pod pravim uglom, radi lakšeg računanja, a da su njihove obale na potrebnim mestima paralelne. Na osnovu ove mape izračunajmo stvarnu veličinu kanala, i pomoću toga napravimo skicu. Na mapi je uži kanal 7 mm širok, a širi kanal je na užem delu 10 mm, a na širem delu 11 mm

širok. Na skali je odsek dugačak 33 mm, u stvarnosti je to 20 m. Stvarne dimenzije kanala su:

$$\frac{20}{33} \cdot 10 \approx 6 \text{ m}, \quad \frac{20}{33} \cdot 7 \approx 4,2 \text{ m}, \quad \frac{20}{33} \cdot 11 \approx 6,7 \text{ m}.$$

- a. Jedan pravac (slika br. 27). Tražimo najkraću duž AB .



27. SLIKA

$$AB = AD + DB.$$

Neka je $\angle FAD = \angle EDB = \alpha$.

Tada

$$AD = \frac{6,7}{\sin \alpha},$$

$$DB = \frac{4,2}{\cos \alpha},$$

$$AB = \frac{6,7}{\sin \alpha} + \frac{4,2}{\cos \alpha} = f(\alpha).$$

Ekstremnu vrednost funkcije odredimo pomoću prvog izvoda:

$$f'(\alpha) = -6,7 \cdot \frac{1}{\sin^2 \alpha} \cdot \cos \alpha + 4,2 \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \sin \alpha =$$

$$= \frac{4,2 \cdot \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} - \frac{6,7 \cdot \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

Ako $f'(\alpha) = 0$, tada imamo da je

$$\frac{4,2 \cdot \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} - \frac{6,7 \cdot \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = 0.$$

$$4,2 \cdot \sin^3 \alpha = 6,7 \cdot \cos^3 \alpha \cdot \operatorname{tg}^3 \alpha = \frac{6,7}{4,2}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt[3]{\frac{6,7}{4,2}} \approx 1,1684,$$

$$\alpha \approx 49,4418^\circ.$$

Potrebno je proveriti da li funkcija ovde ima zaista minimum. Ovo možemo učiniti tako što ćemo posmatrati predznak drugog izvoda.

$$f''(\alpha) = 4,2 \cdot \frac{\cos^3 \alpha + 2 \cos \alpha \sin^2 \alpha}{\cos^4 \alpha} - 6,7 \cdot \frac{-\sin^3 \alpha - 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^4 \alpha}$$

$$f''(\alpha) = 4,2 \cdot \frac{\cos \alpha \cdot (2 - \cos^2 \alpha)}{\cos^4 \alpha} + 6,7 \cdot \frac{\sin \alpha \cdot (2 - \sin^2 \alpha)}{\cos^4 \alpha}.$$

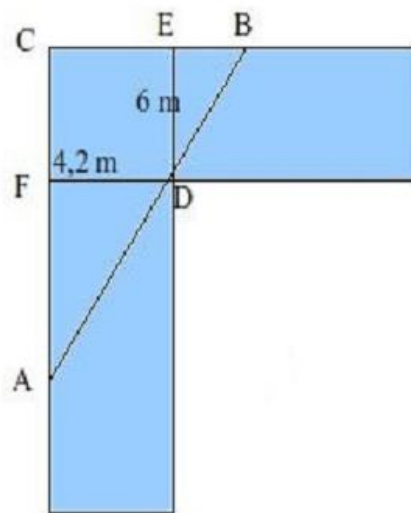
Pošto je α oštri ugao onda je i $\cos \alpha$ i $\sin \alpha$ pozitivan, o $\cos^4 \alpha$ -u i $\sin^4 \alpha$ znamo da su sigurno pozitivni. Tj. pošto ni $\sin^2 \alpha$ ni $\cos^2 \alpha$ ne mogu biti veći od 1, onda su i $(2 - \cos^2 \alpha)$ i $(2 - \sin^2 \alpha)$ pozitivni. Dakle pošto su pozitivni svi činiooci svih članova zbira, onda je drugi izvod pozitivan, što znači da na mestu $\alpha = 49,4418$ funkcija zaista ima minimum.

Iz α ugla možemo da izračunamo minimalnu dužinu duži:

$$AB = \frac{6,7}{0,759745876} + \frac{4,2}{0,650220120} \approx 15,28.$$

Dakle, po našem računanju u ovaj pravac može da skrene gondola koja je najviše 15,28 m dugačka. Pošto gondolu možemo da modelujemo kao duž, možemo da napomenemo i da u realnosti najduža gondola koja ovuda može da prođe mora biti kraća od ovoga, ali najverovatnije ovuda ne saobraćaju gondole koje tek mogu da prođu u raskrsnici.

b. Drugi smer (slika br. 28.) analogno.



28. SLIKA

Opet tražimo najkraću duž AB.

$$AB = AD + DB.$$

Neka je $\angle FDA = \angle EBD = \beta$.

$$AD = \frac{4,2}{\cos \beta},$$

$$DB = \frac{6}{\sin \beta},$$

$$AB = \frac{4,2}{\cos \beta} + \frac{6}{\sin \beta} = f(\beta).$$

$$f'(\alpha) = 4,2 \cdot \frac{1}{\cos^2 \beta} \cdot \sin \beta - 6 \cdot \frac{1}{\sin^2 \beta} \cdot \cos \beta.$$

Ako $f'(\beta) = 0$, tada imamo da je

$$4,2 \cdot \frac{\sin \beta}{\cos^2 \beta} = 6 \cdot \frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \sqrt[3]{\frac{6}{4,2}} \approx 1,1262$$

$$\beta = 48,3980^\circ.$$

$$f''(\beta) = 4,2 \cdot \frac{\cos \beta \cdot (2 - \cos^2 \beta)}{\cos^4 \beta} + 6 \cdot \frac{\sin \beta \cdot (2 - \sin^2 \beta)}{\cos^4 \beta}.$$

Ako je prvi izvod jednak 0 možemo dobiti ekstremnu vrednost. Pošto je na ovom mestu, slično kao u prvom slučaju, drugi izvod je takođe pozitivan, tako funkcija ponovo ima minimum. Umetanjem vrednosti ugla β dobićemo minimalnu dužinu duži, a sa tim i maksimalnu dužinu gondole:

$$f(48,398) = 14,349560352 \approx 14,35.$$

Dakle, u ovom pravcu možemo da skrenemo sa najviše 14,35m dugačkom gondolom. Vredno je pažnje da je veći kanal za samo 70cm uži od ovog drugog u ovom pravcu nego u prethodnom, ipak se za skoro 1m smanjila maksimalna dužina gondole.

3.4.3. Pumpanje lopte

Koliko vremena nam je potrebno da bismo napumpali lopte, koje su prikazane ispod, datom pumpom?

Informacije: obim fudbalske lopte je 70 cm.

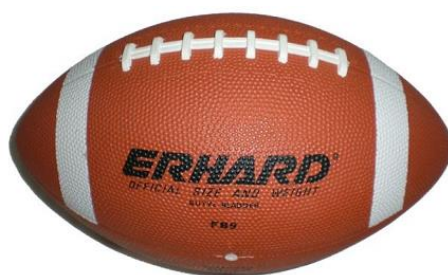
Obim lopte za američki fudbal (na mestu gde je ona najšira): 56 cm.

Obim odbojkaške lopte: 60 cm

Pumpa: dužina je 30 cm, unutrašnji obim: 2 cm.



29. SLIKA



30. SLIKA



31. SLIKA



32. SLIKA

Moguće rešenje:

Da bismo izračunali zadatak moramo znati i zapreminu lopti, kao i količinu vazduha koji možemo da uduvamo jednim pokretom. Sa ovim saznanjem bismo otkrili koliko „uduvavanja” nam je potrebno da bismo naduvali loptu, a pomoću toga ćemo saznati i koliko vremena zahteva ova radnja.

1. Pumpa

Korisna zapremina pumpe (Slika br. 32) se može izračunati pomoću njene dužine i obima. Za izračunavanje zadatka ćemo pretpostaviti da će toliko vazduha ući u loptu jednim pokretom kolika je zapravo i njena zapremina.

$$V = r^2 \pi h = 30\pi \approx 94 \text{ cm}^3.$$

2. Fudbalska lopta

Da bismo izračunali zapreminu fudbalske lopte (Slika br. 29) moramo znati i poluprečnik lopte. Ovo dobijamo pomoću njenog obima:

$$\begin{aligned} O &= 70 \text{ cm} = 2r\pi, \\ r &= \frac{35}{\pi} \approx 11,14 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Zapremina je pomoću toga:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot \frac{35^3}{\pi^2} \approx 5798 \text{ cm}^3.$$

Posle svega toga možemo da izračunamo koliko puta teba da uduvamo vazduh u loptu da bismo je ispunili vazduhom:

$$5798: 94 \approx 61,68.$$

Dakle, potrebna su najmanje 62 pokreta, tj. uduvavanja da bi se lopta napumpala. Ako pretpostavimo da nam je jedan sekund potreban da bismo jednom upumpali vazduh u loptu, to su svega 62 sekunde. Naravno, možemo uzeti i drugu brzinu da bismo izračunali veme, možda na osnovu iskustva.

3. Lopta za američki fudbal

- a. Loptu za američki fudbal (Slika br. 30) možemo da modelujemo pomoću rotacije isečka jednog kruga.

Napomena: izvođenje formule koja se tiče odsečka tog kruga se može očekivati u 3. razredu srednje škole. Ali nastavak rešavanja zadatka zahteva poznavanje nekih bitnih stvari koje u jednoj prosečnoj grupi ne možemo očekivati. Preporučuju se više za napredni nivo ili za rad u sekcijama.

Iz obima lopte se može izračunati širina lopte:

$$K = 56cm = 2r\pi,$$

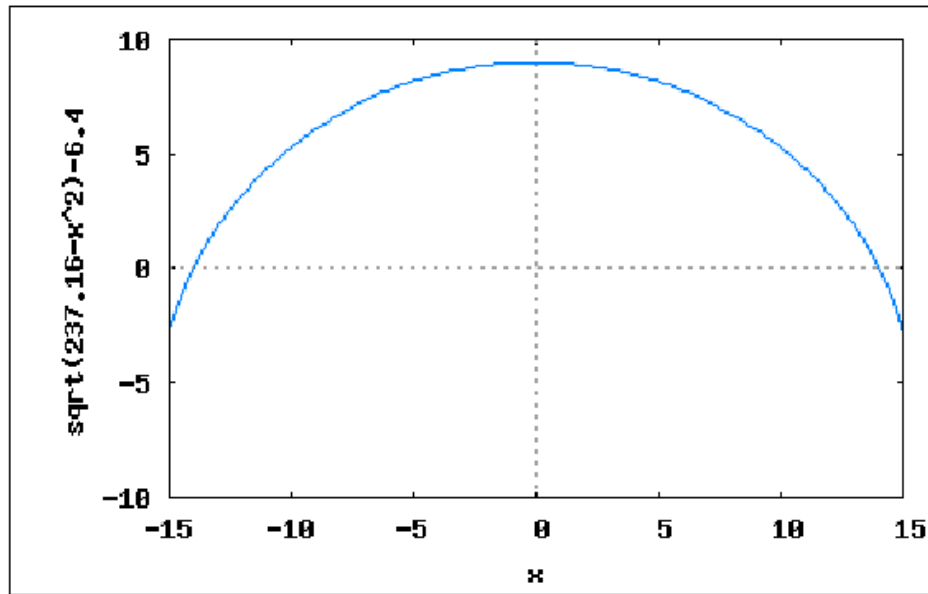
$$r \approx 9cm, \quad d \approx 18cm.$$

Na slici se može videti kakav je odnos između obima i dužine lopte, tj. odnos između poluprečnika i polovine dužine lopte.

Ja sam sledeće podatke izmerila na slici: dužina 8 cm, širina 5 cm. Tako dobijamo polovinu tetiva odsečka kruga:

$$a = \frac{8}{5} \cdot 9 = 14,4 \approx 14 \text{ cm}.$$

Sada su nam poznate tetiva odsečka kruga i „visina”. Da bismo lakše izračunali zadatak postavimo krug u koordinatni sistem, tako da tetiva bude na osi x , i neka je osa y prepolovi.



33. SLIKA: PRIBLILŽAVANJE LOPTE ZA AMERIČKI FUDBAL POMOĆU KRUGA

Ovako znamo koordinate 3 tačke kruga, a znamo i da je centar kruga na osi y .

$$P_1(0; 9), \quad P_2(14; 0), \quad P_3(-14; 0)$$

Ako umetnemo ovo u opštu formulu kruga i rešimo dobijeno jednačinu dobićemo sledeću jednačinu za krug:

$$x^2 + (y + 6,4)^2 = 15,4^2.$$

Da bismo dobili rotaciono telo čiji oblik podseća na oblik lopte, treba da na x -osi obrnemo ovaj kružni odsečak kruga, koji se nalazi na $[-14; 14]$ intervalu. Sređivanjem jednačine dobićemo funkciju (Slika br. 33), koju ćemo iskoristiti da bismo pomoću integralnog računa dobili zapreminu lopte:

$$f(x) = \sqrt{15,4^2 - x^2} - 6,4.$$

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

$$V = \pi \int_0^{14} \left(\sqrt{15,4^2 - x^2} - 6,4 \right)^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^{14} \left(\sqrt{15,4^2 - x^2} \right)^2 - 12,8 \sqrt{15,4^2 - x^2} - 6,4^2 dx$$

$$V = \int_0^{14} (278,12 - x^2) dx - 12,8 \int_0^{14} \sqrt{15,4^2 - x^2} dx$$

$$\text{I. } \int (278,12 - x^2) dx = 278,12x - \frac{x^3}{3} + c$$

Vrednost integrala

$$\text{II. } \int \sqrt{15,4^2 - x^2} dx$$

možemo izračunati smenom:

$$x = 15,4 \sin t \quad t = \arcsin\left(\frac{x}{15,4}\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = 15,4 \cos t \quad dx = 15,4 \cos t dt$$

$$\int \sqrt{15,4^2 - x^2} dx = \int \sqrt{15,4^2 - 15^2 \sin^2 t} \cdot 15,4 \cos t dt =$$

$$15,4^2 \int \cos^2 t dt = 15,4^2 \int \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = 15,4^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} + c \right) =$$

$$15,4^2 \left[\frac{\arcsin\left(\frac{x}{15,4}\right)}{2} + \frac{\sin\left(2\arcsin\left(\frac{x}{15,4}\right)\right)}{4} \right] + c.$$

Ovde koristimo $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$, pa imamo:

$$\sin\left(2\arcsin\frac{x}{15,4}\right) = 2\sin\left(\arcsin\frac{x}{15,4}\right)\cos\left(\arcsin\frac{x}{15,4}\right) = 2 \cdot \frac{x}{15,4} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{15,4}\right)^2}$$

Na osnovu ovih jednakosti za zapreminu dobijamo sledeći izraz:

$$V = \pi \left[278,12x - \frac{x^3}{3} - 128 \cdot 15,4^2 \left[\frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{x}{15,4}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{15,4} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{15,4}\right)^2} \right] \right]_0^{14}$$

$$V = \pi \left[278,12x - \frac{x^3}{3} - 12,8 \cdot \left[118,58 \arcsin(0,065x) + \frac{x \cdot \sqrt{237,16 - x^2}}{2} \right] \right]_0^{14} \approx 672\pi$$

$$V \approx 2110,68 \text{ cm}^3.$$

Ovo je ovde polovina lopte, dakle cela zapremina je otprilike 4221 cm^3 .

Odavde možemo izračunati broj potrebnih uduvavanja pumpom:

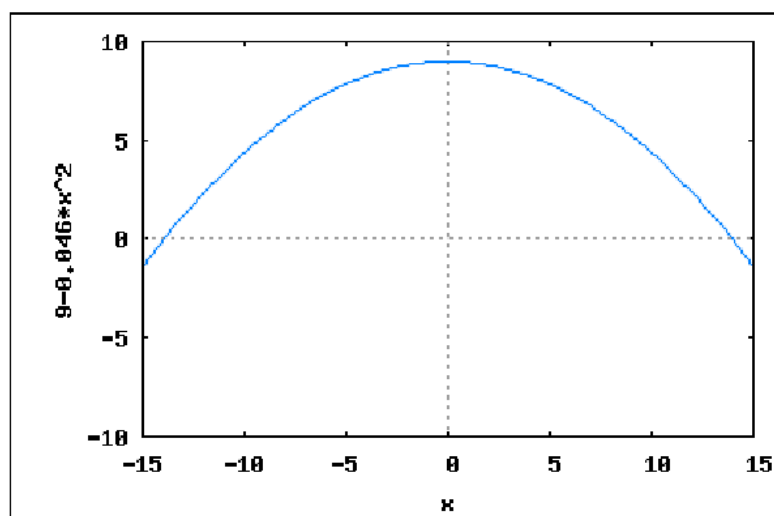
$$4221 : 94 \approx 44,9$$

Na osnovu ovoga potrebno nam je samo 45 uduvavanja, tj. 45 sekundi da bismo napumpali loptu.

