UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Višnja Stefanović

# Optimizacija redova čekanja

-MASTER RAD-

Novi Sad, 2014.

# Sadržaj

# Uvod

Optimizacija redova čekanja u zdravstvenim sistemima se intenzivno izučava od pedesetih godina prošlog veka. Zdravstvene institucije svih nivoa i profila se trude da u što kraćem vremenu usluže što veći broj pacijenata i na taj način povećaju svoju efikasnost. Postoje dve vrste čekanja na koje zakazani pacijent nailazi. Indirektno vreme čekanja, koje predstavlja razliku između vremena kada pacijent želi da ima zakazan termin i vremena zakazanog termina, dok se direktno vreme čekanja izražava kao razlika između vremena zakazanog termina i vremena kada je posmatranom pacijentu pružena usluga (Gupta, Denton [12]). Zdravstvene institucije različitih profila se susreću sa različitim problemima vezanim za čekanje pacijenata obzirom da imaju različite pristupe zakazivanju i raspoređivanju (redosledu primanja) pacijenata. Tako na primer, u slučaju urgentne službe vreme trajanja pregleda (intervencije) je neizvesno, a prednost ima najkritičniji pacijent. U specijalističkim klinikama pacijenti zakazuju termin pregleda pri čemu vreme trajanja pregleda zavisi od dijagnoze koju pacijent ima i, u većini slučajeva, pre odlaska kod specijaliste potrebno je dobiti uput od lekara opšte prakse, dok se u slučaju zakazivanja operacije termin dobija na osnovu tipa operacije itd. Svi ovi faktori zajedno sa nepredvidivim situacijama pojavljivanja nezakazanih, i nedolazaka zakazanih pacijenata, utiču na povećanje vremena čekanja pacijenata koje se može korigovati određivanjem dobrih pravila zakazivanja i raspoređivanja.

U ovom radu posmatramo kako na ukupno vreme čekanja zakazanih pacijenata utiču dolasci pacijenata koji nemaju unapred zakazan termin, kao i prekovremeno zadržavanje onih zakazanih pacijenata koji ostanu duže od propisanog trajanja pregleda. Korišćenjem istorijskih podataka prikupljenih za jednu primarnu zdravstvenu instituciju za period od godinu dana određene su empirijske raspodele koje modeluju dužinu trajanja pregleda različitih klasa pacijenata. Takođe, određena je verovatnoća da se u zdravstvenu instituciju tokom proizvoljnog lekarskog termina fiksirane dužine pojavi pacijent bez unapred zakazanog pregleda, kao i procenat zakazanih pacijenata koji se zadrže na pregledu duže od propisanog trajanja termina. Na osnovu dobijenih parametara razvijena je funkcija cilja čijom se minimizacijom dolazi do rasporeda termina koje treba ostaviti prazne kako bi se optimiziralo ukupno vreme čekanja pacijenata koji imaju zakazan termin. Dobijeni model optimizacije koji spada u problem binarnog celobrojnog programiranja je potom testiran na simuliranim podacima koji predstavljaju hipotetičke radne dane lekara posmatrane primarne zdravstvene institucije. Rezultati ovog istražvianja ukazuju na to da bi se primenjivanjem prethodno dobijenog pravila o ostavljanju pojedinih termina praznim minimiziralo vreme čekanja zakazanih pacijenata u odnosu na postojeće.

U prvoj i drugoj glavi dat je pregled osnovnih definicija i raspodela korišćenih u radu. U trećoj glavi uveden je pojam Poasonovog procesa koji je kasnije upotrebljen u istraživanju za opisivanje dolazaka pacijenata koji nemaju zakazan termin, dok je u četvroj glavi predstavljen problem linearnog i celobrojnog programiranja. U petoj glavi dat je kratak opis postupaka koji se koriste u literaturi za rešavanje problema optimizacije u medicinskom okruženju, a u šestom odeljku detaljno je objašnjen tok sprovedenog istraživanja i predočeni su rezultati.

# 1

# Pregled definicija

Osnovne definicije korišćene u radu:

**Definicija 1.0.1 ($\sigma$-algebra)** *Neka je $\Omega$ skup svih mogućih ishoda (skup elementarnih događaja) nekog eksperimenta. $\sigma$-algebra ($\sigma$-polje ) nad skupom $\Omega$ je podskup $\mathcal{F}$ partitivnog skupa $\mathcal{P}(\Omega)$ ukoliko važe sledeći uslovi:*

1. $\Omega \in \mathcal{F}$,
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$, *pri čemu je $A^c$ komplement skupa $A$,*
3. $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

**Definicija 1.0.2 (Borelova $\sigma$-algebra)** *Borelova $\sigma$-algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ je najmanja $\sigma$-algebra koja sadrži sve otvorene podskupove skupa realnih brojeva.*

**Definicija 1.0.3 (Funkcija verovatnoće)** *Neka je $\Omega$ skup elementarnih događaja i $\mathcal{F}$ $\sigma$-polje nad $\Omega$. Funkcija $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ se zove verovatnoća na prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ ako zadovoljava uslove:*

1. *P($\Omega$)=1,*
2. $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}, \{A_i\} \bigcap \{A_j\} = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, ... \Rightarrow P\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

*Uređena trojka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ se naziva prostor verovatnoća.*

**Definicija 1.0.4 (Nezavisnost događaja)** *Slučajan događaj podskup skupa svih mogućih ishoda $\Omega$. Događaji A i B su nezavisni ako važi*

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

**Definicija 1.0.5 (Slučajna promenljiva)** *Preslikavanje $X : \Omega \to \mathbb{R}$ je slučajna promenljiva nad prostorom verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ako $X^{-1}(S) \in \mathcal{F}$ za svako $S \in \mathcal{B}$, gde je $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ Borelovo $\sigma$-polje. Ekvivalentno, kažemo da je X $\mathcal{F}$-merljivo. Ako je $X(\Omega)$ konačan skup kažemo da je X prosta slučajna promenljiva.*

**Definicija 1.0.6 (Diskretna slučajna promenljiva)** *Slučajna promenljiva X je diskretna (diskretnog tipa) ako postoji prebrojiv skup različitih vrednosti $R_X = \{x_1, x_2, ...\}$ takav da je $P\{X \in \overline{R_X}\} = 0$, gde je $\overline{R_X}$ komplementarni skup od $R_X$. Verovatnoću događaja $\{X = x_i\}$ označavamo sa p($x_i$):*

$$p(x_i) = P\{\omega \in \Omega | X(\omega) = x_i\} = P\{X = x_i\}, i = 1, 2, ...$$

*Skup vrednosti diskretne slučajne promenljive $\{x_1, x_2, ...\}$ i odgovarajuće verovatnoće $p(x_i)$, i = 1,2,..., čine zakon raspodele slučajne promenljive X.*

**Definicija 1.0.7 (Apsolutno neprekidna slučajna promenljiva)** *Slučajna promenljiva X je apsolutno neprekidnog tipa ako postoji nenegativna integrabilna funkcija $\varphi_X(x), -\infty < x < \infty$, takva da je za svaki skup $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,*

$$P\{X \in S\} = \int_S \varphi_X(x) dx.$$

*Funkcija $\varphi_X(x)$ zove se gustina raspodele verovatnoća slučajne promenljive X.*

**Definicija 1.0.8 (Funkcija raspodele)** *Funkcija $F_X(x) : \mathbb{R} \to [0, 1]$ definisana sa*

$$F_X(x) = P\{\omega \in \Omega | X(\omega) < x\},$$

*naziva se funkcija raspodele slučajne promenljive X. Funkciju raspodele $F_X$ u tački $x \in \mathbb{R}$ kraće zapisujemo $F_X(x) = P\{X < x\}$.*

**Definicija 1.0.9 (Nezavisnost slučajnih promenljivih)** *Slučajne promenljive $X_1, X_2, ...$ su nezavisne ako su događaji ${X_1}^{-1}(S_1), {X_2}^{-1}(S_2), ...$ nezavisni, za sve Borelove skupove $S_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $i = 1, 2, ....$*

**Definicija 1.0.10 (Očekivanje)** *Očekivanje slučajne promenljive X, E(X), definiše se na sledeći način:*

*(i) ukoliko je slučajna promenljiva X diskretnog tipa i važi $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| p(x_k) < \infty$, tada je*

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p(x_k),$$

*(ii) ukoliko je slučajna promenljiva X apsolutno neprekidnog tipa, tada je*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi_X(x)dx.$$

**Definicija 1.0.11 (Centralni momenat)** *Momenat reda k, $k \in \mathbb{N}$, slučajne promenljive X, u oznaci E($X^k$), dat je sa*

$$E(X^k) = E((X - E(X))^k).$$

**Definicija 1.0.12 (Disperzija)** *Centralni momenat reda 2 slučajne promenljive X zove se disperzija (varijansa) slučajne promenljive X i označava se sa D(X) ili $\sigma^2(X)$.*

**Definicija 1.0.13 (Standardno odstupanje)** *Standardno odstupanje (standardna devijacija) slučajne promenljive X se definiše kao*

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

**Definicija 1.0.14 (Stohastički proces)** *Neka je S skup elementarnih događaja nekog eksperimenta E i neka se svakom elementu tog skupa, $s \in S$, pridruži funkcija X(t,s), pri čemu t pripada skupu $T \in \mathbb{R}$. Skup $\{X(t,s), t \in T\}$ naziva se stohastički (slučajni) proces.*

*Napomena: Funkcija X(t,s) je slučajna promenljiva za bilo koju vrednost t.*

**Definicija 1.0.15** *(i) Ukoliko je T beskonačan prebrojiv skup, skup $\{X(t,s), t \in T\}$ naziva se diskretni stohastički proces.*

*(ii) Ukoliko je T interval (ili skup intervala), skup $\{X(t,s), t \in T\}$ naziva se neprekidni stohastički proces.*

*Napomena: Uobičajeno je da se za stohastički proces $\{X(t,s), t \in T\}$ koristi oznaka $\{X(t), t \in T\}$ ili $\{X_n, n \in T\}$.*

**Definicija 1.0.16** *Skup vrednosti $S_{X(t)}$ koje mogu uzeti slučajne promenljive X(t) se naziva skup stanja stohastičkog procesa $\{X(t), t \in T\}$. U zavisnosti od toga da li je $S_{X(t)}$ konačan (ili beskonačan prebrojiv skup) ili beskonačan neprebrojiv skup, stohastički proces $\{X(t), t \in T\}$ je diskretan ili neprekidan, respektivno.*

**Definicija 1.0.17** *Ukoliko su slučajne promenljive $X(t_4) - X(t_3)$ i $X(t_2) - X(t_1)$ nezavisne za svako $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$, kažemo da je stohastički proces $\{X(t), t \in T\}$ proces sa nezavisnim priraštajima.*

**Definicija 1.0.18** *Ukoliko slučajne promenljive $X(t_2 + s) - X(t_1 + s)$ i $X(t_2) - X(t_1)$ imaju istu funkciju raspodele za svako $s$, kažemo da je stohastički proces $\{X(t), t \in T\}$ proces sa stacionarnim priraštajima.*

**Definicija 1.0.19 (Proces prebrajanja)** *Neka N(t) predstavlja broj događaja koji su se realizovali u intervalu $[0, t]$. Stohastički proces $\{N(t), t \geq 0\}$ se naziva proces prebrajanja.*

*Osobine procesa prebrajanja:*

*1. N(t) je slučajna promenljiva koja može uzeti nenegativne vrednosti iz skupa celih brojeva: {0,1,..}*

*2. Funkcija N(t) je neopadajuća: $N(t_2) - N(t_1) \geq 0$, ukoliko je $t_2 > t_1 \geq 0$.*

*3. Za $t_2 > t_1 \geq 0$, razlika $N(t_2) - N(t_1)$ predstavlja broj događaja koji su se realizovali u intervalu $(t_1, t_2]$.*

# 2

# Pregled Raspodela

U ovom radu korišćene su neke od osnovnih raspodela verovatnoća slučajnih promenljivih.

## 2.1 Binomna raspodela

Pre definisanja binomne raspodele koja spada u raspodelu verovatnoća diskretnih slučajnih promenljivih, bitno je navesti Bernulijevu šemu na kojoj se ona bazira. Neka se jednom eksperimentu posmatra događaj A. Tada je skup elementarnih događaja $\Omega$ dat sa $\Omega = \{A, \overline{A}\}$, gde je $\overline{A}$ komplementarni skup od A. Obeležimo verovatnoću realizacije događaja $A$ sa $P(A) = p$.

Neka se eksperiment ponavlja $n$ puta pri čemu je zadovoljeno da su uslovi eksperimenta uvek isti, kao i da rezultat u jednom ponavljanju eksperimenta ne zavisi od rezultata dobijenog u nekom drugom ponavljanju. Dakle, mogući broj realizacije događaja $A$ dat je sa $A = 0, 1, ..., n$. Slučajna promenljiva koja predstavlja broj pojavljivanja događaja $A$ se obično obeležava sa $S_n$ i zove se Bernulijeva slučajna promenljiva. Verovatnoća da se u posmatranih $n$ ponavljanja eksperimenta događaj $A$ realizuje tačno $k$ puta data je sa:

$$P\{S_n = k\} = p(k) = \left( \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) p^k (1-p)^{n-k}, \;\; k = 0, 1, ..., n, \tag{2.1}$$

Raspodela verovatnoća određena relacijom (2.1) naziva se binomna raspodela. Ona zavisi od dva parametra, $n \in \mathbb{N}$ i $p \in (0, 1)$, pri čemu $n$ predstavlja broj pnavljanja eksperimenta, a $p$ verovatnoću realizacije posmatranog događaja. Ukoliko slučajna promenljiva $X$ ima binomnu raspodelu, to označavamo sa $X : \mathcal{B}(n, p)$ i slučajna promenljiva $X$ predstavlja broj pozitivno realizovanih eksperimenata.

## 2.2 Poasonova raspodela

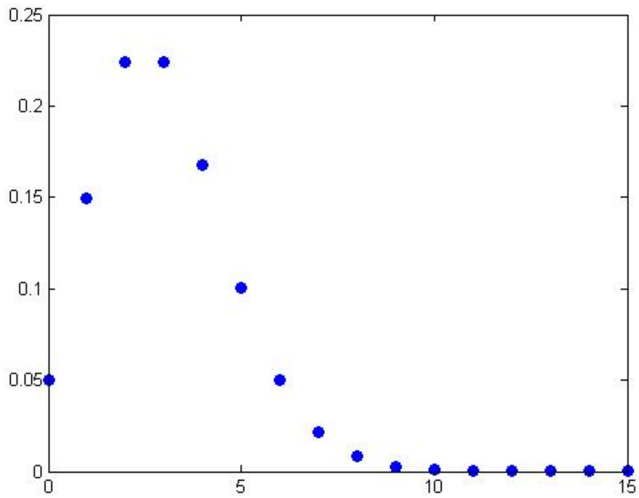
Poasonova raspodela spada u raspodelu verovatnoća diskretnih slučajnih promenljivih i zavisi od jednog parametra koji ćemo označavati sa $\lambda$, pri čemu mora biti zadovoljeno $\lambda > 0$. Ukoliko slučajna promenljiva $X$ ima Poasonovu raspodelu, to označavamo sa $X : \mathcal{P}(\lambda)$ i njen zakon raspodele je dat sa:

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n & \dots \\ p(0) & p(1) & \dots & p(n) & \dots \end{pmatrix}$$

gde je

$$p(j) = P\{X = j\} = \frac{\lambda^j}{j!}\mathrm{e}^{-\lambda}, j = 0, 1, ...$$

Primer jedne ovakve raspodele dat je na grafiku 2.1




Grafik 2.1: Poasonova raspodela sa parametrom $\lambda = 3$

## 2.3 Normalna raspodela

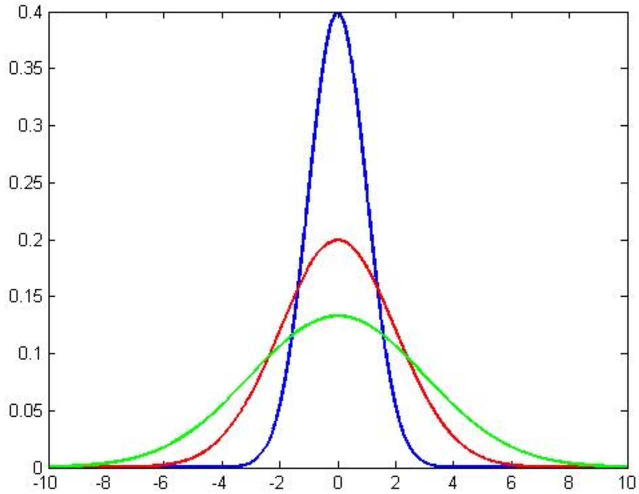
Normalna raspodela spada u raspodelu verovatnoća apsolutno neprekidnih slučajnih promenljivih. S obzirom na to da ova raspodela dobro aproksimira veliki broj prirodnih pojava, ona ima veliku primenu i predstavlja jednu od najznačajnijih raspodela.

