



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU
I INFORMATIKU



Vladimir Francisti

Sistemi diferencijalnih jednačina i primene u farmaciji i ekologiji

– master rad –

Novi Sad, septembar 2013.

Sadržaj :

Predgovor	4
1. Sistemi običnih homogenih diferencijalnih jednačina	5
1.1 Uvod	5
1.2 Homogeni sistemi sa konstantnim koeficijentima	6
1.2.1 Koreni su realni i različiti	7
1.2.2 Koreni su konjugovano kompleksni	8
1.2.3 Koreni su realni i jednaki	11
1.3 Homogene jednačine drugog reda	13
1.4 Polje pravaca i fazni portreti	14
1.4.1 Koreni su realni i različiti	15
1.4.2 Koreni su konjugovano kompleksni	17
1.4.3 Koreni su realni i jednaki	18
1.4.4 Kratak pregled	19
1.4.5 Kriterijum pomoću traga i determinante matrice	19
1.5 Matrice i karakteristični koreni	21
1.6 Sistemi tri i više jednačina	25
1.7 Primena	28
1.7.1 Kinetika lekova	28
1.7.2 Lek Lidokain	32
2. Nehomogeni linearni sistemi običnih diferencijalnih jednačina	36
2.1 Uvod	36
2.2 Metoda neodređenih koeficijenata	37
2.3 Metoda varijacije konstanti	38
2.3.1 Jednačine drugog reda	41
2.4 Zapis pomoću matrica	43
2.5 Primena : Kinetika lekova II	48

3. Nelinearni sistemi običnih diferencijalnih jednačina.....	57
3.1 Uvod	57
3.2 Fazni portreti i ravnotežne tačke	58
3.3 Princip linearizacije.....	60
3.4 Lokalni fazni portreti	63
3.5 Globalni fazni portreti	66
4. Primena nelinearnih sistema diferencijalnih jednačina	69
4.1 Epidemije	69
4.1.1 SIR model	69
4.1.2 HIV/AIDS model	74
4.2 Ekologija	82
4.2.1 Modeli tipa Lotka-Voltera	82
4.2.2 Modeli dve populacije u takmičenju	87
4.2.3 Primena analize stabilnosti sistema	89
Zaključak.....	92
Biografija	93
Literatura	94

Predgovor

Cilj ovog master rada je objasniti rešavanje sistema običnih diferencijalnih jednačina sa posebnim osvrtom na njihove primene u farmaciji i ekologiji. Iz oblasti farmacije, primene na kojima se fokusira master rad su korišćenje raznih lekova u medicini, Kermack – McKendrickovi modeli, od kojih će se posebno razmatrati rasprostranjenost epidemije u određenoj populaciji i HIV/AIDS epidemija. A iz oblasti ekologije, posebna pažnja će biti posvećena modelima tipa Lotka – Voltera i modelima tipa dve populacije u takmičenju.

Master rad se sastoji od četiri poglavlja. Prva tri poglavlja predstavljaju teorijski deo o određenim tipovima sistema diferencijalnih jednačina. Na kraju svakog poglavlja dat je primer iz prakse, gde je moguće koristiti navedene sisteme. Četvrto poglavlje se sastoji od komplikovanijih primena ovakvih sistema. Na početku svakog poglavlja, biće bliže opisano o kakvim konkretnim sistemima i primenama se radi.

Treba napomenuti, da je za razumevanje ovog master rada, potrebno elementarno poznavanje diferencijalnih jednačina i odgovarajućih pojmova. Iako je u većini slučajeva objašnjeno sve što je neophodno znati za praćenje rada, ipak nije bilo moguće sve objasniti detaljno, da se ne bi otišlo predaleko od glavne teme master rada, a to su sistemi diferencijalnih jednačina i njihova primena.

Zahvaljujem se mentoru, profesoru Arpadu Takačiju na razumevanju, pomoći i pruženim korisnim savetima u toku izrade ovoga master rada. Iako nam vreme nije išlo u prilog, ipak smo uspeli da ga zajedno završimo. Još bih se zahvalio i profesorici Dušanki Perišić i profesorici Dori Seleši na pomoći i primedbama u vezi master rada. Koristim priliku da se zahvalim celoj porodici, svojoj devojci i svima ostalima koji su mi, na bilo koji način pružili pomoć i podršku u toku studiranja, kao i prilikom izrade master rada.

Novi Sad, septembar, 2013.

Vladimir Francisti

1. *Sistemi običnih homogenih diferencijalnih jednačina*

Kod običnih linearnih diferencijalnih jednačina postoji metoda, u zavisnosti od tipa jednačine, kako dolazimo do opšteg rešenja. Ovakva metoda nije moguće koristiti za opšte sistema linearnih jednačina sa dve ili više jednačina (homogenog ili nehomogenog tipa), ali ipak postoji metoda za bitnu podklasu homogenih sistema a to su sistemi sa konstantnim koeficijentima, koji se nazivaju i *autonomni sistemi*.

1.1 *Uvod*

Ovo poglavlju razmatra sisteme homogenih linearnih diferencijalnih jednačina, ali prvo ćemo krenuti od uopštenih linearnih. Kao što važi da se opšte rešenje obične nehomogene linearne diferencijalne jednačine sastoji od homogenog i partikularnog dela, slično važi i za sisteme običnih nehomogenih diferencijalnih jednačina. Tako da je opšte rešenje sistema običnih nehomogenih diferencijalnih jednačina

$$\begin{aligned}x' &= ax + by + h_1(t) \\ y' &= cx + dy + h_2(t),\end{aligned}\tag{1.1}$$

gde su koeficijenti a, b, c i d konstante, ima oblik

$$\begin{aligned}x &= x_h(t) + x_p(t) \\ y &= y_h(t) + y_p(t),\end{aligned}$$

pri čemu je par $x_p(t), y_p(t)$ partikularno rešenje sistema a par $x_h(t), y_h(t)$ rešenje homogenog sistema

$$\begin{aligned}x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy.\end{aligned}\tag{1.2}$$

A kao i kod jedne obične homogene diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima i kod sistema jednačina rešenje sistema (1.2) je linearna kombinacija dva rešenja, odnosno

$$x_h = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$

$$y_h = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t),$$

gde su $x_1(t), y_1(t)$ i $x_2(t), y_2(t)$ dva nezavisna rešenja tog sistema.

O nehomogenim sistemima više u sledećem poglavlju a u ovom se nameće pitanje kada mogu da nađu dva nezavisna rešenja, koji uslovi moraju da važe i kako će ona izgledati.

1.2 Homogeni sistemi sa konstantnim koeficijentima

Do rešenja homogenog sistem (1.2) se dolazi isto, kao i kod rešavanje jedne jednačine, tako što se ubacuje par eksponencijalnih rešenja oblika

$$x = v_1 e^{\lambda t}$$

$$y = v_2 e^{\lambda t}$$

u početni sistem i dobija se

$$\lambda v_1 e^{\lambda t} = a v_1 e^{\lambda t} + b v_2 e^{\lambda t}$$

$$\lambda v_2 e^{\lambda t} = c v_1 e^{\lambda t} + d v_2 e^{\lambda t}$$

ili posle sređivanja

$$[(a - \lambda)v_1 + b v_2]e^{\lambda t} = 0$$

$$[c v_1 + (d - \lambda)v_2]e^{\lambda t} = 0.$$

Pošto $e^{\lambda t}$ ne može biti nula a da bi bile zadovoljene obe jednačine dobija se sledeće

$$(a - \lambda)v_1 + bv_2 = 0 \quad (1.3)$$

$$cv_1 + (d - \lambda)v_2 = 0.$$

Da bi se dobilo netrivialno rešenje ovog sistema mora se pronaći takvo λ , za koje je determinanta ovog sistema jednaka 0, odnosno

$$\det \begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0. \quad (1.4)$$

Ova kvadratna jednačina se zove *karakteristična jednačina* sistema (1.2) a kvadratni polinom, koji se dobija iz determinante se naziva *karakteristični polinom* tog sistema.

Rešenje karakteristične jednačine je dato sa

$$\lambda_{1/2} = \frac{a + d \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}}{2}$$

i u sledećem poglavlju će se razmatrati, u zavisnosti od tipa korena, kako se dolazi do rešenja početnog homogenog sistema.

1.2.1 Koreni su realni i različiti

Kada važi da je $(a + d)^2 > 4(ad - bc)$, karakteristična jednačina (1.4) ima dva različita realna korena $\lambda_1 \neq \lambda_2$ i ubacivanjem ovih korena u sistem (1.3) dobijaju se dva rešenja oblika

$$x_1 = v_1 e^{\lambda_1 t} \quad \text{odnosno} \quad x_2 = w_1 e^{\lambda_2 t}$$

$$y_1 = v_2 e^{\lambda_1 t} \quad y_2 = w_2 e^{\lambda_2 t}$$

a pošto $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ni eksponencijalne funkcije $e^{\lambda_1 t}$ i $e^{\lambda_2 t}$ ne mogu biti umnožci te iste funkcije, zaključuje se da postoje dva nezavisna para rešenja. I na kraju, rešenje sistema se dobija kao linearna kombinacija ova dva para rešenja, odnosno

$$x = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 w_1 e^{\lambda_2 t}$$

$$y = c_1 v_2 e^{\lambda_1 t} + c_2 w_2 e^{\lambda_2 t}.$$

1.2.2 Koreni su konjugovano kompleksni

Kada važi da je $(a + d)^2 > 4(ad - bc)$, karakteristična jednačina (1.4) ima konjugovano kompleksna rešenja. U ovom slučaju $e^{\lambda t}$ je kompleksan pa i rešenja za v_1 i v_2 jednačine (1.3) će biti kompleksni brojevi, a na kraju i par koji predstavlja rešenje početnog sistema će biti kompleksni. Cilj je dobijanje rešenja, koje nije kompleksnog tipa, i u nastavku se objašnjava kako se rešava ovaj problem.

Podsetimo da kompleksan broj λ može biti napisan u formi

$$\lambda = \alpha + i\beta,$$

gde su α i β realni brojevi koji se zovu redom *realni deo* od λ i *imaginarni deo* od λ . Slično i složene funkcije, kao na primer eksponencijalna, takođe mogu imati realni i imaginarni deo. Potrebna je smena funkcije oblika

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

gde realni deo od e^{it} predstavlja $\cos t$ a imaginarni deo $\sin t$, ili malo uopštenije

$$e^{i\beta t} = \cos \beta t + i \sin \beta t.$$

Kada se ovo iskoristi na $e^{\lambda t}$ dobija se

$$e^{\lambda t} = e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t} e^{i\beta t}$$

i onda

$$e^{\lambda t} = e^{\alpha t} \cos \beta t + i e^{\alpha t} \sin \beta t.$$

Treba dokazati, da ako je par rešenja kompleksnog tipa

$$x = x_1(t) + ix_2(t)$$

$$y = y_1(t) + iy_2(t)$$

homogenog sistema (1.2), onda i realni delovi i imaginarni delovi

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t)$$

$$y_1 = y_1(t), \quad y_2 = y_2(t)$$

predstavljaju po jedan par rešenja početnog sistema.

Ovo se dokazuje proverom, tako što se rešenje uvrsti u prvu jednačinu sistema i dobija se

$$x'_1 + ix'_2 = a(x_1 + ix_2) + b(y_1 + iy_2) = (ax_1 + by_1) + i(ax_2 + by_2)$$

kao i u drugu jednačinu sistema i dobija se

$$y'_1 + iy'_2 = c(x_1 + ix_2) + d(y_1 + iy_2) = (cx_1 + dy_1) + i(cx_2 + dy_2).$$

Dva kompleksna broja su ista ako su im isti realni i imaginarni delovi, i ako se iskoristi ova činjenica na realne delove ove dve jednačine dobija se

$$x_1' = ax_1 + by_1$$

$$y_1' = cx_1 + dy_1,$$

što znači da je par x_1, y_1 rešenje sistema a slično važi i kada se uporede imaginarni delovi. Dobija se

$$x_2' = ax_2 + by_2$$

$$y_2' = cx_2 + dy_2,$$

što znači da je i par x_2, y_2 takođe rešenje sistema.

U uopštenom slučaju, ako postoji koren $\lambda = \alpha + i\beta$, koji je kompleksan ($\beta \neq 0$) i dobijeno kompleksno rešenje

$$x = v_1 e^{\lambda t}$$

$$y = v_2 e^{\lambda t},$$

gde su

$$v_1 = u_1 + iw_1$$

$$v_2 = u_2 + iw_2$$

kompleksna rešenje jednačine (1.3), realni delovi predstavljaju jedan par a imaginarni delovi drugi par rešenja i oni su nezavisni, jer ako bi pretpostavili suprotno, došli bi do zaključka da oba moraju da budu jednaka 0.

Ovako izgledaju parovi rešenja dobijeni iz realnih i imaginarnih delova

$$x_1 = e^{\alpha t}(u_1 \cos \beta t - w_1 \sin \beta t)$$

$$y_1 = e^{\alpha t}(u_2 \cos \beta t - w_2 \sin \beta t)$$

i

$$x_2 = e^{\alpha t}(u_1 \sin \beta t - w_1 \cos \beta t)$$

$$y_2 = e^{\alpha t}(u_2 \sin \beta t - w_2 \cos \beta t).$$

A opšte rešenje je linearna kombinacija ova dva rešenja, odnosno

$$x = e^{\alpha t}[(c_1 u_1 + c_2 w_1) \cos \beta t + (-c_1 w_1 + c_2 u_1) \sin \beta t]$$

$$y = e^{\alpha t}[(c_1 u_2 + c_2 w_2) \cos \beta t + (-c_1 w_2 + c_2 u_2) \sin \beta t].$$

U praksi je lakše izračunati realne i imaginarne delove kompleksnog rešenja nego upamtiti ove formula, pa se češće računa nego ubacuje u ovu konačnu formulu.

Drugi koren karakteristične jednačine je konjugovano kompleksan prvom, odnosno $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, a iz njega dobijena kompleksna rešenja su takođe konjugovano kompleksna rešenjima dobijenim iz prvog korena. Par rešenja, koji se dobija iz realnih delova je isti a par koji se dobija iz imaginarnih delova je ustvari -1 puta prvog para. Zaključak je da parovi rešenja dobijeni iz drugog korena nisu nezavisni od parova dobijenih iz prvog korena, pa se u praksi ne razmatra drugi konjugovano kompleksan koren.

1.2.3 Koreni su realni i jednaki

Poslednja mogućnost je kada važi da je $(a + d)^2 = 4(ad - bc)$, karakteristična jednačina (1.4) ima jednaka rešenja, odnosno ima jedan koren i to

$$\lambda = \frac{1}{2}(a + d).$$

Slično kao i u predhodna dva slučaja ubacuje se par rešenja eksponencijalnog oblika

$$x = v_1 e^{\lambda t}$$

$$y = v_2 e^{\lambda t}.$$

Do opšteg rešenja dolazi se kao i u predhodnim slučajevima, ali tu može da dođe do malog problema. Ako je $b = c = 0$ i $a = d$ onda je koren $\lambda = a$ i opšte rešenje je oblika

$$x_1 = c_1 e^{\lambda t}$$

$$y_1 = c_2 e^{\lambda t}.$$

U uopštenom slučaju potreba je još jedno nezavisno rešenje, koje će se sastojati od početne eksponencijalne funkcije $e^{\lambda t}$ i t – umnoška te funkcije $e^{\lambda t}$, odnosno

$$x_2 = (w_1 + v_1 t) e^{\lambda t}$$

$$y_2 = (w_2 + v_2 t) e^{\lambda t},$$

gde su w_1, w_2 rešenja sistema

$$(a - \lambda)w_1 + bw_2 = v_1$$

$$cw_1 + (d - \lambda)w_2 = v_2$$

a opšte rešenje početnog sistema je linearna kombinacija ova dva rešenja, odnosno

$$x = [c_1 v_1 + c_2 (w_1 + v_1 t)] e^{\lambda t}$$

$$y = [c_1 v_2 + c_2 (w_2 + v_2 t)] e^{\lambda t}.$$

1.3 Homogene jednačine drugog reda

Homogene jednačine drugog reda tipa

$$ax'' + bx' + cx = 0, \quad a \neq 0 \quad (1.5)$$

prebacuje se u sistem dve obične diferencijalne jednačine smenom

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -\frac{c}{a}x - \frac{b}{a}y. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Ako su koeficijenti a, b i c konstante, mogu se pronaći dva nezavisna rešenja ovog sistema, a i opšte rešenje, koristeći metode objašnjene u poglavlju 1.2.

U slučaju homogene jednačine drugog reda postoji i „prečica“ do pronalaska opšteg rešenja. Karakteristična funkcija za sistem (1.6)

$$\lambda^2 + \frac{b}{a}\lambda + \frac{c}{a} = 0$$

a koreni ove jednačine su isti kao i koreni jednačine

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0, \quad (1.7)$$

što ustvari predstavlja *karakterističnu jednačinu homogene jednačine drugog reda* (1.5).

Vidi se da se koeficijenti karakteristične jednačine mogu pročitati direktno iz diferencijalne jednačine, što znači da nije potrebno konstruisati sistem homogenih diferencijalnih jednačina.

U slučaju da su koreni sistema (1.6) realni i različiti, koristeći teoriju objašnjenu u predhodnom poglavlju do opšteg rešenja homogene jednačine drugog reda (1.5) dolazi se tako

što se uzima prvi elemenat para rešenje, koji odgovara korenu λ_1 , odnosno $x_1 = e^{\lambda_1 t}$, i prvi elemenat para rešenja, koji odgovara korenu λ_2 , odnosno $x_2 = e^{\lambda_2 t}$ i uzima se njihova linearna kombinacija, odnosno

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Zaključak je da se ovo opšte rešenje može napisati odmah pošto su se dobili koreni karakteristične jednačine a bez rešavanja sistem po v_1 i v_2 , kao u predhodnom poglavlju. Slične prečice se mogu koristiti i kada su koreni konjugovano kompleksni i kada su realni i jednaki. Sažetim pregledom će se dati svi oblici opšteg rešenje homogene diferencijalne jednačine drugog reda u tabeli br.1.

Tabela br.1 Koreni jednačine $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$	Opšte rešenje diferencijalne jednačine drugog reda $ax'' + bx' + cx = 0, \quad a \neq 0$
Realni i različiti $\lambda_1 \neq \lambda_2$ Kompleksno konjugovani $\lambda = \alpha \pm \beta i, \beta \neq 0$ Realni i jednaki $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$	$x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ $x = e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t)$ $x = (c_1 + c_2 t)e^{\lambda t}$

1.4 Polje pravaca i fazni portreti

Polje pravaca je vizuelni prikaz određenih osobina pojedinih vrsta diferencijalnih jednačina. U svakoj tački određenog polja pravaca postoji strelica, koja govori u kom smeru se kreće sistem iz te tačke. Rešenje koje zadovoljava posmatrani sistema u polju pravaca se naziva *trajektorija* a skup svih trajektorija jednog sistema se naziva *fazni portret* tog sistema. U suštini, trajektorija je skup tačaka $(x(t), y(t))$ u x, y – ravni, koje se dobijaju za sve vrednosti t iz nekog vremenskog interval. U radu će se analizirati fazni portreti u ravnotežnim tačkama sistema a pomoću oblika trajektorija će se odrediti tip posmatrane ravnotežne tačke. U ovom poglavlju crtaće se fazni portreti za homogeni sistem (1.2) i klasifikovaće se u nekoliko grupa, koje će biti nabrojane u nastavku.

Radi lakšeg crtanja faznog portreta u x, y – ravni za sistem (1.2) pretpostaviće se da sistem ima samo jednu ravnotežnu tačku $x = 0, y = 0$, odnosno da je trivijalna ravnotežna tačka jedino rešenje sistema

$$ax + by = 0$$

$$cx + dy = 0$$

a da bi ovo važi, mora biti zadovoljen uslov $ad - bc \neq 0$, nejednakost koja se dobija iz matrice sistema (1.2), koja se zove još i *matrica koeficijenata sistema* a izgleda

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Ako važi da je $ad - bc \neq 0$, onda za sistem (1.2) kažemo da je rešiv. Sistem je u ovom slučaju rešiv ako i samo ako $\lambda = 0$ nije rešenje karakteristične jednačine (1.4).

Trajektorije, koje odgovaraju proizvoljnoj ravnotežnoj tački (x_e, y_e) u faznoj ravni translacijom koordinatnog početka u tu tačku postaju trajektorije, koje odgovaraju trivijalnoj ravnotežnoj tački, odnosno tački $(0,0)$. Jednostavan homogeni sistema (1.2) ima samo jednu ravnotežnu tačku, koordinatni početak. Pošto je opšte rešenje sistema (1.2) podeljeno u tri kategorije na osnovu tipa rešenja karakteristične jednačine, logično je da se na osnovu te podele dele i klase trajektorija u ravnotežnim tačkama sistema, tačnije dele se čitavi fazni portreti na osnovu njihovom obliku trajektorija. Ako se krene od formula za opšta rešenja sistema na kraju ćemo znati da nacrtame fazni portret bez pronalazena istih.

1.4.1 Koreni su realni i različiti

U ovom poglavlju će bitno kako izgleda fazni portret kada su karakteristični koreni λ_1 i λ_2 karakteristične jednačine (1.4) realni i različiti a opšte rešenje homogenog sistema (1.2) izgleda

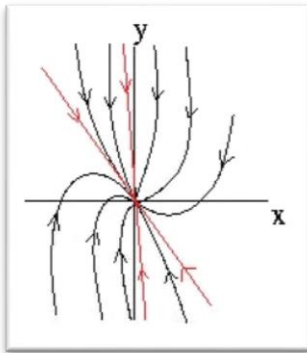
$$x = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 w_1 e^{\lambda_2 t}$$

$$y = c_1 v_2 e^{\lambda_1 t} + c_2 w_2 e^{\lambda_2 t}$$

gde su v_1, v_2 i w_1, w_2 rešenja sistema (1.3) kada bi zamenili $\lambda = \lambda_1$ i $\lambda = \lambda_2$.

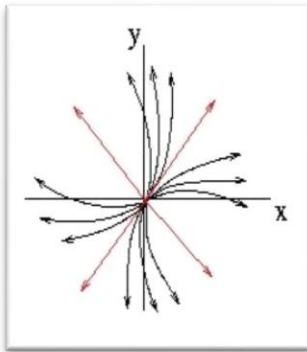
I ovde se uvodi mala podela, pošto nisu jednaki fazni portreti za sve tipove λ .

Slika 1 :



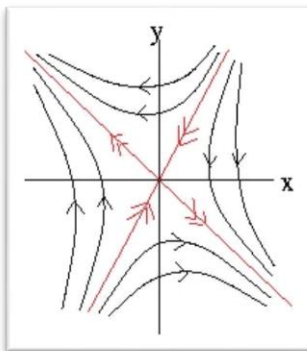
tako što se napravi prava kroz koordinatni početak i tačku (v_1, v_2) odnosno koordinatni početak i tačku (w_1, w_2) . A preko koje prave će odtale trajektorije težiti ka koordinatnom početku zavisi od toga, koje je rešenje manje. Ako je $\lambda_2 < \lambda_1$ težiće preko prave kroz tačku (v_1, v_2) i obratno.