- b. Na osnovu oblika lopte možemo koristiti i formu parabole za modeliranje. Posle pronalaženja jednačine za odgovarajuću parabolu slede isti koraci kao i u slučaju kružnog isečka. Parabola, dakle, mora da se oslanja na iste one tri tačke kao i gornji krug.

Da bismo došli do ovog rezultata odgovara nam sledeća jednačina (slika br. 34):

$$y = -0,046x^2 + 9$$



34. SLIKA

Ova forma u manjoj meri prati oblik lopte nego kružnica, ali na kraju nam ova ideja ipak odgovara da bismo računali sa njom. Uz njenu pomoć dolazimo do sledećeg rešenja:

$$V = \pi \int_0^{14} (-0,046x^2 + 9)^2 dx = \pi \int_0^{14} (0,002116x^4 - 0,828x^2 + 81) dx$$

$$V = \pi \left[0,002116 \frac{x^5}{5} - 0,828 \frac{x^3}{3} + 81x \right]_0^{14} \approx 1898,3 cm^3.$$

Ovo je ovde polovina lopte, dakle cela zapremina je otprilike $3797 cm^3$. Ne odstupa mnogo u veličini od prethodnog rezultata, ali ja ipak razliku smatram značajnom. Broj potrebnih uduvavanja pumpom će biti sledeći:

$$3795:94 \approx 40,37.$$

Na osnovu ovoga potrebno nam je samo 41 uduvavanje, tj 41 sekunda da bismo napumpali loptu.

4. Lopta za ragbi

Način računanja u zadatku sa loptom za ragbi je sličan kao kod zadatka sa loptom za američki fudbal, ali, kao što se vidi, lopta za ragbi nema toliki vrh kao lopta za američki fudbal, zato nam više odgovara elipsa.

Napomena: Ovaj zadatak se preporučuje učenicima 3-4. razreda srednje škole, ali čak i kod njih samo onima koji pohađaju dodatnu nastavu ili sekciju. Rešenje je sledeće:

Iz obima lopte se da izračunati širina lopte:

$$K = 60\text{cm} = 2r\pi$$

$$r \approx 9,6\text{cm}, \quad d \approx 19,2\text{cm}.$$

Sa slike se vidi odnos prečnika lopte prema dužini lopte, tj. poluprečnik prema polovini dužine lopte.

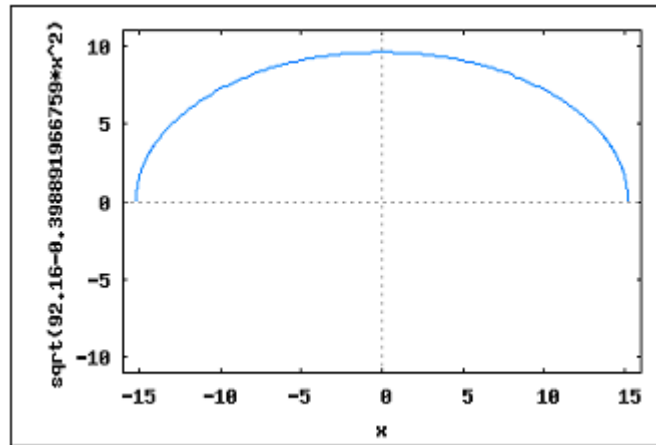
Na slici sam izmerila sledeće podatke: dužina 57 mm, širina 36 mm.

Iz ovoga sledi polovina velike ose:

$$a = \frac{57}{36} \cdot 9,6 = 15,2\text{cm}.$$

A polovina male ose je jednaka sa poluprečnikom, dakle:

$$b = r \approx 9,6\text{cm}.$$



35. SLIKA: PRIBLIŽAVANJE LOPTI ZA RAGBI ELIPSOM

Možemo napisati jednačinu ellipse:

$$\frac{x^2}{15,2^2} + \frac{y^2}{9,6^2} = 1.$$

Sa malim preuređenjem dobijamo funkciju (Slika br. 35) i uz njenu pomoć možemo izračunati zapreminu:

$$f(x) = \sqrt{9,6^2 - \frac{9,6^2}{15,2^2} x^2}$$

$$V = \pi \int_0^{15,2} \left(9,6^2 - \frac{9,6^2}{15,2^2} x^2 \right) dx \approx \pi [92,16x - 0,133x^3]_0^{15,2} \approx 2932,41 cm^3.$$

Ovo je zapremina polovine lopte, dakle cela lopta je otprilike $5865 cm^3$. Broj potrebnih pritisaka na pumpu je:

$$5865 : 94 \approx 62,39.$$

Dakle potrebno nam je ukupno 63 uduvavanja, što iznosi 63 sekunde.

Napomene:

- *Računanje može na više načina da se modifikuje. Možemo uzeti u obzir da pumpa ne može toliko vazduha da uduva kao što je njena zapremina.*
- *Naravno, svima je jasno da je lopta onda dobro napumpana ako je tvrda, tj. ako je u njoj velik pritisak. Za to nije dovoljno uduvati u nju toliko vazduha koliko je udobno ispunjava. Da bismo ovo rešili možemo uraditi i istraživački posao kako bismo saznali koliki mora biti pritisak unutar lopte na primer na jednoj zvaničnoj utakmici i uz pomoć saznanja iz fizike možemo vršiti i dalja računanja.*

4. Mogućnosti praktičnih primena jednog modela

„Ovo je uvek šokantan doživljaj. Čovek se iznenadi kada postane svestan da njegova umotvorina zaista može da se ostvari tamo, u stvarnom svetu. To je veliki šok i velika radost.“
Leo Kadanof

U svim slučajevima prethodno navedenih pojava samo smo jednu njihovu karakteristiku posmatrali da bismo opisali promenu njihovog stanja. Da bismo dali odgovarajući opis složenijih metoda moramo više toga da uzmemo u obzir. Neka su

$$X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$$

budu one promenljive vrednosti sa kojima možemo da okarakterišemo stanje datog sistema u trenutku t . $X_i(t)$ možemo smatrati kao komponente funkcije sa vektorskom vrednošću u skupu realnih brojeva $\mathbf{X}(t)$. Diferencijalna jednačina koja iskazuje promenu sistema dakle opisuje promenu $\mathbf{X}(t)$ funkcije u sledećoj opštoj formi:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{X}(t)).$$

U cilju daljeg ispitivanja pogledajmo sledeće diferencijalne jednačine:

$$\dot{X}_1(t) = (b_1 + a_{11}X_1(t) + a_{12}X_2(t))X_1(t) + c_1X_2(t) + e_1 \quad (4.1)$$

$$\dot{X}_2(t) = (b_2 + a_{21}X_1(t) + a_{22}X_2(t))X_2(t) + c_2X_1(t) + e_2$$

gde su $a_{11}, a_{12}, b_1, c_1, e_1, a_{21}, a_{22}, b_2, c_2, e_2$ realne konstante, a $X_1(t), X_2(t)$ su funkcije sa realnom vrednošću u skupu realnih brojeva. Nije nam skriven cilj da želimo da opišemo promenu dveju karakteristika nekog sistema pomoću ovih jednačina. Očigledno je da u slučaju

$$a_{12} = 0, c_1 = 0, a_{21} = 0, c_2 = 0$$

vrednost promenljive $X_1(t)$ nema uticaja na promenu $X_2(t)$ kao i obrnuto, ni vrednost $X_1(t)$ ne zavisi od vrednosti $X_2(t)$. U ovom slučaju možemo ih posmatrati i kao dva nezavisna sistema. U daljnjem ćemo ispitati pod kojim uslovima ova jednačina odgovara nekom dobro poznatom modelu.

4.1. Eksponencijalni rast (Maltusov model)

Tomas Robert Maltus (1766–1834) potiče iz engleske plemićke porodice. Bio je među prvima koji su se bavili dinamikom stanovništva. Svoj model je bazirao na jednostavnom otkriću da se na osnovu raznih iskustava u „zajednicama“ sa većim brojem stanovnika rađa više dece. U svom radu „Esej o principima stanovništva“ („An Essay of the Principle of Population”) iz 1798. godine, predložio je jednačinu sličnu jednačini

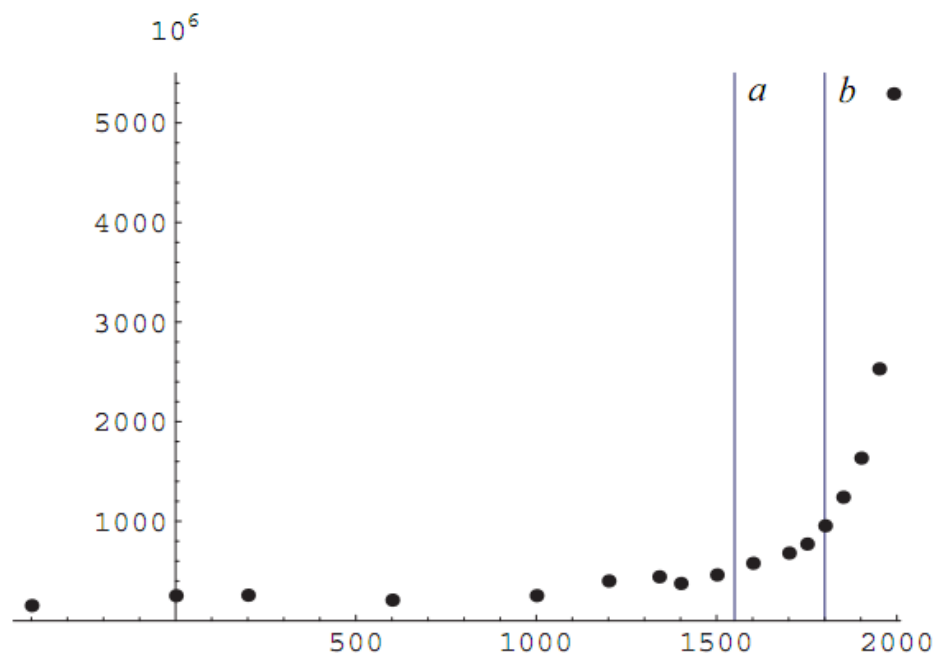
$$\frac{dN}{dt} = kN(t) \quad (4.2)$$

za opisivanje promene populacije. Ovde N označava brojnost populacije u trenutku t , a rata $k \in R$ označava tempo i pravac promene.

Prema Maltusovoj ideji jednačina dokazuje da je promena brojnosti populacije srazmerna sa njenom trenutnom brojnošću.

Uz pomoć svog modela je iskazao za to doba iznenađujuć, neočekivan zaključak. Iz iskustva da proizvodnja potrepština neophodnih za opstanak, kao što je hrana, raste linearno, a stanovništvo raste eksponencijalno⁶ (po njegovom modelu), došao je do zaključka da je sposobnost Zemlje da održava život veoma ograničena. Vredno je pažnje da je neko pre više od dve stotine godina, već na početku XVIII veka uočio ovaj, u današnjici veoma aktuelan problem. Njegova teorija o rastu stanovništva sa razvojem demografije, politike i ekonomije je u velikoj meri uticala na teoriju evolucije *Čarlsa Darvina*.

⁶ „U svetu životinja i biljaka priroda velikodušno posipa seme života, ali mnogo šta čini to sa hranom i prostorom, gde bi život mogao da funkcioniše. Ako bi se klice zemaljskog života bez prepreke razvijale mi bismo za par hiljada godina milione svetova naselili.“



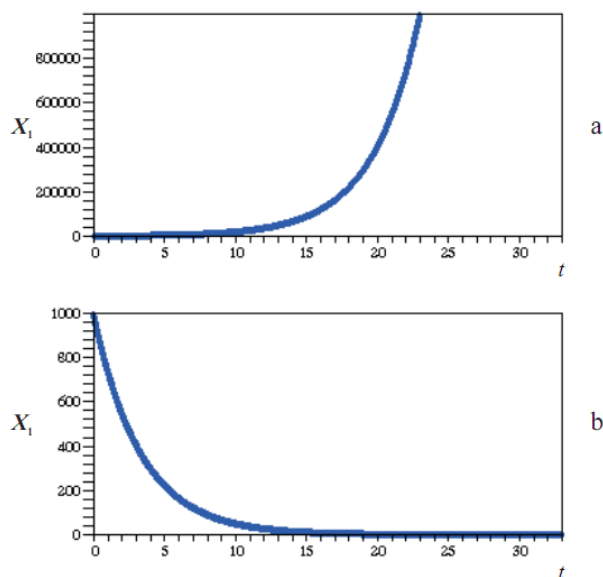
36. SLIKA: Evolucija populacije na Zemlji od 400. g. p. n. e. do 2000. g. n. e. Za period koji je prethodio XVI veku na raspolaganju su nam samo oni podaci koji su nastali na osnovu procena i zaključaka. Zbog toga je Maltus svoju teoriju mogao da osniva samo na podacima koji su nastali u periodu koji je između vremenskih tački a i b.

Ako u jednačinu (4.1) unesemo odgovarajuće konstante i izaberemo odgovarajuće početne vrednosti u obliku

$$\dot{X}_1(t) = b_1 X_1(t) \quad (4.3)$$

onda se oni mogu dovesti u formu sličnu Maltesovoj jednačini, gde je

$$\begin{aligned} b_1 &> 0, & a_{11} &= 0, & a_{12} &= 0, & c_1 &= 0, & e_1 &= 0 \\ b_2 &\in R, & a_{21} &\in R, & a_{22} &\in R, & c_2 &= 0, & e_2 &= 0 \end{aligned}$$



37. SLIKA: TIPIČNE KRIVE EKSPONENCIJALNOG RASTA

$$\text{a: } b_1 = +0,3 \quad X_1(0) = 10000 \quad X_2(0) = 10000$$

$$\text{b: } b_1 = -0,3 \quad X_1(0) = 10000 \quad X_2(0) = 10000$$

i $X_1(0) > 0, X_2(0) = 0$. Grafikoni Slike br. 37. su izrađeni uzimajući ovo u obzir. Maltusov model je pogodan kako za opisivanje opadajuće promene populacije, tako i za rastuću promenu populacije, naročito u početnoj fazi rasta, iako ne probija upravo one prepreke koje se tiču rasta, koje je sam postavio.

4.2. Logistički rast (Verhulstov model)

Belgijski matematičar Pierre-Francois Verhulst (1804-1849) je 1838. godine dalje razvio Maltusov model koji nam omogućava da posmatramo unutrašnju bitku za izvore energije između jedinki jedne populacije. Rast teče u zatvorenoj sredini, pored ograničenih izvora energije, sredina tako retroaktivno utiče na rast i sprečava ga. Dat sistem se na ovaj način dobro karakteriše sposobnošću okoline da održava život:

$$\dot{N}(t) = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right). \quad (4.4)$$

Ovde je r stopa porasta (Maltusov parametar), K je sposobnost prirode za održavanje života, a $N(t)$ označava veličinu populacije u t trenutku ($r, K \in R^+$).

Odgovarajućim odabirom konstante jednačina (4.1) se može dovesti do slične forme kao jednačina (4.4):

$$\dot{X}_1(t) = (b_1 + a_{11}X_1(t))X_1(t), \quad (4.5)$$

gde je

$$\begin{aligned} b_1 &> 0, & a_{11} &< 0, & a_{12} &= 0, & c_1 &= 0, & e_1 &= 0 \\ b_2 &\in R, & a_{21} &\in R, & a_{22} &\in R, & c_2 &= 0, & e_2 &= 0 \end{aligned}$$

i

$$X_1(0) > 0, X_2(0) = 0.$$

Ako se u jednačini (4.5) izvrše zamene

$$b_1 = r, a_{11} = -\frac{r}{K} \text{ i } X_1(t) = N(t)$$

onda se to dobro vidi.

