1

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Vladimir Tutić

Elementi analitičke geometrije u prostoru R^3

Master rad

Novi Sad, 2010. *godina*.

Sadržaj

Predgovor

....

Ovaj master rad je nastao kao potreba za stalnim stručnim usavršavanjem, prateći svetski trend, 3L - long laife learning.

S obzirom, da analitičku geometriju u prostoru R^3 nisam pohađao u toku redovnih studija na PMF - u u Novom Sadu, samostalno sam savladao teoriju i zadatke koristeći navedenu literaturu.

Nakon, dugog rada u Srednjoj mašinskoj školi u Novom Sadu i u razgovoru sa profesorima koji predaju CAD-kompjuterski podržano dizajniranje, javila se potreba za preciznim definicijama i teorema analitičke geometrije u prostoru R^3 . U modeliranju mašinskih elemenata i konstrukcija, najviše se koriste površi drugog reda, konusi, cilindri, paraboloidi itd i metod konstruktivne geneze elemenata(misli se na modeliranje vijaka, vratila, zupčanika).

Gradivo u master radu, podeljeno je u tri poglavlja. Prvo poglavlje, sadrži osnove vektorske algebre koje se predaju i u srednjoj školi. U drugom poglavlju se sistematski obrađuju definicije i teoreme sa dokazima, pravih , ravnih i tačaka, kao i njihovih međusobnih odnosa. To poglavlje je isključivo obrađeno vektorskim načinom. U trećem poglavlju se obrađuju površi drugog reda i odgovarajuće jednačine koje dodeljujemo datim površima.

U master radu izlaganje teorije ne odstupa bitno od tradicionalnog načina izlaganja. Izuzetak čini teorema, *O ježu* pomoću koje dokazujem distributivnost vektorskog proizvoda prema sabiranju, koja se u našoj literaturi drugačije dokazuje.

Smatram svojom prijatnom dužnošću, da se za pregled master rada , i za niz primedbi i korisnih sugestija zahvalim mentoru ovog rada profesoru dr Siniši Crvenković. Takođe se zahvaljujem profesorima dr Zagorki Lozanov - Crvenković i dr Ljilji Gajić koje su pristale da budu članovi komisije u oceni moga rada.

Novi Sad, *Autor*
02.08.2010. godine

Kratak istorijski pregled

Analitička geometrija, je deo matematike koji proučava pitanja u geometriji i analizi vezano za primenu sistema koordinata u ravni i prostoru. Ona je karakteristična po svojoj metodi. Suština te metode je u sledećem, da se datim geometrijskim objektima u ravni i prostoru, posredstvom sistema koordinata korenspodiraju algebarske jednačine i obratno.

Zahvaljujući univerzalnosti načina, kojim se u analitičkoj geometriji prilazi rešavanju raznih problema, metoda koordinata afirmisala se kao jedno od osnovnih metoda u geometrijskim istraživanjima i pokazala se neobično plodotvornom u raznim primenama matematike, u tehnici, posebno u mehanici, zatim u fizici i drugim naukama.

Pojavom analitičke geometrije tj, metode koordinata koju je Rene Dekart (1596.- 1650.) inicirao svojom Geometrijom 1637. godine(Gèomètrie, 1637)omogućeno je da se linije i površi izražavju jednačinama. Dekartova promenljiva veličina bila je prekretnica u matematici.

Ideja promenljive veličine, a zatim i ideja koordinata , s jedne , i uzajamne veze geometrije i algebre odnosno aritmetike, s druge strane, nisu bile nepoznate matematici pre Dekarta. Tako je Pjer de Ferma (1601.-1665.), pravnik iz Tuluza, napisao manji rad iz geometrije koji se odnosi na jednačine pravih i konusnih preseka koji je objavljen tek 1697. godine. Taj rad je izgledao manje prikladan od Dekartove Geometrije, jer je pisan Vijetovom simbolikom.

Dekart se rukovodio jednostavnim principom , da uređenom paru realnih brojeva (x,y) pridruži tačku u ravni i obratno, da tački u ravni pridruži par realnih brojeva (x,y), jednačini $F(x,y) = 0$, u opštem slučaju, krivu kao skup tačaka u ravni. Tako je Dekart postavio princip koordinatne metode.

Veliki matematičar Leonard Ojler (1707. - 1783.), 1748. godine objavljuje knjigu Uvod u analizu beskonačnih veličina (Introductio in analysin infinitorum, 1748.) U pomenutoj knjizi ispitivanje krivih i površi, pomoću njihovih jednačina se može smatrati prvim udžbenikom analitičke geometrije. Ojler i ostali analisti XVIII veka izgradili su analitičku geometriju trodimenzionalnog prostora na generalisanom Dekartovom principu koordinatne metode. Uređenoj trojci realnih brojeve (x,y,z) pridružena je tačka u prostoru i obratno, a jednačini $F (x,y,z) = 0$, u opštem slučaju , pridružena je površ kao skup tačaka u prostoru.

Žozef Luj Lagranž (1736.-1813.) je Dekartov princip primenio u mehanici, aritmetizirajući mehaničke veličine, silu , brzinu i ubrzanje. Na taj način je inicirao pojam vektora u trodimenzionalnom prostoru kao pojam uređene trojke realnih brojeva (x,y,z). To je bilo od dalekosežne i bitne važnosti za razvitak teorije vektora i njenu generalizaciju na bazi Dekartove koordinatne metode.

Mnoge relacije uređenih trojki realnih brojeva kojima se analitički formulišu geometrijske činjenice običnog trodimenzionalnog prostora ostaju u važnosti i onda kada se uređena trojka zameni uređenom n - torkom realnih brojeva.

Ideja analitičke geometrije danas doživljava vrlo široke i apstraktne generalizacije u funkcionalnoj analizi, karakterističnoj grani moderne matematike.

Glava I

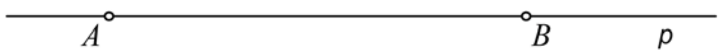
....

Algebra vektora

U prirodnim naukama posebno u matematici i fizici koristimo skalarne, vektorske i tenzorske veličine. Skalarne velčine su određene brojevnom vrednošću, dok vektorske veličine imaju još smer i pravac.

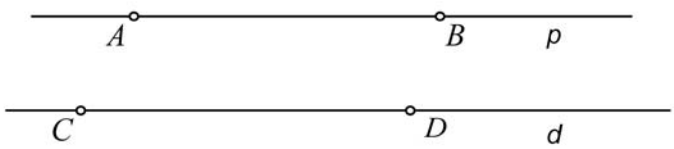
Uređeni par (A,B) zvaćemo orijentisana duž, čija je A početna tačka, a B završna tačka. Par (A,A) zvaćemo nula par.

Nosač uređenog para tačka (A,B) je prava p koja prolazi kroz tačku A i B (sl. 1)



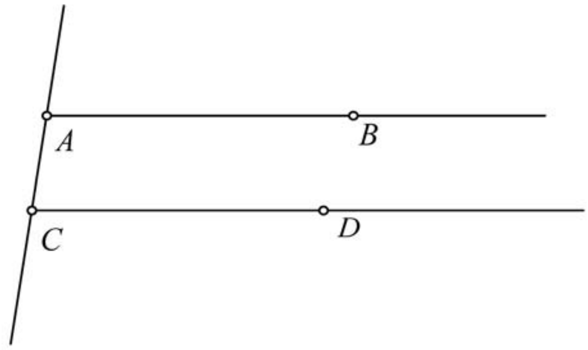
Slika 1: Nosač p

Parovi (A,B) i (C,D) su pararelni ako su njhovi nosači paralelne prave(slika 2).

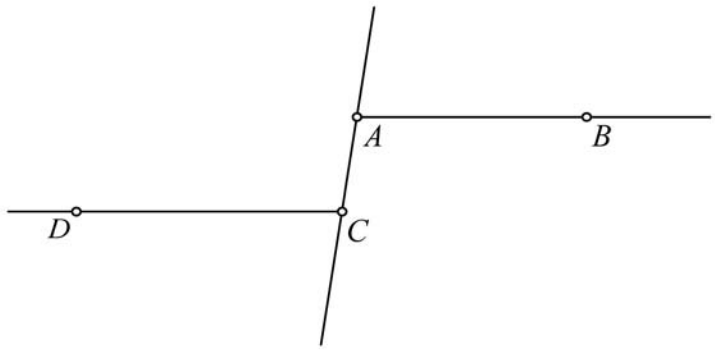


Slika 2: Paralelni nosači p **i** d

Ako su (A,B) i (C,D) dva paralelna para tada su oni istog smera ako su tačke B i D sa iste strane prave AC, a različitog smera, ako su tačke B i D sa raznih strana prave AC(slika 3. i 4.).



Slika 3: Uređeni parovi istog smera



Slika 4: Uređeni parovi suprotonog smera

Definicija 1.

Neka je $A \neq B$ i $C \neq D$. Tada je uređeni par (A,B) ekvipolentan uređenom paru (C,D) akko:

a) Nosači određeni tačkama A,B i C,D su paralelni ili se poklapaju.

b) Duž $[AB] \cong [CD]$.

c) Uređeni parovi (A,B) i (C,D) isu istog smera.

Ako je (A,B) ekvipolentan sa (C,D) to ćemo pisati (A,B)~(C,D). Može se dokazati sledeća:

Teorema 1.

Relacija ekvipolentan je relacija ekvivalencije u skupu R^2

Dokaz:

Refleksivnost-(A,B)~(A,B) jeste jer je p(A,B)||p(A,B), [A,B] ≅[A,B] i smer je od A prema B

Simertičnost- Ako (A,B)~(C,D)⇒ (C,D)~(A,B). Iz (A,B)~(C,D) ⇒ p(A,B)// p(C,D) i [AB] ≅ [CD] i (A,B) i (C,D) su istog smera. Tada zbog simetričnosti relacije ”podudarno“ i relacije “paralelno” zadovoljeno je (C,D)~(A,B)

Tranzitovnost-neka je (A,B)~(C,D)∧ (C,D)~(E,F) ⇒ (A,B)~(E,F). Zbog tranzitivnosti relacija “podudarno” i “paraleno” dobijamo da je (A,B)~(E,F).

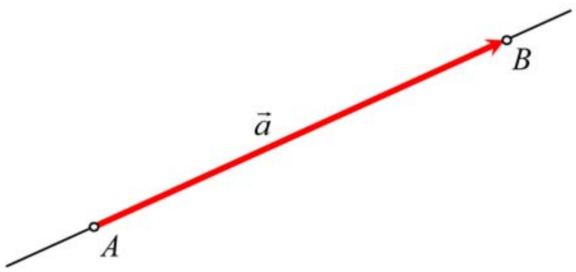
Binarna ralacija “ekvipolencije” u skupu R^2 vrši particiju na kalse ekvivalenciji:

Svaka dva para iz iste klase su ekvipolentna.

Klasa svih međusobno ekvipotentnih parova naziva se slobodni vektor.

Slobodni vektor se zadaje navođenjem jednog njegovog predstavnika, to jest orjentisanom duži, imajući u vidu da je isti vektor zadat i svakom drugom orjenisanom duži, koja se iz ove dobija translatornim pomeranjem. Zato ćemo slobodne vektore poistovećivati sa njihovim predstavnikom.

Slobodne vektore ćemo označavati umesto (A,B) sa $\overrightarrow{AB}$, ili $\vec{a},\vec{b}$.... i predstavljati orijentisanom duži(slika 5.)



Slika 5: Slobodni vektor

Nula vektor $\vec{0}=(A,A)=\overrightarrow{AA}$.

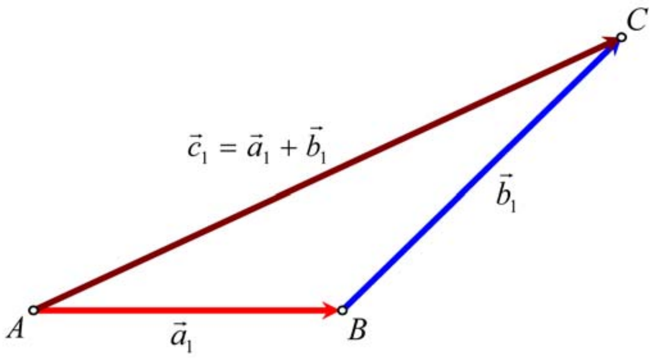
Intenzitet(dužina) vektora u oznaci $|\vec{a}|$ ili $|\overrightarrow{AB}|$ je merni broj dužine bilo kog njegovog predstavnika.

Intenzitet nula vektora je nula, a intenzitet jediničnog vektora je jedan.

Sabiranje i oduzimanje vektora

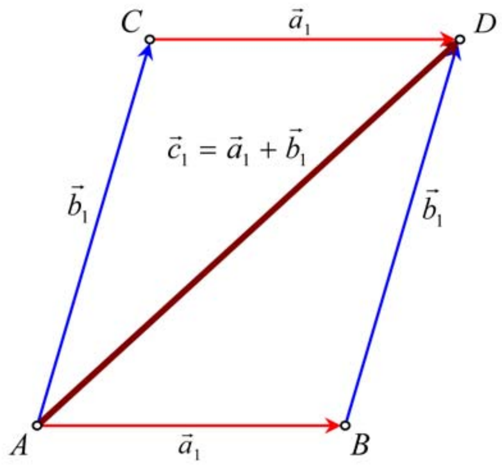
Definicja 2:

Zbir vekora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je vektor $\vec{c}$ čiji se jedan predstavnik dobija na sledeći način: Uoči se jedan prizvoljni predstavnik $\vec{a}_1 = (A, B)$ vektora $\vec{a}$ i predstavnik $\vec{b}_1 = (A, B)$ vektora $\vec{b}$, čija se početna tačka poklapa sa završnim tačkom od $\vec{a}$. Tada $\vec{c}_1 = (A, C)$, čija se početna tačka poklapa sa početnom tačkom od $\vec{a}_1$, a završna tačka poklapa sa završnom tačkom od $\vec{b}_1$, je predstavnik vektora $\vec{c}$ (sl. 6)



Slika 6: Zbir vektora po pravilu trougla

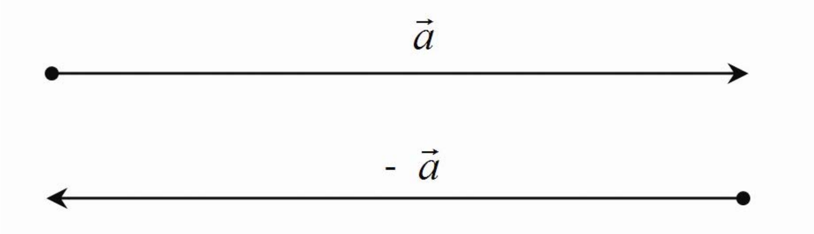
Ako su vektori $\vec{a}_1$ i $\vec{b}_1$ predstavljeni u položaju u kome im se poklapaju počeci i uoči se paralelogram, kojeg oni određuju, tada je zbir $\vec{c}_1 = \vec{a}_1 + \vec{b}_1$ vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ predstavljen orijentisanom dijagonalom paralelograma, čiji se početak poklapa sa zajedničkom tačkom vektora $\vec{a}_1$ i $\vec{b}_1$ (slika 7.)



Slika 7: Zbir vektora po pravilu paralelograma

Definicija 3:

Vektor čiji su intenzitet i pravac jednaki intenzitetu i pravcu vektora $\vec{a}$, dok mu je smer suprotan smeru vektora $\vec{a}$, naziva se suprotan vektor vektoru $\vec{a}$ i obeležava se sa $-\vec{a}$ (slika 8.).



Slika 8: Suprotan vektor

Neka je V skup svih vektora u R^3, tada važi:

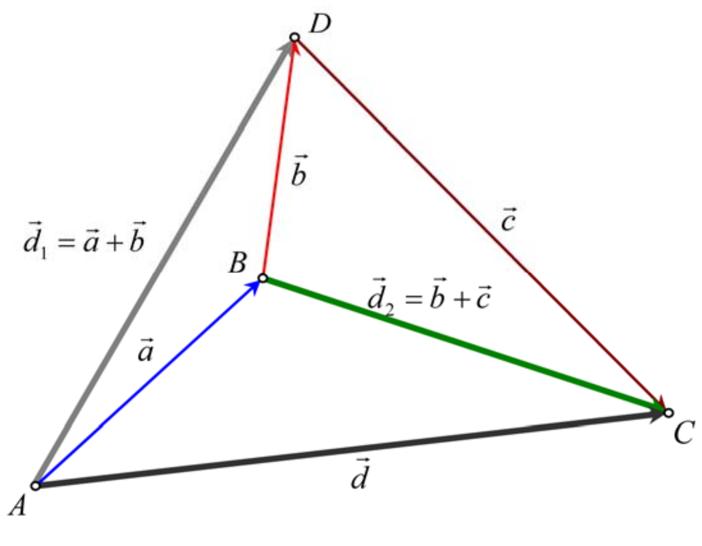
Teorema 2.

Uređani par (V,+) je Abelova grupa.

Dokaz:

a) Zatvorenost: $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} \in V$ po definiciji sabiranja vektora.

b) Asocijativnost: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$. Neka je $\vec{a} + \vec{b} = \vec{d}_1$ i $\vec{b} + \vec{c} = \vec{d}_2$ i $\vec{d}_1 + \vec{c} = \vec{d}$. Tada je $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{d}_1 + \vec{c} = \vec{d}$ i $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} + \vec{d}_2 = \vec{d}$ (slika 9.)



Slika 9: Asocijativnost

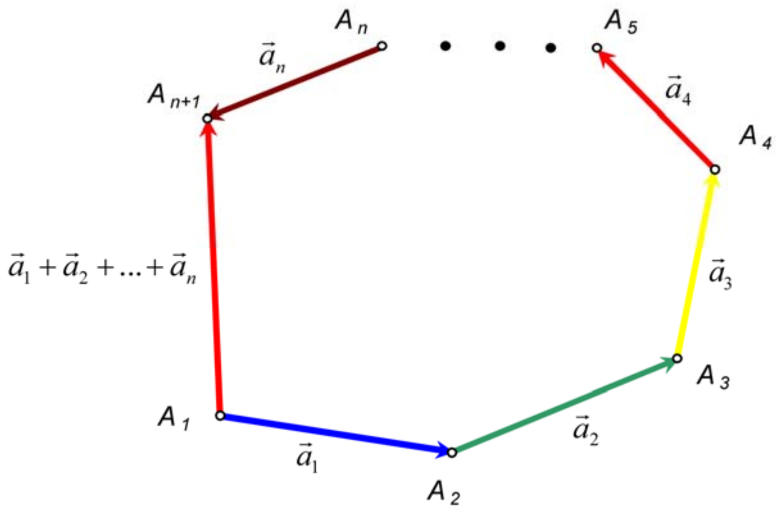
c) Neutralni element $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$

d) Suprotan vektor $-\vec{a}$ vektoru $\vec{a}$. Tada je

e) $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$.

f) Komutativnost – sledi iz sabiranja dva vektora po pravilu paralelograma(slika 7.) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.□

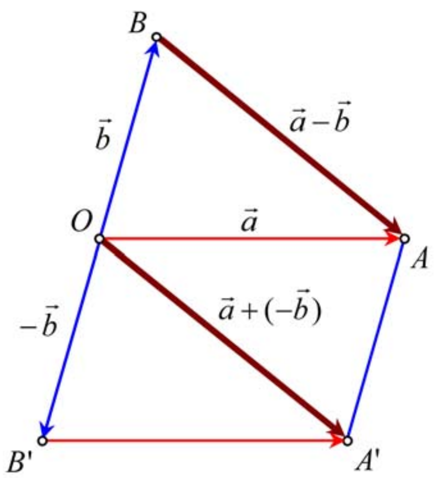
Zbir n-vektora $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ takvih da se početna tačka svakog od njih poklapa sa završnom tačkom prethodnog(slika 10.) je vektor čija se početna tačka poklapa sa početnom tačkom prvog vektora $\vec{a}_1$, a završna tačka sa zavšnom tačkom poslednjeg vektora $\vec{a}_n$ (to je pravilo poligona)



Slika 10: Poligon vektora

<u>Definicja 4:</u>

Razlika vektora $\vec{a}-\vec{b}$ je vektor $\vec{a}+(-\vec{b})$ (slika 11.)



Slika 11: Razlika vektora

Sa slike 11. se vidi da je četvorugao OA’AB paralelogram pa je

$$\overrightarrow{OA'}=\overrightarrow{BA}\text{, to jest, } \vec{a}+(-\vec{b})=\vec{a}-\vec{b}$$

Teorema 3.

Razlika dva vektora je jednoznačno određen vektor.

Dokaz:

Pretpostavimo suprotno, to jest, da za dva data vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ postoje dva različita vektora $\vec{d}$ i $\vec{d}_1$ jednaka razlici vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} \Rightarrow \vec{a} = \vec{d} + \vec{b} \qquad \Rightarrow \vec{d} + \vec{b} = \vec{d}_1 + \vec{b}$

$\vec{d}_1 = \vec{a} - \vec{b} \Rightarrow \vec{a} = \vec{d}_1 + \vec{b}$

Vodeći računa o teoremi 2. imamo:

$(\vec{d} + \vec{b}) + (-\vec{b}) = (\vec{d}_1 + \vec{b}) + (-\vec{b})$

$(\vec{d} + \vec{b}) + (-\vec{b}) = \vec{d} + (\vec{b} + (-\vec{b})) = \vec{d} + 0 = \vec{d}$

$(\vec{d}_1 + \vec{b}) + (-\vec{b}) = \vec{d}_1 + (\vec{b} + (-\vec{b})) = \vec{d}_1 + 0 = \vec{d}_1$

Iz predhodnog sledi $\vec{d} = \vec{d}_1$.

Množenje vektora skalarom

Sada ćemo definisati množenje vektora skalarom(brojem).

Definicja 5:

Pod proizvodom skalara $\lambda \neq 0$ i vektora $\vec{a} \neq 0$ u oznaci $\lambda \cdot \vec{a}$ podrazumeva se vektor čiji je intenzitet $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$, pravac mu je isti kao i kod vektora $\vec{a}$, a smerovi vektora $\vec{a}$ i $\lambda \cdot \vec{a}$ su isti ako je $\lambda > 0$, a suprotni ako je $\lambda < 0$. Ako je $\lambda = 0$, onda je $\lambda \cdot \vec{a} = 0$, takođe je i $0 \cdot \vec{a} = 0$.

Za množenje vektora skalarom važi sledeća teorema:

Teorema 4.

Za svako $\vec{a}, \vec{b} \in V$ i svako $\alpha, \beta \in V$ važi:

1. $(\alpha \cdot \beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$
2. $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$
3. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$
4. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

Dokaz:

Iz definicije 5. ,neposredno sledi da je množenje vektora skalarom zatvoreno, to jest, $\alpha \in R$ i $\vec{a} \in V \Rightarrow \alpha \cdot \vec{a} \in V$. (1)

Dokažimo osobinu 1.

Ako je $\alpha=0$ ili $\beta=0$ ili $\vec{a} = 0$ jednakost (1) je trivijalno zadovoljena. Zato pretpostavimo da je $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \vec{a} \neq 0$. Tada vektori $(\alpha \cdot \beta)\vec{a}$ i $\alpha(\beta \cdot \vec{a})$ imaju isti intenzitet, jer po definiciji 5. važi:

$|(\alpha \cdot \beta)\vec{a}| = |\alpha| \cdot |\beta| \cdot |\vec{a}|$ i

$|\alpha(\beta\cdot\vec{a})| = |\alpha|\cdot|\beta|\cdot|\vec{a}|$.

Ako su skalari α i β istog znaka, tada su i vektori $(\alpha\cdot\beta)\vec{a}$ i $\alpha(\beta\cdot\vec{a})$ kao i $\vec{a}$ istog smera.

Ako su pak α i β različitog znaka , tada su i vektori $(\alpha\cdot\beta)\vec{a}$ i $\alpha(\beta\cdot\vec{a})$ istog smera koji je suprotan smeru vektora $\vec{a}$.

Dakle, vektori $(\alpha\cdot\beta)\vec{a}$ i $\alpha(\beta\cdot\vec{a})$ imaju isti smer, pravac i intenzitet, pa su prema tome jednaki. Tako je osobina 1. dokazana.

Dokažimo osobinu 2.

Vektor $(\alpha+\beta)\vec{a}$ i $\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{a}$ imaju isti pravac.

Neka su α i β istog zanaka , tada će vektori $(\alpha+\beta)\vec{a}$ i $\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{a}$ imati isti smer.

Ispitajmo njihove intenzitete:

$|\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}| = |\alpha\vec{a}|+|\beta\vec{a}| = |\alpha||\vec{a}|+|\beta||\vec{a}| = (|\alpha|+|\beta|)|\vec{a}| = |\alpha+\beta||\vec{a}|$ to znači da su intenziteti vektora $\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{a}$ i $(\alpha+\beta)\vec{a}$ jednaki pa važi osobina 2.

Neka su sada α i β suprotnog znaka, uzmimo $\alpha>0$ i $\beta<0$ (na potpuno isti način se razmatra $\alpha<0$ i $\beta>0$).

Tada su vektori $\alpha\vec{a}$ i $\beta\vec{a}$ suprotnog smera, a pravac im je isti.

Kako je $\alpha>\beta$, tada je smer vektora $(\alpha+\beta)\vec{a}$ i $\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{a}$ isti. Dokaažimo da su im i intenziteti jednaki.

$|\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}| = ||\alpha|\vec{a}-|\beta|\vec{a}| = ||\alpha||\vec{a}|-|\beta||\vec{a}|| = ||\alpha|-|\beta|||\vec{a}| = |\alpha+\beta||\vec{a}| = |(\alpha+\beta)|\vec{a}||$.

Tako da je dokazana osobina 2.

Dokažimo osobinu 3.

Pretpostavimo da je $\alpha>0$ i da pravci vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu paralelni, tada konstruišimo truglove ΔABC i ΔADE tako da bude $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\alpha\vec{a}$ i $\overrightarrow{DE}=\alpha\vec{b}$ (slika 12.). Jasno je da su trouglovi ΔABC i ΔADE slični, tada su tačke A,C i E kolinerne, pa vektori $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{AE}=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$ kao i vektor $\alpha(\vec{a}+\vec{b})$ imaju isti pravac. Zbog $\alpha>0$ vektori $\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{a}$ i $(\alpha+\beta)\vec{a}$ imaju isti smer.

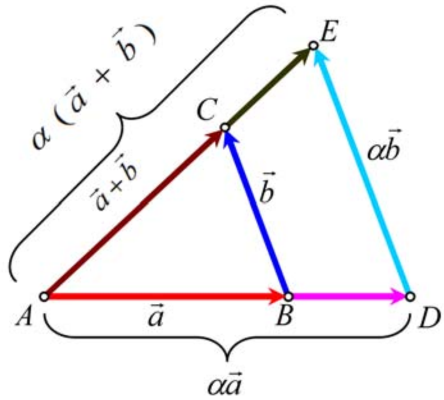
Dokažimo da imaju iste intenzitete.