Slika 2 :



rastuća, pa $e^{\lambda_1 t}$ i $e^{\lambda_2 t}$ raste kada $t \rightarrow \infty$. Kada bi posmatrali vreme unazad, odnosno $t \rightarrow -\infty$, trajektorije bi se približavane koordinatnom početku kao kod stabilnog čvora. Prave se dobijaju na isti način kao i kod stabilnog čvora, što važi i za činjenicu, preko koje prave se tangencijalno udaljavaju od koordinatnog početka.

Slika 3 :



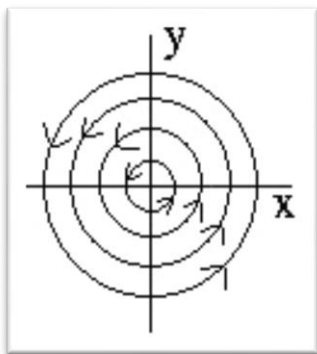
Ako su karakteristični koreni istog znaka fazni portret predstavlja čvor, koji je ili stabilan ili nestabilan. Ostaje još mogućnost, kada su koreni različitog znaka. Ovaj slučaju predstavlja spoj predhodna dva slučaja, što bi značili da ako važi $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, prava koja prolazi kroz tačku (v_1, v_2) će se ponašati kao kod stabilnog čvora i njene poluprava će se približavati koordinatnom početku a prava koja prolazi kroz tačku (w_1, w_2) će se ponašati kao kod nestabilnog čvora, odnosno poluprave će se udaljavati od koopočetka (slika levo). Dok će se sve ostale trajektorije kretati tangencijalno od poluprava koja odgovara prvom rešenju, kada $t \rightarrow -\infty$, tangencijalno prema polupravi koja odgovara drugom rešenju, kada $t \rightarrow \infty$ (slika 3). Ovakav fazni portret se naziva *sedlo* a poluprava kojoj se familije krivih

približaju kada $t \rightarrow \infty$ se zajedno naziva stabilna mnogostrukosti (eng. manifold) a poluprave kojoj se familije krivih približavaju kada $t \rightarrow -\infty$ se zajedno nazivaju nestabilna mnogostrukost. Stabilna i nestabilna mnogostrukost predstavlja geometrijsku okosnicu i oblik faznog portreta tipa sedlo. Ravnotežne tačke faznog portret tipa sedlo se nazivaju *sedlaste tačke*.

1.4.2 Koreni su konjugovano kompleksni

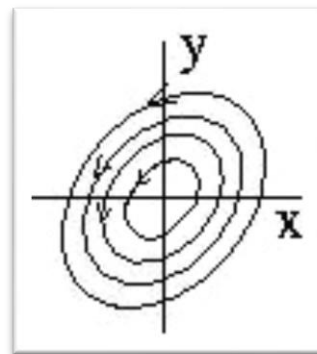
U ovom poglavlju razmatra se slučaj kada su koreni karakteristične jednačine konjugovano kompleksni brojevi oblika $\lambda = \alpha \pm \beta i$, $\beta \neq 0$. I ovde kao i u predhodnom poglavlju biće nekoliko slučajeva, koje će se podeliti na osnovu izgleda faznih portreta i svaki od njih će biti detaljno objašnjen i grafički prikazan.

Slika 4 :



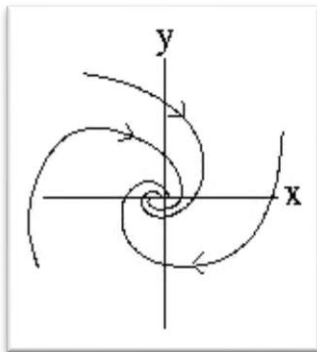
Prvo će biti objašnjen slučaj kada su koreni karakteristične jednačine samo imaginarni, odnosno oblika $\lambda = \pm \beta i$, $\beta \neq 0$. Tada fazni portret ima oblik, koji se naziva *centar*. Za centar se kaže da je neutralno stabilan, pošto se trajektorije ne približavaju, ali se i ne udaljavaju, kada $t \rightarrow \infty$. Drugačije rečeno trajektorije će ostati blizu

Slika 5 :



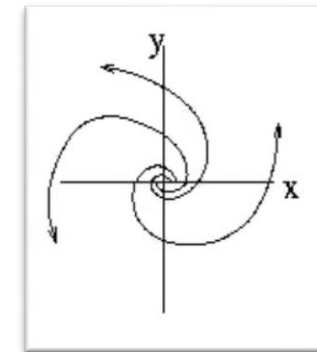
koordinatnog početka isto toliko koliko su bile udaljene i na početku posmatranog perioda, odnosno kada je $t = 0$. U specijalnom slučaju kada su koreni oblika $\lambda = \pm i$, tada trajektorije predstavljaju koncentrične krugove (slika 4). U opštem slučaju kada su koreni karakteristične jednačine samo imaginarni, odnosno oblika $\lambda = \pm \beta i$, $\beta \neq 0$, trajektorije su elipse (slika 5).

Slika 6 :



Druga mogućnost je da se karakteristični koreni sastoje i iz realnog i iz imaginarnog dela, $\lambda = \alpha \pm \beta i$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, tada trajektorije više nisu elipse nego postaju spirale. Slično kao i kod realnih i različitih korena u zavisnosti od znaka α postoji stabilna i nestabilna spirala. Pa tako ako je $\alpha < 0$ trajektorije se približavaju koordinatnom početku,

Slika 7 :

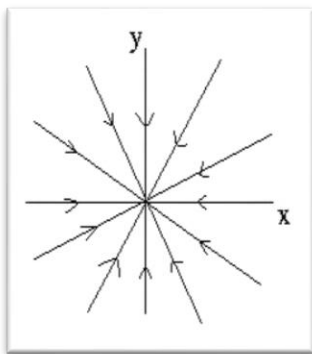


kada $t \rightarrow \infty$, a fazni portret je *stabilna spirala* (slika 6) a u slučaju kada je $\alpha > 0$ trajektorije se udaljavaju od koordinatnog početka, kada $t \rightarrow \infty$, i fazni portret je *nestabilna spirala* (slika 7).

1.4.3 Koreni su realni i jednaki

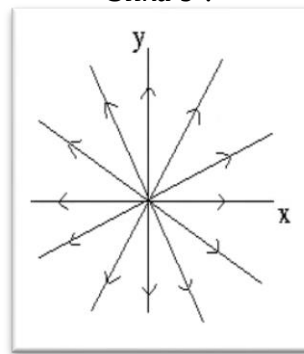
Poslednja mogućnost je kada važi da je $(a + d)^2 = 4(ad - bc)$, karakteristična jednačina (1. 4) ima jednaka rešenja, odnosno ima samo jedan koren i to je, kao što je u predhodnom poglavlju spominjano $\lambda = \frac{1}{2}(a + d)$.

Slika 8 :



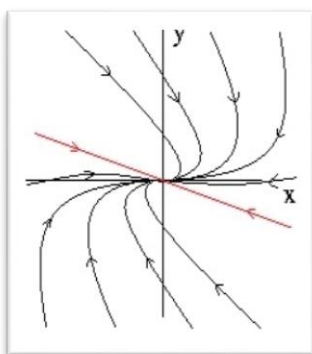
Opet se deli na dva slučaja, kada važe uslovi $b = c = 0$ i $a = d$ odnosno kada je koren $\lambda = a$, tada sve trajektorije predstavljaju poluprave koje obrazuje takozvanu *zvezdu*, a ako je $\lambda = a < 0$, tada se trajektorije približavaju koordinatnom početku, kada $t \rightarrow \infty$ (slika 8) a fazni portret se zove *stabilna zvezda*. Ako važi da je je $\lambda = a > 0$ tada se trajektorije

Slika 9 :



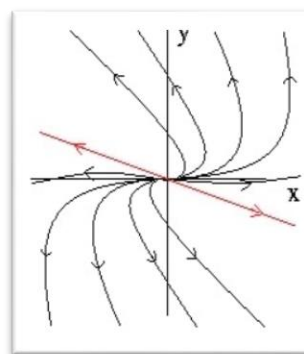
udaljavaju od koordinatnog početka, kada $t \rightarrow \infty$ (slika 9) a fazni portret se zove *nestabilna zvezda*.

Slika 10 :



Na kraju poslednja mogućnost je kada nisu oba od uslova $b = c = 0$ i $a = d$ ispunjena, ali još uvek $\lambda_1 = \lambda_2$, tada dobijamo fazni portret oblika *nepravilnog čvora*. Za nepravilni čvor je karakteristično da ima jednu pravu koja prolazi kroz koordinatni početak i tačku (v_1, v_2) a ostale trajektorije se tangencijalno približavaju ili udaljavaju od koordinatnog početka.

Slika 11 :



Kao u nekoliko slučajeva do sada i ovde postoje dve mogućnosti a to je ako važi da je $\lambda < 0$ tada se trajektorije tangencijalno približavaju koordinatnom početku, kada $t \rightarrow \infty$ (slika 10) a fazni portret se zove *stabilni nepravilni čvor* i slično ako važi da je $\lambda > 0$ tada se trajektorije tangencijalno udaljavaju od koordinatnog početka, kada $t \rightarrow \infty$ (slika 11) a fazni portret se zove *nestabilni nepravilni čvor*.

1.4.4 Kratak pregled

Sada će se u *tabeli 2* sumirati sve mogućnosti oblika faznih portreta homogenog sistema

$$x' = ax + by \quad (1.2)$$

$$y' = cx + dy$$

pod uslovom da važi $ad - bc \neq 0$. Kao što je navedeno u predhodnim poglavljima iako imamo beskonačno mnogo mogućih homogenih sistem diferencijalnih jednačina postoji samo nekoliko tipova faznih portreta a to su : *čvor*, *sedlo*, *spirala* i *centar*.

<i>Tabela 2. Fazni portreti sistema diferencijalnih jednačina</i>	
<i>Koreni karakteristične jednačine</i>	<i>Fazni portreti</i>
Realni, različiti, negativni	Stabilan čvor
Realni, različiti, pozitivni	Nestabilan čvor
Realni, različitih znakova	Sedlo (nestabilno)
Kompleksni, negativni realni deo	Stabilna spirala
Kompleksni, pozitivni realni deo	Nestabilna spirala
Kompleksni, realni deo je nula	Centar (neutralno stabilni)
Realni, jednaki, negativni	Stabilna zvezda ili stabilno nepravilni čvor
Realni, jednaki, pozitivni	Nestabilna zvezda ili nestabilno nepravilni čvor

1.4.5 Kriterijum pomoću traga i determinante matrice

U predhodnom poglavlju je zaključeno da je fazni portret homogenog sistema (1.2) određen korenima karakteristične jednačine

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0, \quad (1.4)$$

odnosno da zavisi samo od koeficijenata a , b , c i d . Tačnije rečeno, zavisi od brojeva $-(a + d)$ i $ad - bc$, a ovi brojevi se nazivaju redom *trag* i *determinanta* matrice A , gde je matrica A data sa

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Trag matrice A se označava sa $trA = a + d$ a determinanta sa $detA = ad - bc$. Kada ovo zamenimo u karakterističnu jednačinu dobijamo izraz

$$\lambda^2 - (trA) \lambda + detA = 0$$

a koreni karakteristične jednačine su

$$\lambda_{1/2} = \frac{trA \pm \sqrt{(trA)^2 - 4 detA}}{2}.$$

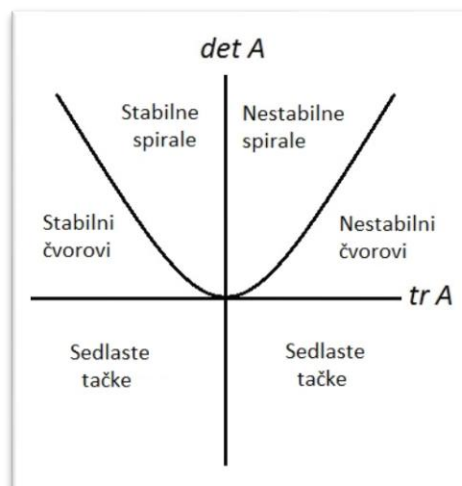
Ako treba odrediti oblik faznog portreta dovoljno je samo da se odredi trag i determinantu matrice A . U nastavku će biti objašnjeno kako se pomoću ove dve stvari može doći do istih zaključaka kao što su date u *tabeli 2*.

Posmatraće se koordinatni sistem u kojem su koordinatne ose trA i $detA$ pa tako svaka tačka u toj ravni je par $(trA, detA)$ i u zavisnosti od položaja tačke u ovom koordinatnom sistemu odredićemo oblik faznog portreta početnog sistem.

Na *slici 12* je prikazano da su spirale odvojene od čvorov i sedlastih tačaka jednom parabolom, a ova parabola nastaje kada je vrednost ispod korena jednaka nuli, odnosno parabola ima oblik

$$detA = \frac{1}{4}(tr A)^2. \quad (1.8)$$

Slika 12 :



Na njoj su tačke koje odgovaraju oblicima zvezde i nepravilnih čvorova, jer kod ovih oblika su koreni jednaki. Tačke $(trA, detA)$ se nalaze iznad parabole (1.8), ako važi uslov $detA > \frac{1}{4}(trA)^2$, pa su koreni karakteristične jednačine kompleksni, fazni portret je oblika spirale a tačke $(trA, detA)$ se nalaze ispod parabole (1.8) ako važi uslov $detA < \frac{1}{4}(trA)^2$, koreni su onda realni a fazni portret ima oblik čvora ili sedla. Dalje zaključujemo da je fazni portret stabilan (stabilni čvor ili stabilna spirala) ako i samo ako je $detA > 0$ i $trA < 0$ a nestabilan ako i samo ako $detA > 0$ i $trA > 0$.

1.5 Matrice i karakteristični koreni

U ovom poglavlju će biti reči o homogenim sistema diferencijalnih jednačina (1.2), kao i njegova rešenja zapisivanim u matričnom obliku. Kreće se od sistema (1.2) a njegov zapis u matričnom obliku je

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ili sažetije

$$\tilde{x}' = A\tilde{x}, \tag{1.9}$$

gde je

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

matrica koeficijenata a

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

vektor rešenja. Dalje se ubacuje par eksponencijalnih rešenja da bi se došlo do opšteg rešenja sistema

$$\tilde{x} = \tilde{v}e^{\lambda t}, \quad \tilde{v} \neq \tilde{0}, \tag{1.10}$$

gde je

$$\tilde{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Opšte rešenje ima oblik

$$\tilde{x} = \Phi(t)\tilde{c},$$

gde je

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{bmatrix}$$

fundamentalna matrica. Fundamentalna matrica je matrica u kojoj svaka kolona predstavlja jedno nezavisno rešenje, a zajedno sa vektorom konstanti

$$\tilde{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

daje konačni vektor opšteg rešenja sistema, odnosno $\tilde{x}$.

Sada će biti napisano kako postupak za izračunavanje opšteg rešenja objašnjen u *poglavlju 1.2* izgleda u matricnom zapisu. Ako se eksponencijalna rešenja (1.10) uvrste u sistem (1.9) i dobija se

$$\lambda \tilde{v} e^{\lambda t} = A \tilde{v} e^{\lambda t}.$$

Skraćivanjem eksponencijalne funkcije $e^{\lambda t}$ i prebacivanjem sve na jednu stranu dobiće se

$$A \tilde{v} - \lambda \tilde{v} = \tilde{0},$$

i ako se izvuče vektor $\tilde{v}$ ispred zagrade dobija se

$$(A - \lambda E) \tilde{v} = \tilde{0}, \tag{1.11}$$

gde je E jedinična matrica 2×2

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jednakost (1.11) ustvari predstavlja matrični zapis sistema jednačina (1.3).

Brojevi λ , bilo realni ili kompleksni, za koje su jednakost (1.11) i nenula vektor $\tilde{v}$ zadovoljeni, nazivaju se *karakteristični koreni* matrica A a nenula vektor $\tilde{v}$ se naziva *karakteristični vektor* matrice A . Ovde se mora napomenuti da za jedan karakteristični koren postoje više karakterističnih vektora, jer bilo koji skalarni umnožak karakterističnog vektora je takođe karakteristični vektor. Eksponencijalno rešenje homogenog sistema (1.9) dobijeno iz karakterističnih vrednosti i karakterističnog vektora se zove *karakteristično rešenje*.

Jednakost (1.11) ima netrivialni vektor rešenje $\tilde{v} \neq 0$ ako i samo ako je matrica $A - \lambda E$ singularna, odnosno ako je determinanta ove matrice jednaka nuli. Ovaj uslov je već dobijen u *poglavlju 1.2* i iz njega se došlo do karakteristične jednačine

$$\det \begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0. \quad (1.4)$$

Karakteristična jednačina se drugačije može zapisati preko traga i determinante matrice A , i ona izgleda ovako

$$\lambda^2 - (\text{tr}A) \lambda + \det A = 0.$$

Ova jednakost je takođe dobijena diskusijom o tipovima faznih portreta kod homogenih sistema. Ostaje da se ispiše kako izgledaju opšta rešenja homogenog sistema (1.2) u zavisnosti od toga kakvi su dobijeni karakteristični koreni.

Kao što je već nekoliko puta spomenuto, postoje tri slučaja. Prvi slučaj je kada su karakteristični koreni $\lambda_1 \neq \lambda_2$ matrice A realni i različiti i tada se dobija

$$\tilde{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

kao odgovarajuće karakteristične vektore, rešenja $\tilde{v}e^{\lambda_1 t}$ i $\tilde{w}e^{\lambda_2 t}$ u matričnom obliku izgledaju

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} v_1 e^{\lambda_1 t} & w_2 e^{\lambda_2 t} \\ v_1 e^{\lambda_1 t} & w_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

a opšte rešenje sistema

$$\tilde{x} = \Phi(t)\tilde{c} = \begin{bmatrix} v_1 e^{\lambda_1 t} & w_2 e^{\lambda_2 t} \\ v_1 e^{\lambda_1 t} & w_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Drugi slučaj je kada su karakteristični koreni konjugovano kompleksni brojevi i tada se do opšteg rešenja sistema kreće od samo jednog korena i to tako što se od kompleksnog karakterističnog korena $\lambda = \alpha + i\beta$ i kompleksnog karakterističnog vektora $\tilde{v} = \tilde{u} + i\tilde{w}$ dobija kompleksno rešenje koje izgleda

$$\begin{aligned} \tilde{v}e^{\lambda t} &= (\tilde{u} + i\tilde{w})e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t) \\ &= e^{\alpha t}(\tilde{u} \cos \beta t - \tilde{w} \sin \beta t) + ie^{\alpha t}(\tilde{w} \cos \beta t + \tilde{u} \sin \beta t) \end{aligned}$$

iz čega je dobijeno da su realni i imaginarni deo rešenja sledeći izrazi

$$e^{\alpha t}(\tilde{u} \cos \beta t - \tilde{w} \sin \beta t) \quad \text{i} \quad e^{\alpha t}(\tilde{w} \cos \beta t + \tilde{u} \sin \beta t).$$

Kada se to zameni umesto realnog i imaginarnog dela karakterističnog vektora $\tilde{v}$, odnosno umesto

$$\tilde{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix},$$

dobija se da su dva nezavisna rešenja oblika

$$e^{\alpha t} \begin{bmatrix} u_1 \cos \beta t - w_1 \sin \beta t \\ u_2 \cos \beta t - w_2 \sin \beta t \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad e^{\alpha t} \begin{bmatrix} w_1 \cos \beta t + u_1 \sin \beta t \\ w_2 \cos \beta t + u_2 \sin \beta t \end{bmatrix},$$

a fundamentalna matrica oblika

$$\Phi(t) = e^{\alpha t} \begin{bmatrix} u_1 \cos \beta t - w_1 \sin \beta t & w_1 \cos \beta t + u_1 \sin \beta t \\ u_2 \cos \beta t - w_2 \sin \beta t & w_2 \cos \beta t + u_2 \sin \beta t \end{bmatrix}$$

koja zajedno daje opšte rešenje sistema oblika

$$\tilde{x} = \Phi(t)\tilde{c} = e^{\alpha t} \begin{bmatrix} (c_1 u_1 + c_2 w_1) \cos \beta t + (-c_1 w_1 + c_2 u_1) \sin \beta t \\ (c_1 u_2 + c_2 w_2) \cos \beta t + (-c_1 w_2 + c_2 u_2) \sin \beta t \end{bmatrix}.$$

Treći i poslednji slučaj je kada su karakteristični koreni jednaki, odnosno kada je $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$. U *poglavlju 1.2.3* je objašnjeno kako dolazimo do dva nezavisna rešenja a fundamentalna matrica ima oblik

$$\Phi(t) = e^{\alpha t}(E + (A - \lambda E)t)$$

i onda je opšte rešenje i u ovom slučaju oblika

$$\tilde{x} = \Phi(t)\tilde{c}.$$

1.6 Sistemi tri i više jednačina

U raznim primenama diferencijalnih jednačina često nisu dovoljne dve jednačina da bi se objasnile određene pojave. Ovo ne predstavlja problem, zato što metoda računanja preko matrica sa dve jednačine objašnjena u predhodnom poglavlju može da se proširiti na tri i više jednačine. Tako sistem

$$\tilde{x}' = A\tilde{x}$$

može da sadrži n diferencijalnih jednačina prvog reda sa n nepoznatih

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

a matrica

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

je $n \times n$ matrica. Karakteristični koren λ je koren karakteristične jednačine n – tog stepena dobijene iz izraza

$$\det[A - \lambda E] = 0,$$

gde je E jedinična $n \times n$ matrica

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Uslov za dobijanje karakterističnih korena izgleda

$$\det[A - \lambda E] = \det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} = 0.$$

Karakteristični vektor se dobija iz jednakosti $(A - \lambda E)\tilde{v} = \tilde{0}$, $\tilde{v} \neq \tilde{0}$. Kada se dobije karakteristični koren λ i karakteristični vektor $\tilde{v}$ može se konstruisati karakteristično rešenje $\tilde{x} = \tilde{v}e^{\lambda t}$ sistema $\tilde{x}' = A\tilde{x}$.

Opšte rešenje n – dimenzionalnog sistema je linearna kombinacija

$$\tilde{x} = \sum_{i=1}^n c_i \tilde{x}_i(t)$$

gde su c_i proizvoljne konstante a

$$\tilde{x}_i(t) = \begin{bmatrix} x_{1i}(t) \\ x_{2i}(t) \\ \vdots \\ x_{ni}(t) \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

n nezavisnih rešenja početnog sistema. Podsetimo, da je vektor rešenja $\tilde{x}_i(t)$ zavisan ako postoje konstante c_i , koje nisu sve nula, takve da za svako t važi $\sum_{i=1}^n c_i \tilde{x}_i(t) = \tilde{0}$ a vektor rešenja je nezavisan ako nije zavisan. Bilo kojih n nezavisnih rešenja može formirati $n \times n$ fundamentalnu matricu

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{bmatrix},$$

gde kolone ove matrice predstavljaju tih n nezavisnih rešenja. Takođe, da su rešenja $\tilde{x}_i(t)$ nezavisna ako i samo ako je $\det \Phi(t) \neq 0$ za svako t . Na kraju se dobija opšte rešenje ovakog sistema u matričnom obliku

$$\tilde{x} = \Phi(t)\tilde{c},$$

gde je $\tilde{c}$ vektor proizvoljnih konstanti

$$\tilde{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Da bi našli opšte rešenje potrebno je naći n nezavisnih rešenja. Svaki različit realni koren λ zajedno sa odgovarajućim karakterističnim vektorom $\tilde{v}$ daje jedno rešenje oblika $e^{\lambda t} \tilde{v}$ a svaki par konjugovano kompleksnih rešenja daje par rešenja iz svog realnog i imaginarnog dela. Za višestruke korene takođe je data metoda pronalazka rešenja, s tim da kada je višestrukost veća od dva, komplikovanije se dolazi do rešenja i takav slučaj se neće razmatrati.