Normalna raspodela zavisi od dva parametra, $m \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$. Parametar $m$ predstavlja očekivanje ove raspodele i sve krive gustina raspodela su simetrične u odnosu na pravu $x = m$. Normalna raspodela ima karakterističan oblik zvona pri čemu se sa povećanjem parametra $\sigma$ povećava i spljoštenost krive gustine tj. dolazi do većeg rasturanja oko tačke $x = m$.

Ukoliko je slučajna promenljiva $X$ normalno raspodeljena, $X : \mathcal{N}\,(m, \sigma^2)$, njena funkcija gustine je data sa:

$$\varphi_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}.$$

Na grafiku 2.2 dat je prikaz normalne raspodele za različite vrednosti parametra $\sigma$.




Grafik 2.2: Normalna raspodela sa parametrima $m = 0$ i $\sigma \in \{1, 2, 3\}$

Bitno je napomenuti da se u slučaju kada su parametri normalne raspodele $m = 0$ i $\sigma = 1$ dobija normalna $\mathcal{N}\,(0, 1)$ raspodela koja se drugačije naziva standardizovana raspodela i često se koristi zbog svojih lepih osobina.

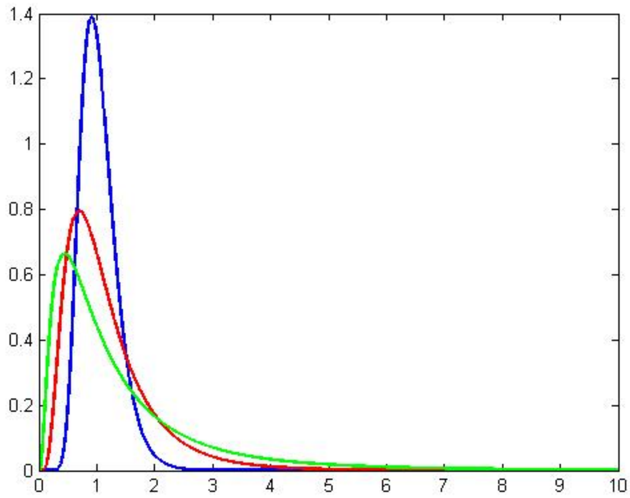
## 2.4 Lognormalna raspodela

Kao i normalna, lognormalna raspodela spada u raspodelu verovatnoća apsolutno neprekidnih slučajnih promenljivih. Ona je zapravo usko vezana za normalnu raspodelu i važi da ukoliko slučajna promenljiva $X$ ima lognormalnu raspodelu sa parametrima $m$ i $\sigma$, $X : \mathcal{L}og\mathcal{N}\ (m, \sigma^2)$, onda je slučajna promenljiva $lnX : \mathcal{N}\ (m, \sigma^2)$.

Funkcija gustine lognormalne raspodele je data sa:

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(lnx-m)^2}{2\sigma^2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Na grafiku 2.3 dat je prikaz lognormalne raspodele za različite vrednosti parametra $\sigma$, pri čemu je uzeto da je $m = 0$. Plava funkcija gustine odgovara raspodeli sa parametrom $\sigma = 0.3$, crvena odgovara parametru $\sigma = 0.6$, a zelena parametru $\sigma = 0.9$.




Grafik 2.3: Lognormalna raspodela sa parametrima $m = 0$ i $\sigma \in \{0.3, 0.6, 0.9\}$

# 3

# Poasonov proces

## 3.1 Poasonov proces

Poasonov proces je stohastički proces koji broji događaje koji se realizuju u određenom vremenskom intervalu. Neki od primera su broj poziva preko telefonskih centrala, broj dolazaka mušterija u kafić, broj zahteva za odštetu u osiguravajućoj kompaniji itd. Zbog svojih osobina i velikog broja pojava koje se mogu opisati korišćenjem Poasonovog procesa kao matematičkog modela, on je jedan od najčešće korišćenih procesa u oblasti primenjene statistike i verovatnoće.

**Definicija 3.1.1 (Poasonov proces I)** *Poasonov proces sa parametrom $\lambda$, $\lambda > 0$, je proces prebrajanja $\{N(t), t \geq 0\}$ ukoliko važi:*

*1.* $N(0) = 0$

*2. Proces ima nezavisne priraštaje*

*3. U proizvoljnom intervalu $(N_s, N_{t+s}]$ događaji se realizuju u skladu sa Poasonovom raspodelom:*

$$P\{N_{t+s} - N_s = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda t}, k = 0, 1, 2, ...$$

*Napomena I: Ukoliko se specijalno uzme $s = 0$, dobija se*

$$P\{N_t = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda t}, k = 0, 1, 2, ...,$$

*odnosno, za fiksirano t Poasonov proces postaje slučajna promenljiva sa Poasonovom raspodelom, $N_t$ : $\mathcal{P}(\lambda t)$. Očekivanje ove promenljive je dato sa $E(N_t) = \lambda t$ iz čega se vidi da je za dalji vremenski trenutak, odnosno, za veće t, očekivani broj realizovanih događaja veći.*

*Napomena II: Svojstvo 3. se drugačije može zapisati na sledeći način:*

$$P\{N_z - N_s = k\} = \frac{(\lambda(z - s))^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda(z-s)}, k = 0, 1, 2, ...,$$

*odnosno važi* $N_z - N_s : \mathcal{P}(\lambda(z-s))$.

Kako je teško ustanoviti da li neki proces zadovoljava ovako formulisan treći uslov, navodimo ekvivalentnu definiciju:

**Definicija 3.1.2 (Poasonov proces II)** *Poasonov proces sa parametrom* $\lambda$, $\lambda > 0$, *je proces prebrajanja* $\{N(t), t \geq 0\}$ *ukoliko važi:*

1. $N(0) = 0$

2. *Proces ima nezavisne i stacionarne priraštaje*

3. $P\{N(\delta) = 1\} = \lambda\delta + o(\delta)$, $P\{N(\delta) = 0\} = 1 - \lambda\delta + o(\delta)$

4. $P\{N(\delta) \geq 2\} = o(\delta)$

*gde je* $o(\delta)$ *takvo da važi* $\lim_{\delta \to 0} \frac{o(\delta)}{\delta} = 0$

Iz uslova 3. prethodne definicije zaključujemo da se smanjivanjem dužine intervala $\delta$ smanjuje i verovatnoća realizacije tačno jednog događaja u ovom intervalu, a iz uslova 4. sledi da je verovatnoća da se realizuje 2 ili više događaja između proizvoljnog trenutka $t_0$ i $t_0 + \delta$ zanemarljivo mala.

Iz nezavisnosti priraštaja sledi da broj događaja koji se realizuju u proizvoljnom intervalu ne zavisi od broja događaja koji su se realizovali u nekom drugom, disjunktnom, intervalu. Svojstvo stacionarnosti priraštaja implicira da raspodela broja događaja u nekom intervalu zavisi samo od dužine posmatranog intervala, a ne i od njegove pozicije na vremenskoj osi. Ovo svojstvo se jasno vidi iz uslova 3. u definiciji 3.1.1 jer Poasonova raspodela u skladu sa kojom se realizuju događaji u proizvoljnom intervalu $(N_s, N_{t+s}]$ zavisi isključivo od stope rasta $\lambda$, a ne i od parametra $s$. Ove pretpostavke u realnosti često nisu ispunjene, ali, bez obzira na to, koristeći ovaj pojednostavljeni model, može se doći do osnovnih osobina posmatrane pojave, ali i do nekih eksplicitnih rešenja problema koji se javljaju u teoriji redova.

Bitno je napomenuti da postoje brojna uopštenja Poasonovog procesa kao što su nehomogen i složeni Poasonov proces koji su takođe veoma zastupljeni u literaturi.

## 3.2 Nehomogen Poasonov proces

Kao što je ranije spomenuto, često nije realno pretpostaviti da je stopa rasta Poasonovog procesa konstantna, odnosno da raspodela broja događaja u nekom intervalu zavisi isključivo od dužine posmatranog intervala dok vremenski parametar ne igra nikakvu ulogu. Tako se na primer prosečna stopa dolazaka mušterija u restoran menja tokom dana i za očekivati je da se veći broj mušterija pojavi u restoran za vreme koje je uobičajeno za ručak i večeru nego u prepodnevnim časovima.

**Definicija 3.2.1 (Nehomogen Poasonov proces)** *Neka je* $\{N(t), t \geq 0\}$ *proces prebrajanja sa nezavisnim priraštajima. Ovaj proces se zove nehomogen (nestacionaran) Poasonov proces sa funkcijom intenziteta* $\lambda(t) \geq 0$, *za* $t \geq 0$, *ako važi:*

1. $N(0) = 0$

2. $P\{N(t+\delta) - N(t) = 1\} = \lambda(t)\delta + o(\delta)$

3. $P\{N(t+\delta) - N(t) \geq 2\} = o(\delta)$

*gde je* $o(\delta)$ *takvo da važi* $\lim_{\delta \to 0} \frac{o(\delta)}{\delta} = 0$

Primetimo da iz uslova 2. prethodne definicije sledi da proces $\{N(t), t \geq 0\}$ nema stacionarne priraštaje jer je stopa rasta u ovom slučaju zavisna od vremenskog trenutka $t$. Uslov stacionarnosti priraštaja bi bio zadovoljen jedino u slučaju da važi $\lambda(t) \equiv \lambda > 0$, odnosno ukoliko je $\{N(t), t \geq 0\}$ homogen Poasonov proces.

Kao i u slučaju homogenog Poasonovog procesa, u proizvoljnom vremenskom intervalu $(N_s, N_{t+s}]$ događaji se realizuju u skladu sa Poasonovom raspodelom.

**Teorema 3.2.2** *Neka je* $\{N(t), t \geq 0\}$ *nehomogen Poasonov proces sa funkcijom intenziteta* $\lambda(t)$. *Tada važi:*

$$N_{t+s} - N_s : \mathcal{P}(m(t+s) - m(s)), \ \ \forall t, s \geq 0$$

*gde je*

$$m(t) = \int_0^t \lambda(\tau) d\tau.$$

Funkcija $m(t)$ se zove funkcija srednje vrednosti (*mean-value function*) nehomogenog Poasonovog procesa.

## 3.3 Složeni Poasonov proces

**Definicija 3.3.1** *Neka je* $\{N(t), t \geq 0\}$ *Poasonov proces sa stopom rasta* $\lambda$ *i neka su* $X_1, X_2, ...$ *nezavisne jednako raspodeljene slučajne promenljive koje su sve nezavisne od procesa* $\{N(t), t \geq 0\}$. *Složen (zbirni) Poasonov proces je stohastički proces* $\{Y(t), t \geq 0\}$ *ako za svako* $t \geq 0$ *važi:*

$$Y(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} X_k.$$

Iz priloženog se vidi da je složeni Poasonov proces samo još jedno od uopštenja Poasonovog procesa jer ukoliko se uzme da su slučajne promenljive $X_k$ konstante vrednosti 1, procesi $\{Y(t), t \geq 0\}$ i $\{N(t), t \geq 0\}$ su identični.

Primetimo da Poasonov proces $\{N(t), t \geq 0\}$ samo broji događaje koji se realizuju u intervalu $[0, t]$, dok se kod procesa $\{Y(t), t \geq 0\}$ stvaraju dve neizvesnosti. U složenom Poasonovom procesu nije slučajno samo koliko će se događaja u posmatranom intervalu realizovati, nego je slučajna i vrednost neke određene karakteristike koja se kod događaja posmatra. Na primer, $X_t$ može predstavljati visinu zahteva za odštetu u osiguravajućoj kompaniji, pa u tom slučaju, složeni Poasonov proces daje ukupnu visinu zahteva za odštetu koji su se realizovali u intervalu $[0, t]$. Dakle, slučajno je i koliko će se zahteva za odštetu realizovati, i kolika će biti visina svake od realizovanih odšteta.

# 4

# Linearno i celobrojno programiranje

## 4.1 Problem LP

Linearno programiranje (LP) predstavlja jednu od najznačajnijih metoda u oblasti operacionih istraživanja koja se koristi radi modeliranja, analiziranja i rešavanja praktičnih problema u ekonomskim, privrednim, tehničkim i drugim sistemima. Ono služi radi opisivanja problema uslovne optimizacije, pri čemu za cilj ima pronalaženje optimalnog rešenja posmatranog problema.

Opšti oblik LP problema može se formulisati na sledeći način:

$$
\begin{aligned}
& & \text{Min } F(u) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} c_i u_i & \qquad (4.1)\\
&\text{s.t.} & Au \leq b & \qquad (4.2)\\
& & A_1 u = b_1 & \qquad (4.3)\\
& & u_i \geq 0,\ \ i \in I \subseteq \{1, 2, ..., n\}, & \qquad (4.4)\\
& & u \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{m,n}, b \in \mathbb{R}^m, A_1 \in \mathbb{R}^{s,n}, b_1 \in \mathbb{R}^s & \qquad (4.5)
\end{aligned}
$$

Funkcija $F(u)$ se naziva funkcijom cilja, dok se skup $U$ koji sadrži ograničenja problema data sa (4.2)-(4.5) naziva dopustiv skup problema LP. Svaki vektor $u$ koji zadovoljava data ograničenja, $u \in U$, naziva se dopustivo rešenje problema (4.1). Optimalno rešenje problema (4.1) je ono dopustivo rešenje u kome funkcija cilja, $F(u)$, dostiže minimalnu vrednost i označava se sa $u^*$:

$$u^* \in U, F(u^*) \leq F(u), \forall u \in U.$$

Jasno, problem LP možemo posmatrati i kao problem maksimizacije do kojeg se dolazi transformacijom funkcije $F(u)$ koju minimiziramo. Oblik funkcije koja se maksimizira dobija se množenjem prvobitne funkcije cilja sa vrednošću -1.

Oblik LP u kojem su sva data ograničenja problema tipa nejednakosti:

$$\text{Min } c^T u$$

$$U = \{u \in \mathbb{R}^n, u \geq 0, Au \leq b, A \in \mathbb{R}^{m,n}, b \in \mathbb{R}^m\},$$

naziva se standardni oblik problema LP, dok se oblik u kojem su sva ograničenja tipa jednakosti:

$$\text{Min } c^T u$$

$$U = \{u \in \mathbb{R}^n, u \geq 0, Au = b, A \in \mathbb{R}^{m,n}, b \in \mathbb{R}^m\},$$

naziva kanonički oblik problema LP. Treba napomenuti da se kanonički oblik problema linearnog programiranja transformacijama može prevesti u standardni oblik LP, kao i obrnuto.

**Definicija 4.1.1 (Konveksan skup)** *Skup $U \subset \mathbb{R}^n$ je konveksan ako važi $U = \emptyset$ ili ako za svake dve tačke $u, v \in U$ važi da i njihova konveksna kombinacija pripada skupu $U$:*

$$\alpha u + (1-\alpha)v \in U,\ \forall \alpha \in [0,1], \forall u, v \in U.$$

**Teorema 4.1.2** *Presek konveksnih skupova je konveksan skup.*

**Definicija 4.1.3 (Hiperravan)** *Skup $\Gamma$ dat sa*

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n,\ c^T x = \gamma\}, \text{ gde je } c \in \mathbb{R}^n,\ \gamma \in \mathbb{R},$$

*naziva se hiperravan u $\mathbb{R}^n$.*

**Definicija 4.1.4** *Skup $\overline{\Gamma}$ dat sa:*

$$\overline{\Gamma} = \{x \in \mathbb{R}^n,\ c^T x \leq \gamma\},\ \ c \in \mathbb{R}^n,\ \gamma \in \mathbb{R}$$

*naziva se n-dimenzionalni poluprostor određen sa hiperravni $c^T x = \gamma$.*

**Teorema 4.1.5** *Skupovi $\Gamma$ i $\overline{\Gamma}$ su konveksni skupovi.*

**Definicija 4.1.6 (Konveksan poliedar)** *Konveksan poliedar $K$ predstavlja presek konačno mnogo n-dimenzionalnih poluprostora:*

$$K = \bigcap_{i=1}^{m} \overline{\Gamma}_i \neq \emptyset,$$

$$\overline{\Gamma}_i = \{u \in \mathbb{R}^n,\ {a^i}^T u \leq b_i\},\ i = 1, 2, ..., m,\ a^i = [a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}]^T \in \mathbb{R}^n,\ m \geq n$$

Ekvivalentno, možemo zapisati

$$
\begin{aligned}
K &= \{u \in \mathbb{R}^n,\ {a^1}^T u \le b_1,\ {a^2}^T u \le b_2, \ldots,\ {a^m}^T u \le b_m\} \\
&= \{u \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{j=1}^{n} a_{1j} u_j \le b_1,\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} u_j \le b_2, \ldots,\ \sum_{j=1}^{n} a_{1m} u_j \le b_m\} \\
&= \{u \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j \le b_i,\ i = 1, 2, ..., m\} \\
&= \{u \in \mathbb{R}^n,\ Au \le b, A \in \mathbb{R}^{m,n}, b \in \mathbb{R}^m\}.
\end{aligned}
$$

Dakle, dopustiv skup problema LP, $U$, predstavlja konveksan poliedar.