Po Verhulstovoj ideji povećavanjem stanovništva stopa rasta bi trebala da se smanji. Verhulst je zapravo Maltusov model – gde se rast definiše proizvodom rate porasta i brojnosti stanovništva – dopunio činiocem čija se vrednost približava nuli, ako $t \rightarrow \infty$.

Ako početnu dimenziju populacije $N(t_0)$ uzmemo kao manju vrednost od sposobnosti za održavanje, onda će biti da je

$$0 < \frac{N(t_0)}{K} < 1$$

to jest

$$1 > 1 - \frac{N(t_0)}{K} > 0,$$

što ne menja predznak desne strane u (4.4), istovremeno

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right) = 0.$$

U suprotnom slučaju, ako $N(t_0) > K$, onda je

$$\frac{N(t_0)}{K} > 1,$$

dakle

$$1 - \frac{N(t_0)}{K} < 0,$$

i

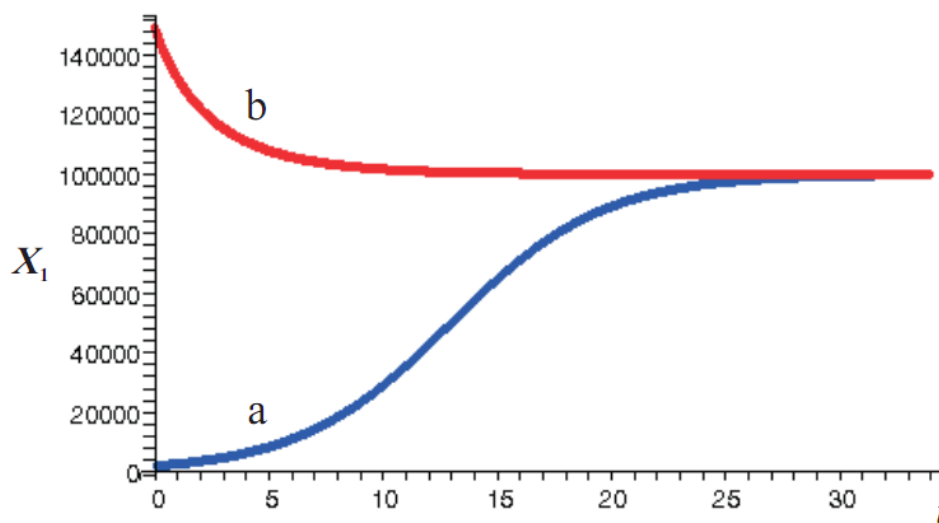
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right) = 0$$

se takođe ostvaruje. Kako se vrednost $N(t)$ približava sposobnosti za održavanje, vrednost razlomka

$$\frac{N(t)}{K}$$

će biti blizu 1. Ovu ograničavajuću ulogu prikazuje Slika br. 38.:

- a: $N(t_0) < K$,
- b: $N(t_0) > K$.



38. SLIKA: LOGISTIČKI RAST

$$a: b_1 = 0,3 \quad a_{11} = -3 \cdot 10^{-6} X_1(0) = 2,0 \cdot 10^3 X_2(0) = 0$$

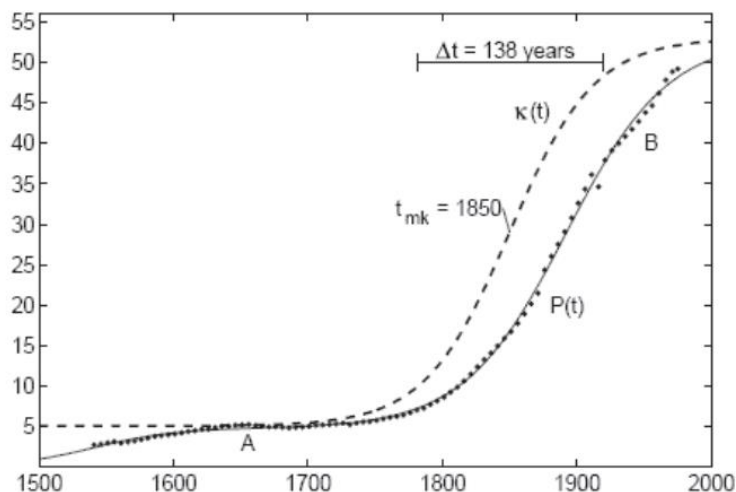
$$b: b_1 = 0,3 \quad a_{11} = -3 \cdot 10^{-6} X_1(0) = 1,5 \cdot 10^5 X_2(0) = 0$$

Jednačina (4.5) rezultira s-krivu 38/a. koja je karakteristična za logistički rast, ako je $b_1 + a_{11}X_1(0) > 0$. U početnoj fazi je karakteristiše slab rast, koji se kasnije ubrzava, ali kako se vrednost $X_1(0)$ sve više približava vrednosti

$$-\frac{b_1}{a_{11}}$$

rast postaje sve sporiji.

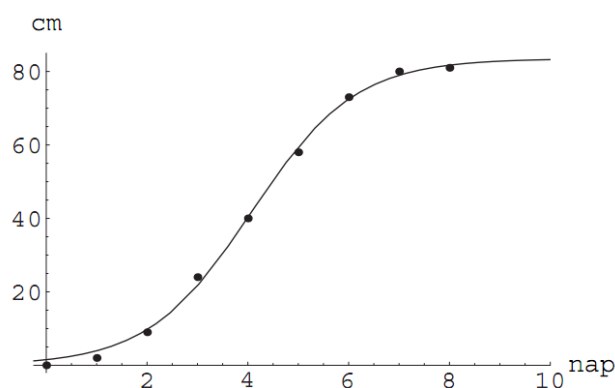
Ovim modelom se možemo približiti promenama stvarnih sistema bez obzira na njihove karakteristike. Na osnovu ranijih iskustava ovaj model je pogodan za opisivanje mnogih prirodnih, društvenih ili čak i privrednih fenomena. Ovo možemo podržati i stvarnim statističkim i eksperimentalnim podacima. Na osnovu Slike br. 39. se dobro vidi da se tempo porasta stanovništva u drugom delu XX. veka znatno usporio, i uz pomoć modela (4.4) se može objasniti da je to rezultat ograničenih mogućnosti zemlje.



39. SLIKA: PROMENA STANOVNIŠTVA ENGLJSKE OD 1500 DO 2000⁷

Dalje, na slici je uočljivo i da je na prekretnici između XVII i XVIII veka, posle porasta stanovništva, došlo do stagniranja. Tada je populacija verovatno mogla da dostigne najveću moguću prirodu za održavanje (kapacitet populacije). Posle toga je, najverovatnije usled industrijske revolucije (1769-1850), populacija ponovo počela da raste.

Visina raznovrsnih biljaka je određena od strane njihovih vrsta. Veće odstupanje od određene visine se retko dešava. Slika br. 40. nam na primeru pasulja pokazuje proces rasta jedne biljke, tj, kako ona dostiže svoju krajnju visinu.

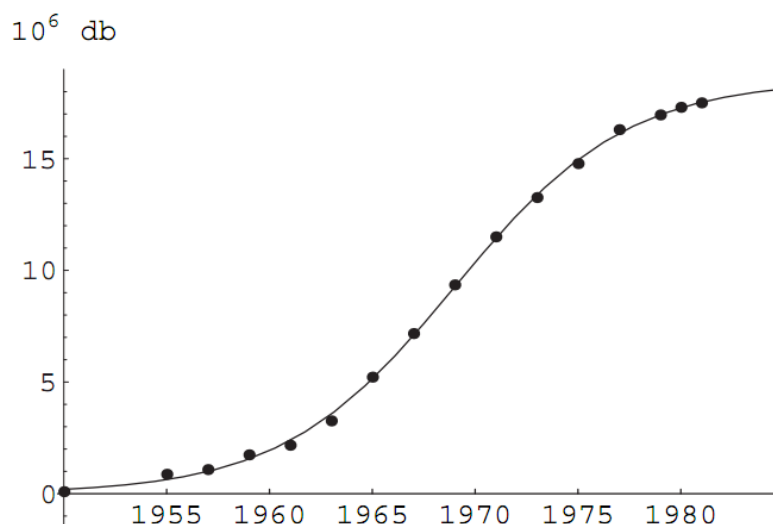


40. SLIKA: PROMENA DUŽINE STABLIKE PASULJA U PERIOD OD 8 DANA. IZMERENE VREDNOSTI I LOGISTIČKA KRIVA

⁷ Meyer P. S. Ausubel J.h, *Carrying Capacity: A Model with Logostically Varying Limits*, Technological Forecasting and Social Change, (1999)

$$N_0 = 1,53008 \quad r = 0,977361 \quad K = 83,4772$$

U trgovini zasićenost tržišta odgovara pojmu mogućnosti za izdržavanje kod modela populacije. Ovo prikazuje Slika br. 41.:



41. SLIKA: BROJ AUTOMOBILA U ITALIJI. STATISTIČKI PODACI I NJIHOVE LOGISTIČKE KRIVE

4.3. Interakcija između populacija

U najvećem broju sistema, kao što je npr. ekosistem, ne možemo da zanemarimo međusobni odnos vrsta koje tamo žive, ako se trudimo da što tačnije opišemo promene. Ova okolnost u velikoj meri određuje mogućnosti primene modela eksponencijalnog i logističkog rasta. Premda Verhulstov model uzima u obzir utrku između jedinki posmatrane populacije, ipak nije odgovarajući za posmatranje međuvrskih odnosa. To znači da u modelu koji opisuje porast jedne populacije, jedinke drugih populacija možemo uključiti samo kao deo spoljnog sveta, ne razlikujući ih nikako od drugih uticajnih faktora.

Neka u trenutku t budu brojevi jedinki⁸ $N_1(t), N_2(t), \dots, N_n(t)$ populacije $P_1, P_2, \dots, P_n$, sa n različitih vrsta. U opštoj formi data jednačina

⁸Podrazumeva se da broj jedinki ne možemo da smatramo kao konstantnu količinu, ali ako je broj jedinki dovoljno velik, nećemo napraviti preveliku grešku, ako brojnost biomase koju predstavlja data populacija okarakterišemo sa brojem jedinki.

$$\dot{N}_1(t) = f_1(t, N_1(t), N_2(t), \dots, N_n(t))$$

$$\dot{N}_2(t) = f_2(t, N_1(t), N_2(t), \dots, N_n(t))$$

$$\vdots$$

$$\dot{N}_n(t) = f_n(t, N_1(t), N_2(t), \dots, N_n(t))$$

izražava promenu pojedinih jednačina, na koje utiču i ostale vrste.

Lotka-Volterra jednačine⁹ predstavljaju primenu nelinearnih diferencijalnih jednačina, koje su zanimljive i iz ugla istorije.

Vito Volterra je bio poznati rimski profesor svog doba. Počeo je da se bavi matematičkim opisom ekoloških pojava na osnovu zapažanja svoga zeta, biologa Umberta D'Ankone. Dok je analizirao ribolovačke podatke Jadranskog mora mladi biolog je došao do zaključka da se za vreme Prvog svetskog rata, kada su vojna dešavanja i okolnosti u velikoj meri uticali na ribarstvo, odnos upećanih ribljih vrsta znatno promenio, uzimajući u obzir ranije podatke. Neke određene vrste riba grabljivica su bile češće u mrežama ribara nego one vrste koje su im služile za ishranu. Opazio je i to da se odnos broja riba grabljivica i riba-ulova ciklično menjao. Iz ovog je zaključio da se broj riblje populacije periodično menja. Volterra je za opisivanje opažanih pojava preporučio jednostavan sistem diferencijalnih jednačina sa dve promenljive, sličan sistemu jednačina

$$\dot{N}_1(t) = \beta_1 N_1(t) - \alpha_1 N_1(t) N_2(t) \quad (4.6)$$

$$\dot{N}_2(t) = -\beta_2 N_2(t) + \alpha_2 N_1(t) N_2(t)$$

gde su $N_1(t)$ broj populacije ulova, $N_2(t)$ broj populacije grabljivica u trenutku t , a α_i i β_i ($i = 1, 2$) su pozitivne stvarne konstante karakteristične za sistem.

⁹ U početku su se pomoću njih modelirali interakcije dve populacije (lovac-ulov) i efekat tih interakcija na broj populacije, kasnije su uspešno korišćene i na drugim područjima, na primer predstavljaju se kao jedan moguć model u oscilirajućoj hemijskoj reakciji. Iako još ne poznajemo konkretnu autokatalitičku reakciju čiji mehanizam bismo mogli da zapišemo pomoću njega, služio je kao osnova pri osmišljavanju drugih modela. Ovo nam omogućava da predstavu o pojmu populacije shvatimo i uopštenije od običnog shvatanja. Zbog ovoga u daljnjem pod pojmom populacije nećemo u svakom slučaju podrazumevati neko biološko mnoštvo.

Na osnovu jednačine (4.6) promenu broja populacije $\dot{N}_1(t)$ određuju dve stvari. Povećanje populacije zavisi samo od trenutnog broja populacije, dok izumiranje populacije zavisi i od broja populacije i od broja grabljivica. Slična veza se uočava i kod posmatranja promene populacije kog grabljivica $\dot{N}_2(t)$.

Ako, dakle, posmatramo sistem gde hranu jedinki populacije P_2 znače isključivo jedinke populacije P_1 , onda je očigledno da promena broja jedinki ove dve populacije zavisi ne samo od broja pojedinačnih populacija, već zavisi i od njih samih. Volterra je svoje zaključke publikovao 1926. na italijanskom. Skoro u isto vreme, nezavisno od njega, Amerikanac Alfred Dž. Lotka je izneo slične rezultate u svojoj knjizi “Elementi fizičke biologije” (*Elements of Physical Biology*). Iako je jedan od njih do svojih matematičkih formulisanja opštijih teoretskih pitanja došao preko problema koji se javljaju u praksi, a drugi se okrenuo prema ekološkim problemima sa namerom da nađe matematički model za opisivanje određenih pojava, njihovi rezultati su prešli preko granica nauke o ekologiji, jer su ove rezultate kasnije uspešno koristili i u mnogim problematikama u raznim oblastima nauke.

U jednačinama (4.6) interakcijski uticaj dve populacije na populaciju i možemo posmatrati sa proizvodima $\alpha_i N_1(t) N_2(t)$. Uticaj će zavisiti od apsolutnih vrednosti činilaca, i on može biti povoljan, nepovoljan ili bez uticaja u zavisnosti da li

$$\alpha_i > 0, \alpha_i < 0 \text{ ili } \alpha_i = 0.$$

Predznak proizvoda određuje predznak α_i , jer iz aspekta problema vrednosti¹⁰ $N_i(t) \leq 0$ bile bi nerealne. Ako ovde u modelu (4.1) za $X_i(t)$ dodamo ono značenje koje smo u modelu (4.6) dodali $N_i(t)$, onda za α_1 odgovara a_{12} , a za α_2 odgovara a_{21} .

Na osnovu gore navedenog zaključka postavlja se misao: ako koeficijente $a_{ij} (i \neq j)$ izaberemo na sve moguće načine (s obzirom na njihov predznak) onda ćemo dobiti uopštavanje Lotka-Voterra modela koji nam (uz granice koje nam model postavlja) opisuje sve moguće tipove interakcija između dve populacije. Slučajeve koji se na ovaj način mogu opisati predstavlja tabela 4.1:

¹⁰Broj stanovnika se ne može opisati negativnim brojem, a u isto vreme bi $N_i(t) = 0$ iz aspekta interakcije bilo nerealno.

a_{12}	a_{21}	tip interakcije
+	+	simbioza
+	-	lov ¹¹
+	0	prisustvo gazde pozitivno utiče
-	-	takmičenje među vrstama
-	0	amenalizam, antibioza
0	0	neutralna interakcija

Tabela 4.1. Međusobni odnosi dve vrste, izraženi vrednostima konstanta a_{12}, a_{21} .

Kao što smo i videli, logistički model (4.4) iskazuje i takmičenje među jedinkama date populacije. Naravno, sa sličnim faktorima se mora računati i ako dve različite populacije vode bitku za isti izvor energije. Ovo može da znači i jednu drugu mogućnost za interakciju između dve različite populacije. U isto vreme se može uočiti da je interakcija za obe strane povoljna ili nepovoljna, možda za jednu stranu bez uticaja. Po svedočenju tabele 4.1. postoje stvarni ekvivalenti ovim interakcijama u ekološkim sistemima.