1.7 Primena

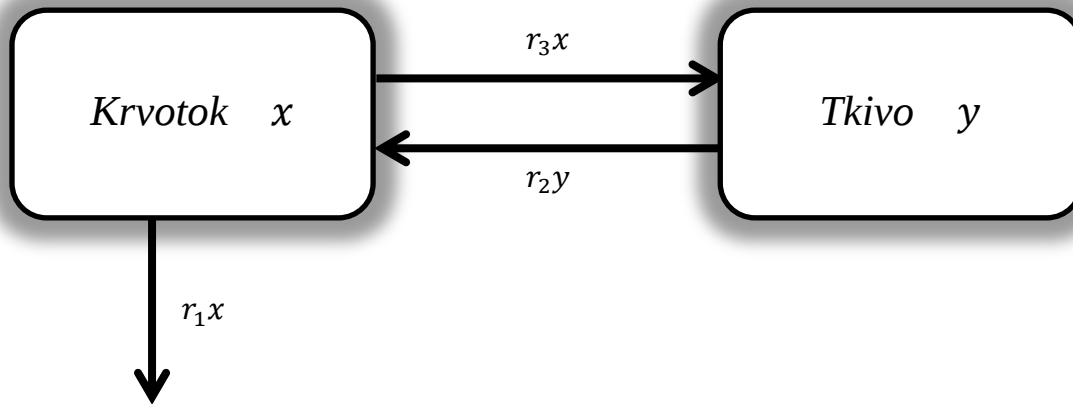
Metoda pregrada se često koristi u pravljenju modela za davanje nekog leka pacijentima. Metoda pregrada podrazumeva odvojene sisteme, koji su na neki način povezani. Sve promenljive koje se nađu u sistemu su najčešće zavisne promenljive i u većini slučajeva zavisne od vremena.

1.7.1 Kinetika lekova

Pregrade mogu predstavljati neki organ u telu, kao što je jetra ili bubreg, ili pak različite delove tela, kao što je tkivo ili krvotok. U primeru koji će se razmatrati biće korišćen dvo-pregradni model kinetike lekova od kojih se jedna komponenta sastoji od krvotoka a druga od tkiva, u koje i iz kojeg se posmatrani lek transportuje. Kolika je količina leka u svakoj od komponenti, u funkciji vremena, pošto je jedna doza leka data u tkivo ?

U ovom modelu pretpostavka je da dolazi do gubitka količine leka iz krvotoka usled prolazka krvi kroz bubrege i usled razmene krvi između krvotoka i tkiva. Na *dijagramu 1* je naznačen mehanizam prelazka leka iz pregrada.

Dijagram 1 :



$x = \text{količina leka u krvi}$

$y = \text{količina leka u tkivu}$

Ove veličine mogu da se izmere i koriste se miligrami (mg). Pretpostavka je, da je prenos leka između krvi i tkiva, kao i izvan krvi preko bubrega proporcionalan vremenu t . Tako da diferencijalne jednačine glase

$$x' = \left\{ \begin{array}{l} \text{stopa priliva} \\ \text{leka u krvotok} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{stopa odliva} \\ \text{leka iz krvotoka} \end{array} \right\}$$

a za količinu leka x u krvotoku imamo

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{stopa priliva} \\ \text{leka u krvotok} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{stopa priliva} \\ \text{leka iz tkiva} \end{array} \right\} = r_2 y$$

a

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{stopa odliva} \\ \text{leka iz krvotoka} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{stopa odliva leka} \\ \text{preko bubrega} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{stopa odliva} \\ \text{natrag u tkivo} \end{array} \right\} = r_1 x + r_3 x.$$

U ovom slučaju brojevi $r_1, r_2, r_3 > 0$ predstavljaju koeficijente proporcionalnosti. Kada se ove konstante zamene u jednačinu za x' dobija se prva diferencijalna jednačina sistema

$$x' = r_2 y - (r_1 x + r_3 x)$$

koja odgovara količini leka u krvotoku.

Što se tiče količine leka u tkivu jednačina izgleda

$$y' = \left\{ \begin{array}{l} \text{stopa priliva} \\ \text{leka u tkivo} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{stopa odliva} \\ \text{leka iz tkiva} \end{array} \right\}$$

ili

$$y' = r_3 x - r_2 y.$$

Pretpostavka je, da je ubrizgano y_0 količine leka u tkivo u vremenu $t_0 = 0$ a do sada nije bio prisutan lek u krvotoku. Model sa početnim uslovima, odnosno početni problem onda izgleda ovako

$$x' = -(r_1 + r_3)x + r_2 y$$

$$y' = r_3 x - r_2 y \quad (1.12)$$

$$x(0) = 0, \quad y(0) = y_0.$$

Da bi terapija bila uspešna, minimalne količine leka moraju ostati u krvotoku pacijenta. Sa druge strane, bilo bi rizično možda i smrtonosno kada bi se prevelike količine leka našle u krvotoku. Pomoću ovog modela će biti odgovoreno na pitanje, koliki raspon količine leka je moguće uneti u tkivo, da bi on bio efikasan najduži mogući vremenski period a da ni u jednom momentu količina leka u krvotoku nepređe smrtonosnu granicu. Takođe, cilj modela za ovakav raspon količine leka je utvrditi koliko vremena će se zadržati efikasna količina leka u krvotoku, odnosno kada će pacijent trebati sledeću dozu leka.

Problem (1.12) predstavlja sistem linearnih homogenih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima, matrica koeficijenata je

$$\begin{bmatrix} -(r_1 + r_3) & r_2 \\ r_3 & -r_2 \end{bmatrix}.$$

Preskačući računske delove koji su objašnjeni u predhodnim poglavljima odmah se prelazi na dobijene karakteristične korene iz karakteristične jednačine sistema (1.12), a to su

$$\begin{aligned}\lambda_{\pm} &= \frac{1}{2} \left(-(r_1 + r_2 + r_3) \pm \sqrt{(r_1 - r_2)^2 - r_3(2r_1 + 2r_2 + r_3)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(-(r_1 + r_2 + r_3) \pm \sqrt{(r_1 + r_2 + r_3)^2 - 4r_1r_2} \right).\end{aligned}$$

Iz ovih formula se vidi da su koren λ_+ i λ_- realni i negativni tačnije da važi

$$\lambda_- < \lambda_+ < 0.$$

Zaključak je, da je ravnotežna tačka $(x, y) = (0, 0)$ stabilni čvor, odnosno da je fazni portret oblika stabilnog čvora, što u kontekstu problema znači, da će kako vreme prolazi, lek nestajati i iz krvotoka i iz tkiva.

Metodama objašnjenim u *poglavlju 1.2* dolazi se do rešenje problema (1.12) a to rešenje je

$$x(t) = \frac{y_0}{\sqrt{(r_1 + r_2 + r_3)^2 - 4r_1r_2}} r_2 (e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}). \quad (1.13)$$

Ova formula ukazuje na to da je x pozitivno za sve $0 < t < \infty$ i teži ka 0 kada $t \rightarrow \infty$. Izraz $e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}$ a tako i $x(t)$ raste i dostiže svoj maksimum u

$$t_{max} = \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-} \ln \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+} \right)$$

posle čega opada do 0 kada $t \rightarrow \infty$.

Da bi se iskoristili ovi matematički proračuni, mora se unapred znati koja je količina potrebna da bi lek bio efikasan, jer je cilj da $x(t)$ bude veći od tog broja. Takođe, se mora znati koja je nedozvoljena, odnosno štetna (smrtna) količina leka, da bi se znalo do koje maksimalne

vrednosti se može dozvoliti da ide $x(t)$. Zadatak je da odrediti dozu leka y_0 , tako da $x(t)$ što duže ostane u efikasnom opsegu a da nepređe maksimum. Kada se znaju prilivne i odlivne stope r_i za određenog pacijenta (u praksi se češće uzimaju presečne vrednosti) za određeni lek, može se na osnovu formule (1.13) odrediti doza leka y_0 tako da $x(t)$ zadovolji unapred poznate kriterijume i da se najefikasnije leči posmatrani pacijent.

1.7.2 Lek Lidokain

Lidokain (Lidocaine, Xylocaine, Lignocaine) je lokalni anestetik i antiaritmik. Kao lokalni anestetik deluje tako što ostvaruje reverzibilnu blokadu kanala za natrijum u ćelijskoj membrani, i time blokira prenošenje impulsa. Deluje brzo, uz srednju dužinu trajanja anestezije. Daje se sa adrenalinom, koji služi da uspori sistemska resorpciju lidokaina, čime se produžava trajanje anestezije. Ne može se primenjivati u vidu tableta ili kapsula, jer posle apsorpcije prolazi kroz jetru, gde se hidrolizuje. Ako se primenjuje intravenozno, deluje kao antiaritmik.

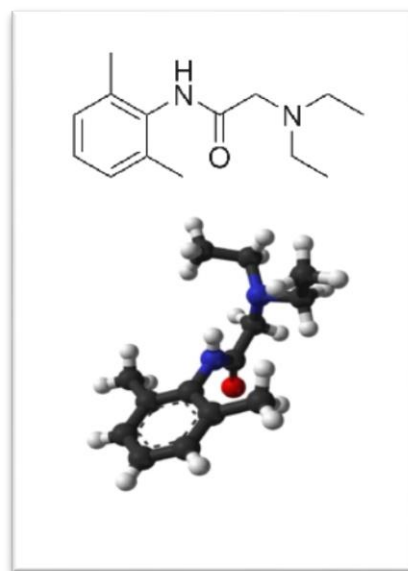
U ovom primeru će se ovaj lek koristiti kao antiaritmik za lečenje nepravilnog rada srca (ventricular arrhythmia). Koristi se model (1.12) za simuliranje tretmana ovim lekom.

Prosečne stope koeficijenata r_i ovog modela za ovaj lek su procenjene na sledeće približne vrednosti

$$\begin{aligned} r_1 &= 2.4 \times 10^{-2} \text{ (po minuti)} \\ r_2 &= 3.8 \times 10^{-2} \text{ (po minuti)} \\ r_3 &= 6.6 \times 10^{-2} \text{ (po minuti)}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Kada se ove vrednosti uvrste u model (1.12) dobija se početni problem

Slika 13 : Lek Lidokain



$$\begin{aligned}
x' &= -(9 \times 10^{-2})x + (3.8 \times 10^{-2})y \\
y' &= (6.6 \times 10^{-2})x - (3.8 \times 10^{-2})y \\
x(0) &= 0, \quad y(0) = y_0
\end{aligned} \tag{1.15}$$

za količinu lidokaina (u mg) u krvotoku i tkivu. Formule za reševanje ovog problema će se izračunati kao u *poglavlju 1.2*. Pošto se primeni već izračunata formula iz prošlom poglavlju, zamenom vrednosti (1.14) u formulu (1.13) dobija se veza između količine leka u krvotoku $x(t)$ u trenutku t posle početne doze y_0 (u mg)

$$x(t) = 0.3367 y_0 (e^{-7.5731 \times 10^{-3} t} - e^{-1.2043 t}) \tag{1.16}$$

Lidokain treba da bude u krvotoku sa koncentracijom 1.5 mg/l da bi bio efikasan, a sa koncentracijom od 6 mg/l ili višom je već opasan čak smrtonosan. Dužina vremena $t = t_e$ (u minutima) da bi koncentracija leka dostigla efektivnu koncentraciju od 1.5 mg/l zavisi od ukupne količine krvi kod pacijenta i od početke doze y_0 . Da bi ove koncentracije pretvorili u količine leka u krvotoku i tkivu, prvo se mora znati koliko ima ukupno krvi naš pacijent.

Računajući da prosečan čovek sa težinom od 80 kg ima otprilike 5 litara krvi. Efektivna količina lidokaina u krvotoku je onda

$$1.5 \text{ mg/l} \times 5 \text{ litara} = 7.5 \text{ mg}$$

a opasna količina leka bi bila

$$6 \text{ mg/l} \times 5 \text{ litara} = 30 \text{ mg}.$$

Kada se zna da količina leka u krvotoku dostiže maksimum u trenutku t_{max} a vrednosti $x(t)$ treba da budu između 7.5 mg i 30 mg , traženi interval je

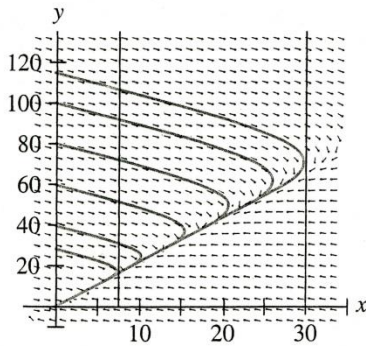
$$7.5 < x(t_{max}) < 30.$$

Kada se izračuna t_{max} na osnovu formule iz prethodnog poglavlja $t_{max} = 24.53$ (minuta) i dobijena vrednost $x(t_{max}) = 0.2621 y_0$ uvrsti u gornji interval, dobija se interval za početnu količinu leka y_0 a to je

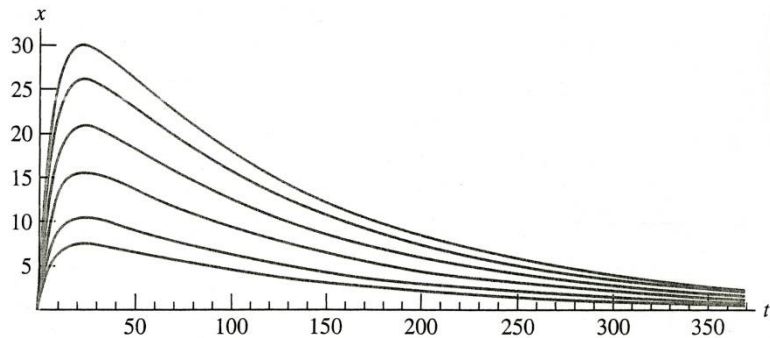
$$8.62 < y_0 < 114.5$$

izraženo u miligramima. Doze iz ovog intervala osiguravaju, da lek dođe do efektivne koncentracije u krvotoku u neko vreme a da nikako ne pređe gornju, odnosno opasnu koncentraciju.

Pitanje je, koliko vremena će proći od davanja injekcije do vremena kada se dođe do efektivne koncentracije u krvotoku i koliko će vremena ostati efektivna koncentracije pre nego što je potrebno dati novu dozu leka. Ona zavisi jedino od početne doze leka y_0 , kao što se da videti na graficima ispod pasusa.



Grafik 1



Grafika 2

Sa grafika se vidi a to je i računski dobijeno da je efektivna koncentracija leka u krvi najduža ako se da najveća doza a to je $y_0 = 114.5$ (mg). Koristeći ovu dozu za formula (1.16) dobija se

$$x(t) = 38.55 (e^{-7.5731 \times 10^{-3} t} - e^{-1.2043 t}).$$

Neka je t_e najranije vreme kada se dostigne efektivna koncentracija leka u ovom slučaju $x(t) = 37.5$ a pošto posle maksimuma $x(t)$ teži ka nuli. Dalje će trebati t_l , koje će predstavljati vreme kada će koncentracija leka pasti ispod efektivne, što je u ovom slučaju kada je $x(t) = 7.5$ jer je posle stalno ispod 7.5, kao što se vidi sa *grafika 2*. Ova dva vremena su u stvari koreni jednačine $x(t) = 7.5$, odnosno jednačine

$$38.55 \left(e^{-7.5731 \times 10^{-3} t} - e^{-1.2043 t} \right) = 7.5.$$

Izračunavanjem ovih korena dobili smo sledeće vrednosti

$$t_e = 1.949 \text{ (minuta)} \quad \text{i} \quad t_l = 216.1 \text{ (minuta)}.$$

Znači da, kada se pacijentu da maksimalna bezbedna doza leka očekuje se, da on počne da deluje posle otprilike 2 minuta a biće efektivan otprilike 216 minuta (oko tri i po sata), gde ni u jednom momentu neće preći opasnu koncentraciju.

Posle vremena t_l pacijentu je potrebna sledeća doza da bi se održala efektivna koncentracija leka u krvotoku, ali ovaj model (1.12) nije predvideo ovakvu situaciju. U modelu takođe ne postoji opcija da već određena koncentracije leka postoji u krvotoku i tkivu, kao što je to slučaj u trenutku t_l . Da bi ovo bilo moguće, mora se malo izmeniti ovaj model, ali to ne predstavlja problem, pošto će se promeniti samo početni uslovi za sledeću injekciju i to za x stavimo $x(t_l)$ a za y stavimo $y(t_l) + y_0$ i problem je rešen.

2. Nehomogeni linearni sistemi običnih diferencijalnih jednačina

2.1 Uvod

U ovom poglavlju će se posmatrati sistemi nehomogenih linearnih diferencijalnih jednačina prvog reda oblika

$$\begin{aligned}x' &= a(t)x + b(t)y + h_1(t) \\ y' &= c(t)x + d(t)y + h_2(t).\end{aligned}\tag{2.1}$$

koji se od sistema u *poglavlju 1* razlikuju za dodatne uslove $h_1(t)$ i $h_2(t)$, koji se nazivaju i *nehomogeni delovi*.

Kao i kod jedne nehomogene jednačine, tako i kod sistema jednačina rešenje je oblika

$$\begin{aligned}x &= x_h(t) + x_p(t) \\ y &= y_h(t) + y_p(t)\end{aligned}$$

gde par $x = x_p(t)$, $y = y_p(t)$ predstavlja partikularno rešenje sistema a par $x = x_h(t)$, $y = y_h(t)$ predstavlja rešenje homogenog sistema

$$\begin{aligned}x' &= a(t)x + b(t)y \\ y' &= c(t)x + d(t)y.\end{aligned}$$

Pošto su metode za dobijanje para homogenih rešenja objašnjene u predhodnom poglavlju, da bi se došlo do opšteg rešenja sistema (2.1), potrebno nam objasniti kako dobiti par partikularnih rešenja. U ovom poglavlju će biti pokazane dve metode za njihovo dobijanje. Prva metoda se zove *metoda neodređenih koeficijenata*, ali ona se može koristiti samo ako su funkcije

$h_1(t)$ i $h_2(t)$ određenog tipa o čemu će se bliže govoriti u sledećem poglavlju. Druga metoda se zove *metoda varijacije konstanti* i ona se može koristiti za sve tipove funkcija $h_1(t)$ i $h_2(t)$. Kod ove metode se koristi integracija, tako se može desiti da se pri rešavanju ovom metodom dobiju neki teško rešivi a možda i ne rešivi integrali. Kako kod metode neodređenih koeficijenata ne postoji integracija, ona je lakša i brža, ali nije uvek upotrebljiva.

2.2 Metoda neodređenih koeficijenata

U ovom poglavlju će se razmatrati, kako doći do opšteg rešenja sistema nehomogenih diferencijalnih jednačina

$$x' = a(t)x + b(t)y + h_1(t) \quad (2.1)$$

$$y' = c(t)x + d(t)y + h_2(t)$$

metodom neodređenih koeficijenata.

Metoda neodređenih koeficijenata predstavlja metodu gde se do opšeg rešenja sistema dolazi tako, što se na dobijeno rešenje homogenog dela dodaje jedno partikularno rešenje, čiji oblik se „pogađa” u zavisnosti kakvog je tipa funkcija nehomogenog dela. U početni sistem se ubacuje ovakva funkcija sa neodređenim parametrom. Dalje se rešava sistem, tako sa se dobiju vrednosti tih parametara i uvrštanjem istih u „pogađački” oblik dobija se partikularno rešenje a onda i opšte rešenje.

Ako su funkcije $h_1(t)$ i $h_2(t)$ oblika $\sum_{i=0}^n a_i t^i$ onda je oblik „pogađanja” $\sum_{i=0}^n A_i t^i$, odnosno uvrštajući u sistem (2.1) ovakvo rešenje i dobija se sistem, čije su promenljive A_i i kada se izjednače koeficijente uz odgovarajuće stepene po t^i dobija se novi sistem linearnih jednačina, rešavanjem kojeg se dobijaju koeficijenti za partikularno rešenje.

Ako su funkcije $h_1(t)$ i $h_2(t)$ oblika e^{kt} , $k \in \mathbb{R}$, tada je oblik „pogađanja” Ae^{kt} i isto kao u prethodnom slučaju izjednačavanjem koeficijenata se dobija sistem, rešavanjem kojeg se ponovo dobija partikularno rešenje.

Na kraju ako su funkcije $h_1(t)$ i $h_2(t)$ oblika $\sin(kx)$ ili $\cos(kx)$, tada je oblik „pogađanja” $A \sin(kx) + B \cos(kx)$ a dalji postupak je identičan.

Može se desiti da $h_1(t)$ i $h_2(t)$ nisu istog tipa. Ovo se rešava tako, što se svaka od funkcija piše u njeniom „pogađačkom” obliku.

2.3 Metoda varijacije konstanti

Ovo poglavlje će razmatrati, kako doći do opšteg rešenja sistema nehomogenih diferencijalnih jednačina

$$\begin{aligned}x' &= a(t)x + b(t)y + h_1(t) \\ y' &= c(t)x + d(t)y + h_2(t)\end{aligned}\tag{2.1}$$

metodom varijacije koeficijenata.

Metoda zahteva da je izračunato rešenje odgovarajućeg homogenog sistema

$$\begin{aligned}x' &= a(t)x + b(t)y \\ y' &= c(t)x + d(t)y,\end{aligned}\tag{2.2}$$

odnosno da postoje dva nezavisna rešenja $x_1(t), y_1(t)$ i $x_2(t), y_2(t)$ homogenog sistema, stoga i opšte rešenje homogenog dela kao njihovu linearnu kombinaciju

$$\begin{aligned}x_h &= c_1x_1(t) + c_2x_2(t) \\ y_h &= c_1y_1(t) + c_2y_2(t),\end{aligned}\tag{2.3}$$

čije dobijanje je objašnjeno u predhodnom delu.

Da bi se dobilo opšte rešenje sistema (2.1), koje je oblika

$$\begin{aligned}x &= x_h(t) + x_p(t) \\ y &= y_h(t) + y_p(t),\end{aligned}$$

potrebno je objasniti kako pronaći par $x_p(t)$ i $y_p(t)$.