**Definicija 4.1.7 (Teme konveksnog poliedra)** *Dopustivi vektor* $u$ *predstavlja teme konveksnog poliedra* $U = \bigcap_{i=1}^{m} \overline{\Gamma}_i$ *ako se nalazi u preseku najmanje* $n$, $m \ge n$, *definicionih hiperravni.*

**Teorema 4.1.8** *Ako problem LP ima optimalna rešenja, tada ona sva pripadaju rubu dopustivog skupa* $U$. *Preciznije:*

*i) Ukoliko je optimalno rešenje problema jedinstveno, tada ono predstavlja teme oblasti U*

*ii) Ukoliko problem ima vi]v se optimalnih rešenja, tada sva ona čine neku stranu oblasti U koja sadrži bar jedno teme.*

**Teorema 4.1.9 (Egzistencija optimalnog rešenja)**

*i) Ako je oblast U neprazna i ograničena, tada problem LP uvek ima optimalno rešenje*

*ii) Ako je oblast U neprazna i neograničena, tada problem LP u kojem se vrši minimizacija (maksimizacija) funkcije cilja ima optimalno rešenje ako i samo ako je finkcija cilja ograničena odozdo (odozgo).*

Problem linearnog programiranja se najčešće rešava korišćenjem SIMPLEKS metode koja predstavlja iterativni postupak u kojem se pri svakoj narednoj iteraciji nalazi jedno teme dopustive oblasti posmatranog problema, pri čemu je svako generisano teme susedno prethodnom i bolje je od njega. Postupak se zaustavlja kada se naiđe na takvo teme da ne postoji ni jedno njemu susedno koje ima bolju vrednost funkcije cilja. Poslednje pronađeno teme dopustivog skupa predstavlja optimalno rešenje početnog problema. Drugi način za pronalaženje rešenja problema LP je grafičkim rešavanjem, ali ovaj metod može da se koristi jedino u slučaju dvodimenzionalnog prostora, odnosno kada je $n = 2$.

## 4.2 Celobrojno programiranje

Iako linearno programiranje predstavlja jednu od najšire korišćenih metoda u polju operacionih istraživanja radi modeliranja različitih praktičnih optimizacionih problema, jedno od najvećih nedostataka je što izlazne promenljive ne moraju biti celobrojne jer je u mnogim sistemima ova pretpostavka neophodna. Tako na primer u slučaju raspoređivanja radnika za vršenje određenih aktivnosti nemoguće je neki posao dodeliti 1.5 radniku.

Problem celobrojnog programiranja se definiše kao problem LP u kojem se nameće uslov celobrojnosti:

$$\begin{aligned} &\text{Min } c^T u \\ \text{s.t.} \quad &Au \leq b \\ &u \geq 0, u \in \mathbb{Z}^n, \end{aligned} \tag{4.6}$$

pri čemu se pretpostavlja da je $A \in \mathbb{Z}^{m,n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$ i $c \in \mathbb{Z}^n$. U slučaju kada se uslov celobrojnosti ne nameće na sve, nego samo na neke od promenljiva, posmatrani model se naziva mešovito celobrojno programiranje.

Ukoliko se u (4.6) izostavi uslov celobrojnosti, dobija se linearna relaksacija ovog problema:

$$\begin{aligned} &\text{Min } c^T u \\ \text{s.t.} \quad &Au \leq b \\ &u \geq 0. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Osnovna razlika između ova dva problema je ta što je dopustivi skup problema (4.6) diskretan, dok je dopustivi skup problema (4.7) konveksan poliedar.

Specijalni slučaj celobrojnog programiranja koji je od izuzetnog značaja zbog svoje primene u modeliranju problema u kojima se iziskuje donošenje „da/ne" odluka je slučaj binarnog celobrojnog programiranja. Obzirom da postoje samo dve mogućnosti odluke: *da* ili *ne*, uvodi se binarna promenljiva $x$ koja može uzimati samo vrednosti iz skupa $\{0,1\}$:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{ukoliko je } i\text{-ta odluka } da \\ 0, & \text{ukoliko je } i\text{-ta odluka } ne. \end{cases}$$

Sada možemo definisati problem binarnog celobrojnog programiranja:

$$
\begin{aligned}
& \text{Min } c^T u \\
\text{s.t.} \quad & Au \leq b \\
& u \geq 0, u \in \{0,1\}^n.
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

Linearna relaksacija problema (4.8) data je sa:

$$
\begin{aligned}
& \text{Min } c^T u \\
\text{s.t.} \quad & Au \leq b \\
& 0 \leq u \leq 1.
\end{aligned}
$$

Kao i problem LP, problem (4.7) se može rešiti SIMPLEKS metodom, dok za problem celobrojnog programiranja zbog diskretnog dopustivog skupa postoje razne metode od kojih se izdvajaju

1) Metod grananja i ograničavanja

2) Metod odsecajućih ravni.

Osnovna ideja metode granjanja i ograničavanja je deljenje dopustivog skupa na podskupove, kojima odgovara razbijanje početnog problema na potprobleme koje smatramo razrešenim ukoliko nađemo njihovo celobrojno optimalno rešenje ili ukoliko procenimo da se u posmatranom dopustivom podskupu ne nalazi optimalno rešenje početnog problema. Tada se posmatrani potproblem briše iz skupa potproblema i nastavlja se sa daljim deljenjem preostalog dopustivog skupa. S druge strane, metod odsecajućih ravni se bazira na odsecanju delova dopustivog skupa linearne relaksacije problema celobrojnog programiranja koji ne sadrže celobrojne tačke. Kako može postojati jako velik broj koraka, u praksi se obično koriste kombinacije prethodne dve tehnike koje se nazivaju metode grananja i odsecanja.

# 5

# Poznati modeli u literaturi

Mogućnost zdravstvene institucije da pruži adekvatnu i pravovremenu uslugu pacijentima zavisi od mnogih faktora koji se protežu od broja i stručnosti osoblja sve do pravila koja određuju na koji način i u koje vreme se zakazuju pacijenti. Problem optimizacije redova čekanja u zdravstvenim sistemima se intenzivno izučava od pedesetih godina prošlog veka i glavni fokus se stavlja na pronalaženje niza pravila zakazivanja koji bi doveo do minimalnog čekanja pacijenata uz što efikasnije utrošeno radno vreme lekara. Pionir ovakvog istraživanja bio je Bejli (Bailey [1]) koji je predložio da se prvi termin u smeni dvostruko zakaže (prebukira), a potom da se pacijenti zakazuju na fiksni interval. Ovo pravilo je kasnije postalo poznato kao Bejlijevo pravilo (*Bailey's rule*).

U kasnijim godinama su razvijani mnogi matematički modeli radi rešavanja ovog problema, pri čemu se među pristupima najviše ističe metod optimizacije koristeći simulacije koji se pokazao kao izuzetno efikasan.

## 5.1 Metod simulacija

Đairli, Veral i Rozen (Cayirli et al. [6]) su u radu proučavali kako različite kombinacije pravila zakazivanja i pravila raspoređivanja uz modifikaciju dužine intervala predviđenog za pregled utiču na vreme čekanja pacijenata, praznine u radnom vremenu lekara i na prekovremeni rad. Empirijske podatke su prikupili u primarnoj zdravstvenoj ustanovi u Njujorku koja klasifikuje pacijente u dve grupe: kao „nove" ili „povratne" pri čemu su novi pacijenti došli prvi put i potrebni su im duži termini kod lekara, a povratni pacijenti predstavljaju već poznate pacijente koji dolaze kod lekara zbog kontrole ili novog problema. Podaci o procentu onih pacijenata koji su imali zakazan termin ali se nisu pojavili (*no-shows*) i onih pacijenata koji su došli na pregled bez termina (*walk-ins*) su prikupljeni na osnovu mesečnih izveštaja 78 klinika u posmatranoj bolnici tokom dva meseca 2002. godine.

U istraživanju su upoređena dva pristupa za formiranje sistema zakazivanja, pri čemu su korišćena različita pravila zakazivanja i raspoređivanja. U prvom pristupu se klasa pacijenata (nov ili povratni) koristi samo za određivanje pravila raspoređivanja, a u drugom se za različite klase pacijenata dodeljuje različito očekivano vreme pregleda na osnovu osobina posmatrane klase. Autori smatraju da se ovakav pristup može lako uopštiti na bilo koju šemu koja klasifikuje pacijente na osnovu dužine pregleda. Zarad uočavanja efekta modifikovanja dužine termina korišćena su pravila raspoređivanja NWBG (*new/ beginning*), RTBG (*return/ beginning*) i ALTER (*alternating*) gde prvo pravilo na osnovu očekivanog procenta pacijenata iz različitih klasa raspoređuje nove pacijente na početak smene, a povratne pacijente u preostalo vreme, dok drugo pravilo podrazumeva da se povratni pacijenti zakažu na početak smene. Treće pravilo podrazumeva zakazivanje novih i povratnih pacijenata naizmenično. Od mogućih pravila zakazivanja pacijenata korišćena su sledeća pravila:

i) IBFI (*individual-block/ fixed-interval*) pravilo podrazumeva pojedinačno zakazivanje pacijenata na fiksne intervale pri čemu je razmak između njih jednak srednjoj vrednosti trajanja pregleda:
$$t_1 = 0; \;\; t_i = t_{i-1} + \mu, \text{ za } i > 1$$

ii) MBFI (*multiple-block/ fixed-interval*) pravilo nalaže da se dva pacijenta zakazuju u isto vreme pri čemu je razmak između dva susedna termina jednak duploj srednjoj vrednosti trajanja pregleda:
$$t_i = t_{i+1} = (i-1)\mu, \text{ za } i = 1, 3, 5, 7...$$

iii) 2BEG (*Bailey's rule*) pravilo podrazumeva da se dva pacijenta zakazuju za isto vreme na početku smene, dok se ostali se zakazuju pojedinačno pri čemu je razmak između dva termina fiksan i jednak srednjoj vrednosti trajanja pregleda:
$$t_1 = t_2 = 0; \;\; t_i = t_{i-1} + \mu, \text{ za } i > 2.$$

Modifikovanjem dužine termina se pacijentima koji su klasifikovani kao povratni dodeljuju kraći intervali od onih koji se dodeljuju pacijentima klasifikovanim kao novi, a sve to u skladu sa srednjim vrednostima trajanja pregleda za ove dve klase. Ukoliko se ne primeni ovakvo prilagođavanje termina, onda se intervali određuju na osnovu srednje vrednosti dobijene za sve pacijente. Kombinovanjem tri pravila zakazivanja sa tri pravila raspoređivanja, uz ili bez modifikovanja termina prema klasama, dolazi se do 18 različitih sistema zakazivanja.

Autori su ispitali svih 18 sistema u različitim modelima koji su određeni kombinacijama 4 faktora: verovatnoćom da pacijent bude *no-show* ($P_N$), verovatnoćom da pacijent bude *walk-in* ($P_W$), procentom novih pacijenata (*% New*) i odnosom srednje vrednosti trajanja pregleda za nove i povratne pacijente ($\mu_N/\mu_R$). U istraživanju su prvobitno $P_N$ i $P_W$ posmatrani na dva nivoa: $0\%$ i $15\%$. Pretpostavljeno je da klasa pacijenata ne utiče na $P_N$, odnosno da je ova verovatnoća ista bez obzira da li se gleda klasa novih ili povratnih pacijenata. Prema empirijskim podacima sakupljenim za jednog lekara, za odnos $\mu_N/\mu_R$ je dobijen rezultat 1.23, te je u istraživanju faktor *% New* posmatran na nivoima od 20% i 40%, a $\mu_N/\mu_R$ na nivoima 1.33 i 2. Kombinacijom ovih nivoa, dolazi se do 16 različitih modela u kojima će se sistemi posmatrati.

Svi modeli su simulirani za 100 replikacija pri čemu svaka replikacija predstavlja srednju vrednost za 100 radnih dana, odnosno, za svaki model je simulirano 10,000 radnih dana. Zdravstvene institucije koje su simulirane predstavljaju sisteme u kojima jedan lekar prima jednog po jednog pacijenta, pri čemu pacijent ima pravo na samo jedan pregled. Pritom, sve zdravstvene institucije zakazuju 10 pacijenata po polovini radnog dana. Srednja vrednost dužine trajanja pregleda povratnih pacijenata je fiksirana na 15min i u skladu sa nivoima za faktor $\mu_N/\mu_R$, srednja vrednost dužine trajanja pregleda novih pacijenata se posmatra na nivoima 20min ($\mu_N/\mu_R = 1.33$) i 30min ($\mu_N/\mu_R = 2$).

Za modelovanje trajanja pregleda novih i povratnih pacijenata korišćena je lognormalna raspodela. Simulacije su sprovedene tako da uključuju i netačne pacijente, pacijente tipa *no-show*, kao i pacijente tipa *walk-in*, pri čemu je netačnost pacijenta, koja podrazumeva raniji dolazak ili kašnjenje pacijenta, modelirana normalnom raspodelom sa srednjom vrednošću od -15 minuta (prosečan pacijent se pojavi 15min pre svog termina) i standardnim odstupanjem od 25 minuta. U ovom istraživanju pretpostavljeno je da vreme koje protekne između dva pacijenta tipa *walk-in* prati eksponencijalnu raspodelu. Pacijenti tipa *walk-in* na osnovu očekivane verovatnoće novih pacijenata mogu biti klasifikovani kao novi ili kao povratni pacijenti i oni bivaju prim-ljeni bez obzira na to kolika je gužva. U simulacijama su pacijenti ulazili kod lekara prema redosledu kada su zakazani, a ne prema redosledu kada su se pojavili. U pogledu pacijenata koji su zakasnili na svoj termin i pacijenata tipa *walk-in*, autori su prilikom simulacija za zakasnele pacijente koristili pravilo da zakasneli pacijent čeka po termin više za svakih $\mu$ minuta kašnjenja, a pacijenti tipa *walk-in*, ukoliko se pojavi u trenutku kada ima još pacijenata koji čekaju, mora da sačeka da sa pregledom završi najviše 3 zakazana pacijenta. Autori navode da je pretpostavka da su vremena trajanja pregleda nezavisna i jednako raspodeljena jedno od ograničenja ovakvog modela, jer smatraju da u stvarnosti postoji mogućnost da lekari ubrzaju rad ukoliko vide da čeka mnogo pacijenata.

U sprovedenom istraživanju primarne mere učinka čine srednja vrednost čekanja pacijenata (*WAIT*), srednja vrednost dužine praznine u radnom vremenu lekara po pacijentu (*IDLE*) i srednja vrednost prekovremenog rada lekara po pacijentu (*OVER*). Parametar WAIT je za smenu u kojoj je bilo ukupno N pacijenata izračunat kao

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} WAIT_i, \quad i = 1, 2, ..., N,$$

pri čemu je vreme čekanja $i$-tog pacijenta definisano kao vreme između zakazanog termina i vremena kada počne pregled. U slučaju kada se pacijent pojavi pre svog termina i lekar ga primi pre nego što pacijent ima zakazan termin, autori podrazumevaju da je vreme čekanja posmatranog pacijenta $0$. Parametar IDLE je sračunat deljenjem ukupnog vremena koje je lekar imao kao prazninu u radu tokom čitave smene sa brojem primljenih pacijenata, a parametar OVER je sračunat deljenjem ukupnog prekovremenog rada sa brojem primljenih pacijenata. Autori smatraju da je prihvatljiv kompromis između primarnih mera subjektivan i da se zasniva na vrednosti troškova vremena čekanja pacijenata ($C_p$), troškova praznine u radnom vremenu lekara ($C_d$) i troškova prekovremenog rada lekara ($C_o$), i u svom istraživanju su posmatrali troškove praznine u radnom vremenu i troškove prekovremenog rada lekara kao fiksiran odnos $\frac{C_o}{C_d}$ na nivou $\pi = 1.5$ i $\pi = 3.0$. Na ovaj način, autori su došli do funkcije ukupnih troškova po pacijentu ($TC$):

$$TC = (WAIT)C_p + [(IDLE) + \pi(OVER)]C_d.$$

Koliko je sistem zakazivanja "pravedan" je mereno standardnim odstupanjem vremena čekanja pacijenata sa težnjom da se postignu uniformna vremena čekanja tokom čitave smene. Takođe, sistemi zakazivanja su upoređivani i na osnovu procenata koliko je pacijenata ušlo na pregled u opsegu od 30 minuta nakon svog zakazanog termina.