Pošto cilj nije da se ovo u detalje razmatra iz redova mogućih interakcija izdvojicemo samo dve mogućnosti i pomoću njih ćemo prikazati da je sistem (4.1) odgovarajuć za prikazivanje modeliranja date interakcije.

¹¹ U cilju davanja teorija ekolozi su pojam lova definisali u najopštijem smislu: potrošnja živih organizama bez obzira na to, kakav je organizam. Dakle, u ovu skupinu spada i potrošnja biljaka, mesa, parazitizam i parazitski način života.

4.3.1. Model ulova-grabljivica

Detaljnije proučavanje modela uzrokuje pored njegovog istorijskog značaja i njegovo često korišćenje. Neophodan je pri predstavljanju veoma bitnih ekoloških pojmova, kao što je to na primer lanac ishrane.

Pored odgovarajućeg početnog uslova ($X_1(0) \gg 1, X_2(0) \gg 1$) i odabira odgovarajućih parametara

$$\begin{aligned} b_1 > 0, \quad a_{11} = 0, \quad a_{12} < 0, \quad c_1 = 0, \quad e_1 = 0 \\ b_2 < 0, \quad a_{21} > 0, \quad a_{22} = 0, \quad c_2 = 0, \quad e_2 = 0 \end{aligned}$$

jednačine koje su ponuđene od strane Volterre mogu se dovesti na sledeću formu:

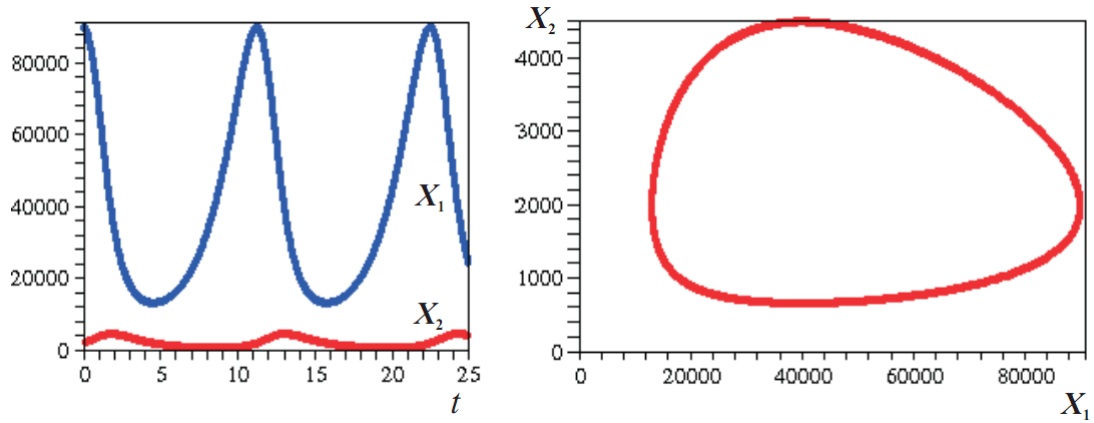
$$\begin{aligned} \dot{X}_1(t) &= (b_1 + a_{11}X_2(t))X_1(t), \\ \dot{X}_2(t) &= (b_2 + a_{21}X_1(t))X_2(t). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Slika br. 42. je nastala pomoću odgovarajućih parametara na osnovu jednačina (4.7). Trajektologija sistema se može nacrtati oko jednog ravnotežnog stanja.

Na osnovu iskustva se mora obratiti pažnja i na samoregulaciju populacija, koja se sve više ističe ako je brojnosti populacije sve veća i može da utiče na dalje povećavanje njenog broja.

Izaberimo sada parametre jednačine (4.1) tako da oni odgovaraju sledećim uslovima:

$$\begin{aligned} b_1 > 0, \quad a_{11} \leq 0, \quad a_{12} < 0, \quad c_1 = 0, \quad e_1 = 0 \\ b_2 < 0, \quad a_{21} > 0, \quad a_{22} \leq 0, \quad c_2 = 0, \quad e_2 = 0. \end{aligned}$$



42. SLIKA: MODEL ULOVA-GRABLJIVICA

(Brojnost dveju populacija u funkciji vremena i trajektorija sistema.)

$$X_1(0) = 90000, \quad b_1 = +0,6, \quad a_{12} = -0,3 \cdot 10^{-4}$$

$$X_2(0) = 2000, \quad b_1 = -0,6, \quad a_{12} = +1,5 \cdot 10^{-5}$$

Jednačine koje su dobijene na način

$$\dot{X}_1(t) = (b_1 + a_{11}X_1(t) + a_{12}X_2(t))X_1(t) \quad (4.8)$$

$$\dot{X}_2(t) = (b_2 + a_{21}X_1(t) + a_{22}X_2(t))X_2(t)$$

sa parametrima a_{ii} ($i = 1,2$) su odgovarajuće da se pomoću njih opiše i trka unutar jedne populacije. Kako se to vidi na Slici br. 42. ovo ima ulogu stabilizatora sistema.

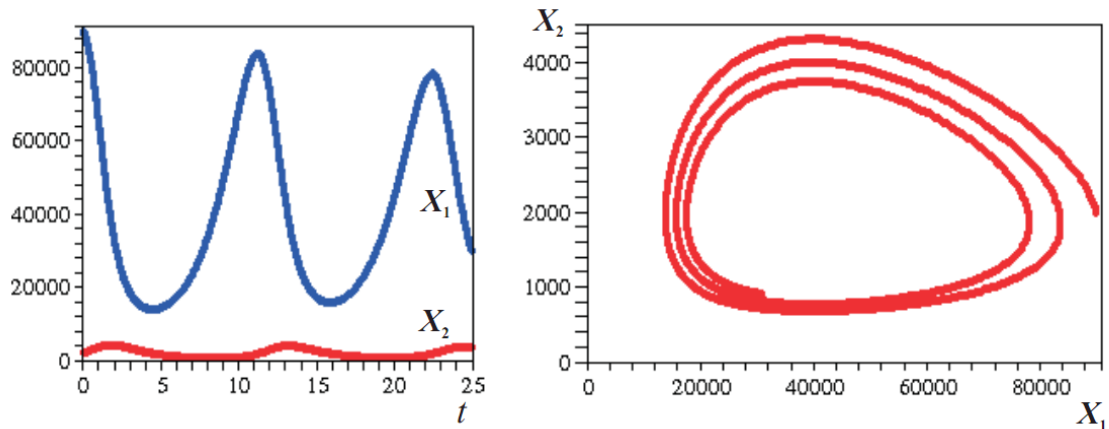
4.3.2. Takmičenje između dve vrste

Pojam takmičenje dve vrste, to jest delatnost koja znači prikupljanje izvora energije koji su neophodni za opstanak se pojavio već u vezi sa modelom (4.8). Tamo opisana takmičenje unutar vrste je međutim igrala sporednu ulogu u odnosu na interakciju ulov-grabljivica između dve populacije.

Međutim, model koji se opisuje jednačinama (4.9)

$$\dot{N}_1(t) = r_1 N_1(t) \frac{K_1 - N_1(t) - \kappa_2 N_2(t)}{K_1}$$

$$\dot{N}_2(t) = r_2 N_2(t) \frac{K_2 - N_2(t) - \kappa_1 N_1(t)}{K_2}.$$



**43. SLIKA: MODEL ULOVA-GRABLJIVICA S OBZIROM NA
INTERSPECIFIČNU TAKMIČENJE**

$$X_1(0) = 90000, \quad b_1 = +0,6, \quad a_{12} = -0,3 \cdot 10^{-4}, \quad a_{21} = -0,3 \cdot 10^{-4}$$

$$X_2(0) = 2000, \quad b_2 = -0,6, \quad a_{12} = +1,5 \cdot 10^{-5}$$

omogućava da se opiše slična interakcija između jedinki dve različite vrste, gde je

K_i : mogućnost okoline za izdržavanje u odnosu na vrstu i ,

r_i : rata porasta vrste i ,

κ_i : koeficijent kompeticije označava u kolikoj meri vrsta i smanjuje mogućnosti druge vrste ($i = 1, 2$).

Praktičan značaj jednačina (4.9) povećavaju i mnogobrojna tužna iskustva koja govore o tome kako vrste koje su silom uvedene u dati ekosistem često uništavaju, isterbljuju vrstu koja je tamo nativna. U sličnim slučajevima da bi se prognozirali mogući ishodi bitno je da se analizira moguće ravnotežno stanje sistema.

Sistem je u ravnoteži ako su N_1 i N_2 konstante, to jest kada je

$$\dot{N}_i(t) = 0, \quad (i = 1, 2).$$

Na osnovu (4.9) se vidi, da je ovo moguće, sem u trivijalnom slučaju kada je

$$r_i N_i(t) = 0,$$

jedino onda, ako

$$K_1 - N_1(t) - \kappa_2 N_2(t) = 0$$

i

$$K_2 - N_2(t) - \kappa_1 N_1(t) = 0.$$

U ravni ove jednačine označavaju dve prave. Na osnovu njihovog međusobnog odnosa i određivanja početnih uslova u odnosu na njih, možemo dati karakteristiku očekivanog ravnotežnog stanja.

Izaberimo sada parametre jednačine (4.1) tako da oni zadovoljavaju sledeće uslove:

$$b_1 > 0, \quad a_{11} < 0, \quad a_{12} < 0, \quad c_1 = 0, \quad e_1 = 0$$

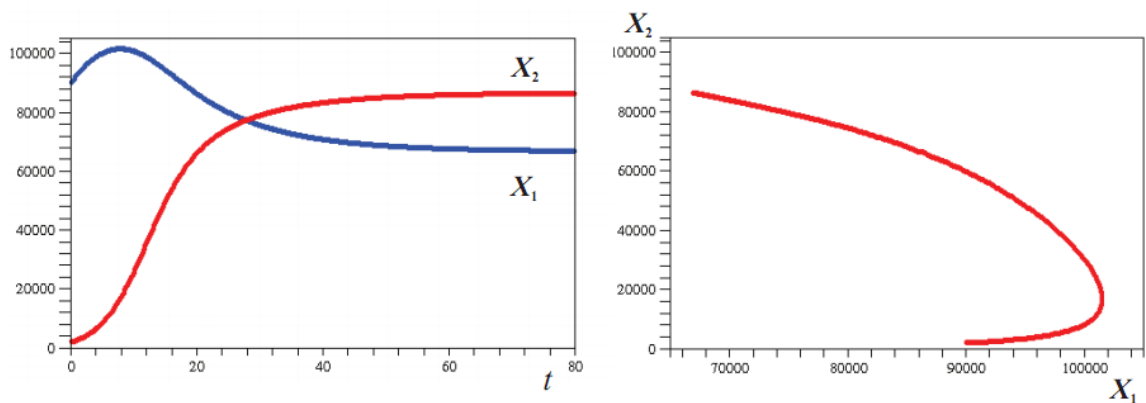
$$b_2 < 0, \quad a_{21} < 0, \quad a_{22} < 0, \quad c_2 = 0, \quad e_2 = 0$$

i u njima upotebiti zamene

$$b_1 = r_1, a_{11} = -\frac{r_1}{K_1}, a_{12} = -\frac{r_1 K_2}{K_1},$$

$$b_2 = r_2, \quad a_{21} = -\frac{r_2 K_1}{K_2}, \quad a_{22} = -\frac{r_2}{K_2}$$

od jednačina (4.1) dobićemo jednačine (4.9).



44. SLIKA: TAKMIČENJE IZMEĐU DVE VRSTE

$$X_1(0) = 90000; \quad b_1 = 0,2; \quad a_{11} = -1,82 \cdot 10^{-6}; \quad a_{12} = -9,09 \cdot 10^{-7}$$

$$X_2(0) = 2000; \quad b_2 = 0,6; \quad a_{21} = -3,00 \cdot 10^{-6}; \quad a_{22} = -4,62 \cdot 10^{-6}$$

Slika br. 44. predstavlja jedinstveni slučaj kada jedinke populacije P_2 koja ima znatno manje početno stanje, ima i uslove koji su mnogo pogodniji, ali uprkos tome mogla je da nastane takva ravnoteža koja nije u mogućnosti da prouzrokuje nestanak nijedne populacije.

Druga mogućnost uopštenog posmatranja jednačine Lotka – Voltera je da se omogući da ona opisuje interakcije između više od dve populacije. Pošto osnovne promenljive jednačine označavaju brojnosti pojedinih populacija, potrebno je da sistem jednačina proširimo sa novim jednačinama koje su odgovarajuće za opisivanje promene broja jedinki u pojedinim populacijama. U isto vreme neke jednačine moramo da menjamo da bi one postale

odgovarajuće za opisivanje interakcija između jedinki bilo koje dve populacije. Ovakvi sistemi jednačina se mogu napisati u formi sličnoj formi (4.6). Trodimenzionalni sistem jednačina koji je dat od strane R. M. Meja i W. Dž. Leonarda, a uzima u obzir interakcije triju populacija nam daje primer za ovo.

$$\dot{x}_1(t) = (1 - x_1(t) - \alpha_1 x_2(t) - \beta_1 x_3(t))x_1(t) \quad (4.10)$$

$$\dot{x}_2(t) = (1 - \beta_2 x_1(t) - x_2(t) - \alpha_2 x_3(t))x_2(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = (1 - \alpha_3 x_1(t) - \beta_3 x_2(t) - x_3(t))x_3(t)$$

U njoj su α_i i β_i ($i = 1 \dots 3$) realne konstante koje su karakteristične za sistem. Model opisuje promenu sistema koji se može okarakterisati sa brojanom veličinom triju populacija. Sistem jednačina

$$\dot{X}_i(t) = r_i \cdot X_i(t) \left(1 + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \cdot X_j(t) \right) \quad (4.11)$$

$$(i = 1, \dots, n)$$

predstavlja uopštavanje¹² prethodno rečenih. Pomoću njega možemo opisati sisteme koji se sastoje od n vrsta, gde r_i označava ratu povećavanja vrste i , a α_{ij} označava uticaj vrste j na povećavanje vrste i .

Ovo znači da sistem možemo prikazati grafom koji se sastoji od n čvorova, gde čvorovi odgovaraju pojedinim populacijama, dok linije predstavljaju odnose među populacijama.

Konstante α_{ij} jednačine 4.11 možemo da složimo u matricu:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

¹² U slučaju $n = 1$ imamo model logističkog rasta, u slučaju $n = 2$ imamo Lotka-Voltarra model, dok za $n = 3$ dobijamo May-Leonard model.

Ako je dakle

$$\alpha_{ij} = 0,$$

onda to znači da vrsta i nije ni u kavoj interakciji sa vrstom j .

4.4. Modeli borbe

Mogućnost upotrebe diferencijalnih jednačina se pojavila i prilikom analize neprijateljskih strana tokom ratovanja (neka $X_1(t)$ i $X_2(t)$ označavaju brojno stanje dveju vojnih sila u trenutku t). Upotreba modela na ovom području se vezuje za Frederika V. Lančestera, koji je za vreme Prvog svetskog rata upotrebio ratni model za prognoziranje ishoda ratnih dešavanja.

U modelu $\dot{X}_1(t)$ i $\dot{X}_2(t)$ označavaju promenu vojnih snaga. Iz aspekta problema moramo da razlikujemo takozvani ratni gubitak koji je načinjen neposredno od srtane neprijatelja i operativne gubitke koji su uzrokovani raznim bolestima, nesrećama (događajima koji se ne vezuju za ratno delovanje). Iako u stvarnosti može doći i do izdvajanja vojnih jedinica, kao i do dupunjavanja istih, što možemo uočiti u modelu (4.1) sa oznakom vrednosti e_i , ($e_i > 0$ je dopunjavanje, a $e_i < 0$ je povlačenje snaga), u daljnjem ovu opciju modela nećemo iskoristiti. Ispitaćemo tri modela koja zavise od strategija neprijateljskih snaga.

U jednačini (4.1) sa odabirom parametara b_i možemo da utičemo na operativnu snagu vojske i , dok vrednostima a_{ij} , ($i \neq j$) i c_i utičemo na meru vojnog gubitka. Kao početni uslov možemo dati vrednosti

$$X_1(0) > 0 \text{ i } X_2(0) > 0.$$

4.4.1. Tradicionalna borba

Ovaj model se može koristiti ako se neprijateljske sile bore na tradicionalan način, tj. ako ratnici dveju sila neposredno vide jedni druge.

U slučaju sistema jednačina (4.1) upotrebom parametara

$$b_1 < 0, \quad a_{11} = 0, \quad a_{12} = 0, \quad c_1 < 0, \quad e_1 = 0$$

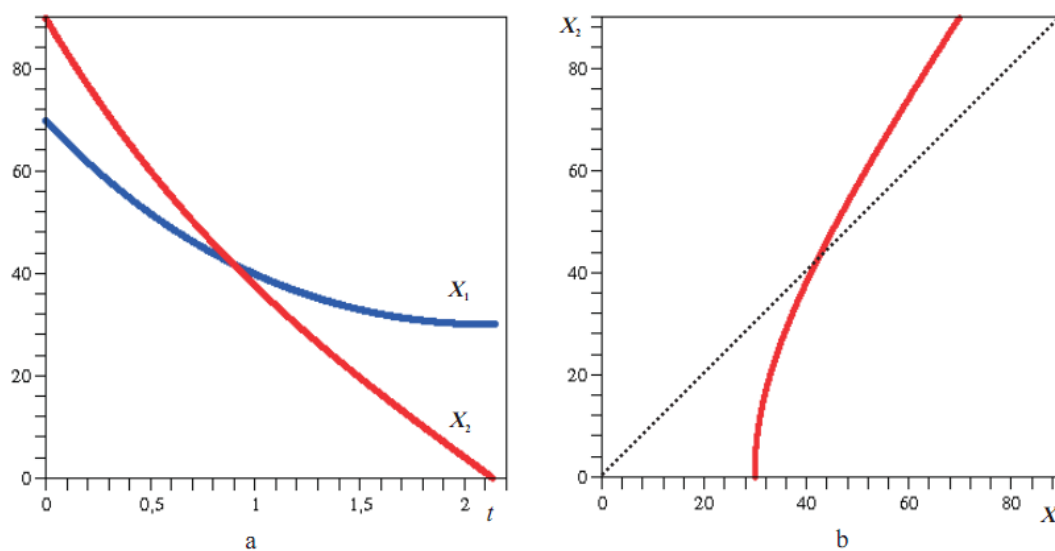
$$b_2 < 0, \quad a_{21} = 0, \quad a_{22} = 0, \quad c_2 < 0, \quad e_2 = 0$$

nastaje sistem

$$\dot{X}_1(t) = b_1 X_1(t) + c_1 X_2(t) \quad (4.12)$$

$$\dot{X}_2(t) = b_2 X_2(t) + c_2 X_1(t)$$

koji svedoči da gubitak datog tabora zavisi isključivo od obučenosti i brojnosti neprijatelja. Slika br. 45. je izrađena na osnovu jednačine (4.12) posle prilagođavanja odgovarajućih početnih uslova i parametara.



45. SLIKA: TRADICIONALNA BORBA

$$X_1(0) = 70; \quad b_1 = -0,01; \quad c_1 = -0,5$$

$$X_2(0) = 90; \quad b_2 = -0,007; \quad c_2 = -1$$

4.4.2. Gerilska borba

U ovom slučaju ratnici obe strane pokušavaju da ostanu neprimećeni od strane neprijatelja. Za jedan od mogućih opisa toka ovakve bitke je pogodan sistem

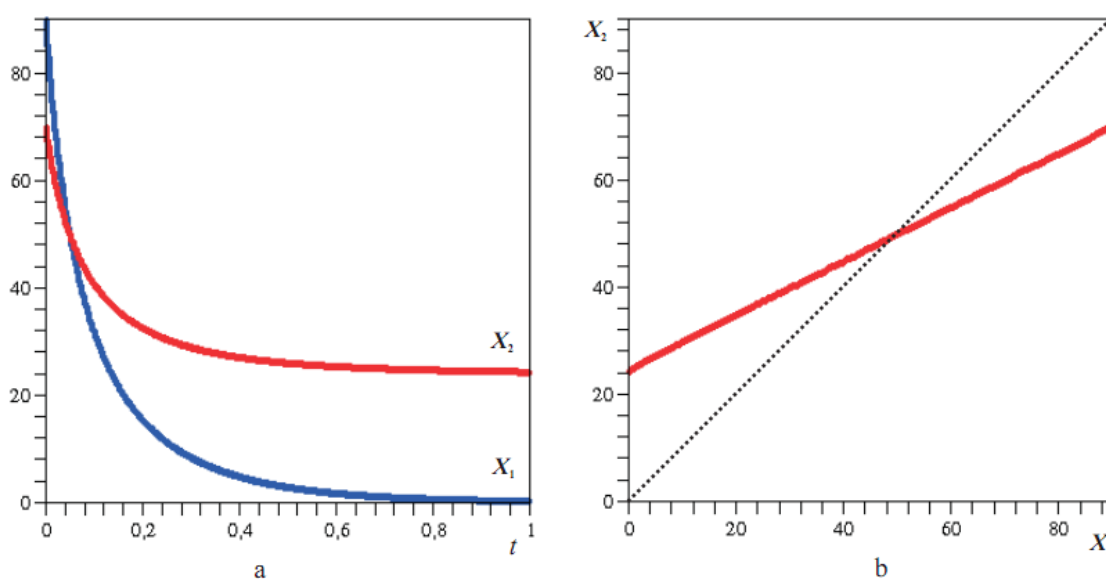
$$\dot{X}_1(t) = b_1 X_1(t) + a_{12} X_1(t) X_2(t) \quad (4.13)$$

$$\dot{X}_2(t) = b_2 X_2(t) + a_{21} X_2(t) X_1(t).$$

Koji se iz jednačine (4.1) može dobiti sledećom parametrizacijom

$$\begin{aligned} b_1 < 0, \quad a_{11} = 0, \quad a_{12} < 0, \quad c_1 = 0, \quad e_1 = 0 \\ b_2 < 0, \quad a_{21} < 0, \quad a_{22} = 0, \quad c_2 = 0, \quad e_2 = 0. \end{aligned}$$

Bitno je da se napomene da se sistem jednačina (4.13) formalno poklapa sa Volterra jednačinama (4.6) i jednačinom (4.7) koja je izvedena iz jednačine (4.1), razlika postoji samo u parametrima. Na Slici br. 46. je prikazana jedna primena jednačina (4.13) sa parametrima datim na istom mestu.



46. SLIKA: GERILSKA BORBA

$$X_1(0) = 70; \quad b_1 = -0,01; \quad c_1 = -0,2$$

$$X_2(0) = 90; \quad b_2 = -0,003; \quad c_2 = -0,1$$

4.4.3. Mešovita borba (gerilsko-tradicionalna)

Pretpostavimo da I jedinice vode gerilsku bitku. Ovo znači da za njih ratnici II jedinice predstavljaju dobru metu, na primer iz razloga što I jedinice napadaju iz zasede ili su se zabarikadirali. U isto vreme II jedinice su primorane da vode bitku na tradicionalan način. Modeliranje ovakve bitke omogućava sistem

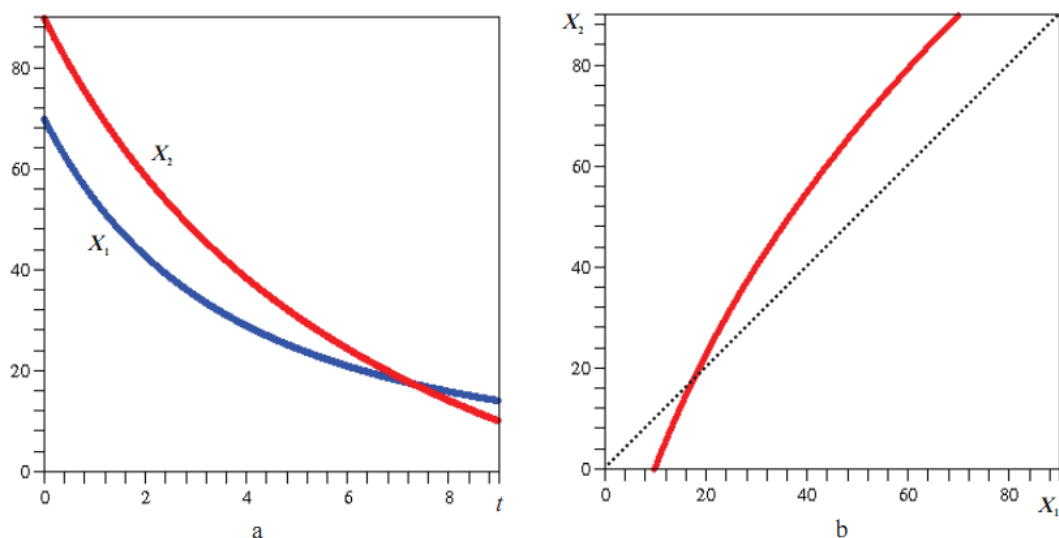
$$\dot{X}_1(t) = b_1 X_1(t) + a_{12} X_1(t) X_2(t) \quad (4.14)$$

$$\dot{X}_2(t) = b_2 X_2(t) + c_2 X_1(t)$$

uz parametre

$$b_1 < 0, \quad a_{11} = 0, \quad a_{12} < 0, \quad c_1 = 0, \quad e_1 = 0$$

$$b_2 < 0, \quad a_{21} = 0, \quad a_{22} = 0, \quad c_2 < 0, \quad e_2 = 0.$$



47. SLIKA: MEŠOVITA BORBA

Na Slici br. 47. se dobro vidi da su pored datih uslova i parametara pobedile jedinice gerilaca. Desilo se sve to unatoč ekstremnim parametrima sa kojima nismo ni malo bili od koristi I jedinicama. Količnik parametara

$$\frac{b_1}{b_2} = 5$$

koji opisuje operativne gubitke je dosta visok. To znači da su ratnici u gerilskim jedinicama pet puta češće postajali nesposobni za borbu usled bolesti, nego ljudi u neprijateljskim redovima. Pored svega ovoga tradicionalna jedinica na početku borbe ima mnogo veće brojno stanje.

Bitka bi bila mnogo važnija da smo vrednosti parametara koji opisuju vojne gubitke dati realnije. Ako pretpostavimo da su dva tabora imala istu vatrenu snagu i tačnih pogodaka onda bi količnik

$$\frac{c_2}{a_{12}}$$

u velikoj meri premašio i veličinu 10^2 .

Izgleda da ova strategija sili koja vodi tradicionalnu borbu donosi velike gubitke i malo pozitivnog rezultata. Ovakav rat su SAD vodile u Vijetnamu, koji su i izgubili 1968¹³.

4.5. Oscilacija

Pojava mehaničke oscilacije i njegove vrste su vrlo rano postale poznate čoveku. Pre nego što se upoznao sa suštinom ove pojave, ne govoreći o njegovom matematičkom modelu, na razne načine je stvorio sebi koristi pomoću svog znanja. Na primer, naši su preci pravili instrumente mnogo pre nego što su neke izvesne pojave počeli da analiziraju iz stanovišta nauke. U isto vreme smo ne jednom osetili gubitke usled nedovoljnog poznavanja ovih pojava.

¹³ U ovom ratu je broj gerilaca bio $2,8 \cdot 10^5$, dok su na suprotnoj strani Amerikanci i njihovi savetnici brojali $1,68 \cdot 10^6$ vojnika. Ovo znači šest puta veće brojno stanje, što opet nije bilo dovoljno za pobedu.

Na primer, 1831. godine je marširanje šezdeset vojnika prouzrokovalo rušenje gvozdenog mosta Brauton. Drugi, veoma često pominjan primer je katastrofa mosta Takoma u državi Vašington, koja je izazvana zajedničkim dejstvom fizičkih parametara mosta i jakih udara vetra, karakterističnih za to područje¹⁴.

Verovatno najjednostavniji sistem koji je odgovarajući za prikazivanje mehaničke oscilacije je viseća opruga sa koje visi telo sa masom m . Predstavimo telo kao tačku. U mirovnom položaju sistema težišna sila mg koja deluje na materijalnu tačku i povratna snaga koja nastaje rastezanjem opruge Δl su u ravnoteži.

Pomeranjem tela (uspravno) iz ravnotežnog položaja, zatim njegovo napuštanje, kretanje materijalne tačke se može opisati pomoću homogene diferencijalne jednačine drugog reda sa konstantom koeficijentom,

$$\ddot{X}(t) = -\frac{c}{m}\dot{X}(t) - \omega_0^2 X(t) \quad (4.15)$$

gde $X(t)$ predstavlja trenutnu promenu mesta materijalne tačke m iz ravnotežnog položaja. Dalje, u jednačini (4.15) konstantom trenja $c \geq 0$ možemo okarakterisati slabljenje sistema, a $\omega_0 = \frac{k}{m}$ označava konstantu koja zavisi od parametara opruge i mase tela koje je u pokretu.

Idealizacija sistema znači izbor $c = 0$. Sada pretpostavljamo da nikakva spoljašnja sila, koja nastaje trenjem u stvarnim sistemima, ne utiče na telo koje se kreće. U nekim određenim slučajevima kada se opisuje dovoljno kratak period u kojem sistem funkcioniše, ovaj model je odgovarajuć.

Shodno transmisijском principu, jednačina (4.15) se može preformulisati u sistem diferencijalnih jednačina:

$$\begin{aligned} \dot{X}_1(t) &= X_2(t) \\ \dot{X}_2(t) &= -\frac{c}{m}X_2(t) - \omega_0^2 X_1(t). \end{aligned} \quad (4.16)$$

¹⁴Iako se gore navedeni primeri mogu objasniti pojavom primorane oscilacije pod uticajem spoljne sile, i njegovo simuliranje modelom (4.1) nije moguće, bitno je da se pomene zbog važnosti pojave titranja.

U sistemu jednačina (4.16) $X_1(t)$ je materijalna tačka koja izlazi iz stanja mirovanja sa promenom predznaka, što zavisi od vremena, a $X_2(t)$ označava brzinu (takođe sa predznakom) u trenutku t . Iz sistema jednačina (4.16) je očigledno i da trenutačno ubrzanje materijalne tačke ($\dot{X}_2(t)$) zavisi od putanje njihanja i od trenutačne brzine.

4.5.1. Harmonijska oscilacija

Izborom parametara

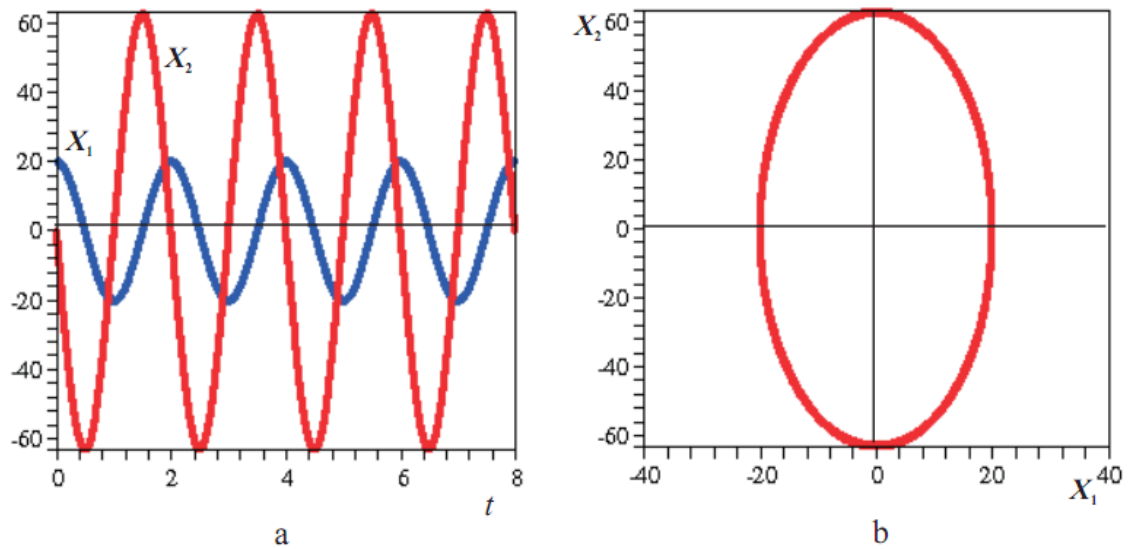
$$\begin{aligned} b_1 &= 0, & a_{11} &= 0, & a_{12} &= 0, & c_1 &= 1, & e_1 &= 0 \\ b_2 &= 0, & a_{21} &= 0, & a_{22} &= 0, & c_2 &= -\omega_0^2, & e_2 &= 0 \end{aligned}$$

sistema jednačina (4.1), dobijamo sistem jednačina

$$\begin{aligned} \dot{X}_1(t) &= c_1 X_2(t) \\ \dot{X}_2(t) &= c_2 X_1(t). \end{aligned} \tag{4.17}$$

koji je pogodan da se pomoću njega opiše harmonijska oscilacija.