Radi podsećanja, metoda varijacije koeficijenata za opšte rešenje $x = x_h + x_p$ jedne linearne diferencijalne jednačine oblika $x' = p(t)x + q(t)$ je dato sledećom formulom

$$x = ce^{P(t)} + e^{P(t)}Q(t), \quad P(t) = \int p(t) dt$$

gde je partikularno rešenje

$$x_p(t) = e^{P(t)}Q(t), \quad Q(t) = \int e^{-\int p(t)dt} q(t) dt$$

i nije umnožak homogenog rešenja $e^{P(t)}$, nego je funkcija $Q(t)$ puta $e^{P(t)}$. Ovakvo partikularno rešenje x_p je moguće naći za jednu jednačinu, tako što se proizvoljna konstanta c u opštem rešenju $x_h = ce^{P(t)}$ kod homogene jednačine zameni funkcijom $c = c(t)$.

Slična proceduru će biti korišćena i za sistem (2.1), da za partikularno rešenje za koje važi da su konstante c_1 i c_2 , koje odgovaraju homogenom sistemu (2.3), ne budu konstante, nego funkcije koje zavise od t . Zbog toga se metoda i zove metoda varijacije konstanti. Ako se tražene konstante, odnosno sada već funkcije označe sa $k_1(t)$ i $k_2(t)$, onda partikularno rešenje koje se traži ima oblik

$$x_p = k_1(t)x_1(t) + k_2(t)x_2(t) \tag{2.4}$$

$$y_p = k_1(t)y_1(t) + k_2(t)y_2(t).$$

Najlakši način da se odrede tražene funkcije $k_1(t)$ i $k_2(t)$ iz (2.4) pa tako reši sistem (2.1) je tako što će se zameniti (2.4) u (2.1) i dobiti sledeće jednačine

$$k'_1x_1 + k'_2x_2 + k_1x'_1 + k_2x'_2 = a(k_1x_1 + k_2x_2) + b(k_1y_1 + k_2y_2) + h_1$$

$$k'_1y_1 + k'_2y_2 + k_1y'_1 + k_2y'_2 = c(k_1x_1 + k_2x_2) + d(k_1y_1 + k_2y_2) + h_2$$

a posle prebacivanja

$$k'_1 x_1 + k'_2 x_2 + k_1 [x'_1 - (ax_1 + by_1)] + k_2 [x'_2 - (ax_2 + by_2)] = h_1$$

$$k'_1 y_1 + k'_2 y_2 + k_1 [y'_1 - (cx_1 + dy_1)] + k_2 [y'_2 - (cx_2 + dy_2)] = h_2.$$

Pošto su parovi x_1, y_1 i x_2, y_2 rešenja odgovarajućeg homogenog sistema (2.2), treći i četvrti sabirak u obe jednačine su jednaki nuli. Tako da ostaju samo dve jednostavne jednačine oblika

$$k'_1 x_1 + k'_2 x_2 = h_1$$

$$k'_1 y_1 + k'_2 y_2 = h_2.$$

Ove jednačine treba rešiti po k'_1 i k'_2 a posle se integracijom dobijaju k_1 i k_2 . Dakle, daljim sređivanjem se dobija

$$k'_1 = \frac{h_1 y_2 - h_2 x_2}{x_1 y_2 - y_1 x_2}$$

$$k'_2 = \frac{h_2 x_1 - h_1 y_1}{x_1 y_2 - y_1 x_2}$$

a posle integracije

$$k_1 = \int \frac{h_1 y_2 - h_2 x_2}{x_1 y_2 - y_1 x_2} dt$$

$$k_2 = \int \frac{h_2 x_1 - h_1 y_1}{x_1 y_2 - y_1 x_2} dt$$

Sa ovim izrazom za k_1 i k_2 došlo se do prilično komplikovane formule

$$x_p = x_1(t) \int \frac{h_1 y_2 - h_2 x_2}{x_1 y_2 - y_1 x_2} dt + x_2(t) \int \frac{h_2 x_1 - h_1 y_1}{x_1 y_2 - y_1 x_2} dt$$

$$y_p = y_1(t) \int \frac{h_1 y_2 - h_2 x_2}{x_1 y_2 - y_1 x_2} dt + y_2(t) \int \frac{h_2 x_1 - h_1 y_1}{x_1 y_2 - y_1 x_2} dt$$

za partikularno rešenje nehomogenog sistema (2.1), koje zajedno sa homogenim rešenjem daje opšte rešenje sistema (2.1) oblika

$$x = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + x_1(t) \int \frac{h_1 y_2 - h_2 x_2}{x_1 y_2 - y_1 x_2} dt + x_2(t) \int \frac{h_2 x_1 - h_1 y_1}{x_1 y_2 - y_1 x_2} dt$$

$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_1(t) \int \frac{h_1 y_2 - h_2 x_2}{x_1 y_2 - y_1 x_2} dt + y_2(t) \int \frac{h_2 x_1 - h_1 y_1}{x_1 y_2 - y_1 x_2} dt.$$

Ova formula predstavlja *formulu varijacije konstanti za opšte rešenje nehomogenog sistema* (2.1). Iako jeste komplikovana, ona predstavlja bitnu formulu kako u teoriji, tako i u primeni diferencijalnih jednačina. Ovaj zapis se može pojednostaviti ako se ova formula zapiše u matričnom obliku, o kojem će biti reči u poglavlju 2.4.

2.3.1 Jednačine drugog reda

Kao što je to bio slučaj i kod homogene jednačine drugog reda u prvom poglavlju, slično će se i nehomogena jednačina drugog reda smenom prebaciti u sistem nehomogenih jednačina a onda formulom varijacije konstanti doći do opšteg rešenja sistema, što će predstavljati i rešenje početne jednačine drugog reda.

Treba posmatrati opšti oblik nehomogene jednačine drugog reda

$$x'' + \beta(t)x' + \gamma(t)x = h(t)$$

koja će se smenama $y_1 = x'_1$, $y_2 = x'_2$ i $h_1 = 0$, gde su $x_1(t)$ i $x_2(t)$ dva nezavisna rešenja odgovarajuće homogene jednačine drugog reda

$$x'' + \beta(t)x' + \gamma(t)x = 0$$

prebaciti u sistem nehomogenih jednačina i tako će se steći uslovi da bi mogli iskoristiti formulu za varijaciju koeficijenata, i doći do opšteg rešenja tog nehomogenog sistema, koje je oblika

$$x = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) - x_1(t) \int \frac{h x_2}{x_1 x_2' - x_1' x_2} dt + x_2(t) \int \frac{h x_1}{x_1 x_2' - x_1' x_2} dt.$$

Vidi se, da nije potrebno rešenje za y , jer x rešenje predstavlja i rešenje početne nehomogene jednačine prvog reda. Treba spomenuti da se izraz $x_1 x_2' - x_1' x_2$ naziva još i determinanta Vronski (Wronskian) za rešenje x_1 i x_2 i označava se sa $W(x_1, x_2)$. Rešenje nehomogene jednačine drugog reda se može napisati i ovako

$$x = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) - x_1(t) \int \frac{h x_2}{W(x_1, x_2)} dt + x_2(t) \int \frac{h x_1}{W(x_1, x_2)} dt.$$

Koeficijent početne jednačine uz x'' je jednak jedinici, ali ako nije tako, odnosno je zadata jednačina oblika

$$a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = g(t)$$

samo će se podeliti obe strane sa $a(t)$, da bi se dobio oblik koriscen u rešavanju jednačine. Tako se dobija

$$x'' + \frac{b(t)}{a(t)}x' + \frac{c(t)}{a(t)}x = \frac{g(t)}{a(t)}$$

i kako je

$$\beta(t) = \frac{b(t)}{a(t)}, \quad \gamma(t) = \frac{c(t)}{a(t)}, \quad h(t) = \frac{g(t)}{a(t)}$$

može se iskoristiti data formula varijacije konstanti.

2.4 Zapis pomoću matrica

U ovom poglavlju će se složena formula za varijaciju konstanti obrađena u *poglavlju 2.3* zapisati pomoću matrica i time pojednostaviti i stvoriti jednostavan način da se proširi sistem sa sadašnjih dve jednačine na proizvoljan broj jednačina.

Prvo će se nehomogeni sistem diferencijanih jednačina

$$x' = a(t)x + b(t)y + h_1(t)$$

$$y' = c(t)x + d(t)y + h_2(t)$$

zapisati u obliku matrica, a to izgleda

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix}$$

ili sažetije

$$\tilde{x}' = A(t)\tilde{x} + \tilde{h}(t), \tag{2.5}$$

gde je

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \quad A(t) = \begin{bmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{h}(t) = \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix}.$$

Homogeno rešenje

$$\tilde{x}_h(t) = \begin{bmatrix} x_h(t) \\ y_h(t) \end{bmatrix}$$

koje odgovara homogenom sistemu

$$\tilde{x}' = A(t)\tilde{x} \tag{2.6}$$

je linearna kombinacija

$$\tilde{x}_h(t) = c_1 \begin{bmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \\ c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \end{bmatrix}$$

gde su

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{bmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

dva nezavisna para rešenja. Matrična forma opšteg rešenja je

$$\tilde{x}_h = \Phi(t)\tilde{c},$$

gde je

$$\tilde{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

vektor proizvoljnih funkcija c_1 i c_2 a

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{bmatrix}$$

fundamentalna matrica.

Pošto su obe kolone matrice $\Phi(t)$ rešenja homogenog sistema (2.6) diferencijalne jednačine može se matričnim zapisom zapisati i

$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$$

Opšte rešenje nehomogenog sistema (2.5) je u formi $\tilde{x} = \tilde{x}_h + \tilde{x}_p$, dakle

$$\tilde{x} = \Phi(t)\tilde{c} + \tilde{x}_p(t)$$

gde je $\tilde{x}_p$ partikularno rešenje sistema (2.5), koje se rešava metodom varijacije konstanti objašnjeno u *poglavlju* 2.3. Sada će se i taj zapisa napisati u matričnoj formi.

Partikularno rešenje se traži u obliku

$$\tilde{x}_p = \Phi(t)\tilde{k}(t) \quad (2.7)$$

gde je potrebno tako izabrati funkcije $k_1(t)$ i $k_2(t)$ u

$$\tilde{k}(t) = \begin{bmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \end{bmatrix}$$

da $\tilde{x}_p$ bude rešenje sistema (2.5).

Kada (2.7) se uvrsti u levu i desnu stranu sistema (2.5) dobijaju se sledeće dve jednakosti u obliku matrice

$$\begin{aligned} \tilde{x}_p &= \Phi(t)\tilde{k}'(t) + \Phi'(t)\tilde{k}(t) \\ A(t)\tilde{x}_p + \tilde{h}(t) &= A(t)\Phi(t)\tilde{k}(t) + \tilde{h}(t). \end{aligned}$$

Da bi partikularno rešenje (2.7) bilo rešenje sistema (2.5) obe jednačine moraju biti zadovoljene, tako da se dobija

$$\Phi(t)\tilde{k}'(t) + \Phi'(t)\tilde{k}(t) = A(t)\Phi(t)\tilde{k}(t) + \tilde{h}(t)$$

što predstavlja matrični zapis uslova iz predhodnog poglavlja. Kada se zameni $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$ dobija se

$$\Phi(t)\tilde{k}'(t) + A(t)\Phi(t)\tilde{k}(t) = A(t)\Phi(t)\tilde{k}(t) + \tilde{h}(t)$$

a nakon što se skрати $A(t)\Phi(t)\tilde{k}(t)$ sa obe strane, ostane samo

$$\Phi(t)\tilde{k}'(t) = \tilde{h}(t).$$

Množe se obe strane jednakosti sa $\Phi^{-1}(t)$ sa leve strane. $\Phi^{-1}(t)$ postoji jer $\Phi(t)$ nije singularna, što je zaključeno iz uslova da su joj kolone nezavisni vektori rešenja, a to znači da je njena determinanta različita od nule. Dobija se izraz

$$\tilde{k}'(t) = \Phi^{-1}(t)\tilde{h}(t). \quad (2.8)$$

Podsetimo, da je po definiciji izvod nekog vektora jednak izvodima svakog njegovog pojedinačnog člana, odnosno

$$\tilde{k}'(t) = \begin{bmatrix} k_1'(t) \\ k_2'(t) \end{bmatrix}$$

što isto važi i za integraciju

$$\int \tilde{k}'(t) = \begin{bmatrix} \int k_1'(t) dt \\ \int k_2'(t) dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \end{bmatrix} = \tilde{k}(t).$$

Ako obe strane izraza (2.8) integralimo dobijamo matrični zapis rešenje za $k_1(t)$ i $k_2(t)$ i on ima oblik

$$\tilde{k}(t) = \int \Phi^{-1}(t)\tilde{h}(t)dt$$

Kada se ovaj izraz uvrsti u partikularno rešenje, dobija se

$$\tilde{x}_p = \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t) \tilde{h}(t) dt$$

a na kraju i opšte rešenje

$$\tilde{x} = \Phi(t) \tilde{c} + \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t) \tilde{h}(t) dt$$

što predstavlja formulu za varijaciju konstanti u matičnom obliku.

Teorema 1 : Formula za varijaciju konstanti

Ako je $\Phi(t)$ fundamentalna matrica homogenog sistema $\tilde{x}' = A(t)\tilde{x}$, onda do opšteg rešenja nehomogenog sistema

$$\tilde{x}' = A(t)\tilde{x} + \tilde{h}(t)$$

može se doći pomoću formule

$$\tilde{x} = \Phi(t) \tilde{c} + \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t) \tilde{h}(t) dt,$$

gde je $\tilde{c}$ vektor proizvoljnih konstanti.

Iz formule za varijaciju konstanti se vidi da za izračunavanje opšteg rešenja nehomogenog sistema linearnih diferencijalnih jednačina prvog reda jedino što je potrebno su dva para nezavisnih rešenja odgovarajućeg homogenog sistema. Ovo važi zato što je jedina nepoznata u krajnjoj formuli fundamentalna matrica $\Phi(t)$, koja je kao što je rečeno sastavljena od tih nezavisnih rešenja, ali u praksi da bi se došlo do rešenja sistema najteži deo je integracija, koju je u nekim slučajevima i nemoguće izračunati.

U ovom poglavlju je navedeno kako izgleda matični zapis sistema od dve jednačine, s tim da se isti princip može primeniti na tri jednačine i dobiti matrice 3×3 a slično i za više jednačina. Logičan zaključak je, da se račun sve više komplikuje kada postoji veći broj jednačina, pa se za računanje ovakvih sistema pišu algoritmi u određenim kompjuterskim programima. Ovo ne predstavlja problem, jer algoritmi nisu teški, pošto su u pitanju sistemi linearnih jednačina.

2.5 Primena : Kinetika lekova II

U poglavlju 1.7.1 je bio razmatran homogeni linarni sistem oblika

$$\begin{aligned}x' &= -(r_1 + r_3)x + r_2y \\ y' &= r_3x - r_2y,\end{aligned}\tag{2.9}$$

koji je predstavljao model kinetike leka u krvotoku i tkivu, gde je x predstavljao količinu leka u krvotoku u vremenu t a y količinu leka u tkivu u trenutku t , dok se lek u tkivo ubrizgavao injekcijom.

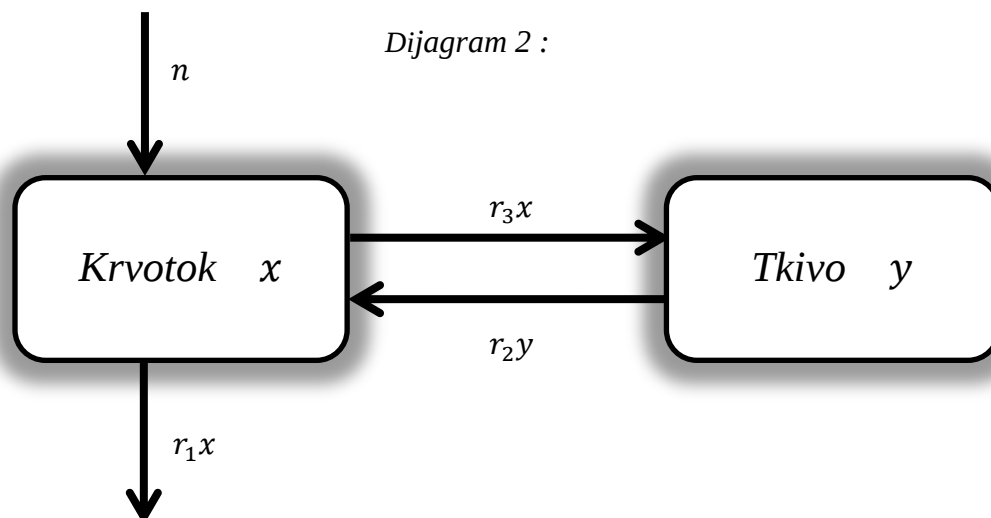
U ovom poglavlju će biti modifikovan ovaj model, jer je sada u pitanju drugačiji problem. Umesto injekcijom leka u tkivo razmatraće se, da se lek daje kontinuirano kroz venu, direktno u krvotok, tako da se sada na desnu stranu prve jednačine sistema (2.9) mora dodati još jedan sabirak $n > 0$, koji je konstantan, jer prestavlja kontinuirano davanje leka direktno u krvotok, i tako sistem postaje nelinearni i oblika je

$$\begin{aligned}x' &= -(r_1 + r_3)x + r_2y + n \\ y' &= r_3x - r_2y,\end{aligned}\tag{2.10}$$

što nam potvrđuje i *dijagram 2* na sledećoj strani.

Da bi se rešio ovaj problem, potrebne su početne količine leka u krvi i tkivu, odnosno $x(0)$ i $y(0)$ u trenutku $t = 0$. U ovoj situaciji će se pretpostaviti da lek nije prisutan ni u krvi, ni u tkivu, tako da su početni uslovi oblika

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0.$$



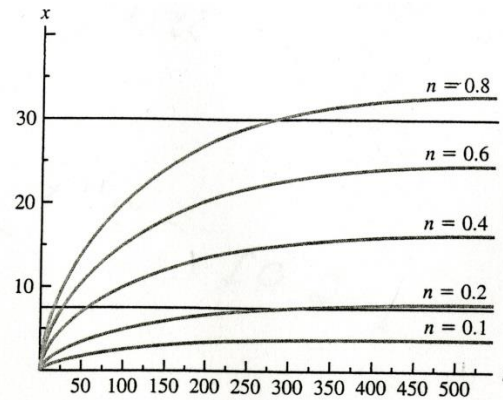
U nekim drugim situacijama određena količina leka može biti prisutna, što ne predstavlja veliki problem, jer sistem ostaje isti, samo se početni uslovi prilagode situaciji.

U *poglavlju 1.7.1* je bila detaljno izvedena teorija, koja se odnosi na homogeni sistem, koji odgovara ovom modelu a u predhodnom poglavlju je objašnjeno kako se rešava nehomogeni sistem. Da se ne bi ponavljala teorija nastavljak je sa konkretnim primerom. Koristiće se isti lek kao u *poglavlju 1.7.2*, lek lidokain, koji se koristi za nepravilan rad srca. Koeficijente priliva i odliva leka r_i će biti isti kao u prethodnom primeru a to su (1.14). Kada se ove veličine zamene u sistem (2.10) sa početnim uslovima, dobija se početni problem

$$\begin{aligned}x' &= -(9 \times 10^{-2})x + (3.8 \times 10^{-2})y + n \\y' &= (6.6 \times 10^{-2})x - (3.8 \times 10^{-2})y \\x(0) &= 0, \quad y(0) = 0.\end{aligned}\tag{2.11}$$

Pitanje je, kako odrediti količinu kontinuirane doze leka n , tako da lek bude efikasan, odnosno da je u efikasnoj zoni a da ni u jednom momentu ne pređe granicu opasne koncentracije. Za lidokain, kao što je već spomenuto, efikasna koncentracija je 1.5 mg/l , a opasna 6 mg/l i više. Slično, kao u predhodnom primeru ako pacijent ima otprilike 5 litara krvi množenjem se dobija da je količina leka potrebna da lek bude efikasan 7.5 mg u krvi, dok je gornja granica leka 30 mg .

Crtanjem grafika problema (2.11) za neke male vrednosti n , može se videti kako se ponaša model za dobijene donje i gornje granice. Za šest različitih vrednosti n mogu se videti rezultati na *grafiku 3*.



Grafik 3

Da bi se lakše diskutovalo o određenim situacijama, bitni podaci su napisani i tablično u *tabeli 3*.

<i>Tabela 3 :</i>			
n Venska stopa leka (mg/min)	t_e Vreme kada je dostignuta efektivna količina u krvotoku (min)	t_l Vreme kada je dostignuta opasna količina u krvotoku (min)	x_e Maksimalna količina u krvotoku (mg)
0.1	∞	∞	4.17
0.2	282	∞	8.34
0.4	58	∞	16.7
0.6	27.2	∞	25.0
0.8	16.3	282	33.4
1.0	11.4	147	41.7

Analizom rezultata dobijenih sa *grafika 3* i *tabela 3* se može doći do nekih generalnih zaključaka za problem (2.11). Pre nego što iznese zaključak, posmatraće se kao pretpostavke.

Pp 1 : Količina x leka u krvotoku strogo raste i dostiže svoj maksimum $x_e > 0$ kada $t \rightarrow \infty$.

Pp 2 : Maksimalna količina x_e leka u krvotoku je proporcionalna venskoj stopi leka n .
(Naprimjer, ako se duplira količina n i maksimalna količina x_e se duplira)

Pp 3 : Postoji kritična stopa n_1 venske stope n za koju se efikasna zona nikada ne dostiže.

Pp 4 : Postoji druga kritična stopa $n_2 > n_1$ venske stope n za koju se smrtonosna zona nikada ne dostiže, ali ako $n > n_2$, tako će u neko vreme koncentracija preći preko dozvoljene doze.

Pp 5 : Efektivna zona se dostiže brže, što je veća venska stopa n .

Potvrđivanje pretpostavki 1 – 5 će početi tako što će se rešiti početni problem (2.11). Iz predhodnih poglavlja se zna, da se opšte rešenje ovakvog problema traži u formi

$$x = x_h(t) + x_p(t)$$

$$y = y_h(t) + y_p(t),$$

gde je $x_h(t)$, $y_h(t)$ par opšteg rešenja odgovarajućeg homogenog sistema

$$x' = -(9 \times 10^{-2})x + (3.8 \times 10^{-2})y$$

$$y' = (6.6 \times 10^{-2})x - (3.8 \times 10^{-2})y$$

a $x_p(t)$, $y_p(t)$ par bilo kog partikularnog rešenja nehomogenog sistema

$$x' = -(9 \times 10^{-2})x + (3.8 \times 10^{-2})y + n$$

$$y' = (6.6 \times 10^{-2})x - (3.8 \times 10^{-2})y.$$

Koristeći metode objašnjene u *poglavlju 1* može se doći do opšteg rešenja odgovarajućeg homogenog sistema i ono je

$$x_h = -0.781 c_1 e^{-0.120 t} + 0.431 c_2 e^{(-7.57 \times 10^{-3})t}$$

$$y_h = 0.625 c_1 e^{-0.120 t} + 0.936 c_2 e^{(-7.57 \times 10^{-3})t},$$

gde su c_1 i c_2 proizvoljne konstante.