Rezultati ovog istraživanja ukazuju na to da postoje sistemi zakazivanja formirani kombinovanjem pravila raspoređivanja i zakazivanja uz modifikovanje dužine termina koji istovremeno poboljšavaju vreme čekanja pacijenata sa jedne strane i praznine u radnom vremenu i troškove prekovremenog rada lekara sa druge. Od 18 posmatranih sistema zakazivanja, autori izdvajaju sledećih 5 kao najboljih:

i) Zakazivanje novih pacijenata na početak radnog vremena, a povratnih u preostalo vreme radnog dana koristeći Bejlijevo pravilo koje podrazumeva zakazivanje dva pacijenta na početku smene, a ostalih u pojedinačne termine pri čemu je razmak između dva termina fiksan i jednak srednjoj vrednosti trajanja pregleda. U ovom sistemu se ne vrše modifikacije dužine termina

ii) Zakazivanje povratnih pacijenata na početak radnog vremena, a novih u preostalo vreme radnog dana pridržavajući se Bejlijevog pravila pri čemu se u ovom sistemu vrši modifikacija dužine trajanja termina

iii) Zakazivanje povratnih pacijenata na početak radnog vremena, a novih u preostalo vreme radnog dana, pri čemu se vrši modifikacija dužine trajanja termina i pacijenti se zakazuju po dva za isti termin

iv) Pojedinačno zakazivanje pacijenata uz modifikaciju dužine trajanja termina, pri čemu se povratni pacijenti zakazuju na početak radnog vremena, a novi u preostalo vreme radnog dana

v) Pojedinačno zakazivanje pacijenata bez modifikacije dužine trajanja termina, pri čemu se povratni pacijenti zakazuju na početak radnog vremena, a novi u preostalo vreme radnog dana.

U kasnijem radu, Đairli i Gunes (Cayirli, Gunes [4]) imali su drugačiji pristup problemu zakazivanja i raspoređivanja pacijenata. Najveći akcenat je stavljen na uticaj pacijenata koji se pojave na pregled, a da pritom nemaju zakazan termin (*walk-ins*). Autori navode da broj pacijenata tipa *walk-in* varira od meseca do meseca, od dana do dana, pa čak i od sata do sata, te smatraju da je potrebno da se za različite sezone (periode) koriste različita pravila zakazivanja i raspoređivanja pacijenata. Kao izlazni parametar ovog istraživanja, autori su želeli da dobiju informaciju o tome koje moguće termine treba prebukirati (zakazati dva pacijenta umesto jednog), a koje ostaviti prazne, tako da se minimizuju ukupni troškovi uslovljeni čekanjem pacijenata, praznim vremenom tokom rada lekara, kao i prekovremenim radom.

Empirijski podaci o varijabilnosti stope dolazaka pacijenata tipa *walk-in* prikupljeni su u jednoj privatnoj i jednoj državnoj bolnici pri čemu obe uključuju odeljenja različitih profila: otolaringologije, dermatologije, pedijatrije, ortopedije i odeljenje za akušerstvo i ginekologiju. Kao jedno od prvih zapažanja, autori navode da je u državnoj bolnici srednja vrednost ukupne stope dolazaka pacijenata tipa *walk-in* 73%, dok je u privatnoj bolnici ovaj parametar samo 20%. Uočili su i da sezonske razlike u potražnji pacijenata tipa *walk-in* prati ukupnu sezonsku potražnju. Dalje, nakon izračunatih mesečnih i dnevnih indeksa za različita odeljenja u privatnoj bolnici, kao odnosa periodične potražnje i prosečne potražnje pacijenata za pregledom, autori su primetili da postoje značajne razlike u sezonskoj potražnji kod različitih odeljenja. Do ovog zaključka su došli upoređujući dobijene koeficijente varijacije koje su posmatrali kao relativnu meru nivoa sezonske varijacije po odeljenjima ($C_v = \sigma/\mu$). Takođe, podaci ukazuju na to da odeljenja u državnoj bolnici imaju nižu stopu sezonske varijabilnosti u odnosu na odeljenja u privatnoj bolnici, ali i da su sezonski obrasci kod ove dve bolnice slični za odeljenja istog profila.

U istraživanju su sezonski dolasci pacijenata tipa *walk-in* modelovani nehomogenim Poasonovim procesom, pri čemu je prosečan udeo pacijenata tipa *walk-in*, $P$, procenjen u odnosu na ukupan, fiksan, ciljani broj pacijenata, $T$, tokom jednog radnog dana (jedne radne smene lekara). Tako je ukupan očekivani dnevni broj pacijenata tipa *walk-in*, $\lambda$, dat sa

$$\lambda = T \times P,$$

a očekivani broj pacijenata tipa *walk-in* na dan $t$ je dat sa

$$\begin{aligned} &\lambda_t = \lambda \times I_i^m \times I_j^w, \\ &\qquad\qquad \text{za } i = \left\lfloor \frac{t-1}{20} \right\rfloor + 1, j = (t-1 \ \ mod \ 5) + 1, \end{aligned} \tag{5.1}$$

gde je $I_i^m$ mesečni, a $I_j^w$ nedeljni sezonski indeks za mesec $i$ i dan $j$, pri čemu se posmatra 5 radnih dana u nedelji tj. 20 radnih dana u mesecu. Analogno, stopa dolazaka pacijenata tipa *walk-in* u vremenski period $k$ na dan $t$ je dat sa

$$\lambda(k,t) = \left(\frac{\lambda_t}{L}\right) \times I_k^d, \qquad \text{za } k = 1, 2, ...L,$$

gde je $I_k^d$ dnevni indeks dobijen na osnovu $L$ vremenskih perioda tokom radnog dana.

Autori su posmatrali udeo pacijenata tipa *walk-in* na nivoima od 20% i 40% kako bi predstavili odeljenja sa relativno „niskim”, odnosno, „visokim” procentom ove klase pacijenata. Mesečna sezonska varijabilnost i sezonska varijabilnost dolazaka pacijenata tipa *walk-in* u toku nedelje je takođe testirana kao „niska” ili „visoka” korišćenjem parametara $C_v = 0.13$ i $C_v = 0.23$, dok je varijabilnost dolazaka pacijenata tipa *walk-in* tokom dana posmatrana na nivoima „bez” ili „sa”. Pri tome je pretpostavljeno da je dnevni obrazac homogen za svaki dan godine (npr. ukoliko se posmatra radni dan od 450 minuta gde se za jedan vremenski period uzima 30min ($L = 15$) i najviši indeks se javlja u 11-om periodu, onda se baš u tom periodu nalazi najviši indeks svakog dana). Što se tiče pravila raspoređivanja, u istraživanju je granica za zakazivanje termina po danu data kao

$$N_t = T - R_t, \qquad \text{za dan } t = 1, 2, ...H,$$

gde je $T$ ciljani broj pacijenata po radnom danu, $H$ je posmatrani broj dana pomoću kojih se uočava sezonski obrazac, a $R_t$ je kapacitet termina izdvojenih za pacijente tipa *walk-in* na dan $t$. Reper u odnosu na koji se porede svi modeli predstavlja slučaj u kojem ne postoje modifikacije zasnovane na različitim sezonama (periodima) i tada se kapacitet izdvojen za pacijente tipa *walk-in* gleda na nivou godišnjeg proseka njihove stope dolazaka, tj. tada je $R_t = \lambda$. Ukoliko se prave modifikacije na osnovu meseca, parametar $R_t$ se podešava sa $R_t = \lambda \times I_i^m$, za $i = 1, 2, ..12$, a ukoliko se modifikacije prave na osnovu dana u nedelji, ovaj parametar se modifikuje pomoću $R_t = \lambda \times I_j^w$, za $j = 1, 2, ...n$, ukoliko nedelja ima n radnih dana. U slučaju kada se $R_t$ modifikuje i na osnovu meseca, i na osnovu dana u nedelji, uzima se da je $R_t = \lambda_t$, pri čemu se $\lambda_t$ dobija kao u jednačini obeleženoj sa (5.1). U pogledu pravila zakazivanja, osnovno pravilo od kojeg se polazi je da se pacijenti zakazuju pojedinačno na fiksni interval pri čemu se za dužinu jednog termina uzima srednja vrednost trajanja pregleda, $\mu$. U slučaju kada se ne prave modifikacije zasnovane na različitim sezonama (periodima), pri čemu je prosečan udeo pacijenata tipa *walk-in* $P$, dužine termina se računaju kao $\mu' = \frac{\mu}{1-P}$. Ukoliko se prave modifikacije na osnovu sezone (specifičnog perioda), sezonska pravila raspoređivanja modifikuju pravilo zakazivanja dato u slučaju kada se ne prave modifikacije tako što se određeni termini ostavljaju prazni ukoliko periodični kapacitet prevazilazi prosečan nivo ($R_t > R$), odnosno tako što se pojedini termini prebukiraju (zakažu se dva umesto jednog pacijenta za isti termin) ukoliko važi suprotno ($R_t \leq R$). Pritom, dnevna razlika u nivou kapaciteta, $D_t$, računa se kao

$$D_t = |R_t - R|, \text{za } t = 1, 2, ..., H.$$

Autori navode da je za rešavanje optimizacionog modela u istraživanju korišćen metod optimizacije pomoću simulacija sa ciljem pronalaženja najbolje kombinacije prebukiranih termina i onih koje treba ostaviti prazne. Optimizacija koja se bazira na simulacijama spada u stohastičke metode optimizacije i ona podrazumeva reprodukovanje posmatranog sistema dovoljan broj puta radi pronalaženja optimalnog rešenja problema. Dobijena optimalna pravila se upoređuju sa nekim osnovnim pravilima koja su logičkim putem razvijena kao početna tačka u praksi. Sam rezultat stohastičkog modela optimizacije je slučajnog tipa, pa treba da se tretira samo kao procena pravog obeležja posmatranog modela optimizacije (Law, Kelton [21]). Testirano je ukupno 16 kombinacija (4 načina prebukiranja $\times$ 4 načina ostavljanje praznih termina) koje smeštaju termine na početku, na kraju, u sredini ili ravnomerno tokom čitavog radnog dana. Sveukupno, u istraživanju je u 16 različitih modela (2 nivoa za $P$ $\times$ 2 nivoa sezonske varijabilnosti u toku dana $\times$ 2 nivoa sezonske varijabilnosti u toku nedelje $\times$ 2 nivoa mesečne varijabilnosti) testirano 49 sistema zakazivanja (16 pravila zakazivanja $\times$ 3 pravila raspoređivanja i reper u odnosu na koji se svi sistemi zakazivanja porede).

U radu je simulirano bolničko odeljenje kao sistem u kojem postoji samo jedan pružalac usluga tokom radnog dana od 7h30min (450 minuta). Ciljani broj pacijenata je fiksiran na $T = 30$ što je u saglasnosti sa prosečnim trajanjem pregleda od 15 minuta. Autori su pretpostavili da trajanje pregleda bez obzira da li je pacijent zakazan ili tipa *walk-in* prati lognormalnu raspodelu sa koeficijentom varijacije 0.5 ($\sigma = 7.5$min), a verovatnoća da se zakazani pacijent ne pojavi na pregled je stavljena na 0. Dalje, autori pretpostavljaju da se svi zakazani pacijenti pojave na vreme za svoj termin, kao i da svi pacijenti tipa *walk-in* koji se pojave pre kraja radnog vremena budu primljeni, ali nemaju prioritet u odnosu na zakazane pacijente (pacijent tipa *walk-in* čeka sve dok postoji zakazanih pacijenata ispred njega). Ukoliko pak ostanu samo pacijenti tipa *walk-in*, lekar ih prima po redosledu po kom su se pojavili. Autori takođe pretpostavljaju da svi pacijenti bivaju primljeni istog dana kada su se pojavili, bez obzira na to da li će lekar morati da radi prekovremeno. U istraživanju je sprovedeno 500 godišnjih replikacija (tj. 120,000 radnih dana uzimajući da ima 20 radnih dana mesečno, odnosno, 240 radnih dana godišnje) za svaki od 48 modela sistema zakazivanja.

Nakon što je identifikovano najbolje pravilo raspoređivanja, autori su hteli da sprovedu još jedan niz simulacija kojim bi se odredilo koje termine je najbolje ostaviti prazne (ili prebukirane) sa ciljem da se nađe najbolji mogući sistem. Ovoj analizi autori su pristupili formulisanjem problema zakazivanja kao posebnog optimizacionog problema za svaki od datih $R_t$ nivoa. Uveli su binarnu promenljivu, $x_i$, koja uzima vrednost 1 ukoliko po-smatrani, $i$-ti termin, treba da se ostavi prazan (ili prebukira, zavisno od veličine $R_t$), i vrednost 0 u suprotnom. Došli su do sledećeg optimizacionog modela:

$$\text{Min}\, TC = (\beta E[W_s] + E[W_w]) + \alpha(\pi E[O] + E[I])$$
$$\text{s.t.} \sum x_i = D_i$$
$$x_i = \{0, 1\}, \text{za } i = 1, 2, ..., N_t,$$

gde je $E[W_s]$ vreme čekanja zakazanih pacijenata, $E[W_w]$ vreme čekanja pacijenata tipa *walk-in*, $E[I]$ predstavlja prazno vreme u radu lekara po pacijentu, a $E[O]$ je prekovremeni rad lekara po pacijentu. Autori napominju da se zbog pretpostavke o tačnosti zakazanih pacijenata, $E[W_s]$ računa kao razlika između vremena termina i vremena kada je započeo pregled, dok se $E[W_w]$ računa kao razlika između vremena kada se pacijent pojavio na odeljenje i vremena kada je započeo pregled. Koeficijenti $\beta, \alpha$ i $\pi$ redom predstavljaju relativnu razliku između troškova čekanja zakazanih pacijenata i pacijenata tipa *walk-in* ($\beta \geq 1$), relativnu značajnost lekarevog vremena u odnosu na pacijentovo i premiju troška prekovremenog rada (npr. $\pi = 1.5$ znači da je prekovremeni rad 50% skuplji od redovnog rada lekara). Ovaj problem je rešen za svaki od mogućih scenarija pri čemu je za ulazni parametar data vrednost $N_t$. Autori navode da su dva najbolja rešenja su ponovo puštena kroz simulacije i, kao i ranije, sprovedeno je 500 godišnjih replikacija za 4 od 16 mogućih modela pri čemu je svaki model analiziran na 3 nivoa za $\alpha$, $\alpha = \{1, 5, 20\}$, tj. simulacije su sprovedena za ukupno 12 scenarija.

Autori ističu da dobijeni rezultati ukazuju na to da ukoliko se bar parcijalno uračuna sezonska varijabilnost u pogledu dolazaka pacijenata tipa *walk-in* dolazi do smanjenja vremena čekanja pacijenata, praznog vremena u radu lekara, kao i prekovremenog rada. Dalje, navode da najbolje učinke daje tzv. strategija kombinovanog prilagođavanja u kojoj se uključuje i mesečna i nedeljna sezonska varijabilnost, i koja za rezultat daje poboljšanje od 3-14% u pogledu prosečnih ukupnih troškova, u odnosu na strategiju u kojoj se ne vrše modifikacije. Što se tiče drugog dela analize, autori zaključuju da su najbolje strategije prebukiranja one koje započnu prebukiranjem početnih ili krajnjih termina u radnom danu, ali se vremenom svedu na ravnomerno prebukiranje termina tokom čitavog dana.

U pogledu najboljih strategija koje podrazumevaju ostavljanja praznih termina, autori navode da je za niske i srednje parametre $\alpha$ najbolje ostavljati prazne termine ravnomerno tokom čitavog radnog vremena, dok je za odeljenja koja imaju visok odnos troškova, odnosno, veliko $\alpha$, najbolje početi sa ostavljanjem praznih termina na kraju smene, a potom vremenom preći na raspoređivanje praznih termina ka početku radnog dana vodeći računa da se prazni termini ne približe samom početku smene.

Autori Lagenga i Lorens (LaGanga, Lawrence [20]) takođe su koristili metod simulacija u svom radu koji se bavi problematikom pacijenata koji se ne pojave na zakazani pregled (*no-shows*). Oni su modelovali zdravstvenu ustanovu u kojoj može postojati više pružalaca usluga (lekari, medicinske sestre itd.), uz uslov da svako od njih uslužuje određenu grupu pacijenata.