Kod odabira početnih uslova mora se uzeti u obzir da $X_1(0)$ i $X_2(0)$ ne mogu u isto vreme biti 0 jer bi to predstavljalo stanje ravnoteže. Na osnovu gore navedenog Slika br. 48. prikazuje kako smo materijalnu tačku koja je mirovala iz stanja ravnoteže pomerili za 20 jedinica i pustili je. Kretanje bismo mogli započeti i na taj način što bismo tačku iz stanja ravnoteže pokrenuli sa početnom brzinom $X_2(0) \neq 0$.



48. SLIKA: HARMONIJSKA REZONANTNA KRETANJA MATERIJALNE TAČKE

$$X_1(0) = 20, \quad c_1 = 1$$

$$X_2(0) = 0, \quad c_2 = -\pi^2$$

4.5.2. Prigušene oscilacije

U praksi kretanje jednog tela uvek ometa oscilacije ili spoljašnja sila koja nastaje usled aerodinamičkog otpora. Odabirom parametara

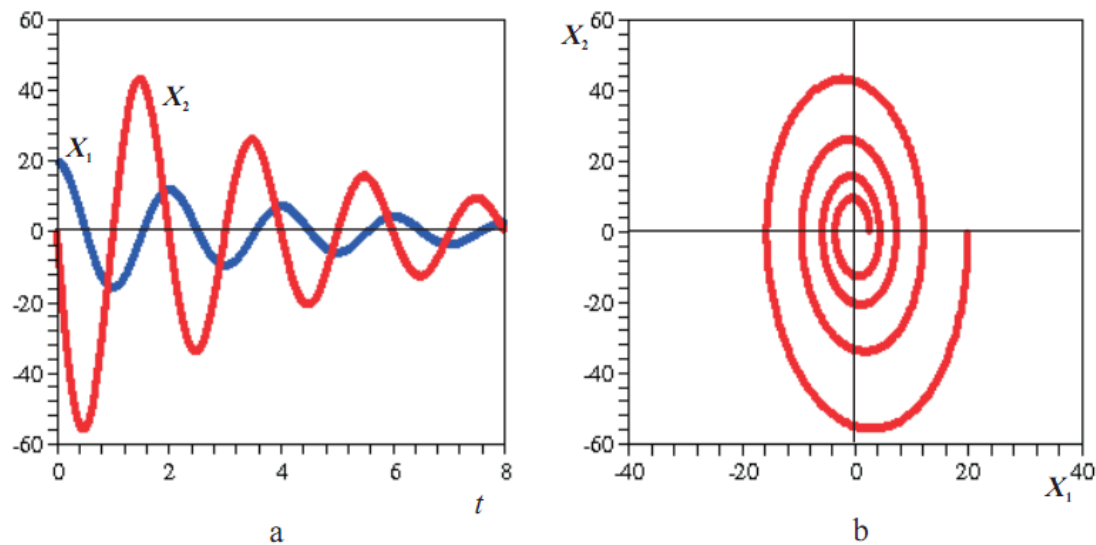
$$\begin{aligned} b_1 &= 0, & a_{11} &= 0, & a_{12} &= 0, & c_1 &= 1, & e_1 &= 0 \\ b_2 &= -\frac{m}{c}, & a_{21} &= 0, & a_{22} &= 0, & c_2 &= -\omega_0^2, & e_2 &= 0 \end{aligned}$$

sistem jednačina (4.1) smo na ovaj način podesili da se to opisuje u formi

$$\dot{X}_1(t) = c_1 X_2(t) \tag{4.18}$$

$$\dot{X}_2(t) = b_2 X_2(t) + c_2 X_1(t)$$

Postavljanjem početnih uslova $X_1(0)$ i $X_2(0)$ aspekte koje smo dali kod harmonijske oscilacije moramo uzeti i ovde u obzir.



49. SLIKA: PRIGUŠENA OSCILACIJA

$$X_1(0) = 20; \quad b_2 = -0,5; \quad c_1 = 1$$

$$X_2(0) = 0, \quad c_2 = -\pi^2.$$

5. Geometrijsko prikazivanje približnog rešenja

5.1. Jednokoračni postupci

Koristeći mogućnost koja se javlja u geometrijskom značenju početne vrednosti možemo prikazati načelo nekoliko približnih rešenja. Iako nam jednačina

$$\dot{X}(t) = f(t, X(t))$$

služi za osnovu pored uslova

$$X(t_0) = X_0$$

generalizacija procesa se može realizovati i na sledeći način:

$$y'(x) = f(x, y(x)), y(x_0) = y_0.$$

Potrebno je još naznačiti i to da ćemo se u daljnjem ograničiti samo na raspravu o tzv. diskretnim metodama¹⁵, koji na svojstven način ne samo u ograničenom, ali velikom broju tačaka daju mogućnosti za približna rešenja, proizvoljnom tačnošću. U geometrijskom smislu, dakle, davanje približnih rešenja je ekvivalentno davanju niza tačaka $P_0, P_1, \dots, P_n$ gde je $P_i \in T, (0 \leq i \leq n)$ i P_0 odgovara početnom uslovu. S obzirom na to, daćemo još i pozitivan korak $h \in \mathbb{R}$ koji nam daje i razliku prvih koordinata tačaka P_i i P_{i-1} u nizu.

Diskretna metoda nazivamo metodom k -koraka ako pri sledećem P_i približavanju upotrebimo i $P_{i-k}, P_{i-k+1}, \dots, P_{i-1}$ približavanja ($i \geq k$). U daljnjem ćemo spomenuti nekoliko jednokoračnih metoda ($k = 1$).

5.1.1. Ojler-Košijev postupak

Ojler-Košijev postupak je najjednostavniji proces za određivanje numeričkog rešenja zadatka u kome je poznata ili data početna vrednost. Početna misao je da se iz jednačine

$$\dot{X}(t) = f(t, X(t))$$

¹⁵ Radi jednostavnosti, njih ćemo u daljnjem nazivati “numeričkim metodama”, tamo gde ovo ne dovodi do dvosmislenosti.

zadatka može izračunati $X(t_0)$ što je izvod funkcije $X(t)$ na mestu t . Ovo je tačno $f(t_0, x_0)$ ¹⁶ nagib tangente a koja se može ucrtati tačno u tačku $P_0(t_0, X(t_0))$ krive tražene funkcije. „Nađimo” na ovoj pravi onu tačku P_1 , čija je prva koordinata $t_0 + h$. U pronalaženju sledećeg P_2 elementa niza tačaka P_1 ima istu ulogu kao što je i P_0 imao u slučaju P_1 . Generalizacijom prethodnih saznanja dakle, ako poznajemo tačku $P_{i-1}(t_{i-1}, x_{i-1})$ možemo izračunati koordinate sledeće tačke, približne tačke $P_i (i > 0)$

$$t_i = t_{i-1} + h$$

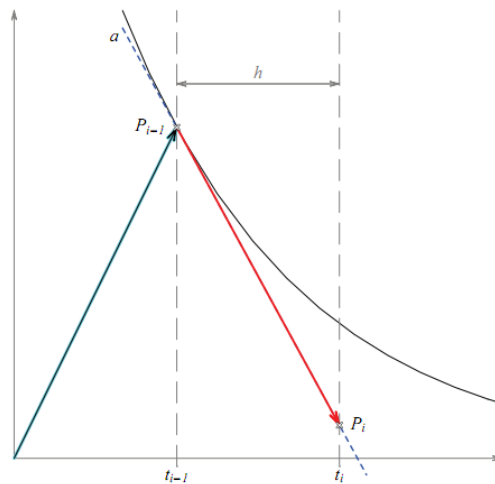
$$x_i = x_{i-1} + hk,$$

gde

$$k = f(t_{i-1}, x_{i-1})$$

Gore navedene stvari uz pomoć vektora prikazuje slika br. 50. Na osnovu ovoga dobijamo mesni vektor P_i , ako mesnom vektoru P_{i-1} dodamo jedan paralelni vektor čija je prva koordinata h . Ovome tačno odgovara vektor

$$\overrightarrow{P_{i-1}P_i}(h, hk).$$



50. SLIKA: PRIKAZIVANJE JEDNOG KORAKA OJLER-KOŠIJEVOG POSTUPKA POMOĆU VEKTORA

¹⁶ U daljnjem možemo razlikovati vrednost zamene $X(t_i)$ funkcije $X(t)$ na mestu t_i od približne x_i vrednosti koja pripada t_i . Ovo je potrebno zato što se – ne uzimajući u obzir slučaj kada je $i = 0$ – uglavnom ostvaruje $x_i \neq X(t_i)$, ali zasigurno $x_0 \neq X(t_0)$.

5.1.2. Poboljšan Ojlerov postupak

Već samo jedan korak Ojler-Košijevog postupka – jer jednu tačku prave a biramo kao sledeću tačku približavanja –može znatno da odstupa od krive tačnog rešenja. Prilikom sledećih koraka greške koje iz ovoga slede mogu samo dalje da se gomilaju. Na osnovu Slike br. 50. možemo zaključiti da se ovo može usmeravati smanjivanjem vrednosti h , ali to smanjuje i delotvornost procesa.

Pronađimo sad sledeću tačku, tačku P_i na osnovu uzajamnih odnosa gde je

$$t_i = t_{i-1} + h$$

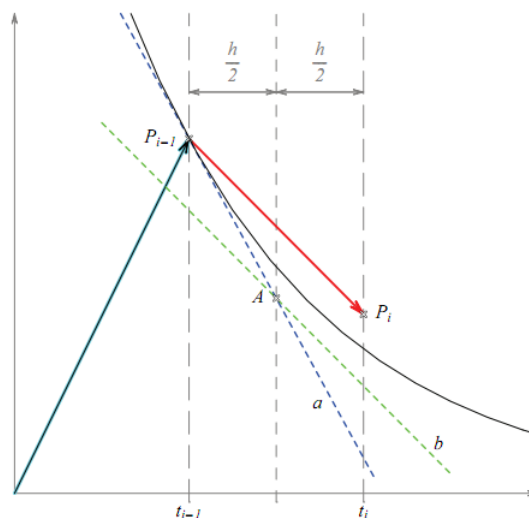
$$x_i = x_{i-1} + hk_b,$$

gde

$$k_a = f(t_{i-1}, x_{i-1})$$

$$k_b = f\left(t_{i-1} + \frac{h}{2}, x_{i-1} + \frac{h}{2}k_a\right).$$

Geometrijsko značenje procesa prikazuje Slika 51.



51. SLIKA: PRIKAZIVANJE POBOLJŠANOG OJLEROVOG METODA

Prvo na osnovu Ojler-Košijevog postupka nađimo onu tačku A prave a sa

$$k_a = f(t_{i-1}, x_{i-1})$$

nagib, čija je prva koordinata

$$t_{i-1} + \frac{h}{2}.$$

Na slici je označeno sa b tangenta krive koja prolazi kroz tačku A , a čija je nagib k_b . Ovo praktično dobijamo na taj način što koordinate A stavljamo u funkciju $f(t, X(t))$. U sledećem koraku određujemo mesto P_i tako da se

$$b \parallel \overrightarrow{P_{i-1}P_i}$$

ostvari i prva koordinata P_i bude t_i . Zbog simetrija ovo rešenje uglavnom daje tačniji rezultat.

5.1.3. Runge-Kuta metod

Ovo je takođe jednokoračna metoda.

$$t_i = t_{i-1} + h$$

$$x_i = x_{i-1} + \frac{h}{6}(k_a + 2k_b + 2k_c + k_d),$$

gde pravila

$$k_a = f(t_{i-1}, x_{i-1})$$

$$k_b = f\left(t_{i-1} + \frac{h}{2}, x_{i-1} + \frac{h}{2}k_a\right)$$

$$k_c = f\left(t_{i-1} + \frac{h}{2}, x_{i-1} + \frac{h}{2}k_b\right)$$

$$k_d = f(t_{i-1} + h, x_{i-1} + hk_c)$$

označavaju jedan od mogućih načina predstavljanja metode Runge-Kuta četvrtog reda.

Upoređujući povezanosti postupka Ojler-Košijevog i poboljšanog Ojlerovog postupka vidi se da vrednosti k_a i k_b nastaju na sličan način. Ali suprotno od poboljšane Ojlerove metode k_b - što predstavlja nagib tangentne krive b u tački A – koristimo za određivanje tačke B , gde je

$$b \parallel \overrightarrow{P_{i-1}B}$$

i prva koordinata tačke B je

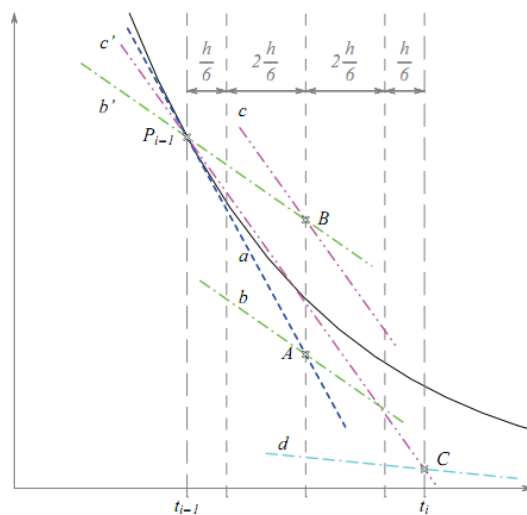
$$t_{i-1} + \frac{h}{2}.$$

Neka c označava tangentu koja se upisuje u tačku B , a čija je nagib k_c na osnovu pravila Runge-Kuta metode. Ovo možemo iskoristiti da bismo odredili tačku C , gde je

$$b \parallel \overrightarrow{P_{i-1}C}$$

i prva koordinata C . A nagib tangentne krive d koja se ovde može ucrtati je k_d .

Pored pravaca koji pripadaju tački P_{i-1} , strmine - sa gore određenim tačkama A , B i C – možemo posmatrati na način koji je prikazan na Slici br. 52., u zavisnosti od P_i .



52. SLIKA: OZNAČAVANJE TAČKI (A, B, C) U METODI RUNGE-KUTA

Neka bude

$$\overrightarrow{P_{i-1}P_i} = v_1 + v_2 + v_3 + v_4$$

gde

$$a \parallel v_1; b \parallel v_2; c \parallel v_3; d \parallel v_4$$

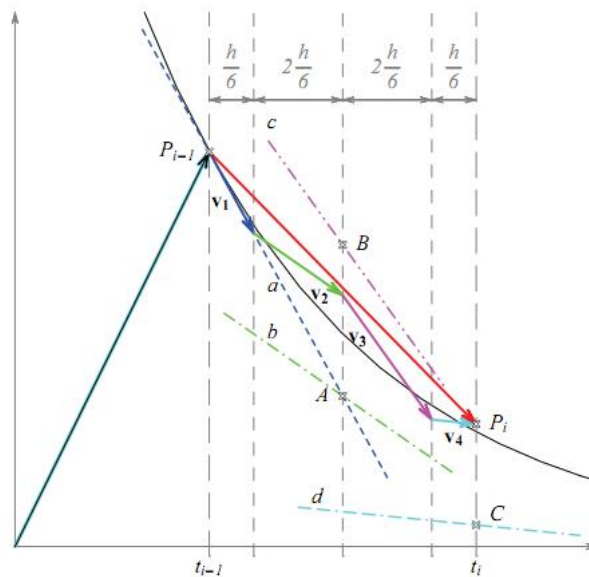
i

$$v_1\left(\frac{h}{6}; \frac{h}{6}k_a\right), v_2\left(\frac{h}{3}; \frac{h}{3}k_b\right), v_3\left(\frac{h}{3}; \frac{h}{3}k_c\right), v_4\left(\frac{h}{6}; \frac{h}{6}k_d\right)$$

se ostvaruje.

5.2. Greška metode približavanja

Bitne karakteristike gore navedenih numeričkih metoda su greške koje nastaju kroz niz koraka koji slede jedan za drugim. Globalna greška jedne e_n metode predstavlja odstupanje približavajuće vrednosti od tačne vrednosti funkcije posle koraka n u računanju sa ovom metodom. U daljnjem ćemo uporediti gore navedene tri metode u vezi sa jednim zadatkom početne vrednosti.



53. SLIKA: NAGIB KOJA JE IZRAČUNATA U TAČKAMA P_{i-1} I C SMO UZELI U OBZIR SA JEDNOSTRUKOM TEŽINOM, A NAGIBI U TAČKAMA A I B SA DVOSTRUKOM TEŽINOM

Neka

$$\dot{X}(t) = \lambda X(t); X(0) = 1 \quad (5.1)$$

bude zadatak sa početnom vrednošću i približavanje vršimo na intervalu $[0,1]$. Rešenje zadatka se može predstaviti u formi

$$X(t) = e^{\lambda t}.$$

Na osnovu ovoga se može izračunati e_n globalna greška procesa. Vrednost e_n ne zavisi naravno samo od metode procesa, već i od dužine koraka h . (Vrednost h dobijamo deljenjem intervala $[0,1]$ na n delova). Da bismo mogli da stvorimo sliku o ulozi promene koraka u sve tri metode približavanja prvo moramo da izvršimo približavanja tako što broj koraka povećamo na dvostruko s obzirom na prethodni broj, tj. prepolovimo interval).

n	h	$X(t_n)$	X_n	e_n	$\frac{e_n}{e_{n/2}}$
10	$\frac{1}{10}$	0.011109	0.00253295	0.00857604	
20	$\frac{1}{20}$	0.011109	0.0061099	0.0049991	0.582914
40	$\frac{1}{40}$	0.011109	0.00844762	0.00266137	0.532371
80	$\frac{1}{80}$	0.011109	0.00973996	0.00136904	0.51441
160	$\frac{1}{160}$	0.011109	0.0104152	0.000693842	0.506811
320	$\frac{1}{320}$	0.011109	0.0107598	0.000349219	0.503312
640	$\frac{1}{640}$	0.011109	0.0109338	0.00017518	0.501634
1280	$\frac{1}{1280}$	0.011109	0.0110213	0.0000877321	0.500811

54. SLIKA: PROMENA GLOBALNE GREŠKE OJLEROVE METODE U FUNKCIJI INTERVALA

n	h	$X(t_n)$	X_n	e_n	$\frac{e_n}{e_{n/2}}$
10	$\frac{1}{10}$	0.011109	0.0137239	0.0026149	
20	$\frac{1}{20}$	0.011109	0.0116196	0.000510626	0.195276
40	$\frac{1}{40}$	0.011109	0.0112243	0.000115339	0.225878
80	$\frac{1}{80}$	0.011109	0.0111365	0.0000275334	0.238717
160	$\frac{1}{160}$	0.011109	0.0111157	6.73316×10^{-6}	0.244546
320	$\frac{1}{320}$	0.011109	0.0111107	1.66524×10^{-6}	0.247318
640	$\frac{1}{640}$	0.011109	0.0111094	4.14095×10^{-7}	0.24867
1280	$\frac{1}{1280}$	0.011109	0.0111091	1.0325×10^{-7}	0.249338

55. SLIKA: PROMENA GLOBALNE GREŠKE POBOLJŠANE OJLEROVE METODE U FUNKCIJI INTERVALA

n	h	$X(t_n)$	X_n	e_n	$\frac{e_n}{e_{\frac{n}{2}}}$
10	$\frac{1}{10}$	0.011109	0.0111339	0.0000249291	
20	$\frac{1}{20}$	0.011109	0.0111103	1.28856×10^{-6}	0.0516892
40	$\frac{1}{40}$	0.011109	0.0111091	7.32971×10^{-8}	0.0568828
80	$\frac{1}{80}$	0.011109	0.011109	4.37087×10^{-9}	0.0596322
160	$\frac{1}{160}$	0.011109	0.011109	2.66845×10^{-10}	0.0610507
320	$\frac{1}{320}$	0.011109	0.011109	1.64834×10^{-11}	0.0617715
640	$\frac{1}{640}$	0.011109	0.011109	1.02419×10^{-12}	0.062135
1280	$\frac{1}{1280}$	0.011109	0.011109	6.38361×10^{-14}	0.0623281

56. SLIKA: PROMENA GLOBALNE GREŠKE METODE RUNGE-KUTA U FUNKCIJI INTERVALA

Tabele na Slikama br. 54., 55., 56. su napravljene uz pomoć Ojler-Košijevog postupka, poboljšanog Ojlerovog postupka i metode Runge-Kute u toku približnog rešavanja sa (5.1) problemom početne vrednosti ($\lambda = -4,5$).

Tabele – u sva tri slučaja – prikazuju rezultate osam približnih računanja, koja smo vršili na intervalu $[0,1]$ sa sve preciznijom podelom. Približavanja smo u sva tri slučaja prvo izvršili sa intervalom $h = \frac{1}{10}$; $n = 10$, a u sledećem smo vrednost h podelili na pola, tj. brojeve smo udvostručili. Tako smo poslednja računanja izvršili sa vrednošću $h = \frac{1}{1280}$. (U tabelama 54., 55., 56. prva (n) i druga (h) kolona.)

Pojedinačni redovi sadrže sledeće:

n : broj priližavajućih koraka,

h : veličina intervala u slučaju aktuelnog broja n intervala,

$X(t_n)$: tačna vrednost funkcije na kraju intervala ($X(1)$),

X_n približavajuća vrednost posle n koraka, na kraju intervala,

e_n : globalna greška približavanja ($|X(t_n) - X_n|$),

$\frac{e_n}{e_{\frac{n}{2}}}$: količnik globalnih grešaka aktuelnog i prethodnog približavanja¹⁷

¹⁷Ovaj količnik se naravno u prvim redovima tabela ne primenjuje.

U sve tri tabele su uočljive vrednosti stupca X_n koje se sve više približavaju tačnoj vrednosti $X(1)$ kako vrednost n raste. Ovo naravno znači i to da e_n vrednost globalne greške sa ovim zajedno opada.

U daljem razmatranju bismo voleli da ukažemo na meru opadanja globalne greške. Interesantno je opaziti i to kako se u gornjim tabelama u zadnjim stupcima menjaju vrednosti $\frac{e_n}{e_{\frac{n}{2}}}$ kada se vrednost n povećava. Ako uzmemo u obzir da bi $n = 163840$ iz tabele 54. u ovom stupcu bio 0,500006, i iz tabele 55. na istom mestu 0,249988, onda bi osnovana bila pretpostavka da bi se u nekim tabelama sa povećanjem n vrednosti $\frac{e_n}{e_{\frac{n}{2}}}$ približile vrednostima $2^{-1}, 2^{-2}$ i 2^{-4} .

Numeričku metodu nazivamo konvergentnom na datom I intervalu ($\forall t_n \in I$) ako

$$\lim_{h \rightarrow 0} x_n = X(t_n)$$

tj.

$$\lim_{h \rightarrow 0} e_n = 0.$$

Iz prethodno rečenih se jasno vidi da na veličinu globalne greške u velikoj meri utiče vrednost h . U isto vreme je očigledno i to da se globalne greške različitih metoda „ponašaju” drugačije kada se menja vrednost h . Kažemo da je globalna greška reda p , ako se može dati r realna konstanta da bi se ostvarila

$$e_n \leq r \cdot h^p. \quad (5.2)$$

Prethodno rečene stvari nam daju mogućnost i za karakterizaciju numeričkih metoda, jer jednoj numeričkoj metodi možemo dati karakteristiku reda p , ako je globalna greška poreklom reda p . [13]

Neka h_n označava na intervalu dati razmak među koracima, dakle, u našem slučaju se ispunjava $n \cdot h_n = 1$. Ako je numerička metoda konvergentna, onda po definiciji globalna greška e_n se približava prema 0 po preciziranju podele. Iz ovoga sledi da je $e_n \leq \frac{e_n}{2}$ (u svakom slučaju) i da je

$$\frac{e_n}{e_{\frac{n}{2}}}$$

takođe konvergentan, ako $n \rightarrow \infty$.

Promenimo sada odnos (5.2) u oblik

$$\frac{e_n}{(h_n)^p} \leq r,$$

što znači da se za svaki razmak među koracima može naći r realan broj, od kojeg je gore navedeni koeficijent manji. Interesantno je zapaziti još i to kako se menjaju vrednosti koeficijenta sa preciziranjem razmaka među koracima u različitim numeričkim metodama. Tabela br. 1. i mnogo detaljnija Slika br. 58. nam ukazuje na to da nije toliko težak zadatak da se pronađe ovakav r broj.

	n h	160 $\frac{1}{160}$	320 $\frac{1}{320}$	640 $\frac{1}{640}$	1280 $\frac{1}{1280}$
Ojler-Koši metod	e_n	$6,9384 \cdot 10^{-4}$	$3,4921 \cdot 10^{-4}$	$1,7518 \cdot 10^{-4}$	$0,8773 \cdot 10^{-4}$
	$\frac{e_n}{h}$	$1,1101 \cdot 10^{-1}$	$1,1175 \cdot 10^{-1}$	$1,1212 \cdot 10^{-1}$	$1,1230 \cdot 10^{-1}$
Poboljšan Ojler metod	e_n	$6,7332 \cdot 10^{-6}$	$1,6652 \cdot 10^{-6}$	$0,4141 \cdot 10^{-6}$	$0,1033 \cdot 10^{-6}$
	$\frac{e_n}{h^2}$	$1,7237 \cdot 10^{-1}$	$1,7052 \cdot 10^{-1}$	$1,6961 \cdot 10^{-1}$	$1,6916 \cdot 10^{-1}$
Ruge-Kuta metod	e_n	$2,6685 \cdot 10^{-10}$	$0,1648 \cdot 10^{-10}$	$0,0102 \cdot 10^{-10}$	$0,0006 \cdot 10^{-10}$
	$\frac{e_n}{h^4}$	$1,7488 \cdot 10^{-1}$	$1,7284 \cdot 10^{-1}$	$1,7183 \cdot 10^{-1}$	$1,7136 \cdot 10^{-1}$

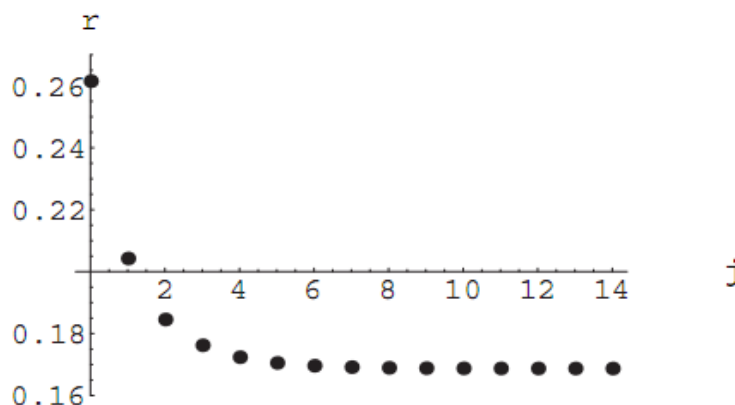
1. TABELA: PROMENA KOEFICIJENTA $\frac{e_n}{(h_n)^p}$ SMANJIVANJEM RAZMAKA MEĐU KORACIMA

U analizama je prvi upotrebljen razmak među koracima bio $h = 10$. Neka j označava redni broj onog približnog rešavanja, u kojem je razmak među koracima bio $h_j = \frac{1}{10} 2^{-j}$. Na osnovu gore navedenih granična vrednost

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{e_{2j}}{e_{2j-1}} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{r \cdot (h_j)^p}{r \cdot (h_{j-1})^p} = \frac{1}{2^p}$$

se može izračunati i ovako je moguće da se uporede numeričke metode iz aspekta tačnosti približavanja.

Vidljivo je da se sa gore navedenima slažu vrednosti poslednjeg stupca tabela 54., 55. i 56. ako je p reda 1,2 i 4.



57. SLIKA: PROMENA KOEFICIJENTA $\frac{e_n}{(h_n)^2}$ SMANJIVANJEM RAZMAKA MEĐU KORACIMA U SLUČAJU ISPRAVLJENE OJLEROVE METODE

5.3. Metode prediktor-korektor

Do Ojler-Košijevog postupka možemo doći i na taj način da izводе $X(t)$ sa leve strane jednačine (4.1) zamenimo odgovarajućim diferencijalnim koeficijentom:

$$\frac{X(t_i) - X(t_{i-1})}{h} \approx \dot{X}(t_{i-1}) = f(t_{i-1}, X(t_{i-1})).$$

Ovu vezu, pretvaranjem u oblik

$$X(t_i) \approx X(t_{i-1}) + hf(t_{i-1}, X(t_{i-1}))$$

sa poznavanjem t_{i-1} i $X(t_{i-1})$ možemo iskoristiti za približavanje ka vrednosti $X(t_i)$. Zapravo, ovo smo činili u svakom koraku eksplicitnog Ojler-Košijevog postupka.

Ako sada na način sličan gore navedenom, uz pomoć jednačine (4.1) tumačimo vrednost izvoda $\dot{X}(t_i)$, onda reorganizacijom povezanosti

$$\frac{X(t_i) - X(t_{i-1})}{h} \approx \dot{X}(t_i) = f(t_i, X(t_i))$$

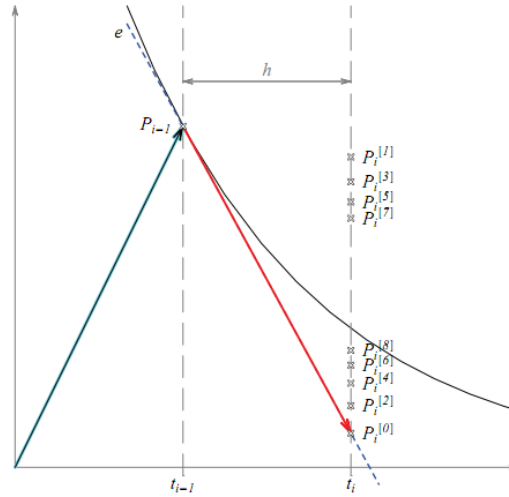
dobijamo

$$X(t_i) \approx X(t_{i-1}) + hf(t_i, X(t_i)).$$

Umesto tačnih vrednosti $X(t_i), X(t_{i-1})$ upisaćemo približne vrednosti x_i, x_{i-1} i po sledećem možemo tumačiti implicitnu Ojlerovog postupka:

$$x_i = x_{i-1} + hf(t_i, x_i).$$

Na vidljiv način s obe strane jednačine se nalazi tražena vrednost x_i . Mogućnost iskazivanja ovoga i samim tim i upotrebljivost metode određuje f -funkcija i najčešće je kod linearnih sistema u prednosti.



58. SLIKA: IMPLICITNA OJLEROVA METODA (U METODI PREDIKTOR-KOREKTOR)

Ali, ako je

$$t_i = t_{i-1} + h \quad (5.3)$$

$$x_i^{[l+1]} = x_{i-1} + hk$$

gde je

$$k = f(t_i, x_i^{[l]})$$

($l = 0, 1, \dots$) i datoj $x_i^{[0]}$ vezi dodamo na odgovarajući način početnu, $x_i^{[0]}$ vrednost – na način kako nam to pokazuje Slika br. 58. eksplicitnom Ojler-Košijevom metodom – onda posle nekoliko iteracija¹⁸ na vrednost $x_i^{[0]}$ dobijamo vrednost koja se više približava vrednosti $X(t_i)$.

Eksplicitnu metodu nazivamo prediktor, a implicitnu metodu korektor.

Ako kod numeričkog integriranja na osnovu formule trapeza vrednost strmosti obe krajnje tačke $[t_{i-1}, t_i]$ sa istom težinom uzimamo u obzir da bismo odredili sledeću približavajuću tačku P_i , dobićemo implicitnu metodu koja je poznata pod nazivom trapez-metoda. Ona se upotrebljava kao korektor-metoda na osnovu sledećih zakonitosti

¹⁸ Ovo najčešće znači 2-3 iterativna koraka

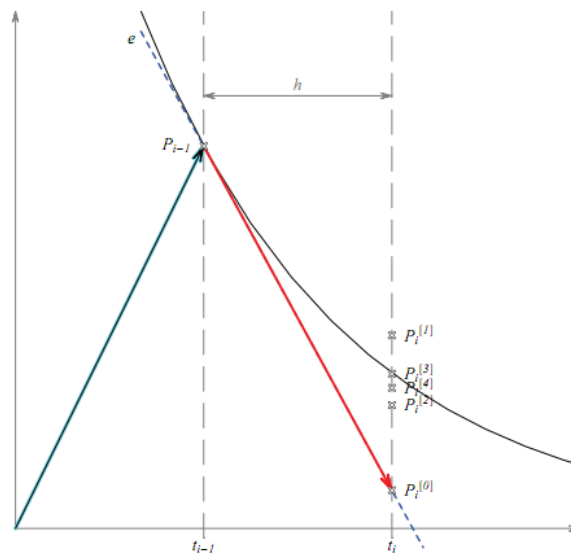
$$t_i = t_{i-1} + h \quad (5.4)$$

$$x_i^{[l+1]} = x_{i-1} + \frac{h}{2} k$$

gde

$$k = f(t_{i-1}, x_{i-1}) + f(t_i, x_i^{[l]})$$

$l = 0, 1, \dots, ix_i^{[0]}$ dato.



59. SLIKA: TRAPEZ-METODA (U METODI PREDIKTOR-KOREKTOR)

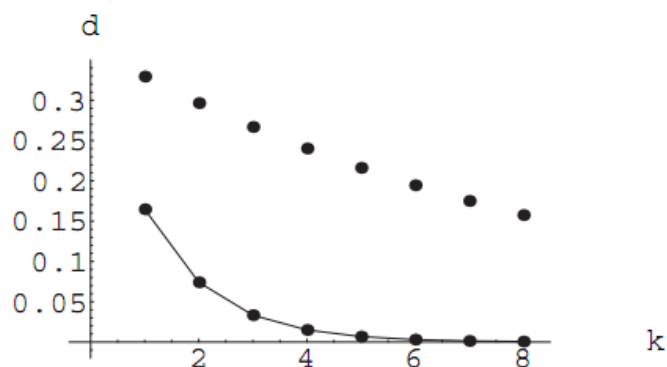
Na Slici br. 59. se dobro vidi da je kod upotrebe trapez-metode kao korektor –metode potrebno manje iterativnih koraka za označavanje sledeće tačke, tačke P_i sa približno istom tačnošću.

Ovo objašnjavaju podaci u Tabeli 2. (Implicit Ojler metoda i trapez-metode).

k	t_i	$x_i^{[k]}$	$d_E(P_i^{[k]}; P_i^{[k-1]})$	$x_i^{[k]}$	$d_t(P_i^{[k]}; P_i^{[k-1]})$
0	0,40	0,040657	—	0,040657	—
1	0,40	0,369978	0,329321	0,205318	0,164661
2	0,40	0,073589	0,296389	0,131220	0,074098
3	0,40	0,340339	0,266749	0,164564	0,033344
4	0,40	0,100264	0,240075	0,149559	0,015005
5	0,40	0,316332	0,216068	0,156312	0,006753
6	0,40	0,121871	0,194461	0,153273	0,003039
7	0,40	0,296886	0,175015	0,154640	0,001367
8	0,40	0,139372	0,157514	0,154025	0,000615

2. TABELA: PRVI REZULTATI PREDIKTOR-KOREKTOR METODE KOJA SE OSNIVA NA DVE DRUGE METODE

Konvergenciju niza tačaka možemo karakterisati nizom udaljenosti tačaka $d_E(P_i^{[k]}; P_i^{[k-1]})$ i $d_t(P_i^{[k]}; P_i^{[k-1]})$. Vidljivo je da u implicitnoj Ojlerovoj metodi udaljenost među tačkama linearno opada, dok u trapez-metodi udaljenosti se u sledećem iterativnom koraku sa dobrim približavanjem prepolovljuju. Ove veze se uočljivije pojavljuju na Slici br. 59. koja je nastala na osnovu tabele. (Na slici neprekidnom linijom povezane tačke označavaju podatke koji se odnose na trapez-metodu, a nalaze se u poslednjem stupcu Tabele br. 2.)



60. SLIKA: KONVERGENCIJA IMPLICITNE OJLEROVE METODE I TRAPEZ-METODE (U PREDIKTOR-KOREKTOR METODI)

5.4. Primer sa sladoledom

Neka $y(t)$ predstavlja temperaturu tela u trenutku t . Na osnovu Njutnovog zakona o zagrevanju tela poznato je da se temperatura tela menja prema sledećoj jednačini:

$$y'(t) = -\alpha \cdot (y(t) - K),$$

gde je α koeficijent provodljivosti toplote, a K temperatura okoline. Sladoled je izvađen iz zamrzivača pri temperaturi od -15° u 18.45h. Ako je koeficijent provodljivosti toplote sladoleda 0.5, a temperatura prostorije 19°C , koristeći jednokoračne postupke sa korakom od 0.5 časova možemo približno odrediti u koliko sati će se sladoled otopiti.

Rešenje:

Naša jednačina izgleda ovako:

$$\begin{aligned}y'(t) &= -0.5 \cdot (y(t) - 19) && \rightarrow f(t, u(t)), \\y(0) &= -15 && \rightarrow u(0), \\h &= 0.5.\end{aligned}$$

Pitanje: Kada će se temperatura sladoleda popeti iznad nule?

a.) Ojler-Košijev postupak:

$$\begin{aligned}u(0) &= -15, \\u(t + h) &= u(t) + h \cdot f(t, u(t)).\end{aligned}$$

Ako $t = 0$, onda imamo

$$u(0 + 0.5) = u(0) + 0.5 \cdot (-0.5 \cdot (u(0) - 19)) = -15 - 0.25 \cdot (-15 - 19) = -6.5.$$

Ako $t = 0.5$, onda imamo

$$u(0.5 + 0.5) = u(0.5) + 0.5 \cdot (-0.5 \cdot (u(0.5) - 19)) = -6.5 - 0.25 \cdot (-6.5 - 19) = -0.125.$$

Ako $t = 1$, onda imamo

$$u(1 + 0.5) = u(1) + 0.5 \cdot (-0.5 \cdot (u(1) - 19)) = -0.125 - 0.25 \cdot (-0.125 - 19)$$

$$= 4.65625.$$

To znači da treba približno $1.5h$ da se sladoled otopi, to jest oko $20.15h$.

b.) Poboljšani Ojlerov postupak:

$$u(0) = -15,$$

$$u(t+h) = u(t) + h \cdot f\left(t + \frac{h}{2}, u(t) + \frac{h}{2} \cdot f(t, u(t))\right).$$

Ako $t = 0$, onda imamo

$$\begin{aligned} u(0+0.5) &= u(0) + 0.5 \cdot f\left(0 + \frac{0.5}{2}, u(0) + \frac{0.5}{2} \cdot f(0, u(0))\right) = \\ &= -15 + 0.5 \cdot f(0.25, -15 + 0.25 \cdot 17) = -15 + 0.5 \cdot f(0.25, -10.75) = \\ &= -15 + 0.5 \cdot 14.875 = -7.5625. \end{aligned}$$

Ako $t = 0.5$, onda imamo

$$\begin{aligned} u(0.5+0.5) &= u(0.5) + 0.5 \cdot f\left(0.5 + \frac{0.5}{2}, u(0.5) + \frac{0.5}{2} \cdot f(0.5, u(0.5))\right) = \\ &= -7.5625 + 0.5 \cdot f(0.75, -7.5625 + 0.25 \cdot 13.281) = -7.5625 + 0.5 \cdot f(0.75, -4.2422) = \\ &= -7.5625 + 0.5 \cdot 11.62 = -1.752. \end{aligned}$$

Ako $t = 1$, onda imamo

$$\begin{aligned} u(1+0.5) &= u(1) + 0.5 \cdot f\left(1 + \frac{0.5}{2}, u(1) + \frac{0.5}{2} \cdot f(1, u(1))\right) = \\ &= -1.752 + 0.5 \cdot f(1.25, -1.752 + 0.25 \cdot 10.38) = -1.752 + 0.5 \cdot f(1.25, 0.84) = \\ &= -1.752 + 0.5 \cdot 9.08 = 2.79. \end{aligned}$$

c.) Runge-Kuta postupak

$$u(0) = -15,$$

$$u(t+h) = u(t) + h \cdot f\left(t + \frac{h}{2}, u(t) + \frac{h}{2} \cdot f(t, u(t))\right).$$

Zaključak

U svojoj master tezi sam prvo opisala šta znači modeliranje u matematici. Trudila sam se da ukažem na prirodu zadataka ovog tipa i na njihov značaj u obrazovanju. Naglasak sam stavila na izradu i na rešavanje ovakvih zadataka. Iskusila sam da je ovo uglavnom složen proces. Pri izradi zadataka sam veoma pazila da oni odgovaraju svim kriterijumima modeliranja, kao što sam i pri rešavanju zadataka smatrala bitnim da pratim korake modeliranja. Sve ovo je zahtevalo mnogo pažnje. Uprkos tome, mislim da je sve ovo bilo vredno truda jer sam se bavila interesantnim temama iz kojih su nastali, nadam se korisni i lepi matematički zadaci. Smatram izuzetno dobrim da su najraznovrsnije oblasti matematike došle na videlo pri prikazivanju ovih zadataka.

Na moj način posmatranja je veoma uticao ovaj rad jer u poslednje vreme često uhvatim sebe kako „gledam svet kroz matematičke naočare“ i razmišljam o tome kako bi neke situacije mogle postati odlični zadaci.

Nadam se da će se sve više ljudi u obrazovanju u Srbiji upoznati sa matematičkim modeliranjem i da će ih i upotrebljavati i da će to doprineti razvoju sposobnosti učenika, kao i popularizaciji matematike.

Literatura

- [1] Boaler, J., Mathematical Modelling and New Theories of Learning, Teaching Mathematics and its Applications, Vol. 20, Issue 3, 2001, p. 121-128.
- [2] Doerr, H., English, L., *A modelling perspective on students' mathematical reasoning about data*, Journal for Research in Mathematics Education, 34(2) (2003), 110-136.
- [3] Galbraith, P., Stillman, G., Brown, J., Edwards, I., *Facilitating middle secondary modelling competencies*. In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, S. Khan (Eds.), Mathematical modelling (ICTMA12): Edu., eng. economics, Chichester, UK: Horwood (2007), 130-140.
- [4] Ambrus Gabriella: *Modellezési feladatok a matematika órán*, Matematika-Tanári Kincsestár, B 1.2/5, 2007.december
- [5] Kaiser, G., Schwarz, B. *Mathematical modelling as bridge between school and university*, ZDM, 38 (2), (2006) 196-208.
- [6] Lamon, S. J., Parker, W. A., Houston, S. K. (Eds.), *Mathematical modelling: A way of life*, Chichester, UK: Horwood (2003).
- [7] Mason, J., *Modelling modelling: Where is the centre of gravity of-for-when teaching modelling?* In J. Matos, W. Blum, K. Houston, S. Carreira (Eds.), Modelling and mathematics education, Chichester, UK: Horwood (2001).
- [8] Stillman, G., Brown, J., *Challenges in formulating an extended modelling task at Year 9*. In H. Reeves, K. Milton, & T. Spencer (Eds.), Proc. 21. Conf. Austr. Assoc. Math. Teachers. Adelaide: AAMT (2007).
- [9] Stillman, G., Galbraith, P., *Towards constructing a measure of the complexity of applications tasks*. S.J. Lamon, W. A. Parker, & S. K. Houston (Eds.), *Mathematical modelling: A way of life* (pp. 317-327). Chichester, UK: Horwood (2003).
- [10] Takači, A., *Mathematical and simulation models of traffic flow*, Proc. Appl. Math. Mech., GAMM 5, 633-634 (2005).
- [11] Takači, A., *Skripta iz Matematičkog modeliranja*, PMF Novi Sad i WUS, 2006.
- [12] Takači, A., (ed.) *Development of Computer-aided Methods in teaching Mathematics and Science*, Project 06SER02/02/003, (Takači Arpad), Proc. of School of Intensive courses in Novi Sad, April 4-8. (2008.)
- [13] Geda, G., *Modelling a simple continuous-time system*, Annaleas Mathematicae et Informaticae, Eger 35 (2008), 157-162

[14] Geda, G., *Various systems in a single mathematical model*, Teaching Mathematics and Computer Science, Debrecen 6/1 (2008), 1–13

Biografija



ŽOFIA BOTOŠ

Rođena sam 7.3.1988 u Senti. Osnovnu školu „Čeh Karolj“ u Adi završila sam 2003. godine skroz odličnim uspehom, kao dobitnik Vukove diplome. Kao đak iz prve generacije upisala sam se u „Gimnaziju sa Domom učenika za talentovane učenike Boljai“ u Senti i završila sam je sa odličnim uspehom u 2007 godini. Od oktobra 2007. godine bila sam redovan student Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, na Departmanu za matematiku i informatiku, smer Matematika finansija. Poslednji ispit položila sam u junskom roku 2011. godine i 11. jula 2011. godine odbranila sam završni rad pod naslovom „Analiza asimptotskog ponašanja rešenja diferencne jednačine pomoću softvera *Mathematica*“. Master studije Master matematičar – primenjena matematika, modul: matematika finansija upisala sam u oktobru 2011. godine, pored toga položila sam ispite psiholoških, pedagoških i metodičkih disciplina 30 bodova i 6 bodova prakse u ustanovi. Poslednji ispit položila sam u januarskom roku 2014. godine time sam stekla uslov za odbranu master rada.

Ključna dokumentacija

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Diplomski master rad

VR

Autor: Žofia Botoš

AU

Mentor: Prof. dr Arpad Takači

ME

Naslov rada: Modelirani zadaci u matematici

NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: srpski/ engleski

JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2014.

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, PMF, Trg
Dositeja Obradovića 4

MA

Fizički opis rada: (8/113/14/2/60)

FOR (broj poglavlja/strana/lit. citata/tabela/slika/grafika/priloga)

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Primenjena matematika

ND

Predmetne odrednice: model, modeliranje, diferencijalna jednačina

Ključne reči: (**PO, UDK**)

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog
fakulteta Univerziteta u Novom Sadu

ČS

Važna napomena: nema

VN

Izvod (**IZ**):

U master radu predstavljeno je matematičko modeliranje. Cilj ovog master rada je bio izrada probnog materijala za dalji razvoj nastavnika, materijal, koji podučava nastavnike, koji predaju u višim razredima osnovnih škola, kao i u srednjim školama. U svojoj master tezi želela bih da pružim uvid u svet zadataka modeliranja, i kao glavni cilj postavljam izradu zadataka ovog tipa i opis mogućih rešenja, i uz to i upoznavanje jednog novog pristupa. Cilj rada je još i da razmotri one elemente, koji imaju ulogu formiranja shvatanja, gledišta o matematičkom modeliranju, i koji se u praksi koriste i na polju obuke i u modeliranju.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 10.10.2013.

DP

Datum odbrane: Maj 2014.

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: dr Ljiljana Gajić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu,

Član: dr Ivana Štajner-Papuga, vanredni profesor na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu,

Mentor: dr Arpad Takači, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu.

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE KEY
WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents Code: Master's thesis

CC

Author: Zsófia Botos

AU

Mentor: prof. dr Arpad Takači

ME

Title: Modeling tasks in mathematics

TI

Language of text: Serbian (Latin)

LT

Language of abstract: s/en

LA

Country of publication: Republic of Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2014.

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publ. place: Novi Sad

PP

Physical description: (8/113/14/2/60)

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Applied mathematics

SD

Subject key words: model, modeling, difference equals

SKW

Holding data: In the Library of Department of Mathematics and Informatics

HD

Note:

N

Abstract (**AB**):

Mathematical modeling is presented in this master study. The aim of it was the development of a test material for further development of teachers, teaching materials that shows teachers how to teach in the upper grades of elementary schools and

secondary schools. In my master study I would like to provide an insight into the world of modeling assignments, and as a main goal I set the development of the tasks of this type and the description of possible solutions, and with that the introduction of a new approach. The aim of it is also to consider those elements that are part of forming perceptions, views on mathematical modeling, which are used in practice both in the field of training and in modeling.

Accepted by the Scientific Board on: October 10th, 2013

AS

Defended: May, 2014

DE

Thesis defend board:

DB

President: PhD Ljiljana Gajić, Full Professor, Faculty of Natural Sciences,

Member: PhD Ivana Štajner-Papuga, Associate Professor, Faculty of Natural Sciences

Mentor: PhD Arpad Takači, Full Professor, Faculty of Natural Sciences.