Kako je $\Delta ABC \sim \Delta ADE \Rightarrow |AB|:|AD| = |AC|:|AE|$

$\Rightarrow |\vec{a}|:|\alpha\vec{a}| = |\vec{a}+\vec{b}|:|\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}| \Rightarrow |\vec{a}|\cdot|\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}| = |\alpha\vec{a}|\cdot|\vec{a}+\vec{b}| \Rightarrow$ to jest

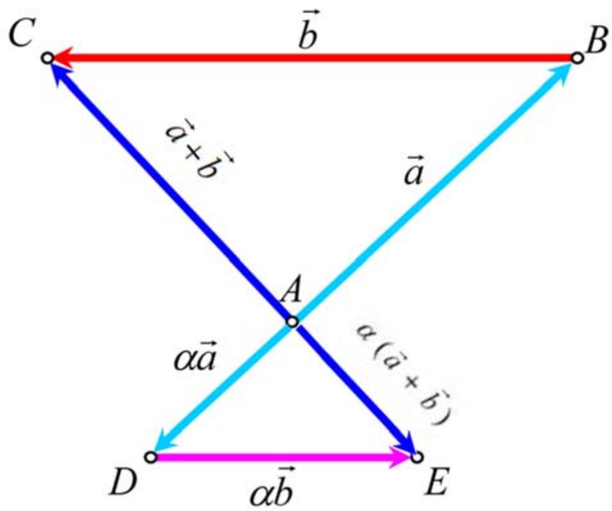
$|\vec{a}|\cdot|\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}| = |\alpha||\vec{a}|\cdot|\vec{a}+\vec{b}| /|\vec{a}| \Rightarrow |\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}| = |\alpha|\cdot|\vec{a}+\vec{b}| = |\alpha(\vec{a}+\vec{b})|$

$\Rightarrow$ vektor $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ i $\alpha(\vec{a}+\vec{b})$ imaju iste intenzitete pa važi osobina 3.



Slika 12: Množenje vektora skalarom

Ako je $\alpha<0$ i ako pravci vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu paralelni, dokaz je isti samo što će vektori $\alpha(\vec{a}+\vec{b})$ i $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ imati smerove suprotne od smera vektora $\vec{a}+\vec{b}$ (slika 13.)



Slika 13:

Kada vektor $\vec{a}$ i $\vec{b}$ imaju paralelne pravce, slično se dokazuje za ($\alpha>0$) odnosno $\alpha<0$ osobina 3.

Ako je $\alpha=0$ ili $\vec{a}=\vec{0}$ ili $\vec{b}=\vec{0}$, osobina 3. je očigledna.

Ako je $\vec{a}$ proizvoljan vektor, $\vec{a}\neq\vec{0}$, tada se vektor $\vec{e}_0$ određen kao

$\vec{e}_0=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ naziva jedinični vektor ili ort vektora $\vec{a}$.

Na osnovu teorema T_2 i T_4 važi sledeća teorema:

Teorema 5.

Uređena trojka (V,+,·) je vektorski prostor nad poljem realnih brojeva.

Definicja 6:

Neka je V vektorski prostor nad poljem F i neka su $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n \in V$. Tada, svaki vektor oblika $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ...\alpha_n\vec{a}_n$ gde su $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ proizvoljni skalari iz polja F, naziva se linearna kombinacija vektora $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$.

Definicja 7:

Za vektore $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n \in V$ kažemo da su linearno zavisni, ako postoji skup skalara $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in R$ tako da je bar jedan od njih različit od nule i da važi $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ...\alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}$

Definicja 8:

Za vektore $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n \in V$ kažemo da je linearno nezavisan, ako za $\forall \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in R$ važi $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ...\alpha_n\vec{a}_n = \vec{0} \Rightarrow$ $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$.

Teorema 6.

Svaki skup vektora, među kojima je nula vektor je linearno zavisan.

Dokaz:

Neka je $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ dati skup vektora i neka je $\vec{a}_i = 0$. Tada je $0 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2 + ... + 0 \cdot \vec{a}_{i-1} + 1 \cdot \vec{a}_i + 0 \cdot \vec{a}_{i+1} + ...0 \cdot \vec{a}_m = \vec{0} \Rightarrow$ $(0,0,...,0,1,0,...0) \neq (0,0,...,0)$ pa su vektori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ linearno zavisni.

Teorema 7.

Vektori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ su linearno zavisni akko $\exists i \in \{1,2,...,n\}$ tako da su $\vec{a}_i = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_{i-1}\vec{a}_i + \alpha_{i+1}\vec{a}_{i+1} ... + \alpha_n\vec{a}_n$

Dokaz:

$(\rightarrow)$ $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ su linearno zavisni $\Rightarrow \exists \alpha_1, ..., \alpha_n \in R$ tada je i

$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ...\alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}$ i postoji bar jedan skalar $\alpha_i \neq 0 \Rightarrow$

$$\vec{a}_i = (-\frac{\alpha_1}{\alpha_i})\vec{a}_1 + (-\frac{\alpha_1}{\alpha_i})\vec{a}_1 + ... + (-\frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i})\vec{a}_1 + (-\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i})\vec{a}_{i+1} + ... + (-\frac{\alpha_n}{\alpha_i})\vec{a}_n$$

$(\leftarrow)$ $\exists i \in \{1,2,...,n\}$ tako da $\vec{a}_i = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_{i-1}\vec{a}_i + \alpha_{i+1}\vec{a}_{i+1} ... + \alpha_n\vec{a}_n \Rightarrow$

$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_{i-1}\vec{a}_i + (-1)\vec{a}_i + \alpha_{i+1}\vec{a}_{i+1} ... + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}$ i postoji bar jedan skalar ≠0, pa su vektori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ linearno zavisni.

Definicja 9:

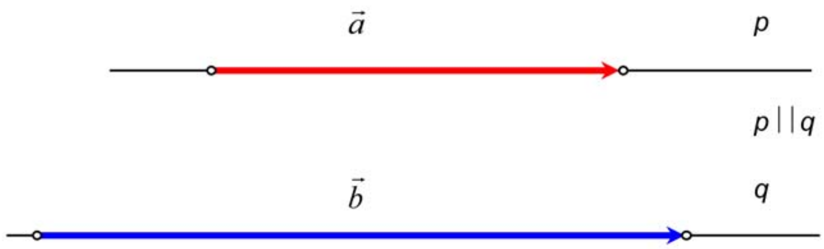
Za dva ne nula vektora kažemo da su kolinearni akko imaju isti pravac.

Teorema 8.

Dva nenula vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su kolinearni akko postoji $\lambda \in R, \lambda \neq 0$ tako da je $\vec{a} = \lambda \vec{b}$.

Dokaz:

$(\rightarrow)$ $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su kolinearni



Slika 14:Kolinarni vektori

Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ istog smera, tada je $\left|\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}\vec{b}\right| = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}|\vec{b}| = |\vec{a}| \Rightarrow$ da su vektori $\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}\vec{b}$ i $\vec{a}$ jednaki $\Rightarrow$ $\vec{a} = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}\vec{b}$ pa, $\exists \lambda = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \Rightarrow \vec{a} = \lambda \vec{b}$.

Ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ suprotnog smera, tada je $\left|-\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}\vec{b}\right| = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}|\vec{b}| = |\vec{a}| \Rightarrow$ $\vec{a} = -\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}\vec{b}$ pa, $\exists \lambda = -\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$.

$(\leftarrow)$ Ako je $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ onda na osnovu definije 9. vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ imaju isti pravac to jest paralelni su, a to znači kolinearni.

Teorema 9.

Dva nenula vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su kolinarni akko su linarno zavisni.

Dokaz:

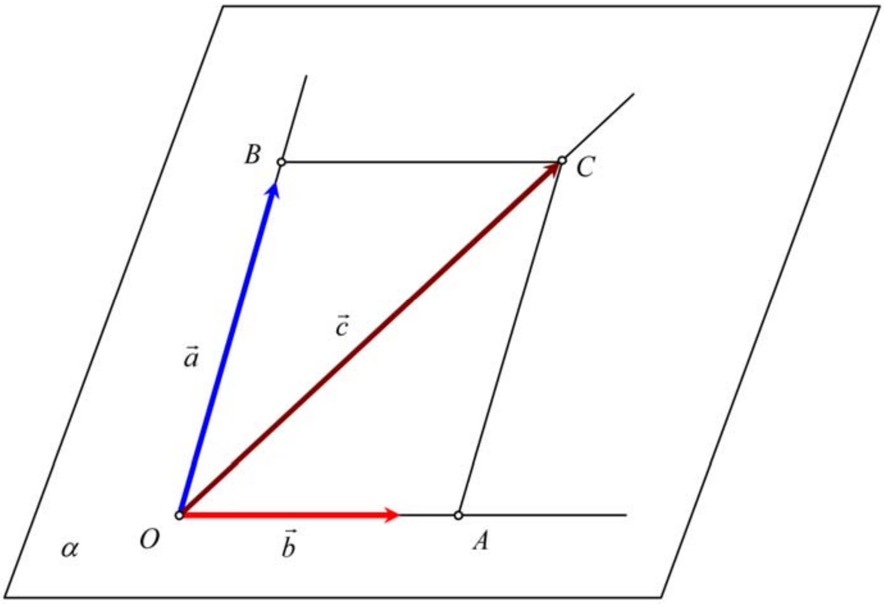
$(\rightarrow)$ $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su kolinarni $\Rightarrow$ Iz Teoreme 8. $\exists \lambda \in R, \lambda \neq 0$ tako da je $\vec{a} = \lambda \vec{b} \Rightarrow \vec{a} - \lambda \vec{b} = 0 \Rightarrow$ po definiciji 7. vektori su linarno zavisni.

$(\leftarrow)$ $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su linearno zavisni $\Rightarrow \exists \alpha, \beta \in R$ takvi da je $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$ i, recimo $\alpha \neq 0, \Rightarrow \vec{a} = -\dfrac{\beta}{\alpha}\vec{b}$ pa $\exists \lambda = -\dfrac{\beta}{\alpha} \neq 0$ tako da je $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, tada su po Teoremi 8. vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni.

Definicja 10:

Za tri i više vektora kažemo da su komplanarni ako postoji ravan, tako da nosači tih vektora budu paralelni toj ravni.

Neka su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tri komplanarna vektora i translirajmo ih u zajedničku tačku O(slika 15.)



Slika 15: Komplanarni vektori

Pretpostavimo da vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni. Kroz tačku C(završnu tačku) vektora $\vec{c}$ povučemo paralele sa pravcima vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, presečne tačke obeležimo sa A i B(slika 15.) tada je: $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OA} = \lambda\vec{a}$ i $\overrightarrow{OB} = \mu\vec{b}$ onda je $\overrightarrow{OC} = \vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$. Za vektor $\vec{c}$ se kaže da je razložen po pravcima nekolinearnih vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Pokazaćemo da je to razlagenje jedinstveno.

Prvo ćemo dokazati:

Teorema 10.

Tri ne nula vektora su komplanarni akko su linarno zavisni.

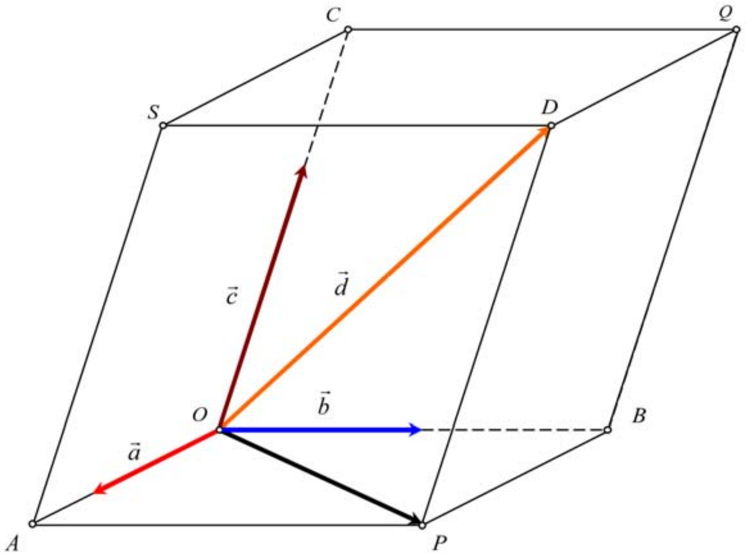
Dokaz:

$(\rightarrow)$Neka su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanarni i neka $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinerni. Tada postoje $\lambda, \mu \in R$ tako da je $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \Rightarrow$po teoremi 7. vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ su linearno zavisni.

Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinerni $\Rightarrow \exists \alpha \in R, \alpha \neq 0$ tako da je $\vec{a} = \alpha\vec{b}$ pa je linarna kombinacija $\vec{a} - \alpha\vec{b} + 0\vec{c} = 0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linarno zavisni.

($\leftarrow$) Neka su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linearno zavisni $\Rightarrow$ $\exists \alpha, \beta, \gamma \in R$, i bar jedan od njih je različit od nule, neka je to $\alpha \neq 0$, i $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow$ $\vec{a} = (-\frac{\beta}{\alpha})\vec{b} + (-\frac{\gamma}{\alpha})\vec{c}$, a to znači da su vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ konplanarni tako je dokaz završen.

Neka je dat skup tri nekomplanarna vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Razložimo proizvoljan vektor $\vec{d}$ po pravcima ta tri vektora. Konstruišimo paralelopiped čije ivice leže na nosačima vektora $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ dok mu je dijagonala vektor $\vec{d}$ (slika 16.).



Slika 16: Razlaganje vektora na tri nekomplanarna vektora

Tada je $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PD}$; $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$; $\overrightarrow{PD} = \overrightarrow{OC} = \gamma\vec{c}$

$$\overrightarrow{OD} = \vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}. \qquad (1)$$

Pokažimo da je to razlaganje jedinstveno. Neka pored (1) razlaganja, postoji još jedno razlagenje vektora $\vec{d} = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b} + \gamma_1\vec{c} \Rightarrow \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b} + \gamma_1\vec{c} \Rightarrow$ $(\alpha - \alpha_1)\vec{a} + (\beta - \beta_1)\vec{b} + (\gamma - \gamma_1)\vec{c} = \vec{0}$ vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ su nekomplanarni to jest linearno nezavisni$\Rightarrow$ $\alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1, \gamma = \gamma_1$.

Teorema 11. Četri prizvoljna vektora su uvek linearno zavisna.

<u>*Dokaz:*</u> Neka su data četri vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$. Ako su tri od njih, na primer $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, nekomplanarni, tada se svaki vektor $\vec{d}$ jedinstveno

razlaže preko vektora $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ to jest: $\vec{d}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}\Rightarrow$ $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ linearno zavisni.

Ako su vektori $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ konplanarni $\Rightarrow$ na osnovu teoreme 10. su linearno zavisni to jest $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0}$ i bar jedan od skalara α,β,γ je različit od nule. Tada je: $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}+0\vec{d}=\vec{0}\Rightarrow$ $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ su linearno zavisni.

Koordinatni sistem u prostoru

Koordinate vektora u prostoru

Dokazali smo prethodno da se svaki vektor $\vec{d}$ može razložiti na tri nekomplanarna vektora $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ na jedinstven način.

Neka je razlagenje vektra $\vec{d}$ dato sa:

$$\vec{d}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$$

Vektori $\alpha\vec{a},\beta\vec{b},\gamma\vec{c}$ se nazivaju komponente, a skalari α,β,γ koeficijenti razlaganja vektra $\vec{d}$ po vektorima $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

Očigledno je da komponente vekora $\vec{d}$ u razlaganju po vektorima $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ zavise od izbora vektora $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, a skalari α,β,γ zavise od redosleda vektora $\vec{a},\vec{b}$ i $\vec{c}$ zato je potrebna ova definicija:

<u>Definicja 11:</u>

Koordinatni sistem u realnom vektorskom prostoru je uređena trojka $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ nekomplanarnih vektora.

Sada vektor $\vec{d}$ u odnosu na koordinatni sistem $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ prikazan kao linerna kombinacija vektora $\vec{a},\vec{b}$ i $\vec{c}$ glasi $\vec{d}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$. Tada koeficijente α,β i γ zovemo koordinate vektora $\vec{d}$ u izabranom koordinatnom sistemu.

Da vektor $\vec{d}$ ima koordinate α,β,γ zapisaćemo $\vec{d}=(\alpha,\beta,\gamma)$.

Prema tome, vektor $\vec{d}$ je određen uređenom trojkom brojeva. Svakom vektru odgovara tako jedna uređena trojaka njegovih koordinata i obratno. Dakle, preslikavanje koje svaki vektor $\vec{d}$ preslikava u uređneu trojku realnih brojeva, koje su njegove koordinate je bijekcija. Zbog te bijekcije računske opreacije sa vektorima možemo zamentiti sa računskim oprecijama među njihovim koordinatama.

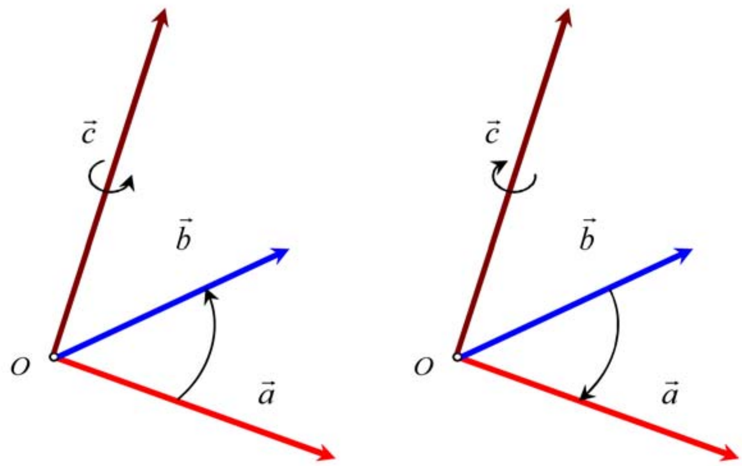
Definicja 12:

Triedar vektora, naziva se uređena trojka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ nekomplanarnih vektora $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$.

Definisaćemo levi i desni orijentisani triedar.

Definicja 13:

Neka su $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \neq (\vec{0}, \vec{0}, \vec{0})$ tri nekomplanarna vektora koji imaju zajedničku tačku u tački O. Ako u ravni vektora $\vec{a}, \vec{b}$ rotacija oko tačke O vektora $\vec{a}$ dovede do poklapanja sa pravcem i smerom vektora $\vec{b}$ i to najkraćim putem posmatrano iz završne tačke vektora $\vec{c}$, suprotno kretanju kazaljke na satu, tada je triedar $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ desne orijentacije. U suprotnom je leve orijentacije(slika 17.)



Slika 17: Desni i levi triedar vektora

Definicja 14:

Uređeni skup tri ose koje prolaze kroz utvrđenu tačku *O* i koje su uzajamno normalne, obrazuju Dekartov koordinatni sistem.

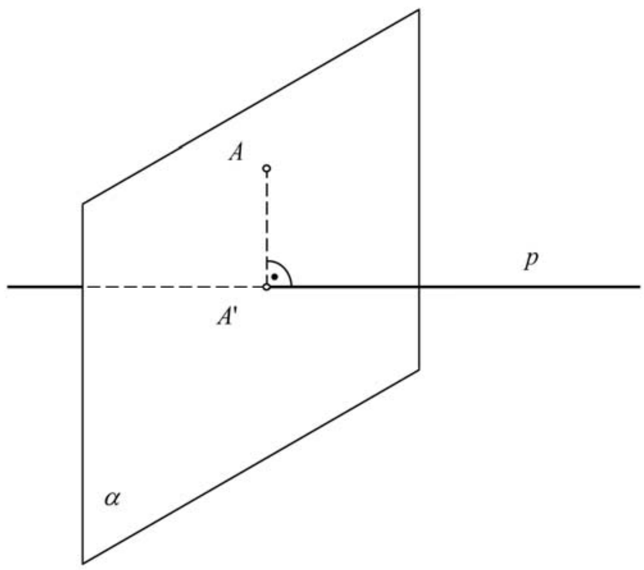
Tačka *O* se naziva koordinatni početak, a ose koje prolaze kroz tačku *O* se zovu kordinatne ose i obeležavaćemo ih sa *x,y,z* . Jedinični vektor ose *x* označavačemo sa $\vec{i}$, ose y sa $\vec{j}$, a ose z sa $\vec{k}$. Koordinatni sistem (*x,y,z*) je desni ako je triedar ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) desni, slično za levi sistem. Radićemo isključivo sa desnim sistemom.

Tri uzajamno normalne ravni *Oxy*, *Oxz*, *Oyz* koje prolaze kroz odgovarajuće ose, nazivaju se koordinatnim ravnima, sa njima je prostor podeljen na osam oktanata.

Ortogonalna projekcija vektora

Definicja 15:

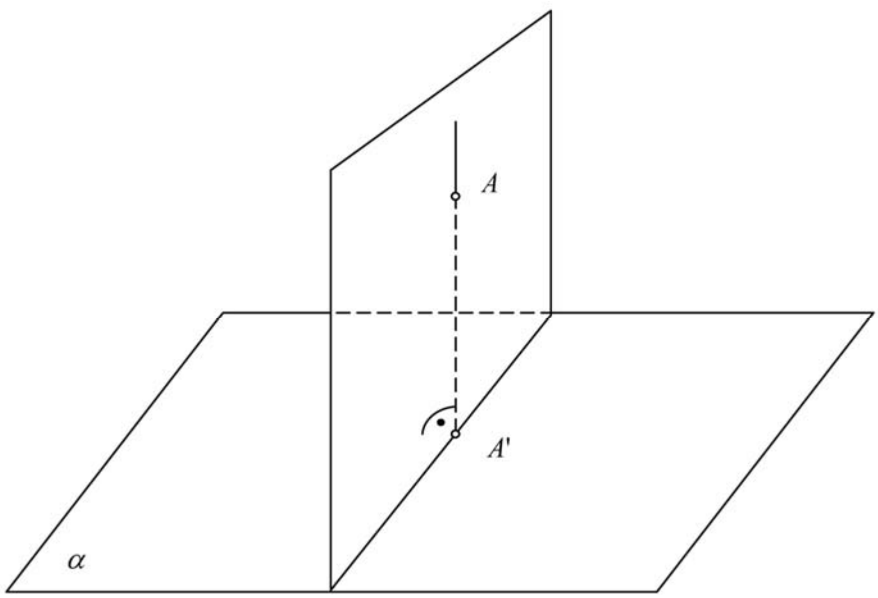
Ortogonalna projekcija tačke *A* na pravu *p* je tačka *A'* koja leži u preseku prave *p* i ravni α koja prolazi kroz tačku *A* i normalna je na pravu *p* (slika 18.).



Slika 18: Ortogonalna projekcija tačke na pravu

Definicja 16:

Ortogonalna projekcija tačke A na ravan α je tačka A' koja leži u preseku ravni α i prave koja prolazi kroz tačku A i normalna je na ravan α(slika 16.).

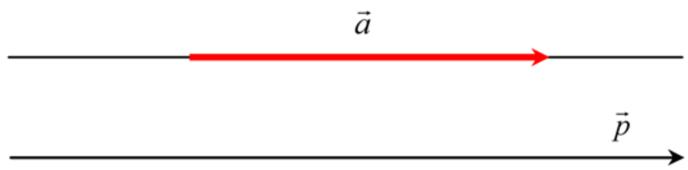


Slika 19: Ortogonalna projekcija tačke na ravan

Da bi se definisala projekcija vektora na osu mora se definisati orijentacija prave(ose).

Definicja 17.

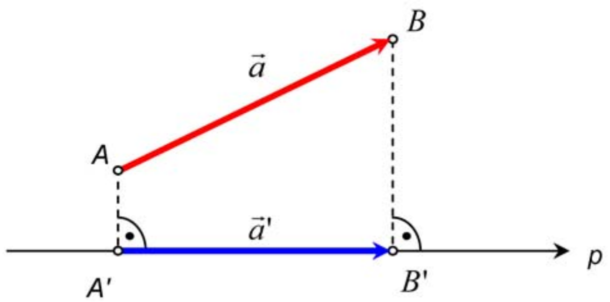
Neka je na pravi p određen pozitivan smer, koji je isti kao smer proizvoljnog ne nula vektora $\vec{a}$, čiji je nosač paralelan sa pravom p. Prava sa tako određenim smerom naziva se orjentisana prava ili osa(slika 20.).



Slika 20: Orjentisana prava(osa)

Definicja 18.

Ortogonalana projekcija vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ na orjentisanu pravu $\vec{p}$ je vektor $\vec{a}' = \overrightarrow{A'B'}$, čiji je početak *A'* ortogonalna projekcija tačke *A* vektora $\vec{a}$ na pravu *p*, a kraj *B'* ortogonalna projekcija kraja *B* vektora $\vec{a}$ na pravu *p* u toj ravni(slika 21.).



Slika 21: Ortogonalna projekcija vekotra

Definicja 19.

Ortogonalana projekcija vektora $\vec{a}$ na orijentisanu osu $\vec{p}$ je skalar, jednak intenzitetu vektora $\vec{a}$. Projekcija vektora $\vec{a}$ na pravu $\vec{p}$ uzima se sa pozitivnim znakom, ako se smer vektora $\vec{a}$ poklapa sa smerom ose $\vec{p}$, i negativnim znakom, ako je smer vektora $\vec{a}$ suprotan smeru ose $\vec{p}$.

Projekciju vektora $\vec{a}$ na osu $\vec{p}$ označavaćemo sa $\mathrm{Pr}_{\vec{p}}\,\vec{a}$.

Napomena: Ako je $\vec{p}_0$ jedinični vektor orijentisane ose $\vec{p}$ tada je projekcija $\vec{a}'$ vektora $\vec{a}$ na pravu $\vec{p}$ data sa $\vec{a}' = \mathrm{Pr}_{\vec{p}}\,\vec{a} \cdot \vec{p}_0$.

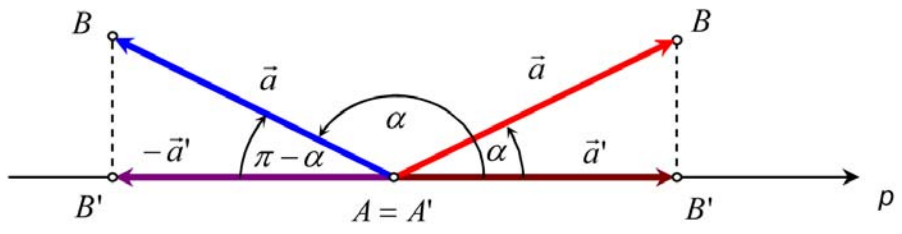
Teorema 12.

Projekcija vektora $\vec{a}$ na orijentisanu osu $\vec{p}$ jednaka je proizvodu intenziteta vektora $\vec{a}$ i kosinusa ugla kojeg ovaj vektor obrazuje sa osom:

$\mathrm{Pr}_{\vec{p}}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\alpha$, $\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{p})$.

Dokaz:

Neka je vektor $\vec{a}$ predstavljen sa $\overrightarrow{AB}$ koji je translatorno pomeren tako da mu početak leži u tački $A \in \vec{p}$, gde je $\vec{p}$ orijentisana prava(slika 22.).



Slika 22: Projekcija vektora na orijentisanu osu

Naka je vektor $\vec{a}'=\overrightarrow{A'B'}$ ortogonalna projekcija vektora $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ na orijentisanu pravu $\vec{p}$. Neka je ugao $\alpha=\angle(\vec{a},\vec{p})$ oštar ($0\leq\alpha\leq\dfrac{\pi}{2}$) tada vektor $\vec{a}'=\overrightarrow{A'B'}$ ima isti smer kao osa $\vec{p}$. Tada je $\Pr_{\vec{p}}\vec{a}=\left|\overrightarrow{A'B'}\right|=|\vec{a}|\cos\alpha$.

Ako je ugao $\alpha=\angle(\vec{a},\vec{p})$ tup ($\dfrac{\pi}{2}\leq\alpha\leq\pi$)(slika 22.) tada je smer vektora $\vec{a}'$ suprotan smeru ose $\vec{p}$ pa je

$\Pr_{\vec{p}}\vec{a}=-\left|\overrightarrow{A'B'}\right|=-|\vec{a}|\cos(\pi-\alpha)=|\vec{a}|\cos\alpha$.

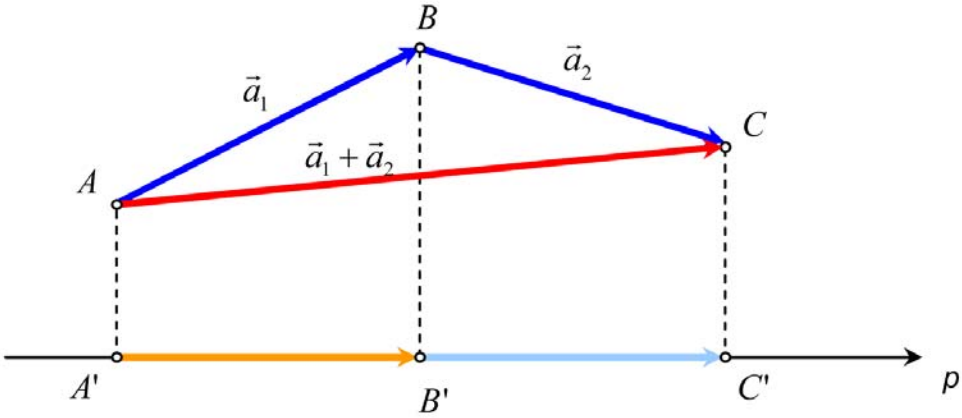
Teorema 13.

Projekcija konačnog zbira vektora na orijentisanu osu $\vec{p}$ jednaka je zbiru projekcija tih vektora na osu $\vec{p}$.

Dokaz:

Indukcijom po zbiru vektora

n=2 dokažimo $\Pr_{\vec{p}}(\vec{a}_1+\vec{a}_2)=\Pr_{\vec{p}}\vec{a}_1+\Pr_{\vec{p}}\vec{a}_2$ neka je $\vec{a}_1=\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}_2=\overrightarrow{BC}\Rightarrow\vec{a}_1+\vec{a}_2=\overrightarrow{AC}$ (slika 23.).



Slika 23: Projekcija konačnog zbira vektora

Vektor $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'}$ na osnovu definicje 18. i 19. imamo da je $\mathrm{Pr}_p\, \vec{a}_1 = \overrightarrow{A'B'}$, $\mathrm{Pr}_p\, \vec{a}_2 = \overrightarrow{B'C'}$, $\mathrm{Pr}_p(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \overrightarrow{A'C'}$, a $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'}$ tada je

$$\mathrm{Pr}_{\vec{p}}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} = \mathrm{Pr}_{\vec{p}}\, \vec{a}_1 + \mathrm{Pr}_{\vec{p}}\, \vec{a}_2$$

Pretpostavimo da je tačno za :

<u>n=k</u> $\mathrm{Pr}_{\vec{p}}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_k) = \mathrm{Pr}_{\vec{p}}\, \vec{a}_1 + \mathrm{Pr}_{\vec{p}}\, \vec{a}_2 + \ldots + \mathrm{Pr}_{\vec{p}}\, \vec{a}_k$

dokažimo da je tačno za :

<u>n=k+1</u>

$$\mathrm{Pr}_{\vec{p}}((\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_k) + \vec{a}_{k+1}) = \mathrm{Pr}_{\vec{p}}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_k) + \mathrm{Pr}_{\vec{p}}\, \vec{a}_{k+1} =$$

$= \mathrm{Pr}_{\vec{p}}\, \vec{a}_1 + \mathrm{Pr}_{\vec{p}}\, \vec{a}_2 + \ldots + \mathrm{Pr}_{\vec{p}}\, \vec{a}_k + \mathrm{Pr}_{\vec{p}}\, \vec{a}_{k+1}$. Tada važi $\forall n \in N$.

Teorema 14.

Projekcija proizvoda vektora $\vec{a}$ skalarom λ na datu orijentisanu osu $\vec{p}$ jednaka je proizvodu skalara λ i projekcije vektora $\vec{a}$ na osu $\vec{p}$.

Dokaz:

Treba dakle dokazati da je $\mathrm{Pr}_{\vec{p}}\, \lambda\vec{a} = \lambda\, \mathrm{Pr}_{\vec{p}}\, \vec{a}$.

Neka je λ>0. Na osnovu teoreme 12. imamo $\mathrm{Pr}_{\vec{p}}\, \lambda\vec{a} = |\lambda\vec{a}|\cos\angle(\lambda\vec{a}, \vec{p}) = \lambda|\vec{a}|\cos\angle(\vec{a}, \vec{p}) = \lambda\, \mathrm{Pr}_{\vec{p}}\, \vec{a}$.

Neka je λ<0,tada je
$\mathrm{Pr}_{\vec{p}}\, \lambda\vec{a} = -|\lambda\vec{a}|\cos\angle(\lambda\vec{a}, \vec{p}) = -\lambda|\vec{a}|\cos\angle(\pi + \alpha) =$

$= -\lambda|\vec{a}|\cos\alpha = \lambda\, \mathrm{Pr}_{\vec{p}}\, \vec{a}$, gde je $\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{p})$.

Ako je λ=0 $\Rightarrow$ $\lambda\vec{a} = \vec{0}$ i kako je projekcija nula vektora na osu $\vec{p}$ tačka, to je $\mathrm{Pr}_{\vec{p}}\, \lambda\vec{a} = 0 = 0 \cdot \mathrm{Pr}_{\vec{p}}\, \vec{a}$, to je teorema dokazana.

Kao posledicu teoreme 10. imali smo da se proizvoljan vektor $\vec{d} \neq \vec{0}$ na jedinstven način razlaže kao linarna kombinacija tri nekomplanarna vektora $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$.

Sada se vektor $\vec{d}$ u Dekartovom koordinatnom sistemu može jedindstveno razložiti preko linarne kombinacije vektora $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ gde su $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ jedinični vektori orjentisanh koordinatnih osa x, y i z redom.

Dakle, $\vec{d} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, gde su a_x, a_y, a_z koeficienti razlaganja vektora $\vec{a}$ i zovu se koordinate vektora $\vec{a}$.

Teorema 15.

Koeficijenti a_x, a_y, a_z razlaganja vektora $\vec{d}$ su njegove ortogonalne projekcije na koordinatne ose x, y i z redom.

Dokaz:

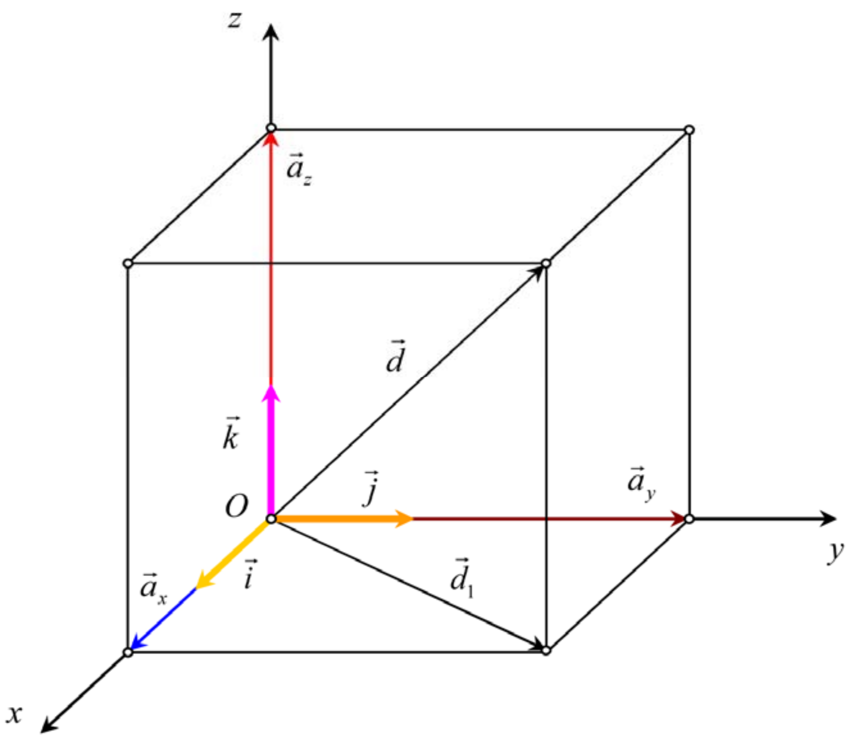
Neka je vektor $\vec{d}$ u prvom oktantu koordinatnog sistema. Konstruišimo kvadar kao na slici 24.

Projekcija vektora $\vec{d} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ je $\operatorname{Pr}_{\vec{i}}\vec{d} = \operatorname{Pr}_{\vec{i}}(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})$. Na osnovu teoreme 13. i 14. imamo $\operatorname{Pr}_{\vec{i}}\vec{d} = a_x \operatorname{Pr}_{\vec{i}}\vec{i} + a_y \operatorname{Pr}_{\vec{i}}\vec{j} + a_z \operatorname{Pr}_{\vec{i}}\vec{k}$ kako su vektori $\vec{j}, \vec{k}$ normalni na $\vec{i}$ to su njihove projekcije na x osu jednake nuli $\operatorname{Pr}_{\vec{i}}\vec{j} = 0$, $\operatorname{Pr}_{\vec{i}}\vec{k} = 0$, a $\operatorname{Pr}_{\vec{i}}\vec{i} = |\vec{i}|\cos 0^0 = 1$. Tada je $\operatorname{Pr}_{\vec{i}}\vec{d} = a_x$. Analogno se dobija da su projekcije vektora $\vec{d}$ na y, odnosno z osu redom $\operatorname{Pr}_{\vec{j}}\vec{d} = a_y$, $\operatorname{Pr}_{\vec{k}}\vec{d} = a_z$. Na osnovu teoreme 12. imamo

$$a_x = |\vec{d}|\cos\angle(\vec{d}, \vec{i})$$

$$a_y = |\vec{d}|\cos\angle(\vec{d}, \vec{j})$$

$$a_z = |\vec{d}|\cos\angle(\vec{d}, \vec{k}).$$



Slika 24: Prostorni koordinatni sistem

Umesto oznake $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ pisaćemo oznaku $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$.

Definicja 20.

Vektori položaja tačke A(radijus vektor) u prostoru naziva se vektor kome je početak u koordinatnom početku O, a kraj u tački A.

Definicja 21.

Pravougle koordinate x, y, z vektora položja $\vec{a} = (x, y, z)$ tačke A u prostoru nazivaju se pravouglim koordinatama tačke A.

Tačka A sa koordinatama x, y, z označava se $A(x, y, z)$, pri čemu se prva koordinatra naziva apcisom, druga ordinatom i treća aplikatom tačke A.

Da bi se našle koordinate tačke A treba kroz tačku A postaviti tri ravni paralelne odgovarajućim koordinatnim ravnima. Tada te tri ravni seku ose x, y, z u tačkama P,Q,R koje određuju koordinate vektora $\overrightarrow{OA}$, a time i koordinate tačke A. Prema tome, položaj tačke A u prostoru je određen njenim vektorom položaja $\overrightarrow{OA}$ ili sa tri koordinate $A(x, y, z)$.

Neka je zadan radijus vektor svojim pravouglim koordinatama (a_x, a_y, a_z). Tada važi sledeća teorema:

Teorema 16.

Neka vektor $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ sa kordinatnim osama x, y, z gradi redom uglove α,β i γ tada je :

a) $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

b) $\cos\alpha = \dfrac{a_x}{\left|\vec{a}\right|}$, $\cos\beta = \dfrac{a_y}{\left|\vec{a}\right|}$, $\cos\gamma = \dfrac{a_z}{\left|\vec{a}\right|}$

c) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

Dokaz:

a) Iz teoreme 15. na slici 24. radijus vektor $\vec{a}$ pripada pravcu koji je prostorna dijagonala kvadra čije su ivice $|a_x|, |a_y|, |a_z|$.

Tada je na osnovu Pitagorine teoreme $\left|\vec{a}\right|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$.

b) Iz teoreme 15. i na osnovu teoreme 12. imamo:

$a_x = \left|\vec{a}\right| \cos\angle(\vec{a}, \vec{i}) = \left|\vec{a}\right| \cos\alpha$ $a_y = \left|\vec{a}\right| \cos\angle(\vec{a}, \vec{j}) = \left|\vec{a}\right| \cos\beta$

$a_z = \left|\vec{a}\right| \cos\angle(\vec{a}, \vec{k}) = \left|\vec{a}\right| \cos\gamma$

koristeći a) dobijamo dokaz pod b).

c) Kvadriramo jednakosti pod b) i saberemo ih, dobićemo

$$a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = \left|\vec{d}\right|^2 \cos^2\alpha + \left|\vec{d}\right|^2 \cos^2\beta + \left|\vec{d}\right|^2 \cos^2\gamma$$

$a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = \left|\vec{d}\right|^2 (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$ koristeći pod a) dobijamo $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Jedinični vektor $\vec{d}_0$ vektora $\vec{d}$ je

$\vec{d}_0 = \dfrac{\vec{d}}{\left|\vec{d}\right|} = \dfrac{a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}}{\left|\vec{d}\right|} = \dfrac{a_x}{\left|\vec{d}\right|}\vec{i} + \dfrac{a_y}{\left|\vec{d}\right|}\vec{j} + \dfrac{a_z}{\left|\vec{d}\right|}\vec{k}$ koristeći jednakosti iz teoreme 16 pod b) dobićemo: $\vec{d}_0 = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$.

Ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ zadani svojim koordinatama $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z = (b_x, b_y, b_z)$ tada za sabiranje, oduzimanje i množenje skalarom λ važi:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k} =$$
$$= (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$$

$$\lambda\vec{a} = \lambda a_x\vec{i} + \lambda a_y\vec{j} + \lambda a_z\vec{k} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z).$$

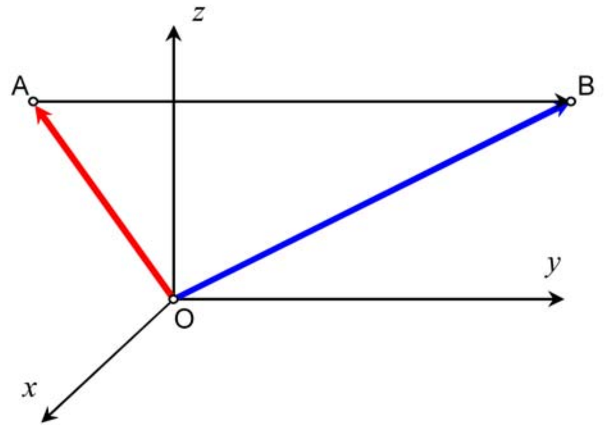
Koordinate vektora kada vektor nije radijus vektor

Teorema 17.

Ako su date tačke $A(x_1, y_1, z_1)$ i $B(x_2, y_2, z_2)$ tada je vektor $\overrightarrow{AB}$ jednak: $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$.

<u>*Dokaz:*</u>

Neka je O(0,0,0) koordinatni početak tada su jednoznačno određeni radijus vektori $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1, z_1)$ i $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2, z_2)$ (slika 25.).
Tada je $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \Rightarrow$
$\overrightarrow{AB} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.



Slika 25: Radijus vektori

Skalarni proizvod vektora

Definicja 22.

Skalarni proizvod dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ u oznaci $\vec{a}\cdot\vec{b}$ je skalar, koji je jedank proizvodu intenziteta vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ i kosinusa ugla koji oni zaklapaju.

Na osnovu definicije 22. imamo: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$. Na osnovu teoreme 12. dobijamo $\mathrm{Pr}_{\vec{b}}\,\vec{a}=|\vec{a}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$, pa se skalarni proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ može zapisati u obliku
$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|\,\mathrm{Pr}_{\vec{b}}\,\vec{a}=|\vec{a}|\,\mathrm{Pr}_{\vec{a}}\,\vec{b}$. (1) Osobine skalarnog proizvoda iskazuje sledeća teorema.

Teorema 18.

Ako su $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V$ prizvoljni vektori i $\lambda\in$ R, tada je:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

2) $\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$

3) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

4) $\vec{a}\cdot\vec{a}\geq 0$

5) $\vec{a}\cdot\vec{a}=0\Leftrightarrow\vec{a}=0$

Dokaz:

1) Na osnovu definicije 22. imamo $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$ = $|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cos\angle(\vec{b},\vec{a})=\vec{b}\cdot\vec{a}$, komutativan je.

2) $\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=\lambda|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=\lambda|\vec{b}|\,\mathrm{Pr}_{\vec{b}}\,\vec{a}$. Kako je, na osnovu osobine o projekciji vektora, teoreme 14. i (1) imamo
$\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=\lambda|\vec{b}|\,\mathrm{Pr}_{\vec{b}}\,\vec{a}=|\vec{b}|\,\mathrm{Pr}_{\vec{b}}(\lambda\vec{a})=(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}$. Iz istih razloga važi i $\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$.

3) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=|\vec{a}|\,\mathrm{Pr}_{\vec{a}}(\vec{b}+\vec{c})$. Koristeći teoremu 13. dobijamo
$|\vec{a}|\,\mathrm{Pr}_{\vec{a}}(\vec{b}+\vec{c})=|\vec{a}|(\mathrm{Pr}_{\vec{a}}\,\vec{b}+\mathrm{Pr}_{\vec{a}}\,\vec{c})=|\vec{a}|\,\mathrm{Pr}_{\vec{a}}\,\vec{b}+|\vec{a}|\,\mathrm{Pr}_{\vec{a}}\,\vec{c}=$
$=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.

4) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cos\angle(\vec{a},\vec{a})=|\vec{a}|^2\cos 0^0=|\vec{a}|^2\geq 0$

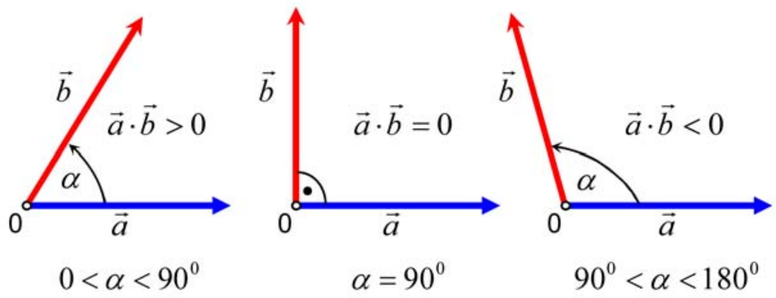
5) Iz osobine 4) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2=0\Leftrightarrow|\vec{a}|=0\Leftrightarrow\vec{a}=0$.

Iz definicije 22. skalarnog proizvoda izračunavanjem kosinusa ugla između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ sledi $\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}, |a| \neq 0, |\vec{b}| \neq 0$.

Ako je $\angle(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\dfrac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

Definicja 23.

Dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, različita od nula vektora, su uzajmno normalni akko je njihov skalarni proizvod jednak nuli. U zavisnosti koliki je ugao između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ imamo(slika 26.).



Slika 26: Skalarni proizvod u zavisnosti od ugla između vektora

Teorema 19.

Ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ zadani svojim koordinatama:
$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ i $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$, tada je
$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

Dokaz:

Množeći vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ po osobini 3) teorema 18. i koristeći da je $\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{j}\cdot\vec{k} = 0$, $\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$, dobija se
$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

Iz teoreme 19. možemo dati analitički izraz za određivanje ugla između dva vektora preko koordinata:

$$\cos\angle(a,b) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni i zadani svojim koordinatama $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, tada iz $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, $\lambda \neq 0$ sledi

$a_x = \lambda b_x, a_y = \lambda b_y, a_z = \lambda b_z$ to jest $\dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z} = \lambda$, vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su kolinearni ako su im odgovarjauće koordinate proporcionalne. Ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ normalni $\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Rightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$.

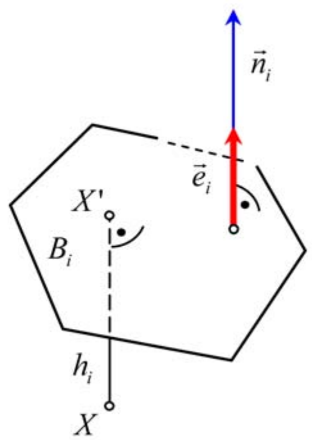
Sada ćemo dokazati jednu teoremu poznatu pod nazivom "teorema o ježu" u prostoru koja glasi:

Teorema 20.

Neka je P konveksan poliedar čije su strane $B_1, B_2, \ldots B_s$ i $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \ldots, \vec{n}_s$ vektori normale na strane $B_1, B_2, \ldots B_s$ i $\vec{n}_i$, za i=1,2…,s, orjentisani su prema spoljašnjosti poliedra, $|\vec{n}_i| = P(B_i)$ za i=1,2…,s, gde su $P(B_i)$ površine strana poliedra. Tada je $\sum_{i=1}^{s}\vec{n}_i = \vec{0}$.

Dokaz:

Uočimo jednu stranu B_i, i=1,...,s poliedra P(slika 27.)



Slika 27:Unutrašnja tačka X poliedra i njena projekcija(X')

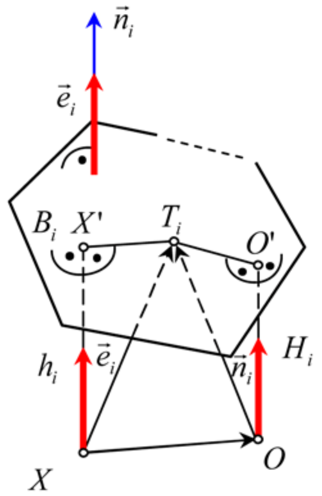
Neka je X prozvoljna unutrašnja tačka poliedra, a h_i najkraće odstojanje tačke X od strane B_i za i=1, 2, …. , s(X' ortogonalna prijekcija tačke X). Neka je V zapremina datog poliedra. Tada se taj poliedrar može razbiti na piramide sa temenom u X(sve piramide su u unutrašnjosti poliedra i imaju zajedničke bočne strane). Tada je

$$V = \sum_{i=1}^{s}\frac{1}{3}P(B_i)h_i \Rightarrow 3V = \sum_{i=1}^{s}P(B_i)h_i \qquad (1)$$

gde je $P_i = P(B_i)$.

Neka je $\vec{e}_i$ jedinični vektor vektora $\vec{n}_i$ za i=1,2,...,s i istog smera sa $\vec{n}_i \Rightarrow \vec{e}_i = \frac{\vec{n}_i}{|\vec{n}_i|} = \frac{\vec{n}_i}{P(B_i)} = \frac{\vec{n}_i}{P_i} \Rightarrow \vec{n}_i = P_i\vec{e}_i$ za i=1, 2, …. , s.

Uočimo fiksiranu tačku O poliedra takvu da je $O \neq X$ i neka je T_i prizvoljna tačka $T_i \in B_i$ za i=1, 2, …. , s(slika 28.).



Slika 28: Prizvoljna strana poliedra sa fiksiranom tačkom O

Sada potražimo

$$\overrightarrow{XT_i} \cdot \vec{e}_i = \left|\overrightarrow{XT_i}\right| \left|\vec{e}_i\right| \cos\angle(\overrightarrow{XT_i}, \vec{e}_i). \qquad (2)$$

Iz pravouglog $\Delta XX'T_i$

$$\cos\angle(\overrightarrow{XT_i}, \vec{e}_i) = \frac{\left|\overrightarrow{XX'}\right|}{\left|\overrightarrow{XT_i}\right|} = \frac{h_i}{\left|\overrightarrow{XT_i}\right|} \Rightarrow h_i = \left|\overrightarrow{XT_i}\right| \cos\angle(\overrightarrow{XT_i}, \vec{e}_i)$$, pa je,

obzirom na (2), $\overrightarrow{XT_i} \cdot \vec{e}_i = h_i$ za i=1, 2, …. , s. Sada h_i zamenimo u

(1)$\Rightarrow$ $3V = \sum_{i=1}^{s} P_i \overrightarrow{XT_i} \cdot \vec{e}_i$. (3)

Izrazimo vektor $\overrightarrow{XT_i}$ sa slike 28. $\overrightarrow{XT_i} = \overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OT_i}$ i zamenimo u (3).

$$3V = \sum_{i=1}^{s} P_i \vec{e}_i \cdot (\overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OT_i}) = \sum_{i=1}^{s} \vec{n}_i \cdot (\overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OT_i}) = \overrightarrow{XO} \sum_{i=1}^{s} \vec{n}_i + \sum_{i=1}^{s} \vec{n}_i \cdot \overrightarrow{OT_i} =$$

$$= \overrightarrow{XO} \sum_{i=1}^{s} \vec{n}_i + \sum_{i=1}^{s} \left|\vec{n}_i\right| \left|\overrightarrow{OT_i}\right| \cos\angle(\vec{n}_i, \overrightarrow{OT_i}).$$

Neka je H_i za i=1, 2, …. , s najkraće rastojanje tačke O do B_i za i=1, 2,…,s i neka je O' otrogonalna projekcija tačke O na stranu B_i. Iz pravouglog trougla

$$\Delta OO'T_i \Rightarrow \cos\angle(\vec{n}_i, \overrightarrow{OT_i}) = \frac{H_i}{\left|\overrightarrow{OT_i}\right|} \Rightarrow H_i = \left|\overrightarrow{OT_i}\right| \cos\angle(\vec{n}_i, \overrightarrow{OT_i}).$$

Zamenimo u (4)

$$3V = \overrightarrow{XO} \cdot \sum_{i=1}^{s} \vec{n}_i + 3\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{3} P_i H_i = \overrightarrow{XO} \cdot \sum_{i=1}^{s} \vec{n}_i + 3V \Rightarrow \overrightarrow{XO} \cdot \sum_{i=1}^{s} \vec{n}_i = \vec{O}$$, kako

je $X \neq O \Rightarrow \overrightarrow{XO} \neq \vec{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^{s} \vec{n}_i = \vec{0}$.

Tako je teorema 20. dokazana , koja će nam trebatri u sledećem poglavlju.

Vektorski proizvod vektora

Definicja 24.

Vektorski proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je vektor $\vec{c}$ tako de je:

1. Intenzitet vektora $\vec{c}$ je površina paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$

2. Pravac vektora $\vec{c}$ je normalan na ravan određenu pravicama vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$

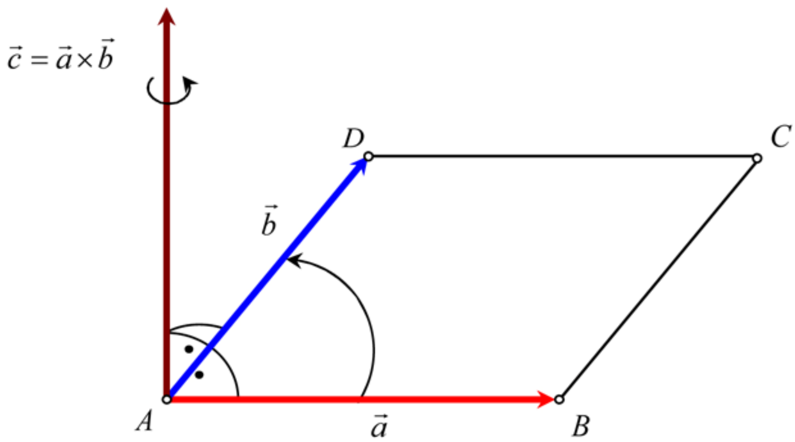
3. Smer vektora $\vec{c}$ je takav da vektori $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ obrazuju desni sisem(slika 29.).

Vektorski proizvod vektra $\vec{a}$ i $\vec{b}$ označavaćemo sa $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$.

Iz definicije 24. vektorskog proizvoda sledi:

1. $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\sin\angle(\vec{a},\vec{b})$

2. $\vec{c}\perp\vec{a}$ i $\vec{c}\perp\vec{b}$



Slika 29: Vektorski proizvod

Ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni

$\Rightarrow\vec{a}=\lambda\vec{b}\Rightarrow\sin\angle(\vec{a},\vec{b})=0\Rightarrow\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=0\Rightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$

Ako je jedan od vektora $\vec{a}$ ili $\vec{b}$ nula vektor onda na osnovu definicije 24. $\vec{a}\times\vec{b}=0$.

Teorema 21. Vektorski proizvod ima sledeće osobine:

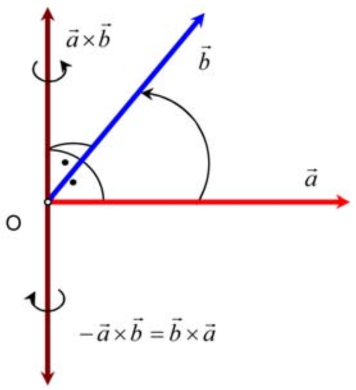
1) $\forall\vec{a},\vec{b}\in V:\ \vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ zakon alternacije

2) $\forall \vec{a},\vec{b} \in V$, $\forall \lambda \in R$: $\lambda(\vec{a}\times\vec{b}) = \lambda\vec{a}\times\vec{b} = \vec{a}\times\lambda\vec{b}$

3) $\forall \vec{a},\vec{b},\vec{c} \in V$: $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$.

<u>*Dokaz:*</u>

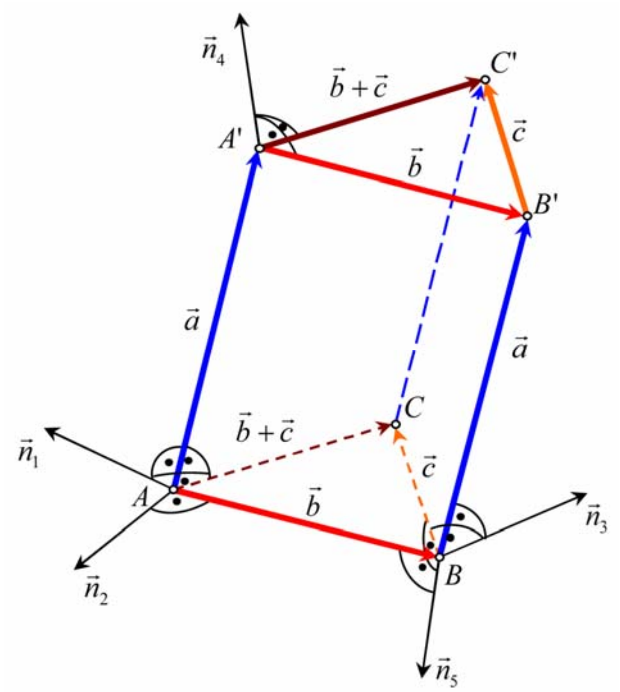
Na osnovu definicije vektorskog proizvoda, intenzitet i prvci vektora $\vec{a}\times\vec{b}$ i $\vec{b}\times\vec{a}$ su isti, a smerovi su im suprotni(slika 30.).



Slika 30: Zakon alternacije

1) Ta osobina neposredno sledi iz definicije vektorskog proizvoda i proizvoda vektora sklarom.

2) Distributivnost vektorskog proizvoda prema sabiranju, dokazaćemo koristeći „teoremu oježu“ na poliedru trostrane prizme. Neka je *ABCA'B'C'* trostrana prizma i $\vec{n}_1,\vec{n}_2,\vec{n}_3,\vec{n}_4,\vec{n}_5$ vektori normale redom na strane: ACC'A, ABB'A, BCC'B, A'B'C', ABC prizme, orjentisani ka spoljašnjosti. Neka je $\vec{a} = \overrightarrow{AA'}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{BC}$ (slika 31.)



Slika 31: Distributivnost vektroskog proizvoda

Tada je $\overrightarrow{AC} = \vec{b} + \vec{c}$. Radićemo sa desnim sistemom. Po definiciji vektorskog proizvoda imamo:

$$\vec{n}_1 = \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})$$

$$\vec{n}_2 = \vec{b} \times \vec{a} \tag{1}$$

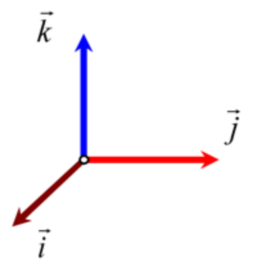
$$\vec{n}_3 = \vec{c} \times \vec{a}.$$

Vektori $\vec{n}_4$ i $\vec{n}_5$ su istog intenziteta i pravca ali suprotnog smera $\Rightarrow \vec{n}_4 + \vec{n}_5 = \vec{0}$.

Sada imamo ispunjene sve uslove za primenu tereme "o ježu".
$\Rightarrow \vec{n}_1 + \vec{n}_2 + \vec{n}_3 + \vec{n}_4 + \vec{n}_5 = \vec{0}$. (2)

Zamenimo uslove (1) u (2) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) + \vec{b} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{a} = \vec{0} \Rightarrow$ $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = -\vec{b} \times \vec{a} - \vec{c} \times \vec{a}$ koristeći zakon altenacije dobićemo (3) iz teoreme 21. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ Time je teorema 21. dokazna.

Da bismo odredili vektorski proizvod dva vektora u njihovim koordinatama, odredićemo prvo vektorske proizvode jediničnih vektora $\vec{i}, \vec{j}$ i $\vec{k}$ triedra($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) desne orjentacije(slika 32.).



Slika 32: Desni triedar jediničnih vektora

Njihovim množenjem ćemo dobiti Kejlijevu tablicu:

$\times$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	0	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	0	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	0

(3)

Teorema 22.

Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ zadani svojim komponentama $\vec{a} = (\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z)$ i $\vec{b} = (\vec{b}_x, \vec{b}_y, \vec{b}_z)$ tada je:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z\\ \vec{b}_x & \vec{b}_y & \vec{b}_z\end{vmatrix} \tag{4}$$

<u>Dokaz:</u> Formiramo vektorski proizvod i primenimo teremu 21. i Kejlijevu tablicu (3)

$$\vec{a}\times\vec{b}=(\vec{a}_x\vec{i}+\vec{a}_y\vec{j}+\vec{a}_z\vec{k})\times(\vec{b}_x\vec{i}+\vec{b}_y\vec{j}+\vec{b}_z\vec{k})=$$

$$=a_xb_x(\vec{i}\times\vec{i})+a_xb_y(\vec{i}\times\vec{j})+a_xb_z(\vec{i}\times\vec{k})+$$

$$+a_yb_x(\vec{j}\times\vec{i})+a_yb_y(\vec{j}\times\vec{j})+a_yb_z(\vec{j}\times\vec{k})+$$

$$+a_zb_x(\vec{k}\times\vec{i})+a_zb_y(\vec{k}\times\vec{j})+a_zb_z(\vec{k}\times\vec{k})=$$

$$=a_xb_y\vec{k}-a_xb_z\vec{j}-a_yb_x\vec{k}+a_yb_z\vec{i}+a_zb_x\vec{j}-$$

$$-a_zb_y\vec{i}=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}=$$

$$=\vec{i}\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}+\vec{j}\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}$$

i to je Laplasov razvoj derterminante po prvoj vrsti determinante.

Mešoviti proizvod vektora

<u>Definicja 25.</u>

Mašoviti proizvod tri vektora $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ naziva se skalarni proizvod vektora $\vec{a}\times\vec{b}$ i vektora $\vec{c}$ to jest $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$.

Teorema 23.

Mešoviti prozvod tri nekomplanarna vektora $\vec{a},\vec{b}$ i $\vec{c}$ je skalar, čija je apsolutna vrednost jedanka zapremini paralelopipeda konstruisanog nad tim vektoraima kao ivicama.

<u>Dokaz:</u>

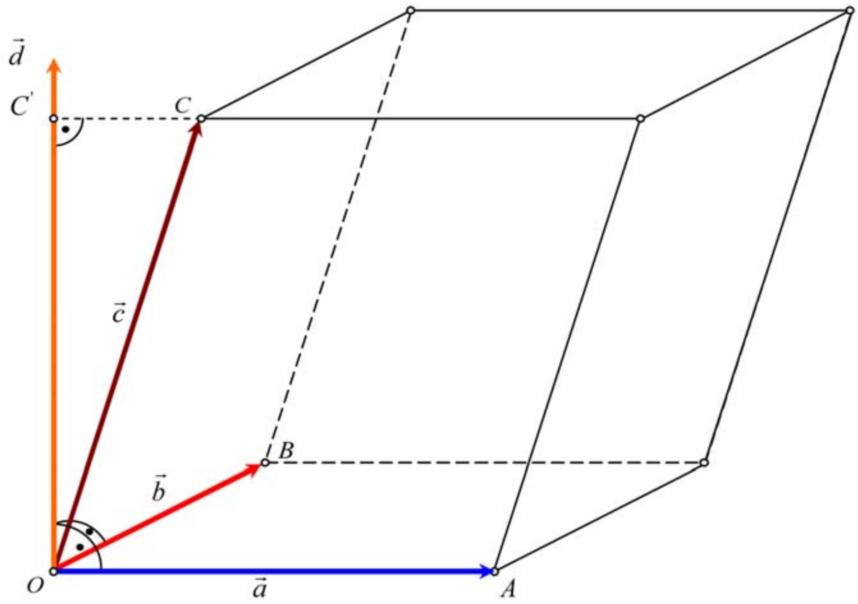
Pretpostavimo da su vektori $\vec{a},\vec{b}$ i $\vec{c}$ nekomplanarni i da obrazuju desni triedar. Konstrušimo paralelopiped zapremine V nad tim vektorima(slika 33.).

Ako stavimo $\vec{d}=\vec{a}\times\vec{b}$, onda je vektor $\vec{d}$ normalan na ravan određenu vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Tada je $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{d}\cdot\vec{c}=\left|\vec{d}\right|\mathrm{Pr}_{\vec{d}}\,\vec{c}$.

Intenzitet vektora $\left|\vec{d}\right|=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$ je površina paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ i koji predstavlja osnovu(bazu) paralelopipeda.

$\mathrm{Pr}_{\vec{d}}\,\vec{c}=\left|OC'\right|=H$ je visina paralelopipeda .

Dakle, $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\left|\vec{d}\right|H=V$ je zapremina paralelopipeda konstruisanog nad vektorima $\vec{a},\vec{b}$ i $\vec{c}$.



Slika 33: Mešoviti proizvod tri vektora

U slučaju da vektori $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ čine levi triedar, na sličan način se dokazuje da je $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -V$.

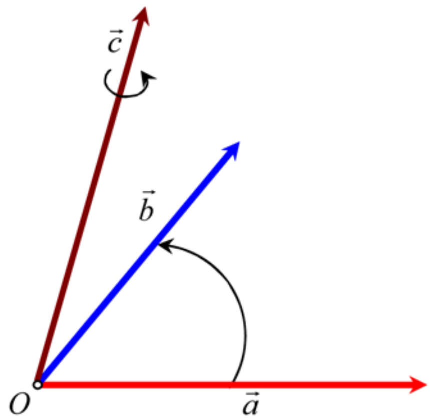
Zaključujemo da je $\left|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}\right| = V$.

Teorema 24.

Cikličkom permutacijom vektora činilaca vrednost mešovitog proizvoda se ne menja.

Dokaz:

Neka su data tri nekomplanarna vektora $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ i neka oni obrazuju desni triedar(slika 34.).



Slika 34: Desni triedar vektora

Tada je $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$ dakle bilo kakvom permutacijom vektora u $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ ne menja se zapremina paralelopipeda konstruisanog nad tim vektorima $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$.

Teorema 25.

Ako su vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \neq \vec{0}$ tada su oni komplanarni akko je $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$.

Dokaz:

($\rightarrow$) Neka su $\vec{a},\vec{b}$ i $\vec{c}$ komplanarni, onda je vektor $\vec{a}\times\vec{b}$ normalan na vektor $\vec{c} \Rightarrow (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$

($\leftarrow$) Neka je $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$ kako je $\vec{c}\neq\vec{0}$ onda je $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ ili je $\vec{a}\times\vec{b}$ normalan na $\vec{c}$.

Ako je $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ onda su vekotri $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni, pa su stoga vektori $\vec{a},\vec{b}$ i $\vec{c}$ komplanarni.

Neka je $\vec{a}\times\vec{b}$ normalno na $\vec{c}$. Vektor $\vec{a}\times\vec{b}$ je normalan na $\vec{a}$ i na $\vec{b}$, tada su vektori $\vec{a},\vec{b}$ i $\vec{c}$ kolinearni.

Teorema 26.

Neka su vektori $\vec{a},\vec{b}$ i $\vec{c}$ zadani svojim koordinatama $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$ i $\vec{c}=(c_x,c_y,c_z)$ tada je:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Dokaz:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \vec{b}_x & \vec{b}_y & \vec{b}_z \end{vmatrix}(c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k})=$$

$$=(\vec{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}+\vec{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix})\cdot(c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k})=$$

$$=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}c_x+\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}c_y+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}c_z=$$

To je razvoj determinante po Laplasovoj teoremi po trećoj vrsti.

$$=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Dvostruki vektorski proizvod

<u>Definicja 26.</u>

Dvostrukim vektorskim proizvodom vektora $\vec{a},\vec{b}$ i $\vec{c}$ naziva se vektorski proizvod vektora $\vec{a}$ i vektroskog proizvoda $\vec{b}$ i $\vec{c}$ to jest $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$.

Teorema 27.

Za svaka tri vektora $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ važi:

$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\vec{c})\cdot\vec{b} - (\vec{a}\vec{b})\cdot\vec{c}$.

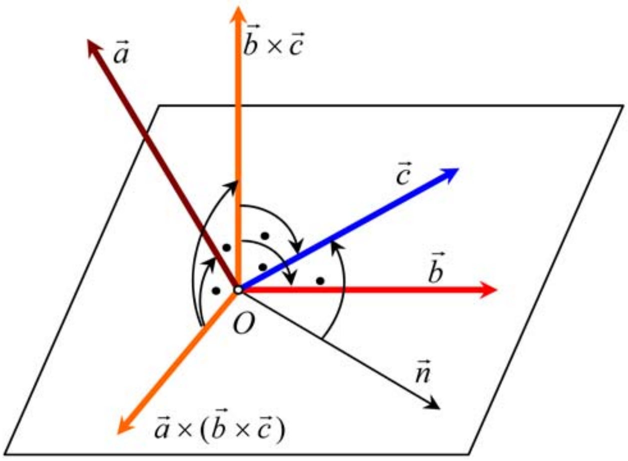
<u>Dokaz:</u>

Pretpostavimo da vektori $\vec{b}$ i $\vec{c}$ nisu kolinearni.

Rezultat dvostrukog vektorskog proizvoda je vektor normalan na ravan vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}\times\vec{c}$ definicija 24. slika 35.

Prema tome, vektori $\vec{b}$, $\vec{c}$ i $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ su kompalanarni, tada postoji skalar α i β tako da je:

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c} . \qquad (1)$$



Slika 35: Dvostruki vektorski proizvod

Odredimo skalare α i β.

Uočimo u ravni vektore $\vec{b}$ i $\vec{c}$ prizvoljni jedinični vektor $\vec{n}$ i koji je normalan na vektor $\vec{c}$ i sa vektorima $\vec{c}$ i $\vec{b}\times\vec{c}$ čini triedar desne orjentacije (slika 35.)

$$\vec{n}\perp\vec{c} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{c} = 0 . \qquad (2)$$

Pomnožimo skalarno jednakost (1) sa vektorom $\vec{n}$ i dobijamo:

$(\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}))\cdot\vec{n} = \alpha\cdot(\vec{b}\cdot\vec{n}) + \beta\cdot(\vec{c}\cdot\vec{n})$ zbog (2) $\Rightarrow$

$$(\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}))\cdot\vec{n} = \alpha\cdot(\vec{b}\cdot\vec{n}) . \qquad (3)$$

Na osnovu teoreme 24., (3) postaje

$$((\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{n})\cdot\vec{a} = \alpha\cdot(\vec{b}\cdot\vec{n}) . \qquad (4)$$

Vektor $(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{n}$ je normalan na vektor $\vec{n}$ i $\vec{b}\times\vec{c}$, te je vektor $(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{n}$ kolinearan sa vektorom $\vec{c}$ i smer mu je zbog orjijentacije odgovarajućeg triedra isti kao i smer vektora $\vec{c}$, pa prema tome iamaju isti jedinični vektor.

Na osnovu definicje vektorskog proizvoda je:

$$((\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{n})\cdot\vec{a} = \left|\vec{b}\times\vec{c}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|\sin\angle(\vec{b}\times\vec{c},\vec{n})\cdot\vec{c}_0\cdot\vec{a} , \qquad (5)$$

gde je $\vec{c}_0$ jedinični vektor vektora $\vec{c}$. Kako je $|\vec{n}|=1$ i

$\sin\angle(\vec{b}\times\vec{c},\vec{n})=\sin 90^\circ=1$ jednakost (5) postaje:

$$((\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{n})\cdot\vec{a}=\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|\cdot\vec{c}_0\cdot\vec{a}=\left|\vec{b}\right|\cdot|\vec{c}|\sin\angle(\vec{b},\vec{c})\cdot\vec{c}_0\cdot\vec{a}\,. \tag{6}$$

Sa slike 35. imamo:

$\angle(\vec{b},\vec{c})=90^0-\angle(\vec{b},\vec{n})$, tada je

$\sin\angle(\vec{b},\vec{c})=\cos\angle(\vec{b},\vec{n})$ i kako je $\vec{c}_0=\dfrac{\vec{c}}{|\vec{c}|}$ iz jednakosti (6) dobijamo:

$$((\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{n})\cdot\vec{a}=\left|\vec{b}\right|\cdot|\vec{c}|\cos\angle(\vec{b},\vec{n})\cdot\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}\cdot\vec{a}=$$

$$=\left|\vec{b}\right|\cos\angle(\vec{b},\vec{n})\vec{c}\cdot\vec{a}=(\vec{b}\cdot\vec{n})\cdot(\vec{c}\cdot\vec{a}).$$

Koristeći jednakost (4) imamo da je :

$$\alpha\cdot(\vec{b}\cdot\vec{n})=(\vec{b}\cdot\vec{n})\cdot\vec{c}\cdot\vec{a}\,. \tag{7}$$

Zbog pretpostavke da $\vec{b}$ i $\vec{c}$ nisu kolinerani sledi da je:

$$\alpha=\vec{c}\cdot\vec{a} \tag{8}$$

Na osnovu jednakosti (1) i koristeći (8) imamo da je:

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{c}\cdot\vec{a})\cdot\vec{b}+\beta\vec{c}\,. \tag{9}$$

Pomnožimo jednakost (9) skalarno sa vektorom $\vec{a}$ tada je:

$$\left(\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\right)\cdot\vec{a}=(\vec{c}\cdot\vec{a})\cdot(\vec{b}\cdot\vec{a})+\beta(\vec{c}\cdot\vec{a})\,. \tag{10}$$

Leva strana jednakosti (10) je jednaka nuli, onda je:

$$(\vec{c}\cdot\vec{a})\cdot(\vec{b}\cdot\vec{a})+\beta(\vec{c}\cdot\vec{a})=0\,.$$

Ako je :

$$\vec{c}\cdot\vec{a}\neq 0\Rightarrow\beta=-\vec{a}\cdot\vec{b}\,. \tag{11}$$

Sada uvrstimo α i β u (1) i dobićemo:

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\vec{c})\cdot\vec{b}-(\vec{a}\vec{b})\cdot\vec{c}\,. \tag{9}$$

Što je i trebalo dokazati po teoremi.

Ako je $\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ onda iz jednakosti (9) sledi:

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\beta\vec{c}\,. \tag{12}$$

Pomnožimo jednakost (12) skalarno sa vektorom $\vec{c}$ dobija se:

$\left(\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\right)\cdot\vec{c}=\beta|\vec{c}|^2$ ili

$\left((\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a}=\beta|\vec{c}|^2$ odnosno,

$$-\left(\vec{c}\times(\vec{b}\times\vec{c})\right)\cdot\vec{a}=\beta|\vec{c}|^2\,. \tag{13}$$

Na vektor $\vec{c}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ primenimo jednakost (9) dobijamo:

$$\vec{c}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{c}\cdot\vec{c})\cdot\vec{b}-(\vec{c}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}=|\vec{c}|^2\vec{b}-(\vec{c}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}\,. \tag{14}$$

Zamenimo (14) u (13) i dobijemo:

$\left(-|\vec{c}|^2\vec{b}+(\vec{c}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}\right)\cdot\vec{a}=\beta|\vec{c}|^2$, to jest,

$$-|\vec{c}|^2\vec{b}\cdot\vec{a}+(\vec{c}\cdot\vec{b})\cdot(\vec{c}\cdot\vec{a})=\beta|\vec{c}|^2\,. \tag{15}$$

Kako je $\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ od (15) dobijamo

$-|\vec{c}|^2\vec{b}\cdot\vec{a}=\beta|\vec{c}|^2,\ \vec{c}\neq\vec{0}\ \Rightarrow$

$\beta = -(\vec{b} \cdot \vec{a})$, pa opet važi jednakost (9).

Neka su sada vektori $\vec{b}$ i $\vec{c}$ kolinearni. Ako je bar jedan od vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$ nula vektor, tada je jednakost (9) zadovoljena.

Neka su dakle, $\vec{b}, \vec{c} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{b} = \lambda \vec{c}$. Tada je

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \times (\lambda \vec{c} \times \vec{c}) = \vec{0}$.

S druge strane

$(\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \lambda \vec{c} - (\vec{a} \cdot \lambda \vec{c}) \cdot \vec{c} =$

$= \lambda((\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{c} - (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{c}) = 0,$

pa je jednakost (9) opet zadovoljena.

Dakle, teorema važi za tri prizvoljna vektora $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$.

Teorema 28.

Jakobijev indentitet.

Za svaka tri vektora $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ važi

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$.

Dokaz:

Na osnovu teoreme 27. imamo:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} \tag{1}$$

$$\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) = (\vec{b} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{c} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{a} \tag{2}$$

$$\vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{c} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{a} - (\vec{c} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} \tag{3}$$

Sabiranjem (1), (2) i (3) Sledi Jakobijev indentitet.

Glava II

Analitička geometrija u prostoru

U ovom poglavlju posmatraćemo tačke, prave i ravani. Određivaćemo njihov položaj u odnosu na desni orijentisani pravougli Dekartov koordinatni sistem, određen uređenom trojkom ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) gde su $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ međusobno normalni jedinični vektori.

Vektor položaja tačke

Položaj tačke A u prostoru , u odnosu na Dekartov pravougli koordinatni sistem sa centrom u O je određen vektorom položaja $\overrightarrow{OA}$, koga zovemo vektor položaja tačke *A*.

Neka je $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$ vektor položaja tačke *A*. Kako je $\vec{r}$ određen svojim koordinatama koje su po teoremi 15. algebarske vrednosti projekcija vektora $\vec{r}$ na koordinatne vektore, to će onda i tačka A, kao završna tačka vektora $\overrightarrow{OA}$, biti određen istim koordinatama. Ako je $\vec{r} = \overrightarrow{OA} = (x, y, z)$, tada su to i koordinate tačke *A* i pišemo *A*(*x,y,z*).

Rastojanje dve tačke

Rastojanje tačaka *A* i *B* jednako je intenzitetu vektora $\overrightarrow{AB}$, teorema 16. Zbog toga važi teorema:

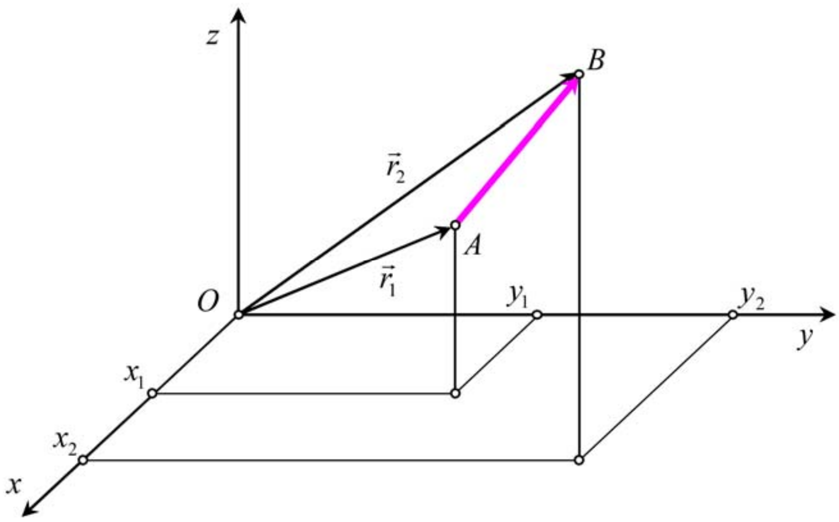
Teorema 29.

Rastojanje d tačaka $A(x_1, y_1, z_1)$ i $B(x_2, y_2, z_2)$ dato je formulom

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ .$$

Dokaz:

Tačke *A* i *B* u prostoru određene su vektorima položaja $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$ (slika 36.).



Slika 36: Rastojanje dve tačke

Tada je $\overrightarrow{AB} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Onda je $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right| = d$. Kako su tačke *A* i *B* date svojim koordinatama, tada je

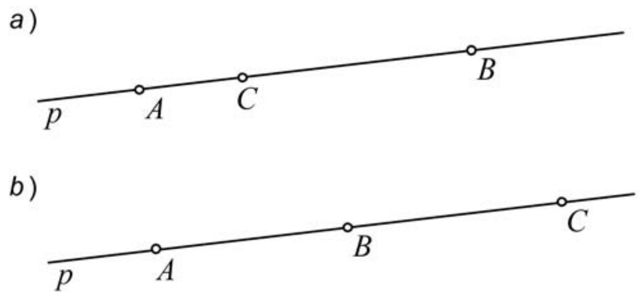
$\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ i $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2) \Rightarrow$

$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \Rightarrow$

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ po teoremi 16. □

Podela duži u datoj razmeri

Neka je data prava *p* i na njoj tačke *A* i *B*. Prizvoljna tačka *C* različita od *A* i *B* prave *p* deli duž *AB* po unutrašnjoj ili spoljašnjoj podeli(slika 37.)



Slika 37: Podela duži

Pod a) je raspored (*A-C-B*), a pod *b*) je raspored (*A-B-C*). U oba slučaja vektori $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{CB}$ su kolinearni to jest, $\exists\lambda \neq 0$ tako da je $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$.

Ako je $\lambda > 0$, onda je (*A-C-B*) i tačka *C* deli duž *AB* unutrašnjom podelom u razmeri $\left|\overrightarrow{AC}\right| : \left|\overrightarrow{CB}\right| = \lambda$.

Ako je $\lambda < 0$ onda je (*A-B-C*) i tačka *C* deli duž *AB* spoljašnjom podelom u razmeri $\left|\overrightarrow{AC}\right| : \left|\overrightarrow{CB}\right| = \lambda$.

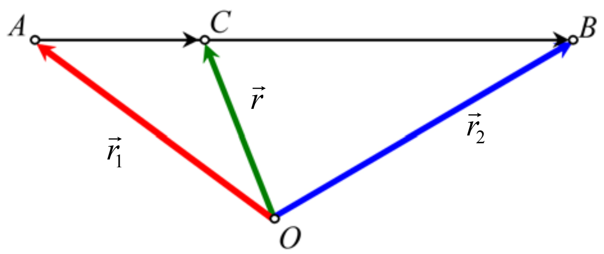
Teorema 30.

Neka su tačke *A*, *B* date svojim koordinatama $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ i odnos $\lambda \neq 0$ u kojem treba podeliti duž *AB* pomoću tačke *C*. Tada tačka *C* ima koordinate

$C(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda})$.

Dokaz:

Neka su $\vec{r}_1, \vec{r}, \vec{r}_2$ vektori položaja tačaka *A, C, B*(slika 38.)



Slika 38: Podela duži u datoj razmeri

Tada je vektor $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$. (1)

Izrazimo vektore $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{CB}$ preko vektora položaja $\vec{r}_1, \vec{r}$ i $\vec{r}_2$.

$\overrightarrow{AC} = \vec{r} - \vec{r}_1$ i $\overrightarrow{CB} = \vec{r}_2 - \vec{r}$ zamenimo u (1)

$$\Rightarrow \vec{r} - \vec{r}_1 = \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r}) \Rightarrow$$

$$\vec{r} - \vec{r}_1 = \lambda\vec{r}_2 - \lambda\vec{r} \Rightarrow$$

$$(1+\lambda)\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda\vec{r}_2 \Rightarrow$$

$$\vec{r} = \frac{1}{1+\lambda}\vec{r}_1 + \frac{\lambda}{1+\lambda}\vec{r}_2$$

$$\vec{r} = \frac{1}{1+\lambda}(x_1, y_1, z_1) + \frac{\lambda}{1+\lambda}(x_2, y_2, z_2) =$$

$$= \left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}\right)$$, a to su koordinate tačke *C*.□

<u>Posledica teoreme 30.</u> Ako je tačka *C* sredina duži *AB*, tada je $\lambda = 1$ i tačka *C* ima koordinate:

$$C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$

Ravan

Razni oblici jednačine ravni

Položaj ravni u prostoru može se odrediti na razne načine. Poznato je iz Euklidske geometrije da je ravan jednoznačno određena sa tri nekolinearne tačke , sa dve prave koje se seku, sa pravom i tačkom van te prave, itd.

Isto tako, položaj ravni u prostoru, možemo oderditi pomoću jedne njene tačke *M* i jednog ne nula vektora $\vec{n}$, koji je normalan na tu ravan, zatim pomoću rastojanja $p > 0$ ravni od koordinatnog početka i jediničnog vektora $\vec{n}_0$, normalnog na tu ravan i usmerenog od koordinatnog početka ka ravni.

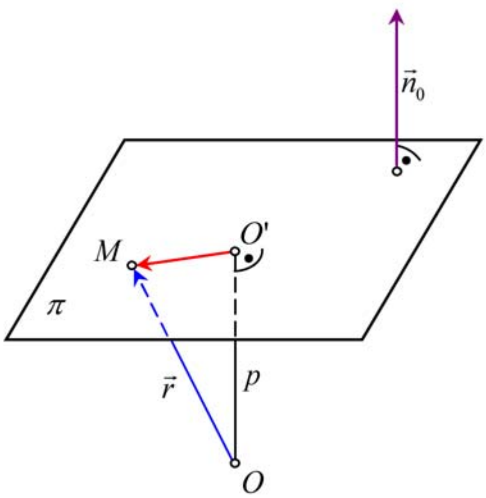
Normalna vektroska jednačina ravni

Teorema 31.

Vektor položaja $\vec{r}$ prizvoljne tačke *M* ravni π, koja je na rasojanju $p > 0$ od koordinatnog početka O i normalna je na vektor $\vec{n}_0$, zadovoljava jednačinu $\vec{r} \cdot \vec{n}_0 - p = 0$.

<u>*Dokaz:*</u>

Neka je *M* prizvoljna tačka ravni π i $\vec{r}$ vektor položaja tačke *M* (slika 39.).



Slika 39: Normalna vektorska jednačina ravni

Vektor $\vec{n}_0$ je normalan na ravan π i usmeren od koordinatnog početka *O* ka toj ravni. Neka je *O'* ortogonalna prjekcija tačke *O* na ravan π(slika 39.), tada je $|OO'| = p$.

Vektor $\vec{n}_0 \perp \pi \Rightarrow \vec{n}_0 \perp \overrightarrow{O'M}$ pa je to po definiciji 23.

$\vec{n}_0 \cdot \overrightarrow{O'M} = 0$. (1)

Iz $\Delta OO'M$ nalazimo $\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'} = \vec{r} - p\vec{n}_0$, jer su vektori $\overrightarrow{OO'}$ i $\vec{n}_0$ kolinearni i istog smera. Sad iz (1) dobijamo $\vec{n}_0 \cdot (\vec{r} - p\vec{n}_0) = 0$, koristeći osobinu skalarnog proizvoda i činjenicu da je $\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_0 = 1 \Rightarrow \vec{r}\vec{n}_0 - p = 0$. (2)

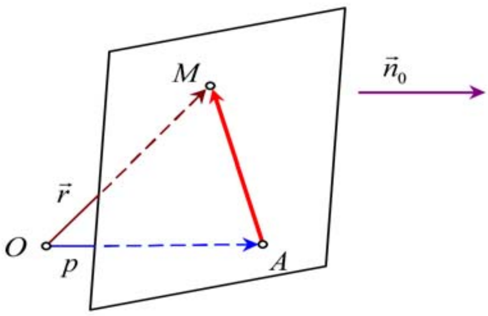
Jednačina (2) se naziva normalna vektorska jednačina ravni.
Ako je *p=0,* onda ravan (2) prolazi kroz koordinatni početak.□

Teorema 32.

Svaka jednačina oblika $\vec{r}\vec{n}_0 - p = 0$ gde su $\vec{n}_0$ jedinični vektor i skalar *p>0* fiksirani, predstavljaju jednačinu ravni.

Dokaz:

Uočimo u koordinatnom sistemu sa centrom u *O* prizvoljnu tačku *A,* tako da je vektor $\overrightarrow{OA} = p\vec{n}_0$. Neka je $\vec{r}$ vektor položaja prizvoljne tačke M, koji zadovoljavaju jednačinu $\vec{r}\vec{n}_0 - p = 0$ (slika 40.)



Slika 40: Normalna vektorska jednačina ravni

Tada je $\overrightarrow{AM} = \vec{r} - \overrightarrow{OA} = \vec{r} - p\vec{n}_0$.

Pomnožimo skalarno vektore $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{AM}$

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AM} = p\vec{n}_0 \cdot (\vec{r} - p\vec{n}_0) = p\vec{n}_0 \cdot \vec{r} - p^2 = p(\vec{r} \cdot \vec{n}_0 - p) = 0$ s obzirom da je $\vec{r}\vec{n}_0 - p = 0 \Rightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ (1)

Sledi da su vektori $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{AM}$ uzajamno normalni.

Vektor $\overrightarrow{OA}$ je određen jednoznačno , jer su $\vec{n}_0$ i $p>0$ fiksirani, tada jedanačina (1) važi za sve tačke M, čiji vektor $\vec{r}(M)$ zadovoljava jednačinu $\vec{r}\vec{n}_0 - p = 0$. Zaključujemo da sve tačke M pripadaju jednoj ravni , koja prolzai kroz tačku A i koja je normalna na vektor $\overrightarrow{OA} = p\vec{n}_0$. Ako je $p=0 \Rightarrow \vec{r} \cdot \vec{n}_0 = 0$, pa sve tačke M pripadaju ravni koja prolazi kroz koordinatni početak i koja je normalna na vektor $\vec{n}_0$.□

Teorema 33.

Svaka jednačina oblika $\vec{r}\vec{n} + D = 0$ gde je $\vec{n}$ prizvoljan vektor, različit od nula vektora, a D prizvoljan skalar, predstavlja jednačinu ravni.

<u>*Dokaz:*</u>

Kako je $\vec{n} \neq \vec{0} \Rightarrow |\vec{n}| \neq 0$ pa jednačinu $\vec{r}\vec{n} + D = 0$ podelimo sa $\pm|\vec{n}|$

$$\Rightarrow \vec{r}\frac{\vec{n}}{\pm|\vec{n}|} + \frac{D}{\pm|\vec{n}|} = 0. \qquad (1)$$

Izaberemo znak ispred $\pm|\vec{n}|$ suprotan znaku ispred D. Tada jednačina (1) ima oblik $\vec{r}\vec{n}_0 - p = 0$, po teoremi 32., pri čemu je:

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{\pm|\vec{n}|} \text{ i } -p = \frac{D}{\pm|\vec{n}|},$$

gde je $\vec{n}_0$ jedinični vektor normalan na ravan, usmeren od koordinatnog početka ka ravni, a p je odstojanje ravni od koordinatnog početka.

Jednačina $\vec{r}\vec{n} + D = 0$ zove se opšta vektorska jednačina ravni.

Skalarni oblik jednačine ravni

Po teoremi 16. pravac vektora $\vec{n}_0$ obrazuje se koordinatnim osama *x,y,z* kosinuse uglova α, β, γ, to jest, $\vec{n}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ i neka vektor položaja $\vec{r}$ ima koordinate $\vec{r} = (x, y, z)$.

Teorema 34.

Jednačina ravni normalna na jedinični vektor $\vec{n}_0$ i na odstojanju $p > 0$ od koordinatnog početka je

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.$$

<u>*Dokaz:*</u>

Iz teoreme 32., svaka jednačina oblika, $\vec{r}\vec{n}_0 - p = 0$ predstavlja jednačinu ravni.

$\vec{r} \cdot \vec{n}_0 = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma \Rightarrow$

$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$. □ (1)

Jednačina (1) se naziva Hesseov ili normalni(skalrani) oblik jednačine ravni.

U teoremi 33. je dokazano da svaka jednačina oblika $\vec{r}\vec{n} + D = 0$ predstavlja ravan. Sada možemo dokazati obratno.

Teorema 35.

Svaka ravan se može predstaviti jednačinom $\vec{r}\vec{n} + D = 0$.

<u>*Dokaz:*</u>

Kako je ravan normalna na jedinični vektor $\vec{n}_0$ i na rastojanju je $p \neq 0$ od koordinatnog početka, onda prema teoremi 31. ta ravan je data jednačinom

$\vec{r} \cdot \vec{n}_0 - p = 0$. (1)

Pomnožimo jednačinu (1) sa $|\vec{n}|$ dobićemo $\vec{r}|\vec{n}| \cdot \vec{n}_0 - |\vec{n}|p = 0 \Rightarrow$ $\vec{r} \cdot \vec{n} - |\vec{n}|p = 0$, gde je $\vec{n} = |\vec{n}| \cdot \vec{n}_0$, označićemo sa $D = -|\vec{n}|p$ i dobićemo $\vec{r}\vec{n} + D = 0$. (2)

Ako sa *A,B,C* obeležimo koordinate vektora $\vec{n} = (A, B, C)$ i sa $\vec{r} = (x, y, z)$ tada iz (2) dobijamo

$Ax + By + Cz + D = 0$; $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. (2)

Jednačina predstavlja opšti skalarni oblik jednačine ravni. Važi i obratno.

Ako sve tačke *x,y,z* zadovoljavaju jednačinu (3), tada je ravan (3) normalna na vektor $\vec{n} = (A, B, C)$.

Zaista, neka je $\vec{r}$ prizvoljan vektor sa koordinatama *x,y,z* , to jest, $\vec{r} = (\mathrm{x}, y, z)$.

Onda jednačinu (3) možemo zapisati $\vec{r}\vec{n} + D = 0$ što na osnovu teoreme 33. predstavlja jednačinu ravni. □

Segmentni oblik jednačine ravni

Teorema 36.

Ako je $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, tada $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ predstavlja segmentni oblik jednačine ravni, gde je $a = -\frac{D}{A}$, $b = -\frac{D}{B}$, $c = -\frac{D}{C}$.

Dokaz:

Neka tačka *M(a,0,0)* gde je $a \neq 0$ pripada ravni

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (1)$$

Tada je $Aa + D = 0 \Rightarrow a = -\frac{D}{A}$.

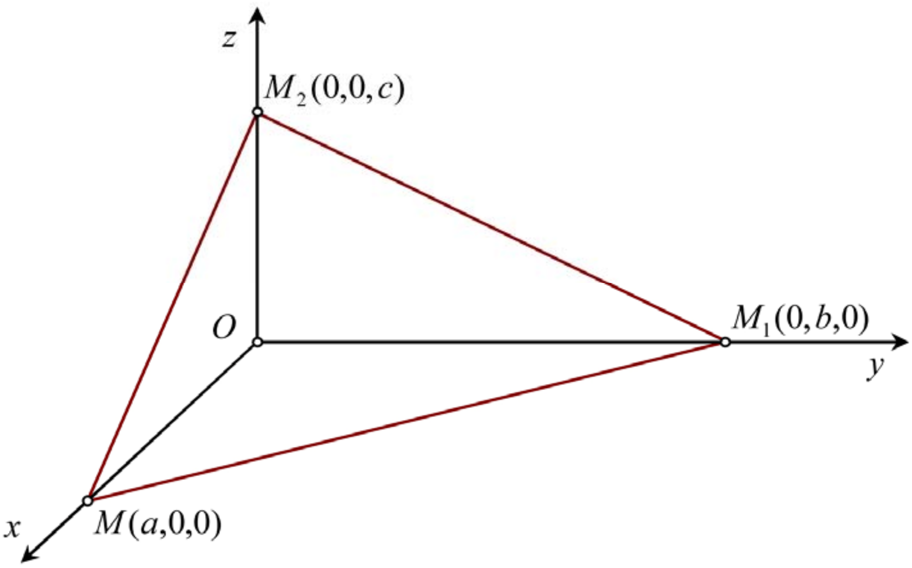
Neka tačka $M_1(0,b,0)$ pripada rvni (1)$\Rightarrow Bb + D = 0 \Rightarrow b = -\frac{D}{B}$.

Slično za $M_2(0,0,c) \Rightarrow Cc + D = 0 \Rightarrow c = -\frac{D}{C}$.

Podelimo jednačinu (1) sa *–D*, $D \neq 0$ tada

$$\frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{x}{\frac{-D}{A}} + \frac{y}{\frac{-D}{B}} + \frac{z}{\frac{-D}{C}} = 1 \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$. (slika 41.).



Slika 41: Segmenti oblik jednačine ravni

Jednačina ravni koja prolazi kroz datu tačku i normalna je na dati vektor

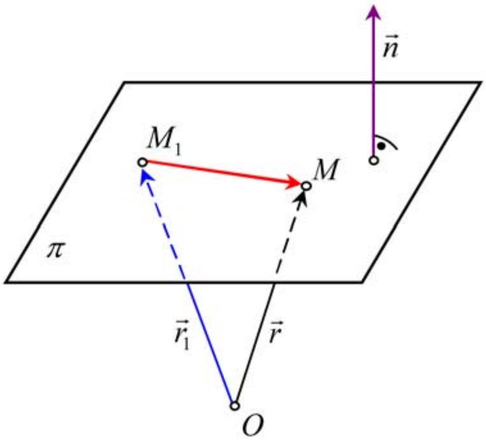
Neka je data tačka $M_1(x_1, y_1, z_1)$ i vektor $\vec{n} = (A, B, C)$.

Teorema 37.

Ravan π koja prolazi kroz datu tačku M_1 i normalna je na dati vektor $\vec{n}$, ima jednačinu, $(\vec{r} - \vec{r}_1)\vec{n} = 0$, gde je $\vec{r}_1$ vektor položaja tačke M_1, a $\vec{r}$ vektor položaja prizvoljne tačke $M \in \pi$.

Dokaz:

M je prizvoljna tačka ravni π koja prolazi kroz M_1 i normalna je na vektor $\vec{n}$ (slika 42.)



Slika 42. Jednačina ravni koja prolazi kroz datu tačku M_1

Vektor $\overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM}_1 = \vec{r} - \vec{r}_1$. Po uslovu teoreme 37. vektor $\vec{n}$ je normalan na ravan π. Onda je $\overrightarrow{M_1M} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow$

$$(\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot \vec{n} = 0. \tag{1}$$

Važi i obratno, to jest da jednačinu (1) zadovoljavaju samo one tačke koje leže u ravni koja prolazi kroz tačku M_1 i normalna je na dati vektor $\vec{n}$.

Iz jednačine (1) dobijemo da je $\vec{r} - \vec{r}_1$ normalan na $\vec{n}$, a skup svih takvih vektora obrazuje ravan π.

Izrazimo jednačinu (1) preko koordinanta. Neka prizvoljni vektor $\vec{r}$, položaja tačke *M,* ima koordinate $\vec{r} = (x, y, z)$, tada je

$$\vec{r} - \vec{r}_1 = (x, y, z) - (x_1, y_1, z_1). \tag{2}$$

Kada (2) zamenimo u (1) dobićemo:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 \tag{3}$$

Jednačina (3), predstavlja skalarni oblik jednačine ravni, koja prolazi kroz datu tačku $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ i normalna je na dati vektor $\vec{n} = (A, B, C)$.

Primer: Date su tačke *A(1,-1,2)* i *B(0,1,1)*. Kroz tačku B postaviti ravan normalnu na vektor $\overrightarrow{AB}$.

Po teoremi 37. imamo:

$\vec{n} = \overrightarrow{AB} = (-1, 2, -1)$

$M_1 = B(0,1,1)$.

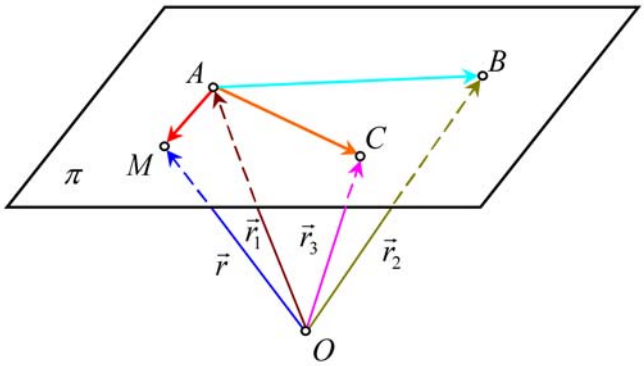
Tada je : $-1(x-0)+2(y-1)-1(z-1)=0$.

Odnosno $-x+2y-z-1=0$ je tražena ravan.

Jednačina ravni kroz tri date tačke

Neka su A,B,C u prostoru tri različite nekolinerane tačke, tada postoji jedinstvena ravan π određena sa te tri tačke.

Neka su $\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3$ vektori položaja tačaka redom A,B,C(slika 43.)



Slika 43: Ravan kroz tri tačke

Uočimo prizvoljnu tačku $M \in \pi$ i vektor položaja $\vec{r}$ (slika 43.). Tada prema definiciji 25. i teoremi 25. mešoviti proizvod vektora $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ jednak je nuli, to jest

$$(\overrightarrow{AM}\times\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AC}=0. \tag{1}$$

Izračunajmo vektore $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ preko vektora položaja $\vec{r},\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}&=\vec{r}-\vec{r}_1\\ \overrightarrow{AB}&=\vec{r}_2-\vec{r}_1\\ \overrightarrow{AC}&=\vec{r}_3-\vec{r}_1.\end{aligned} \tag{2}$$

Jednakosti (2) zamenimo u (1) i dobićemo

$$((\vec{r}-\vec{r}_1)\times(\vec{r}_2-\vec{r}_1))\cdot(\vec{r}_3-\vec{r}_1)=0. \tag{3}$$

Jednačina (3) predstavlja jednačinu ravni kroz tri tačke u vektorskom obliku.

Nađimo (3) u koordinatnom obliku. Neka je $\vec{r}_1=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{r}_2=(x_2,y_2,z_2)$, $\vec{r}_3=(x_3,y_3,z_3)$ i $\vec{r}=(x,y,z)$.

Tada prema (2)

$$\overrightarrow{AM}=(x-x_1,y-y_1,z-z_1)$$
$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$
$$\overrightarrow{AC}=(x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1)$$

Vektore $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ zamenimo u (3) pa je prema teoremi 25.

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0. \tag{4}$$

Jednačina (4) predstavlja jednačinu ravni, kroz tri tačke.

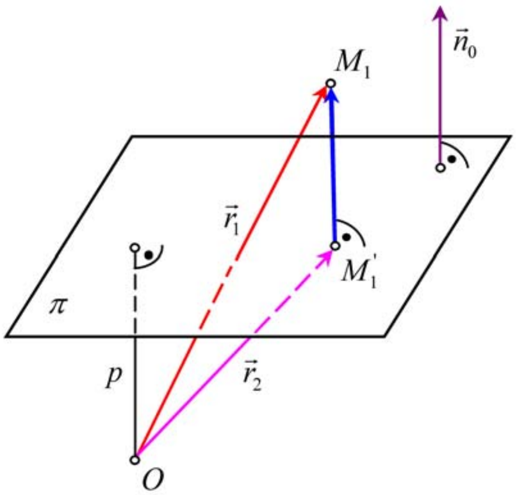
Rastojanje tačke od ravni

Neka je u koordinatnom sistemu data ravan π svojom jednačinom

$$\vec{r}\vec{n}_0 - p = 0 \qquad (1)$$

i tačka $M_1(x_1,y_1,y_1)$ određena vektorom položaja $\vec{r}_1$.

Odredićemo najkraće rastojanje, označićemo to sa d, tačke M_1 od ravni π(slika 44.)



Slika 44: Rastojanje tačke od ravni

Neka je M_1' ortogonalana projekcija tačke M_1 na ravan π. Tada je $d = |M_1'M_1|$. Vektori $\overrightarrow{M_1'M_1}$ i $\vec{n}_0$ su kolinearni $\Rightarrow \overrightarrow{M_1'M_1} = d\vec{n}_0$.

Očigledno je $d>0$ ako su tačke M_1 i O sa različitih strana ravni π, a $d<0$, ako su tačke M_1 i O sa iste strane ravni π.

Neka je $\vec{r}_2$ vektor položaja tačke M_1', tada je:

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \overrightarrow{M_1M_1'} = \vec{r}_1 - \overrightarrow{M_1'M_1} = \vec{r}_1 - d\vec{n}_0 . \qquad (2)$$

Tačka $M_1' \in \pi$ pa vektor položaja $\vec{r}_2$ tačke M_1' zadovoljava jednačinu ravni (1), odnosno

$$\vec{r}_2\vec{n}_0 - p = 0 . \qquad (3)$$

Sada (2) zamenimo u (3) i dobijamo

$$(\vec{r}_1 - d\vec{n}_0)\vec{n}_0 - p = 0 \Rightarrow$$

$$\vec{r}_1\vec{n}_0 - d - p = 0 \Rightarrow$$

$$d = \vec{r}_1\vec{n}_0 - p . \qquad (4)$$

Kako je rastojanje d nenegativan to broj (4) treba uzeti po apsolutnoj vrednosti dakle,

$$d = |\vec{r}_1\vec{n}_0 - p| . \qquad (5)$$

Jednačinom (5) je dato rastojanje tačke M_1 do ravni π.

Ako je ravan π data u skalarnom obliku $Ax + By + Cz + D = 0$, tada po teoremi 32. vektor $\vec{n}_0$ i skalar p imaju vrednosti

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{\pm|\vec{n}|} \quad \text{i} \quad -p = \frac{D}{\pm|\vec{n}|}, \qquad (6)$$

gde je vektor $\vec{n}$ normalan na ravan π i ima koordinate $\vec{n} = (A, B, C)$.

Tada je

$$\vec{n}_o = \left(\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right). \qquad (7)$$

Sada (6) i (7) zamenimo u (5) i dobijamo

$$d = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right| \Rightarrow$$

$$d = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|$$ što predstavlja rastojanje u koordinatama.

Međusobni položaj dve ravni i ugao između dve ravni

Dve ravni α i β u prostoru mogu biti paralelne ili se seku.

Neka su ravni α i β date svojim vektorskim jedančinama, teorema 35.,

$$\alpha \quad \vec{r}\vec{n}_1 + D_1 = 0$$

$$\beta \quad \vec{r}\vec{n}_2 + D_2 = 0. \qquad (1)$$

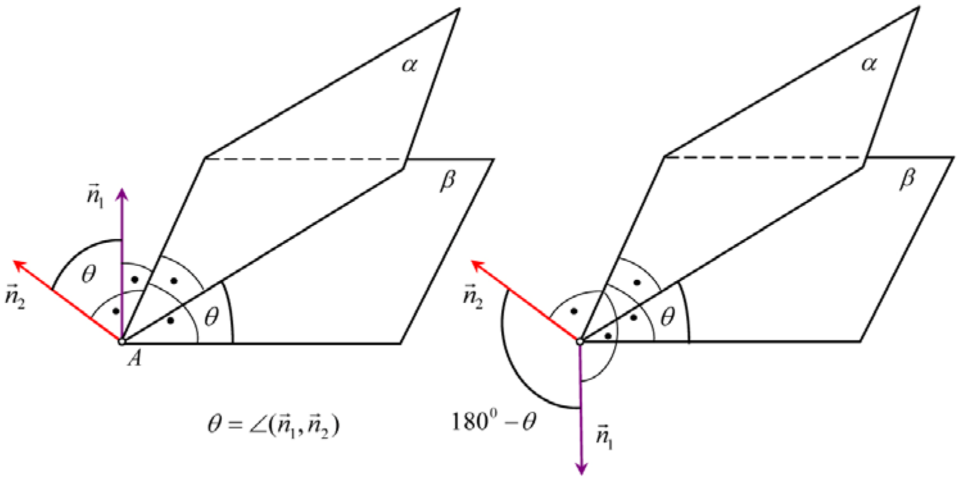
Tada je vektor $\vec{n}_1$ normalan na ravan α, a vektor $\vec{n}_2$ normalan na ravan β.

Ugao između vektora $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$ određuje se prema definiciji skalarnog proizvoda po formuli $\cos\angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \dfrac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$.

Ugao između vektora $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$ jednak je uglu između ravni α i β ili ga dopunjava do 360^0.

Kako skalarni, proizvod dva vektora može biti pozitivan ili negativan, ograničićemo se da uvek određujemo onaj ugao između ravni koji nije tup, zbog toga ćemo skalarni proizvod vektora $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$ uzimati po apsolutnoj vrednosti(slika 45.)

$$\cos\angle(\vec{n}_1,\vec{n}_2)=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|} \qquad (2)$$



Slika 45: Ugao između dve rvni

Neka su ravni α i β date skalarno:

$\alpha \;\; Ax_1+By_1+Cz_1+D_1=0$

$\beta \;\; Ax_2+By_2+Cz_2+D_2=0$.

Pri čemu su $\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$, $\vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$ vektori normalani na ravan α i β .

Tada iz (2) dobijamo ugao između dve ravni

$$\cos\angle(\vec{n}_1,\vec{n}_2)=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Neka su $\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ i $\vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$ vektori normala jednačina ravni α i β. Tada važi:

Teorema 38.

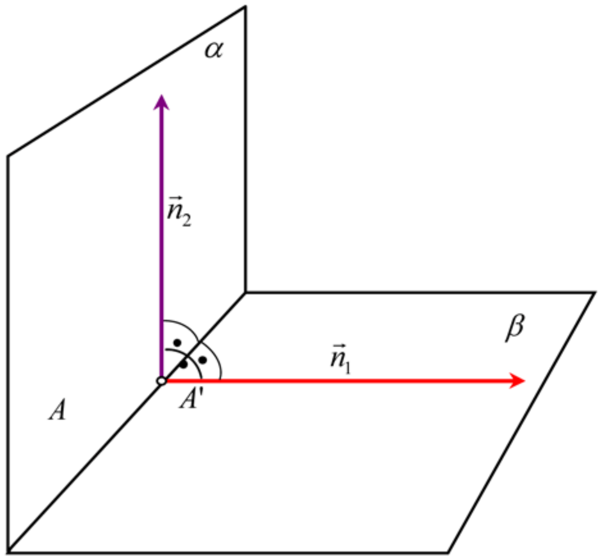
Potreban i dovoljan uslov da dve ravni α i β budu ortogonalne je da

$\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0$.

Dokaz:

$(\rightarrow)$ $\alpha\perp\beta\Rightarrow\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0$.

Ako su ravni α i β normalne, tada su i vektori $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$ normalni(slika 46.),



Slika 46: Otogonalne ravni α i β

te je $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ po definiciji 23.

$(\leftarrow) \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Rightarrow \alpha \perp \beta$.

$\vec{n}_1 \perp \alpha$ i $\vec{n}_2 \perp \beta \Rightarrow \angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ ugao normalnog preseka između ravni α i β.

Kako je $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Rightarrow \alpha \perp \beta$.

Teorema 38. se može i ovako iskazati preko koordinata.

Ravani α i β su ortogonalne akko je $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$. Što je direktna posledica skalarnog množenja dva vektora. □

Teorema 39.

Potreban i dovoljan uslov da dve ravni budu paralelne je da $\vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2, \lambda \neq 0$.

Dokaz:

$(\rightarrow)\ \alpha \,||\, \beta \Rightarrow \vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2$.

$\vec{n}_1 \perp \alpha$ i $\vec{n}_2 \perp \beta$, kako je $\alpha \,||\, \beta \Rightarrow$ su $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$ kolinearni , to jest, $\exists \lambda \in R$ tako da je $\vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2$.

$(\leftarrow) \vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2 \Rightarrow \alpha \,||\, \beta$.

Kako je $\vec{n}_1 \perp \alpha$ i $\vec{n}_2 \perp \beta$ i zbog $\vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2 \Rightarrow \alpha \,||\, \beta$ (slika 47.)

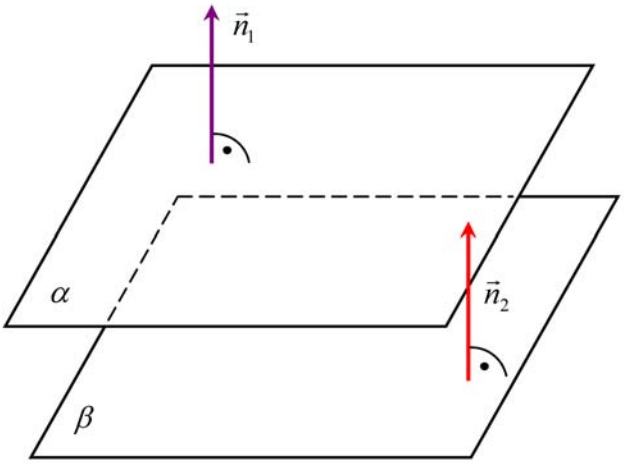
Teoremu 39. možemo i ovako iskazati preko koordinata:

Ravni α i β su paralelne akko su vektori $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$ kolinearni. (1)

Izrazimo (1) analitički: $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ i $\vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2$ tada je:

$A_1 = \lambda A_2$, $B_1 = \lambda B_2$, $C_1 = \lambda C_2 \Rightarrow$

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \lambda$ što je uslov paralelnosti dve ravni.



Slika 47: Paralelne ravni

Ako je još u ravni α i β zadovoljeno $D_1 = \lambda D_2$ tada se ravni α i β poklapaju.□

Pramen ravni

Definicja 27. Skup svih ravni, koje prolaze kroz presek dve ravni α i β, naziva se pramen ravni određen ravnima α i β.

Neka su ravni α i β zadane svojim vektorskim jednačinama

$\alpha \quad \vec{r}\vec{n}_1 + D_1 = 0$

$\beta \quad \vec{r}\vec{n}_2 + D_2 = 0$. (1)

Teorema 40.

Ako su α i β dve neparalelne ravni. Svaka ravan pramena određenog ravnima α i β, sem ravni, β ima jednačinu

$\vec{r}\vec{n}_1 + D_1 + \lambda(\vec{r}\vec{n}_2 + D_2) = 0$ za $\lambda \in R$.

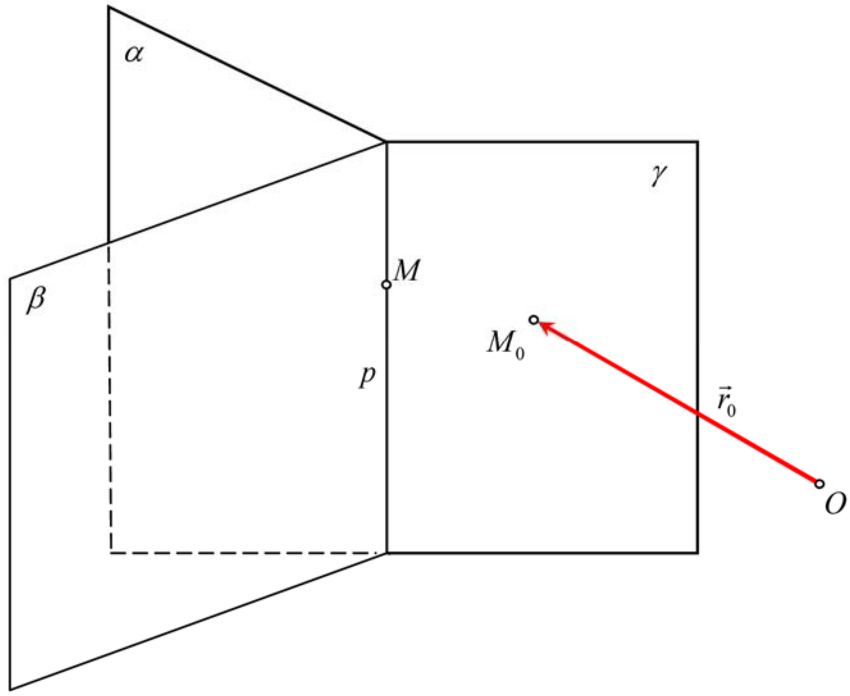
Dokaz:

Neka je M tačka preseka ravni α i β i $\vec{r}$ vektor položaja tačke M. Tada vektor položaja tačke M zadovoljava jednačine (1) ; onda $\vec{r}$ zadovoljava i linearnu kombinaciju jednačina (1), to jest,

$\vec{r}\vec{n}_1 + D_1 + \lambda(\vec{r}\vec{n}_2 + D_2) = 0 . \lambda \in R$. (2)

Jednačina (2) predstavlja jednačinu ravni koja prolazi kroz presek ravni α i β.

Obratno. Neka je prizvoljna ravan koja prolazi presekom ravni α i β. Tada je ravan određena tim presekom i još jednom tačkom M_0 koja ne pripada tom preseku(slika 48.).



Slika 48: Ravan određena presekom dve ravni i prizvoljnom tačkom M_0

Neka je $\vec{r}_0$ vektor položaja tačke $M_0 \in \gamma$.

Ako je $\lambda_0 \in R$ takav da je

$\vec{r}_0\vec{n}_1 + D_1 + \lambda_0(\vec{r}_0\vec{n}_2 + D_2) = 0$, tada jednačinu

$$\vec{r}\vec{n}_1 + D_1 + \lambda_0(\vec{r}\vec{n}_2 + D_2) = 0 \qquad (2)$$

zadovoljava vektor položaja $\vec{r}_0$ tačke M_0 i vektor položaja $\vec{r}$ prizvoljne tačke M preseka ravni α i β, to jest, (2) je jednačina ravni γ (slika 48.).

Ako su ravni α i β date u skalarnom obliku

$\alpha \quad Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D_1 = 0$

$$\beta \quad Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D_2 = 0, \qquad (3)$$

tada je prema (2) proizvoljna ravan, sem ravni β, koristeći (3) data jednačinom

$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D_1 + \lambda(Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D_2) = 0$,

što predstavlja pramen ravni određen ravnima α i β .

Primer: Naći jedančinu ravni koja prolazi presekom tri ravni

x-2y+z-7=0

2x+y-z+2=0

x-3y+2z-11=0

i paralelna je ravni

x+5y-3z-11=0.

Rešenje. Tražena ravan pripada pramenu od tri date ravni. Tada je po teoremi 38. pramen ravni dat sa:

$x\text{-}2y+z\text{-}7+\lambda_1(2x+y\text{-}z+2)+\lambda_2(x\text{-}3y+2z\text{-}11)=0 \Rightarrow$

$(1+2\lambda_1+\lambda_2)x+(-2+\lambda_1-3\lambda_2)y+(1-\lambda_1+2\lambda_2)z+(-7+2\lambda_1-11\lambda_2)=0.$

Kako tražena ravan mora biti paralelna sa datom ravni, to njihovi koeficijenti, moraju biti proporcionalni:

$$\frac{1+2\lambda_1+\lambda_2}{1}=\frac{-2+\lambda_1-3\lambda_2}{5}=\frac{1-\lambda_1+2\lambda_2}{-3} \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned}&\frac{1+2\lambda_1+\lambda_2}{1}=\frac{-2+\lambda_1-3\lambda_2}{5}\\&\frac{1+2\lambda_1+\lambda_2}{1}=\frac{1-\lambda_1+2\lambda_2}{-3}.\end{aligned} \qquad (1)$$

Pri sređivanju sistema (1) dobiće se

$$\lambda_1=-\frac{3}{5}$$

$$\lambda_2=-\frac{1}{5},$$

te tržena jednačina ravni glasi

$$x+5y-3z+15=0.$$

Jednačina prave u prostoru

Prava u prostoru može biti jednoznačno određena na razne načine, na primer, da prolazi kroz dve utvrđene tačke, da prolazi kroz jednu tačku i da bude paralelna datom vektoru, kao presek dve ravni i tako dalje. Zbog toga jednačinu ravni možemo pisati u raznim oblicima.

Vektorski oblik jednačine prave

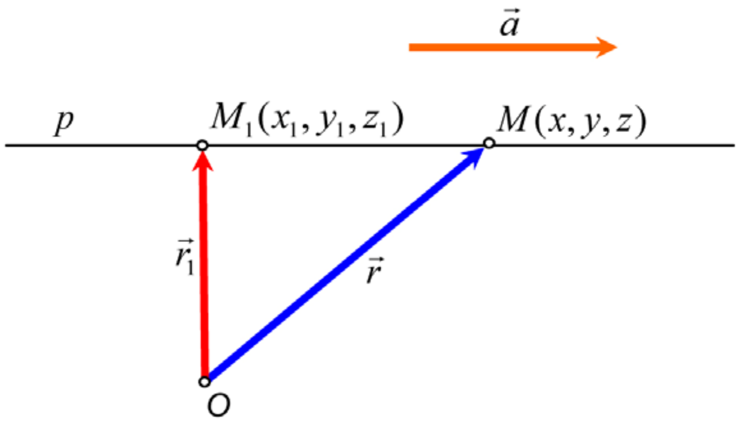
Teorema 41.

Neka je $\vec{r}_1$ vektor položaja tačke $M_1(x_1,y_1,z_1)$ i vektor $\vec{a}=(l,m,k)$ zadati pravac različit od nule. Tačka *M(x,y,z)* pripada pravi *p* koja prolazi kroz tačku M_1 i paralelna je vektoru $\vec{a}$ akko njen vektor položaja $\vec{r}$ zadovoljava jednačinu:

$$\vec{r}=\vec{r}_1+\lambda\vec{a},\ \lambda\in R. \qquad (1)$$

<u>*Dokaz:*</u>

($\rightarrow$) Neka $M\in p$ slika 49.



slika 49:Prava *p* koja prolazi kroz tačku M_1 i paralelna je vektoru $\vec{a}$

Vektor $\overrightarrow{M_1M}$ je kolinearan sa $\vec{a} \Rightarrow \exists \lambda \in R$, tako da je

$$\overrightarrow{M_1M} = \lambda \vec{a}. \tag{2}$$

Sa druge strane, izrazimo vektor $\overrightarrow{M_1M}$ preko vektora položaja(slika 49.) i dobićemo

$$\overrightarrow{M_1M} = \vec{r} - \vec{r}_1 \tag{3}$$

Jednačinu (3) zamenimo u jednačinu (2) $\Rightarrow \vec{r} - \vec{r}_1 = \lambda \vec{a}$

$\Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda \vec{a}$.

($\Leftarrow$) Vektor položaja $\vec{r}$ tačke M zadovoljava jednačinu (1). Tada je $\overrightarrow{M_1M} = \lambda \vec{a}$, odnosno prava određena tačkama M_1 *i* M za razne tačke M, paralelna je vektoru $\vec{a}$. Kako kroz tačku M_1, može proći samo jedna prava paralelna vektoru $\vec{a}$, to i sve tačke M koje zadovoljavaju jednačinu (1) pripadaju istoj pravi.

Teorema 42.

Neka su dati vektori $\vec{r}_1$ i $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tada jednačina $\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda \vec{a}$ odrđuje pravu, koja prolazi kroz tačku čiji je vektor položaja $\vec{r}_1$ i koja je paralelna vektoru $\vec{a}$ za sve $\lambda \in R$.

Dokaz:

Neka je M_1 tačka vektora položaja $\vec{r}_1$ i M tačka čiji je vektor položaja $\vec{r}$ dobijen iz (1) za prizvoljno $\lambda \in R$.

Iz (1) dobijamo $\vec{r} - \vec{r}_1 = \lambda \vec{a}$, što znači da su vektori $\vec{r} - \vec{r}_1$ i $\vec{a}$ kolinearni. Prema tome prava koja prolazi kroz tačku M_1 i M gde je M prizvoljna tačka prave, paralelna je vektoru $\vec{a}$.

Kako za svaku vrednost $\lambda \in R$ dobijamo iz (1) po jednu tačku M_λ , pri čemu je vektor $\overrightarrow{MM_\lambda}$ kolinearan sa $\vec{a}$ i kako kroz M_1 može proći samo jedna prava paralelna sa $\vec{a}$, to zaključujemo, da sve tačke M_λ pripadaju istoj pravi.

Napomena:

Jednačina (1) predstavlja jednačinu prave u vektorskom obliku, koji se može zapisati drugačije od (1):

$(\vec{r}-\vec{r}_1)\times\vec{a}=\vec{0}$,

što u stvari izražava uslov kolinearnosti vektora $\vec{r}-\vec{r}_1$ i $\vec{a}$.

Parametarski oblik jednačine prave

Neka su tačke M_1 i M date svojim koordinatama: $M_1(x_1,y_1,z_1)$ i $M(x,y,z)$.

Tada iz (1) dobijamo:

$(x,y,z)=(x_1,y_1,z_1)+\lambda(l,m,k)\Rightarrow$

$$\begin{aligned} x &= x_1+\lambda l \\ y &= y_1+\lambda m \qquad \forall\lambda\in R \\ z &= z_1+\lambda k, \end{aligned}$$

što predstavlja parametarski oblik jednačine prave.

Kanonički ili skalarni oblik jednačine prave

Naka je vektor $\vec{a}\neq\vec{0}$ i $\vec{a}=(l,m,k)$. Tada od parametarskog oblika dobijemo kanonički oblik jednačine prave

$$\frac{x-x_1}{l}=\lambda,\frac{y-y_1}{m}=\lambda,\frac{z-z_1}{k}=\lambda$$

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{k}=\lambda \qquad (1)$$

Jednačina (1) se naziva kanonički oblik jedančine prave.

Kako je $\vec{a}\neq\vec{0}$ $\Rightarrow$ nisu svi *l,m,k* jednaki nula, neki od njih mogu biti jednaki nuli, tada treba koristiti parametraski oblik jednačine prave. Koeficijenti *l,m,k* nazivaju se koficijenti pravca prave *p*, a vektor $\vec{a}$ vektor pravca prave *p*.

Prava kao presek dve ravni

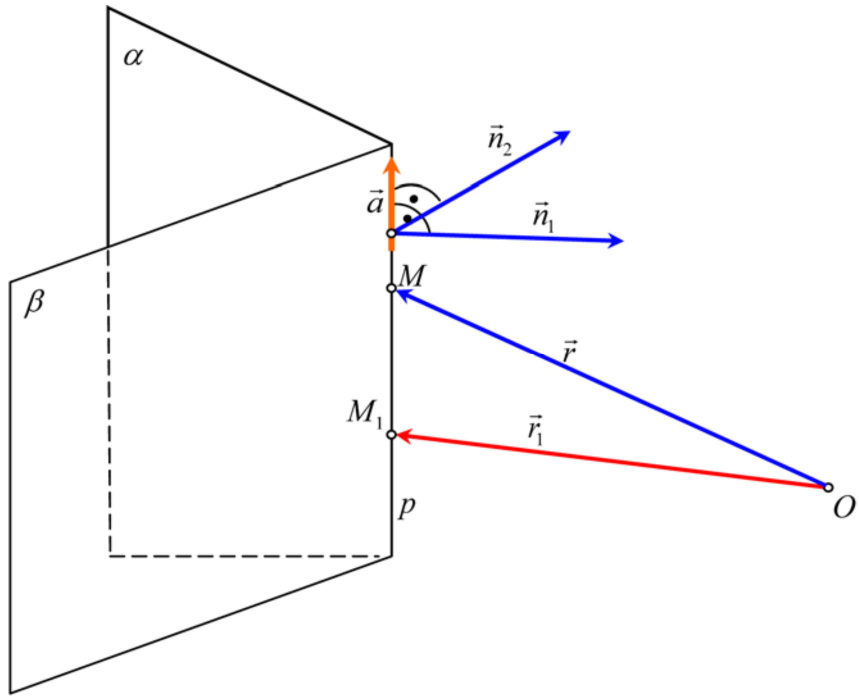
Dve ravni α i β u preseku jednoznačno određuju pravu *p*. Zato pravu *p* posmatramo kao sistem jednačina dve ravni

$$\alpha \;\; \vec{r}\vec{n}_1+D_1=0$$

$$\beta \;\; \vec{r}\vec{n}_2+D_2=0. \qquad (1)$$

Neka je $\alpha\cap\beta\neq\varnothing\;\Rightarrow\;\vec{n}_1\neq\lambda\vec{n}_2$, tada skup svih rešenja sistema (1), se poklapa sa skupom vekotra položaja svih tačaka prave *p*.

Da bi dobili kanonički oblik prave p koji se najčešće koristi, potrebno je odrediti vektor položaja $\vec{r}_1$ tačke $M_1 \in p$ i vektor $\vec{a}$ kolinearan sa pravom p(slika 50.).



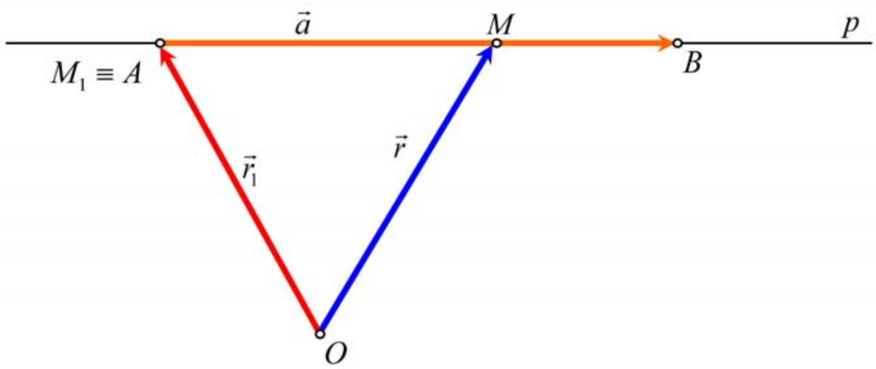
slika 50: Prava kao presek dve ravni

Tačku M_1 dobijamo kao rešenje sistema (1). Taj sistem ima beskonačno rešenja, zato jednu promenljivu treba izabrati prizvoljno. Pravac $\vec{a}$ prave p uzeti kao vektorski proizvod vektora naormala $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$ ravni α i β to jest $\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

Tako je jednačina prave p u potpunosti određena.

Jednačina prave koja prolazi kroz dve date tačke

Neka su date dve različite tačke A i B koje imaju koordinate $A(x_1, y_1, z_1)$ i $B(x_2, y_2, z_2)$.



slika 51: Jednačina prave kroz dve tačke

Za pravac $\vec{a}$ prave p možemo uzeti vektor $\overrightarrow{AB}$ to jest $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i za tačku M_1 na primer, A, kroz koju prolazi prava p (slika 51.). Tada je vektorska jednačina prave p data sa

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda\vec{a}\,. \qquad (1)$$

Napišimo (1) u parametarskom obliku, i neka je M prizvoljna tačka prave p(slika 51.). Tada je

$$(x,y,z) = (x_1,y_1,z_1) + \lambda(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

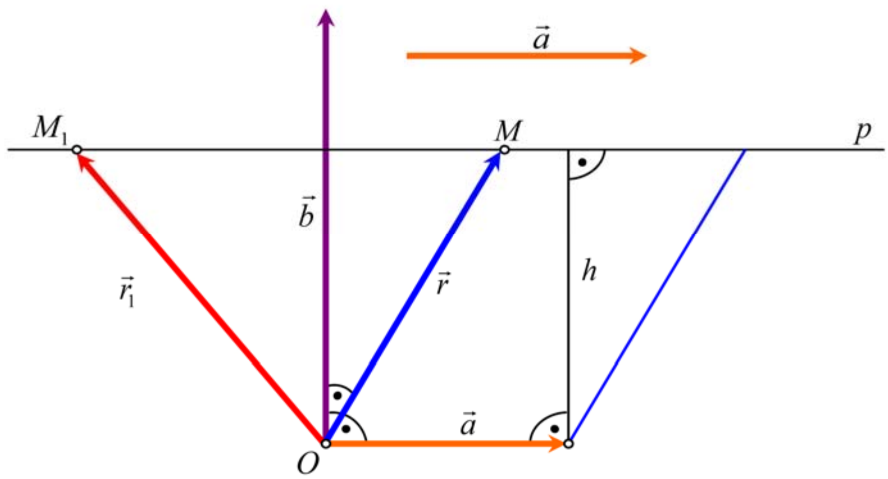
$$\begin{aligned} x &= x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + \lambda(y_2 - y_1) \\ z &= z_1 + \lambda(z_2 - z_1). \end{aligned} \qquad (2)$$

Iz jednačina (2) dobijamo kanonički oblik jednačine prave kroz dve tačke:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}\,.$$

Još jedan oblik jednačine prave

Iz opšte vektorske jedančine prave, teorema 41., imamo $\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda\vec{a}$, tada je, $\vec{r} - \vec{r}_1 = \lambda\vec{a} \Rightarrow$ vektori $\vec{r} - \vec{r}_1$ i $\vec{a}$ su kolinearni, koristeći definiciju 24. $(\vec{r} - \vec{r}_1)\times\vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{r}\times\vec{a} - \vec{r}_1\times\vec{a} = 0$. Po teoremi 21. tada je $\vec{r}\times\vec{a} = \vec{r}_1\times\vec{a}$, $\vec{r}_1$ i $\vec{a}$ su zadati vektori. Obeležimo $\vec{r}_1\times\vec{a}$ sa $\vec{b}$ to jest $\vec{r}_1\times\vec{a} = \vec{b}$ (slika 52.) tada je $\vec{r}\times\vec{a} = \vec{b}$ još jedan zapis jednačine prave.



slika 52: Još jedan oblik jednačine prave

Važi i obratno da jednačina oblika $\vec{r}\times\vec{a} = \vec{b}$ odrđuje pravu u prostoru. Tačnije važi

Teorema 43.

Jednačina oblika $\vec{r}\times\vec{a} = \vec{b}$, gde su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dati vektori i $\vec{a} \neq \vec{0}$, određuju pravu, koja je paralelna vektoru $\vec{a}$, i nalazi se na rasotanju $\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ od koordinatnog početka O.

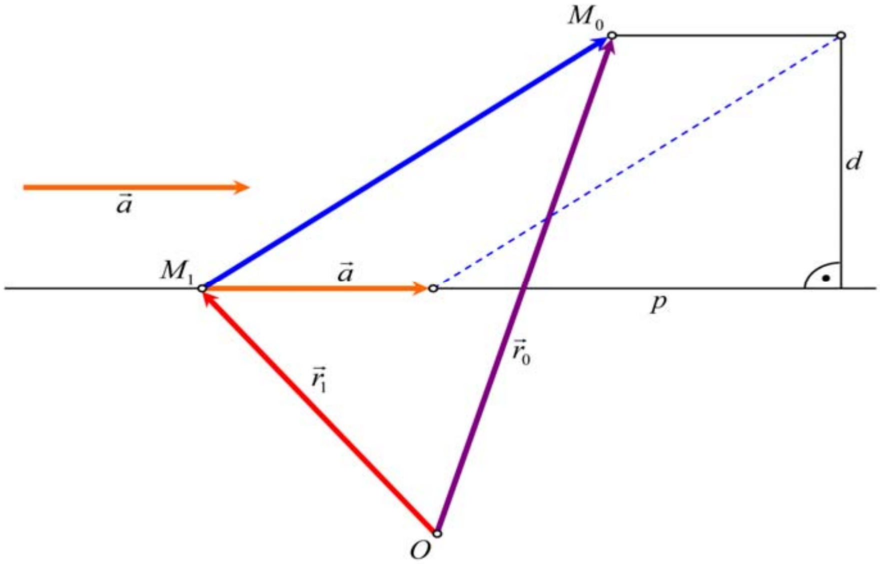
Dokaz:

Translirajmo vektor $\vec{a}$ u koordinatni početak *O*(slika 52.). Izaberimo tačku *M* tako da vektori $\vec{r}\times\vec{a}$ i $\vec{b}$ imaju isti pravac, smer i intenzitet. Intenzitet vektora $\vec{r}\times\vec{a}$ je površina paralelograma konstrisanog nad vektorima $\vec{r}$ i $\vec{a}$, to jest,

$\left|\vec{b}\right| = \left|\vec{r}\times\vec{a}\right| = \left|\vec{r}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\sin\angle(\vec{r},\vec{a}) = \left|\vec{a}\right|\cdot h$. Površina paralelograma će imati istu vrednost $\left|\vec{a}\right|\cdot h$ za sve položaje tačke *M* na pravoj, koja je paralelna vektoru $\vec{a}$. Prava *p* se nalazi na rastojanju $h = \dfrac{\left|\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|}$ od koordinatnog početka *O*(slika 52.).

Rastojanje tačke od prave

Neka je u prostoru data tačka M_0 i prava *p* tako da $M_0 \notin p$. Pravu *p* zadajemo jednačinom : $\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda\vec{a}$, gde je $\vec{r}_1$ vektor položaja tačke $M_1 \in p$ i vektor $\vec{a}$ koji daje pravac prave *p*(slika 53.). Vektor položaja tačke M_0 je $\vec{r}_0$.



slika 53: Rastojanje tačke od prave

Posmatrajmo vektor $\overrightarrow{M_1M_0}$ i transliramo vektor $\vec{a}$ u tačku M_1. Tada je intenzitet vektorskog proizvoda vektora $\overrightarrow{M_1M_0} = \vec{r}_0 - \vec{r}_1$ i $\vec{a}$ povšina paralelograma konstruisanog nad vektorima $\overrightarrow{M_1M_0}$ i $\vec{a}$. Neka je *d* visina datog paralelograma spuštena iz temena na stranicu $\left|\vec{a}\right|$.

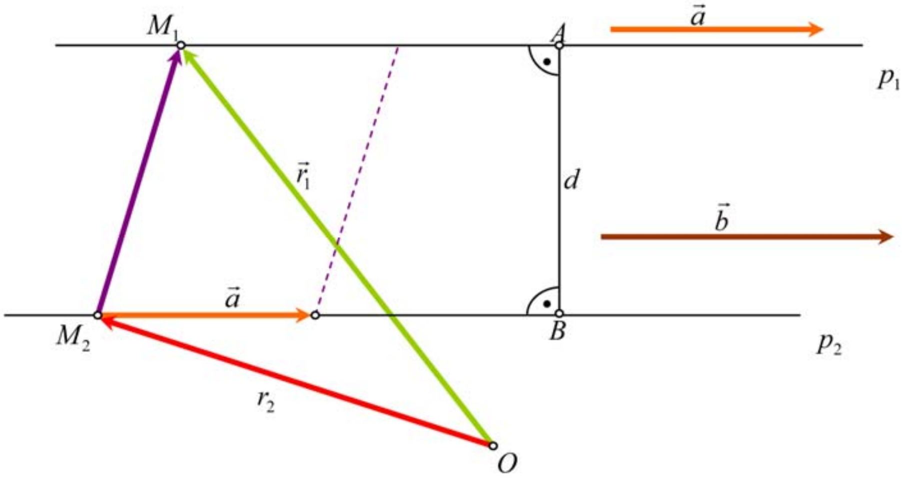
Tada je : $\left|(\vec{r}_0 - \vec{r}_1)\times\vec{a}\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot d \Rightarrow d = \dfrac{\left|(\vec{r}_0 - \vec{r}_1)\times\vec{a}\right|}{\left|\vec{a}\right|}$. (1)

Jednačina (1) je najkraće rastojanje tačke M_0 do date prave *p*.

Rastojanje dve prave

Prave u prostoru mogu biti paralelne, mimolilazne i da se seku. Razmotirćemo sva tri slučaja.

a) Neka su prave p_1 i p_2 paralelne, tada one pripadaju jednoj ravni. Posmatraćemo slučaj kada se prave p_1 i p_2 ne poklapaju. Neka je d najkraće rastojanje pravih p_1 i p_2 (slika 54.).



slika 54: Paralelne prave

Uočimo tačke $M_1 \in p_1$ i $M_2 \in p_2$ i njhove vektore položaja $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$. Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vektori pravaca pravih p_1 i p_2. Transliramo vektor $\vec{a}$ u tačku M_2(slika 54.).

Formiramo, vektorski proizvod, između vektora $\overrightarrow{M_2M_1} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ i $\vec{a}$. Intenzitet od $|(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\times\vec{a}|$ je površina paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ i $\vec{a}$, čija je visina d.

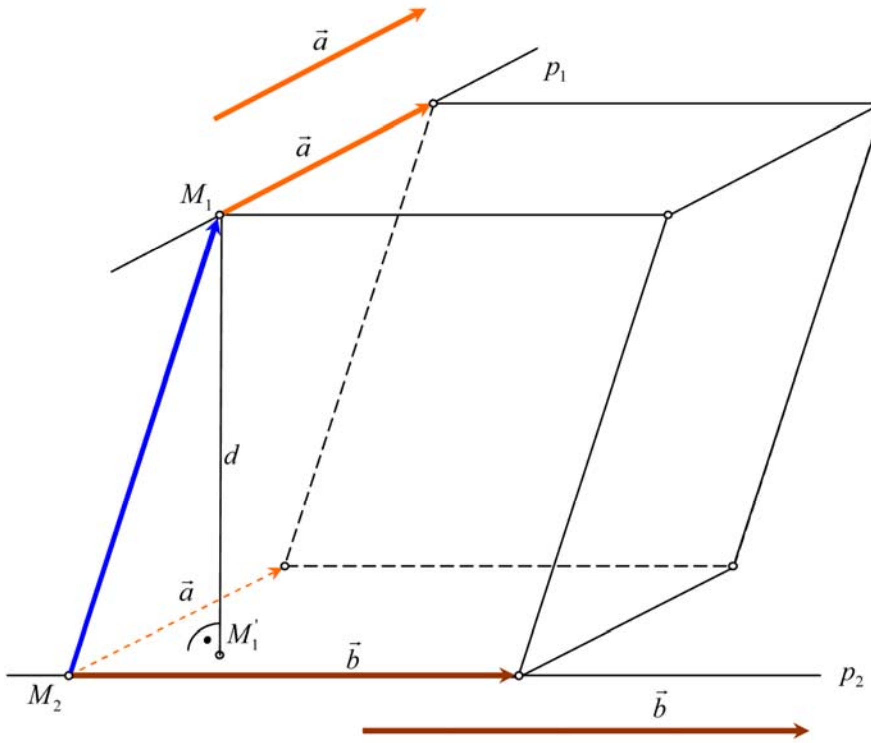
Dakle, $|(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\times\vec{a}| = d \cdot |\vec{a}| \Rightarrow$

$$d = \frac{|(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\times\vec{a}|}{|\vec{a}|}. \tag{1}$$

Jednačina (1) predstavlja rastojanje paralelnih pravih.

Ako se prave p_1 i p_2 poklope $\Rightarrow$ vektori $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ i $\vec{a}$ su kolinearni $\Rightarrow |(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\times\vec{a}| = \vec{0} \Rightarrow d=0$.

b) Neka su prave p_1 i p_2 mimoilazne tada je iz geomerije poznato da mimoilazne prave imaju zajedničku normalu koja u preseku sa p_1 i p_2 daje najkraće rastojanje između njih. Označićemo to sa d. Uočimo dve prizvoljne tačke $M_1 \in p_1$ i $M_2 \in p_2$. Tada pomoću vektora $\overrightarrow{M_2M_1}$, $\vec{a}$ i $\vec{b}$, gde su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ pravci pravih p_1 i p_2. Konstruišimo paralelopiped nad vektorima $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (slika 55.).



slika 55: Mimoilazne prave

Neka su $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$ vektori položaja tačaka M_1 i $M_2 \Rightarrow$ $\overrightarrow{M_2M_1} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Tada je rastojanje d visina paralelopipeda, koja odgovara osnovi određenoj vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Po teoremi 23., mešoviti proizvod vektora $\overrightarrow{M_2M_1}$, $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jednaki je zapremini paralelopipeda konstruisanog nad vektorima $\overrightarrow{M_2M_1}$, $\vec{a}$ i $\vec{b}$ to jest,

$$V = \left|(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\cdot(\vec{a}\times\vec{b})\right| = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\cdot d$$

$$\Rightarrow d = \frac{\left|(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\cdot(\vec{a}\times\vec{b})\right|}{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}. \qquad (2)$$

Jednačina (2) predstavlja, rastojanje mimoilaznih pravih.

c) Neka se prave p_1 i p_2 seku, tada one pripadaju jednoj ravni. Koristeći oznake pod b), tada su vektori $\overrightarrow{M_2M_1} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, $\vec{a}$ i $\vec{b}$ konplanarni $\Rightarrow$ po teoremi 25., njhov mešoviti proizvod je jednak nuli, to jest, $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = 0$, što predstavlja uslov preseka dve prave.

Analitički uslov preseka dve prave p_1 i p_2 pomoću koordinata

$\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $\Rightarrow$
$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$.

Neka pravci $\vec{a}$ i $\vec{b}$ pravih p_1 *i* p_2 imaju koordinate $\vec{a}=(l_1,m_1,k_1)$, $\vec{b}=(l_2,m_2,k_2)$. Tada iz $(\vec{r}_2-\vec{r}_1)\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=0 \Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ l_1 & m_1 & k_1 \\ l_2 & m_2 & k_2 \end{vmatrix}=0\,. \tag{3}$$

Jednačina (3) predstavlja uslov preseka dve prave.

Ugao između dve prave

Definicja 28.

Pod uglom između dve prave u prostoru podrazumevamo ugao između bilo koja dva vektora čiji su nosači date prave.

Kako smer vektora na tim pravama nije određen, postoje dva suplementna ugla koja se mogu dobiti. Da bi se izbegla dvoznačnost pod uglom između dve prave , podrazumeva se onaj koji je oštar ili prav.

Teorema 44.

Ugao između pravih p_1 i p_2 datih sa $p_1:\ \vec{r}=\vec{r}_1+\lambda\vec{a}$ i $p_2:\ \vec{r}=\vec{r}_2+\mu\vec{b}$, gde su $\vec{a}=(l_1,m_1,k_1)$, $\vec{b}=(l_2,m_2,k_2)$ pravci pravih p_1 i p_2 određen je formulama

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}\ \text{ ili }\ \cos\alpha=\frac{|l_1l_2+m_1m_2+k_1k_2|}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+k_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+k_2^2}}\,.$$

Dokaz:

Kako je, ugao između pravih p_1 i p_2, jednak uglu, između njihovih vektora pravaca $\vec{a}$ i $\vec{b}$, dokaz teoreme sledi iz definicije skalarnog prozvoda dva vektora.

Sada se mogu dati uslovi paralelnosti i normalnosti dve prave p_1 i p_2

a) $p_1 \parallel p_2$ akko je $\vec{a}=\lambda\vec{b}$. U koordinatama glasi $(l_1,m_1,k_1)=\lambda(l_2,m_2,k_2)$

$$\Rightarrow l_1=\lambda l_2,\ m_1=\lambda m_2,\ k_1=\lambda k_2\,. \tag{1}$$

Iz (1) dobijamo: $\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{k_1}{k_2}$, što predstavlja uslov paralelnosti dve prave.

b) $p_1 \perp p_2 \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$. U koordinatama $l_1l_2+m_1m_2+k_1k_2=0$, što predstavlja uslov normalnosti, dve prave.

Međusobni odnos prave i ravni

Prava p i ravan α mogu se seći, biti paraleni, prava može ležati u ravni i posebno prava može biti normalna na ravan. Neđimo analaitičke uslove za te slučajeve.

Neka je prava p data svojom jednačinom

$$p \quad \vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda\vec{a}\,, \tag{1}$$

a ravan α svojom skalarnom jednačinom

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{2}$$

Definicja 29.

Ugao između prave p i ravni α je oštar ili prav, koji gradi prava p i njena ortogonalna projekcija na datu ravan(slika 56.).

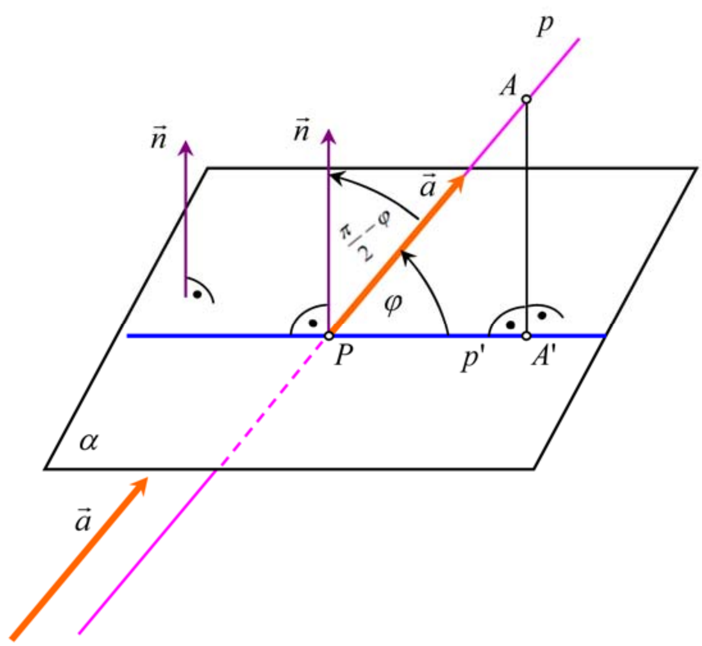
Teorema 45.

Ugao između prave p i ravi α jednak je komplementarnom uglu koga vektor normale $\vec{n}$ ravni α zatvara sa pravcem vektora $\vec{a}$ prave p(slika 56.).

Dokaz:

Ugao $\varphi \le \dfrac{\pi}{2}$. Tada, $\cos(\dfrac{\pi}{2} - \varphi) = \dfrac{|\vec{n}\cdot\vec{a}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{a}|}$ ili $\sin\varphi = \dfrac{|\vec{n}\cdot\vec{a}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{a}|}$. (3)

Time je teorema dokazana.



slika 56: Ugao između prave i ravni

Kako iz (1) $\vec{n} = (A,B,C)$ i $\vec{a} = (l,m,k)$ to se (3) može zapisati

$$\sin\varphi = \frac{|Al+Bm+Ck|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+k^2}} \tag{4}$$

Iz (4) sledi da je prava paralelna ravni α (φ =*0*) akko važi

$$Al + Bm + Ck = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{a} = 0 \,. \tag{5}$$

Prava p je normalna na ravan α($\varphi = \dfrac{\pi}{2}$) akko važi $\vec{n} = \lambda \vec{a} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{A}{l} = \dfrac{B}{m} = \dfrac{C}{k}$, to jest, da su koeficienti proporcionalni.

Iz (5) sledi da prava p preseca ravan α akko važi

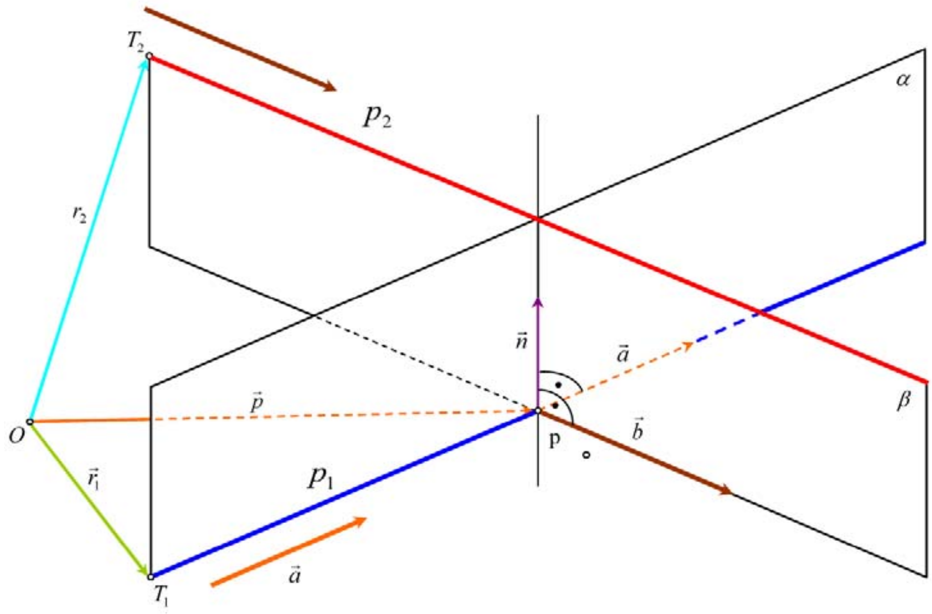
$Al + Bm + Ck \neq 0$.

Primer:

Naći vektorsku jednačinu zajedničke normale dve mimoliazne prave p_1 i p_2.

*Rešenje:*Neka su prave p_1 p_2 zadane: p_1 $\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda \vec{a}$,
p_2 $\vec{r} = \vec{r}_2 + \lambda \vec{b}$.

Uzmimo za pravac zajedničke normale vektor $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$ (slika 57.).



Slika 57: Zajednička normala mimoilaznih pravih

Neka je α ravan, određena pravcima vektora $\vec{n}$ i p_1 i β ravan određena pravcima $\vec{n}$ i p_2. Tada ravni α i β imaju jednačine

$$\alpha \;\; ((\vec{r} - \vec{r}_1) \times \vec{n}) \cdot \vec{a} = 0 \text{ i} \tag{1}$$

$$\beta \;\; ((\vec{r} - \vec{r}_2) \times \vec{n}) \cdot \vec{b} = 0 \,. \tag{2}$$

Označimo sa $\vec{p}$ vektor položaja tačake P prodora prave p_1 i ravni β (slika 57.). Zamenimo pravu $\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda \vec{a}$ u jednačinu (2)

$$((\vec{r}_1 + \lambda \vec{a} - \vec{r}_2) \times \vec{n}) \cdot \vec{b} = 0 \;\Rightarrow$$

$$((\vec{r}_1 - \vec{r}_2 + \lambda\vec{a}) \times \vec{n}) \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow$$

$$((\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{n}) \cdot \vec{b} + \lambda(\vec{a} \times \vec{n}) \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{((\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{n}) \cdot \vec{b}}{(\vec{a} \times \vec{n}) \cdot \vec{b}}. \tag{3}$$

Kako je $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$ to (3) iznosi

$$\lambda = \frac{((\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times (\vec{a} \times \vec{b})) \cdot \vec{b}}{(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{n}}. \tag{4}$$

Koristeći osobine skalarnog proizvoda (4) postaje

$$\lambda = \frac{-((\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b})}{-(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b})} \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{((\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b})}{(\vec{a} \times \vec{b})^2}.$$

Izrazimo vektor $\vec{p}$ položaja tačke P

$$\vec{p} = \vec{r}_1 + \vec{a}\,\frac{((\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b})}{(\vec{a} \times \vec{b})^2}.$$

Uvrstimo $\vec{p}$ u jednačinu $\vec{r} = \vec{p} + \lambda\vec{n}$ zajedničke normale, dobićemo vektorsku jednačinu zajedničke normale dve mimoilazne prave

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \frac{((\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b})}{(\vec{a} \times \vec{b})^2}\,\vec{a} + \lambda(\vec{a} \times \vec{b}).$$

Glava III

Površi drugog reda

Opšti oblik algebarske jedanačine drugog stepena po x,y i z glasi

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Eyz+2Fxz+2Mx+2Ny+2Pz+G=0 \qquad (1)$$

gde su $A, B, C, D, E, F, M, N, P, G$ prizvoljni realni brojevi i bar jedan od njih je različit od nule.

Da bi se nacrtao grafik ovih površi primenjuje se metod preseka, koji se sastoji u tome da se data površ preseče ravnima koje su paralelne datim koordinatnim ravnima. Kao presek svake od ovih porši datom ravni dobija se neka linija preseka. Ako presečemo površ (1) jednom ravni koja je paralelna koordinatnoj ravni Oxy, tada skup $f(x,y,z)=0$ i $z=h$ definiše jednačinu linije preseka površi sa ravni $z=h$. Kako je h promenljivi parametar, dobiće se skup linija preseka površi (1) ravnima paralelnim ravni Oxy. Analogno se može proučiti karakter linija preseka površi ravnima koje su paralelne ravnima Oyz i Oxz.

U daljem izlaganju ćemo proučiti metodom preseka površine drugog reda čije su jednačine date u kanoničkom obliku.

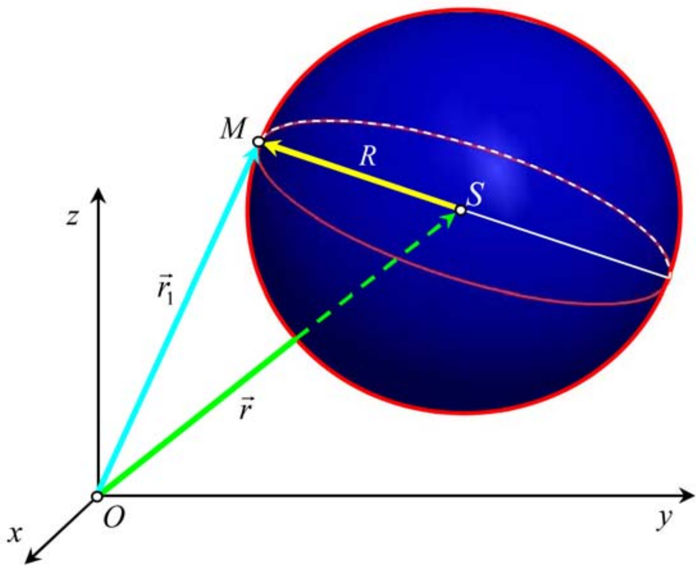
Sfera

Definicja 30.

Sferom se naziva geometrijsko mesto tačaka podjednako udaljenih od jedne stalne tačke središta sfere.

Ako sa S označimo centar sfere i $\vec{r}$ vektor položaja tačke S, a sa R poluprečnik sfere i neka je $\vec{r}_1$ vektor položaja prizvoljne tačke M sfere, tada je(slika 58.)

$$\vec{r}_1 = \vec{r} + \overrightarrow{SM}\ . \qquad (2)$$



Slika 58. Sfera

Iz (2) $\overrightarrow{SM} = \vec{r}_1 - \vec{r} \Rightarrow |\overrightarrow{SM}| = |\vec{r}_1 - \vec{r}|$. Kako je $|\overrightarrow{SM}| = R \Rightarrow$ $|\vec{r}_1 - \vec{r}| = R$, što predstavlja jeddnačinu sfere.

Ako je $\vec{r}_1 = (x, y, z)$ i $\vec{r} = (a, b, c)$ tada je $\vec{r}_1 - \vec{r} = (x-a, y-b, z-c) \Rightarrow$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2, \tag{3}$$

jednačina sfere u koordinatama.

U specijalnom slučaju , kada se centar sfere nalazi u koordinatnom početku, to jest, kada je $\vec{r} = \vec{0} \Rightarrow a=b=c$, jednačina sfere (3) tada glasi

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \tag{4}$$

Linije preseka povši (4) sa ravni $z=h$ gde je $|h| \leq R$ su koncentrične kružnice, koje se projektuju na ravan Oxy u unutrašnjost kružnice $x^2 + y^2 = R^2$, $z=0$. Centri ovih kružnica nalaze se na Oz osi, dok su im poluprečnici jednaki h.

Analogno se diskutuje presek površi (4) sa ravnima $x=0$ i $y=0$.

Jednačinu (4) možemo zapisati i parametraski. Dovoljno je za x i y izabrati prizvoljne funkcije neka dva paramatra, na primer

$$x = R\cos\theta\cos\psi,\ y = R\cos\theta\sin\psi, \tag{5}$$

$$0 \leq \psi \leq 2\pi,\ -\pi \leq \theta \leq \pi.$$

Zamenimo (5) u (4) i dobijamo $z=R\cos\theta$.

Prema tome, parametarske jednačine sfere su

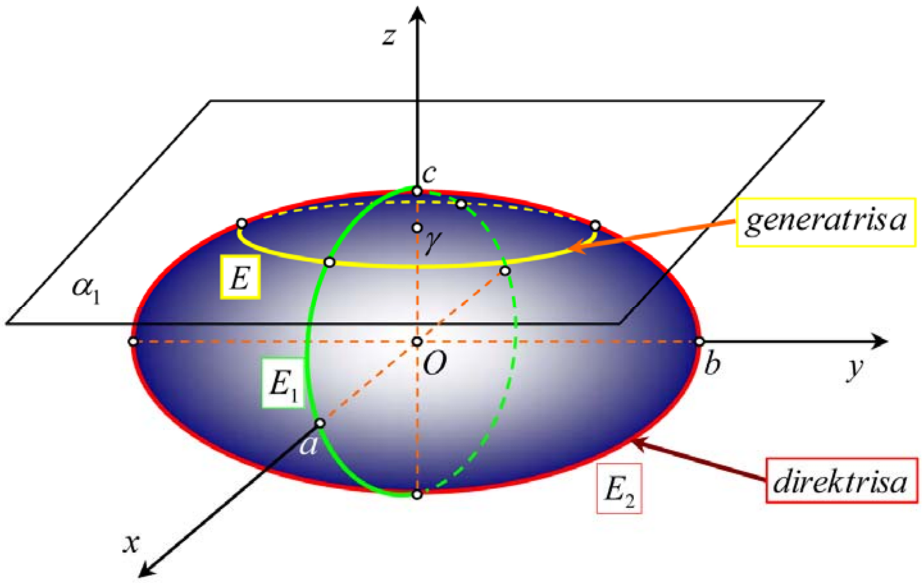
$$x = R\cos\theta\cos\psi,\ y = R\cos\theta\sin\psi,\ z=R\cos\theta$$

$$0 \leq \psi \leq 2\pi,\ -\pi \leq \theta \leq \pi.$$

Eliminacijom parametara θ, ψ dobićemo jednačinu (4).

Elipsioid

U koordiantnoj ravni Oxz postavimo elipsu E_1 sa stalnim poluosama a i c, i ukoordinatnoj ravni Oyz elipsu E_2 sa stalnim poluosama b i c. U pokretnoj ravni α_1 koja je paralelna ravni Oxy uočimo elipsu E sa promenjljivim poluosama α i β. Ta pokretna elipasa, kao generatrisa, kreće se tako da bude stalno u ravni α_1, njen centar je na osi Oz i njena temena klize duž elipsa E_1 i E_2. Elipse E_1 i E_2 igraju ulogu direktrise. Površ koja nastaje ovim kretanjem elipse E naziva se elipsoid(slika 59.).



Slika 59: Konstruktivna geneza elipsoida

Ako je $A(x,y,z)$ prizvoljna tačka elipsoida, onda ona zadovaoljava jednačinu elipse E. $\Rightarrow$

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1 \text{ i } z=\gamma \tag{1}$$

Jednačine elipsa E_1 i E_2 glase

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ y=0 \text{ i } \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ x=0.$$

Promenjljivi parametri α,β i γ moraju zadovoljiti uslove

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}=1,\ \frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}=1 \tag{2}$$

Eliminacijom parametra α,β i γ iz četiri jednačine (1) i (2) dobijamo jednačinu elipsoida

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{3}$$

Brojevi $a,b,$ i c zovu se poluose elipsoida. Elipsoid je simetričan u odnosu na svaku koordinatnu ravan.

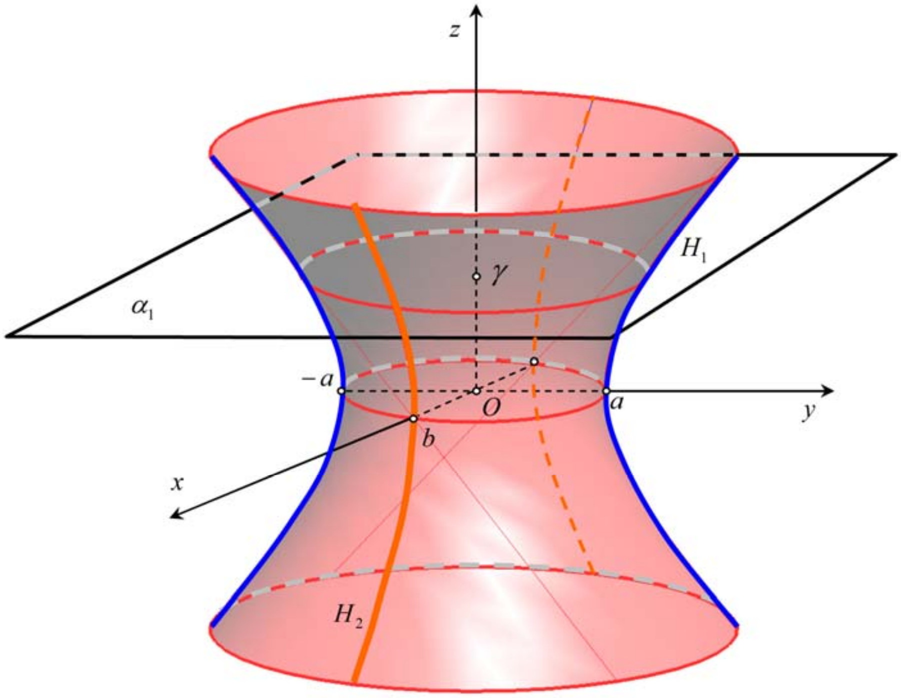
U slučaju kada su dve poluose elipsoida jednake, onda nastaje rotacioni elipsoid. Ako su sve ose međusobno jednake elipsoid postaje sfera.

Hiperbolidi

Jednograni hiperbolid

U koordinatnoj ravni Oxz hiperbolu H_1 sa realnom poluosom a i imaginarnom poluosom c, i u koordinatnoj ravni Oyz hiperbolu H_2 sa realnom poluosom b i imaginarnom poluosom c. U pokretnoj ravni α_1 koja je paralelna ravni Oxy uočimo elipsu E sa promenljivim poluosama α i β. Pokretna elipsa E je generatrisa, translira se tako da stalno bude u ravni α_1 i da njen centar bude na osi Oz, a da temena klize duž hiperbola H_1 i H_2 koje igraju ulogu direktisa.

Geometrijsko mesto svih položaja pokretne elipse E zovemo jednograni hiperboloid(slika 60.).



Slika 60: Jednograni hiperboloid

Ako je $A(x,y,z)$ prizvoljna tačka jednogranog hiperbolida, onda ona zadovaoljava jednačinu elipse E to jest,

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1\ ,\ z=\gamma. \tag{1}$$

Jednačine hiperbola H_1 i H_2 su respektivno

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\, x=0 \tag{2}$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\, y=0. \tag{3}$$

Promenljivi parametri α, β i γ moraju zadovoljiti uslov,

$$\frac{\beta^2}{b^2}-\frac{\gamma^2}{c^2}=1,$$

(4)

koji se dobija kada se iz jednačine elipse *E* i jednačine (2) hipebole H_1 eleiminišu veličine *x,y* i *z*.

Uslov,

$$\frac{\alpha^2}{a^2}-\frac{\gamma^2}{c^2}=1, \tag{5}$$

se dobija kada se iz jednačine elipse *E* i jednačine (3) hipebole H_2 eleiminišu veličine *x,y* i *z*.

Rezultat eliminacije promenjljivih parametra α,β i γ iz jednačine elipse *E* i jednačina (4) i (5) daje nam jednačinu jednogranog hiperbolida:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Veličine *a,b,* i *c* zovu se, poluose jednogranog hiperbolida. Osa *Oz* se zove imaginarna osa hiperbolida, i ona sa jednogranim hiperbolidom nema zajedničkih tačaka. Ako su ose *Oy* odnosno *Ox* imaginearne, onda jednograni hiperbolidi su predstavljeni jednačinama respektivno

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ ili } -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Ako je *a=b* onda je jednograni hiperbolid rotacioni to jest:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Dvograni hiperbolid

Neka je generatrisa elipsa *E*, a direktrise su hiperbole H_1 i H_1 koje imaju redom poluose *c,a* i *c,b* i zajedničku realnu osu *Oz*

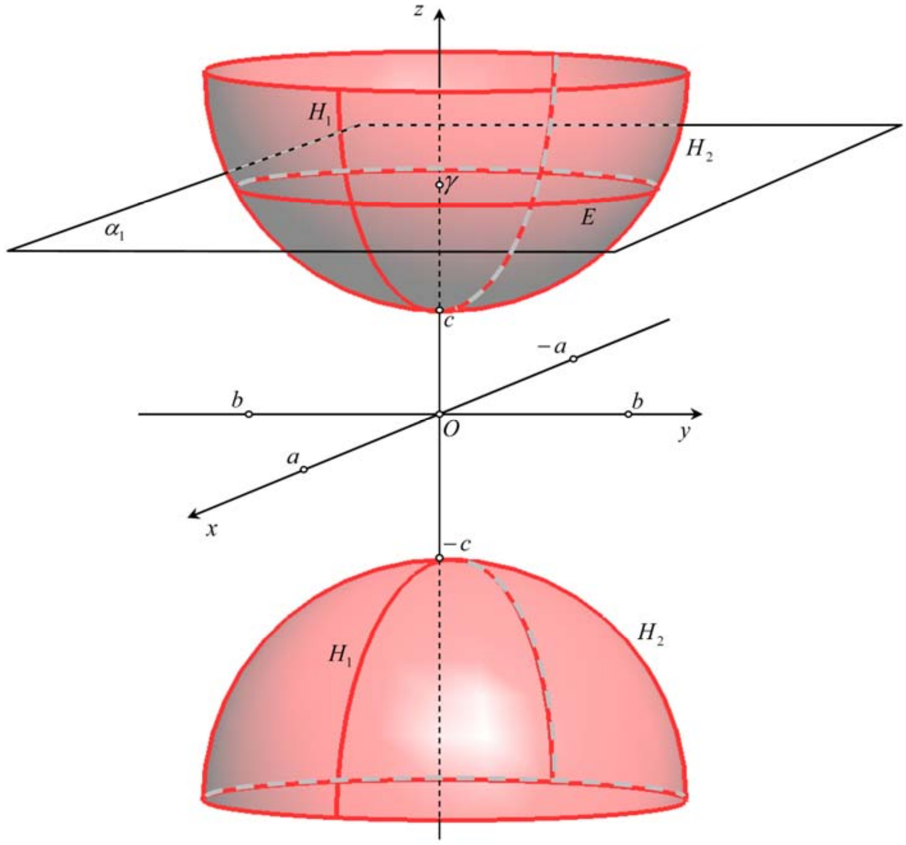
$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1,\ y=0 \wedge \frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ x=0.$$

Translatorna elipsa *E* u ravni α opisaće dvograni hiperbolid(slika 61.)

E: $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, $z=\gamma$ translatorna elipsa.

Slično kao i prethodna razmatranja, parametri moraju da zadovoljavaju jednačine:

$$\frac{\gamma^2}{c^2}-\frac{\alpha^2}{a^2}=1,\ \frac{\gamma^2}{c^2}-\frac{\beta^2}{b^2}=1 \tag{1}$$



Slika 61: Dvograni hiperbolid

Eliminacijom α, β i γ iz jednačine elipse E i jednačine (1) dobija se jednačina dvogranog hiperbolida

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 . \tag{2}$$

Poluose površi (2) su a,b,c a koordinate, Ox i Oy su imaginarne ose. Ako je $a=b$ dobićemo raotacioni dvograni hiperbolid

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 .$$

Eliptički parabolid

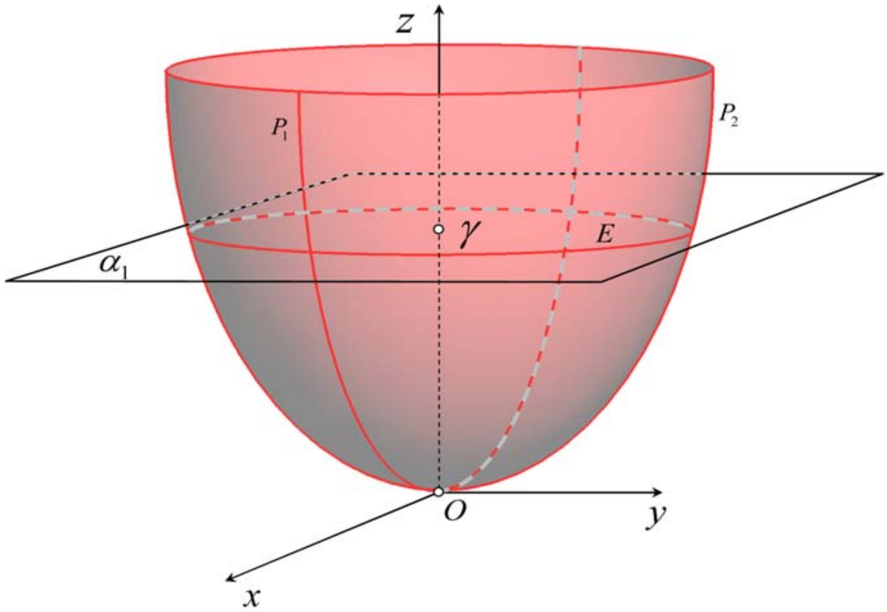
Za genaratrisu uzimamo elipsu E sa jednačinom

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1 \text{ i } z=\gamma ,$$

a za direktrise uzimamo parabole P_1 i P_2 sa jednačinama redom

$x^2=2pz$, $y=0$ i $y^2=2qz$, $x=0$,

gde su p i q parametri parabole(slika 62.).



Slika 62: Eliptički paraboloid

Transliranjem elipse E paralelno Oxy ravni, formiraćemo površ, koju zovemo eliptički parabolid. Tada parametri α, β i γ treba da zadovoljavaju uslove

$$\alpha^2 = 2p\gamma, \ \beta^2 = 2q\gamma. \qquad (1)$$

Jednačina elipse E i (1) daju nam jednačinu eliptičkog parabolida

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \qquad (2)$$

gde su p i q parametri površi. Ako je $p=q$ dobijamo raotacioni parabolid

$$\frac{x^2 + y^2}{p} = 2z.$$

Hiperbolički parabolid

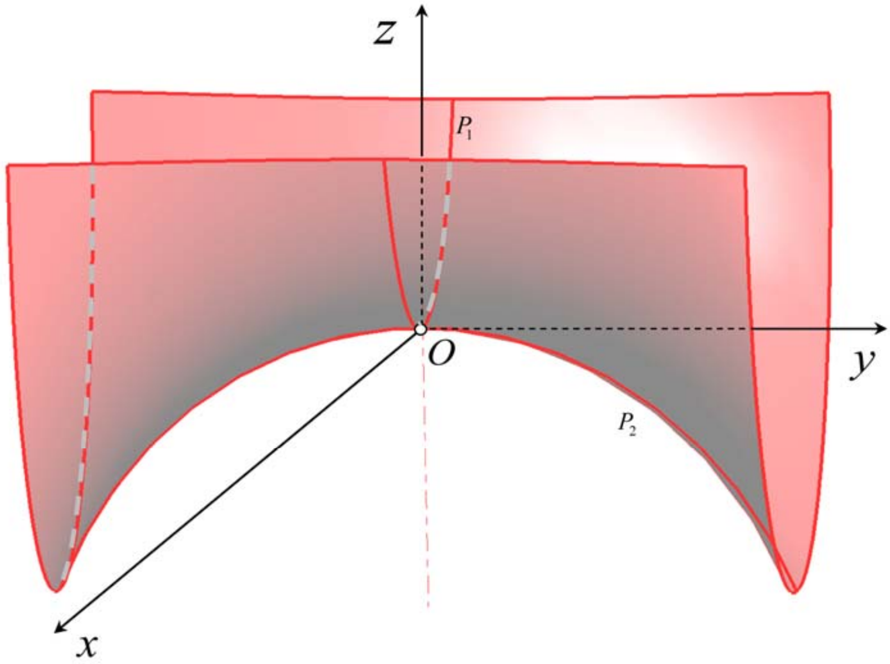
Neka je u ravni Oxz data fiksirana parabola (P_1) koja igra ulogu direktrise

$$x^2 = 2pz, \ y=0, \ p>0. \qquad (1)$$

Generatrisa je translatorna parabola (P_2) čija je jednačina

$$y^2 = -2q(z-\gamma), \ x=\beta, \ q>0, \qquad (2)$$

gde su β i γprizvoljni parametri(slika 63.).



Slika 63: Hiperbolički parabolid

Parabola P_2 se kreće paralelno ravni Oyz tako da njena temena $A(\beta, 0, \gamma)$ opisuju parabolu P_1. Površ koja svojim kretanjem opisuje parabola P_2, zove se hiperbolički parabolid.

Nađimo njegovu jednačinu.

Eliminacijom proizvoljnih parametra β i γ iz jednačina (1) i (2) dobijamo jednačinu hiperboličkog parabolida,

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z .$$

Cilindrične površi

Neka je u prostoru data kriva linija l, (ravanska ili prostorna) i jedna utvrđena prava p. Pravu p zovemo generatrisa, a liniju l direktrisa(slika 64.).

Definicja 31.

Cilindrična površ je geometrijsko mesto tačaka u prostoru, koje nastaje translatornim kretanjem prave paralelne datoj pravi, duž date krive u prostoru.

Naka je prava p, data parametarski

$x=mz+p, \ y=nz+q.$

Tada je generatrisa definisana jednačinom

$$x=mz+\alpha, \ y=nz+\beta, \tag{1}$$

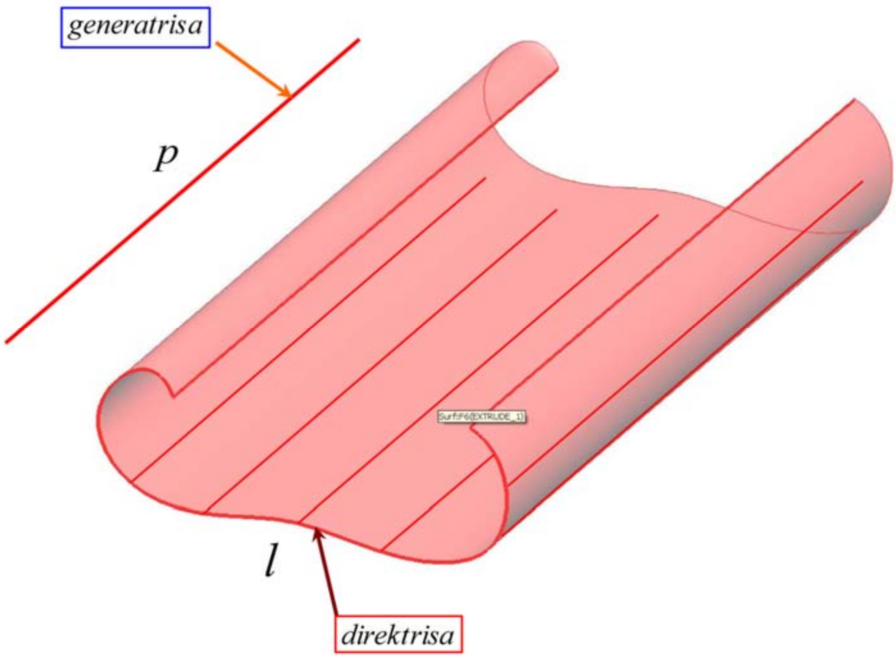
gde su α i β parametri.

Neka je direktrisa definisana jednačinom

$F(x,y)=0, z=0.$

Tačka $M(\alpha, \beta, 0)$ je zajednička tačka u preseku direktrise i generatrise, pa mora biti

$$F((\alpha, \beta)=0. \qquad (2)$$



Slika 64: Cilindrična površ

Iz (1) izrazimo α i β i zamenimo u (2) dobićemo jednačinu cilindrične površi

$$F(x-mz,y-nz)=0.$$

Konusna površ

Neka je data fiksirana kriva linija(l) i pokretna prava p, koja prolazi tačkama linije l i jednom fiksiranom tačkom A(slika 65.).

<u>Definicja 32.</u>

Konusna površ je geometrijsko mesto tačaka u prostoru koje obrazuje jedna prava, koja prolazi kroz jednu utvrđenu tačku i kroz tačke na datoj krivoj liniji(slika 65.).

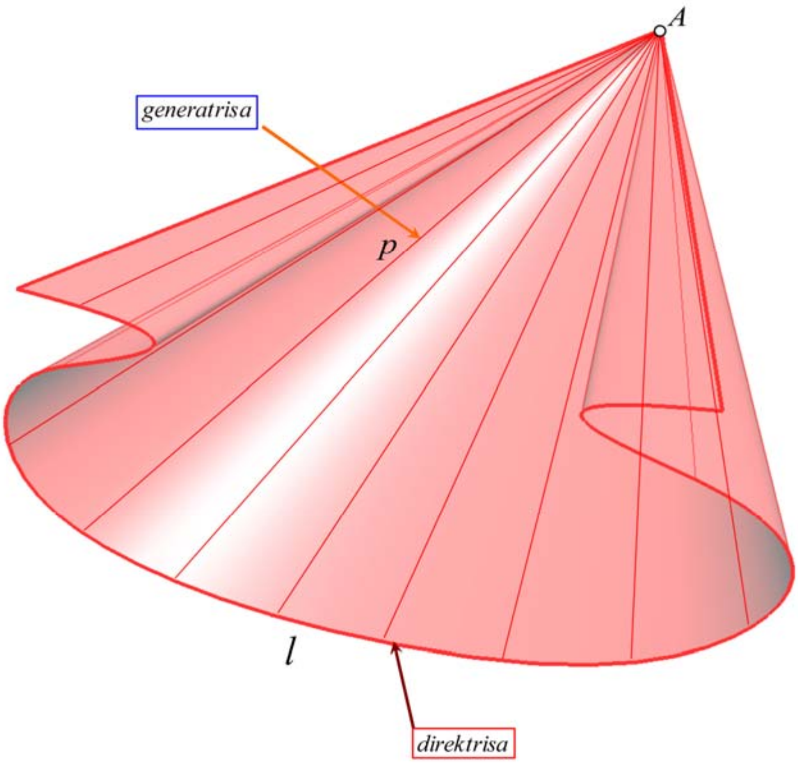
Kriva linija l se naziva direktirsa (vodilja), a prava p je generatrisa(izvodnica).

Neka fiksirana tačka A ima koordinate $A(x_0,y_0,z_0)$, a fiksirana kriva linija jednačinu

$$f(x,y)=0,\ z=0. \qquad (1)$$

Nađimo jednačinu konusne površi.

Generatise su prave, koje prolaze tačkom A. Tada je



Slika 65: Konusna površ

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{l}=\frac{z-z_0}{k}. \qquad (2)$$

Neka je tačka $B(l,m,0)$ zajednička tačka (1) i (2) tada je

$$f(m,l)=0 \qquad (3)$$

Rešavanjem iz (2) l i m i zamenom u (3) dobićemo jednačinu konusne površi:

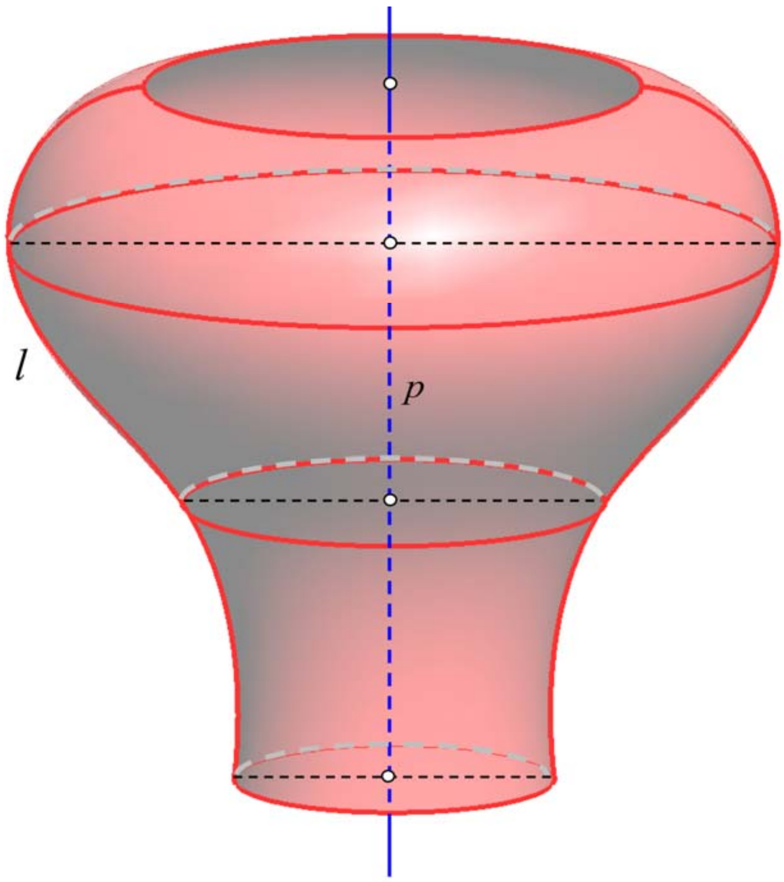
$$f(\frac{x-x_0}{z-z_0},\frac{y-y_0}{z-z_0})=0.$$

Rotaciona(obrtna) površ

Neka je u ravni α data kriva l i prava p, tako da prava p ne seče krivu l.

Definicja 33.

Rotiranjem krive l oko utvrđene prave p za pun ugao nastaje rotaciona površ(slika 66.).



Slika 66: Rotaciona površ

Prava p je osa rotacije. Svaka tačka linije l opiše kružnicu K sa centrom koji pripada pravi p.

Kružnica K se zove generatrisa, a linija l direktrisa rotacione površi. Neka je linija l data jednačinom

$$f(y,z)=0,\ x=0, \tag{1}$$

koja rotira oko Oz ose. Tada kružnice K imaju jednačinu

$$x^2+y^2=r^2,\ z=\alpha\,. \tag{2}$$

Zajednička tačka A (1) i (2) ima koordinate $A(0,r,\alpha)$, zato je

$$f(r,\alpha)=0. \tag{3}$$

Tada iz (2) zamenom r i α u (3) dobijamo

$$f(\sqrt{x^2+y^2},z)=0,$$

što predstavlja jednačinu rotacione površi.

Na sličan način može se dobiti rotaciona površ koja rotira oko ose Ox ili ose Oy, to jest,

$$f(\sqrt{y^2+z^2},x)=0 \text{ ili } f(\sqrt{z^2+x^2},y)=0\,.$$

Literatura

1. Mihajlović D. , Elemanti vektorske algebre i analitičke geometrije u prostoru, Begrad 1958
2. Погорелов А. В., Лекций по аналитческой геометрии, Харков 1957
3. Rašajski Borivoje, Analitička geometrija, Beograd 1977
4. Stojaković Z., Herceg D., Linerana algebra i analitička geometrija, Zavod za izdavanje udzbenika, Novi Sad 1992
5. Murdoch D., Analytic Geometry, New York, London, Sydney 1966

Kratka biografija

Rodjen sam 10.06.1959. godine u Sremskoj Mitrovici. Osnovnu školu „Vuk Karadžić" završio sam u selu Vašici. Gimnaziju sam završio sa odličnim uspehom u Šidu i Sremskoj Mitrovici.

Prirodno - matematički fakultet u Novom Sadu, smer profesor matematike, upisao sam 1979/1980. godine. Posle završetka studija zaposlio sam se kao profesor matematike u srednjoj školi.

Fotografija
kandidata

…………………………………

Novi Sad,
02.08.2010. godine

Ime i prezime
Vladimir Tutić

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLjUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni Štampani materijal

TZ

Vrsta rada: master rad

VR

Autor: Vladimir Tutić

AU

Mentor: dr Siniša Crvenković, redovni profesor

MN

Naslov rada: Elementi analitičke geometrije u prostoru R^3

MR

Jezik publikacije: *Srpski (latinica)*

JP

Jezik izvoda: *s / e*

JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2010.

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku, Trg Dositeja Obradovića 4.

MA

Fizički opis rada: (*broj poglavlja/ broj strana/ broj lit. citata/ broj tabela/ broj slika/ broj grafika broj priloga*)

3. Poglavlja, 3. Poglavlja, 83. starane, 66. slika, 1. tabela.

FO

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: metodika nastave matematike

ND

Ključne reči: matematika, definicija, teorema, dokaz

PO

UDK:

Čuva se: PM, Novi Sad, Biblioteka Departman za matematiku, Trg Dositeja Obradovića 4.

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod: U ovom kursu obrađen je standardni kurs, analitičke gemetrije u prostoru R^3, sa uvodnim delom iz algebre vektora.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća:

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: dr Ljiljana Gajić, redovni profesor, PMF, Novi Sad

Član: dr Zagorka Lozanov – Crvenković, redovni profesor, PMF, Novi Sad

Član: dr Siniša Crvenković, redovni profesor, PMF, Novi Sad

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE KEY
WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification umber:

INO

Document type: Monography type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents Code: Master Thesis

CC

Author: Vladimir Tutić

AU

Mentor: Dr Siniša Crvenković, full professor

MN

Title: Elements of Analytical Geometry in R^3

XI

Language of text: Serbian(latin)

LT

Language of abstract: s/l

LA

Country of publication: Republic of Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2010.

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publ. place: Novi Sad, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Departman of Mathematics, 4. Dositeja Obradovića

PP

Physical description: (*broj poglavlja, broj strana, broj lit. citata, broj tabela, broj slika, broj grafika, broj priloga*)

PD 3. Chapters, 83. pages, 66. pictures, 1. table.

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Methods of mathematical teaching

Key words: Mathematics, definition, theorem, proof

UC:

Holding data: FNSM, Novi Sad, Library of Department of Mathematics,

4. Trg Dositeja Obradovića

HD Note: None

Abstract: In this thesis, a standard course of analytic geometry in the space R^3 with introductory part, in vector algebra has been presented.

Accepted by the Scientific Board on:

Defended:

Thesis defend board: President: dr Ljilana Gajić, full professor, FNSM, Novi Sad

Member: dr Zagorka Lozanov – Crvenković, full professor, FNSM, Novi Sad

Member: dr Siniša Crvenković, full professor, FNSM, Novi Sad