Kako bi se što bolje uočio efekat pacijenata tipa *no-show*, u istraživanju je pretpostavljeno da je dužina trajanja pregleda svakog pacijenta fiksna i iznosi $D$. Pretpostavljeno je i da svaki pružalac usluge može da usluži $N$ pacijenata za vreme svog rada na klinici koje je definisano kao niz vremena rada sa pacijentima bez prekida (npr. jutro, veče, ceo dan i sl.). Veličina, odnosno, kapacitet klinike, određen je parametrom $N$, a dužina trajanja rada na klinici $C$ definisana je kao dužina trajanja $N$ uzastopnih pregleda, $C = ND$. U radu je razmak između dva uzastopno zakazana pacijenta fiksan i iznosi $T$. Prosečan udeo zakazanih pacijenata koji su tipa *walk-in* je dat sa $R$, $0 \leq R \leq 1$, dok je udeo zakazanih pacijenata koji se pojave na svoj zakazani termin označen sa $S$, gde je $S = 1 - R$. Autori zaključuju da je u proseku $RN$ termina prazno tokom rada na klinici i smatraju da se na taj način značajno smanjuje produktivnost pružalaca usluga. Kako bi klinika nadoknadila izgubljeno vreme zbog pacijenata tipa *no-show*, autori predlažu prebukiranje mogućih termina, odnosno zakazivanje više pacijenata, $K$, nego što klinika ima kapacitet, $N$, tokom rada posmatranog pružaoca usluge na klinici ($K \geq N$). U radu je pretpostavljeno da se vreme između dva uzastopno zakazana pacijenta, $T$, smanjuje proporcionalno broju prebukiranih termina:

$$T = \frac{C}{K} = \frac{ND}{K}.$$

Autori napominju da ukoliko postoji praksa prebukiranja termina može doći do toga da se tokom radnog vremena u klinici pojavi više pacijenata, $x$, nego što klinika ima kapaciteta, $N$, tako da važi $K \geq x \geq N$. U tom slučaju, javlja se mogućnost da će pacijent $p$ morati da čeka neko vreme $W_p$ pre nego što bude primljen (uslužen), kao i da će posmatrani lekar (pružalac usluge) morati da radi prekovremeno za vrednost $F$, $F \geq C$. Radi formiranja modela koji predstavlja korisnost klinike u koju su inkorporirani troškovi uzrokovani pacijentima tipa *no-show* i dobit uslovljena prebukiranjem, autori pretpostavljaju da klinika za svakog primljenog pacijenta ostvaruje marginalnu dobit $\pi$, a za svakog pacijenta koji mora da čeka na pregled snosi marginalni trošak $w$ po jedinici vremena čekanja. Dalje, marginalni trošak pružaoca usluge koji radi prekovremeno označen je sa $\tau$ i pretpostavlja se da su parametri $\pi, w$ i $\tau$ izraženi u istoj mernoj jedinici. Za polaznu tačku sa kojom će porediti dobit i troškove klinike uz korišćenje modela prebukiranja termina, autori uzimaju očekivanu korisnost klinike pri sistemu u kojem postoje pacijenti tipa *no-show*, ali se ne koristi prebukiranje. Bruto korisnost rada u klinici posmatranog lekara (pružaoca usluge) predstavlja maksimalnu moguću dobit do koje dolazi ukoliko se svi zakazani pacijenti pojave na svoj termin i data je sa $U_G = \pi N$, a realizovana korisnost klinike, $U_R$, predstavlja očekivanu dobit klinike nakon ubrajanja očekivanog broja pacijenata tipa *no-show*, tj. $U_R = \pi SN = SU_G$. Stoga, troškovi korisnosti uzrokovani pacijentima tipa *no-show* definisani su kao

$$U_C = U_G - U_R = \pi(1 - S)N = \pi RN.$$

Autori definišu korisnost prebukiranja, $\overline{U}_N$, kao neto dobitak (ili gubitak) korisnosti uzrokovan prebukiranjem:

$$\overline{U}_N = \pi(\overline{A} - SN) - w\overline{W} - \tau\overline{O},$$

gde je $\overline{A} = SK$ očekivani broj zakazanih pacijenata koji se pojave na pregled, $\overline{W} = \sum_p \frac{W_p}{x}$ očekivano vreme čekanja svakog od $x$ pacijenata koji su se pojavili, dok $\overline{O} = \overline{F} - C$ prikazuje očekivani prekovremeni rad. Prvi član predstavlja očekivanu neto dobit koja proizilazi od prebukiranih pacijenata, drugi član predstavlja troškove usled promene srednje vrednosti vremena čekanja pacijenata, a treći član predstavlja očekivani trošak prekovremenog rada uzrokovanog prebukiranjem. Kako bi se utvrdio uticaj i mogućnosti modela prebukiranja, u istraživanju je korišćen niz simulacija, pri čemu je produktivnost lekara (pružaoca usluge), $P$, posmatrana kao odnos između njegovog ukupnog vremena pružanja usluge i ukupne dužine njegovog radnog dana, uključujući prekovremeni rad. Autori su prilikom sprovođenja simulacija za ulazne parametre koristili kapacitet klinike, $N$, i stopu pacijenata koji se pojave na pregled, $S$, dok su vremena čekanja, $W$, produktivnost lekara (pružaoca usluge), $P$ i kraj radnog vremena na klinici, $F$, predstavljale zavisne promenljive koje se mere simulacijama. Parametar $N$ je posmatran na 5 nivoa: $N \in \{10, 20, 30, 40, 50\}$, a parametar $S$ na 10 nivoa: $S \in \{1.0, 0.9, ..., 0.1\}$. Sprovedeno je po 10,000 replikacija za svaku od 50 mogućih kombinacija, odnosno, napravljeno je ukupno 500,000 obzervacija. Pritom, u svakoj obzervaciji, broj zakazanih termina je računat kao

$$K = \frac{N}{S},$$

dužine trajanja pregleda su bile fiksirane na $D = 1$, a vreme koje protekne između dva zakazana termina, $T$, kao $T = \frac{N}{K}$. Pretpostavljeno je da se pacijenti pojavljuju u skladu sa verovatnoćom $S$ tačno u vreme kada su zakazani. Dalje, pretpostavljeno je da ukoliko je lekar (pružalac usluge) zauzet, pacijenti čekaju dok isti ne bude slobodan i tada ulaze na pregled prema rasporedu zakazanih termina. U slučajevima kada je čekaonica prazna (nema pacijenata koji čekaju na uslugu), a pacijent koji tada ima termin je tipa *no-show*, lekar (pružalac usluge) ima „prazno" vreme u radu tj. slobodan termin. S druge strane, u slučajevima kada se pojavi više pacijenata nego što lekar (pružalac usluge) može da opsluži tokom rada na klinici, $C$, lekar je primoran da radi prekovremeno. Obzirom da je dužina trajanja pregleda fiksna, autori skreću pažnju na to da je prebukiranje jedini uzrok koji utiče na čekanje pacijenata i uslovljava prekovremeni rad. Marginalna dobit korisnosti, $\pi$, marginalni troškovi vremena čekanja pacijenata, $w$, kao i marginalni troškovi prekovremenog rada, $\tau$, primenjeni su nakon izvršenja simulacija.

Autori smatraju da su simulacije pokazale niz obrazaca koji mogu pomoći pri izradi pravila zakazivanja pacijenata. Rezultati ukazuju na to da ukoliko se koristi metod prebukiranja, sa rastom stope pacijenata tipa *no-show* dolazi do proporcionalnog rasta očekivanog vremena čekanja pacijenata, $\overline{W}$, kao i očekivanog prekovremenog rada, $\overline{O}$, bez obzira na to koliki je kapacitet posmatrane klinike. Takođe, autori navode da prebukiranje uz veću stopu pacijenata tipa *no-show*, dovodi do bolje produktivnosti lekara (pružaoca usluge), $\overline{P}$, kao i da se očekivana korisnost prebukiranja, $\overline{U}_N$, za većinu klinika povećava sa povećanjem kapaciteta klinike.

Bitno je napomenuti da, iako daleko najrasprostranjeniji, metod simulacija nije jedini koji se koristi prilikom izučavanja problema čekanja pacijenata, pa se tako u pojedinim radovima koristi tzv. teorija redova (Lu et al. [23], Kembe et al. [16]) koja daje konkretne odgovore na pitanja vezana za osobine posmatranog reda koji se pre analize klasifikuje prema nekoliko faktora: vrsti procesa dolazaka, raspodeli trajanja pružanja usluge, broju pružalaca usluge, veličini čekaonice i pravilu reda koje govori po kom redosledu uslužuju pacijente.

# 6

# Problem optimizacije redova čekanja

U ovoj glavi biće predstavljeni postupak i rezultati istraživanja problema optimizacije redova čekanja na primeru primarne zdravstvene institucije.

U stvarnosti se događa da se zakazani pacijenti na pregledu zadrže duže od 10 minuta što predstavlja propisanu dužinu trajanja jednog lekarskog termina, kao i da se na pregled pojavljuju pacijenti koji se nisu prethodno najavili, te često oni koji imaju zakazan termin moraju da čekaju određeno vreme pre nego što ih lekar primi. Fokus ovog rada je stavljen na prethodno opisan problem, pri čemu je posmatran uticaj na ukupno vreme čekanja zakazanih pacijenata. Empirijski podaci o broju pacijenata i dužini trajanja pregleda prikupljeni su za period od godinu dana u Domu Zdravlja, Novi Sad, u odeljenju Veternik. Podaci su prikupljeni za 2 lekara opšte prakse čiji dnevni rad sa pacijentima, bez pauze, iznosi 6 sati, odnosno 360 minuta.

Pacijente klasifikujemo u 3 grupe: zakazani pacijenti čiji pregled traje do 10 minuta, zakazani pacijenti čiji pregled traje duže od 10 minuta i pacijenti koji se bez zakazanog termina pojave na pregled (u daljem tekstu „nezakazani"). Prva grupa obuhvata pacijente koji uglavnom dolaze radi neke rutinske procedure (npr. kontrolni pregled, produžetak bolovanja, propisivanje recepta za lek i sl.), dok u drugu grupu najčešće spadaju pacijenti koji dolaze na prvi pregled kod lekara. Pacijenti koji se pojave bez unapred zakazanog pregleda su najčešće hitni slučajevi. Empirijski podaci ukazuju na to da ne postoje značajne razlike u broju dolazaka sve tri grupe pacijenata bez obzira na posmatrani period (mesec, dan, sat), nego upućuju na uniformnu raspodelu tokom cele godine.

Praksa u Domu Zdravlja je da se pacijenti zakazuju na fiksni interval od 10 minuta, obzirom da je ta dužina trajanja pregleda propisana zakonskom regulativom. Zakazivanje pacijenata se vrši preko kol centra (*Call center*), pri čemu se vodi računa da se pregled zakaže za što skoriji termin, kao i da samo vreme pregleda odgovara pacijentu. Kako je reč o primarnoj zdravstvenoj insituciji u kojoj rade lekari opšte prakse čiji opis rada pored neposrednog lečenja pacijenata podrazumeva i izdavanje uverenja o bolovanju, izdavanje uputa za specijalističke preglede i sl., broj pacijenata koji zakažu termin, a kasnije se na njega ne pojave, je zanemarljivo mali. U skladu sa prethodno napisanim, pretpostavimo da se pacijenti zakazuju na fiksne intervale od 10 minuta tokom čitavog radnog vremena. Dalje, pretpostavimo da su prilikom zakazivanja pregleda ispunjene preferencije pacijenta za terminom tj. da indirektno vreme čekanja pacijenata ne postoji. Kako su pacijenti koji se bez unapred zakazanog termina pojave na pregled najčeće hitni slučajevi, pretpostavimo da nezakazani pacijenti imaju prednost u odnosu na zakazane pacijente, odnosno da ukoliko se pojavi nezakazan pacijent on ulazi na pregled čim lekar bude slobodan. Konačno, pretpostavimo da se svi zakazani pacijenti pojave na svoj termin i to bez kašnjenja. Za analizu ukupnog vremena čekanja zakazanih pacijenata dovoljno je posmatrati samo direktno vreme čekanja koje se definiše kao razlika između vremena za kada je termin zakazan i trenutka kada pacijent uđe na pregled. Ideja je da se pojedini termini ostave prazni, odnosno da se ne iskoriste prilikom zakazivanja, kako bi se kompenzovalo vreme čekanja uslovljeno pojavom nezakazanih pacijenata i zadržavanjem zakazanih pacijenata duže od 10 minuta.

Istraživanje je teklo u dve faze. U prvom delu je na osnovu podataka dobijenih za prvih 9 meseci (*In-Sample*) razvijen diskretan model optimizacije. Rešavanjem dobijene funkcije cilja, određen je raspored termina koje treba ostaviti prazne kako bi se minimiziralo ukupno vreme čekanja zakazanih pacijenata. U drugoj fazi simulirani su radni dani dva lekara za period od 3 meseca. Na osnovu empirijskih podataka prikupljenih za poslednja 3 meseca (*Out-of-Sample*) i podataka dobijenih na osnovu simulacija, upoređeno je ukupno vreme čekanja dobijeno primenom pravila o ostavljanju pojedinih termina praznim sa ukupnim vremenom čekanja sračunatim na realnim podacima.

## 6.1 Model optimizacije

Posmatrani su empirijski podaci prikupljeni za 2 lekara opšte prakse tokom 9 meseci rada. Jedan radni dan, pod kojim podrazumevamo ukupno trajanje rada sa pacijentima bez prekida, iznosi 360 minuta, dok svako duže provedeno vreme podrazumevamo kao prekovremeni rad.

Označimo sa $T_1$ trajanje pregleda zakazanih pacijenata koji se kod lekara zadrže do 10 minuta, sa $T_2$ trajanje pregleda zakazanih pacijenata čiji pregled traje duže od 10 minuta, a sa $T_3$ trajanje pregleda nezakazanih pacijenata. Sa $T_{1,2}$ označimo vreme zadržavanja zakazanih pacijenata, bez obzira kojoj klasi pripadaju. Neka je $v$ verovatnoća da se zakazan pacijent zadrži duže od 10 minuta kod lekara, a $q$ verovatnoća da se u posmatranom terminu od 10 minuta pojavi nezakazani pacijent.

Kao što je ranije navedeno, podaci impliciraju da tokom godine ne postoje značajne razlike u broju i vremenu pojavljivanja pacijenata. Posmatrane su frekvencije pacijenata koji se pojave na pregledu bez prethodno zakazanog termina po satu i uočeno je da se broj dolazaka nezakazanih pacijenata može opisati Poasonovim procesom. Fitovanjem Poasonove raspodele broja nezakazanih pacijenata po satu određen je parametar Poasonove raspodele $\lambda = 2.66$ uz standardno odstupanje $S_\lambda = 0.035$ tj. uz odstupanje od samo 1.3%. Fitovanje raspodele niza podataka označava postupak prilagođavanja posmatrane raspodele tako da odstupanja aproksimiranih vrednosti od realnih ne budu velika. Ukoliko su odstupanja izračunatih podataka od posmatranih relativno mala, kažemo da raspodela dobro fituje podatake.

Za modelovanje trajanja pregleda pacijenata korišćena je lognormalna raspodela sa parametrima $m$ i $\sigma$ takvim da očekivanja i varijanse lognormalnih raspodela odgovaraju srednjim vrednostima i disperzijama dobijenih na osnovu realnih podataka. Za uzoračke disperzije korišćena je formula:

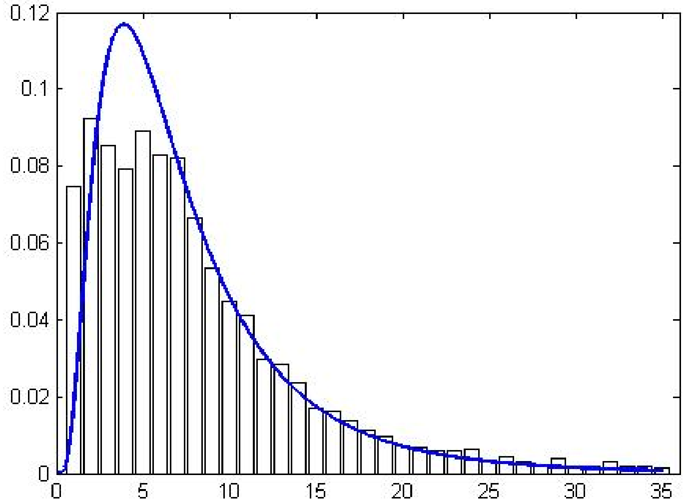
$$S_i^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N}(T_{ij} - \overline{T_i})^2,$$

gde je $\overline{T_i}$ srednja vrednost parametra $T_i$, a $N$ broj opažanja u uzorku za parametar $T_i$. Dobijene numeričke karakteristike prikazane su u tabeli 6.1:

| Slučajna promenljiva | Raspodela | Očekivanje | Disperzija |
|---|---|---|---|
| $T_1$ | $\mathcal{L}og\mathcal{N}\ (1.5491, 0.4687^2)$ | 5 | 7 |
| $T_2$ | $\mathcal{L}og\mathcal{N}\ (2.7317, 0.3234^2)$ | 16 | 29 |
| $T_3$ | $\mathcal{L}og\mathcal{N}\ (1.8364, 0.6901^2)$ | 8 | 39 |
| $T_{1,2}$ | $\mathcal{L}og\mathcal{N}\ (1.8608, 0.6591^2)$ | 8 | 35 |

Tabela 6.1: Numeričke karakteristike slučajnih promenljivih $T_1$, $T_2$, $T_3$, $T_{1,2}$

Iz prethodne tabele se vidi da je npr. za opisivanje trajanja pregleda nezakazanih pacijenata, $T_3$, korišćena lognormalna raspodela sa parametrima $m = 1.8364$ i $\sigma = 0.6901$, $T_3 : \mathcal{L}og\mathcal{N}$ $(1.8364, 0.6901^2)$, pri čemu je $E(T_3) = 8$ minuta i $Var(T_3) = 39$ minuta što su ujedno i vrednosti dobijene u podacima. U većini istraživačkih radova koji se bave ovom problematikom takođe je korišćena lognormalna raspodela za opisivanje zadržavanja pacijenata kod lekara (O'Keefe [24], Klassen [17], [6], [4]). Na grafiku 6.1 dat je prikaz funkcije gustine lognormalne raspodele fitovane na podatke o trajanju pregleda nezakazanih pacijenata. Na horizontalnoj osi označena je dužina trajanja pregleda u minutima, a na vertikalnoj osi se nalaze vrednosti funkcije gustine lognormalne raspodele koje ujedno označavaju i udeo nezakazanih pacijenata koji su se zadržali odgovarajuće vreme kod lekara.