Potrebno je pronaći jedno partikularno rešenje nehomogenog sistema a jedan način da se to uradi je formulom za varijaciju koeficijenata, objašnjenom u predhodnim poglavljima. Druga, i u ovom slučaju lakša metoda je, metoda neodređenih koeficijenata objašnjena u *poglavljju 2.2*. Koristeći ovaj kraći metod zna se, da je traženo rešenje u vidu konstante oblika

$$x = x_e, \quad y = y_e.$$

Ako se ovakvo rešenje uvrsti u nehomogeni sistem dobija se sistem dve jednačine

$$0 = -(9 \times 10^{-2})x_e + (3.8 \times 10^{-2})y_e + n$$

$$0 = (6.6 \times 10^{-2})x_e - (3.8 \times 10^{-2})y_e$$

po x_e i y_e i rešavanjem ovog sistem dobija se partikularno rešenje

$$x_e = 41.7 n, \quad y_e = 72.4 n.$$

Kada se spoje homogeno i partikularno rešenje, dobija se konačan oblik nehomogenog sistema koji glasi

$$x(t) = -0.781 c_1 e^{-0.120 t} + 0.431 c_2 e^{(-7.57 \times 10^{-3})t} + 41.7 n \quad (2.12)$$

$$y(t) = 0.625 c_1 e^{-0.120 t} + 0.936 c_2 e^{(-7.57 \times 10^{-3})t} + 72.4 n.$$

Da bi se rešio početni problem (2.11), potrebno je pronaći konstante c_1 i c_2 a to će se uraditi tako što u rešenje (2.12) zameni $t = 0$. Dobijaju se dve jednačine po c_1 i c_2 koje glase

$$x(0) = -0.781 c_1 + 0.431 c_2 + 41.7 n = 0$$

$$y(0) = 0.625 c_1 + 0.936 c_2 + 72.4 n = 0.$$

Rešavanjem ovog sistema se dobija

$$c_1 = 7.77 n, \quad c_2 = -82.5 n.$$

Na kraju, posle zamene ovih konstanti u opšte rešenje (2.12) dobija se formula za rešavanje početnog problema (2.11) i koja izgleda

$$x(t) = -6.07 n e^{-0.120 t} - 35.6 n e^{(-7.57 \times 10^{-3})t} + 41.7 n \quad (2.13)$$

$$y(t) = 4.86 n e^{-0.120 t} - 77.2 n e^{(-7.57 \times 10^{-3})t} + 72.4 n.$$

Nastavak se fokusa na dokazivanju pretpostavki $Pp 1 - Pp 5$. Ako bi se izračunao izvod prve jednakosti (2.13) dobio bi se izraz

$$x'(t) = 0.73 n e^{-0.120 t} + 0.27 n e^{(-7.57 \times 10^{-3})t},$$

iz čega se vidi da je on pozitivan za sve t , pa tako se zaključuje da je $x(t)$ strogo rastuća funkcija. Ako bi se izračunao granična vrednost prve jednakosti (2.13) dobilo bi se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 41.7 n$$

čime je dokazana *Pp 1* i dobijena formula za maksimalnu količinu leka Likokain u krvotoku a to je $x_e = 41.7 n$.

Iz formule za x_e se vidi da je granična količina leka u krvotoku proizvod konstante i venske stope leka n , čime se potvrđuje *Pp 2*.

Takođe, iz formule za x_e se vidi da $x(t)$ nikada neće dostići efikasnu količinu od 7.5 mg ako je

$$n < n_1 = \frac{7.5}{41.7} \approx 0.18 \text{ mg/min}$$

čime je dokazana *Pp 3*.

Ako bi $x_e < 30$, to bi značilo, da $x(t)$ nikada ne prelazi opasnu količinu leka od 30 mg , što važi za

$$n < n_2 = \frac{30}{41.7} \approx 0.72 \text{ mg/min}$$

a sa druge strane za neko $n > n_2$, se u nekom vremenu t_l dostiže opasna količina leka od 30 mg , čime je dokazana *Pp 4*.

Nije moguće pronaći formulu za vreme t_l , jer bi to podrazumevalo rešavanje jednačine $x(t_l) = 30$, odnosno jednačine

$$- 6.07 n e^{-0.120 t_l} - 35.6 n e^{(-7.57 \times 10^{-3}) t_l} + 41.7 n = 30 \quad (2.14)$$

po t_l . Ne postoji algebarska formula za izračunavanje ovakve jednačine. Ali, za tačne vrednosti venske stope leka n , može se rešiti jednačina (2.14) i dobiti vreme t_l pomoću kompjutera.

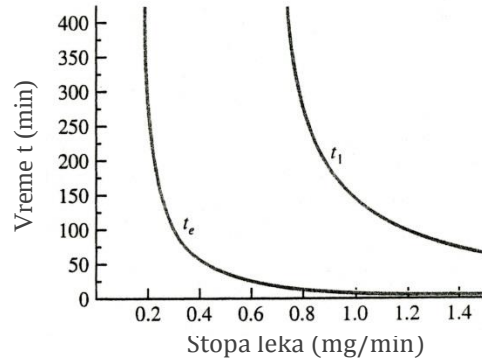
Na primer, ako je $n = 0.8$, onda je rešenje jednačine (2.14) $t_l = 282$. Takođe se pomoću kompjutera može nacrtati grafik za t_l u funkciji od n iz jednakosti (2.14) a jedan od načine da se to uradi je obrnuto, odnosno da se izrazi n kao fukciju od t_l i to je

$$n = \frac{30}{- 6.07 e^{-0.120 t_l} - 35.6 e^{(-7.57 \times 10^{-3}) t_l} + 41.7}$$

Na kraju se razmatra Pp 5. Ako je $n > n_1$, može se izračunati vreme t_e , za koje se dostigne efikasna količina leka od 7.5 mg tako, što se rešava jednačina $x(t_e) = 7.5$, odnosno jednačina

$$- 6.07 n e^{-0.120 t_e} - 35.6 n e^{(-7.57 \times 10^{-3}) t_e} + 41.7 n = 7.5 \quad (2.15)$$

po t_e . Kao što je važno za t_l i ovde je nemoguće pronaći formulu za t_e , ali ćemo na sličan način nacrtati funkciju od t_e i nacrtati oba grafika u jednom koordinatnom sistemu da bi ih uporedili, *grafik 4*.



Grafik 4

Iz *grafika 4* se vidi da je t_e opadajuća funkcija po n .

Drugi način da se pokaže tačnost Pp 5, je da se izračuna implicitni izvod od t_e po n izraza (2.15). Rešavanjem će se dobiti izraz

$$\begin{aligned} \frac{dt_e}{dn} &= - \frac{1}{n} \frac{1 - 6.07 e^{-0.120 t_e} - 35.6 e^{(-7.57 \times 10^{-3}) t_e} + 41.7}{0.73 e^{-0.120 t_e} + 0.27 e^{(-7.57 \times 10^{-3}) t_e}} \\ &= - \frac{1}{n^2} \frac{7.5}{0.73 e^{-0.120 t_e} + 0.27 e^{(-7.57 \times 10^{-3}) t_e}} < 0 \end{aligned}$$

a kako se vidi, on je manji od nule. Iz čega sledi, da je funkcija opadajuće, odnosno što je n veće, brže se dostiže efikasna stopa leka, što se i pretpostavilo u *Pp 5*.

U primeni modela kinetike lekova (2.10) korišćene su već određene stope priliva i odliva leka r_i za lek Lidokain. Mogu se dobiti i opšte formule, kao što se to dobilo u modelu sa injekcijom leka (1.12) u *poglavlju 1.7*. Prirodno je pretpostaviti, a može se pokazati da je tačno, da potvrđene pretpostavke *Pp 1* do *Pp 5* važe i za druge stope r_i , odnosno za neki drugi lek. Takođe, u modelu (2.10) se pretpostavilja da lek nije prisutan u organizmu kada se počinje sa venskim davanjem leka, što ne mora da bude slučaj. Ako je lek već prisutan, koristi se isti model, samo su početni uslovi prilagođeni situaciji, odnosno količini leka u organizmu.

3. Nelinearni sistemi običnih diferencijalnih jednačina

U poglavlju 1 i 2 su bili posmatrani linearni sistemi diferencijalnih jednačina a u ovom poglavlju će biti posmatrani nelinearni sistemi. Pošto ne postoji metoda za izvođenje formula za izračunavanje rešenja opšteg nelinearnog sistema, zbog mnogo različitih mogućnosti, fokus ovog dela će biti na samoj analizi sistema i analizi faznih portreta.

3.1 Uvod

U matematici, autonomni sistem diferencijalnih jednačina je sistem diferencijalnih jednačina, čije promenljive zavise od jedne nezavisne promenljive a u praksi se najčešće pojavljuje da su sve promenljive određene funkcije vremena. Posmatra se jedan autonomni sistem

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y)\end{aligned}\tag{3.1}$$

koji se sastoji od dve diferencijalne jednačine. Kao što je i kod linearnih sistema sa dve jednačine i kod nelinearnih sistema (3.1) fazni portret sistema se sastoji od trajektorija u (x, y) – ravni, pa se zbog ovoga često zove i planarni autonomni sistem. Cilj je, da se odredie metode analize i crtanja faznih portreta ovakvih planarnih autonomnih sistema.

U predhodnim poglavljima se videlo da ključnu ulogu u određivanju tipa faznih portreta imaju ravnotežne tačke i da su sva ostala rešenja monotona. Rešenja autonomnih sistema ne moraju da budu monotona već je moguće da budu i periodična ili oscilatorna, što može dodatno zakomplikovati crtanje faznih portreta. Ovakva rešenja se vide u predhodnim poglavljima pri tipu spirale i centra kod linearnih sistema. Bez obzira na ove dodatne komplikacije, razvijena je čitava teorija o faznim portretima kod planarnih autonomnih sistema, ali će se u ovom radu pažnja zadržati samo na dobijanju neophodnih delova ove teorije da bi se što preciznije moglo skicirati fazni portreti zadatih sistema.

Rešenja i trajektorije sistema sa tri i više jednačina je moguće, mada je komplikovanije što se više povećava broj jednačina, tako da će ovaj rad biti fokusiran na sistema sa dve

jednačine. Primene planarnih automonmih sistema jednačina ovoga radu će biti SIR model, HIV/AIDS model, modeli tipa Lotka – Voltera i modeli dve populacije u takmičenju.

3.2 Fazni portreti i ravnotežne tačke

U predhodnim odljecima je bilo reči o tome, da je znak koordinata ravnotežnih tačaka presudan za određivanje tipa faznih portreta linarnih sistema a to će biti slučaj i kod nelinearnih, s tim da je teže odrediti celi (globalni) fazni portret nelinearnog sistema. U nastavku rada, prvo će biti pokazano kako se određuje tip faznog portreta lokalno a onda i globalno.

Posmatraće se planarni autonomni sistem (3.1) sa početnim uslovima

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0$$

koji ima jedinstveno rešenje. Da bi se imali jedinstveno rešenje potrebno je da funkcija f i g ima neprekidni prvi izvodi po x i y na nekom domenu D u ravni. U nekim slučajevi D ne predstavlja celu ravan, kao što će to biti kod HIV/AIDS modela, o kojem će se govoriti kasnije u radu.

Prvo da se ponove neke napomene, koje se odnose na fazne portrete. Trajaktoriya koja odgovara paru rešenja $x = x(t), y = y(t)$ predstavlja skup tačaka $\{x(t), y(t)\}$ u x, y – ravni. U opštem slučaju trajaktoriya je kriva u ravni. Trajaktoriya ima orijentaciju koja je određena kretanjem krive kada se t povećava. Pošto sistem ima jedinstveno rešenje trajaktoriya prelazi kroz svaku tačku (x_0, y_0) iz domena D u nekom trenutku $t = t_0$. Drugačije početno vreme t_0 postavlja drugačije uslove, čije rešenje daje istu trajaktoriyu, samo što se do tačke (x_0, y_0) dolazi u drugačije vreme. To znači, da postoje bezbroj rešenja koje odgovaraju istoj trajaktoriji. Tako da trajaktoriye „popunjavaju” domen D , pošto postoji trajaktoriya kroz svaku tačku domena i različite trajaktoriye se ne preklapaju.

U daljem delu fokus će biti na određivanje geometrijskog oblika faznog portreta nelinearnog sistema. Kao što je već spomenuto ravnotežna tačka ima ključnu ulogu, tako da će se početi od iste. Ravnotežne tačke su konstante

$$x(t) = x_e = \text{const.}$$

$$y(t) = y_e = \text{const.}$$

Trajektorije koje odgovaraju ravnotežnoj tački su samo tačke (x_e, y_e) u (x, y) – ravni. Pošto je izvod od konstante nula, sledi da ravnotežna tačka (x_e, y_e) sistema (3.1) zadovoljava sledeće jednakosti

$$0 = f(x_e, y_e)$$

$$0 = g(x_e, y_e).$$

Stoga, ravnotežne tačke planarnog autonomnog sistema (3.1) su rešenja sistema jednačina

$$f(x, y) = 0$$

$$g(x, y) = 0.$$

Za nelinearni sistem, ove jednačine su nelinearne, tako da njihovo rešavanje može predstavljati problem. U nekim slučajevima može se eksplicitno rešiti i dobiti tačno rešenje, dok u nekim sličajevima se mora pomoću kompjutera doći do nekog približnog rešenja.

Ravnotežne tačke kod nelinearnih jednačina višeg reda se pronalaze tako što se jednačina smenom svede na sistem jednačina prvog reda, ali može se rešiti i direktno, tako što će se svi potrebni izvodi u jednačini izjednačiti sa nulom. Slično i za sisteme sa $n \geq 3$ jednačina ravnotežne tačke se pronalaze tako što svi potrebni izvodi izjednače sa nulom i rešavanjem sistema sa n jednačina se dobija ravnotežna tačka početnog sistema.

Pošto su pronađene ravnotežne tačke, sledeći korak u konstrukciji faznog portreta je odrediti osobine trajektorija oko ravnotežne tačke. U opštem slučaju ovo predstavlja težak zadatak, ali sada će biti objašnjena metoda po kojoj možemo odrediti ponašanje trajektorija, koje se nalaze u okolini ravnotežne tačke. Metoda se naziva *princip linearizacije*.

3.3 Princip linearizacije

Posmatra se planarni autonomni sistem (3.1). Prvo će se dati aproksimacije za $f(x, y)$ i $g(x, y)$ pomoću Tejlorovog polinoma oko ravnotežne tačke (x_e, y_e) . To su sledeći polinomi

$$\begin{aligned} f(x_e, y_e) + a(x - x_e) + b(y - y_e) \\ g(x_e, y_e) + c(x - x_e) + d(y - y_e), \end{aligned}$$

gde se koeficijenti izračunavaju na osnovu izvoda funkcija f i g pomoću formula

$$\begin{aligned} a = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_e, y_e)}, \quad b = \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_e, y_e)} \\ c = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{(x_e, y_e)}, \quad d = \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{(x_e, y_e)}. \end{aligned}$$

Pošto je $f(x_e, y_e) = 0$, $g(x_e, y_e) = 0$, aproksimacija Tejlorovim polinomom postaje

$$\begin{aligned} f(x, y) &\approx a(x - x_e) + b(y - y_e) \\ g(x, y) &\approx c(x - x_e) + d(y - y_e). \end{aligned}$$

Kada uvrstimo smenu

$$u = x - x_e, \quad v = y - y_e$$

dobija se sistem

$$\begin{aligned} u' &= ax + by \\ v' &= cx + dy \end{aligned} \tag{3.2}$$

koji predstavlja aproksimaciju sistema (3.1).

Linearni homogeni sistem (3.2) se naziva *linearizacija sistema (3.1) u ravnotežnoj tački* (x_e, y_e) . Matrica koeficijenata linearizacije

$$J = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

se naziva *Jakobijan* nelinearnog sistema (3.1) u ravnotežnoj tački. Vidi se da ova matrica zavisi i od izvoda funkcija f i g kao i od same ravnotežne tačke (x_e, y_e) .

Specijalno za $J = J(x_e, y_e)$ dobija se

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Pri rešavanju sa konkretnim brojevima se mora paziti da sistem može imati i više ravnotežnih tačaka, tako da kada se govori o linearizaciji treba napomenuti za koju tačno ravnotežnu tačku se radi linearizaciju. Na sličan način se može linearizovati i diferencijalna jednačina drugog reda.

Pošto je objašnjeno kako se linearizuje sistem diferencijalnih jednačina u ravnotežnoj tački, pitanje je, šta se može saznati o rešenju planarnog autonomnog sistema iz same linearizacije? Dali se može zaključiti nešto o trajektorijama sistema i njegovom faznom portretu? O tipovima faznih portreta linearnog sistema se govorilo u *poglavlju 1*. Koristeći tu klasifikaciju mogu se odrediti tipove faznih portreta sistema (3.2). Pošto ovaj sistem predstavlja aproksimaciju pomoću linearizacije nelinearnog sistema (3.1) očekuje se da se fazni portret nelinearnog sistema ponaša isto kao i njegova aproksimacija u okolini ravnotežne tačke. U nastavku će se navesti nekoliko teorema, koje će potvrditi ovu pretpostavku. Pre toga jedno podsećanje, da su se kod homogenih sistema definisali uslovi kada je fazni portret bio stabilan a kada nestabilan. Ovde će se dati tehnička definicija o stabilnosti oko ravnotežne tačke nelinearnog sistema. Kada se kaže da je ravnotežna tačka (*lokalno*) *stabilna*, to znači da će trajektorije ostati u okolini ravnotežne tačke za sve $t > t_0$ ako se nalaze u okolini u trenutku $t = t_0$. U suprotnom ravnotežna tačka je *nestabilna*. Dalje, ako sve trajektorije, koje se nalaze u okolini ravnotežne tačke teže ka njoj kada $t \rightarrow \infty$, tada se za ravnotežnu tačku kaže da je

(lokalno) asimptotski stabilna. Reč lokalno se često koristi u ovakvim definicijama, zato što se govori o trajektorijama, koje su u okolini ravnotežne tačke. Često se umesto lokalno asimptotski stabilna ravnotežna tačka kaže samo *stabilna* ravnotežna tačka.

Teorema 2 : Princip linearizacije za planarne sisteme

Neka je (x_e, y_e) ravnotežna tačka autonomnog sistema

$$x' = f(x, y)$$

$$y' = g(x, y)$$

i neka su λ_1, λ_2 koreni karakteristične jednačine $\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc$, gde je

$$a = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_e, y_e)}, \quad b = \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_e, y_e)}$$

$$c = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{(x_e, y_e)}, \quad d = \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{(x_e, y_e)}.$$

Ako λ_1 i λ_2 imaju negativne realne delove onda je ravnotežna tačka (lokalno asimptotski) stabilna. Ako bar jedan koren ima pozitivni realni deo, onda je ravnotežna tačka nestabilna.

Broj λ sa negativnim realnim delom se nalazi na levoj strani kompleksne ravni, tako da je ravnotežna tačka stabilna ako se oba korena karakterističnog polinoma nalaze na levoj strani kompleksne ravni. Nestabilna je ako se bar jedan koren nalazi na desnoj strani ravni. Iz *Teoreme 2* se dobija sledeća teorema :

Teorema 3 : Ravnotežna tačka (x_e, y_e) autonomnog sistema

$$x' = f(x, y)$$

$$y' = g(x, y)$$

je stabilna ako važe obe nejednakosti

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} < 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} > 0$$

za tačku $(x, y) = (x_e, y_e)$.

A ako važi

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} > 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} < 0$$

za tačku $(x, y) = (x_e, y_e)$, onda je ravnotežna tačka nestabilna.

Ako se analizira ova teorema, vidi se da zbir $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$ predstavlja trag Jakobijeve matrice J a izraz $\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}$ predstavlja determinantu te matrice, stoga ova teoreme je izvedena iz predhodno objašnjenog dela o kriteriju na osnovu tragu i determinante matrice J .

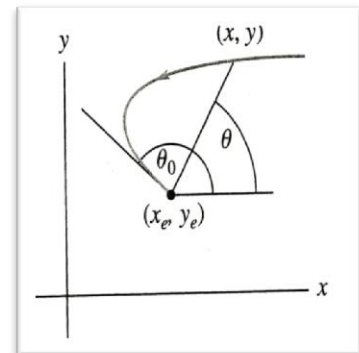
U sledećem poglavlju će se pokazati, da na osnovu linearizacije ne samo što se može odrediti stabilnost nelinearnog sistema, već i geometrijski oblik.

3.4 Lokalni fazni portreti

Koristiće se klasifikaciju faznih portreta data Tabelom 2 u poglavlju 1, ali pitanje koje se postavlja je, da li će fazni portreti linearizacije uvek biti isti kao i fazni portreti nelinearnog sistema oko ravnotežne tačke? Isto kao i za stabilnost i ovde se mora definisati šta podrazumeva čvor a šta spirala za nelinearni sistem.

Karakteristika čvora je da se sve trajektorije približavaju koordinatnom početku sa pozitivne strane. Kod stabilnog čvora ugao θ određen tačkom na trajektoriji, koristeći koordinatni početak kao referentnu tačku, se približava graničnom uglu θ_0 kada $t \rightarrow \infty$, što je prikazano na slici 14. Kod nestabilnog čvora ugao θ se približava graničnom uglu kada $t \rightarrow -\infty$. Mora se napomenuti da granični ugao nije neophodno isti za sve trajektorije. Spirala ima odliku da ugao θ ne teži ka graničnom uglu, već se povećava bez ograničenja dok se spirala kreće oko ravnotežne tačke.

Slika 14 :



Za stabilni tip faznog portreta (čvor i spiralu) razdaljina r od tačke na trajektoriji do ravnotežne tačke se približava 0 kako $t \rightarrow \infty$, dok kod nestabilnog tipa se razdaljina se približava 0 kako $t \rightarrow -\infty$.

Ove karakteristike faznog portreta linearnog sistema se mogu iskoristi da se definiše čvor i spirala za nelinearni sistem.

Definicija 1 : „Lokalni” fazni portret u okolini ravnotežne tačke nelinearnog sistema je tipa **stabilni čvor**, ako $r \rightarrow 0$ i ugao svake trajektorije teži svojoj granici kada $t \rightarrow \infty$ a je tipa **nestabilni čvor**, ako $r \rightarrow 0$ i ugao svake trajektorije teži svojoj granici kada $t \rightarrow -\infty$.

„Lokalni” fazni portret u okolini ravnotežne tačke nelinearnog sistema je tipa **stabilna spirala**, ako $r \rightarrow 0$ i ugao svake trajektorije se povećava bez ograničenja kada $t \rightarrow \infty$ a je tipa **nestabilna spirala**, ako $r \rightarrow 0$ i ugao svake trajektorije se povećava bez ograničenja kada $t \rightarrow -\infty$.

Ostalo je da se definiše fazni portret tipa sedlo. Karakteristika ovog tipa je postojanje dve trajektorije oblika poluprave, koje teže ka ravnotežnoj tački $(0, 0)$ kada $t \rightarrow \infty$ i dve trajektorije oblika poluprave, koje teže ka ravnotežnoj tački $(0, 0)$ kada $t \rightarrow -\infty$. Ni jedna druga trajektorija ne teži ka tački $(0, 0)$ ni kada $t \rightarrow \infty$, ni kada $t \rightarrow -\infty$. Sedlo za nelinearne sisteme se definiše na sledeći način :

Definicija 2 : Fazni portret je „lokalno” tipa **sedlo** ako

1. Postoje dve trajektorije, koje teže ka ravnotežnoj tački, čiji se uglovi θ približavaju svojim graničnim uglovima kada $t \rightarrow \infty$.
2. Postoje dve trajektorije, koje teže ka ravnotežnoj tački, čiji se uglovi θ približavaju svojim graničnim uglovima kada $t \rightarrow -\infty$.
3. Ni jedna druga trajektorija ne teži ka ravnotežnoj tački ni kada $t \rightarrow \infty$ ni kada $t \rightarrow -\infty$.

Dve trajektorije, koje teže ka ravnotežnoj tački, kada $t \rightarrow \infty$ formiraju *stabilnu granu*, ali sa razlikom da kod nelinearnih sisteme ove trajektorije ne moraju da budu prave linije, kao što je to slučaj kod linearnih sistema. Slično, druge dve trajektorije, koje teže ka ravnotežnoj tački kada $t \rightarrow -\infty$ formiraju *nestabilnu granu*, ali takođe ne moraju da budu prave linije.

Dalje se navodi definicija, kada se za fazni portret nelinearnog sistema kaže da je *hiperboličan* :

Definicija 3 : Ravnotežna tačka je **hiperbolična** a onda i fazni portret **hiperboličan**, ako svi koreni λ karakterističnog polinoma dobijeni linearizacijom u toj tački imaju ne nula realne delove.

Teorema 4 : Hiperboličan fazni portret planarnog autonomnog sistema

$$x' = f(x, y)$$

$$y' = g(x, y)$$

je

stabilna (nestabilna) spirala ako je linearizacija stabilna (nestabilna) spirala,

stabilni (nestabilni) čvor ako je linearizacija stabilni (nestabilni) čvor,

sedlo ako je linearizacija sedlo.

Posledica : Ako se pretpostavi da je za (x_e, y_e) fazni portret planarnog autonomnog sistema (3.1) hiperboličan.

Dalje, ako se pretpostavi da su karakteristični koreni dobijeni linearizacijom u tački (x_e, y_e) kompleksni, tada ravnotežna tačka (x_e, y_e) obrazuje stabilnu spiralu, ako su joj realni delovi negativni a obrazuje nestabilnu spiralu, ako su joj realni delovi pozitivni.

Na kraju, ako se pretpostavi da su karakteristični koreni realni i ako su oba negativna, onda ravnotežna tačka (x_e, y_e) obrazuje stabilni čvor. Ako su oba pozitivna obrazuje nestabilni čvor a ukoliko su različitog znaka obrazuje sedlo.

Ovoga puta neće se definisati preostali tipovi čvorova, kao što je zvezda i centar, koji su definisalni kod linearnih sistema, jer se veza između nehomogenih sistema i linearizacije u ovim slučajevima komplikovana. Takođe i u okolini nehiperboličnih ravnotežnih tačaka fazni portreti planarnih autonomnih sistema i njihove linearizacija ne moraju, a često i nisu, istog tipa.

Naglašeno je da *Teorema 4* i *Posledica* opisuju fazne portrete samo u okolini ravnotežne tačke. Globalni fazni portreti planarnom autonomnog sistema mogu da izgledaju znatno drugačije od faznih portreta svoje linearizacije, o čemu će se bliže pričati u sledećem poglavlju.

3.5 Globalni fazni portreti

U ovom poglavlju će se razmatrati kako će izgledati globalni fazni portreti nelinearnog sistema. Prvo što treba napomenuti je da se kod nelinearnih sistema od dve (ili više) jednačina može dobiti i periodičan par rešenja, što nije bio slučaj kod linearnih. Periodičan par rešenja je par $x(t), y(t)$ koji zadovoljava $x(t + p) = x(t)$ i $y(t + p) = y(t)$ za sve t . Kao rezultat ovoga, trajektorije kod periodičnog para rešenja oblikuju *zatvorenu trajektoriju* u faznom portretu a ova pojava se i javlja samo kod periodičnog para rešenja. Fazni portreti čije trajektorije formiraju zatvorenu trajektoriju se nazivaju *krugovi* ili *ciklusi*. Dolazi se do nove mogućnosti stanje sistema a to je da trajektorije ne moraju da se približavaju ili udaljavaju od ravnotežne tačke. Ako se druge trajektorije približavaju spomenutom ciklusu kada $t \rightarrow \infty$ (ili $-\infty$), onda se takvo stanje sistema naziva *granični ciklus*. Pri konstrukciji faznih portreta sistema problem će biti odrediti skup tačaka, kojima se približavaju trajektorije kada $t \rightarrow \infty$ i $-\infty$.

Ako se pretpostavi da su trajektorije ograničene kada $t \rightarrow \infty$ a trajektorije su ograničene kada $t \rightarrow -\infty$, ako ne mogu otići proizvoljno daleko od koordinatnog početka, odnosno ostaju u njenoj okolini sa proizvoljno velikim radijusom za sve $t \geq 0$. Slično, trajektorije su ograničene kada $t \rightarrow -\infty$, ako ostaju u okolini proizvoljno velikog radijusa za sve $t \leq 0$. Skup tačaka kojem će se približavati trajektorije kada $t \rightarrow \infty$ će se nazivati *prednji granični skup tačaka* i označavati ga sa S^+ . Preciznije, tačka (x^*, y^*) se nalazi u skupu S^+ , ako postoji niz $t_n \rightarrow \infty$, čiji odgovarajući skup tačaka na trajektoriji $(x(t_n), y(t_n))$ se približava tački (x^*, y^*) , ili

$$S^+ = \{(x^*, y^*) | \text{tako da postoji niz } t_n \rightarrow \infty \text{ za koji važi } (x(t_n), y(t_n)) \rightarrow (x^*, y^*)\}.$$

Treba napomenuti da, ne mora značiti da $(x(t_n), y(t_n)) \rightarrow (x^*, y^*)$ kada $t \rightarrow \infty$, jer može da postoji niz $t_i \rightarrow \infty$, gde se tačke trajektorije $(x(t_i), y(t_i))$ mogu približavati nekoj drugoj tački.

Zadnji granični skup tačaka S^- se definiše na sličan način, kao skup tačaka kojem se približavaju trajektorije kada $t \rightarrow -\infty$, ili

$$S^- = \{(x^*, y^*) | \text{tako da postoji niz } t_n \rightarrow -\infty \text{ za koji važi } (x(t_n), y(t_n)) \rightarrow (x^*, y^*)\}.$$

Glavna odlika graničnih skupova $S^\pm$ je to, da ukoliko tačka (x^*, y^*) pripada skupu, onda se čitava trajektorija, koju obrazuje ta tačka nalazi unutar tog skupa, za sve t (i pozitivne i negativne). Zaključak je, da su granični skupovi sastavljeni od trajektorija.

Sada će biti navedena poznata teorema, koja nam daje informacije o trajektorijama u graničnim skupovima. Kao i do sada, pretpostavi se da funkcije $f(x, y)$ i $g(x, y)$ planarnog autonomnog sistema (3.1) imaju neprekidne parcijalne izvode.

Teorema 5 : Poincaré - Bendixson

Neka je S^+ prednji granični skup tačaka koji predstavlja granicu trajektorija, kada $t \rightarrow \infty$. Tada ili važi da S^+ sadrži ravnotežnu tačku ili S^+ predstavlja granični ciklus.

Ove dve mogućnosti takođe važe i za zadnji granični skup tačaka S^- koji predstavlja granicu trajektorija kada $t \rightarrow -\infty$.

Ova teorema daje samo dve mogućnosti za granični skup tačaka, koji je granica trajektorija, što govori, da ako se za određeni sistem uspe isključiti jedna mogućnost, onda mora da važi druga. Na primer, ako uspemo pokazati da trajektorije ne sadrže ravnotežnu tačku u graničnom skupu, onda sledi da trajektorije teže ka graničnom ciklusu.

U uopštenom slučaju dokazati postojanje graničnih ciklusa za planarni autonomni sistem može predstavljati problem, ali pomoću ove teorema se dobija način kako to uraditi samim negiranjem postojanje druge mogućnosti.

Pored principa linearizacije i Poincaré – Bendixsonove teoreme poznate su još neke činjenice i tehnike koje mogu pomoći pri skiciranju faznih portreta autonomnih sistema, kao što su :

- Ciklus se mora nalaziti oko bar jedne ravnotežne tačke.
- Ukoliko prednji granični skup S^+ sadrži stabilni čvor ili stabilnu spiralnu, onda se on sastoji samo od te ravnotežne tačke, odnosno trajektorije teže ka toj ravnotežnoj tački kada $t \rightarrow \infty$.
- Prednji granični skup S^+ ne može sadržati nestabilni čvor ili nestabilnu spiralnu.

Treba napomenuti, da granični skup ne mora sadržati samo jednu ravnotežnu tačku ili jedan granični ciklus. Granični skupovi se mogu sastojati od više različitih trajektorija, tako da se zaključuje da jedan granični skup može sadržati više ravnotežnih tačaka.

U ovom poglavlju se zaključilo da za planarni autonomni sistem granični skupovi trajektorija ne moraju uvek da budu ravnotežne tačke, nego su se dobile nove mogućnosti a to su granični ciklusi. Vidi se da su se mogućnosti iskomplikovali kako se prešlo iz linearnog u nelinearni sistem a kada bi se uvelo još dimenzija, odnosno povećalo broj jednačina, dobilo bi se još komplikovanih mogućnosti. Ipak, uspelo se objasniti bar osnovne tipove graničnih skupova za planarne autonomne sisteme.

4. *Primena nelinearnih sistema diferencijalnih jednačina*

U ovom poglavlju rad se se fokusirati na primenu nelinearnih sistema u konkretnim situacijama i na zaključke koji se mogu izvesti na osnovu matematičkog računa. Posmatraće se dve različite oblasti primena ovih sistema, u epidemiologiji i u ekologiji. U svakoj od ovih oblasti navešće se po dve različite primene.

4.1 *Epidemije*

Od početka pisane istorije bilo je epidemija, iznenadno izbijanje bolesti koja zarazi značajan deo stanovništva u regionu, ili populacije životinja ili biljaka pre nego što nestane. Jedan od prvih trijumfa matematičke epidemiologije je bila formulacija jednostavnog modela, koji je predvideo upravo takvo ponašanje. Naučnici su formirali i primenili različite matematičke modele da bi opisali i proučili širenje bolesti kroz neku populaciju. Ovaj rad će se fokusirati na dva tipa ovakvih modela, to su klasični SIR (eng. susceptibles, infected, recovered) model ili u prevodu podložni – zaraženi – oporavljeni, koji je često nazivan i Kermack – McKendrick model i drugi, mnogo noviji model za HIV/AIDS epidemiju. Oba modela su modeli odeljaka ili podela, tip o kome je već bilo reči u predhodnim primenama. U ovom slučaju cela populacija se deli na nekoliko klasa a brojnost te klase izvedena je na osnovu balansa između stope priliva i odliva broja jedinki datim klasama.

4.1.1 *SIR model*

Za mnoge bolesti važi pravilo da kada se jedinka zarazi određenom bolešću ili umre ili se oporavi sa trajnim imunitetom za tu bolest. U ovom modelu će se razmatrati problem određivanja širenje bolesti kroz populaciju konstatne veličine. Cela populacija jedinki će se podeliti u tri disjunktne klase a to su već pomenuti podložni, zaraženi i oporavljeni. Prvo će se objasniti šta podrazumevaju termini podložni, zaraženi, oporavljeni, da bi bolje razumeli, kako funkcioniše sam model. U klasu „podložni” spadaju jedinke, koje mogu da se zaraze, ali ne mogu da prenesu bolest. Klasu „zaraženi” čine jedinke koje su zaražene bolešću i mogu dalje da je šire na klasu „podložnih” jedinki, dok klasu „oporavljeni” predstavljaju jedinke koje su

izlečene i imaju trajni imunitet od bolesti, ili su u izolaciji, ili su umrle od posledica bolesti. Uvešće se oznake za broj jedinki u svakoj od ovih klasa, i to su redom $S = S(t)$, $I = I(t)$ i $R = R(t)$ a sa N će se označiti ukupan broj jedinki u celoj populaciji. Kao što može da se pretpostavi, broj jedinki u svakoj od klasa predstavlja jednu funkciju vremena (t), i kako bude bolest napredovala ovi brojevi će se menjati u zavisnosti od vremena.

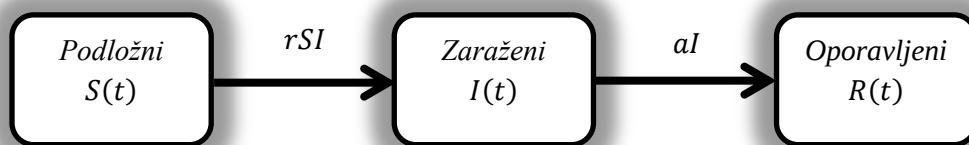
Treba odrediti model stope rasta sve tri klasa, odnosno dovoljno je odrediti samo $S' = \frac{dS}{dt}$ i $I' = \frac{dI}{dt}$, zato što se model za $R' = \frac{dR}{dt}$ može izvesti, jer je na početku naglašeno da je populacija fiksna, odnosno da je $S + I + R = \text{const} = N$, pa je $(S + I + R)' = 0$, iz čega sledi da je $R' = -S' - I'$, a kada se dobije S' i I' integracijom predhodnog izraza dobiće se $R = R(t)$. Treba definisati i

$$S' = \text{stopa priliva broja podložnih} - \text{stopa odliva broja podložni} \quad (4.1)$$

$$I' = \text{stopa priliva broja zaraženih} - \text{stopa odliva broja zaraženih}.$$

Klasični SIR model je model odeljaka, kao što je prikazano na *dijagramu 3*.

Dijagram 3 :



Napravljeno je nekoliko pretpostavki da bi se formulisale tražene jednačine. Svaka jedinka populacije ima jednaku verovatnoću da se zarazi bolešću i ta verovatnoću će se nazivati *stopom zaraze* i oznaće se sa r . Dakle, inficirana jedinka ima kontakt sa celom populacijom N i prenosi bolest sa stopom r po jedinici vremena, ali može da zarazi samo deo populacije, klasu podložnih, odnosno $\frac{S}{N}$. Broj novih infekcija u jedinici vremena po jednoj zaraženoj jedinki je onda $r N \frac{S}{N}$, dajući ukupnu stopu novih zaraženih sa $r N \frac{S}{N} I = r S I$. Što ujedno prestavlja i stopu odliva broja podložnih, dok se stopa odliva broja zaraženih računa na osnovu stope izlečenja/smrti a . Matematički zapis (4.1) je

$$S' = 0 - rSI$$

$$I' = rSI - aI$$

a za konstante $r, a > 0$ a $R' = aI$ i unapred zadate početne uslove dobija se sistem od dve diferencijalne jednačine sa dve nepoznate

$$S' = -rSI$$

$$I' = rSI - aI \quad (4.2)$$

$$S(0) = S_0 \geq 0, \quad I(0) = I_0 \geq 0$$

Sistem (4.2) se uspešno koristi i uklopio se u podatke više epidemije iz prošlosti. Ako bi se posmatralo neko buduće stanje, gde je na početku posmatranog perioda $t_0 = 0$ i $I_0 > 0$ odnosno da je nekoliko jedinki zaraženo. Glavno pitanje je, da li će bolest koja se pojavila u posmatranoj populaciji prerasti u epidemiju ili ne? Odnosno da li će $I(t)$ rasti ili opadati? Logičan odgovor je, ako bi broj zaraženih rastao reklo bi se da je došlo do epidemije i obrnuta, ako bi broj zaraženih opadao, ne bi bilo epidemije. U nastavku se razmatra pod kojim uslovima će rešenje sistem (4.2) biti takvo da će doći do epidemije. Takođe će se ispitati šta se dešava sa brojem jedinki u svakoj klasi populacije.

Posmatraće se ravnotežne tačke sistema, ali samo tačke $(S, I) = (S_e, I_e)$, za koje važi $S_e \geq 0$ i $I_e \geq 0$, jer se nemože posmatrati negativni broj potencijalnih ili zaraženih, i zbog toga se rešava sistem oblika

$$0 = -rSI$$

$$0 = rSI - aI$$

gde se iz prve jednačine dobija da ili je $S = 0$ ili $I = 0$ (ili oba). Ako je $S = 0$, onda iz druge jednačine sledi da je i $I = 0$, što znači da je tačka $(S, I) = (0, 0)$ ravnotežna tačka a ako je $I = 0$, onda su obe jednačine tačne za sve vrednosti promenljive S . Što znači da svaka tačka $(S, I) = (S_e, 0)$ koja leži na S – osi u (S, I) faznog portreta predstavlja ravnotežnu tačku. Nas interesuju samo ravnotežne tačke $(S_e, 0)$, za koje je $S_e \geq 0$.

Da bi se ispitala lokalna stabilnost ravnotežnih tačaka $(S_e, 0)$ mora se izračunati Jakobijan, koji za zadati sistem ima oblik

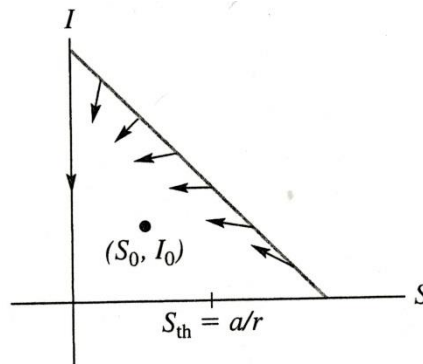
$$J(S, I) = \begin{bmatrix} -rI & -rS \\ rI & rS - a \end{bmatrix}$$

a kada se uvrste ravnotežne tačke $(S_e, 0)$ dobija se

$$J(S_e, 0) = \begin{bmatrix} 0 & -rS_e \\ 0 & rS_e - a \end{bmatrix}.$$

Odavde se dobija, da su karakteristični koreni $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = rS_e - a$, a pošto je realni deo prvog korena jednak 0, to znači da su ravnotežne tačke $(S_e, 0)$ nehiperbolične. Ukoliko bi važiolo da je $\lambda_2 = rS_e - a > 0$, odnosno $S_e > \frac{a}{r}$ onda bi se iskoristila *Teorema 2* i došlo bi se do zaključka da su ravnotežne tačke $(S_e, 0)$ nestabilne. Ako bi važiolo da je $\lambda_2 = rS_e - a \leq 0$, odnosno $S_e \leq \frac{a}{r}$, princip linearizacije ne bi mogao pomoći pri određivanju tipa ravnotežnih tačkaka $(S_e, 0)$, jer se ne bi moglo iskoristiti ni *Teorema 2*, ni *Teorema 4*.

U ovom slučaju mogla bi se iskoristiti *Teorema Poincaré-Bendixson*, odnosno *Teorema 5*, ali prvo se mora pokazati da su trajektorije ograničene. Uviđa se da su trajektorije, koje se nalazi u prvom kvadrantu, sa leve strane ograničena S – osom a od dole sa I – osom i ne mogu da izađu iz ovog kvadranta, zbog uslova $S \geq 0$ i $I \geq 0$. Ograničene su i sa desne strane i od gore od početne tačke (S_0, I_0) , koja se nalazi unutar jednakokrakog trougla kao na *grafiku 5*, jer je očigledno da se trajektorije kreću unutar trougla u ovom kvadrantu.



Grafik 5

Konstatuje se da nema ciklusa, jer u ovom kvadrantu nema ravnotežnih tačaka. Podseti da ciklus mora obavijati ravnotežnu tačku. Pošto su zadovoljeno sve pretpostavke, može se iskoristiti *Teoremu 5* na trajektorije u ovom kvadrantu, koja dokazuje da granični skup tačaka S^+ mora sadržati ravnotežnu tačku $(S_e, 0)$ na pozitivnom delu S – ose. Ova teorema nam ne kaže da se trajektorije približavaju toj ravnotežnoj tački. Ova tvrdnja se mora još dokazati.

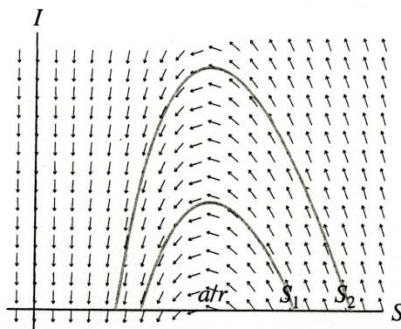
Ako se posmatra prva jednačina sistema (4.2) za trajektorije u prvom kvadrantu, vidi se da je $S' < 0$, iz čega se može zaključiti da je u ovom kvadrantu $S(t)$ monotono opadajuća, pozitivna funkcija tako da se mora približavati graničnoj vrednosti kada $t \rightarrow \infty$ a u ovom slučaju to znači da se približava ravnotežnoj tački $(S_e, 0)$ kada $t \rightarrow \infty$.

Sada se mogu izvesti neki zaključci za SIR model epidemije dat sistemom (4.2) na osnovu matematičkih rešenja koja su se do sada dobili.

- Za $S_0 > \frac{a}{r}$ se zaključuje da će broj zaraženih $I(t)$ rasti pre nego što će opasti do 0, kada $t \rightarrow \infty$, što znači da će do epidemije doći.
- Sa druge strane, ako je $S_0 \leq \frac{a}{r}$ broj zaraženih $I(t)$ će strogo opadati do 0, kada $t \rightarrow \infty$, odnosno do epidemije neće doći.
- To znači da postoji prag broja potencijalnih jedinki iznad kojeg će doći do epidemije a ispod kojeg neće doći do epidemije.

Ovakvi pragovi su česti kod epidemijskih modela, što je slučaj i kod HIV/AIDS o kojem će se govoriti u sledećem poglavlju.

Dalje sa *grafika 6* se uviđa da za SIR epidemijski model važi, da će maksimalni broj inficiranih jedinki I_{max} dostignutih u toku rasta epidemije biti veći ukoliko je i sam broj potencijalnih jedinki S_0 veći. Takođe se zaključuje da je broj potencijalnih jedinki S_e koji ostaje nakon što je epidemije došla do kraja manji ako je broj potencijalnih jedinki S_0 veći, što bi značilo da, ako je ovaj broj veći i razmera epidemije je ozbiljnija odnosno veća i ostaje manji broj potencijalnih jedinki koje je epidemije zaobišla.

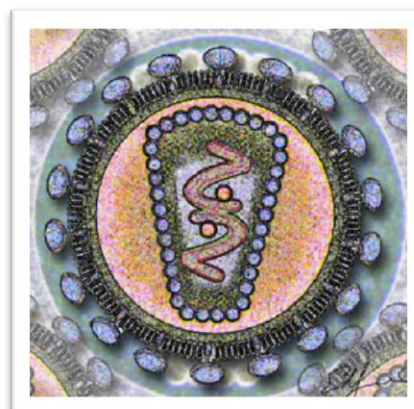


Grafik 6

Kermack – McKendrickov SIR model (4.2) je baziran na pretpostavkama koje su previše pojednostavljene da bi bile realistične i upotrebljive u realnom životu. Moguće je u nekim slučajevima iskoristiti i ovakav modele, ali se najčešće koriste modeli koji su izvedeni iz ovog modela. Neke od modifikacija ovog modela su, da se unese promenljiva populacija, odnosno da se rađaju nove jedinke i da jedinke umiru prirodnom smrću ne zavisno od epidemije. Sledeća mogućnost je da je potrebno neko vreme biti zaražen da bi mogli prenositi zarazu. Takozvani SEIR model, gde je ubačena još jedna grupa a to je grupa „izloženi” (eng. exposed). Još jedna mogućnost je MSIR model, koji se koristi u slučaju bolesti malih boginja, gde je novorođenče imuno na bolest nekoliko meseci zbog antitela dobijenih od majke. Tako da se za to vreme nalaze u klasi M, „imuni od majke”, pre nego što pređu u klasu podložnih. Postoji i mogućnost da se inficirani ne izleče ali ni ne umru, nego postanu nosioci bolesti a postoji i modeli tipa SIS, koji se koristi kod prehlade ili sličnih bolesti, gde jedinka ne dobije trajni imunitet nego se izleči i imuna je neko vreme a posle ponovo može da oboli od iste bolesti. Neki komplikovaniji modeli sadrže mogućnost vakcinacije. I tu mogu biti još podela, poput vakcinacije samo novorođenčadi ili vakcinacija samo određene podgrupe posmatrane populacije. Još složenije mogućnosti izvedene iz osnovnog SIR modelu podrazumevaju ako bi se celokupnu populacija podelila po starosti, ili nekom drugom kriterijumu, zbog kojeg su više ili manje podložni oboljenu konkretnom bolešću. Svaka nova klasa podrazumeva novu diferencijalnu jednačinu i složeniji sistem za rešavanje, ali sa druge strane realističnije rezultate i primenljivije modele u praksi.

4.1.2 HIV/AIDS model

HIV (virus humane imunodeficijencije) je virus iz grupe retrovirusa, koji svojim delovanjem izaziva krajnji sindrom poznat kao sida. HIV je skraćenica od engleskog *human immunodeficiency virus*, što bi okarakterisalo ovaj virus kao uzročnika opadanja sposobnosti imunskog sistema organizma. HIV za najčešću metu napada ima veoma bitne delove imunskog sistema - CD4⁺ limfocite. Ovaj virus direktno i indirektno vodi do pada u proizvodnji CD4⁺ T limfocita i do njihovog krajnjeg uništenja. CD4⁺ T limfociti su glavni pokretači odbrambenog sistema i kada je proizvodnja ovih ćelija ravna nuli, imunski sistem skoro da i ne funkcioniše. HIV takođe direktno napada organe kao što su bubrezi, srce i mozak. Mnogi problemi sa kojim se oboleli od ovog virusa suočavaju su obične oportunističke bolesti, tipa prehlade, od kojih bi u normalnim uslovima imunski sistem mogao da se odbrani.



Slika 15 : Stilizovani prikaz preseka virusa HIV

Sida (fran. SIDA (Syndrome d'immunodéficience acquise); eng. AIDS (acquired immune deficiency syndrome) - sindrom stečene imunodeficijencije. U srpskom jeziku je češće u upotrebi reč *sida*. Morfološki se lakše menja po padežima nego *ejds*) je polno prenosiva bolest koja predstavlja poslednji stadijum infekcije organizma HIV virusom, a karakteriše je progresivno slabljenje imunskog sistema što pojedince čini podložnim širokom spektru infekcija i tumora.

Kermack – McKendrickov SIR model (4.2) predstavlja model brzog širenja bolesti kroz populaciju. Pod „brzim” se podrazumeva da je tok bolesti znatno brži od reproduktivnog ciklusa populacije stoga je verovatnoća umiranja od drugih vidova bolesti mala, pa se zanemaruje. Pošto je i stopa poroda zanemarena broj jedinki u čitavoj populaciji je bio konstantan. Kod bolesti koje su „sporije”, odnosno čiji ciklus je duži mora se pretpostaviti da se broj jedinki u posmatranoj populaciji menja u toku vremena pa tako u ovakvoj situaciji nije moguće upotrebiti SIR model.

Jedna takva bolest je već pomenuta *sida*, čije je period inkubacije (od zaraze HIV virusom do pojave simptoma *sida*) od dve do deset godina. HIV infekcija i razvoj *sida* je veoma komplikovan i još uvek nije u potpunosti shvaćen, tako da je teško napraviti model koji u potpunosti odgovara toku HIV/AIDS epidemije. Ali ako se malo pojednostavi situacija mogao bi se napraviti efikasan model širenja HIV infekcije.

Treba uzeti u obzir populaciju koja je podložna zarazi HIV virusom. To mogu biti stanovnici neke zemlje, oblasti, grada ili neka od rizičnih podgrupa stanovništva. Da bi se formirao model, prvo je potrebno uvesti određene oznake. Neka

$x = x(t)$ predstavlja broj podložnih ljudi u trenutku t a neka

$y = y(t)$ predstavlja broj individual sa HIV virusom (ali ne i *sidom*).

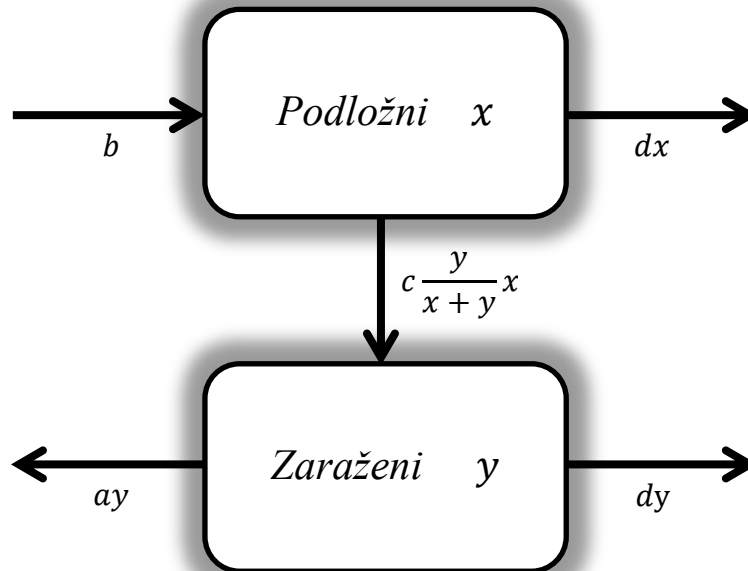
Pošto su individue u klasi y zaražene, one mogu prenositi HIV virus na klasu podložnih ljudi, odnosno klasu x . Predpostavlja se da su svi ne zaraženi ljudi populacije u klasi podložnih, tako da je celokupni broj populacije u bilo kom vremenu $x(t) + y(t)$. Potrebno je formulisati kako se dobija diferencijalne jednačina za x i y

$$x' = \text{stopa priliva za } x - \text{stopa odliva za } x \quad (4.3)$$

$$y' = \text{stopa priliva za } y - \text{stopa odliva za } y.$$

Formulisace se kako dobiti matematički zapis sve četiri stopa sa desne strane diferencijalnih jednačina. Za to će se koristiti *dijagram 4*

Dijagram 4 :



Iz *dijagrama 4* se vidi da se broj podložnih povećava konstantnom stopom $b > 0$ a to znači da je u sistemu difencijalnih jednačina *stopa priliva za x* $= b$. Dalje se vidi, da se stopa odliva sastoji od dve komponente, odnosno da pojedinac napušta klasu podložnih ili tako što umre od posledica nezavisnih od HIV virusa ili biva inficiran HIV virusom i tako prelazi u klasu zaraženih. Tako je *stopa odliva za x* zbir proizvoda dx , gde je $d > 0$ konstanta koja predstavlja verovatnoću smrti čoveka zato se i množi sa x i izraza $c \frac{y}{x+y} x$, koji je dobijen množenjem konstante $c > 0$, koja predstavlja verovatnoću da dođe do zaraze po glavi stanovnika, zato množimo opet sa x i razlomkom $\frac{y}{x+y}$ koji u ovom modelu predstavlja u kojoj meri je svaki zaraženi u dodiru sa čitavom populacijom. Ovakav razlomak je dobijem uz pretpostavku da svaki pojedinac može da dođe u kontakt sa svakim drugim pojedincem sa istom verovatnoćom. Tako da je mogućnost izloženosti virusu svakog nezaraženog pojedinca razlomak koji predstavlja udeo zaraženih u čitavoj populaciji. Zbirno iz *dijagrama 4* se dobija

$$\text{stopa odliva za } x = dx + c \frac{y}{x+y} x, \quad d > 0, \quad c > 0$$

a diferencijalna jednačina u sistemu (4.3) za x je

$$x' = b - dx - c \frac{y}{x+y} x.$$

Posmatraće se odeljak koji se odnosi na zaražene pojedince i iz *dijagrame 4* se vidi da se *stopa priliva za y* sastoji jedino od izraza $c \frac{y}{x+y} x$ a *stopa odliva za y* se sastoji iz dva dela. Deo koji se odnosi na individue kojima se virus razvije u sidu i time napuste grupu zaraženih i individue koje umru prirodnom bolešću ili nekom posledicom ne zavisno od HIV virusa. Deo koji se odnosi na ljude kod kojih bolest preraste u sidu se sastoji od konstante $a > 0$, koja predstavlja stopu po kojoj se kod pojedinca sa HIV virusom javlja sida, pa se zato množi sa x , a kao i kod potencijalnih smrtnost se dobija kao umnožak konstante d i broja jedinki u grupi, što je u ovom slučaju y . Stoga je

$$\text{stopa odliva za } y = dy + ay$$

a diferencijalna jednačina u sistemu (4.3) za y je

$$y' = c \frac{y}{x+y} x - (d + a)y.$$

Kada se saberu ove jednačine i dodaju početni uslovi dobija se početni problem, koji je oblika

$$\begin{aligned} x' &= b - dx - c \frac{y}{x+y} x \\ y' &= c \frac{y}{x+y} x - (d + a)y \\ x(0) &= x_0, \quad y(0) = y_0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

U ovom planarnom autonomnom sistemu sva četiri koeficijenta a , b , c i d su pozitivna a početni uslovi $x_0 \geq 0$, $y_0 \geq 0$ su ne negativni (ali ne oba jednaka 0). Pošto su izrazi sa desne strane jednačina sistema (4.4)

$$f(x, y) = b - dx - c \frac{y}{x + y} x$$

$$g(x, y) = c \frac{y}{x + y} x - (d + a)y$$

diferencijabilni pod uslovom $x \geq 0, y \geq 0$ (ali ne oba 0), tako da na osnovu *Teoreme 2* postoji jedinstveno rešenje početnog problema (4.4).

Cilj je da se odgори na sledeće pitanje : Nakon što je HIV virus dospeo u određenu populaciju, da li će on opstati, odnosno da li će doći do epidemije ili će vremenom izčeznuti ? Odnosno pod kojim uslovima će izčeznuti, ili matematički rečeno, koji uslovi treba da važe da $y(t)$ komponenta teži 0, kada $t \rightarrow \infty$?

Da bi se moglo odgovoriti na ovo pitanje, prvo se moraju pronaći ravnotežne tačke sistema (4.4) rešavanjem sistema jednačina

$$b - dx - c \frac{y}{x + y} x = 0$$

$$\left(c \frac{1}{x + y} x - (d + a) \right) y = 0.$$

Iz druge jednakosti se dobijaju dve mogućnosti :

$$y = 0 \quad \text{ili} \quad c \frac{1}{x+y} x - (d + a) = 0.$$

U prvom slučaju, kada je $y = 0$, uvrštavanjem u prvu jednakost dobija se izraz $x = \frac{b}{d}$.
Ravnotežna tačka

$$(x_e, y_e) = \left(\frac{b}{d}, 0 \right)$$

se nalazi na pozitivnom delu x - ose. U drugom slučaju ($y \neq 0$), dobija se da je

$$y = \frac{c - (d + a)}{d + a} x.$$

Kada se ova jednakost zameni u prvu jednačinu sistema posle sređivanja dobija se

$$x = \frac{b}{c - a},$$

pod uslovom $c \neq a$. Ako ovakav x uvrstimo u izraz za y red iznad, dobija se

$$y = \frac{c - (d + a)}{d + a} \frac{b}{c - a}.$$

Zaključujemo da postoje dve ravnotežne tačke sistema (4.4) i to su

$$(x_e, y_e) = \begin{cases} \left(\frac{b}{d}, 0 \right) \\ \left(\frac{b}{c - a}, \frac{c - (d + a)}{d + a} \frac{b}{c - a} \right), \quad c \neq a \end{cases}.$$

Druga ravnotežna tačka je pozitivna pod uslovom da je $c > d + a$. Proverom se dobija, da se pod uslovom da važi $c = d + a$ dve ravnotežne tačke poklapaju. Tako da se može zaključiti da pošto se za ovu vrednost parametra c menja znak koordinate druge ravnotežna tačke a samim tim i tip faznog portreta, ona će predstavljati prag koji će se posmatrati. Taj prag će se označiti sa

$$c_{th} = d + a.$$

Sledeći korak je proveriti stabilnost ravnotežnih tačkaka, odnosno odrediti tip faznih portreta, koristeći princip linearizacije objašnjen u predhodnom poglavlju. Jakobijeva matrica sistema (4.4) ima oblik

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} -d + c \frac{y}{(x+y)^2} x - c \frac{y}{x+y} & -\frac{c}{x+y} x + c \frac{y}{(x+y)^2} x \\ -c \frac{y}{(x+y)^2} x + c \frac{y}{x+y} & \frac{c}{x+y} x - c \frac{y}{(x+y)^2} x - d - a \end{bmatrix}$$

a kada se uvrsti koordinate prve ravnotežne tačke dobija se

$$J\left(\frac{b}{d}, 0\right) = \begin{bmatrix} -d & -c \\ 0 & c - d - a \end{bmatrix}.$$

Kada se izračuna determinanta Jakobijeve matrice, koju se često zove samo *Jakobijan*, dobijaju se koreni karakteristične jednačine a to su

$$\lambda_1 = -d < 0, \quad \lambda_2 = c - c_{th}.$$

Pošto je λ_1 negativan, stabilnost ravnotežne tačke je određena znakom korena λ_2 . Ako je $c < c_{th}$, onda je $\lambda_2 < 0$ i ravnotežna tačka je stabilni čvor, međutim ukoliko je $c > c_{th}$ onda je ravnotežna tačka nestabilna, odnosno predstavlja sedlastu tačku. Ako važi jednakost $c = c_{th}$, ravnotežna tačka je nehiperbolička i nemože se izvesti zaključak na osnovu principa linearizacije.

Jakobijeva matrica za ravnotežnu tačku

$$(x_e, y_e) = \left(\frac{b}{c-a}, \frac{c-(d+a)}{d+a} \frac{b}{c-a} \right)$$

je

$$J(x_e, y_e) = \frac{1}{c} \begin{bmatrix} -(c - c_{th})^2 - cd & -c_{th}^2 \\ (c - c_{th})^2 & -c_{th}(c - c_{th}) \end{bmatrix}.$$

Da bi se mogla iskoristiti *Teorema 3*, mora se izračunati trag i determinantu ove matrice i to su

$$trJ(x_e, y_e) = -\frac{1}{c}(c - c_{th})^2 - d - \frac{1}{c}c_{th}(c - c_{th})$$

$$detJ(x_e, y_e) = \frac{c_{th}}{c}(c - c_{th})(c - c_{th} + d).$$

Ukoliko je $c > c_{th}$, onda je $trJ(x_e, y_e) < 0$ a $detJ(x_e, y_e) > 0$ i na osnovu *Teoreme 3* ravnotežna tačka je stabilna. Dok ako važi nejednakost $a < c < c_{th}$, onda je $detJ(x_e, y_e) < 0$ i na osnovu *Teoreme 3* ravnotežna tačka je nestabilna. Tablično zapisani zaključci su dati u *Tabeli 4*.

Tabela 4 : Ravnotežne tačke sistema (4.4) i njihove stabilnost u zavisnosti od parametra c i vrednosti praga $c_{th} = d + a$.		
Ravnotežna tačka	$a < c < c_{th}$	$c_{th} < c$
$\left(\frac{b}{d}, 0\right)$	Stabilna	Nestabilna
$\left(\frac{b}{c-a}, \frac{c-(d+a)}{d+a} \frac{b}{c-a}\right)$	Nestabilna (ani nije pozitivna)	Stabilna (i pozitivna)

Principom linearizacije ravnotežnih tačaka HIV/AIDS modela se vidi da se stabilnost menja kada parametar c raste i prelazi preko vrednostnog praga $c_{th} = a + d$. Nezavisno od vrednosti parametara a , b i d se došlo do zaključka, koji govori da u slučaju $c < c_{th}$ sve trajektorije u prvom kvadrantu se približavaju ravnotežnoj tački na x – osi $\left(\frac{b}{d}, 0\right)$ a to u konkretnim slučaju znači, da HIV infekcija nestaje iz populacije a u slučaju $c > c_{th}$ trajektorije u pozitivnom kvadrantu se približavaju pozitivnoj ravnotežnoj tački i HIV infekcije opstaje, odnosno nastaje epidemija.

4.2 Ekologija

Dinamika interakcije između vrsta u određenom ekosistemu je često korišćena tema u primeni sistema diferencijalnih jednačina. U ovom poglavlju će biti izložena dva deterministička populaciona modela u kojima se pojavljuje interakcija dve populacije, pri čemu je ona dominantna u odnosu na sve ostale faktore. Kasnije će se videti da se takvi i slični modeli mogu, bar sa gledišta običnih diferencijalnih jednačina, na isti način analizirati.

Prvi od posmatranih modela sa dve vrste je tzv. „lovac – žrtva” (ili „predator – plen”) model. Razvili su ga zajedno dvadesetih godina prošlog veka veliki italijanski matematičar Vito Voltera i biolog Alfred Lotka, pa se otada modeli u kojima se jedna populacija hrani drugom (ili je na neki drugi način ugrožava), često nazivaju modeli tipa Lotka – Voltera. Prvobitno, spomenuta dvojica naučnika su analizirali promenu broja određenih vrsta riba u Jadranskom moru i tako došli do „svog” modela, koji je u stvari sistem nelinearnih diferencijalnih jednačina prvog reda.

U literaturi se obično spominju ajkule kao lovci (predatori) i ribe kao žrtve (plen), iako su Lotka i Voltera posmatrali dve vrste riba, od kojih se jedna vrsta hranila drugom, a koja se opet hranija planktonom. Na osnovu podataka koji su skupljani skoro čitav vek, pokazalo se da se interakcija između jedne vrste risova i jedne vrste zečeva u Severnoj Americi, sa matematičkog gledišta, može na skoro isti način opisati. Vremenom su pronađene i druge interakcije ovog tipa, a i uvedene su mnogobrojne generalizacije početnog modela Lotka – Voltera.

Drugi model koji se posmatra je model *dve populacije u takmičenju*. U tom modelu se posmatra interakcija dve populacije koje se bore za istu hranu, ili su direktno međusobno neprijateljske. Njihov brojčani odnos i stabilnost, odnosno nestabilnost, čitavog sistema znatno zavisi od početnih vrednosti tih populacija, kao i odnosa odgovarajućih parametara.

4.2.1 Modeli tipa Lotka-Voltera

Posmatraće se mali ekosistem sa dve populacije, čije će se veličine označiti sa x i y , respektivno. Pretpostaviće se da mera promene odgovarajuće populacije zavisi samo od veličine tih populacija. Sa $x(t)$ i $y(t)$ će se obeležiti veličine dve populacije u trenutku $t \geq 0$, i pretpostavlja se, da se populacija x isključivo hrani populacijom y . Tada, bez interakcije između te dve populacije (na primer, ako se radi o velikom području sa relativno malim brojem jedinki obe populacije), dolazi se do sledećeg sistema običnih diferencijalnih jednačina:

$$x'(t) = -kx$$

$$y'(t) = y(a - by)$$

Konstante a , b i k u ove dve jednačine su, ako nije drugačije pretpostavljeno, pozitivne. U nastavku će se to pretpostaviti i za sve ostale konstante koje se pojavljuju u jednačinama. Ako se pogleda deo $a - by$, koji se možda ne čini logičnim, ali do ovog izraza se došlo mnogim primerima iz životinjskog sveta, kao i iz ljudske istorije. Ovaj deo govori da samim povećavanjem brojnosti populacije dolazi do usporavanja njenog daljeg rasta.

Primetiće se da je u slučaju prve populacije x , populacije predatora (lovaca), specifična stopa rasta jednaka negativnom droju $-k$, što u nedostatku jedinki druge populacije y , populacije žrtvi, brzo dovodi do izumiranja x –eva, odnosno izumiranja predatora, što je logično.

Ako se pretpostavi da postoji gore opisana interakcija između ovih populacija, onda je odgovarajući matematički model dat sa sledećim sistemom običnih diferencijalnih jednačina :

$$x'(t) = x(-k + \alpha y) \tag{4.5}$$

$$y'(t) = y(a - by - \gamma x)$$

gde su α i γ konstante interakcije. U stvari, gornji sistem običnih diferencijalnih jednačina bi se dobio ako se pretpostavi da se specifične stope rasta populacije x i y povećavaju odnosno smanjuju sa prisustvom one druge populacije.

Jednačine (4.5) čine sistem nelinearnih običnih diferencijalnih jednačina, koji se ne može rešiti eksplicitno. Zbog toga će se ovaj sistem analizirati pomoću faznih portreta u x, y – ravni, u kojoj ove dve populacije predstavljaju takozvane *faze* posmatranog ekosistema, a rešenja običnih diferencijalnih jednačina su *trajektorije u faznoj portetu*. Analizom trajektorija u faznom portretu će se doći do informacija o ponašanju veličine tih populacija sa protokom vremena.

Prvo treba naći ravnotežne tačke ovog sistema, koje će se u ovom sistemu nazivati *ravnoteže populacije*. One se za sistem (4.5) dobijaju rešavanjem po x i y sistema jednačina

$$x(-k + \alpha y) = 0$$

$$y(a - by - \gamma x) = 0$$

Rešavanjem ovog sistema dobijaće se sledeće tri ravnotežne tačke:

1. $x = 0, y = 0$;
2. $x = 0, y = \frac{a}{b}$;
3. $x = \frac{a}{\gamma} - \frac{bk}{\gamma\alpha}, y = \frac{k}{\alpha}$.

Opštu analizu stabilnosti ravnotežnih tačaka u faznom portretu sistema kao što je (4.5) je izložena u predhodnim poglavljima i odakle se može zaključiti da su prve dve ravnotežne tačke nestabilne.

Sa gledišta analize odnosa populacija lovaca i žrtava, od interesa je samo treća ravnotežna tačka, jer sa stanovišta analize nije zanimljivo kada je jedna ili obe populacije izumiru u nekom vremenu t , što je slučaj kod prve dve ravnotežne tačke, tako da će se posmatrati samo ravnotežna tačka

$$(x_e, y_e) = \left(\frac{a}{\gamma} - \frac{bk}{\gamma\alpha}, \frac{k}{\alpha} \right),$$

koja treba da se nalazi u prvom kvadrantu a za to je potreban i dovoljan uslov $\frac{a}{b} > \frac{k}{\alpha}$. Ovaj uslov je po pravilu zadovoljen, jer je u ekosistemima sa gore opisanom interakcijom konstanta b mnogo manja od ostale tri.

Pokazaće se da je pod gore pomenutim uslovom treća ravnotežna tačka stabilna. Zapravo, analiziraće se ponašanje trajektorije u okolini tačke (x_e, y_e) . U tom cilju, treba staviti

$$\begin{aligned} x(t) &= x_e + \varepsilon x_1(t) \\ y(t) &= y_e + \varepsilon y_1(t), \end{aligned} \tag{4.6}$$

gde su x_1 i y_1 odstupanja u vremenu t , do na multiplikativni faktor $\varepsilon > 0$ („mali parametar”), po x – odnosno y – osi od tačke (x_e, y_e) . Ako se zameni (4.6) u sistem (4.5), pa se uproste dobijene jednačine, onda se dobija sistem običnih diferencijalnih jednačina oblika

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= (x_e + \varepsilon x_1(t))\alpha y_1 \\ y_1'(t) &= -(y_e + \varepsilon y_1(t))(by_1 + \gamma x_1). \end{aligned}$$

Ovo je nelinearni sistem običnih diferencijalnih jednačina, koji sadrži i mali parametar $\varepsilon > 0$, koji se u predhodnim primenama odmah zanemario, ali ovom prilikom se naglašava da on i u predhodnim slučajevima postoji. Tačnije zanemarivali su se svi članovi koji su u sebi sadržali ε , tako da će se isto uraditi i ovde. Posle zanemarivanja predhodni sistem postaje

$$\begin{aligned}x_1'(t) &= \alpha x_e y_1 \\ y_1'(t) &= -\gamma y_e x_1 - b y_e y_1.\end{aligned}$$

Dobija se linearni sistem običnih diferencijalnih jednačina po nepoznatim funkcijama x_1 i y_1 . Diferenciranjem prve od gornje dve jednačine po t i zamenom u nju izvoda $y_1'(t)$ iz druge, posle sređivanja dolazi se do sledeće jednačine

$$x_1''(t) + b y_e x_1'(t) + \gamma \alpha x_e y_e x_1(t) = 0.$$

Ovo je obična diferencijalna jednačina drugog reda po $x_1(t)$ sa konstantnim koeficijentom, čiji se opšti oblik rešenja zna iz predhodnih poglavlja i on ima oblik

$$x_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad (4.7)$$

gde su c_1 i c_2 konstante koje zavise od početnih uslova, a λ_1 i λ_2 rešenja po λ karakteristične jednačine

$$\lambda^2 + b y_e \lambda + \gamma \alpha x_e y_e = 0.$$

Dakle,

$$\lambda_{1/2} = \frac{-b y_e \pm \sqrt{b^2 y_e^2 - 4 \gamma \alpha x_e y_e}}{2} = \frac{1}{2} \left(-\frac{b k}{\alpha} \pm \frac{1}{\alpha} \sqrt{b^2 k^2 - 4 k \alpha (a \alpha - b k)} \right).$$

Analiziraće se sada izraz pod kvadratnim korenom. Ako se prihvati da je konstanta $b > 0$ mnogo manja od svih ostalih, onda je izraz pod kvadratnim korenom negativan, pa je veličina $\sqrt{b^2 k^2 - 4 k \alpha (a \alpha - b k)}$ imaginarna. Odavde sledi da su onda λ_1 i λ_2 konjugovano – kompleksni brojevi sa negativnim realnim delom $-\frac{bk}{2\alpha}$. To znači da rešenje $x_1(t)$ jednačine iz (4.7) teži 0 kada $t \rightarrow \infty$. Takođe je i

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = 0,$$

jer je iz (4.7) jednačina za $y_1(t)$ ima oblik

$$y_1(t) = \frac{1}{\alpha x_e} c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}$$

Može se zaključiti da se tačka $(x_1(t), y_1(t))$ za velike vrednosti t nalazi blizu ravnotežne tačke (x_e, y_e) , odnosno da je ona stabilna ravnotežna tačka.

Biološku interpretaciju dosadašnje analize ovog modela će se dati u *poglavlju 4.2.3*.

Za kraj ovog potpoglavlja će se pogledati jedna varijacija modela Lotka – Voltera datog sa (4.5) a to je takozvani *Leslijev model*. Engleski naučnik Lesli, koji je analizirao modele rasta jedne populacije sa podelom po starosti, uz ostalo, predložio i sledeći matematički model tipa Lotka – Voltera :

$$x'(t) = x \left(-k + \alpha \frac{x}{y} \right)$$

$$y'(t) = y(a - by - \gamma x)$$

Da se primetiti, da se umesto proidvoda αy u prvoj jednačini, sada pojavio količnik $\alpha \frac{x}{y}$ dok se druge jednačine poklapaju. Leslijev model bi se mogao ovako tumačiti : ako ima mnogo predatora (lovaca) na jednu žrtvu, onda se broj predatora smanjuje ili oni čak izumiru, a ako u odnosu na jednog predatora ima mnogo žrtava, onda broj predatora raste. Dakle, u ovom modelu je bitan odnos predatora i žrtava.

4.2.2 Modeli dve populacije u takmičenju

Kao u prethodnom, i u ovom poglavlju će se posmatrati mali ekosistem sa dve populacije, koje će se opet označiti x i y , respektivno. Za razliku od modela tipa Lotka – Voltera, u kojima je jedna populacija bila plen druge, u ovom će se pretpostaviti da su u pitanju dve populacije koje se bore za isti prostor ili hranu. Ako se ostali faktori u ovakvoj interakciji zanemare, onda se dobija model *dve populacije u takmičenju*.

Za početak, da bi se konstruisao traženi matematički model, pretpostaviće se, da se rast obe populacije može modelirati kao u predhodno odeljku. Ako se odgovarajući koeficijenti označe redom sa a i b za populaciju x , odnosno c i d za populaciju y , onda se dobija sledeći sistem običnih diferencijalnih jednačina

$$x'(t) = x(a - bx)$$

$$y'(t) = y(c - dx)$$

Analogno kao u predhodnom slučaju, pretpostavlja se da se specifične stope rasta obe populacije smanjuju za negativni sabirak jednak proizvodu odgovarajućih konstanti (obebečenih redom sa k_1 i k_2) i suparničke populacije. Tako se dolazi do sistema običnih diferencijalnih jednačina

$$x'(t) = x(a - bx - k_1y),$$

$$y'(t) = y(c - dx - k_2x).$$

Analiza ovakvog sistema je dosta komplikovana zbog prisustva šest konstanti. Zbog toga se model ograničava na važan slučaj kada se radi o sličnim populacijama, u smislu da se rast obe populacije, u slučaju ne postojanja interakcije, može opisati istom jednačinom. Drugim rečima, uzeće se da je $a = c$ i $b = d$ i tako se dobija sistem običnih diferencijalnih jednačina

$$x'(t) = x(a - bx - k_1y), \tag{4.9}$$

$$y'(t) = y(a - bx - k_2x).$$

Pretpostavlja se da još važi produžena nejednakost $k_2 > k_1 > b$, gde se prvi deo nejednakosti može protumačiti tako da populacija x „više” smeta populaciji y nego obrnuto, dok drugi deo znači da su smanjenja stopa rasta obe populacije zbog opisane interakcije veća nego smanjenja zbog prirode rasta obe populacije (u slučaju izostanka interakcije).

Ravnotežne tačke predstavljaju rešenja sistema algebarskih jednačina

$$x(a - bx - k_1 y) = 0$$

$$y(a - bx - k_2 x) = 0.$$

Rešavanjem ovog sistema jednačina dobijaju se četiri rešenja, i to su

1. $x = 0, y = 0$;
2. $x = 0, y = \frac{a}{b}$;
3. $x = \frac{a}{b}, y = 0$;
4. $x = \frac{ak_1 - ab}{k_1 k_2 - b^2}, y = \frac{ak_2 - ab}{k_1 k_2 - b^2}$.

Korišćenjem analize stabilnosti ravnotežnih tačaka, zaključuje se da je prva tačka nastabilna ravnotežna tačka, a druga i treća stabilna ravnotežna tačka. U zadnja dva spomenuta slučaja dolazi do izumiranja jedne ili druge populacije, što zavisi od veličine (početnih) populacija u trenutku $t = 0$.

Ispitaće se i četvrta ravnotežna tačka (x_e, y_e) , data sa

$$(x_e, y_e) = \left(\frac{ak_1 - ab}{k_1 k_2 - b^2}, \frac{ak_2 - ab}{k_1 k_2 - b^2} \right),$$

koja je najinteresantnija kako sa biološkog, tako i sa matematičkog stanovišta. U tom cilju, napisaće se $x(t)$ i $y(t)$ kao u predhodnom primeru zajedno sa parametrom ε , s tim što je sada u pitanju predhodno definisana ravnotežna tačka. Posle zamene tih vrednosti u sistem (4.9) i sređivanja, dobiće se sledeći sistem običnih diferencijalnih jednačina

$$x_1'(t) = (x_e + \varepsilon x_1(t))(-bx_1 + k_1y_1)$$

$$y_1'(t) = (y_e + \varepsilon y_1(t))(-by_1 + k_2x_1).$$

Ako se zanemare članovi koji sadrže mali parametar ε , dobiće se sledeći linearni sistem običnih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentom:

$$x_1'(t) = -bx_ex_1 - k_1x_ey_1 \quad (4.10)$$

$$y_1'(t) = -k_2y_ex_1 - by_ey_1.$$

Biološku interpretaciju dosadašnje analize i ovog modela i modela tipa Lotka – Voltera će se zajedno izložiti u sledećem poglavlju.

4.2.3 *Primena analize stabilnosti sistema*

U poslednjem poglavlju ovog rada će se primeniti rezultati predhodnih dva poglavlja, radi pronalaženja tipova ravnotežnih tačaka u slučaju modela Lotka – Voltera, odnosno u slučaju modela dva populacije u takmičenju.

Prvo će se razmatrati šta se dešava sa modelima tipa Lotka – Voltera u ravnotežnoj tački

$$(x_e, y_e) = \left(\frac{a}{\gamma} - \frac{bk}{\gamma\alpha}, \frac{k}{\alpha} \right),$$

Ovde je najlakše iskoristiti kriterijum pomoću traga i determinante matrice koeficijenata sistema, a u ovom modelu trag je $trA = 0 - by_e = -by_e$ a determinanta $detA = \gamma\alpha x_e y_e$. Interesantna je jednakost ispod korena, jer od nje zavisi stabilnost sistema

$$trA^2 - 4detA = b^2 y_e^2 - 4\gamma\alpha x_e y_e$$

U zavisnosti od parametra b , postoji dva slučaja.

1. $b > 0$

Analiza modela rasta jedne populacije već je spomenuta i da je konstanta b u ovom modelu mnogo manja od ostalih, na primer od a , α , ili γ . Zbog toga je razumno pretpostaviti da je veličina $trA^2 - 4detA$ negativna.

Budući da je i $trA < 0$, a $detA > 0$ to znači da se tačka $(trA, detA)$ nalazi u drugom kvadrantu „iznad” parabole (1.8) ($detA = \frac{1}{4}(trA)^2$), što znači da fazni portret u x_1, y_1 – ravni u okolini koordinatnog početka ima oblik stabilne spirale. To povlači da je fazni portret u x, y – ravni u okolini ravnotežne tačke (x_e, y_e) takođe spirala koja teži ka toj tački.

2. $b = 0$.

Iz pretpostavke da je $b = 0$ sledi da je i $trA = 0$, $detA > 0$ a $trA^2 - 4detA < 0$. Dakle, radi se o graničnom slučaju između oblasti stabilnosti i nestabilnosti, sledi da trajektorije u okolini tačke koordinatnog početka sa malim pomeranjima parametra b mogu obrazovati bilo stabilnu bilo nestabilnu spiralu.

U x, y – ravni su rešenja u blizini ravnotežne tačke $(x_e, y_e) = \left(\frac{a}{\gamma}, \frac{k}{\alpha}\right)$ linearne kombinacije sinusnih i kosinusnih funkcija sa istom periodom, što se slaže sa mnogobrojnim eksperimentalnim podacima za ove (najjednostavnije) modele tipa Lotka – Voltera.

Šta ovo znači sa stanovišta broja populacije predatora i broja populacije plena ? Pod gore navedenim uslovima, kada je fazni portret oblik spirale, podrazuma se da je koegzistencije i predatora i plena u jednom ekosistemu moguća u nekom trenutku t . Teorijski deo govori da će populacija plena opadati do određene granice, dok će populacija predatora u istom tom periodu rasti, takođe do određene granice. Posle čega će uslediti smena, odnosno populacija plena će rasti, dok će populacija predatora opadati, opet do određene granice. I tako će se spiralno kretati sve dok ne dođu do ravnotežne tačke sistema, odnosno broja obe populacije, koji je održiv dugotrajno.

Sada će se na sličan način analizirati ponašanje modela dve populacije u takmičenju u okolini koordinatnog početka, što će omogućiti analizu ponašanja modela oko ravnotežne tačke

$$(x_e, y_e) = \left(\frac{ak_1 - ab}{k_1k_2 - b^2}, \frac{ak_2 - ab}{k_1k_2 - b^2} \right).$$

Kada se uvrsti ova ravnotežna tačka u sistem, sredi i zanemare članovi koji sadrže ε , došlo se do sistema (4.10). Isto kao u predhodnom slučaju izračunaće se trag i determinanta ovog sistema i dobiće se sledeći rezultati

$$trA = -b(x_e + y_e) < 0, \quad detA = x_e y_e (b^2 - k_1 k_2) < 0$$

i

$$trA^2 - 4detA = b^2(x_e + y_e)^2 + 4x_e y_e (k_1 k_2 - b^2) > 0.$$

Na osnovu ovih rezultata sledi da je u x_1, y_1 – ravni koordinatni početak predstavlja nestabilnu ravnotežnu tačku, odnosno da je fazni portret tipa sedlo i da ravnotežna tačka predstavlja sedlastu tačku. Iz toga sledi da je u x, y – ravni ravnotežna tačka (x_e, y_e) takođe nestabilna ravnotežna tačka.

Sa stanovišta broja populacije određene vrste, to znači da u slučaju da jedna populacija dobije brojčanu prevlast nad drugom, uskoro će se njen rast usporiti zbog prekomernosti, dok se druga populacije ne obnovi i tako u krug.

Zaključak

Mogućnost primena sistema diferencijalnih jednačina u različitim oblastima života su skoro neodgraničene. Formulirati sistem ne predstavlja veliki problem, ali zato problem može nastati pri rešavanju zadatog sistema, što je i ovaj master rad, donekle, pokazao. Ni za određene obične diferencijalne jednačine još nije pronađena metoda dobijanja rešenja, tako da se ne može ni razmišljati o rešavanju sistema u čijem sastavu bi bile takve jednačine. Master radom je ukazano da, što je komplikovaniji sistem, to je teže doći do rešenja i teže je izvesti određene zaključke o problemu, koji sistem opisuje. Zato su u radu prvo obrađeni homogeni linearni, onda nehomogeni linearni a tek na kraju nelinearni sistemi diferencijalnih jednačina. Pokazano je takođe, kako se jednačine višeg reda lako rešavaju prebacivanjem u sistem jednačina prvog reda.

Većina primera predstavlja sisteme od dve jednačine sa dve nepoznate, ali istim principom se rešavaju i sistemi sa više jednačina, što se najlakše vidi u delovima gde su problem, izvođenje i rešenja dati u matričnom obliku. Kada sistemi imaju više nepoznatih, to znači da se u obzir uzimaju više faktora, pa samim tim i problem bi trebao biti bolje obrađen. Ako su to određeni ekosistemi, to znači da posmatrani sistem ima nekoliko populacija, koje imaju određenu interakciju između sebe.

Pri samoj formulaciji problema, odnosno određivanju broja nepoznatih, koje treba da budu u sistemu jednačine, treba paziti na sledeće :

Sistem treba da bude dovoljno jednostavan da bi se mogao lako rešiti a ipak dosta komplikovan da sadrži sve bitne faktore problema.

Biografija



Vladimir Francisti je rođen 03. juna 1986. godine u Novom Sadu. Osnovnu školu je završio u Kisaču sa prosečnom ocenom 5.00 i „Vukovom diplomom“. Gimnaziju „Jovan Jovanović Zmaj“ u Novom Sadu je završio školske 2004/2005. godine sa prosečnom ocenom 4.84.

Školske 2005/2006. godine upisao je osnovne akademske studije na Prirodno – matematičkom fakultetu u Novom Sadu, departmana za Matematiku i informatiku, odseka za matematiku, smer matematika finansija. Dana 19.10 2009. godine je diplomirao sa prosečnom ocenom 9.58 i stekao zvanje diplomirani matematičar – matematika finansija.

Školske 2009/2010. godine upisao je master studije primenjene matematike na istom fakultetu. Zaključno sa junskim ispitnim rokov 2013. godine položio sve predviđene ispite sa prosečnom ocenom 9.57.

Stipendista je fonda za mlade talente republike Srbije za 2008/2009, kao i za 2009/2010. godinu.

Od septembra 2010. godine radi kao profesor matematike u osnovnoj školi „Ljudovit Štur“ u Kisaču a od septembra 2012. godine radi i u srednjoj medicinskoj školi „7. april“ u Novom Sadu kao profesor matematike u slovačkim odelenjima. Državni ispit za licencu profesora matematike položio je 4. decembra 2012. godine a 3. jula 2013 položio je lektorski ispit iz slovačkog jezika.

Literatura

- [1] H. Caswell : *Matrix Population Models : construction, analysis, and interpretation*, Sinauer Associates, Inc. Publisher, 2001
- [2] N. D. Fawkes, J. J. Mahony : *An Introduction to Mathematicall Modelling*, John Willey and Sons, Second Edition, 1996
- [3] N. J. Gotelli : *A Primer of Ecology*, University of Vermont, 2008
- [4] R. Haberman, *Mathematical Models*, Fourth Edition, Prentice – Hall 1977.
- [5] M. Haddin : *Modelling and Quantitative in Fisheries*, Champam & Hall/CRC, 2001
- [6] D. S. Jones, B. D. Sleeman : *Differential Equations and Mathematical Biology*, Champam & Hall/CRC, 2000
- [7] P.W. Nelson, A. S. Perelson : *Mathematical analysis of delay differential equation models of HIV-1 infection*, The University of Michigan, 2002
- [8] M. Smith : *Models in Ecology*, Cambrige University Press, 1974
- [9] School of intensive courses in Novi Sad, *Development of Computer-aided, Methods in Teaching Mathematics and Science*, 2008
- [10] <http://en.wikipedia.org/>
- [11] <http://tutorial.math.lamar.edu/>
- [12] <http://www.math.psu.edu/>
- [13] <http://www.scribd.com>

**UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET,
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA**

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije:

TD

Monografska dokumentacija

Tip zapisa:

TZ

Tekstualni štampani materijal

Vrsta rada:

VR

Master rad

Autor:

AU

Vladimir Francisti

Mentor:

MN

dr Arpad Takači

Naslov rada:

NR

Sistemi diferencijalnih jednačina i primene u farmaciji i ekologiji

Jezik publikacije:

JP

Srpski (latinica)

Jezik izvoda:

JI

s/e

Zemlja publikovanja: ZP	Srbija
Uže geografsko područje: UGP	Vojvodina
Godina: GO	2013.
Izdavač: IZ	Autorski reprint
Mesto i adresa: MA	Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, PMF, Trg Dositeja Obradovića 4
Fizički opis rada: (Broj poglavlja, broj strana, br. literarnih citata, br. tabela, br. slika, br. grafika, br dijagrama). FO	4 / 94 / 0 / 4 / 15 / 6 / 5
Naučna oblast: NO	Matematika
Naučna disciplina: ND	Sistemi običnih diferencijalnih jednačina
Predmetne odrednice, ključne reči: PO, UDK	Homogeni, nehomogeni, linearni, nelinearni sistemi diferencijalnih jednačina, epidemije, HIV/AIDS, Lotka – Voltera
Čuva se: ČU	U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno – matematičkog fakulteta, Univerziteta u Novom Sadu
Važna napomena: VN	

Izvod:

IZ

U ovom radu je razmatrano rešavanje nekoliko različitih tipova sistema diferencijalnih jednačina, izvođene su formule za opšta rešenja ako je to bilo moguće i analizirani su fazni portreti tih sistema. Za svaki od ovih sistema je dat bar jedan primer iz prakse, gde se on uspešno koristi. U nekim primerima su data rešenja sa konkretnim brojevi, dok kod drugih su data uopštena rešenja i izvođeni zaključci na osnovu promenljivih parametara koji se javljaju u tim sistemima.

Datum prihvatanja teme

od strane NN veća :

DP

11. jun 2013.

Datum odbrane :

DO

Članovi komisije :

KO

Predsednik :

dr Dušanka Perišić, redovni profesor Prirodno – matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Član :

dr Arpad Takači, redovni profesor Prirodno – matematičkog fakulteta u Novom Sadu, *mentor*

Član :

dr Dora Seleši, vanredni profesor Prirodno – matematičkog fakulteta u Novom Sadu

**UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND INFORMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION**

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type:

DT

Monograph type

Type of record:

TR

Printed text

Contents Code:

CC

Master's thesis

Author:

AU

Vladimir Francisti

Mentor:

MN

Arpad Takači Ph D.

Title:

TI

Systems of differential equations and applications in the
pharmacy and ecology

Language of text:

LT

Serbian

Language of abstract:

LA

s/e

Country of publication: CP	Serbia
Locality of publication: LP	Vojvodina
Publication year: PY	2013
Publisher: PU	Author's reprint
Publ. place: PP	University of Novi Sad, Faculty of Sciences, Department of Mathematics and Informatics, Trg Dositeja Obradovića 4
Physical description: (chapters/pages/quotations/tables/pictures/graphs/diagrams) PD	4 / 94 / 0 / 4 / 15 / 6 / 5
Scientific field: SF	Mathematics
Scientific discipline: SD	System of differential equations
Key words: UC	Homogeneous, nonhomogeneous, linear, nonlinear systems of differential equations, epidemics, HIV/AIDS, Lotka – Voltera
Holding data: HD	In library of Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, Department of Mathematics and Informatics
Note: N	

Abstract:

AB

In this thesis, we consider solving several different types of differential equations systems, we derivate formulas for the the general solution, if this was possible, to analyze the phase plane portrait of the systems. For each of these systems we have given at least one case study, where they are used successfully. In some instances we have given solutions whit specific numbers, and in others we have given a general solutions, and drew conclusions based on variable parameters occurring in these systems.

**Accepted by the
Scientific Board on:**

ASB

June 11, 2013.

Defended:

DE

Thesis defend board:

DB

President:

Dušanka Perišić Ph D., Full Professor, Faculty of Sciences,
University of Novi Sad

Member:

Arpad Takači Ph D., Full Professor, Faculty of Sciences,
University of Novi Sad, *menthor*

Member:

Dora Seleši Ph D., Associate Professor, Faculty of
Sciences, University of Novi Sad