Grafik 6.1: Lognormalna raspodela fitovana na empirijskim podacima trajanja pregleda nezakazanih pacijenata

### 6.1.1 Postupak formiranja diskretnog modela optimizacije

Namera je bila formirati funkciju cilja čijim rešavanjem se dobija redosled termina koje treba ostaviti prazne kako bi se minimiziralo ukupno vreme čekanja zakazanih pacijenata. Kako rad lekara sa pacijentima traje 360 minuta i pacijenti se zakazuju u termine na svakih 10 minuta, zaključujemo da u jednom radnom danu ima 36 takvih termina. Neka $d_i$ predstavlja odlaganje (*delay*) pregleda pacijenta koji je zakazan za $i$-ti termin, $i = 1, 2, ...36$. Bitno je uočiti da je $d_i$ slučajna promenljiva, a ne konstanta. Uvodimo binarnu promenljivu $y_i$ koja ukoliko primi vrednost 1 označava da $i$-ti termin treba ostaviti praznim, a ukoliko primi vrednost 0, $i$-ti termin treba da se iskoristi za zakazivanje. Definišimo $\tilde{d_i}$ na sledeći način:

$$\tilde{d_i} = d_i - 10y_i, \text{za } i = 1, 2, ...36. \tag{6.1}$$

Ukoliko je za $i$-ti termin $y_i = 0$, slučajna promenljiva $\tilde{d_i}$ predstavlja nepromenjeno odlaganje $d_i$, dok u slučaju $y_i = 1$, $\tilde{d_i}$ predstavlja korigovano $i$-to odlaganje koje se smanjilo za dužinu trajanja jednog termina, odnosno za vrednost od 10 min. Očekivano odlaganje $d_i$ sada možemo definisati preko očekivanog korigovanog odlaganja pregleda pacijenta zakazanog za prethodni termin $\tilde{d_{i-1}}$:

$$E[d_1] = qE[T_3] \tag{6.2}$$

$$E[d_i] = E[\tilde{d_{i-1}}] + qE[T_3] + v(E[T_2] - 10), \ \ i = 2, 3, ...36, \tag{6.3}$$

gde izraz $qE[T_3]$ označava verovatnoću da se za vreme $(i-1)$-og termina pojavi nezakazani pacijent pomnoženu očekivanim trajanjem pregleda nezakazanog pacijenta, a član $v(E[T_2]-10)$ označava verovatnoću da se zakazani pacijent koji ima pregled u $(i-1)$-om terminu zadrži duže od 10 minuta pomnoženu sa očekivanim produženjem pregleda. Na realnim podacima sračunati su parametri $q = 0.44$ i $v = 0.25$, a iz fitovanih lognormalnih raspodela je $E[T_2] = 16$ i $E[T_3] = 8$, pa se izrazi (6.2) i (6.3) svode na

$$E[d_1] = 3.5$$

i

$$E[d_i] = E[\tilde{d_{i-1}}] + 5, \;\; i = 2, 3, ...36.$$

Neka $k$ predstavlja ukupan broj termina koje možemo ostaviti praznim. Konstantu $k$ dobijamo iz sledećeg izraza:

$$(36-k)E[T_{1,2}] + 6\lambda E[T_3] = 360.$$

Kako tokom radnog dana ima ukupno 36 raspoloživih termina od kojih $k$ treba ostaviti praznim, u prvom sabirku očekivano trajanje pregleda zakazanog pacijenta množimo sa brojem termina koje treba iskoristiti za zakazivanje. Obzirom da radni dan traje 6h i da je očekivani broj nezakazanih pacijenata po satu $\lambda$, drugi sabirak predstavlja ukupno očekivano vreme utrošeno na nezakazane pacijente u toku jedne smene lekara. Znamo da je $E[T_3] = 8$, pa je za $\lambda = 2.66$ rešenje ove jednačine $k = 7$.

Sada problem optimizacije ukupnog vremena čekanja zakazanih pacijenata možemo predstaviti sledećim problemom minimizacije:

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{36} E[\tilde{d_i}] \tag{6.4}$$

$$\text{s.t.} \;\; E[\tilde{d_i}] \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{36} y_i = 7, \;\; y_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, ..., 36$$

Kako iz (6.1) i (6.3) sledi

$$E[\tilde{d_1}] = E[d_1] - 10y_1$$

$$\begin{aligned} E[\tilde{d_2}] &= E[d_2] - 10y_2 \\ &= E[\tilde{d_1}] + (qE[T_3] + v(E[T_2] - 10)) - 10y_2 \\ &= E[d_1] - 10y_1 + (qE[T_3] + v(E[T_2] - 10)) - 10y_2 \\ &= E[d_1] + (qE[T_3] + v(E[T_2] - 10)) - 10(y_1 + y_2) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E[\tilde{d_3}] &= E[d_3] - 10y_3 \\
&= E[\tilde{d_2}] + (qE[T_3] + v(E[T_2] - 10)) - 10y_3 \\
&= E[d_1] - 10y_1 + (qE[T_3] + v(E[T_2] - 10)) - 10y_2 \\
&\quad + (qE[T_3] + v(E[T_2] - 10)) - 10y_3 \\
&= E[d_1] + 2(qE[T_3] + v(E[T_2] - 10)) - 10(y_1 + y_2 + y_3)
\end{aligned}
$$

$$\vdots$$

$$E[\tilde{d_i}] = E[d_1] + (i-1)(qE[T_3] + v(E[T_2] - 10)) - 10\sum_{l=1}^{i} y_l, \text{ za } i = 1, 2, ...36,$$

za proizvoljne promenljive $q$, $v$ i $n$, gde $n$ predstavlja ukupan broj termina tokom jednog radnog dana, važi

$$
\begin{aligned}
\text{Min } \sum_{i=1}^{n} E[\tilde{d_i}] &= \sum_{i=1}^{n} \left( E[d_1] + (i-1)(qE[T_3] + v(E[T_2] - 10)) - 10\sum_{l=1}^{i} y_l \right) \\
&= nE[d_1] + \frac{n(n-1)}{2}(qE[T_3] + v(E[T_2] - 10)) - 10\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{i} y_l \\
&= nE[d_1] + \frac{n(n-1)}{2}(qE[T_3] + v(E[T_2] - 10)) - 10\sum_{i=1}^{n}(n-(i-1))y_i,
\end{aligned}
$$

pa se posmatrani problem (6.4) može svesti na sledeći uopšteni model:

$$
\begin{gathered}
\text{Min } \frac{n(n-1)}{2}(qE[T_3] + v(E[T_2] - 10)) + nE[d_1] - 10\sum_{i=1}^{n}(n-(i-1))y_i \\
\text{s.t. } E[\tilde{d_i}] \geq 0 \\
\sum_{i=1}^{n} y_i = k, \ \ y_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, ..., n.
\end{gathered}
$$

U našem slučaju, ovaj problem prima oblik:

$$
\begin{gathered}
\text{Min } 3308 - 10\sum_{i=1}^{36}(36-(i-1))y_i \\
\text{s.t. } E[\tilde{d_i}] \geq 0 \\
\sum_{i=1}^{n} y_i = 7, \ \ y_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, ..., 36.
\end{gathered}
\tag{6.5}
$$

Primetimo da se uslov (6.5) ekvivalentno može zapisati kao

$$y_i \leq \frac{E[d_i]}{10}, \text{ za } i = 1, 2, ..36. \tag{6.6}$$

Dakle, treba da važi:

$$y_1 \leq \frac{E[d_1]}{10}$$

$$\begin{aligned} y_2 &\leq \frac{E[d_2]}{10} \\ &= \frac{E[\tilde{d_1}] + qE[T_3] + v(E[T_2] - 10)}{10} \\ &= \frac{E[d_1] - 10y_1 + qE[T_3] + v(E[T_2] - 10)}{10} \\ &= \frac{E[d_1] + qE[T_3] + v(E[T_2] - 10)}{10} - y_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_3 &\leq \frac{E[d_3]}{10} \\ &= \frac{E[\tilde{d_2}] + qE[T_3] + v(E[T_2] - 10)}{10} \\ &= \frac{E[d_2] - 10y_2 + qE[T_3] + v(E[T_2] - 10)}{10} \\ &= \frac{E[d_1] - 10y_1 + qE[T_3] + v(E[T_2] - 10) - 10y_2 + qE[T_3] + v(E[T_2] - 10)}{10} \\ &= \frac{E[d_1] + 2(qE[T_3] + v(E[T_2] - 10))}{10} - y_1 - y_2 \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$y_{36} \leq \frac{E[d_1] + 35(qE[T_3] + v(E[T_2] - 10))}{10} - \sum_{l=1}^{35} y_l,$$

odnosno, treba da bude zadovoljeno:

$$y_1 \leq \frac{E[d_1]}{10}$$

$$y_i \leq \frac{E[d_1] + (i-1)(qE[T_3] + v(E[T_2] - 10))}{10} - \sum_{l=1}^{i-1} y_l, \text{ za } i = 2, 3, ..., 36.$$

Neka je $A \in \mathbb{R}^{36,36}$ jedinična donja trougaona matrica, $B \in \mathbb{R}^{36,1}$ jedinični vektor kolone i $C \in \mathbb{R}^{36,1}$ vektor kolone koji u $i$-toj vrsti sadrži vrednost $(i-1)$. Dalje, neka je $h \in \mathbb{R}^{36,1}$ vektor kolone koji na $i$-toj poziciji ima vrednost $36 - (i-1)$ i sa $y$ označimo vektor kolone koji sadrži parametre $y_1, y_2, ..., y_{36}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 35 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} 36 \\ 35 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{36} \end{bmatrix}.$$

Sada izraz (6.6) možemo zapisati kao

$$Ay \leq 0.35B + 0.5C,$$

pa problem minimizacije ukupnog vremena čekanja zakazanih pacijenata možemo predstaviti u matričnom obliku kao problem binarnog celobrojnog programiranja:

$$\text{Min } 3308 - 10h^T y$$
$$\text{s.t. } Ay \leq 0.35B + 0.5C$$
$$y^T B = 7, \ \ y_i \in \{0, 1\},$$

što je ekvivalentno problemu maksimizacije datom sa:

$$\text{Max } h^T y$$
$$\text{s.t. } Ay \leq 0.35B + 0.5C$$
$$y^T B = 7, \ \ y_i \in \{0, 1\}.$$

Dakle, problem određivanja rasporeda termina koje treba ostaviti upražnjene kako bi se postiglo optimalno vreme čekanja zakazanih pacijenata se svodi na maksimizaciju linearne funkcije cilja sa linearnim ograničenjima tipa nejednakosti:

$$\text{Max } 36y_1 + 35y_2 + \ldots + 2y_{35} + y_{36}$$
$$\text{s.t. } y_1 \leq 0.35$$
$$y_1 + y_2 \leq 0.855$$
$$y_1 + y_2 + y_3 \leq 1.36$$
$$\vdots$$
$$y_1 + y_2 + \ldots + y_{36} \leq 18.025$$
$$\sum_{i=1}^{n} y_i = 7, \ \ y_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, ..., 36$$

Kako su koeficijenti u funkciji cilja pozitivni i nalaze se u opadajućem poredku, očito je da prazne termine treba ostavljati što ranije. Sa druge strane, uslovi dopustivosti zahtevaju da prva dva termina budu iskorišćena prilikom zakazivanja, tj. da važi $y_1 = y_2 = 0$, te zaključujemo da prvi sledeći termin treba ostaviti praznim, odnosno da je $y_3 = 1$. Ponavljanjem ovog rezona, dobijamo da je vektor $y^*$ dat sa

$$y^* = [0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$$

dopustivo rešenje gore opisanog problema. Preostaje da se pokaže da je ono i optimalno rešenje problema maksimizacije.

Pretpostavimo suprotno. Označimo sa $F$ funkciju cilja koju maksimiziramo: $F(x) = h^T x$. Neka je $z$ proizvoljan vektor iz dopustivog skupa koji je ujedno i rešenje problema maksimizacije tj. neka važi $F(z) > F(y^*)$.

Tada je

$$h^T z > h^T y^*,$$

pri čemu važi

$$h^T z = 36z_1 + 35z_2 + ... + z_{36} = \sum_{i=1}^{36} z_i(36 - (i-1)).$$

Označimo sa $z_j$ nenula komponente vektora $z$, a sa $y_l$ nenula komponente vektora $y^*$.

Kako maksimiziramo linearnu funkciju cilja sa pozitivnim koeficijentima, zbog uslova $z_i \in \{0,1\}$, za $i = 1, 2, ..., 36$, pri čemu mora biti zadovoljeno

$$\sum_{i=1}^{36} z_i \leq 7,$$

zaključujemo da vektor $z$, kao i vektor $y$ ima tačno 7 nenula komponenata.

Iz relacije

$$h^T z > h^T y^*$$

sledi da je

$$\sum_{k \in K} z_{j_k}(36 - (j_k - 1)) > \sum_{s \in S} y_{l_s}(36 - (l_s - 1)), \tag{6.7}$$

gde je $K$ skup indeksa nenula elemenata vektora $z$, a $S$ skup indeksa nenula komponenata vektora $y^*$, $S = \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$.

Kako je funkcija cilja linearna funkcija sa pozitivnim opadajućim koeficijentima, zaključujemo da indeksi nenula komponenata vektora treba da budu što manji.

Neka je $D = 0.35B + 0.505C$. Tada imamo da je

$$D = [0.35, 0.855, 1.36, 1.865, 2.37, \ldots, 18.025],$$

odnosno važi

$$d_i = 0.35 + 0.505(i-1), \;\; i = 1, 2, ..., 36,$$

pa iz uslova

$$Az \leq D \tag{6.8}$$

mora važiti $z_1 = z_2 = 0$, tj. da prva nenula komponenta vektora $z$ može biti tek $z_3$, kao što je i slučaj u vektoru $y^*$. S druge strane, u vektoru $D$ se sa povećanjem indeksa elementi povećavju za 0.505, te zbog uslova (6.8) i $z_i \in \{0,1\}$, za svako $i$, važi pravilo da se između svaka dva nenula elementa u vektoru $z$ mora nalaziti bar jedan elemenat sa vrednošću 0, osim u jednom paru komponenata datim sa $z_{31}$ i $z_{32}$ jer se u vektoru $D$ nalaze vrednosti $d_{31} = 15.5$ i $d_{32} = 16.005$, pa u ovom slučaju postoji mogućnost da se dva nenula elementa u vektoru $z$ nalaze jedan pored drugog. No, pošto je poslednji nenula element vektora $y^*$ dat sa $y_{15} = 1$, možemo posmatrati samo indekse u prvoj polovini vektora $z$ jer se nenula komponente u rešenju moraju nalaziti pre poslednjeg indeksa koji odgovara nenula elementu vektora $y^*$.

Iz (6.7) imamo

$$\sum_{k\in K} z_{j_k}(36-(j_k-1)) > \sum_{s\in S} y_{l_s}(36-(l_s-1))$$
$$\sum_{k\in K}(36z_{j_k} - z_{j_k}(j_k-1)) > \sum_{s\in S}(36y_{l_s} - y_{l_s}(l_s-1))$$
$$\sum_{k\in K} 36z_{j_k} - \sum_{k\in K} z_{j_k}(j_k-1)) > \sum_{s\in S} 36y_{l_s} - \sum_{s\in S} y_{l_s}(l_s-1))$$
$$36\sum_{k\in K} z_{j_k} - \sum_{k\in K} z_{j_k}(j_k-1)) > 36\sum_{s\in S} y_{l_s} - \sum_{s\in S} y_{l_s}(l_s-1))$$

Kako je $z_{j_k} = 1,\ \forall k$ i $y_{l_s} = 1,\ \forall s$, gornji izraz se svodi na

$$36\times 7 - \sum_{k\in K}(j_k-1) > 36\times 7 - \sum_{s\in S}(l_s-1)$$
$$-\sum_{k\in K}(j_k-1) > -\sum_{s\in S}(l_s-1)$$
$$\sum_{k\in K}(j_k-1) < \sum_{s\in S}(l_s-1),$$

što je ekvivalentno sa

$$\sum_{k\in K} j_k < \sum_{s\in S} l_s,$$

što nije moguće jer važi $j_{k_i} \geq l_{s_i}$, za $i = 1, 2, ...7$ zbog toga što je skup $S$ dat sa $S = \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$, pa vektor $y^*$ sadrži nenula komponente sa najmanjim mogućim indeksima.

Dakle, optimalno rešenje problema dato je sa:

$$y_i = \begin{cases} 1, & i \in \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\} \\ 0, & \text{u suprotnom} \end{cases}$$

Zaključujemo da termine sa indeksima $\{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ treba ostaviti praznim, dok ostale termine treba iskoristiti kako bi se minimiziralo ukupno vreme čekanja zakazanih pacijenata.

## 6.2 Simulacije

Nakon određivanja indeksa termina koje treba ostaviti prazne radi postizanja minimalnog čekanja zakazanih pacijenata, izvršen je niz simulacija radnih dana dva lekara za period od 3 meseca, pri čemu je korišćen optimalan raspored zakazivanja. Potom je upoređeno ukupno vreme čekanja dobijeno na simuliranim podacima sa ukupnim vremenom čekanja sračunatim na podacima prikupljenim za 2 lekara opšte prakse za poslednja 3 meseca.

Kako rad lekara sa pacijentima traje 6h bez pauze, simulacije su sprovedene tako da poslednji pacijent može biti primljen na pregled najkasnije u 360-om minutu posmatranog radnog dana. Dakle, dozvoljeno je da prekovremeni rad bude samo vreme trajanja jednog pregleda nakon 360-og minuta, dok poslednji zakazan pacijent ima termin u 350-om minutu. Pacijenti se zakazuju na svakih 10 minuta tokom radne smene, pri čemu je prethodno određenih 7 termina ostavljeno prazno kako bi se kompenzovalo vreme čekanja uzrokovano dolaskom nezakazanih pacijenata i zadržavanjem zakazanih pacijenata duže od 10 minuta. Pretpostavljeno je da nezakazani pacijenti imaju prednost u odnosu na zakazane, da zakazani pacijenti ne kasne na svoj termin, kao i da se svi zakazani pacijenti pojave na pregled (verovatnoća da se zakazan pacijent ne pojavi (*no show*) je fiksirana na 0). U realnim podacima je uočeno da 30% zakazanih pacijenata dođe na pregled i budu primljeni kod lekara pre zakazanog termina, pri čemu se neki pojave i do 3h sata ranije. Iz ovog razloga, u simulacijama je dopušteno da se zakazan pacijent pojavi do 15 minuta pre svog termina i da uđe na pregled čim se ispune uslovi da je lekar slobodan i da nema nijednog nezakazanog pacijenta u čekaonici. Raniji radovi koji se bave sličnom tematikom nagoveštavaju da pacijenti češće dolaze ranije nego što kasne na termin pregleda (Welch, Bailey [28], Blanco et al. [2], Fetter, Thompson [9], Cox et al. [8]), a u pojedinim radovima je 15 minuta dobijeno kao prosečno vreme ranijeg dolaska pacijenata. Tako je npr. u [6] za aproksimiranje netačnosti pacijenata u smislu ranijeg ili kasnijeg dolaska u odnosu na vreme zakazanog termina korišćena je normalna raspodela sa parametrima $m = -15$ i $\sigma = 25$, pri čemu je izbor raspodele i parametara zasnovan na tzv. *goodness-of-fit* testu sprovedenom na podacima prikupljenim za istraživanje.

Za određivanje parametara raspodela upotrebljenih za opisivanje zadržavanja pacijenata kod lekara i frekvencija nezakazanih pacijenata po satu, korišćeni su empirijski podaci prikupljeni za 2 lekara opšte prakse za period od 3 meseca. Vremena trajanja pregleda $T_1$, $T_2$, $T_3$, su aproksimirana lognormalnom raspodelom, a broj dolazaka nezakazanih pacijenata po satu je okarakterisan Poasonovim procesom sa parametrom $\lambda = 2.61$. U tabeli 6.2 date su numeričke karakteristike slučajnih promenljivih $T_1$, $T_2$, $T_3$:

| Slučajna promenljiva | Raspodela | Očekivanje | Disperzija |
|---|---|---|---|
| $T_1$ | $\mathcal{L}og\mathcal{N}\ (1.5161, 0.4904^2)$ | 5 | 7 |
| $T_2$ | $\mathcal{L}og\mathcal{N}\ (2.7427, 0.3366^2)$ | 16 | 32 |
| $T_3$ | $\mathcal{L}og\mathcal{N}\ (1.7372, 0.7183^2)$ | 7 | 36 |

Tabela 6.2: Numeričke karakteristike slučajnih promenljivih $T_1$, $T_2$, $T_3$

U skladu sa empirijskim podacima prikupljenim za 3 meseca, verovatnoća da zakazan pacijent ostane duže od 10min fiksirana je na $v = 0.25$.

### 6.2.1 Rezultati

Za simuliranje šestočasovnih radnih dana dva lekara opšte prakse za period od 3 meseca korišćen je program napisan u programskom paketu MATLAB. Definisana su 3 ulazna parametra: $l$, $s$ i $d$, gde $l$ predstavlja parametar Poasonovog procesa kojim se aproksimira broj nezakazanih pacijenata po satu, $s$ predstavlja broj sati tokom radnog dana koji simuliramo, a $d$ predstavlja broj dana za koji se vrši jedna simulacija. Na prikupljenim empirijskim podacima za dva lekara za period od 3 meseca zabeleženo je ukupno 112 radnih dana, te je cilj simuliranja bio formiranje 112 hipotetičkih lekarskih smena pri zakazivanju pacijenata po optimalnom rasporedu koje podrazumeva ostavljanje pojedinih termina dobijenih pomoću diskretnog modela optimizacije opisanog u odeljku 5.1.1 praznim. Za simuliranje jednog radnog dana korišćeni su parametri: $l = 2.61$, $s = 6$ i $d = 1$, gde je parametar $l$ određen na osnovu empirijskih podataka prikupljenih za 3 meseca. Vremena termina zakazanih pacijenata, odnosno dolazaka nezakazanih pacijenata u zdravstvenu instituciju, kao i vremena ulazaka pacijenata na pregled i dužine trajanja pregleda izražena su u minutima, pri čemu jedan radni dan ima 360 minuta.

Napisani program najpre generiše niz od 6 vrednosti koje odgovaraju Poasonovom procesu sa parametrom $l$. Članovi dobijenog niza predstavljaju broj nezakazanih pacijenata po satima u toku posmatranog radnog dana. Potom se na slučajan način nezakazanim pacijentima u odgovarajućem satu dodeljuje vreme dolaska u zdravstvenu instituciju. Nakon što su sva vremena dolazaka nezakazanih i termina zakazanih pacijenata generisana, pri čemu se vodi računa o tome koji termini se ostavljaju prazni, a koji se mogu iskoristiti za pregled, formira se matrica, $H$, koja u drugoj od ukupno 4 kolone sadrži ove vrednosti u rastućem poredku. U prvoj koloni matrice $H$, uz odgovarajuće vreme dolaska nezakazanog ili termina zakazanog pacijenta, nalazi se jedna od dve moguće vrednosti koja označava da li je posmatrani pacijent zakazan ili nezakazan. Treća i četvrta kolona se formiraju naknadno, pri čemu treća kolona matrice $H$ sadrži vreme kada je posmatrani pacijent ušao na pregled, dok se u četvrtoj koloni nalaze vremena zadržavanja pacijenata kod lekara. Takođe, na početku programa se formira binomna raspodela, $\mathcal{B}(n,p)$, sa parametrima $p = 1 - v = 0.75$ i $n = 1$, koja služi radi određivanja da li posmatrani zakazani pacijent spada u klasu onih koji se na pregledu zadrže do 10 minuta, ili spada u klasu zakazanih pacijenata koji se na pregledu zadrže duže od 10 minuta. Na ovaj način je obezbeđeno da u krajnjim rezultatima simulacija postoji 75% zakazanih pacijenata koji se zadrže do 10 minuta na pregledu (vrednost 1 iz binomne raspodele), odnosno 25% onih koji se zadrže duže od 10 minuta (vrednost 0 iz binomne raspodele), kao što je slučaj u realnim podacima.

Klasifikovanje pacijenata kao zakazanih ili nezakazanih omogućava programu da se u kasnijim koracima pridržava pravila o prednosti nezakazanih pacijenata u odnosu na zakazane u pogledu vremena pregleda. Dakle, ukoliko postoji nezakazan pacijent u čekaonici, on ulazi na pregled čim lekar bude slobodan, dok zakazani pacijent mora da čeka. Za početak, program popunjava prvu vrstu matrice $H$ u skladu sa prethodno objašnjenim pravilom, pri čemu se četvrto mesto u posmatranoj vrsti (elemenat $H(1,4)$) popunjava na sledeći način:

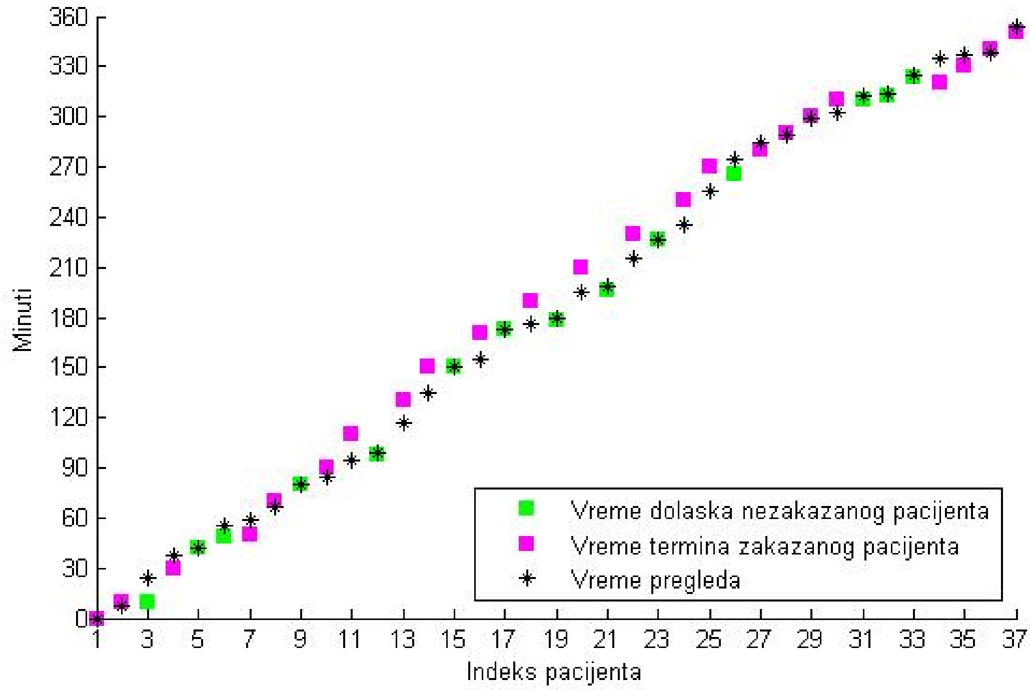
i) Ukoliko je posmatrani pacijent tipa „zakazan", na slučajan način se bira element iz prethodno definisane binomne raspodele. Ukoliko je izabrana vrednost 1, na četvrto mesto posmatrane vrste se stavlja element koji je na slučajan način određen iz lognormalne raspodele sa parametrima koji odgovaraju slučajnoj promenljivoj $T_1$ koja predstavlja dužinu trajanja pregleda zakazanog pacijenta koji se zadrži do 10 minuta na pregledu, $\mathcal{L}og\mathcal{N}\left(1.5161, 0.4904^2\right)$. Ukoliko se pak iz binomne raspodele dobije vrednost 0, četvrto mesto posmatrane vrste se popunjava vrednošću dobijenom na slučajan način iz lognormalne raspodele sa parametrima koji odgovaraju slučajnoj promenljivoj $T_2$ koja predstavlja dužinu trajanja pregleda zakazanog pacijenta koji se zadrži duže od 10 minuta na pregledu, $\mathcal{L}og\mathcal{N}\left(2.7427, 0.3366^2\right)$

ii) Ukoliko je posmatrani pacijent tipa „nezakazan", na četvrto mesto posmatrane vrste se stavlja element koji je na slučajan način određen iz lognormalne raspodele sa parametrima koji odgovaraju slučajnoj promenljivoj $T_3$ koja predstavlja dužinu trajanja pregleda nezakazanog pacijenta, $\mathcal{L}og\mathcal{N}\left(1.7372, 0.7183^2\right)$

Pregled parametara korišćenih lognormalnih raspodela nalazi se u tabeli 6.2.

Nakon popunjene prve vrste, ostale vrste matrice $H$ se, koristeći *for* petlju, popunjavaju analogno pri čemu je dozvoljen do 15 minuta raniji ulazak zakazanih pacijenata, a treći element posmatrane vrste koji označava vreme kada je pacijent ušao na pregled se dobija kao zbir trećeg i četvrtog elementa prethodne vrste koji predstavljaju vreme ulaska i vreme zadržavanja kod lekara prethodnog pacijenata. Pritom, ukoliko dođe do situacije da nezakazani pacijent treba da uđe na pregled pre zakazanog, a vreme dolaska nezakazanog pacijenta u zdravstvenu instituciju se na vremenskoj osi nalazi nakon vremena termina zakazanog pacijenta, program izvrši zamenu dve odgovarajuće vrste i potom po rastućem poredku poređa vrste sa indeksima većim od posmatranih kako se ne bi narušio dalji hronološki red pacijenata. Do ovakvih situacija dolazi ukoliko je lekar u trenutku kada zakazani pacijent ima termin zauzet pregledom prethodnog pacijenta, a pre završetka pregleda se pojavi nezakazan pacijent. Tada zbog pravila prednosti nezakazanih pacijenata u odnosu na zakazane, iako je zakazan pacijent stigao prvi, primoran je da čeka i da prednost nezakazanom pacijentu.

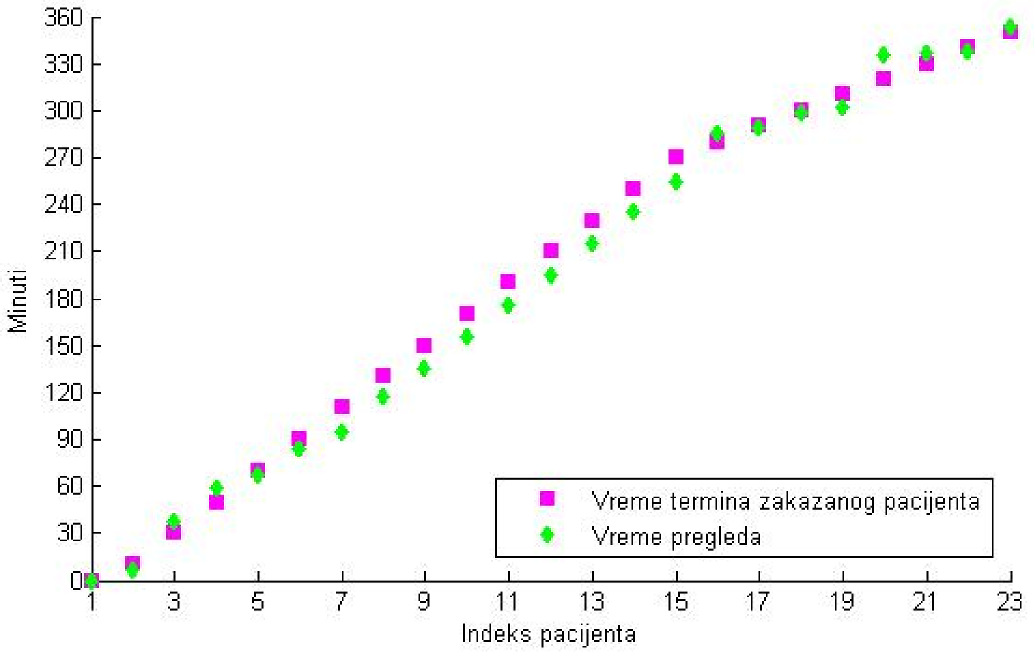
Izvršeno je ukupno 112 replikacija pri čemu jedna replikacija predstavlja jedan radni dan. Primer jednog simuliranog radnog dana dat je na grafiku 6.2.




Grafik 6.2: Grafički prikaz jedne simulacije

U posmatranoj simulaciji bilo je ukupno 37 pacijenata od čega je 23 pacijenta imalo unapred zakazani termin, dok se 14 pacijenata na pregled pojavilo nezakazano. Na horizontalnoj osi prikazan je indeks pacijenta, a na vertikalnoj osi dato je vreme u toku radnog dana izraženo u minutima. Pritom, ljubičastom bojom označeno je vreme termina zakazanog pacijenta, dok je zelenom bojom obeleženo vreme dolaska nezakazanog pacijenta u zdravstvenu instituciju. Crnim zvezdicama označeno je vreme ulaska posmatranog pacijenta na pregled. Pravilo prednosti nezakaznih pacijenata u odnosu na zakazane jasno je prikazano kod pacijenata sa indeksima 6 i 7. Pacijent sa indeksom 7 je imao zakazan termin u 50-om minutu radnog dana, dok se pacijent sa indeksom 6 pojavio u zdravstvenu instituciju bez prethodne najave samo minut ranije, u 49-om minutu. Kako pacijent sa indeksom 6 spada u kategoriju nezakazanih pacijenata, a u trenutku njegovog dolaska je kao i za vreme zakazanog termina pacijenta sa indeksom 7 lekar bio zauzet prethodnim pregledom (pacijent sa indeksom 5), na grafiku se vidi da je nezakazan pacijent imao prednost u odnosu na zakazanog, te je na pregled ušao u 55-om minutu, dok je pacijent sa indeksom 7 na pregled ušao u 59-om minutu.

Kao što je ranije navedeno, prilikom simuliranja radnih dana bio je dozvoljen do 15 minuta raniji ulazak zakazanih pacijenata u odnosu na vreme termina, što je rezultiralo da u simuliranim podacima čak 71% zakazanih pacijenata bude primljeno kod lekara pre zakazanog pregleda. Grafički prikaz vremena ulazaka zakazanih pacijenata u odnosu na zakazan termin u jednoj od izvršenih simulacija dat je na grafiku 6.3. U posmatranom hipotetičkom radnom danu bilo je ukupno 23 zakazana i 14 nezakazanih pacijenata. Radi lakšeg uvida u razliku između vremena termina i vremena pregleda zakazanih pacijenata, na grafiku nisu prikazana vremena dolazaka i pregleda nezakazanih pacijenata. Na horizontalnoj osi prikazan je indeks zakazanog pacijenta, dok je na vertikalnoj osi dato vreme u toku radnog dana izraženo u minutima.




Grafik 6.3: Prikaz vremena termina i ulazaka na pregled zakazanih pacijenata

U posmatranoj simulaciji je od 23 zakazana pacijenta 16 ušlo na pregled pre svog termina, što predstavlja udeo od 70%.

S druge strane, na osnovu prikupljenih empirijskih podataka registrovano je da 30% zakazanih pacijenata kod lekara opšte prakse uđe i do 3 sata pre zakazanog termina. Ukupno vreme ranijeg ulaska pacijenata na simuliranim podacima iznosi 21224 minuta, dok na empirijskim podacima ono iznosi 19663 minuta. Razlika između zabeleženih vrednosti ukupnog vremena ranijeg ulaska pacijenata iznosi 7%, te smatramo da su ukupna vremena čekanja zakazanih pacijenata dobijena na simuliranim i empirijskim podacima uporediva.

Na podacima prikupljenim za dva lekara opšte prakse za period od 3 meseca, sračunato ukupno vreme čekanja zakazanih pacijenata iznosi 44587 minuta. Na simuliranim podacima, pri čemu je korišćen model koji podrazumeva ostavljanje termina određenih pomoću diskretnog modela oprimizacije opisanog u odeljku 5.1.1 praznim, dobijeno je ukupno vreme čekanja zakazanih pacijenata od 8685 minuta, što je za oko 5 puta manje nego u slučaju kada se ne primenljuje zakazivanje pacijenata po optimalnom rasporedu.

Ukoliko posmatramo prosečno vreme čekanja po zakazanom pacijentu, rezultati ukazuju na to da se vreme čekanja može smanjiti i do 7 puta. Precizinje, kako je na empirijskim podacima u posmatranom periodu registrovano 2151 zakazanih pacijenata, prosečno vreme čekanja zakazanog pacijenta uslovljeno nezakazanim pacijentima i zakazanim pacijentima koji se zadrže duže od 10 minuta na pregledu iznosi 21 minut. Na simuliranim podacima, dobijeno je ukupno vreme čekanja zakazanih pacijenata od 8685 minuta, odnosno, kako je registrovano 2586 zakazanih pacijenata, prosečno vreme čekanja po zakazanom pacijentu iznosi 3 minuta, što je čak 7 puta manje nego na realnim podacima.

Na osnovu dobijenih rezultata, zaključujemo da se sistem zakazivanja pacijenata može značajno poboljšati korišćenjem matematičkih modela za određivanje rasporeda termina koje treba zanemariti prilikom zakazivanja. Štaviše, primenjujući pravilo o ostavljanju pojedinih termina određenih pomoću optimizacionog modela praznim, pokazano je da se dobrom aproksimacijom empirijskih podataka i poznavanjem osobina pojedinih grupa pacijenata vreme čekanja zakazanih pacijenata može znatno smanjiti.

# Zaključak

Rezultati ovog istraživanja ukazuju na mogućnost poboljšanja sistema zakazivanja pacijenata razvijanjem matematičkih modela koji definišu pravilo o ostavljanju pojedinih termina praznim. Preciznije, u radu je opisan postupak definisanja problema optimizacije ukupnog vremena čekanja zakazanih pacijenata čijim rešavanjem se dolazi do rasporeda termina koje treba zanemariti prilikom zakazivanja. Simulacijama je potvrđeno da ovakav pristup minimizira vreme čekanja zakazanih pacijenata u odnosu na vreme čekanja ostvareno bez primene zakazivanja pacijenata po optimalnom rasporedu. Štaviše, rezultati nagoveštavaju da se ukupno vreme čekanja zakazanih pacijenata može smanjiti i do 5 puta.

Iako prikazan model optimizacije ima ograničenja poput zanemarivanja zakazanih pacijenata koji se ne pojave na termin i neuvrštavanja prekovremenog rada, kao i praznog vremena (*idle time*) tokom rada lekara u funkciju cilja, smatramo da ovo istraživanje daje osnove za dalje razvijanje modela optimizacije u oblasti minimizacije vremena čekanja pacijenata.

Bitno je napomenuti da se predstavljeni model može uopštiti na bilo koji sistem u kojem postoji jedan pružalac usluga i mušterije koje se dele na one sa zakazanim terminom i one koje nisu prethodno najavljene.

# Literatura

[1] Bailey, Norman (1952), *A study of queues and appointment systems in hospital outpatient departments with special reference to waiting times*, Journal of the Royal Statistical Society, series B (Methodological), Vol. 14, No. 2, pages 185-199

[2] Blanco, White, Pike (1964), *Appointment Systems in Out-Patients' Clinics and the Effect of Patients' Unpunctuality*, Medical Care, Vol. 2, No. 3, pages 133-141 + 144-145

[3] Bosch, Dietz, (2000), *Minimizing expected waiting in a medical appointment system*, IIE Transactions, Vol. 32, Iss. 9, pp. 841-848

[4] Cayirli, Gunes (2013), *Outpatient appointment scheduling in presence of seasonal walk-ins*, Journal of the Operational Research Society, Vol. 65, Iss. 4, pages 512-531

[5] Cayirli, Veral, Rosen (2006), *Designing appointment scheduling systems for ambulatory care services*, Health Care Management Science, Vol. 9, Iss. 1, pages 47-58

[6] Cayirli, Veral, Rosen (2008), *Assessment of Patient Classification in Appointment System Design*, Production and Operations Management, Vol. 17, No. 3, pages 338-353

[7] Chiang, Sutivong, Boyd (2002), *Efficient Nonlinear Optimization of Queueing Systems*, IEEE Global Telecommunications Conference (GLOBECOMM), Vol. 3, pages 2425-2429

[8] Cox, Birchall, Wong (1985), *Optimising the queuing system for an ear, nose and throat outpatient clinic*, Journal of Applied Statistics, Vol. 12, No. 2, pages 113-126

[9] Fetter, Thompson (1966), *Patients' Waiting Time and Doctors' Idle time in the Outpatient Setting, Health Services Research*, Vol. 1, Iss. 2, pages 66-90

[10] Giaquinta, Modica (2012), *Mathematical Analysis, Foundations and Advanced Techniques for Functions of Several Variables*, Springer Science+Business Media, LLC

[11] Green, Savin, (2008), *Reducing Delays for Medical Appointments: A Queuing Approach*, Operations Research, Vol. 56, No. 6, pp. 1526-1538

[12] Gupta, Denton (2008), *Appointment scheduling in health care: Challenges and Opportunities*, IIE Transactions, Vol. 40, pages 800-819

[13] Hillier, Lieberman (2001), *Introduction to Operations Research*, McGraw Hill: Boston

[14] Ho, Lau (1992), *Minimizing total cost in scheduling outpatient appointments*, Management Sciences, Vol. 38, No. 12, pages 1750-1764

[15] Kaandorp, Koole (2007), *Optimal outpatient appointment scheduling*, Health Care Management Science, Vol. 10, Iss. 3, pages 217-229

[16] Kembe, Onah, Iorkegh (2012), *A Study of Waiting And Service Costs of A Multi-Server Queuing Model In A Specialist Hospital*, International Journal of Scientific & Technology Research, Vol. 1, Iss. 8, pages 19-23

[17] Klassen, Rohleder (1996), *Scheduling outpatient appointments in a dynamic environment*, Journal of Operations Management, Vol. 14, Iss. 2, pages 83-101

[18] Kolisch, Sickinger (2008), *Providing radiology health care services to stochastic demand or different customer classes*, OR Spectrum, Vol. 30, Iss. 2, pages 375-395

[19] Krčevinac, Čangalović, Kovačević-Vujčić, Martić, Vujošević (2006), *Operaciona istraživanja 1*, Fakultet organizacionih nauka: Beograd

[20] LaGanga, Lawrence (2007), *Clinic Overbooking to Improve Patient Access and Increase Provider Productivity*, Decision Sciences, Vol. 38, No. 2, pages 251-276

[21] Law, Kelton (2000), *Simulation Modeling and Analysis*, McGraw-Hill: New York

[22] Lefebvre, Mario (2007), *Applied stochastic processes*, Springer Science+Business Media, LLC

[23] Lu, Tian, Gian (2012), *Medical Equipment Utility Analysis based on Queuing Theory*, Journal of Computers, Vol. 7, No. 9, pages 2232-2239

[24] O'Keefe, Robert (1985), *Investigating outpatient departments: Implementable policies and qualitative approaches*, Journal of the Operational Research Society, Vol. 36, Iss. 8, pages 705-712

[25] Rajter-Ćirić, Danijela (2009), *Verovatnoća*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu

[26] Robinson, Chen (2003), *Scheduling doctors' appointments: Optimal and empirically-based heuristic policies*, IIE Transactions, Vol. 35, pages 295-307

[27] Serfozo, Richard (2009), *Basics of applied stochastic processes*, Springer-Verlag: Berlin

[28] Welch, Bailey (1952), *Appointment systems in hospital outpatient departments*, Lancet (May 31), Vol. 259, Iss. 6718 (originally published as Volume 1, Issue 6718), pages 1105-1108

# Biografija

Višnja Stefanović je rođena 15.07.1989. godine u Novom Sadu. Završila je prirodno-matematički smer Gimnazije „Jovan Jovanović Zmaj” u Novom Sadu 2008. godine sa odličnim uspehom. Iste godine upisuje Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, na smeru za primenjenu matematiku, modul- matematika finansija. Osnovne studije završava 2012. godine i upisuje master studije na istom fakultetu i u istoj oblasti na kojima ostvaruje prosek 9.50.

Uporedo sa studijama završava OMŠ „Isidor Bajić”, na odseku za solo pevanje. Kao članica hora Gimnazije „Jovan Jovanović Zmaj”, a kasnije Mešovitog pevačkog društva „1838”, učestvovala je na brojnim koncertima i takmičenjima u zemlji i inostranstvu (Austrija, Italija, Rusija).

2010. godine je odabrana kao jedna od 60 najboljih studenata za dvonedeljni program „Dobrodošli u Nemačku”, podržanom od strane Evropskog pokreta u Srbiji i Bavarskog univerziteta za srednju, istočnu i južnu Evropu (BAYHOST). U okviru TEMPUS projekta „Visuality and Mathematics”, provela je mesec dana u Egeru, Mađarska.

2014. godine postaje stipendistkinja Fonda „Dr. Zoran Đinđić” i polaznica programa „Internship Programme of the German Business”, podržanog od strane Ost-Ausschuss der Deutschen Wirtschaft, GIZ i BMZ, te dobija praksu u Hanoveru, Nemačka, koju će obavljati u reosiguravajućoj kompaniji Hannover Re počev od 1. oktobra, 2014. godine.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
**RBR**

Identifikacioni broj:
**IBR**

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
**TD**

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
**TZ**

Vrsta rada: Master rad
**VR**

Autor: Višnja Stefanović
**AU**

Mentor: prof. dr Nataša Krejić
**MN**

Naslov rada: Optimizacija redova čekanja
**NR**

Jezik publikacije: srpski (latinica)
**JP**

Jezik izvoda: s / e
**JI**

Zemlja publikovanja: Srbija
**ZP**

Uže geografsko područje: Vojvodina
**UGP**

Godina: 2014.
**GO**

Izdavač: Autorski reprint
**IZ**

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno–matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4

**MA**

Fizički opis rada: (6, 59, 28, 2, 0, 6, 0)
**FO**

Naučna oblast: Matematika
**NO**

Naučna disciplina: Numerička optimizacija
**ND**

Predmetna odrednica / Ključne reči: optimizacija, redovi čekanja, stohastički procesi, simulacije
**PO**

**UDK**

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno–matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
**ČU**

Važna napomena:
**VN**

Izvod: Ovaj rad se bavi problemom optimizacije redova čekanja. U literaturi su poznati mnogi matematički pristupi ovom problemu, a među pristupima se najviše izdvajaja metod optimizacije koristeći simulacije koji spada u stohastičke optimizacione metode. U prvom delu rada predstavljene su osnovne definicije i raspodele korišćene u istraživanju, kao i poznati modeli u literaturi, a u drugom delu opisan je konkretan problem optimizacije redova čekanja na podacima prikupljenim u Domu Zdravlja, Novi Sad, u odeljenju Veternik. Posmatrane su dve glavne grupe pacijenata: pacijenti koji imaju zakazan termin kod lekara i pacijenti koji se nenajavljeno pojave na pregled. Cilj rada je minimiziranje ukupnog vremena čekanja zakazanih pacijenata. U radu je opisan postupak definisanja funkcije cilja čijim rešavanjem se dolazi do rasporeda termina koje treba ostaviti upražnjene. Simulacijama je potvrđeno da ovakav pristup minimizira vreme čekanja zakazanih pacijenata u odnosu na vreme čekanja ostvareno bez primene zakazivanja pacijenata po optimalnom rasporedu.
**IZ**

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 13.03.2014.
**DP**

Datum odbrane: Septembar 2014.
**DO**

Članovi komisije:
**KO**

| | |
|---|---|
| Predsednik: | dr Zorana Lužanin, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu |
| Član: | dr Nataša Krejić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor |
| Član: | dr Dora Seleši, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu |

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORD DOCUMENTATION

Accession number:
**ANO**

Identification number:
**INO**

Document type: Monograph documentation
**DT**

Type of record: Textual printed material
**TR**

Contents Code: Master's thesis
**CC**

Author: Višnja Stefanović
**AU**

Mentor: Nataša Krejić, Ph.D.
**MN**

Title: Optimization of waiting queues
**TI**

Language of text: Serbian
**LT**

Language of abstract: en / s
**LA**

Country of publication: Serbia
**CP**

Locality of publication: Vojvodina
**LP**

Publication year: 2014.
**PY**

Publisher: Author's reprint
**PU**

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4

**PP**

Physical description: (6, 59, 28, 2, 0, 6, 0)

**PD**

Scientific field: Mathematics

**SF**

Scientific discipline: Numerical Optimization

**SD**

Subject / Key words: optimization, waiting queues, stochastic processes, simulations

**SKW**

**UC:**

Holding data: Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

**HD**

Note:

**N**

Abstract: This work investigates the problem of waiting queues optimization. Many mathematical models dealing with this kind of problem are present in literature. Among them, the simulation optimization which falls under stochastic optimization methods stands out the most. In the first part of this Master's thesis we present the basic definitions and distributions used in the research, as well as the models recognized in literature. In the second part we describe a particular problem of waiting queues optimization modeled on data collected in a primary care medical institution of Novi Sad, department of Veternik, Serbia. Two patient groups were distinguished: patients who have a scheduled appointment and patients without an appointment (walk-ins). Minimizing the total waiting time of patients with scheduled appointments was in the focus of this study. The process of defining an objective function which, when solved, leads to positions of appointments that need to be left unscheduled in order to minimize the total waiting time of patients was described. Simulations were conducted in order to confirm that with the obtained approach the total waiting time of patients with scheduled appointments is minimized in regard to the total waiting time realized in a system that doesn't use optimal appointment scheduling.

**AB**

Accepted by the Scientific Board on: 13.03.2014.

**ASB**

Defended: September 2014.

**DE**

Thesis defend board:

**DB**

| | |
|---|---|
| President: | Zorana Lužanin, Ph.D., full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad |
| Member: | Nataša Krejić, Ph.D., full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, supervisor |
| Member: | Dora Seleši, Ph.D., associate professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad |