UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Tinde Ereg

Problemi transporta i analiza osetljivosti

-master rad-

Novi Sad, 2013.

Sadržaj

1. Uvod

Operaciona istraživanja predstavljaju skup modela, kvantitativnih metoda i algoritama, pomoću kojih se određuje najpovoljnije rešenje složenih problema iz svih oblasti delovanja ljudi. Naziv potiče od istraživanja operacija u organizacionim sistemima sa ciljem njihove optimizacije. Operaciona istraživanja su se najpre razvila u vojne svrhe, da bi kasnije bila uočena njihova upotrebljivost u upravljanju poslovnim sistemima.

Osnovni zadaci operacionih istraživanja, kao primenjene i eksperimentalne nauke, su opis ponašanja sistema ili procesa, analiza (simulacija) ponašanja sistema ili procesa u izmenjenim uslovima i predviđanje tog ponašanja u budućnosti. U procesima opisa, analize i predviđanja teorije operacionih istraživanja koriste se mnogobrojne matematičke discipline kao što su: matematička analiza, teorija verovatnoće, teorija igara, statistička teorija, matematička logika, linearno, nelinearno i dinamičko programiranje, teorija masovnog opsluživanja, heurističko-matematičko programiranje i druge.

Osnovna karakteristika operacionih istraživanja je razvijanje matematičkog modela sistema ili procesa koji se posmatra, na osnovu kojeg će biti moguće predviđanje i upoređivanje posledica različitih varijanti u procesu odlučivanja. U skladu s tim, suština metoda operacionih istraživanja jeste nastojanje da se vrednost postavljenog cilja optimizuje i time na racionalnoj osnovi pripremi konačna odluka. Iako na ciljeve svakog poslovnog sistema deluje veliki broj uticajnih faktora, svi oni se mogu podeliti u dve grupe:

- podaci - kao prirodne ili institucionalno date veličine, koje se mere ili opažaju i na koje se ne može uticati
- parametri odluke - kao veličine koje se mogu svesno menjati unutar datih granica (same granice su veličine koje pripadaju klasi podataka i ne mogu se menjati).

I dok su podaci i parametri odluke veličine međusobno povezane sistemom funkcija ograničenja, koje utiču na optimalnu vrednost postavljenog cilja, veličine cilja i relevantnih faktora međusobno su povezane funkcijom cilja. Optimalno rešenje predstavlja ona kombinacija uslova koja daje željenu ekstremnu vrednost funkcije cilja, prema usvojenom kriterijumu optimizacije (minimumu – ako funkcija cilja predstavlja neki vid troškova, odnosno maksimumu – ako funkcija cilja predstavlja neki vid dobiti).

1.1. Linearno programiranje

Problem linearnog programiranja pripada problemima matematičkog programiranja koji se sastoje u traženju minimalne ili maksimalne vrednosti funkcije na nekom određenom skupu.

Problem minimizacije (maksimizacije) može se zapisati u obliku:

$$F(u) \rightarrow min\,(max)$$
$$u \in U,$$

gde je funkcija cilja $F(u)$ definisana na skupu U. Posmatra se skup U koji je podskup realnog n-dimenzionalnog prostora $U \in \mathbb{R}^n$. Svaki vektor $u \in U$ se naziva dopustivo rešenje problema, a skup U se naziva dopustiv skup. Vektor $u^* \in U$ za koji funkcija cilja dostiže svoj minimum ili maksimum naziva se optimalno rešenje. Ako je funkcija cilja $F(u)$ linearna i ako je skup U definisan linearnim ograničenjima, onda je reč o problemu linearnog programiranja. U ostalim slučajevima reč je o nelinearnom programiranju.

Od sad nadalje posmatraćemo problem minimizacije. Problem maksimizacije se može svesti na problem minimizacije množenjem funkcije cilja sa (-1).

Najčešći oblici problema linearnog programiranja su:

1. Opšti oblik

$$F(u) = \langle c,u\rangle \rightarrow min, \quad c,u \in \mathbb{R}^n$$
$$u \in U = \{u \in \mathbb{R}^n, Au \le b, A'u = b', u \ge 0, A \in \mathbb{R}^{m,n}, b \in \mathbb{R}^m, A' \in \mathbb{R}^{p,n}, b' \in \mathbb{R}^p\} \quad (1)$$

2. Standardni oblik

$$F(u) = \langle c,u\rangle \rightarrow min, \quad c,u \in \mathbb{R}^n$$
$$u \in U = \{ u \in \mathbb{R}^n, Au \le b, u \ge 0, \quad A \in \mathbb{R}^{m,n}, b \in \mathbb{R}^m \} \quad (2)$$

3. Kanonički oblik

$$F(u) = \langle c,u\rangle \rightarrow min, \quad c,u \in \mathbb{R}^n$$
$$u \in U = \{ u \in \mathbb{R}^n, Au = b, u \ge 0, \quad A \in \mathbb{R}^{m,n}, b \in \mathbb{R}^m \} \quad (3)$$

pri čemu je $u = (u_1, \dots, u_n)^T$, $c = (c_1, \dots, c_n)^T$, a_{ij} su elementi matrice A, a_{ij}' su elementi matrice A', $b = (b_1, \dots, b_m)^T$, $b' = (b_1', \dots, b_p')^T$.

Teorema 1.1.1. (o rešivosti problema linearnog programiranja) Problem linearnog programiranja nema rešenje ako je dopustiv skup prazan ili ako funkcija cilja nije ograničena sa donje strane, u protivnom problem linearnog programiranja ima rešenje i to rešenje je ili jedinstveno ili ih ima beskonačno mnogo.

Definicija 1.1.1. Dat je problem $F(u) = \langle c,u\rangle \rightarrow min, \quad u \in U = \{ u \in \mathbb{R}^n,\ u \ge 0,\ Au = b\}$, gde je $A \ne 0$, $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $rang(A) = r = m$, $b \in \mathbb{R}^m$. v je bazično rešenje problema ako postoji r linearno nezavisnih vektora kolona matrice A, $(A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_r})$ tako da važi $v_{j_1}A_{j_1} + v_{j_2}A_{j_2} + \dots + v_{j_r}A_{j_r} = b$.

Definicija 1.1.2. Sistem vektora $A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_r}$ predstavlja bazu baznog rešenja v, odgovarajuće komponente $v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_r}$ su bazične komponente vektora v, a ostale komponente su nebazične i jednake su nuli.

Definicija 1.1.3. Ako su sve bazične komponente vektora v pozitivne, tada je v nedegenerisano bazično rešenje. Ako je neka bazična komponenta nula, onda je v degenerisano bazično rešenje.

Teorema 1.1.2. v je vrh skupa U problema (3) ako i samo ako je v bazično rešenje problema (3).

Teorema 1.1.3. Ako funkcija cilja problema (3) dostiže svoj minimum u tački $u^* \in U$, tada postoji vrh v skupa U takav da je $F(v) = F(u^*)$.

Teorema 1.1.4. Ako funkcija cilja problema (3) dostiže minimum u tačkama $u_1^*, u_2^*, \dots, u_k^* \in U$, tada ona dostiže minimum i u tački x koja predstavlja konveksnu kombinaciju tačaka $u_1^*, u_2^*, \dots, u_k^*$.

Teorema 1.1.5. Neka je u problemu (3) $rang(A) = r = m$ i neka skup U nema degenerisanih vrhova. Neka je v vrh skupa U sa bazom $A_1, A_2, \dots, A_r$. Neka je matrica baze $B = [A_1, A_2, \dots, A_r]$ $(rang(B) = r)$ i neka su $v_1, v_2, \dots, v_r$ bazične komponente vrha v. Definišemo veličine Δ_j koje se nazivaju ocene vrha v na sledeći način:

$$\Delta_j = \langle \bar{c}, B^{-1}A_j \rangle - c_j,$$

gde je $B^{-1}A_j = (\gamma_{1j}, \gamma_{2j}, \dots, \gamma_{rj})^T, j = r+1, \dots, n$ i $\bar{c} = (c_1, c_2, \dots, c_r)^T,\ j = 1,2, \dots, n$.

Tada je $\Delta_j = 0$ za $j = 1, \dots, r$. Ako je $\Delta_j \le 0$ za $j = r+1, \dots, n$, tada je vrh v optimalno rešenje problema (3). Ako je osim toga $\Delta_j < 0$ za $j = r+1, \dots, n$, tada je vrh v jedinstveno optimalno rešenje problema, a ako je $\Delta_j \le 0$ za $j = r+1, \dots, n$ i postoji neko $j \in \{r+1, \dots, n\}$ tako da je $\Delta_j = 0$, tada problem (3) ima beskonačno mnogo rešenja. Ako postoji $k \in \{r+1, \dots, n\}$ tako da je $\Delta_k > 0$ tada v nije optimalno rešenje problema (3). Ako postoji $k \in \{r+1, \dots, n\}$ tako da je $\Delta_k > 0$, a $\gamma_{ik} \le 0$ za $i = 1, \dots, r$, tada problem (3) nema rešenja jer funkcija cilja nije ograničena sa donje strane, tj. $F(u) \to -\infty$.

1.1.1. Simpleks metoda

George Dantzig je 1947. godine razvio efikasan metod, simpleks algoritam za rešavanje problema linearnog programiranja. Ovaj algoritam je korišćen za rešavanje problema u različitim industrijskim granama kao što su bankarstvo, obrazovanje, šumarstvo, naftna industrija, transport, itd.

Simpleks metoda je opšta metoda za rešavanje problema linearnog programiranja. Simpleks metoda spada u iterativne metode. Ona polazi od nekog dopustivog rešenja pa ga u nizu koraka poboljšava sve dok ne dođe do najboljeg, tj. optimalnog rešenja. Simpleks metoda je konačna iterativna metoda jer se u konačnom broju iteracija dolazi do optimalnog rešenja. Ovde će biti navedena simpleks metoda za probleme bez degeneracije.

Algoritam koji pretpostavlja poznavanje jednog vrha (ekstremne tačke, baznog rešenja), zove se sekundarni algoritam, a algoritam koji nalazi početni vrh za sekundarni algoritam ili konstatuje da je skup ograničenja prazan, tj. da problem nema rešenja naziva se primarni algoritam.

Neka je dat problem linearnog programiranja bez degeneracije oblika

$$F(u) = \langle c, u \rangle \to min, \quad c, u \in \mathbb{R}^n$$

$$u \in U = \{u \in \mathbb{R}^n,\ Au = b,\ u \geq 0\},\ b > 0, \tag{4}$$

gde je $b = (b_1, \dots, b_r)^T$, a

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \gamma_{1,r+1} & \gamma_{1,r+2} & \cdots & \gamma_{1,n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \gamma_{2,r+1} & \gamma_{2,r+2} & \cdots & \gamma_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \gamma_{r,r+1} & \gamma_{r,r+2} & \dots & \gamma_{r,n} \end{bmatrix},$$

matrica tipa $r \times n$, $rang(A) = r$. Zbog pretpostavke da je $b > 0$, tačka $v = (b_1, \dots, b_r, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ je nedegenerisan vrh skupa $U = \{\, u \in \mathbb{R}^n,\ Au = b,\ u \geq 0\}$. Jedinični vektori su baza vrha v, a proizvoljna tačka $u \in U$ ima bazične komponente $u_1, u_2, \dots, u_r$ i nebazične komponente $u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_n$.

Sekundarni simpleks algoritam

Korak 1. Formira se simpleks tabela koja odgovara vrhu v

	u_{r+1}	u_{r+2}	$\cdots$	u_k	$\cdots$	u_n	
u_1	$\gamma_{1,r+1}$	$\gamma_{1,r+2}$	$\cdots$	$\gamma_{1,k}$	$\cdots$	$\gamma_{1,n}$	v_1
u_2	$\gamma_{2,r+1}$	$\gamma_{2,r+2}$	$\cdots$	$\gamma_{2,k}$	$\cdots$	$\gamma_{2,n}$	v_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
u_s	$\gamma_{s,r+1}$	$\gamma_{s,r+2}$	$\cdots$	$\gamma_{s,k}$	$\cdots$	$\gamma_{s,n}$	v_s
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
u_r	$\gamma_{r,r+1}$	$\gamma_{r,r+2}$	$\cdots$	$\gamma_{r,k}$	$\cdots$	$\gamma_{r,n}$	v_r
	Δ_{r+1}	Δ_{r+2}	$\cdots$	Δ_k	$\cdots$	Δ_n	$F(v)$

Tabela 1

gde su $\Delta_i = \langle \bar{c},\ B^{-1}A_i \rangle - c_i$ za $i = r+1, r+2, \dots, n$, $B^{-1}A_i = \left(\gamma_{1,i}, \gamma_{2,i}, \dots, \gamma_{r,i}\right)^T$, $\bar{c} = (c_1, c_2, \dots, c_r)^T$, $c = (c_1, \dots, c_r, c_{r+1}, \dots, c_n)^T$.

Korak 2. Ako je svako $\Delta_i \leq 0$, $i = r+1, r+2, \dots, n$, sledi da je vrh v optimalno rešenje problema i postupak se završava. $F(v)$ je minimalna vrednost funkcije cilja na dopustivom skupu. Ukoliko postoji $k \in \{r+1, r+2, \dots, n\}$ takvo da je $\Delta_k > 0$, prelazi se na korak 3.

Korak 3. Odredi se $\Delta_k = \max_{i \in I} \Delta_i$, gde je $I = \{i,\ i = r+1, \dots, n,\ \Delta_i > 0\}$. Posmatra se kolona iznad Δ_k. Ako u toj koloni nema pozitivnog elementa, tj. ako je $\gamma_{i,k} \leq 0,\ i = 1,2, \dots, r$, postupak se završava jer problem nema rešenje. Funkcija cilja je neograničena sa donje strane na skupu U, tj. $F(u) \to -\infty$. U suprotnom se prelazi na korak 4.

Korak 4. Kako postoji $\gamma_{i,k} > 0,\ i = 1,2, \dots, r$, odredi se

$$\min_{i \in I_k} \frac{v_i}{\gamma_{i,k}} = \frac{v_s}{\gamma_{s,k}},$$

gde $I_k = \{i, i \in \{1,2, \dots, r\},\ \ \gamma_{i,k} > 0\}$. Elemenat $\gamma_{s,k}$ naziva se pivot tabela 1.

Korak 5. Tabela 1 se transformiše u novu simpleks tabelu koja će definisati novi vrh w za koji važi $F(w) \leq F(v)$. Promenljiva u_k ulazi u bazu, a promenljiva u_s izlazi iz baze. Bazu novog vrha w čine vektori $A_1, A_2, \dots, A_{s-1}, A_k, A_{s+1}, \dots, A_r$. Komponente $u_1, u_2, \dots, u_{s-1}, u_k, u_{s+1}, \dots, u_r$ su bazične komponente proizvoljne tačke $u \in U$, a $u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_{k-1}, u_s, u_{k+1}, \dots, u_n$ su njene nebazične komponente.

Odgovarajući elementi u tabeli koja odgovara vrhu w biće označeni sa $\gamma_{i,k}{}'$ i $\Delta_i{}'$, a transformacija se izvodi po sledećim pravilima:

- promenljive u_s i u_k zamene svoja mesta;
- pivot se transformiše u svoj inverzni elemenat, tj. $\gamma_{k,s}{}' = \frac{1}{\gamma_{s,k}}$;
- preostali elementi u vrsti kojoj pripada pivot dele se sa pivotom, tj.

$$\gamma_{k,j}{}' = \frac{\gamma_{s,j}}{\gamma_{s,k}},\ j = r+1, \dots, k-1, k+1, \dots, n \ \text{ i } \ v_k{}' = \frac{v_s}{\gamma_{s,k}};$$

- preostali elementi u koloni kojoj pripada pivot dele se sa pivotom i ispred količnika se stavi znak minus, tj.

$$\gamma_{i,s}{}' = -\frac{\gamma_{i,k}}{\gamma_{s,k}},\ i = 1,2, \dots, s-1, s+1, \dots, r \ \text{ i } \ \Delta_s{}' = -\frac{\Delta_k}{\gamma_{s,k}};$$

- preostali elementi u tabeli se transformišu po pravilu "pravougaonika". Dijagonala uočenog "pravougaonika" je duž koja povezuje pivot sa elementom koji treba transformisati. Od proizvoda krajnjih elemenata te dijagonale oduzima se proizvod krajnjih elemenata na drugoj dijagonali i to se podeli sa pivotom, tj.

$$\gamma_{i,j}{}' = \frac{\gamma_{i,j}\gamma_{s,k} - \gamma_{i,k}\gamma_{s,j}}{\gamma_{s,k}} = \gamma_{i,j} - \frac{\gamma_{i,k}\gamma_{s,j}}{\gamma_{s,k}},$$

$$j = r+1, \dots, k-1,\ k+1, \dots, n,\ i = 1,2, \dots, s-1, s+1, \dots, r;$$

$$\Delta_j{}' = \frac{\gamma_{s,k}\Delta_j - \gamma_{s,j}\Delta_k}{\gamma_{s,k}} = \Delta_j - \frac{\gamma_{s,j}\Delta_k}{\gamma_{s,k}},\ j = r+1, \dots, k-1, k+1, \dots, n;$$

$$v_i{}' = \frac{v_i\gamma_{s,k} - v_s\gamma_{i,k}}{\gamma_{s,k}} = v_i - \frac{v_s\gamma_{i,k}}{\gamma_{s,k}},\ i = 1,2,\dots,s-1,s+1,\dots,r;$$

$$F(w) = \frac{F(v)\gamma_{s,k} - v_s\Delta_k}{\gamma_{s,k}} = F(v) - \frac{v_s\Delta_k}{\gamma_{s,k}}.$$

Nova tabela je oblika

	u_{r+1}	u_{r+2}	$\cdots$	u_{k-1}	u_s	u_{k+1}	$\cdots$	u_n	
u_1	$\gamma_{1,r+1}{}'$	$\gamma_{1,r+2}{}'$	$\cdots$	$\gamma_{1,k-1}{}'$	$\gamma_{1,s}{}'$	$\gamma_{1,k+1}{}'$	$\cdots$	$\gamma_{1,n}{}'$	$v_1{}'$
u_2	$\gamma_{2,r+1}{}'$	$\gamma_{2,r+2}{}'$	$\cdots$	$\gamma_{2,k-1}{}'$	$\gamma_{2,s}{}'$	$\gamma_{2,k+1}{}'$	$\cdots$	$\gamma_{2,n}{}'$	$v_2{}'$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
u_{s-1}	$\gamma_{s-1,r+1}{}'$	$\gamma_{s-1,r+2}{}'$	$\cdots$	$\gamma_{s-1,k-1}{}'$	$\gamma_{s-1,s}{}'$	$\gamma_{s-1,k+1}{}'$	$\cdots$	$\gamma_{s-1,n}{}'$	$v_{s-1}{}'$
u_k	$\gamma_{k,r+1}{}'$	$\gamma_{k,r+2}{}'$	$\cdots$	$\gamma_{k,k-1}{}'$	$\gamma_{k,s}{}'$	$\gamma_{k,k+1}{}'$	$\cdots$	$\gamma_{k,n}{}'$	$v_k{}'$
u_{s+1}	$\gamma_{s+1,r+1}{}'$	$\gamma_{s+1,r+2}{}'$	$\cdots$	$\gamma_{s+1,k-1}{}'$	$\gamma_{s+1,s}{}'$	$\gamma_{s+1,k+1}{}'$	$\cdots$	$\gamma_{s+1,n}{}'$	$v_{s+1}{}'$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
u_r	$\gamma_{r,r+1}{}'$	$\gamma_{r,r+2}{}'$	$\cdots$	$\gamma_{r,k-1}{}'$	$\gamma_{r,s}{}'$	$\gamma_{r,k+1}{}'$	$\cdots$	$\gamma_{r,n}{}'$	$v_r{}'$
	$\Delta_{r+1}{}'$	$\Delta_{r+2}{}'$	$\cdots$	$\Delta_{k-1}{}'$	$\Delta_s{}'$	$\Delta_{k+1}{}'$	$\cdots$	$\Delta_n{}'$	$F(w)$

Tabela 2

gde je w novi vrh, pri čemu je $w_i = v_i{}'$, $i = 1,2,\dots,s-1,k,s+1,\dots,r$; $w_i = 0$, $i = r+1,\dots,k-1,s,k+1,\dots,n$. Vrh v se zamenjuje vrhom w, vraća se na korak 2 i postupak se ponavlja sa novom tabelom.

Treba napomenuti da se pivot bira u koloni sa maksimalnom vrednosti Δ_i (korak 3). Međutim, takav postupak ne određuje put kojim se najbrže dolazi do rešenja. Maksimalna vrednost se uzima da bi algoritam bio jednoznačan. Inače, pivot se može birati u bilo kojoj koloni koja odgovara nekom $\Delta_i > 0$. Ne postoji pravilo izbora kolone u kojoj se određuje pivot, koje bi garantovalo najbrži put do rešenja.

U slučaju da problem linearnog programiranja nema oblik (4) koji je pogodan za primenu sekundarne simpleks metode, tj. ako se ne zna polazni vrh, tada prvo treba primeniti primarni simpleks metod koji određuje početni vrh v ako postoji, ili konstatuje da problem nema rešenje jer je dopustiv skup prazan. Primarni simpleks algoritam omogućava eliminisanje linearno zavisnih ograničenja, tj. svodi sistem na oblik kod koga je rang matrice jednak broju ograničenja. Primarni simpleks algoritam se primenjuje na problem oblika

$$F(u) = \langle c,u\rangle \to min, \quad c,u \in \mathbb{R}^n;$$

$$u \in U = \{ u \in \mathbb{R}^n,\ Au = b,\ u \geq 0,\ b > 0,\ A \in \mathbb{R}^{m,n}, b \in \mathbb{R}^m \}. \tag{5}$$

Primarni simpleks algoritam

Korak 1. Problemu (5) se pridružuje pomoćni problem. Najpre se formira pomoćna funkcija cilja koja se dobija kao zbir veštačkih promenljivih

$$F_1(z) = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+m} \to min,$$
$$z \in Z = \{z \in \mathbb{R}^{m+n}, z = (u,w)^T, z \geq 0, Cz = b\}, \tag{6}$$

gde $w = (u_{n+1}, u_{n+2}, \cdots, u_{n+m})^T$, a C je matrica koja se dobije kad se uz matricu A dopiše jedinična matrica E, tj. $C = (A, E)$.

Problem (6) ima isti oblik kao (4) za $r = m$. Kako je E jedinična matrica formata $m \times m$, $rang(C) = m$, gde je $C_{m\times(n+m)}$. Tačka $v = (0, b)^T$ je vrh problema (6), pa se na njega može primeniti sekundarni algoritam.

Korak 2. Reši se problem (6) primenom sekundarnog simpleks algoritma i dobija se rešenje z^*.

Korak 3. Ako je $F_1(z^*) > 0$ problem nema rešenje jer je dopustiv skup prazan i algoritam se završava, a u suprotnom se ide na korak 4.

Korak 4. Kako je $F_1(z^*) = 0$ i $z^* = (v, 0)^T$, gde je $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^T$ vrh skupa U i $0 \in \mathbb{R}^m$, formira se simpleks tabela za vrh v na osnovu proširene simpleks tabele za vrh $z^* = (v, 0)^T$:

a) Izbriše se poslednja vrsta u tabeli vrha z^*.

b) Uoči se deo tabele u preseku vrsta koje odgovaraju veštačkim promenljivama iz baze tj. $(u_{n+1}, \ldots, u_{n+m-r})$ i kolona koje odgovaraju nebazičnim promenljivim iz skupa $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ tj. $(u_{r+1}, \ldots, u_n)$. Ako taj deo tabele ne postoji ide se na c), a ako postoji, ide se na d).

c) Pošto ne postoje veštačke promenljive u bazi vrha z^*, baza vrha z^* se poklapa sa bazom vrha v. Neka u tabeli ima r baričnih promenljivih, tada je $rang(A) = r$. Iz tabele se eliminišu one kolone koje odgovaraju veštačkim promenljivama (svi elementi su im nule). Posle ispunjavanja poslednje vrste, dobija se kompletna tabela i može se primeniti sekundarni simpleks algoritam.

d) U uočenom delu tabele postoji $\gamma_{n+p,k} > 0$, $r + 1 \leq k \leq n$. Uzimajući $\gamma_{n+p,k}$ kao pivot, transformiše se tabela prema pravilima sekundarnog simpleks algoritma. Desne strane odgovarajućih jednačina su jednake nuli, pa se zato ostaje u istom vrhu koji je degenerisan i menja se samo njegova baza. Iz baze se izbacuje veštačka promenljiva u_{n+p}, i uvodi se promenljiva u_k u bazu. Iz tabele se briše kolona koja odgovora veštačkoj promenljivoj u_{n+p} (vektor je jednak nuli). Postupak se ponavlja sve dok ne izbacimo sve promenljive iz baze ili dok postoji $\gamma_{n+p,k} > 0$. Ako nema više veštačkih promenjivih u bazi, prelazi se na e). Ukoliko ne postoji $\gamma_{n+p,k} > 0$ ide se na f).

e) Vrati se na c).

f) Vrste u kojima su svi elementi nule se izbrišu. Dalje, navedenom delu tabele odgovaraju jednačine samo kod kojih su svi koeficijenti negativni ili nule. Pošto su desne strane jednake nuli, jednačine su zadovljene samo u slučaju da su sve promenljive uz negativne koeficijente jednake nuli. Dakle, promenljive uz negativne $\gamma_{n+p,k}$ se izjednačavaju sa nulom. Te promenljive se nazivaju anulirane promenljive.

g) Kolone koje odgovaraju anuliranim promenljivama izostavljaju se iz daljeg razmatranja i u funkciji cilja početnog problema se unose nule umesto anuliranih promenljivih. Popuni se poslednja vrsta i dobija se tabela koja odgovara vrhu v, zatim se može primeniti sekundarni simpleks algoritam, tj. prelazi se na korak 5.

Korak 5. Primeni se sekundarna simpleks metoda od koraka 2. U dobijenom optimalnom rešenju se na mesto anuliranih promenljivih stavljaju nule i tako se dobija $u_* = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$ rešenje početnog problema (5).

1.1.2. Dualnost u linearnom programiranju

Svakom zadatku linearnog programiranja može se na određen način pridružiti takozvani dualni problem, koji ima važna matematička svojstva i značajnu primenu u ekonomiji. Analizom odnosa između primala i duala bavi se teorija dualnosti.

Neka je zadat problem linearnog programiranja u simetričnom obliku kao:

$$F_p(x) = \langle c, x \rangle \to \ max$$

$$Ax \ \leq \ b$$

$$x \geq 0$$

$$c, x \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{m,n}, b \in \mathbb{R}^m$$

$$x = (x_1, \dots, x_n)^T,$$

gde su promenljive $x_1, x_2, \dots, x_n$ primalne promenljive.

Ovakav problem naziva se primalni problem ili primal.

Ovom problemu se pridružuje takozvani dualni problem ili dual, koji ima sledeću simetričnu formu:

$$F_d(d) = \langle b, d \rangle \rightarrow \ min$$

$$dA \ \geq \ c$$

$$d \geq 0$$

$$d, b \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{m,n}, c \in \mathbb{R}^n$$

$$d = (d_1, \dots, d_m)^T,$$

gde su promenljive $d_1, d_2, \dots, d_m$ dualne promenljive.

Dual ima onoliko promenljivih koliko primal ima ograničenja i onoliko ograničenja koliko primal ima promenljivih. Matrica ograničenja duala jednaka je transponovanoj matrici ograničenja primala, dok koeficijenti u funkciji cilja duala predstavljaju slobodne članove u ograničenjima primala i obrnuto.

Teorema 1.1.2.1. (Teorema slabe dualnosti) Ako je x dopustivo rešenje primala i ako je d dopustivo rešenje duala, onda važi

$$\langle c, x \rangle \leq \langle b, d \rangle, \text{ tj. } F_p(x) \leq F_d(d).$$

Dokaz: Kako je x dopustivo rešenje primala, sledi $Ax \ \leq \ b$, pa je $\langle d, Ax \rangle \leq \langle d, b \rangle$. Pošto je d dopustivo rešenje duala sledi $dA \geq c$, pa je $\langle x, dA \rangle \geq \langle c, x \rangle$. Dalje je

$$\langle c, x \rangle \leq \langle dA, x \rangle = \langle A^T d, x \rangle = \langle d, Ax \rangle \leq \langle d, b \rangle. \qquad \blacksquare$$

Teorema 1.1.2.2. (Teorema jake dualnosti) Za svaki par zadataka primal-dual važi jedan od sledeća tri iskaza:

- Oba zadatka primal i dual imaju optimalno rešenje. Neka je x^* optimalno rešenje primala i d^*optimalno rešenje duala, tada važi

$$\langle c, x^* \rangle = \langle b, d^* \rangle, \text{ tj. } F_p(x^*) = F_d(d^*).$$

- Dopustivi skupovi primala i duala su prazni skupovi, tj. ni primal ni dual nemaju dopustivo rešenje.
- Jedan problem nema dopustivo rešenje, a drugi problem ima dopustivo rešenje, ali nema optimalno rešenje jer funkcija cilja nije ograničena na dopustivom skupu.

Teorema 1.1.2.3. (Teorema slabe komplementarnosti) Neka je x^* dopustivo rešenje primala i neka je d^* dopustivo rešenje duala i neka važe uslovi komplementarnosti

$$\langle Ax^* - b, d^* \rangle = 0,$$

$$\langle x^*, d^*A - c \rangle = 0.$$

Tada je x^*optimalno rešenje primala i d^* optimalno rešenje duala.

Teorema 1.1.2.4. (Teorema jake komplementarnosti) Neka parovi zadataka primal-dual imaju bar jedno dopustivo rešenje. Tada postoji bar jedan par optimalnih rešenja x^* i d^* tako da važi

$$b - Ax^* + d^* > 0,$$

$$d^*A - c + x^* > 0.$$

Teorema 1.1.2.5. Za problem linearnog programiranja važi da je dual duala primal.

Pravila za prevođenje najopštijeg oblika problema linearnog programiranja u dual:

- Koeficijenti u funkciji cilja primalnog problema postaju slobodni članovi u ograničenjima dualnog problema. Slobodni članovi u ograničenjima primalnog problema postaju koeficijenti u funkciji cilja dualnog problema. Broj promenljivih primala je jednak broju ograničenja duala i obrnuto.
- Ako je A matrica ograničenja primala, onda je A^T matrica ograničenja duala.
- Ako je primalni problem problem maksimuma, onda je dualni problem problem minimuma i obrnuto.
- Svakom i-tom ograničenju oblika $\leq$ u primalu odgovara vezana promenljiva $d_i \geq 0$ u dualu.
- Svakom i-tom ograničenju oblika $=$ u primalu odgovara slobodna promenljiva $d_i \in \mathbb{R}$ u dualu.
- Svakoj vezanoj promenljivoj u primalu odgovara ograničenje oblika nejednakosti sa istim znakom u dualu.
- Svakoj slobodnoj promenljivoj u primalu odgovara ograničenje oblika jednakosti u dualu.

Dakle, ako je primal najopštijeg oblika

$$F_p(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \qquad i = 1, \dots, k$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = k+1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, l \quad vezane\ promenljive$$

$$x_j \in \mathbb{R}, j = l+1, \dots, n \quad slobodne\ promenljive$$

onda je njegov dual oblika

$$F_d(d) = \sum_{i=1}^{m} b_i d_i \to min$$

$$d_i \geq 0, i = 1, \ldots, k \quad vezane\ promenljive$$

$$d_i \in \mathbb{R}, i = k+1, \ldots, m \quad slobodne\ promenljive$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} d_i \geq c_j\ , \qquad j = 1, \ldots, l$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} d_i = c_j\ , \qquad j = l+1, \ldots, n.$$

Napomena: Teoreme slabe i jake dualnosti važe i za ovaj par zadataka primal dual.

2. Transportni problem

Transportni problem je odavno predmet ozbiljnog izučavanja. Ruski matematičar Kantorovič je prvi definisao transportni problem 1939. godine. Nakon toga 1941. godine američki matematičar Hitchock je formulisao i rešio model transportnog problema u radu "Distribucija proizvoda iz nekoliko izvora do brojnih lokaliteta" ("*The Distribution of a Product from Several Sources to Numerous Localities*"). Nezavisno od Hitchocka 1947. godine T. C. Koopmans je predstavio studiju nazvanu "Optimalno iskorišćavanje transportnog sistema" ("*Optimum Utilization of the Transportation System*"). Oba istraživanja su doprinela razvoju metoda za rešavanje transportnog problema. Ovim problemom bavio se veliki broj poznatih naučnika, a bave se i dan danas. Od domaćih autora radove na ovu temu su objavili B. Ivanović, J. Petrić, M. Tourki, M. Backović, M. Leković i mnogi drugi.

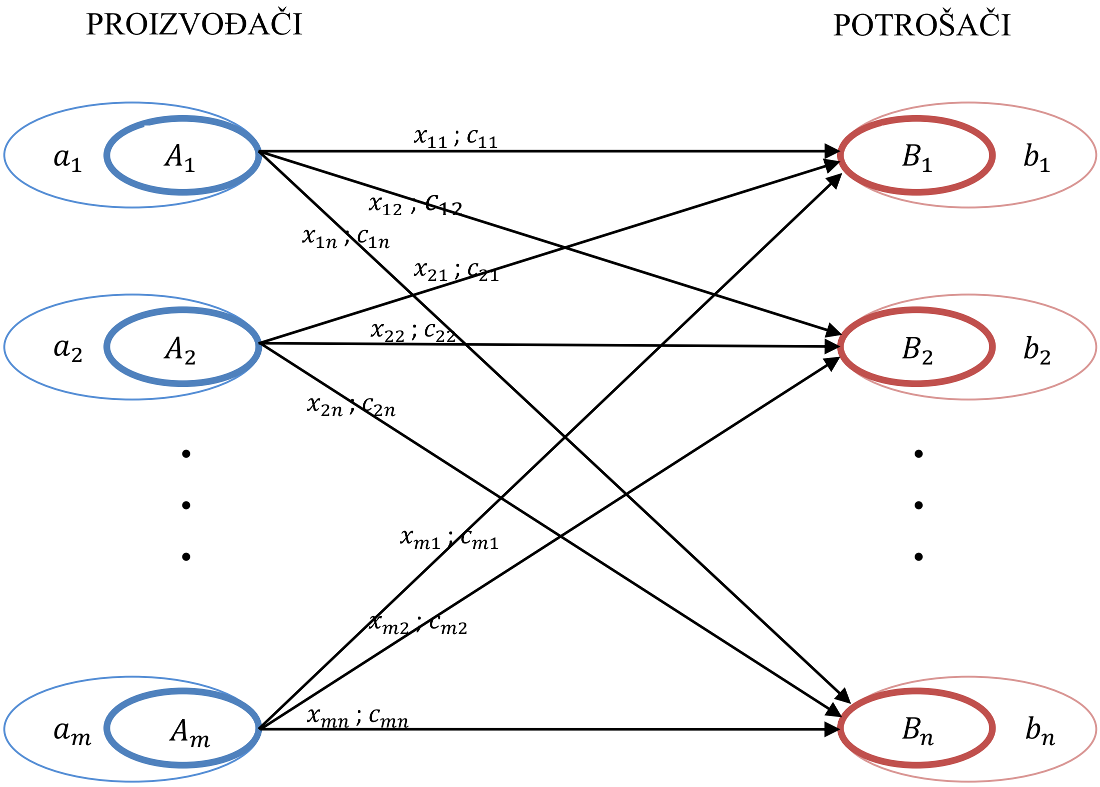
Tipičan transportni problem je problem raspodele robe od proizvođača do potrošača, uz uslov da troškovi transporta budu minimalni. Problem transporta predstavlja važan deo logističkog menadžmenta. Uz to, razni problemi logistike pored prevoza robe se takođe mogu formulisati kao problemi transporta.

Pored toga, postoje mnogobrojni zadaci koji se rešavaju kao transportni problemi. To su zadaci optimalnog razmeštanja mašina, postrojenja, skladišta, energetskih objekata, itd. sa ciljem postizanja veće ekonomičnosti rada i vremena.

2.1. Postavka zadatka

Nalaženje optimalnog, tj. najekonomičnijeg transporta nekog proizvoda u većini slučajeva podrazumeva nalaženje takvog plana prevoza jedne vrste robe iz mesta proizvodnje (skladištenja) u određena mesta potrošnje, da troškovi transporta budu minimalni. Funkcija cilja je izražena kroz ukupne troškove transporta koje treba minimizirati pri ograničenjima koja su zadata mrežom saobraćajnica i raspoloživim resursima.

Pretpostavimo da postoji m proizvođača (punktova ponude) koji su označeni sa $A_1, A_2, \dots, A_m$ i koji određuju mesta proizvodnje. Nek su $a_1, a_2, \dots, a_m$ količine proizvoda izražene u određenim jedinicama mere (npr. kilogramima, tonama, komadima, itd.) koje proizvode proizvođači $A_1, A_2, \dots, A_m$. Sa druge strane, pretpostavlja se da postoji n potrošača (punktova potražnje (prodavnice, kupci)) koji su označeni $B_1, B_2, \dots, B_n$, koji određuju mesta potrošnje, čije su potrebe izražene poznatim količinama potražnje $b_1, b_2, \dots, b_n$, respektivno. Neka su poznate cene transporta po jedinici proizvoda c_{ij} iz svakog punkta A_i, $i = 1,2, \dots, m$ u bilo koji punkt B_j, $j = 1,2, \dots, n$, a neka je sa x_{ij} označena količina robe koja se transportuje iz punkta A_i, $i = 1,2, \dots, m$ u punkt B_j, $j = 1,2, \dots, n$ (slika 1).



Slika 1

i/j	$\boldsymbol{B_1}$	$\boldsymbol{B_2}$	$\boldsymbol{B_3}$	$\cdots$	$\boldsymbol{B_n}$	$\boldsymbol{a_i}$
$\boldsymbol{A_1}$	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	$\cdots$	c_{1n} x_{1n}	a_1
$\boldsymbol{A_2}$	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	$\cdots$	c_{2n} x_{2n}	a_2
$\boldsymbol{A_3}$	c_{31} x_{31}	c_{32} x_{32}	c_{33} x_{33}	$\cdots$	c_{3n} x_{3n}	a_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$\boldsymbol{A_m}$	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	c_{m3} x_{m3}	$\cdots$	c_{mn} x_{mn}	a_m
$\boldsymbol{b_j}$	b_1	b_2	b_3	$\cdots$	b_n	$\sum a_i$ $\sum b_j$

Tabela 3

Postavlja se pitanje kako organizovati prevoz robe od proizvođača (skladišta) do potrošača (prodavnica) tako da troškovi transporta budu minimalni.

Ovako definisan problem je specijalni slučaj problema linearnog programiranja i naziva se problem transporta.

Osim toga pretpostavlja se da postoji samo jedna veza između skladišta A_i, $i = 1,2,\dots,m$ i prodavnice B_j, $j = 1,2,\dots,n$. Ako je transport između A_i i B_j iz nekog razloga zabranjen, pretpostavlja se da je cena transporta na toj relaciji $c_{ij} = M$, gde je M proizvoljno velika konstanta. Na taj način će transport između skladišta A_i i prodavnice B_j imati proizvoljno veliku cenu, pa ta relacija neće ući u optimalno rešenje.

Definicija 2.1.1. Ako je ukupna ponuda jednaka ukupnoj potražnji, odnosno ako je

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

problem se naziva zatvoren transportni problem.

Teorema 2.1.1. Potreban i dovoljan uslov za rešivost transportnog problema je da transportni problem bude zatvoren.

Ako transportni problem nije zatvoren, on se može zatvoriti uvođenjem fiktivnih punktova. Postupak zatvaranja otvorenog problema opisan je u poglavlju 2.4.

Zadatak transportnog problema se sastoji u određivanju količine robe x_{ij} koju iz bilo kojeg punkta A_i, $i = 1,2,\dots,m$ treba transportovati u bilo koji punkt B_j, $j = 1,2,\dots,n$ pod uslovom da ukupni troškovi transporta budu minimalni.

Koristeći uvedene oznake, funkcija cilja za klasični transportni problem dobija oblik

$$F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \rightarrow min. \tag{7}$$

Skup ograničenja transportnog problema ima $m + n$ ograničenja, tj. onoliko koliko ukupno ima punktova proizvodnje i potrošnje. Koristeći se šemom datoj na slici 1 skup ograničenja može se napisati u obliku:

- za punktove ponude (proizvodnje)

$$x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} = a_1 \quad \text{- ograničenje punkta } A_1$$

$$x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n} = a_2 \quad \text{- ograničenje punkta } A_2$$

$$\vdots$$

$$x_{m1} + x_{m2} + \cdots + x_{mn} = a_m \quad \text{- ograničenje punkta } A_m,$$

- za punktove potražnje (potrošnje)

$$x_{11} + x_{21} + \cdots + x_{m1} = b_1 \quad \text{- ograničenje punkta } B_1$$

$$x_{12} + x_{22} + \cdots + x_{m2} = b_2 \quad \text{- ograničenje punkta } B_2$$

$$\vdots$$

$$x_{1n} + x_{2n} + \cdots + x_{mn} = b_n \quad \text{- ograničenje punkta } B_n.$$

Ekvivalentan zapis sistema ograničenja je oblika

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i\,, \qquad i = 1, 2, \dots, m \\ &\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j\,, \qquad j = 1, 2, \dots, n\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Matematički model navedenog transportnog problema koji se sastoji u nalaženju minimuma funkcije cilja na skupu ograničenja je oblika

$$\begin{aligned} &F(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to min \\ &\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i\,, \qquad i = 1, 2, \dots, m \\ &\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j\,, \qquad j = 1, 2, \dots, n \\ &x_{ij} \geq 0\,, \qquad i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Sumiranjem levih i desnih strana sistema (8) dobija se

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

tj.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{10}$$

Jednačina (10) predstavlja idealnu ravnotežu proizvodnje i potrošnje, tj. ponude i potražnje. Ukoliko se ograničenje (10) doda modelu (9) dobija se matematički model zatvorenog transportnog problema.

Definicija 2.1.2. Dopustivo rešenje transportnog problema (9) je vektor

$$x = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn})^T$$

čije koordinate zadovoljavaju ograničenja iz modela (9).

Definicija 2.1.3. Dopustivo bazično rešenje transportnog problema je dopustivo rešenje koje sadrži najviše $m + n - 1$ pozitivnih komonenti.

Definicija 2.1.4. Ako dopustivo bazično rešenje ima tačno $m + n - 1$ pozitivnih komponenti ono je nedegenerisano, a ako ima manje od $m + n - 1$ pozitivnih komponenti onda je ono degenerisano.

Definicija 2.1.5. Optimalno rešenje transportnog problema je dopustivo bazično rešenje za koje funkcija cilja dostiže minimum.

2.2. Transportna mreža

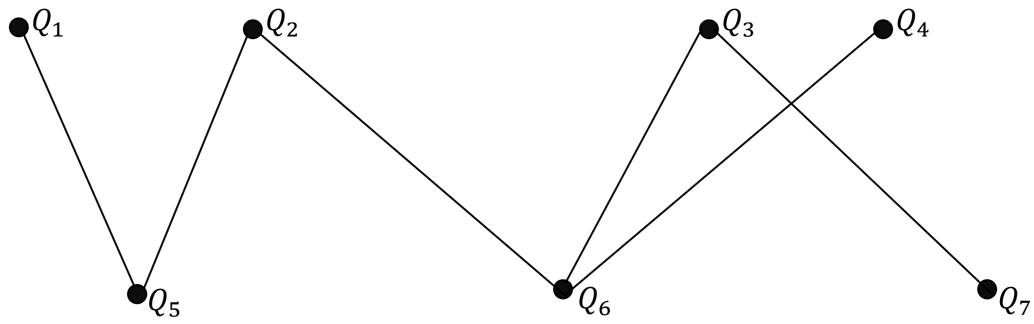
Definicija 2.2.1. Neka je x dopustivo rešenje problema (9) i neka je Q skup punktova transportnog problema, tj.

$$Q = A \cup B, \qquad A = (A_1, A_2, \dots, A_m), \qquad B = (B_1, B_2, \dots, B_n).$$

Neka je τ skup uređenih parova oblika (A_i, B_j) za koje je $x_{ij} > 0$, a $\bar{Q}$ skup svih punktova koji definišu skup τ. Skup $\tau \cup \bar{Q}$ naziva se transportna mreža rešenja x. Parovi (A_i, B_j) su lukovi mreže, a elementi skupa $\bar{Q}$ su čvorovi (punktovi) mreže. Označavaju se sa Q_i ukoliko nije bitno da se naznači pripadnost čvora skupu A ili B.

Definicija 2.2.2. Proizvoljan niz $Q_{i_0} Q_{i_1} Q_{i_2} \cdots Q_{i_p}$ gde Q_{i_r}, $r = 0,1,2, \dots, p$, naziva se maršruta ako svaki par $\left(Q_{i_r}, Q_{i_{r+1}}\right)$ pripada skupu τ i ako se u nizu pojavljuje samo jednom.

Primer 1: Ako je data mreža na slici 2



Slika 2

maršrute su: $Q_1Q_5Q_2Q_6Q_4$ i $Q_1Q_5Q_2Q_6Q_3Q_7$.

Definicija 2.2.3. Maršruta $Q_{i_0}Q_{i_1}Q_{i_2} \cdots\ Q_{i_0}$ naziva se kružni put.

Definicija 2.2.4. Transportna mreža je povezana ako se bilo koja dva čvora mogu spojiti maršrutom.

Lema 2.2.1. Ako iz svakog čvora polaze najmanje dva luka, transportna mreža sadrži kružni put.

Lema 2.2.2. Ako iz svakog čvora polaze tačno dva luka, cela transportna mreža je kružni put.

Lema 2.2.3. Ako je Q_{i_0} vezan maršrutom za Q_{i_r}, a Q_{i_r} vezan maršrutom za Q_{i_0}, onda su i Q_{i_0} i Q_{i_r} povezani maršrutom.

Lema 2.2.4. Ako transportna mreža ne sadrži kružne puteve, bilo koja maršruta je jednoznačno određena krajnjim čvorovima.

2.3. Rešavanje zatvorenog transportnog problema

Transportni problem je problem linearnog programiranja sa $m + n$ jednačina, a ukupan broj nepoznatih x_{ij} u problemu (9) iznosi mn.

Razvojem metodologije linearnog programiranja pokazano je da je transportni problem specijalni slučaj zadataka linearnog programiranja, pa se stoga može rešiti simpleks metodom. Specifičnost transportnog problema kao zadatka linearnog programiranja ogleda se ne u funkciji cilja F, već u skupu ograničenja. Kako ovaj problem ima karakterističnu strukturu jer se matrica sistema sastoji samo od 0 i 1, za njega je formiran poseban, jednostavniji metod.

Teorema 2.3.1. Matematički model transportnog problema (9) se može zapisati u ekvivalentnom obliku

$$\begin{aligned} &< c, x > \;\rightarrow\; min \\ &Ax = b \\ &x \geq 0, \end{aligned} \tag{11}$$

gde je

$$x = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn})^T,$$

$$b = (a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n)^T,$$

$$c = (c_{11}, c_{12}, \dots, x_{1n}, c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2n}, \dots, c_{m1}, c_{m2}, \dots, c_{mn})^T,$$

a $A = A_{(m+n)\times(m\cdot n)}$ je matrica ranga $m + n - 1$.

Dokaz: Zapis se lako verifikuje jer se ograničenja u modelu transportnog problema (9) mogu zapisati kao

$$\begin{array}{lllll}
x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} & & & & = a_1 \\
 & x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n} & & & = a_2 \\
 & & \ddots & & \vdots \\
 & & & x_{m1} + x_{m2} + \cdots + x_{mn} & = a_m \\
x_{11} + & x_{21} + & \cdots & + x_{m1} & = b_1 \\
\quad x_{12} + & \quad x_{22} + & \cdots & + x_{m2} & = b_2 \\
\qquad \ddots & \qquad \ddots & & \ddots & \vdots \\
\qquad\quad x_{1n} + & \qquad\quad x_{2n} + & \cdots & + x_{mn} & = b_n
\end{array}$$

Ovom sistemu jednačina odgovara matrica koeficijenata sa $m + n$ vrsta i $m \cdot n$ kolona, oblika

$$A_{(m+n)\times mn} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\qquad\qquad\quad}^{n} & \overbrace{\qquad\qquad\quad}^{n} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|cccc|c|cccc}
1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} m \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} n \end{array}, \qquad b = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Kako između jednačina sistema $Ax = b$ postoji linearna veza koja je posledica uslova $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, tj. pošto je zbir prvih m jednačina jednak zbiru poslednjih n jednačina, sledi da za rang $r(A)$ matrice A važi

$$r(A) < m + n,$$

tj. matrica A nema maksimalni rang.

Iz matrice A se izdvaja podmatrica reda $m + n - 1$, za koju se pokazuje da je regularna. Podmatrica se formira tako što se odbaci poslednja vrsta matrice A, a zatim se redom izdvajaju kolone $n, 2n, 3n, \dots, mn, 1,2, \dots, n - 1$.

$$
\begin{array}{cccc|cccc}
n & 2n & & mn & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\hspace{3cm}}^{n-1}} \\
1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
 & & & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
 & & 0 & & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
 & & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 & & & & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{array}
$$

Na ovaj način se dobija gornja trougaona matrica sa $m + n - 1$ vrsta i $m + n - 1$ kolona, koja na dijagonali ima jedinice. Determinanta takve matrice je jednaka proizvodu elemenata na dijagonali, odnosno jedinici, pa je data podmatrica regularna. Dakle, matrica A sadrži regularnu podmatricu reda $m + n - 1$, pa je rang matrice A baš $m + n - 1$. ■

Ovim je pokazano i da svako dopustivo bazično rešenje transportnog problema može da ima najviše $m + n - 1$ baziču komponentu.

Teorema 2.3.2. Zatvoren transportni problem uvek ima optimalno rešenje.

Dokaz: Funkcija cilja transportnog problema (9) je oblika

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}.$$

Pošto su cene c_{ij} i količine robe koje se transportuju x_{ij} nenegativne, sledi da je funkcija cilja F nenegativna ($F \geq 0$), tj. ograničena sa donje strane. Pošto je transportni problem zatvoren znači

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = d.$$

Neka je

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{d}, \qquad i = 1,2, \dots, m\,, \qquad j = 1,2, \dots, n.$$

Ovako definisan vektor x predstavlja dopustivo rešenje transportnog problema (9). Naime,

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_j}{d} = \frac{b_j}{d} \sum_{i=1}^{m} a_i = b_j,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{d} = \frac{a_i}{d} \sum_{j=1}^{n} b_j = a_i,$$

$$x_{\mathrm{ij}} \geq 0.$$

Dakle, skup dopustivih rešenja nije prazan. Kako je funkcija cilja ograničena sa donje strane i dopustiv skup je neprazan, na osnovu teoreme o rešivosti problema linearnog programiranja sledi da transportni problem (9) uvek ima optimalno rešenje. ■

Napomena: $x_{ij} = \frac{a_i b_j}{d}$, $i = 1,2,\dots,m$, $j = 1,2,\dots,n$ jeste dopustivo rešenje transportnog problema, ali nije bazično rešenje.

Teorema 2.3.3. Ako su veličine $a_1, a_2, \dots, a_m$ i $b_1, b_2, \dots, b_n$ celi brojevi, onda su sve bazične komponente bazičnih rešenja transportnog problema celi brojevi i postoji bar jedno celobrojno optimalno rešenje.

Transportni problemi se mogu rešavati pomoću simpleks metode kao univerzalne metode za rešavanje zadataka linearnog programiranja. Međutim rešavanje transportnog problema pomoću simpleks metode je nepraktično zbog velikog broja ograničenja i velikog broja promenljivih i to je bio razlog obljavljivanja velikog broja radova u prvoj polovini pedesetih godina prošlog veka, u kojima je cilj bio nalaženje efikasnijih i bržih algoritama za rešavanje transportnih problema.

2.3.1. Transportne metode

Kako je pomenuto, zatvoren transportni problem uvek ima optimalno rešenje. Metode za rešavanje transportnog problema obično imaju dve etape. Prvo se traži početno dopustivo bazično rešenje, a zatim se polazeći od njega, definiše algoritam koji vodi do novog bazičnog rešenja, koje daje manju vrednost funkcije cilja.

Od 1900-tih veliki broj matematičara se bavio rešavanjem transportnog problema. U narednim poglavljima je predstavljeno nekoliko metoda za rešavanje ovog problema.

2.3.1.1. Metode za određivanje dopustivog bazičnog rešenja

Neke od metoda za nalaženje dopustivog bazičnog rešenja su: metoda severezapadnog ugla, metoda najmanjeg elemenata u matrici cene transporta, metoda minimuma vrste i kolone, Vogelova aproksimativna metoda, Vogel-Korda metoda i dr.

I. Metoda severozapadnog ugla

Formira se tabela dimenzije $m \times n$ tj. tabela sa mn polja, u koju se upisuju elementi dopustivog bazičnog rešenja duž dijagonale koja se kreće od gornjeg levog ugla, tj. osenčenog polja tabele 4, do donjeg desnog ugla iste tabele. Otuda i potiče naziv ove metode (severozapadnog ugla). Ova metoda uopšte ne uzima u obzir cene transporta tj. vrednosti c_{ij}, pa se smatra najjednostavnijom, ali i najmanje efikasnom metodom za određivanje polaznog dopustivog bazičnog rešenja transportnog problema.

i/j	$\boldsymbol{B_1}$	$\boldsymbol{B_2}$	$\boldsymbol{B_3}$	$\cdots$	$\boldsymbol{B_n}$	$\boldsymbol{a_i}$
$\boldsymbol{A_1}$						a_1
$\boldsymbol{A_2}$						a_2
$\boldsymbol{A_3}$						a_3
$\vdots$						$\vdots$
$\boldsymbol{A_m}$						a_m
$\boldsymbol{b_j}$	b_1	b_2	b_3	$\cdots$	b_n	$\sum a_i$ $\sum b_j$

Tabela 4

<u>Algoritam metode severozapadnog ugla</u>

Korak 1: Uoči se severozapadni ugao u tabeli (osenčeno polje) i ponuda i potražnja u odgovarajućoj vrsti i koloni, a_1 i b_1. U osenčeno polje upisuje se $x_{11} = \min\{a_1, b_1\}$. Moguća su tri slučaja:

- ako je $a_1 < b_1$, tada je $x_{11} = a_1$. Ponuda prvog proizvođača je iscrpljena i sva roba je transportovana prvom potrošaču, tako da nema transporta ka preostalim potrošačima. Dakle, $x_{1j} = 0, j \neq 1$ i u preostala polja u prvoj vrsti se upisuju nule.
- ako je $a_1 > b_1$, tada je $x_{11} = b_1$ i u preostala polja prve kolone se upisuju nule.
- ako je $a_1 = b_1$, tada je $x_{11} = a_1 = b_1$, a u ostala polja prve vrste i kolone koje odgovaraju severozapadnom uglu upisuju se nule. Ovaj slučaj je znak da je broj pozitivnih komponenti dopustivog bazičnog rešenja manji od $m + n - 1$ tj. da je rešenje degenerisano. Zato se jedna nula označava zvezdicom (0^*) i ona predstavlja bazičnu komponentu.

Korak 2: Nove vrednosti ponude i potražnje punktova A_1 i B_1 su $\overline{a_1} = a_1 - x_{11}$ i $\overline{b_1} = b_1 - x_{11}$ respektivno.

Korak 3: U nepopunjenom delu tabele uoči se severozapadni ugao i odgovarajuće polje popunjava se na isti način kao u koraku 1 i po opisanom pravilu popunjava se pripadajuća vrsta ili kolona. Menja se vrednost ponude i potražnje kao u koraku 2 i postupak se nastavlja dok se ne popuni cela tabela.

Teorema 2.3.1.1.1. Dopustivo rešenje dobijeno metodom severozapadnog ugla je uvek bazično rešenje.

Dokaz: Neka je x rešenje dobijeno metodom severozapadnog ugla. Formira se njegova transportna mreža. Pretpostavi se da mreža sadrži kružni put $A_{i_1}B_{j_1}A_{i_2}B_{j_2} \dots A_{i_k}B_{j_k}A_{i_l}$ gde za indekse važi $i_l < i_r, r = 1,..,k$.

Iz B_{i_l} postoji put u B_{j_l} i B_{j_k}. Međutim metodom severozapadnog ugla jedan od B_{j_l} i B_{j_k} mora biti popunjen (zadovoljen). To je kontradikcija sa pretpostavkom da postoji kružni put, jer tada jedan od lukova $(A_{i_l}, B_{j_l}), (A_{j_l}, B_{j_k})$ ne može da postoji. Dakle ovo rešenje je bazično. ■

<u>**Primer 2**</u>**:** Tri mlekare u Novom Sadu imaju sledeće dnevne ponude: mlekara A_1 proizvodi 50 kartona pavlake, mlekara A_2 25 kartona, a mlekara A_3 30 kartona. Mlekare transportuju svoje proizvode u 5 najvećih prodavnica u Novom Sadu, koje imaju sledeće dnevne potrebe:

prodavnica Maxi (B_1): 16 kartona pavlake

prodavnica Idea (B_2): 14 kartona pavlake

prodavnica Mercator (B_3): 24 kartona pavlake

prodavnica Univerexport (B_4): 12 kartona pavlake

prodavnica Metro (B_5): 39 kartona pavlake.

Ponude mlekara a_i i potrebe prodavnica b_j po broju kartona pavlake, kao i cene transporta c_{ij} u dinarima po kartonu dati su u tabeli

i/j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	50	23	12	24	43	50
A_2	35	62	34	10	21	25
A_3	22	45	52	21	14	30
b_j	16	14	24	12	39	105

Tabela 5

Odrediti dopustivo bazično rešenje metodom severozapadnog ugla.

Rešenje: Kako je $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{5} b_j = 105$, matematički model ovog transportnog problema je zatvoren, pa sledi da dopustivo bazično rešenje sigurno postoji.

Uoči se severozapadni ugao u tabeli (to je polje (1,1)). Ponuda u odgovarajućoj vrsti je 50 kartona, a potražnja u odgovarajućoj koloni 16 kartona. U posmatrano polje upisuje se $x_{11} = \min\{50, 16\} = 16$.

Kako je $a_1 > b_1$, u preostala polja prve kolone se upisuju nule, a nove vrednosti ponude i potražnje punktova A_1 i B_1 su $a_1 = 50 - 16 = 34$ i $b_1 = 16 - 16 = 0$, pa tabela dobija sledeći oblik

i/j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	50 16	23	12	24	43	34
A_2	35 0	62	34	10	21	25
A_3	22 0	45	52	21	14	30
b_j	0	14	24	12	39	

Tabela 6

Zatim se uoči ponovo severozapadni ugao (u tabeli 6, (to je polje (1,2))). Ponuda u odgovarajućoj vrsti je 34 kartona, a potražnja u odgovarajućoj koloni 14 kartona. U posmatrano polje upisuje se $x_{12} = \min\{34, 14\} = 14$.

Kako je $a_1 > b_2$, u preostala polja druge kolone se upisuju nule, a nove vrednosti ponude i potražnje punktova A_1 i B_2 su $a_1 = 34 - 14 = 20$ i $b_2 = 14 - 14 = 0$, pa sledi

i/j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	50 16	23 14	12	24	43	20
A_2	35 0	62 0	34	10	21	25
A_3	22 0	45 0	52	21	14	30
b_j	0	0	24	12	39	

Tabela 7

Sledeći severozapadni ugao u tabeli je polje (1,3). Ponuda u odgovarajućoj vrsti je 20 kartona, a potražnja u odgovarajućoj koloni je 24 kartona. U posmatrano polje upisuje se $x_{13} = \min\{20, 24\} = 20$.

Kako je $a_1 < b_3$, u preostala polja prve vrste se upisuju nule, a nove vrednosti ponude i potražnje punktova A_1 i B_3 su $a_1 = 20 - 20 = 0$ i $b_3 = 24 - 20 = 4$, pa sledi

i/j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	50 16	23 14	12 20	24 0	43 0	0
A_2	35 0	62 0	34	10	21	25
A_3	22 0	45 0	52	21	14	30
b_j	0	0	4	12	39	

Tabela 8

Naredni severozapadni ugao u tabeli je polje (2,3). Ponuda u odgovarajućoj vrsti je 25 kartona, a potražnja u odgovarajućoj koloni je 4 kartona. U posmatrano polje upisuje se $x_{23} = \min\{25, 4\} = 4$.

Kako je $a_2 > b_3$, u preostalo polje treće kolone se upisuje nula, a nove vrednosti ponude i potražnje punktova A_2 i B_3 su $a_2 = 25 - 4 = 21$ i $b_3 = 4 - 4 = 0$.

Sledi

i/j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	50 16	23 14	12 20	24 0	43 0	0
A_2	35 0	62 0	34 4	10	21	21
A_3	22 0	45 0	52 0	21	14	30
b_j	0	0	0	12	39	

Tabela 9

Sledeći severozapadni ugao u tabeli je polje (2,4). Ponuda u odgovarajućoj vrsti je 21 kartona, a potražnja u odgovarajućoj koloni je 12 kartona. U posmatrano polje upisuje se $x_{24} = \min\{21, 12\} = 12$.

Kako je $a_2 > b_4$, u preostalo polje četvrte kolone se upisuje nula, a nove vrednosti ponude i potražnje punktova A_2 i B_4 su $a_2 = 21 - 12 = 9$ i $b_4 = 12 - 12 = 0$, pa je

i/j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	50 16	23 14	12 20	24 0	43 0	0
A_2	35 0	62 0	34 4	10 12	21	9
A_3	22 0	45 0	52 0	21 0	14	30
b_j	0	0	0	12	39	

Tabela 10

Na kraju, se ponovo uoči severozapadni ugao u tabeli (to je polje (2,5)). Ponuda u odgovarajućoj vrsti je 9 kartona, a potražnja u odgovarajućoj koloni je 39 kartona. U posmatrano polje upisuje se $x_{25} = \min\{9, 39\} = 9$.

Nove vrednosti ponude i potražnje punktova A_2 i B_5 su $a_2 = 9 - 9 = 0$ i $b_5 = 39 - 9 = 30$, pa sledi

i/j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	50 16	23 14	12 20	24 0	43 0	0
A_2	35 0	62 0	34 4	10 12	21 9	0
A_3	22 0	45 0	52 0	21 0	14	30
b_j	0	0	0	12	30	

Tabela 11

Poslednji severozapadni ugao u tabeli je polje (3,5)). Ponuda u odgovarajućoj vrsti je 30 kartona, a potražnja u odgovarajućoj koloni je takođe 30 kartona. U posmatrano polje upisuje se $x_{35} = \min\{30, 30\} = 30$.

Dopustivo bazično rešenje ovog problema dobijeno metodom severozapadnog ugla je

i/j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	50 16	23 14	12 20	24 0	43 0	50
A_2	35 0	62 0	34 4	10 12	21 9	25
A_3	22 0	45 0	52 0	21 0	14 30	30
b_j	16	14	24	12	39	105

Tabela 12

tj. oblika $x = (16, 14,20,0,0,0,0,4,12,9,0,0,0,0,30)^T$. Broj pozitivnih komponenti ovog rešenja je $m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 7$ što znači da je rešenje nedegenerisano. Troškovi transporta koji odgovaraju ovom baznom rešenju su

$$F = 16 \cdot 50 + 14 \cdot 23 + 20 \cdot 12 + 0 \cdot 24 + 0 \cdot 43 + 0 \cdot 35 + 0 \cdot 62 + 4 \cdot 34 + 12 \cdot 10 + 9 \cdot 21 + 0 \cdot 22 + 0 \cdot 45 + 0 \cdot 52 + 0 \cdot 21 + 30 \cdot 14 =$$

$$= 800 + 322 + 240 + 136 + 120 + 189 + 420 = 2\,227 \text{ dinara.}$$

II. Metoda najmanjeg elemenata u matrici cena transporta

Metoda najmanjeg elemenata u matrici cena transporta spada u veoma jednostavne metode za nalaženje početnog dopustivog bazičnog rešenja. Jasno je da, ako bi se bazične promenljive rasporedile na poljima sa najmanjim vrednostima c_{ij}, dobilo bi se rešenje transportnog problema sa manjom vrednošću funkcije cilja nego što se dobija metodom severozapadnog ugla. Ovo je osnovna ideja ove metode. Kod metode severozapadnog ugla se nije vodilo računa o jediničnim prevoznim troškovima, tj. cenama pa je početno rešenje utvrđeno tim postupkom, dosta udaljeno od optimalnog. Kod ove metode se upravo od tih troškova počinje.

Algoritam metode najmanjeg elemenata u matrici cene transporta

Korak 1: Posmatra se matrica cena transporta u celini i uoči se polje sa minimalnom vrednošću, neka je to polje (i, j) koje ima vrednost c_{ij}. Promenljivoj x_{ij} dodeljuje se minimalna vrednost od raspoložive količine robe u skadištu A_i i potrebne količine u punktu B_j. Ukoliko postoji više polja koja imaju minimalnu vrednost u matrici cena transporta bazična postaje promenljiva x_{ij} koja bi dobila najveću vrednost.

Korak 2: Ukoliko je raspoloživa količina robe u skadištu A_i bila veća od potreba punkta B_j onda su potrebe ovog punkta potrošnje u potpunosti zadovoljene i vrednosti cena transporta iz ove kolone se više ne uzimaju u obzir (na ovim poljima može se dodeliti dovoljno velika vrednost M za cenu transporta), a nova vrednost za raspoloživu količinu robe u skladištu A_i se dobija kada se od tekuće vrednosti oduzme vrednost dodeljena promenljivoj x_{ij}. Analogno, ako je vrednost potreba punkta B_j bila veća od raspoložive količine robe u skladištu A_i nova vrednost za potrebe u punktu B_j se dobija kada se od tekuće vrednosti oduzme vrednost dodeljena promenljivoj x_{ij}, a vrednosti cena iz i-te kolone se više ne uzimaju u obzir. Ukoliko je raspoloživa količina robe u skladištu A_i bila jednaka potrebama punkta B_j onda se vrednosti cena transporta iz ove kolone i vrste više ne uzimaju u obzir, a to znači da će dobijeno rešenje biti degenerisano.

Korak 3: Ponovo treba realizovati korak 1, a postupak se završava kada preostane samo jedno polje na kome je moguće dodeliti vrednost promenljivoj. Za ovo polje tada mora važiti da su raspoloživa količina robe u tom skladištu i tekuće potrebe tog punkta potrošnje jednake.

Primer 3: Kompanija ima skladišta u Novom Sadu i u Beogradu, iz kojih transportuje isti materijal za pravljenje jastuka u tri fabrike koje su u Subotici, Zrenjaninu i u Kikindi. Kapacitet novosadskog skladišta je 300 kg materijala, beogradskog skladišta je 600 kg. Po potpisanom ugovoru kompanija mora da transportuje nedeljno 325 kg materijala u Suboticu, 300 kg u Kikindu i 275 kg u Zrenjanin. Poznate su međusobne udaljenosti gradova

Novi Sad - Subotica 103 km
Novi Sad - Kikinda 111 km
Novi Sad - Zrenjanin 51 km
Beograd - Subotica 178 km
Beograd - Kikinda 136 km
Beograd - Zrenjanin 76 km

a cena transporta je 20 dinara po kilometru.

Odrediti dopustivo bazično rešenje metodom najmanjeg elemenata u matrici cena transporta.

Rešenje: Kako je $\sum_{i=1}^{2} a_i = \sum_{j=1}^{5} b_j = 900$, matematički model transportnog problema je zatvoren, pa dopustivo bazično rešenje sigurno postoji.

Podaci se mogu napisati u obliku tabele:

i/j	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	2060	2220	1020	300
A_2	3560	2720	1520	600
b_j	325	300	275	900

Tabela 13

Kod ove metode kreće se od troškova transporta i uoči se polje sa minimalnom vrednošću, to je polje (1,3) koje ima vrednost $c_{13} = 1020$. Promenljivoj x_{13} dodeljuje se minimalna vrednost od raspoložive količine robe u skladištu A_1 i potrebne količine u punktu B_3, tj. $x_{13} = \min\{300{,}275\} = 275$.

Kako je $a_1 > b_3$, potrebe ovog punkta potrošnje su u potpunosti zadovoljene i vrednost cene transporta iz ove kolone se više ne uzima u obzir. Nova vrednost za raspoloživu količinu robe u skladištu A_1 se dobija kada se od tekuće vrednosti oduzme vrednost dodeljena promenljivoj x_{13}, tj. $a_1 = 300 - 275 = 25$, a $b_3 = 275 - 275 = 0$, pa sledi

i/j	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	2060	2220	1020 275	25
A_2	3560	2720	1520 0	600
b_j	325	300	0	

Tabela 14

Zatim se uoči polje sa minimalnom cenom, to je polje (1,1) koje ima vrednost $c_{13} = 2060$. Promenljivoj x_{11} dodeljuje se minimalna vrednost od raspoložive količine robe u skadištu A_1 i potrebne količine u punktu B_1, tj. $x_{13} = \min\{25{,}325\} = 25$.

Kako je $a_1 < b_1$ vrednost cene transporta iz ove vrste se više ne uzima u obzir, a nove vrednosti su $a_1 = 25 - 25 = 0$, a $b_3 = 325 - 25 = 300$, pa je

i/j	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	2060 25	2220 0	1020 275	0
A_2	3560	2720	1520 0	600
b_j	300	300	0	

Tabela 15

Ponovo se uoči polje sa minimalnom cenom, to je polje (2,2) koje ima cenu $c_{22} = 2720$. Promenljivoj x_{22} dodeljuje se minimalna vrednost od raspoložive količine robe u skadištu A_2 i potrebne količine u punktu B_2, tj. $x_{22} = \min\{600{,}300\} = 300$.

Kako je $a_2 > b_2$, vrednost cene transporta iz ove kolone se više ne uzima u obzir, a nove vrednosti su $a_2 = 600 - 300 = 300$, a $b_2 = 300 - 300 = 0$, pa sledi

i/j	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	2060 25	2220 0	1020 275	0
A_2	3560	2720 300	1520 0	300
b_j	300	0	0	

Tabela 16

Postupak se završava jer je preostalo samo jedno polje. Ovom polju se dodeljuje vrednost $x_{21} = 300$. Dopustivo bazično rešenje ovog problema dobijeno metodom najmanjeg elemenata u matrici cena transporta je

i/j	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	2060 25	2220 0	1020 275	300
A_2	3560 300	2720 300	1520 0	600
b_j	325	300	275	900

Tabela 17

tj. oblika $x = (25,0,275,300,300,0)^T$. Broj pozitivnih komponenti rešenja je $m + n - 1 = 2 + 3 - 1 = 4$, što znači da je rešenje nedegenerisano. Cena transporta koja odgovara ovom dopustivom baziČnom rešenju je

$$F = 25 \cdot 2060 + 0 \cdot 2220 + 275 \cdot 1020 + 300 \cdot 3560 + 300 \cdot 2720 + 0 \cdot 1520 =$$

2 216 000 dinara.

III. Metoda minimuma vrste i kolone

Postoje još dve metode za određivanje dopustivog bazičnog rešenja transportnog problema koje su zasnovane na istoj ideji kao metoda najmanjeg elemenata u matrici cena transporta, a to su: metoda najmanjeg elemenata u vrsti i metoda najmanjeg elemenata u koloni matrice cena.

Algoritam metode minimuma vrste

Korak 1: Posmatra se prva vrsta matrice cena transporta i uoči se polje sa minimalnom cenom, neka je to polje $(1, j)$ koje ima vrednost c_{1j}. Promenljivoj x_{1j} dodeljuje se minimalna vrednost od raspoložive ponude proizvođača A_1 i potrebe potrošača B_j. Ukoliko postoji više polja koja imaju minimalnu vrednost u prvoj vrsti matrice cena transporta, bazična postaje promenljiva x_{1j} koja se bira proizvoljno.

Korak 2: Ukoliko su zadovoljene potrebe potrošača, u preostala polja j-te kolone se upišu nule i smanjuje se ponuda prvog proizvođača. Ukoliko prvi proizvođač plasira svu svoju ponudu, u preostala polja prve vrste se upišu nule i smanjuje se potreba j-tog potrošača. Ukoliko je ponuda proizvođača A_1 jednaka potražnji potrošača B_j, tj. ukoliko se negde istovremeno isprazni neko skladište i zadovolje se potrebe neke prodavnice, tada u preostala polja i vrste i kolone se upišu nule, dok u polju sa sledećim najmanjim troškovima u toj vrsti transporta se upiše 0^* koja označava da ta komponenta ima vrednost nula, ali da je bazična, što znači da će se dobiti degenerisano dopustivo bazično rešenje.

Korak 3: Postupak se nastavlja redom po vrstama, a završava se kada ostane samo jedno polje na kome je moguće dodeliti vrednost promenljivoj. Za ovo polje tada mora važiti da su ponuda tog proizvođača i potražnja odgovarajućeg potrošača jednake.

Algoritam za metodu minimuma kolona je analogan.

Primer 4: Za prevoz određene količine istovrsnog tereta unajmljeni su kamioni jednake nosivosti od tri različita kamionska prevoznika i smešteni su na terminalima A_1, A_2, i A_3, odakle se svakodnevno raspoređuju na četiri utovarna mesta B_1, B_2, B_3 i B_4.

Broj raspoloživih kamiona na pojedinom terminalu iznosi respektivno 2, 6 i 7 kamiona dnevno, a broj kamiona potrebnih na pojedinom utovarnom mestu 3, 3, 4 i 5 kamiona dnevno.

Vreme vožnje kamiona od pojedinog terminala do pojedinog utovarnog mesta izraženo u minutama dato je u tabeli

Utovarno m. / Terminal	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	20	11	15	3
A_2	17	14	12	13
A_3	15	12	18	18

Tabela 18

Transport treba organizovati tako da u mogućem najkraćem vremenskom intervalu kamioni stižu do utovarnih mesta, jer svaki minut vožnje košta 1 evro.

Odrediti dopustivo bazično rešenje metodom minimuma vrste.

Rešenje: Podaci se mogu napisati u obliku tabele:

i/j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	20	11	15	13	2
A_2	17	14	12	13	6
A_3	15	12	18	18	7
b_j	3	3	4	5	15

Tabela 19

Kako je $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j = 15$, matematički model transportnog problema je zatvoren, pa sledi da dopustivo bazično rešenje sigurno postoji.

Uoči se polje sa minimalnom vrednošću u prvoj vrsti matrice transporta, to je polje (1,2) sa cenom 11. Promenljivoj x_{12} dodeljuje se minimalna vrednost od raspoložive količine robe u skadištu A_1 i potrebne količine u punktu B_2, tj. $x_{12} = min\{2,3\} = 2$.

Kako se raspoloživa količina robe u skladištu A_1 potrošila, u ostala polja prve vrste se upišu nule i smanjuju se potrebe drugog punkta, tj. $b_2 = 3 - 2 = 1$, pa je

i/j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	20 0	11 2	15 0	13 0	0
A_2	17	14	12	13	6
A_3	15	12	18	18	7
b_j	3	1	4	5	

Tabela 20

Postupak se nastavlja, i uoči se polje sa minimalnom cenom u drugoj vrsti matrice transporta, to je polje (2,3) sa cenom 12. Promenljivoj x_{23} dodeljuje se minimalna vrednost $x_{23} = min\{6,4\} = 4$. U ostala polja treće kolone se upišu nule i smanjuju se zalihe drugog punkta, tj. $a_2 = 6 - 4 = 2$, pa sledi

i/j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	20 0	11 2	15 0	13 0	0
A_2	17	14	12 4	13	2
A_3	15	12	18 0	18	7
b_j	3	1	0	5	

Tabela 21

Sada se posmatraju preostala polja druge vrste, i uoči se polje sa minimalnom cenom, to je polje (2,4) koje ima cenu 13. Promenljivoj x_{24} dodeljuje se vrednost $x_{24} = min\{2,5\} = 2$. U preostala polja druge vrste se upišu nule i smanjuju se potrebe četvrtog punkta, tj. $b_4 = 5 - 2 = 3$, pa je

i/j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	20 0	11 2	15 0	13 0	0
A_2	17 0	14 0	12 4	13 2	0
A_3	15	12	18 0	18	7
b_j	3	1	0	3	

Tabela 22

Polje u trećoj vrsti sa minimalnom cenom 12 je (3,2). Promenljivoj x_{32} dodeljuje se vrednost $x_{32} = min\{7,1\} = 1$. Smanjuju se zalihe trećeg punkta, tj. $a_3 = 7 - 1 = 6$, pa je

i/j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	20 0	11 2	15 0	13 0	0
A_2	17 0	14 0	12 4	13 2	0
A_3	15	12 1	18 0	18	6
b_j	3	1	0	3	

Tabela 23

Uoči se polje (3,1) u trećoj vrsti koje ima cenu 15. Promenljivoj x_{31} dodeljuje se vrednost $x_{31} = min\{3,6\} = 3$. Smanjuju se zalihe trećeg punkta, tj. $a_3 = 6 - 3 = 3$, pa sledi

i/j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	20 0	11 2	15 0	13 0	0
A_2	17 0	14 0	12 4	13 2	0
A_3	15 3	12 1	18 0	18	3
b_j	0	1	0	3	

Tabela 24

Postupak se završava jer je preostalo samo jedno polje na kome je moguće dodeliti vrednost promenljivoj. To je polje (3,4), pa je $x_{34} = 3$.

Dopustivo bazično rešenje ovog problema, dobijeno metodom minimuma vrste je

i/j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	20 0	11 2	15 0	13 0	2
A_2	17 0	14 0	12 4	13 2	6
A_3	15 3	12 1	18 0	18 3	7
b_j	3	3	4	5	15

Tabela 25

tj. oblika $x = (0,2,0,0,0,0,4,2,3,1,0,3)^T$. Broj pozitivnih komponenti rešenja je $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$ što znači da je rešenje nedegenerisano. Vreme prazne vožnje je

$$F = 0 \cdot 20 + 2 \cdot 11 + 0 \cdot 15 + 0 \cdot 13 + 0 \cdot 17 + 0 \cdot 14 + 4 \cdot 12 + 2 \cdot 13 + 3 \cdot 15 + 1 \cdot 12 + 0 \cdot 18 + 3 \cdot 18 = 207 \text{ minuta.}$$

tj. trošak je 207 eura.

<u>Primer 5</u>: Potrebno je iz 4 sladišta A_1, A_2, A_3 i A_4 transportovati džakove cementa do 5 veleprodajnih objekata B_1, B_2, B_3, B_4 i B_5. Na skladištima ima po 5000, 4000, 7000, 6000 džakova cementa, respektivno. Cement se transportuje kamionima u koje staje po 100 džakova. Troškovi transporta po jednom kamionu na svim relacijama kao i tražnja (broj džakova) su dati u tabeli

i/j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	200	300	400	600	700	5000
A_2	300	400	500	800	900	4000
A_3	700	600	400	200	400	7000
A_4	400	500	600	900	800	6000
b_j	5000	4000	4500	6000	2500	22000

Tabela 26

Odrediti dopustivo bazično rešenje metodom minimuma kolone.

Rešenje: Kako je $\sum_{i=1}^{4} a_i = \sum_{j=1}^{5} b_j = 22000$, matematički model transportnog problema je zatvoren, pa sledi da dopustivo bazično rešenje sigurno postoji.

Uoči se polje sa minimalnom cenom u prvoj koloni matrice transporta, to je polje $(1,1)$ sa cenom 200. Promenljivoj x_{11} dodeljuje se minimalna vrednost od raspoložive količine robe u skadištu A_1 i potrebne količine u punktu B_1, tj. $x_{11} = min\{5000,5000\} = 5000$. U preostala polja prve vrste i prve kolone se upišu nule i smanjuju se potrebe i zalihe punkta A_1 i B_1 na nula, tj. $a_1 = b_1 = 0$, pa sledi

i/j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	200 5000	300 0	400 0	600 0	700 0	0
A_2	300 0^*	400	500	800	900	4000
A_3	700 0	600	400	200	400	7000
A_4	400 0	500	600	900	800	6000
b_j	0	4000	4500	6000	2500	22000

Tabela 27

Kako se istovremeno ispraznilo skladište A_1 i zadovoljile potrebe objekta B_1, znači da će se dobiti degenerisano rešenje. Promenljiva x_{21} će biti bazična promenljiva čija je vrednost nula (pa je označena sa 0^*).

Zatim se uoči polje sa minimalnom cenom u drugoj koloni matrice transporta, to je polje $(2,2)$ čija je cena 400. Promenljivoj x_{22} dodeljuje se minimalna vrednost od raspoložive količine robe u skadištu A_2 i potrebne količine u objektu B_2, tj. $x_{22} = min\{4000,4000\} = 4000$. U ostala polja druge vrste i druge kolone se upišu nule i smanjuju se potrebe i zalihe punkta A_2 i B_2 na nula. Pošto se istovremeno ispraznilo skladište A_2 i zadovoljile potrebe objekta B_2, komponenta x_{32} će biti bazična komponenta čija je vrednost nula (0^*).

i/j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	200 5000	300 0	400 0	600 0	700 0	0
A_2	300 0^*	400 4000	500 0	800 0	900 0	0
A_3	700 0	600 0^*	400	200	400	7000
A_4	400 0	500 0	600	900	800	6000
b_j	0	0	4500	6000	2500	22000

Tabela 28

Preostalo polje u trećoj koloni sa minimalnom cenom 400 je (3,3). Promenljivoj x_{33} dodeljuje se vrednost $x_{33} = min\{4500{,}7000\} = 4500$. Smanjuju se zalihe trećeg skladišta, tj. $a_3 = 7000 - 4500 = 2500$, pa je

i/j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	200 5000	300 0	400 0	600 0	700 0	0
A_2	300 0^*	400 4000	500 0	800 0	900 0	0
A_3	700 0	600 0^*	400 4500	200	400	2500
A_4	400 0	500 0	600 0	900	800	6000
b_j	0	0	0	6000	2500	22000

Tabela 29

Polje u četvrtoj koloni sa minimalnom cenom 200 je (3,4). Promenljivoj x_{34} dodeljuje se vrednost $x_{34} = min\{6000{,}2500\} = 2500$. Smanjuju se potrebe četvrtog objekta, tj. $b_4 = 6000 - 2500 = 3500$, pa je

i/j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	200 5000	300 0	400 0	600 0	700 0	0
A_2	300 0^*	400 4000	500 0	800 0	900 0	0
A_3	700 0	600 0^*	400 4500	200 2500	400 0	0
A_4	400 0	500 0	600 0	900	800	6000
b_j	0	0	0	3500	2500	22000

Tabela 30

Preostalo je samo jedno polje u četvrtoj koloni. Promenljivoj x_{44} dodeljuje se vrednost $x_{44} = min\{3500,6000\} = 3500$. Smanjuju se zalihe četvrtog objekta, tj. $a_4 = 6000 - 3500 = 2500$. Na kraju je ostalo polje $(4,5)$, promenljivoj x_{45} dodeljuje se vrednost $x_{45} = min\{2500,2500\} = 2500$.

Dopustivo bazično rešenje ovog problema dobijeno metodom minimuma kolone je

i/j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	200 5000	300 0	400 0	600 0	700 0	5000
A_2	300 0^*	400 4000	500 0	800 0	900 0	4000
A_3	700 0	600 0^*	400 4500	200 2500	400 0	7000
A_4	400 0	500 0	600 0	900 3500	800 2500	6000
b_j	5000	4000	4500	6000	2500	22000

Tabela 31

tj. oblika $x = (5000,0,0,0,0,0^*,4000,0,0,0,0,0^*,4500,2500,0,0,0,0,3500,2500)^T$ i ono je degenerisano jer je broj pozitivnih komponenti rešenja 6, a rang matrice je $m + n - 1 = 4 + 5 - 1 = 8$. Troškovi transporta cementa tj. vrednost funkcije cilja u ovom rešenju je

$$F = 5000 \cdot 200 + 0 \cdot 300 + 0 \cdot 400 + 0 \cdot 600 + 0 \cdot 700 + 0 \cdot 300 + 4000 \cdot 400 + 0 \cdot 500 + 0 \cdot 800 + 0 \cdot 900 + 0 \cdot 700 + 0 \cdot 600 + 4500 \cdot 400 + 2500 \cdot 200 + 0 \cdot 400 + 0 \cdot 400 + 0 \cdot 500 + 0 \cdot 600 + 3500 \cdot 900 + 2500 \cdot 800 = 10\,050\,000.$$

IV. Vogelova aproksimativna metoda - VAM

Vogelova metoda (Reinfeld i Vogel, 1958) je metoda sa složenijom algoritamskom strukturom od prethodnih, međutim kod transportnih problema manjih dimenzija ovom metodom se često nalazi bazično rešenje koje je odmah i optimalno. Metoda je iterativna jer sukcesivno pronalazi bazične komponente. Osnovni princip metode je izračunavanje najvećih razlika između dva najmanja koeficijenta cena u svakoj vrsti i u svakoj koloni matrice cena.

Algoritam Vogelove metode

Korak 1: Izračunavaju se razlike između dve najmanje cene za svaku vrstu i svaku kolonu u matrici cena transporta. Ako u jednoj vrsti ili jednoj koloni postoje dva elementa sa najmanjom vrednošću, onda je razlika za tu vrstu ili kolonu jednaka 0.

Korak 2: Nalazi se vrsta ili kolona sa najvećom razlikom i u njoj polje (i, j) koje ima minimalnu vrednost c_{ij}. Promenjivoj x_{ij} dodeljuje se minimalna vrednost od raspoložive količine robe u skladištu A_i i potrebne količine u punktu B_j. Ukoliko je raspoloživa količina robe u skladištu A_i za izabrano polje (i, j) bila veća od potreba B_j onda su potrebe ovog punkta potrošnje u potpunosti zadovoljene i vrednosti cena transporta iz ove kolone se više ne uzimaju u obzir (na ovim poljima dodeljuje se dovoljno velika vrednost M za cenu transporta). Nova vrednost za raspoloživu količinu robe u skladištu A_i se dobija kada se od tekuće vrednosti oduzme vrednost dodeljena promenljivoj x_{ij}. Slično, ako je vrednost potreba B_j bila veća od raspoložive količine robe u skladištu A_i, nova vrednost za potrebe u punktu B_j se dobija kada se od tekuće vrednosti oduzme vrednost dodeljena promenljivoj x_{ij}, a vrednosti cena transporta iz i-te vrste se više ne uzimaju u obzir. Ukoliko je raspoloživa količina robe u skladištu A_i bila jednaka potrebama punkta B_j onda se vrednosti cena transporta iz ove kolone i vrste više se ne uzimaju u obzir, a to znači da će se dobiti degenerisano početno rešenje.

Korak 3: Ponovo treba realizovati korak 2 (ako je u prethodnoj iteraciji dodeljeno veliko M elementima u jednoj vrsti, onda se računaju nove razlike samo za kolone i obrnuto), a postupak se završava kada preostane samo jedna vrsta ili samo jedna kolona u kojima je moguće dodeliti vrednost promenljivoj. Ovim poljima se dodeljuje vrednost raspoložive količine robe u skladištima (ako je ostala jedna kolona) ili vrednosti nezadovoljenih potreba punktova potrošnje (ako je ostala jedna vrsta). Vrednost troškova za polazno bazično rešenje dobija se kada se pomnože vrednosti jediničnih troškova sa vrednošću odgovarajućih bazičnih promenljivih, a zatim saberu.

Primer 6: Vlasnik dva manja i jednog većeg restorana u Beogradu, dobio je ponudu od tri fabrike za proizvodnju, prodaju i transport testenine. Prva fabrika ima na raspolaganju mesečno 250 kg testenine koja je potrebna restoranima. Druga fabrika ima na raspolaganju 450 kg testenine, a treća fabrika 600 kg testenine mesečno. Vlasniku restorana je potrebno mesečno 350 kilograma testenine u manjim restoranima i 600 kilograma u većem restoranu.

Ponude fabrika a_i i potrebe restorana b_j (po kilogramima testenine), i cene proizvodnje i transporta c_{ij} (u dinarima po kilogramu) date su u tabeli

i/j	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	80	75	78	250
A_2	55	60	49	450
A_3	65	69	72	600
b_j	350	350	600	1300

Tabela 32

Odrediti dopustivo bazično rešenje Vogelovom metodom.

Rešenje: Kako je $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{3} b_j = 1300$, matematički model transportnog problema je zatvoren, pa dopustivo bazično rešenje sigurno postoji.

Za svaku vrstu i svaku kolonu u matrici cena transporta izračunavaju se razlike između dva najmanja elementa.

i/j	B_1	B_2	B_3	a_i	razlika vrste I
A_1	80	75	78	250	$78-75$ = **3**
A_2	55	60	49	450	$55-49$ = **6**
A_3	65	69	72	600	$69-65$ = **4**
b_j	350	350	600	1300	
razlika kolone I	$65-55$ = **10**	$69-60$ = **9**	$72-49$ = **23**		

Tabela 33

Najveća razlika iznosi 23 i to u koloni 3, a najmanja vrednost u toj koloni iznosi 49 i nalazi se u polju (2,3), pa sledi $x_{23} = \min\{450,600\} = 450$. Vrednosti cena transporta iz vrste 2 se više ne uzimaju u obzir i smanjuju se potrebe trećeg restorana, tj. $b_3 = 600 - 450 = 150$. Između 2 najmanja elemenata u koloni računaju se nove razlike, pa sledi

i/j	B_1	B_2	B_3	a_i	razlika vrste I
A_1	80	75	78	250	$78 - 75$ $= \mathbf{3}$
A_2	55 0	60 0	49 450	0	–
A_3	65	69	72	600	$69 - 65$ $= \mathbf{4}$
b_j	350	350	150		
razlika kolone I	$65 - 55$ $= \mathbf{10}$	$69 - 60$ $= \mathbf{9}$	$72 - 49$ $= \mathbf{23}$		
razlika kolone II	$80 - 65$ $= \mathbf{15}$	$75 - 69$ $= \mathbf{6}$	$78 - 72$ $= \mathbf{6}$		

Tabela 34

Najveća razlika sada iznosi 15 i to u koloni 1, a najmanja vrednost u toj koloni iznosi 65 i nalazi se u polju (3,1), pa je $x_{31} = \min\{600{,}350\} = 350$. Vrednosti cena transporta iz kolone 1 se više ne uzimaju u obzir i smanjuje se ponuda treće fabrike, tj. $b_3 = 600 - 350 = 250$. Između 2 najmanja elementa u vrsti razlike se računaju ponovo, pa je

i/j	B_1	B_2	B_3	a_i	razlika vrste I	razlika vrste II
A_1	80 0	75	78	250	$78 - 75$ $= \mathbf{3}$	$78 - 75$ $= \mathbf{3}$
A_2	55 0	60 0	49 450	0	$55 - 49$ $= \mathbf{6}$	–
A_3	65 350	69	72	250	$69 - 65$ $= \mathbf{4}$	$72 - 69$ $= \mathbf{3}$
b_j	0	350	150			
razlika kolone I	$65 - 55$ $= \mathbf{10}$	$69 - 60$ $= \mathbf{9}$	$72 - 49$ $= \mathbf{23}$			
razlika kolone II	–	$75 - 69$ $= \mathbf{6}$	$78 - 72$ $= \mathbf{6}$			

Tabela 35

Najveća razlika iznosi 6 i to u kolonama 2 i 3. Izaberemo kolonu 2. Najmanja vrednost u toj koloni iznosi 69 i nalazi se u polju (3,2), pa je $x_{32} = \min\{250{,}350\} = 250$. Vrednosti cena transporta iz vrste 3 se više ne uzimaju u obzir i smanjuju se potrebe drugog restorana, tj. $b_2 = 350 - 250 = 100$, pa je

i/j	B_1	B_2	B_3	a_i	razlika vrste I	razlika vrste II
A_1	80 0	75	78	250	$78-75$ $= \mathbf{3}$	$78-75$ $= \mathbf{3}$
A_2	55 0	60 0	49 450	0	$55-49$ $= \mathbf{6}$	–
A_3	65 350	69 250	72 0	0	$69-65$ $= \mathbf{4}$	–
b_j	0	100	150			
razlika kolone I	$65-55$ $= \mathbf{10}$	$69-60$ $= \mathbf{9}$	$72-49$ $= \mathbf{23}$			
razlika kolone II	–	–	–			

Tabela 36

Ostala su samo polja u vrsti 1 kao kandidati za bazične promenljive i njima se dodeljuju vrednosti neraspoređene robe iz punktova B_2 i B_3, tj. $x_{12} = \min\{250{,}100\} = 100$, $x_{13} = \min\{150{,}150\} = 150$. Algoritam se završava. Dakle, dopustivo bazično rešenje ovog problema dobijeno Vogelovom metodom je

i/j	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	80 0	75 100	78 150	250
A_2	55 0	60 0	49 450	450
A_3	65 350	69 250	72 0	600
b_j	350	350	600	1300

Tabela 37

tj. oblika $x = (0{,}100{,}150{,}0{,}0{,}450{,}350{,}250{,}0)^T$. Vidi se da je broj pozitivnih komponenti rešenja $m + n - 1 = 3 + 3 - 1 = 5$ što znači da je rešenje nedegenerisano. Ukupni troškovi transporta su

$$F = 0 \cdot 80 + 100 \cdot 75 + 150 \cdot 78 + 0 \cdot 55 + 0 \cdot 60 + 450 \cdot 49 + 350 \cdot 65 + 250 \cdot 69 + 0 \cdot 72 = 81\,250 \text{ dinara.}$$

V. Vogel-Korda metoda

Metoda Vogel-Korda je poznata modifikacija Vogelove metode koju je predložio matematičar Korda. Osnovna ideja metode polazi od činjenice da ako se umanji ili uveća bilo koja vrsta ili kolona u matrici cena transporta za isti iznos, dobija se ekvivalentna matrica. Korda je predložio da se redukcija matrice cena transporta realizuje u dva koraka.

Algoritam Vogel-Korda metode

Korak 1: Od svih elemenata u vrsti matrice cena oduzima se vrednost najmanjeg elementa u toj vrsti, a nakon što se ovaj postupak primeni na svaku vrstu dobija se u svakoj bar jedan elemenat čija je vrednost 0.

Korak 2: Od svih elemenata u koloni redukovane matrice cena oduzima se vrednost najmanjeg elementa u koloni, a pošto se ovaj postupak primeni na svaku kolonu dobija se u svakoj bar jedan elemenat čija je vrednost 0.

Dalje se nad dvostruko redukovanom matricom cena transporta primenjuje Vogelova metoda. Kod primera većih dimenzija primenom Kordine modifikacije dobija se polazno dopustivo bazično rešenje koje je bliže optimalnom rešenju od rešenja koje daje osnovna Vogelova metoda.

Primer 7: Jedna elektrodistribucija se sastoji iz 3 elektrane koje snabdevaju 4 grada. Potreba gradova (u kWh), kapacitet elektrana (u kWh) i trošak distribucije električne energije (1 milion RSD/kWh) su dati u sledećoj tabeli

i/j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1	4	1	7	18
A_2	1	5	5	4	22
A_3	1	2	1	3	10
b_j	10	13	14	13	50

Tabela 38

Odrediti dopustivo bazično rešenje koje daje plan snabdevanja gradova strujom koristeći Vogel-Korda metodu.

Rešenje: Kako je $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j = 500$, matematički model je zatvoren. Najpre se vrši redukcija matrice cena. Od svih elemenata u prvoj, drugoj i trećoj vrsti oduzima se 1, jer je to najmanja vrednost cene u datim vrstama i dobija se sledeća redukovana matrica

i/j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	0	3	0	6	18
A_2	0	4	4	3	22
A_3	0	1	0	2	10
b_j	10	13	14	13	50

Tabela 39

Zatim, sledi redukcija kolona. Prva i treća kolona ostaju iste, jer je u njima 0 najmanja vrednost, a od elemenata druge kolone treba oduzeti 1, a od četvrte kolone 2. Na ovaj način se dobija dvostruko redukovana matrica cena oblika

i/j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	0	2	0	4	18
A_2	0	3	4	1	22
A_3	0	0	0	0	10
b_j	10	13	14	13	50

Tabela 40

na koju se primenjuje Vogelov postupak kao u prethodnom primeru i dobija se dopustivo bazično rešenje

i/j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	0 1	2 3	0 14	4 0	18
A_2	0 9	3 0	4 0	1 13	22
A_3	0 0	0 10	0 0	0 0	10
b_j	10	13	14	13	50

Tabela 41

tj. $x = (1,3,14,0,9,0,0,13,0,10,0,0)^T$. Ovo rešenje ima 6 pozitivnih komponenti, a kako je $m + n - 1 = 3 + 7 - 1 = 6$, znači da je ono nedegenerisano. Ukupan trošak distribucije električne energije po ovom rešenju je

$$F = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 14 \cdot 1 + 0 \cdot 7 + 9 \cdot 1 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 5 + 13 \cdot 4 +$$
$$0 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 3 = 108 \text{ milliona dinara.}$$

VI. Ostale varijacije Vogelove metode

Značaj određivanja optimalnog rešenja transportnog problema velikih dimenzija je proizašao iz mnogobrojnih praktičnih problema industrije, vojske, itd. Pored samog pronalaženja optimalnog rešenja veoma je važno da se do njega dođe na što brži i efikasniji način. Brzina pronalaženja optimalnog rešenja zavisi u mnogome i od metode koja se koristi za određivanje dopustivog bazičnog rešenja. Sa ciljem povećanja efikasnosti razvile su se mnoge modifikacije VAM metode.

Osnovnu VAM metodu su predložili Reinfeld i Vogel u radu [20], 1958. godine, ali su se mnogi autori bavili njome i kasnije. Shimshak je 1981. napravio novu verziju VAM metode u [23]. Goyal u radu [10] i Ramakrishnan u [19] su napravili svoju verziju VAM metode. Uz to, Kirca i Satir [12] su 1990. razvili heurističku metodu, nazvanu TOM (metoda ukupnih mogućih troškova), za dobijanje početnog dopustivog bazičnog rešenja. Balakrishnan je 1990. napravio modifikaciju VAM metode za neuravnotežene transportne probleme [2], a Gass je u [8], 1990. dao detaljan prikaz raznih metodologija za rešenje transportnog problema. Sharma i Sharma su 2000. u radu [22] napravili novi algoritam za rešavanje duala transportnog problema, a Sharma i Prasad su 2003. predložili novi heuristični pristup za dobijanje dobrih početnih rešenja transportnog problema dat u [21]. Njihova metoda se pokazala boljom od osnovne Vogelove metode za pronalaženje početnog bazičnog rešenja.

U radu [17] Mathirajan i Meenakhasi su formulisali novu metodu koja predstavlja kombinaciju VAM i TOM metode. TOM metoda je efikasna metoda koja se bazira na primeni metode najmanjeg elemenata u matrici cena transporta uključujući i funkcije za odlučivanje na matrici ukupnih mogućih troškova (TOC matrici). TOC matrica se dobija sabiranjem matrice vrsta mogućih troškova i matrice kolona mogućih troškova. Matrica vsrta mogućih troškova nastaje kada se od svih elemenata vrste oduzme vrednost najmanjeg elementa u toj vrsti. Matrica kolona mogućih troškova nastaje kada se od svih elemenata kolone oduzme vrednost najmanjeg elementa u toj koloni. Zatim se na TOC matricu primeni metoda najmanjeg elementa u matrici cena transporta.

Korak 1: Popuni se polje sa najmanjom cenom.

Korak 2: U slučaju da postoji više polja sa najmanjom cenom, popuni se polje sa najvećom mogućom alokacijom.

Korak 3: U slučaju da postoji više polja sa maksimalnom alokacijom, popuni se polje koje se prvo javlja.

Na osnovu eksperimentalnih rezultata potvrđeno je u radu [17] da je TOM metoda efikasnija od VAM metode. U 134 problema od testiranih 480 problema, dopustivo bazično rešenje dobijeno TOM metodom je bilo i optimalno, a VAM metoda nije dala nijedno optimalno rešenje, iako je ona poznata po tome da daje bolje dopustivo bazično rešenje od ostalih metoda. Upravo to je i bila glavna motivacija za kombinovanje VAM i TOM metode u radu [17] gde su formulisana 2 nova algoritma.

1. VAM-TOC metoda (VAM primenjen na TOC matrici)

2. VAMT-TOC metoda (VAM sa odlučivanjem primenjen na TOC matrici)

Oba ova algoritma koriste ideju iz rada [12], ali se umesto metode najmanjeg elementa u matrici cena transporta primenjuje VAM metoda na TOC matrici. Oba algoritma poređena su sa TOM metodom i VAM-TC i VAMT-TC metodom i rezultati poređenja prikazani su u radu Mathirajan i Meenakhasi [17]. VAM-TC metoda je VAM metoda primenjena na polaznu matricu cena transporta, a VAMT-TC je VAM metoda sa odlučivanjem primenjena na polaznu matricu cena transporta.

Dakle, u radu [17] poređeno je 5 postupaka na 640 testiranih problema različitih dimenzija 10×20, 10×40, 10×60 i 10×100.

Kao mera efikasnosti posmatran je broj optimalnih rešenja koji pokazuje broj slučaja kad su postupci dali rešenja sa gubitkom optimalnosti između 0-3%. Dobijeni rezultati prikazani su u narednoj tabeli

Gubitak optimalnosti (%)	Broj najboljih rešenja (BNR)				
	Osnovna varijanta Vogelove metode (VAM)		Poboljšana Vogelova metoda (IVAM)		Varijanta Kirca i Satir (TOM)
	VAM-TC	VAMT-TC	VAM-TOC	VAMT-TOC	TOM
0	1	0	128	113	0
0.5	153	130	465	466	79
1	200	183	510	509	132
2	325	277	549	547	212
3	391	314	569	569	234

Tabela 42

na osnovu koje se vidi da su VAM-TOC i VAMT-TOC metode efikasnije za određivanje početnog baznog rešenja transportnog problema od osnovne VAM metode i TOM metode.

U 20% slučajeva, VAM-TOC i VAMT-TOC su dale optimalno rešenje, a u oko 80% slučajeva dobijeno rešenje je veoma blizu optimalnog (0.5% gubitak optimalnosti). Osnovna varijanta VAM-a je bolja od TOM-a u svim slučajevima (0-3% gubitak optimalnosti).

Rad Mathirajan i Meenakshi [17] dokazuje da VAM daje vrlo efikasno početno rešenje kada se primenjuje u kombinaciji sa TOC matricom.

U radu [13] Serdar Korukoglu i Serkan Balli, VAM metoda je poboljšana korišćenjem ukupnih mogućih troškova uzimajući u obzir i alternativne troškove. U radu [17] primenjena je VAM metoda na matricu ukupnih mogućih troškova, i definisana je poboljšana VAM metoda, tj. IVAM metoda koja još dodatno uzima u obzir tri najveće razlike troškova i izračunava alternativne troškove u VAM postupku, a zatim bira minimum od njih.

Algoritam IVAM metode

Korak 1: Odrediti TOC matricu.

Korak 2: Izračunati razlike između dva najmanja elementa za svaku vrstu i svaku kolonu u TOC matrici.

Korak 3: Izabrati tri vrste ili kolone sa najvećim razlikama.

Korak 4: Za tri vrste ili kolone iz koraka 3 se biraju minimalne vrednosti c_{ij} i dodeljuje se tim ćelijama najveća moguća količina robe.

Korak 5: Od tri izabrana polja iz koraka 4, bira se polje sa najmanjim transportnim troškom.

Korak 6: Ponoviti korake od 2 do 5 sve dok se svi uslovi ne zadovolje.

Korak 7: Izračunati vrednost ukupnih troškova transporta.

U datom radu [13] upoređivane su VAM i IVAM metoda. Testirano je po 1000 problema sledećih 12 dimenzija: 5×5, 10×10, 10×20, 10×30, 10×40, 20×20, 10×60, 30×30, 10×100, 40×40, 50×50 i 100×100 (vrsta × kolona). Posmatrane su dve mere efikasnosti

- Prosek broja iteracija do optimalnog rešenja (PBI)
- Broj optimalnih rešenja (BNR).

Za testirane probleme navedenih dimenzija, izračunat je prosečan broj iteracija do optimalnog rešenja što prikazuje sledeća tabela

Dimenzija problema	Prosek broja iteracija do optimalnog rešenja (PBI)	
	VAM	IVAM
5×5	2,198	2,676
10×10	6,155	6,359
10×20	10,063	9,913
10×30	13,264	12,951
10×40	17,761	17,495
20×20	17,007	16,337
10×60	22,869	22,118
30×30	29,912	28,363
10×100	32,561	31,139
40×40	44,801	42,603
50×50	60,505	57,651
100×100	158,890	149,53

Tabela 43

Kao druga mera efikasnosti postupaka korišćen je broj optimalnih rešenja što ilustruje naredna tabela

Dimenzija problema	Broj optimalnih rešenja (BNR)	
	VAM	IVAM
5×5	460	183
10×10	450	365
10×20	420	455
10×30	413	482
10×40	430	499
20×20	414	511
10×60	406	523
30×30	395	557
10×100	394	564
40×40	382	578
50×50	375	587
100×100	321	664

Tabela 44

Na osnovu navedenih rezultata uočava se da je IVAM metoda efikasnija od VAM metode kada su u pitanju problemi velikih dimenzija, dok je za probleme malih dimenzija VAM metoda efikasnija.

U radu [24] potvrđeni su zaključci iz rada [13]. U radu [11] predstavljena je još jedna varijanta VAM metode za određivanje dopustivog baznog rešenja transportnog problema pod nazivom PAM metoda.

Algoritam PAM metode:

Korak 1: Izračunavaju se razlike između najvećeg i najmanjeg elementa u svakoj vrsti matrice cena transporta.

Korak 2: Izračunavaju se razlike između najvećeg i najmanjeg elementa u svakoj koloni matrice cena transporta.

Korak 3: Uočava se vrsta ili kolona sa najvećom razlikom i u njoj polje (i,j) koje ima minimalnu cenu c_{ij}.

Korak 4: Ako postoji više vrsta ili kolona sa najvećom razlikom, treba izabrati polje gde je alokacija maksimalna.

Korak 5: Promenjivoj x_{ij} dodeljuje se minimalna vrednost od raspoložive količine robe u skladištu A_i i potrebne količine u punktu B_j.

Korak 6: Realizuje se ponovo korak 1, tj. računaju se nove razlike za vrste i kolone. Postupak se završava kada preostane samo jedno polje na kome je moguće dodeliti vrednost promenljivoj. Za ovo polje tada mora važiti da su raspoloživa količina robe u tom skladištu i tekuće potrebe tog punkta potrošnje jednake.

Korak 7: Izračunava se vrednost troškova transporta.

Rezultati istraživanja M. A. Hakim-a [11] su pokazali da predloženi aproksimativni metod (PAM) i Vogelova aproksimativna metoda (VAM) daju dopustiva bazična rešenja transportnog problema sa istom vrednošću funkcija cilja.

2.3.1.2. Metode za određivanje optimalnog rešenja

Najpoznatije metode za određivanje optimalnog rešenja transportnog problema su metoda relativnih troškova (metoda skakanja s kamena na kamen) i metoda potencijala.

Sve metode za određivanje optimalnog rešenja transportnog problema koristeći kriterijum optimalnosti, prvo proveravaju da li je početno dopustivo bazično rešenje optimalno. Ukoliko ono nije optimalno, definiše se postupak prelaska na bazično rešenje koje obezbeđuje smanjenje troškova, jer se radi o minimizaciji funkcije cilja.

I. Metoda relativnih troškova - Metoda skakanja s kamena na kamen

Ovo je metoda za pronalaženje optimalnog rešenja problema transporta, za koju je potrebno poznavanje početnog rešenja do kojeg se može doći bilo kojom metodom za pronalaženje početnog dopustivog bazičnog rešenja.

Suština ove metode sastoji se u postupku ispitivanja uticaja potencijalnog korišćenja nebazičnih promenljivih na ”kvalitet” rešenja, odnosno na ukupne transportne troškove.

Ova metoda daje odgovor na sledeća pitanja: 1) da li je početno dopustivo bazično rešenje optimalno i 2) ukoliko nije optimalno, koji je put izmene početnog dopustivog bazičnog rešenja koji će obezbediti dobijanje boljeg rešenja. Algoritam se na isti način primenjuje na novo bolje rešenje, sve do određivanja optimalnog rešenja transportnog problema.

Metoda skakanja s kamena na kamen (kamen je x_{ij}, tj. određen broj jedinica na nekoj bazičnoj komponenti) je postupak kojim se početno rešenje testira izračunavanjem relativnih troškova na nebazičnim komponentama u matrici cena transporta.

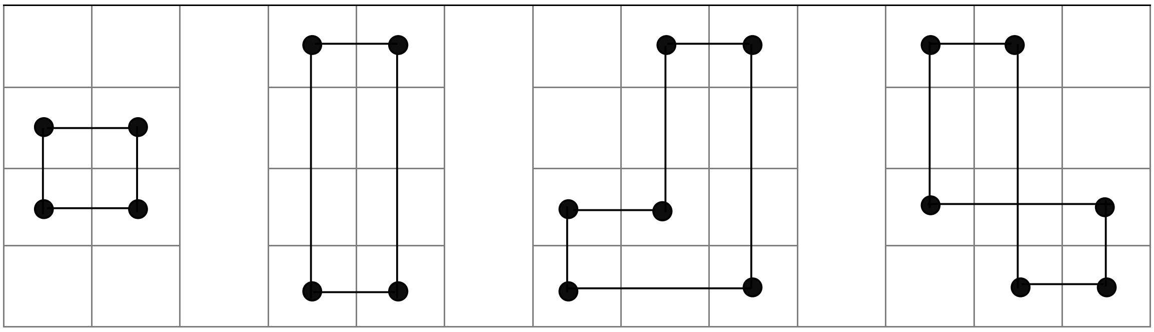
Algoritam metode relativnih troškova

Korak 1: Prvo se izračunavaju relativni troškovi za sve nebazične komponente dopustivog bazičnog rešenja, tj. za sva polja dopustivog rešenja na kojima se ne nalazi teret.

Za izračunavanje relativnih troškova formira se kružni put od svakog nebazičnog polja, po sledećim pravilima:

- Kružni put je zatvorena, izlomljena linija, koja kreće od tog nebazičnog polja za koje se izračunava realativni trošak, a preostala polja koja ga čine moraju biti bazična.
- Broj polja u kružnom putu je uvek paran, najmanje 4, a najviše $m+n$.
- Svaka dva susedna polja povezana su pomoću duži.
- Duži koje idu iz istog polja su međusobno ortogonalne.
- U vrsti ili koloni u kojoj postoji polje kružnog puta, postoje tačno dva polja kružnog puta.
- U kružnom putu prvo polje koje je nebazično se označava sa znakom minus $(-)$, a svako sledeće polje neizmenično sa $+,-,+,-,\ldots$.
- Polja kružnog puta označena sa "$-$" čine negativan polukružni put, a polja označena sa "$+$" čine pozitivan polukružni put.

Na sledećoj slici predstavljeni su primeri kružnog puta



Slika 3

Relativni troškovi c'_{ij} dobijaju se "skakanjem s kamena na kamen" na kružnom putu neizmeničnim oduzimanjem i dodavanjem jediničnih troškova c_{ij} počev od nebazičnog polja za koje se izračunava relativan trošak, a nastavlja se po bazičnim poljima kružnog puta.

Relativni troškovi mogu biti negativni brojevi, pozitivni ili jednaki nuli. Ako je relativni trošak nekog nebazičnog polja pozitivan broj, to pokazuje za koliko novčanih jedinica po jedinici tereta bi se ukupni troškovi transporta smanjili, i obrnuto ako je relativni trošak negativan broj, to pokazuje za koliko bi se novčanih jedinica po jedinici tereta ukupni troškovi transporta povećali ukoliko bi to polje bilo ukljčeno tj. ako se jedna jedinica robe prebaci na to polje. U slučaju da je relativni trošak jednak nuli, ukupni troškovi se neće promeniti.

U tabeli na mestima nebazičnih komponenti se upisuju dobijeni relativni troškovi c'_{ij}, a bazične komponente ostaju nepromenjene.

Korak 2: Ako u tabeli važi za sve nebazične promenljive da su relativni troškovi negativni ili jednaki nuli tj. $c'_{ij} \leq 0$, ona je optimalna. Tada je početno bazično rešenje optimalno i postupak se prekida. Ako u tabeli postoji bar jedno $c'_{ij} > 0$, postupak se nastavlja i prelazi se na Korak 3. Polja na kojima je vrednost relativnih troškova pozitivna, pružaju mogućnost za formiranje boljeg rešenja ukoliko bi se po nekom od njih izvršio transport, jer je tako moguće smanjiti troškove transporta.

Korak 3: Ako je dobijeno više pozitivnih relativnih troškova u tabeli, tada treba izabrati najveću vrednost, jer će se na taj način ukupni troškovi transporta najviše smanjiti. Ako postoje dva ili više najveća pozitivna relativna troška, tada se bira onaj na čije se polje može staviti najviše tereta, kako bi se ukupni troškovi brže smanjivali.

Korak 4: Na polje na kome je najveći pozitivan relativan trošak, stavlja se određena količina tereta, tako što se najpre odredi kružni put od tog polja na isti način kao i kad se računao relativni trošak. Na pozitivnom polukrugu kružnog puta odredi se najmanja vrednost c'_{ij}, koja se označava sa γ, gde $\gamma \geq 0$.

Korak 5: Formira se novo dopustivo bazično rešenje transportnog problema. Sve bazične komponente koje nisu u kružnom putu ostaju nepromenjene. Za sve komponente koje odgovaraju kružnom putu, promene su sledeće: svakoj komponenti negativnog polukružnog puta dodaje se vrednost γ, a od svake komponente pozitivnog polukružnog puta oduzima se γ. Ide se na korak 1.

Svaka promena baze iziskuje izračunavanje novog dopustivog bazičnog rešenja, odnosno još jedne iteracije. Broj iteracija zavisi od veličine i sadržaja transportnog problema, kao i od metode odabrane za određivanje početnog dopustivog bazičnog rešenja.

Primer 8: Metodom relativnih troškova proveriti da li je početno dopustivo bazično rešenje dobijeno u Primeru 2 optimalno.

Rešenje: U datom primeru je metodom severozapadnog ugla dobijeno početno dopustivo bazično rešenje problema transporta proizvoda mlekara u prodavnice (Tabela 12). Uočava se da postoji 8 nebazičnih komponenti i za njih se izračunavaju relativni troškovi c'_{ij}. Formira se kružni put od svakog nebazičnog polja preko bazičnih polja i dobijaju se sledeći relativni troškovi c'_{ij}:

$$c'_{14} = -c_{14} + c_{24} - c_{23} + c_{13} = -24 + 10 - 34 + 12 = -36$$

$$c'_{15} = -c_{15} + c_{25} - c_{23} + c_{13} = -43 + 21 - 34 + 12 = -44$$

$$c'_{21} = -c_{21} + c_{11} - c_{13} + c_{23} = -35 + 50 - 12 + 34 = 37$$

$$c'_{22} = -c_{22} + c_{12} - c_{13} + c_{23} = -62 + 23 - 12 + 34 = -17$$

$$c'_{31} = -c_{31} + c_{11} - c_{13} + c_{23} - c_{25} + c_{35} = -22 + 50 - 12 + 34 - 21 + 14 = 43$$

$$c'_{32} = -c_{32} + c_{12} - c_{13} + c_{23} - c_{25} + c_{35} = -45 + 23 - 12 + 34 - 21 + 14 = -7$$

$$c'_{33} = -c_{33} + c_{23} - c_{25} + c_{35} = -52 + 34 - 21 + 14 = -25$$

$$c'_{34} = -c_{34} + c_{24} - c_{25} + c_{35} = -21 + 10 - 21 + 14 = -18.$$

Dobijeni relativni troškovi c'_{ij} se upisuju na mesta nebazičnih komponenti u tabeli, bazične komponente ostaju nepromenjene, pa sledi

i/j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	50 16	23 14	12 20	24 **-36**	43 **-44**	50
A_2	35 **37**	62 **-17**	34 4	10 12	21 9	25
A_3	22 **43**	45 **-7**	52 **-25**	21 **-18**	14 30	30
b_j	16	14	24	12	39	105

Tabela 45

Kako postoje pozitivni relativni troškovi na nebazičnim komponentama, to znači da početno rešenje dobijeno metodom severozapadnog ugla nije optimalno, pa je potrebno promeniti bazu, tj. pronaći drugo dopustivo bazično rešenje.

Od posmatranih pozitivnih relativnih troškova iz tabele se bira najveći, koji se nalazi u polju (3,1), gde treba staviti određenu količinu tereta. Teret se seli kružnim putem, po kojem je izračunat relativni trošak za to polje.

i/j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	50 16	23 14	12 20	24 **-36**	43 **-44**	50
A_2	35 **37**	62 **-17**	34 4	10 12	21 9	25
A_3	22 **43**	45 **-7**	52 **-25**	21 **-18**	14 30	30
b_j	16	14	24	12	39	105

Tabela 46

Teret se stavlja na polje (3,1), sa polja (1,1) se oduzima, pa se ponovo dodaje na polje (1,3) i oduzima se sa polja (2,3), dodaje se na (2,5) i na kraju se oduzima od polja (3,5). Posmatraju se polja sa kojih se oduzima teret, tj. polje na + polukružnom putu i izabere se najmanja količina, tj. $\gamma = min\{16,4,30\} = 4$. Posle premeštanja tereta dobija se novo dopustivo bazično rešenje

i/j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	50 12	23 14	12 24	24 0	43 0	50
A_2	35 0	62 0	34 0	10 12	21 13	25
A_3	22 4	45 0	52 0	21 0	14 26	30
b_j	16	14	24	12	39	105

Tabela 47

Ponovo se računaju relativni troškovi za nebazične komponente ovog rešenja, na isti način kao u prethodnom koraku

$$c'_{14} = -c_{14} + c_{24} - c_{25} + c_{35} - c_{31} + c_{11} = -24 + 10 - 21 + 14 - 22 + 50 = 7$$

$$c'_{15} = -c_{15} + c_{35} - c_{31} + c_{11} = -43 + 14 - 22 + 50 = -1$$

$$c'_{21} = -c_{21} + c_{25} - c_{35} + c_{31} = -35 + 21 - 14 + 22 = -6$$

$$c'_{22} = -c_{22} + c_{25} - c_{35} + c_{31} - c_{11} + c_{12} = -62 + 21 - 14 + 22 - 50 + 23 = -60$$

$$c'_{23} = -c_{23} + c_{25} - c_{35} + c_{31} - c_{11} + c_{13} = -34 + 21 - 14 + 22 - 50 + 12 = -43$$

$$c'_{32} = -c_{32} + c_{312} - c_{11} + c_{12} = -45 + 22 - 50 + 23 = -50$$

$$c'_{33} = -c_{33} + c_{31} - c_{11} + c_{13} = -52 + 22 - 50 + 12 = -68$$

$$c'_{34} = -c_{34} + c_{24} - c_{25} + c_{35} = -21 + 10 - 21 + 14 = -18.$$

Dobijeni relativni troškovi c'_{ij} se upisuju na mesta nebazičnih komponenti u tabeli, a bazične komponente ostaju nepromenjene, pa je

i/j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	50 12	23 14	12 24	24 **7**	43 **-1**	50
A_2	35 **-6**	62 **-60**	34 **-43**	10 12	21 13	25
A_3	22 4	45 **-50**	52 **-68**	21 **-18**	14 26	30
b_j	16	14	24	12	39	105

Tabela 48

Pošto postoje pozitivni relativni troškovi ni ovo rešenje nije optimalano, pa je potrebno promeniti bazu, tj. odrediti novo dopustivo bazično rešenje.

Pozitivni relativni trošak se u tabeli nalazi u polju (1,4), gde treba staviti određenu količinu tereta. Teret se seli kružnim putem po kojem je izračunat relativni trošak za to polje.

i/j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	50 12	23 14	12 24	24 **7**	43 **-1**	50
A_2	35 **-6**	62 **-60**	34 **-43**	10 12	21 13	25
A_3	22 4	45 **-50**	52 **-68**	21 **18**	14 26	30
b_j	16	14	24	12	39	105

Tabela 49

Teret se stavlja na polje (1,4), sa polja (2,4) se oduzima, pa se ponovo dodaje na polje (2,5) i oduzima se od polja (3,5), dodaje se na (3,1) i na kraju se oduzima sa (1,1). Posmatraju se polja sa kojih se oduzima teret i izabere se najmanja količina, tj. $\gamma = min\{12,26,12\} = 12$. Posle premeštanja tereta dobija se vrednost nula na poljima (1,1) i (2,4), ali samo jedno polje može postati nebazično, pa će komponenta x_{11} biti bazična komponenta čija je vrednost nula (0^*), što znači da je novodobijeno dopustivo bazično rešenje degenerisano.

i/j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	50 0^*	23 14	12 24	24 12	43 0	50
A_2	35 0	62 0	34 0	10 0	21 25	25
A_3	22 16	45 0	52 0	21 0	14 14	30
b_j	16	14	24	12	39	105

Tabela 50

Zatim se ponovo računaju relativni troškovi za nebazične komponente ovog dopustivog rešenja, na isti način kao u predhodnim koracima

$$c'_{15} = -c_{15} + c_{35} - c_{31} + c_{11} = -43 + 14 - 2 + 502 = -1$$

$$c'_{21} = -c_{21} + c_{25} - c_{35} + c_{31} = -35 + 21 - 14 + 22 = -6$$

$$c'_{22} = -c_{22} + c_{25} - c_{35} + c_{31} - c_{11} + c_{12} = -62 + 21 - 14 + 22 - 50 + 23 = -60$$

$$c'_{23} = -c_{23} + c_{25} - c_{35} + c_{31} - c_{11} + c_{13} = -34 + 21 - 14 + 22 - 50 + 12 = -43$$

$$c'_{24} = -c_{24} + c_{25} - c_{35} + c_{31} - c_{11} + c_{14} = -10 + 21 - 14 + 22 - 50 + 24 = -7$$

$$c'_{32} = -c_{32} + c_{31} - c_{11} + c_{12} = -45 + 22 - 50 + 23 = -50$$

$$c'_{33} = -c_{33} + c_{31} - c_{11} + c_{13} = -52 + 22 - 50 + 12 = -68$$

$$c'_{34} = -c_{34} + c_{31} - c_{11} + c_{14} = -21 + 22 - 50 + 24 = -25.$$

Dobijeni relativni troškovi c'_{ij} se upisuju na mesta nebazičnih komponenti u tabeli, a bazične komponente ostaju nepromenjene

i/j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	50 0^*	23 14	12 24	24 12	43 **-1**	50
A_2	35 **-6**	62 **-60**	34 **-43**	10 **−7**	21 25	25
A_3	22 16	45 **-50**	52 **-68**	21 **-25**	14 14	30
b_j	16	14	24	12	39	105

Tabela 51

Dobijeno rešenje je optimalno jer su za sve nebazične komponente relativni troškovi negativni. Dakle, optimalno rešenje problema je

$$x^* = (0^*, 14{,}24{,}12{,}0{,}0{,}0{,}0{,}0{,}25{,}16{,}0{,}0{,}0{,}14)^T,$$

a vrednost funkcije cilja u njemu je

$$F = 0 \cdot 50 + 14 \cdot 23 + 24 \cdot 12 + 12 \cdot 24 + 0 \cdot 43 + 0 \cdot 35 + 0 \cdot 62 + 0 \cdot 34 + 0 \cdot 10 + 25 \cdot 21 + 16 \cdot 22 + 0 \cdot 45 + 0 \cdot 52 + 0 \cdot 21 + 14 \cdot 14 = 1971 \text{ dinara},$$

što predstavlja minimalne troškove transporta.

II. MODI metoda - Metoda potencijala

Ova metoda služi za pronalaženje optimalnog rešenja transportnog problema i predstavlja pojednostavljenje metode relativnih troškova koju je na osnovu opšte simpleks metode razvio Dantzig. Najpre je potrebno odrediti dopustivo bazično rešenje nekom od prethodno navedenih metoda. Dalji postupak u pronalaženju optimalnog rešenja transportnog problema razvija se po logici simpleks metode. Metoda potencijala se razlikuje od metode relativnih troškova po načinu izračunavanja relativnih troškova, koji se u ovom slučaju izračunavaju uz pomoć dualnih promeljivih.

Kao što je pomenuto matematički model transportnog problema je oblika

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to min$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i\,, \qquad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j\,, \qquad j = 1, 2, \dots, n\,.$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n\,,$$

odnosno

$$-F(x) = -\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to max$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i\,, \qquad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j\,, \qquad j = 1,2,\dots,n\,.$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1,2,\dots,m;\ j = 1,2,\dots,n.$$

Ovakav problem naziva se primalni problem ili primal, u kome ukupan broj nepoznatih x_{ij} iznosi mn, a broj ograničenja je $m+n$.

Ovom problemu se može pridružiti odgovarajući dual, koji ima sledeću formu:

$$-G(d) = \sum_{i=1}^{m} a_i\,u_i - \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \ \rightarrow min$$

$$u_i - v_j \geq -c_{ij}, \qquad i = 1,2,\dots,m, \qquad j = 1,2,\dots,n$$

$$u_i \in \mathbb{R}, \qquad v_j \in \mathbb{R},$$

odnosno

$$G(d) = \sum_{j=1}^{n} b_j v_j - \sum_{i=1}^{m} a_i\,u_i \ \rightarrow max \tag{12}$$

$$v_j - u_i \leq c_{ij}, \qquad i = 1,2,\dots,m, \qquad j = 1,2,\dots,n$$

$$u_i \in \mathbb{R}, \qquad v_j \in \mathbb{R}, \tag{13}$$

pri čemu su dualne promenljive u_i, $i = 1,2,\dots,m$ i $(-v_j)$, $j = 1,2,\dots,n$.

Dual ima onoliko promenljivih koliko primal ima ograničenja i onoliko ograničenja koliko primal ima promenljivih. Ukupan broj promenljivih u_i i v_j definisan funkcijom cilja (12) pri skupu ograničenja (13) iznosi $m+n$, dok je broj ograničenja mn.

Teorema 2.3.1.2.1. Dopustivo bazično rešenje transportnog problema je optimalno rešenje problema ukoliko postoje potencijali u_i i v_j, $i = 1,2,\dots,m$; $j = 1,2,\dots,n$ takvi da važi $v_j - u_i = c_{ij}$ za bazične promenljive x_{ij}, a $v_j - u_i \leq c_{ij}$ za nebazične promenljive x_{ij}.

Dokaz: Pokazano je da transportni problem uvek ima optimalno rešenje i da je $F(x) \geq 0$. Na osnovu dualnosti u linearnom programiranju je poznato da je vrednost funkcije cilja u optimalnom rešenju primala ista kao vrednost funkcije cilja u optimalnom rešenju duala. Znači $F_p = F_d$, tj.

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j v_j - \sum_{i=1}^{m} a_i\,u_i$$

$$0 = \sum_{j=1}^{n} b_j v_j - \sum_{i=1}^{m} a_i\,u_i - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$0=\sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{i=1}^{m} x_{ij}-\sum_{i=1}^{m} u_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij}-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$0=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} v_j x_{ij}-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} u_i x_{ij}-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$0=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(v_j-u_i-c_{ij})x_{ij}.$$

Za bazične promenljive $x_{ij}>0$ prethodna jednakost će važiti ako je $v_j-u_i-c_{ij}=0$, tj $v_j-u_i=c_{ij}$, a za nebazične promenljive je $x_{ij}=0$, pa je ona svakako ispunjena, ali mora da važi i uslov dopustivosti tj. $v_j-u_i\leq c_{ij}$. ■

Algoritam MODI metode

Korak 1: Formira se tabela sa m vrsta i n kolona koja odgovara početnom dopustivom bazičnom rešenju x. Kako za bazične komponente važi $v_j-u_i=c_{ij}$, ispišu se sve jednačine koje odgovaraju bazičnim komponentama. Pošto ima $m+n-1$ bazičnih komponenti, skup svih takvih jednačina koje odgovaraju samo bazičnim komponentama predstavlja sistem od $m+n-1$ linearnih jednačina sa $m+n$ nepoznatih (u_i, $i=1,2,\dots,m$, i v_j, $j=1,2,\dots,n$). U opštem slučaju potencijali mogu biti pozitivni, negativni ili jednaki nuli. Od $m+n$ promenljivih jedna promenljiva bira se proizvoljno kao slobodna promenljiva i uzima se da je njena vrednost nula. Rešavanjem sistema dobijaju se odgovarajući potencijali u_i, $i=1,2,\dots,m$ i $v_j, j=1,2,\dots,n$. Sad se prave razlike potencijala

$$\overline{c_{ij}}=v_j-u_i,\qquad i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,n$$

i unose se u tabelu, a nakon toga izračunavaju se jedinične promene troškova

$$\Delta_{ij}=\overline{c_{ij}}-c_{ij},\qquad i=1,2,\dots,m;\ \ j=1,2,\dots,n.$$

Vrednost jedinične promene troškova može da bude negativna, pozitivna ili jednaka nuli. U odgovarajuća polja tabele unose se i cene transporta u gornjem desnom uglu svakog polja.

Ako su u tabeli svi $\Delta_{ij}\leq 0$, $i=1,2,\dots,m$; $j=1,2,\dots,n$, tabela je optimalna. Tada je početno dopustivo bazično rešenje optimalno i postupak se prekida. Ako u tabeli postoji bar jedno $\Delta_{ij}>0$, $i=1,2,\dots,m$; $j=1,2,\dots,n$ postupak se nastavlja i prelazi se na korak 2, jer polja na kojima je vrednost jedinične promene troškova pozitivna, pružaju mogućnost za formiranje boljeg rešenja, tj. omogućavaju transport sa manjim troškovima.

Korak 2: U tabeli ima pozitivnih elemenata Δ_{ij}, pa se od svih pozitivnih elemenata bira najveći i označava se sa $\Delta_{i_0 j_0}$. On odgovara komponenti $x_{i_0 j_0}$ dopustivog baznog rešenja i ta komponenta se naziva pivot (ishodni element). To je nebazična promenljiva koja će u narednom koraku ući u bazu.

Korak 3: Da bi se odredilo koja promenljiva izlazi iz baze, formira se kružni put po sledećim pravilima:

- Kružni put je zatvorena izlomljena linija.
- Sva polja kružnog puta sem pivota su bazične komponente.
- Svaka dva susedna polja povezana su pomoću duži.
- Duži koje idu iz istog polja su međusobno ortogonalne.
- U vrsti ili koloni u kojoj postoji polje kružnog puta, postoje tačno dva polja kružnog puta.
- U kružnom putu početno polje (pivot) se označava sa znakom plus $(+)$, a svako sledeće polje neizmenično sa $-, +, -, +, ...$, tako da svaka dva susedna polja imaju suprotan znak.
- Polja kružnog puta označena sa $" - "$ čine negativan polukružni put, a polja označena sa $" + "$ čine pozitivan polukružni put.

Korak 4: Na negativnom polukružnom putu odredi se najmanja vrednost x_{ij}, koja se označava sa θ, gde je $\theta \geq 0$. Formira se novo dopustivo bazično rešenje transportnog problema na sledeći način: sve komponente koje ne pripadaju kružnom putu ostaju nepromenjene, svakoj komponenti pozitivnog polukružnog puta dodaje se vrednost θ, a od svake komponente negativnog polukružnog puta oduzima se θ.

Ako se prilikom oduzimanja θ od komponenti negativnog polukružnog puta dobija vrednost 0 na više polja, znači da će novo dopustivo bazično rešenje biti degenerisano i jedna od nula komponenti se posmatra kao bazična komponenta i ona se označava sa 0^*, a ostale nule se smatraju za nebazične komponente.

Ako na negativnom polukružnom putu postoji bazična komponenta koja je jednaka nuli, tj. ako je $\theta = 0$, tada jedna bazična komponenta 0^* postaje nebazična, a komponenta $x_{i_0 j_0}$ dobija vrednost 0^* i postaje bazična. U tom slučaju vrednost funkcije cilja se ne menja.

Korak 5: Prelazi se na korak 1.

Ovaj postupak se ponavlja sve dok ne bude zadovoljen kriterijum optimalnosti.

Primer 9: Odrediti optimalan plan kretanja kamiona u primeru 4, odnosno raspored kamiona na pojedina utovarna mesta, uzevši u obzir potrebe utovarnih mesta i broj raspoloživih kamiona na pojedinim terminalima, s ciljem da ukupno dnevno vreme tzv. "prazne vožnje" bude minimalno, odnosno da troškovi budu minimalni.

Rešenje: U primeru 4, određeno je dopustivo bazično rešenje ovog problema i ono je oblika $x = (0,2,0,0,0,0,4,2,3,1,0,3)^T$. Metodom potencijala se sad proverava da li je to rešenje optimalno.

Formira se tabela sa 3 vrste i 4 kolone koja odgovara datom dopustivom bazičnom rešenju. Svakom proizvođaču A_i treba dodeliti potencijal u_i, $i = 1, 2, 3$, a svakom potrošaču B_j potencijal $v_j, j = 1,2,3,4$. Pošto za bazične komponente x_{ij} važi $v_j - u_i = c_{ij}$ dobija se sistem jednačina

$$v_1 - u_3 = 15 \qquad v_2 - u_3 = 12 \qquad v_4 - u_2 = 13$$

$$v_2 - u_1 = 11 \qquad v_3 - u_2 = 12 \qquad v_4 - u_3 = 18.$$

Skup ovih jednačina koje odgovaraju samo bazičnim komponentama, predstavlja sistem od 6 linearnih jednačina sa 7 nepoznatih. Za slobodnu promenljivu uzima se $u_3 = 0$, jer je to potencijal koji odgovara vrsti sa najviše baznih polja.

Rešavanjem sistema jednačina dobijaju se potencijali:

$$u_1 = 1, u_2 = 5, u_3 = 0, v_1 = 15, v_2 = 12, v_3 = 17, v_4 = 18$$

i formiraju se vrednosti $\overline{c_{ij}} = v_j - u_i$, $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3,4$.

$\overline{c_{ij}} = v_j - u_i$ $\overline{c_{ij}} = v_j - u_i$	$v_1 = 15$	$v_2 = 12$	$v_3 = 17$	$v_4 = 18$
$u_1 = 1$	14	11	16	17
$u_2 = 5$	10	7	12	13
$u_3 = 0$	15	12	17	18

Tabela 52

Na osnovu $\overline{c_{ij}}$ i cena c_{ij}, $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3,4$ izračunavaju se jedinične promene troškova Δ_{ij}, $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3,4$ koje su date u narednoj tabeli

$\Delta_{ij} = \overline{c_{ij}} - c_{ij}$ $\Delta_{ij} = \overline{c_{ij}} - c_{ij}$				
	-6	0	1	4
	-7	-7	0	0
	0	0	-1	0

Tabela 53

Kako ne važi $\Delta_{ij} \leq 0$ za sve $i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3,$ tj. postoji $\Delta_{ij} > 0$, ovo dopustivo bazično rešenje nije optimalno, pa se sada formira novo dopustivo bazično rešenje. Bira se maksimalan pozitivan element u tabeli i to je, $\max_{i,j} \Delta_{ij} = 4$. Ta vrednost odgovara nebazičnoj promenljivoj x_{14} koje će u sledećem koraku ući u bazu. Da bi se odredilo koji element izlazi iz baze, formira se kružni put po navedenim pravilima i on je predstavljen u narednoj tabeli.

i/j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	20 0	11 2	15 0	13 0	2
A_2	17 0	14 0	12 4	13 2	6
A_3	15 3	12 1	18 0	18 3	7
b_j	3	3	4	5	15

Tabela 54

Na negativnom polukrugu kružnog puta odredi se najmanja vrednost x_{ij}, koja se označava sa θ, $\theta = \min\{2,3\} = 2$, i ta vrednost se oduzima od elemenata negativnog polukruga, a dodaje elementima pozitivnog polukruga i tako se dobija novo dopustivo bazično rešenje problema oblika

i/j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	20 0	11 0	15 0	13 2	2
A_2	17 0	14 0	12 4	13 2	6
A_3	15 3	12 3	18 0	18 1	7
b_j	3	3	4	5	15

Tabela 55

Sad se proverava optimalnost ovog dopustivog baz̆ičnog rešenja na isti način kao u prethodnim koracima. Razlike potencijala koje odgovaraju baz̆ičnim komponentima su

$$v_1 - u_3 = 15 \qquad v_3 - u_2 = 12 \qquad v_4 - u_2 = 13$$

$$v_2 - u_3 = 12 \qquad v_4 - u_1 = 13 \qquad v_4 - u_3 = 18,$$

a rešenje ovog sistema jednačina je

$$u_1 = 5, u_2 = 5, u_3 = 0, v_1 = 15, v_2 = 12, v_3 = 17, v_4 = 18,$$

pa sledi

$\overline{c_{ij}} = v_j - u_i$ $\overline{c_{ij}} = v_j - u_i$	$v_1 = 15$	$v_2 = 12$	$v_3 = 17$	$v_4 = 18$
$u_1 = 5$	10	7	12	13
$u_2 = 5$	10	7	12	13
$u_3 = 0$	15	12	17	18

Tabela 56

$\Delta_{ij}= \overline{c_{ij}} - c_{ij}$ $\Delta_{ij}= \overline{c_{ij}} - c_{ij}$				
	-10	-4	-3	0
	-7	-7	0	0
	0	0	-1	0

Tabela 57

Pošto su sve jedinične promene troškova nepozitivne, tj. $\Delta_{ij} \leq 0$ za $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3,4$, to znači da je ovo dopustivo bazično rešenje dato u tabeli 55 optimalno. Dakle, optimalno rešenje problema je $x^* = (0,0,0,2,0,0,4,2,3,3,0,1)^T$. Broj pozitivnih komponenti rešenja je 6, a kako je $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$ to znači da je ovo rešenje nedegenerisano. Vreme prazne vožnje je

$$F = 0 \cdot 20 + 0 \cdot 11 + 0 \cdot 15 + 2 \cdot 13 + 0 \cdot 17 + 0 \cdot 14 + 4 \cdot 12 + 2 \cdot 13 +$$

$$3 \cdot 15 + 3 \cdot 12 + 0 \cdot 18 + 1 \cdot 18 = 199 \text{ minuta, tj. troškovi su 199 eura.}$$

III. Z-P metoda

U radu [24] je predstavljena nova metoda za određivanje optimalnog rešenja transportnog problema. Ova metoda je nazvana Z-P metoda (zero point method) i ona eliminiše degeneraciju. Z-P metodom se optimalno rešenje dobija u manjem broju iteracija nego MODI metodom.

Algoritam Z-P metode

Korak 1: Formira se tabela transportnog problema.

Korak 2: Od svih elemenata u vrsti matrice cena oduzima se vrednost najmanjeg elementa u toj vrsti i to se primeni na sve vsrte. Zatim se od svih elemenata u koloni dobijene matrice oduzima vrednost najmanjeg elementa u toj koloni i to se primeni na sve kolone.

Korak 3: Redukovana matrica dobijena u koraku 2, ima u svakoj vrsti i koloni bar jedan elemenat čija je vrednost nula. Određuje se sufiks za svaki takav elemenat. Sufiks elementa čije je vrednost nula se izračunava tako što se saberu cene njegovih suseda i taj zbir se podeli sa brojem suseda.

Korak 4: Odredi se maksimalan sufiks. Ako je on jedinstven popunjava se polje koje odgovara tom sufiksu. Ukoliko postoji više maksimalnih sufiksa onda se među poljima koja njima odgovaraju bira polje sa maksimalnom potražnjom.

Korak 5: Vrste za koje je zadovoljena ponuda i kolone u kojima je zadovoljena potražnja se više ne uzimaju u obzir. Ukoliko dobijena matrica ne sadrži u svakoj vrsti i koloni bar jedan elemenat čija je vrednost 0, ide se na korak 2, a inače na korak 6.

Korak 6: Koraci od 3 do 5 se ponavljaju sve dok se ne dobije optimalna cena transporta.

Primer 10: Odrediti optimalan plan transporta sledećeg problema Z-P metodom.

i/j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	a_i
A_1	2	3	5	11	4	2	3
A_2	4	7	9	5	10	4	4
A_3	12	25	9	6	26	12	3
A_4	8	7	9	24	10	8	3
b_j	1	2	3	3	2	2	13

Tabela 58

Rešenje: Kako je $\sum_{i=1}^{4} a_i = \sum_{j=1}^{6} b_j = 13$, matematički model transportnog problema je zatvoren. Redukovana matrica problema je

i/j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	a_i
A_1	0	1	1	9	0	0	3
A_2	0	3	3	1	4	0	4
A_3	6	19	1	0	18	6	3
A_4	1	0	0	17	1	1	3
b_j	1	2	3	3	2	2	13

Tabela 59

Izračunava se sufiks za svaki element čija je vrednost nula.

$S_{11} = \frac{1+0}{2} = 0.5$ $\quad S_{21} = \frac{0+3+6}{3} = 3$ $\quad S_{42} = \frac{1+19+0}{3} = 6.7$

$S_{15} = \frac{9+4+0}{3} = 4.3$ $\quad S_{26} = \frac{0+4+6}{3} = 3.3$ $\quad S_{43} = \frac{0+17+1}{3} = 6$

$S_{16} = \frac{0+0}{2} = 0$ $\quad S_{34} = \frac{1+18+17+1}{4} = 9.3$

Kako je $\max(S_{ij}) = S_{34} = 9.3$, na polje x_{34} upisuje se $x_{34} = \min\{3,3\} = 3$. Vrednosti cena transporta iz treće vrste i četvrte kolone se više ne uzimaju u obzir. Zatim se ponovo izračunavaju sufiksi za preostale elemente čija je vrednost nula.

Postupak se nastavlja analogno sve dok se ne popuni cela tabela.

Optimalno rešenje problema prikazano u narednoj tabeli je

$$x^* = (0,1,0,0,2,0,1,1,0,0,0,2,0,0,0,3,0,0,0,0,3,0,0,0)^T,$$

i/j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	a_i
A_1	2 / 0	3 / 1	5 / 0	11 / 0	4 / 2	2 / 0	3
A_2	4 / 1	7 / 1	9 / 0	5 / 0	10 / 0	4 / 2	4
A_3	12 / 0	25 / 0	9 / 0	6 / 3	26 / 0	12 / 0	3
A_4	8 / 0	7 / 0	9 / 3	24 / 0	10 / 0	8 / 0	3
b_j	1	2	3	3	2	2	13

Tabela 60

a vrednost funkcije cilja u njemu je

$$F = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 11 + 2 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 7 + 0 \cdot 9 +$$
$$0 \cdot 5 + 0 \cdot 10 + 2 \cdot 4 + 0 \cdot 12 + 0 \cdot 25 + 0 \cdot 9 + 3 \cdot 6 + 0 \cdot 26 +$$
$$0 \cdot 12 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 7 + 3 \cdot 9 + 0 \cdot 24 + 0 \cdot 10 + 0 \cdot 8 = 75,$$

što predstavlja minimalne troškove transporta.

2.4. Otvoren transportni problem

Transportni problem nije zatvoren ukoliko ne postoji ravnoteža između ukupne količine proizvodnje tj. ponude i ukupne količine potrošnje tj. potražnje i takvi transportni problemi se nazivaju otvoreni transportni problemi. U praksi su otvoreni problemi mnogo češći od zatvorenih. Dakle, za otvoren transportni problem važi

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Za analizu, određivanje, definisanje i planiranje lokacija proizvodnih i potrošačkih kapaciteta koristi se upravo otvoreni transportni problem.

Ako nije ispunjen uslov ravnoteže ponude i potražnje

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

potrebno je uvesti fiktivno skladište (proizvođača) sa odgovarajućom ponudom ili fiktivnu prodavnicu (potrošača) sa odgovarajućom potražnjom. Postoje dve vrste otvorenog transportnog problema s obzirom na to da li se višak javlja na strani ponude ili potražnje i to su:

- otvoren transportni problem sa viškom u ponudi
- otvoren transportni problem sa viškom u potražnji.

Otvoren transportni problem uvek treba prevesti prvo u zatvoreni transportni problem, a zatim ga rešavati pomoću prethodno navedenih metoda za zatvorene transportne probleme.

2.4.1. Otvoren transportni problem sa viškom u ponudi

Otvoren transportni problem sa viškom u ponudi se javlja kada je ukupna proizvodnja tj. ponuda veća od ukupne potrošnje, tj. potražnje, odnosno kada je

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

U tim slučajevima se konstruiše odgovarajući skup ograničenja, obzirom da se celokupna proizvedena (uskladištena) roba ne može transportovati. U nekim punktovima A_i, $i = 1,2, \dots, m$ ostaće određene količine robe koje se ne mogu transportovati. Tada treba rešavati matematički model koji ima definisanu funkciju cilja oblika (7), a skup ograničenja za punktove proizvodnje (skladištenja) je

$$x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} \leq a_1$$

$$x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n} \leq a_2$$

$$\vdots$$

$$x_{m1} + x_{m2} + \cdots + x_{mn} \leq a_m,$$

a za punktove potražnje (potrošnje) je

$$x_{11} + x_{21} + \cdots + x_{m1} = b_1$$

$$x_{12} + x_{22} + \cdots + x_{m2} = b_2$$

$$\vdots$$

$$x_{1n} + x_{2n} + \cdots + x_{mn} = b_n.$$

Sistemi ovih ograničenja mogu se kraće napisati u obliku

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i\,, \qquad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j\,, \qquad j = 1, 2, \dots, n.$$

Kod otvorenog modela transportnog problema ne samo da treba odrediti količine x_{ij} koje treba transportovati iz pojedinih punktova A_i u punktove B_j, već je potrebno odrediti i rezerve koje će ostati u pojedinim punktovima proizvodnje (skladištenja) A_i, obzirom da je proizvodnja veća od potrošnje.

Za rešavanje otvorenog transportnog problema je potrebno sistem nejednačina svesti na sistem jednačina, tj. otvoreni model transportnog problema mora se svesti na zatvoreni model. To se radi tako što se uvodi još jedan dopunski (fiktivni) punkt potrošnje B_{n+1} čije su potrebe

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Cena transporta po jedinici proizvoda iz bilo kog punkta proizvodnje u fiktivni punkt potrošnje B_{n+1} je jednaka nuli, tj. fiktivni potrošač ne utiče na ukupne troškove prevoza jer su njegovi troškovi

$$\sum_{i=1}^{m} c_{i,n+1} x_{i,n+1} = 0.$$

Tablica transporta je sada

i/j	B_1	B_2	B_3	$\cdots$	B_n	B_{n+1}	a_i
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	x_{13}	$\cdots$	c_{1n} x_{1n}	0 $x_{1,n+1}$	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	x_{23}	$\cdots$	c_{2n} x_{2n}	0 $x_{2,n+1}$	a_2
A_3	c_{31} x_{31}	c_{32} x_{32}	x_{33}	$\cdots$	c_{3n} x_{3n}	0 $x_{3,n+1}$	a_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	x_{m3}	$\cdots$	c_{mn} x_{mn}	0 $x_{m,n+1}$	a_m
b_j	b_1	b_2	b_3	$\cdots$	b_n	b_{n+1}	$\sum a_i$ $\sum b_j$

Tabela 61

Optimalni plan ovako konstruisanog zatvorenog modela sa fiktivnim punktom potrošnje, odgovara optimalnom planu polaznog otvorenog modela sa viškom u ponudi. Na taj način mogu se dobiti ne samo količine x_{ij} koje treba transportovati iz pojedinih punktova proizvodnje u pojedine punktove potrošnje, nego i količine $x_{i,n+1}$, $i = 1, \dots, m$ koje treba da ostanu kao višak u pojedinim punktovima proizvodnje (skladištenja).

Primer 11: Iz tri fabrike iste kompanije treba mesečno transportovati robu u pet regionalnih magacina. Roba se može transportovati iz bilo koje fabrike u bilo koji magacin, ali do udaljenijih magacina su troškovi prevoza veći. Treba odrediti optimalni plan prevoza robe, tako da potrebe svakog magacina budu ispunjene, ali da troškovi transporta budu minimalni. Ponude fabrika a_i i potrebe magacina b_j (po tonama), i cene transporta c_{ij} (u evrima) date su u tabeli

i/j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	4	6	8	10	5	310
A_2	6	4	5	6	3	260
A_3	9	5	4	3	3	280
b_j	220	200	80	180	160	850 840

Tabela 62

Rešenje: Kako je $\sum_{i=1}^{3} a_i = 850$ i $\sum_{j=1}^{5} b_j = 840$ matematički model nije zatvoren, jer je ponuda veća od potražnje. U prvom koraku treba zatvoriti dati problem dodavanjem fiktivnog magacina B_6 čije će mesečne potrebe iznositi 10 tona, a cena transporta na ovim relacijama će biti nula.

i/j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	a_i
A_1	4	6	8	10	5	0	310
A_2	6	4	5	6	3	0	260
A_3	9	5	4	3	3	0	280
b_j	220	200	80	180	160	10	850

Tabela 63

Postupak rešavanja problema je analogan rešavanju zatvorenog transportnog problema. U ovom slučaju za dobijanje početnog dopustivog bazičnog rešenja korišćena je metoda minimuma kolone, a za proveru optimalnosti rešenja korišćena je MODI-metoda.

Početno dopustivo bazično rešenje je

i/j	$\boldsymbol{B_1}$	$\boldsymbol{B_2}$	$\boldsymbol{B_3}$	$\boldsymbol{B_4}$	$\boldsymbol{B_5}$	$\boldsymbol{B_6}$	$\boldsymbol{a_i}$
$\boldsymbol{A_1}$	4 220	6 0	8 0	10 0	5 80	0 10	310
$\boldsymbol{A_2}$	6 0	4 200	5 0	6 0	3 60	0 0	260
$\boldsymbol{A_3}$	9 0	5 0	4 80	3 180	3 20	0 0	280
$\boldsymbol{b_j}$	220	200	80	180	160	10	850

Tabela 64

Na osnovu MODI-metode dobijen je sistem jednačina

$$v_1 - u_1 = 4 \qquad v_3 - u_3 = 4 \qquad v_5 - u_1 = 5 \qquad v_5 - u_3 = 3$$

$$v_2 - u_2 = 4 \qquad v_4 - u_3 = 3 \qquad v_5 - u_2 = 3 \qquad v_6 - u_1 = 0.$$

čije rešenje je

$$u_1 = -5,\ u_2 = -3,\ u_3 = -3,\ v_1 = -1,\ v_2 = 1,\ v_3 = 1,\ v_4 = 0,\ v_5 = 0,\ v_6 = -5.$$

Razlike potencijala date su u narednoj tabeli

$\boldsymbol{\overline{c_{ij}} = v_j - u_i}$ $\boldsymbol{\overline{c_{ij}} = v_j - u_i}$	$\boldsymbol{v_1 = -1}$	$\boldsymbol{v_2 = 1}$	$\boldsymbol{v_3 = 1}$	$\boldsymbol{v_4 = 0}$	$\boldsymbol{v_5 = 0}$	$\boldsymbol{v_6 = -5}$
$\boldsymbol{u_1 = -5}$	4	6	6	5	5	0
$\boldsymbol{u_2 = -3}$	2	4	4	3	3	-2
$\boldsymbol{u_3 = -3}$	2	4	4	3	3	-2

Tabela 65

a jedinične promene troškova su

$\Delta_{ij}=\overline{c_{ij}}-c_{ij}$						
	0	0	-2	-5	0	0
	-4	0	-1	-3	0	-2
	-7	-1	0	0	0	-2

Tabela 66

Kako su sve vrednosti $\Delta_{ij} \leq 0$, $i = 1,2,3$; $j = 1,2,3,4$, početno dopustivo bazično rešenje dobijeno metodom minimuma kolone je ujedno i optimalno rešenje ovog problema. Potrebe svih magacina će biti zadovoljene, ali će 10 tona robe fabrike A_1 ostati neisporučeno. Vrednost funkcije cilja u optimalnom rešenju tj. minimalni troškovi transporta su

$$F = 220 \cdot 4 + 0 \cdot 6 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 10 + 80 \cdot 5 + 10 \cdot 0 + 0 \cdot 6 +$$
$$200 \cdot 4 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 6 + 60 \cdot 3 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 9 + 0 \cdot 5 +$$
$$80 \cdot 4 + 180 \cdot 3 + 20 \cdot 3 + 0 \cdot 0 = 3180 \text{ €}.$$

2.4.2. Otvoren transportni problem sa viškom u potražnji

Slučaj otvorenog transportnog problema sa viškom u potražnji javlja se kada je ukupna proizvodnja tj. ponuda manja od ukupne potrošnje tj. potražnje, odnosno ako je

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Slučajevi ovakvog otvorenog transportnog problema javljaju se prilikom integracija organizacija, kao pri analizi odredišta kako bi se eliminisala najnepovoljnija ili izbegla nepotrebna ulaganja u kapacitete koji bi ostali neiskorišćeni.

Konstruiše se odgovarajući skup ograničenja, s obzirom da celokupna proizvedena (uskladištena) roba nije dovoljna za potrebe svakog potrošača, pa potrebe nekih punktova B_j, $j = 1,2,\dots,n$ neće biti u potpunosti zadovoljene. U tim slučajevima treba rešavati matematički model koji ima definisanu funkciju cilja oblika (7), a skup ograničenja za punktove proizvodnje (skladištenja) je

$$x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} = a_1$$

$$x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n} = a_2$$

$$\vdots$$

$$x_{m1} + x_{m2} + \cdots + x_{mn} = a_m,$$

a za punktove potražnje (potrošnje) je

$$x_{11} + x_{21} + \cdots + x_{m1} \leq b_1$$

$$x_{12} + x_{22} + \cdots + x_{m2} \leq b_2$$

$$\vdots$$

$$x_{1n} + x_{2n} + \cdots + x_{mn} \leq b_n.$$

Sistemi ovih ograničenja se mogu kraće napisati u obliku

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i\,, \qquad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq b_j\,, \qquad j = 1, 2, \dots, n\,.$$

Za rešavanje otvorenog transportnog problema je potrebno sistem nejednačina svesti na sistem jednačina, tj. otvoren model transportnog problema se mora svesti na zatvoren model. To se radi tako što će se uvesti još jedan dopunski (fiktivni) punkt proizvodnje (skladišta) A_{m+1} čija je ponuda

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i.$$

Cena transporta po jedinici proizvoda iz fiktivnog punkta proizvodnje A_{m+1} do bilo kog punkta potrošnje je jednaka nuli, tj. fiktivni proizvođač ne utiče na ukupne troškove prevoza jer njegovi ukupni troškovi iznose

$$\sum_{j=1}^{n} c_{m+1,j} x_{m+1,j} = 0.$$

Tablica transporta je

i/j	B_1	B_2	B_3	$\cdots$	B_n	a_i
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	$\cdots$	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	$\cdots$	c_{2n} x_{2n}	a_2
A_3	c_{31} x_{31}	c_{32} x_{32}	c_{33} x_{33}	$\cdots$	c_{3n} x_{3n}	a_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	c_{m3} x_{m3}	$\cdots$	c_{mn} x_{mn}	a_m
A_{m+1}	0 $x_{m+1,1}$	0 $x_{m+1,2}$	0 $x_{m+1,3}$	$\cdots$	0 $x_{m+1,n}$	a_{m+1}
b_j	b_1	b_2	b_3	$\cdots$	b_n	$\sum a_i$ $\sum b_j$

Tabela 67

Optimalni plan ovako konstruisanog zatvorenog modela sa fiktivnim punktom proizvodnje, odgovara optimalnom planu otvorenog modela sa viškom u potražnji. Na taj način mogu se dobiti količine x_{ij} koje treba transportovati iz pojedinih punktova proizvodnje u pojedine punktove potražnje, a količine robe $x_{m+1,j}, j = 1, \dots, n$ koju treba transportovati iz fiktivnog punkta proizvodnje pokazuju iznos nezadovoljene tražnje u pojedinim potrošačkim punktovima.

Primer 12: Vlasnik kompanije iz primera 11, zbog tehničkih problema zatvara fabriku A_1. Iz ostale dve fabrike treba transportovati robu u 5 magacina. Potrebno je odrediti optimalni plan prevoza robe, tako da potrebe svakog magacina i dalje budu zadovoljene ali i da troškovi transporta budu minimalni.

Rešenje: Ponude fabrika a_i, potrebe magacina b_j (po tonama) i cene transporta c_{ij} (u evrima) date su u tabeli

i/j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	6	4	5	6	3	260
A_2	9	5	4	3	3	280
b_j	220	200	80	180	160	540 840

Tabela 68

Kako je $\sum_{i=1}^{2} a_i = 540$, i $\sum_{j=1}^{5} b_j = 840$, matematički model nije zatvoren jer je ponuda manja od potražnje. Prvo treba zatvoriti ovaj otvoren problem dodavanjem fiktivne fabrike A_3 čija će mesečna ponuda robe iznositi 300 tona, a cena tranporta na ovim relacijama će biti nula.

i/j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	6	4	5	6	3	260
A_2	9	5	4	3	3	280
A_3	0	0	0	0	0	300
b_j	220	200	80	180	160	840

Tabela 69

Postupak rešavanja problema je analogan rešavanju zatvorenog transportnog problema. U ovom slučaju za dobijanje dopustivog baznog rešenja korišćena je metoda minimuma vrste, a za dobijanje optimalnog rešenja metoda relativnih troškova.

Početno dopustivo bazično rešenje je

i/j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	6 0	4 100	5 0	6 0	3 160	260
A_2	9 0	5 20	4 80	3 180	3 0	280
A_3	0 220	0 80	0 0	0 0	0 0	300
b_j	220	200	80	180	160	840

Tabela 70

Cena transporta je tada

$$F = 0 \cdot 6 + 100 \cdot 4 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 6 + 160 \cdot 3 + 0 \cdot 9 + 20 \cdot 5 + 80 \cdot 4 + 180 \cdot 3 +$$
$$0 \cdot 3 + 220 \cdot 0 + 80 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + \cdot 0 = 1840 \text{ €}.$$

Na osnovu metode relativnih troškova, oko svake nebazične komponente formira se kružni put preko bazičnih polja i dobijaju se sledeći relativni troškovi:

$$c'_{11} = -c_{11} + c_{12} - c_{32} + c_{31} = -6 + 4 - 0 + 0 = -2$$

$$c'_{13} = -c_{13} + c_{23} - c_{22} + c_{12} = -5 + 4 - 5 + 4 = -2$$

$$c'_{14} = -c_{14} + c_{24} - c_{22} + c_{12} = -6 + 3 - 5 + 4 = -4$$

$$c'_{21} = -c_{21} + c_{22} - c_{32} + c_{31} = -9 + 5 - 0 + 0 = -4$$

$$c'_{25} = -c_{25} + c_{22} - c_{12} + c_{15} = -3 + 5 - 4 + 3 = 1$$

$$c'_{33} = -c_{33} + c_{32} - c_{22} + c_{23} = -0 + 0 - 5 + 4 = -1$$

$$c'_{34} = -c_{34} + c_{32} - c_{22} + c_{24} = -0 + 0 - 5 + 3 = -2$$

$$c'_{35} = -c_{35} + c_{32} - c_{12} + c_{15} = -0 + 0 - 4 + 3 = -1.$$

Dobijeni relativni troškovi c'_{ij} upisuju se na mesta nebazičnih komponenti u tabeli, a bazične komponente ostaju nepromenjene, pa sledi

i/j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	6 **-2**	4 100	5 **-2**	6 **-4**	3 160	260
A_2	9 **-4**	5 20	4 80	3 180	3 **1**	280
A_3	0 220	0 80	0 **-1**	0 **-2**	0 **-1**	300
b_j	220	200	80	180	160	840

Tabela 71

Kako relativni troškovi na nebazičnim poljima nisu svi negativni ili jednaki nuli, početno dopustivo bazično rešenje nije optimalno, pa je potrebno promeniti bazu tj. odrediti drugo dopustivo bazično rešenje.

Jedini pozitivni relativni trošak, nalazi se u polju (2,5), gde treba staviti određenu količinu tereta. Teret se seli po kružnom putu po kojem je izračunat relativni trošak za to polje.

i/j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	6 **-2**	4 100	5 **-2**	6 **-4**	3 160	260
A_2	9 **-4**	5 20	4 80	3 180	3 **1**	280
A_3	0 220	0 80	0 **-1**	0 **-2**	0 **-1**	300
b_j	220	200	80	180	160	840

Tabela 72

Posmatra se kružni put i izabere se $min\{20,160\} = 20$. Posle premeštanja tereta, dobija se novo dopustivo bazično rešenje

i/j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	6 0	4 120	5 0	6 0	3 140	260
A_2	9 0	5 0	4 80	3 180	3 20	280
A_3	0 220	0 80	0 0	0 0	0 0	300
b_j	220	200	80	180	160	840

Tabela 73

Za nebazične komponente se ponovo izračunavaju relativni troškovi, na analogan način

$$c'_{11} = -c_{11} + c_{12} - c_{32} + c_{31} = -6 + 4 - 0 + 0 = -2$$

$$c'_{13} = -c_{13} + c_{15} - c_{25} + c_{23} = -5 + 3 - 3 + 4 = -1$$

$$c'_{14} = -c_{14} + c_{15} - c_{25} + c_{24} = -6 + 3 - 3 + 3 = -3$$

$$c'_{21} = -c_{21} + c_{25} - c_{15} + c_{12} - c_{32} + c_{31} = -9 + 3 - 3 + 4 - 0 + 0 = -5$$

$$c'_{22} = -c_{22} + c_{12} - c_{15} + c_{25} = -5 + 4 - 3 + 3 = -1$$

$$c'_{33} = -c_{33} + c_{32} - c_{12} + c_{15} - c_{25} + c_{23} = -0 + 0 - 4 + 3 - 3 + 4 = 0$$

$$c'_{34} = -c_{34} + c_{32} - c_{12} + c_{15} - c_{25} + c_{24} = -0 + 0 - 4 + 3 - 3 + 3 = -1$$

$$c'_{35} = -c_{35} + c_{32} - c_{12} + c_{15} = -0 + 0 - 4 + 3 = -1.$$

Dobijeni relativni troškovi c'_{ij} upisuju se na mesta nebazičnih komponenti u tabeli, a bazične komponente ostaju nepromenjene, pa sledi

i/j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	6 **-2**	4 120	5 **-1**	6 **-3**	3 140	260
A_2	9 **-5**	5 **-1**	4 80	3 180	3 20	280
A_3	0 220	0 80	0 **0**	0 **-1**	0 **-1**	300
b_j	220	200	80	180	160	840

Tabela 74

Za sve nebazične promenljive važi da su relativni troškovi negativni ili nula, što znači da je ovo rešenje $x^* = (0,120,0,0,140,0,0,80,180,20,220,80,0,0,0)^T$ optimalno.

Minimalni ukupni troškovi transporta su

$$F = 0 \cdot 6 + 120 \cdot 4 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 6 + 140 \cdot 3 + 0 \cdot 9 + 0 \cdot 5 + 80 \cdot 4 + 180 \cdot 3 +$$

$$20 \cdot 3 + 220 \cdot 0 + 80 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1820 \text{ €}.$$

Optimalno rešenje pokazuje da će se iz obe fabrike A_1 i A_2 transportovati celokupna roba, ali da potražnja magacina B_1 i B_2 neće biti zadovoljena, jer magacinu B_1 nedostaje 220 tona, a magacinu B_2 nedostaje 80 tona robe.

3. Analiza osetljivosti

Formulacija i rešavanje problema linearnog programiranja, kod realnih problema, obično imaju ulogu da pomognu donosiocima odluka pri planiranju i izboru budućih strategija delovanja, koje treba da dovedu do najuspešnije realizacije nekih unapred definisanih ciljeva. Često se dešava da u trenutku kada se ovi modeli formiraju, vrednosti nekih njihovih ulaznih parametara se ne znaju precizno, već se dobijaju procenom baziranom na predviđanju budućih uslova, ili su rezultat strateške odluke menadžera. Te vrednosti u praksi najčešće predstavljaju samo polaznu tačku za dalju analizu problema, i nakon razmatranja optimalnog rešenja problema obično se zaključuje da pojedine ulazne parametre ovih modela treba korigovati.

Zbog svega toga, u okviru linearnog programiranja, razvila se jedna vrlo važna oblast koja omogućava da se posle rešavanja neke verzije problema linearnog programiranja, teorijski oceni kvalitet procenjenih vrednosti njegovih ulaznih parametara, i u skladu sa tim, ove vrednosti koriguju i bolje preciziraju, kao i da se na skraćen način, bez ponovnog rešavanja problema, nađe rešenje tako korigovane poboljšane verzije modela. Ta oblast se naziva postoptimalna analiza i u okviru nje posebno je bitna tzv. analiza osetljivosti, koja nakon rešavanja problema linearnog programiranja ispituje uticaj promene ulaznih parametara problema na njegovo optimalno rešenje. Osnovna uloga analize osetljivosti je da identifikuje tzv. “osetljive” ulazne parametre, tj. parametre čija svaka promena dovodi do promene optimalnog rešenja, da bi se u praksi obratila specijalna pažnja na njihovu što precizniju procenu. U okviru ove analize, moguće je za neki ulazni parametar odrediti interval u okviru kojeg njegova vrednost može da se kreće, a da se optimalna baza modela ne promeni. Do ovakvih vrsta rezultata dolazi se isključivo korišćenjem informacija koje sadrži postojeća optimalna simpleks tabela, a ne ponovnim rešavanjem modifikovanog modela, što u znatnoj meri redukuje vreme dobijanja novog optimalnog rešenja.

Analiza osetljivosti omogućava da se direktno i precizno ustanovi kako se menjaju podaci u optimalnoj simpleks tabeli kada se promene neki ulazni parametri originalnog modela. Ako bazično rešenje koje odgovara ovako transformisanoj tabeli ostaje i dalje optimalno, tada ono predstavlja optimalno rešenje modifikovanog problema. U slučaju kada ovo rešenje nije više optimalno, ono se može koristiti kao početno bazično rešenje za simpleks metodu (ako je dopustivo) ili za dualnu simpleks metodu (ako je nedopustivo), da bi se došlo do optimalnog rešenja modifikovanog modela.

3.1. Analiza osetljivosti i transportni problem

Analizom osetljivosti se može ispitati do koje granice se mogu menjati ulazni parametri transportnog problema a da to ne utiče na strukturu optimalnog rešenja, odnosno može se ispitati kako se menjaju pojedini pokazatelji optimalnosti u slučaju jediničnih promena ulaznih parametara.

Postoje tri aspekta analize osetljivosti i to su:

- promena koeficijenta nebazične promenljive u funkciji cilja
- promena koeficijenta bazične promenljive u funkciji cilja
- povećavanje ponude a_i i potražnje b_j za Δ.

U primeru 9 razmatran je problem organizovanja kamiona za prevoz tereta od terminala do utovarnih mesta. Optimalno rešenje ovog problema je $x = (0,0,0,2,0,0,4,2,3,3,0,1)^T$ i dato je u tabeli 55, a minimalna cena transporta je 199 evra. Na ovom primeru razmatran je uticaj promene parametara na optimalno rešenje.

3.1.1. Promena koeficijenta nebazične promenljive u funkciji cilja

Menjanje koeficijenta c_{ij} nebazične promenljive x_{ij} u funkciji cilja ostavlja desnu stranu optimalne tabele nepromenjenu. Dakle, trenutna baza će i dalje biti dopustiva, a potencijali u_i i v_j ostaju nepromenjeni. U tabeli se posmatra vrsta gde $u_i = 0$, i ta vrsta se zove vrsta nula. U primeru 9, u vrsti nula, tj. u trećoj vrsti gde $u_3 = 0$, će se samo koeficijent c_{ij} uz x_{ij} promeniti. Dakle, dokle god je koeficijent uz x_{ij} u vrsti nula u optimalnoj tabeli nepozitivan, trenutna baza ostaje optimalna. Ilustracije radi, potrebno je odgovoriti na sledeće pitanje: Za koji opseg vrednosti troška slanja određene količine tereta iz trećeg terminala do trećeg utovarnog mesta će trenutna baza ostati nepromenjena tj. optimalna.

Pretpostavlja se da se menja c_{33} sa 18 na $18 + \Delta$. Dakle, za koju vrednost Δ će trenutna baza ostati optimalna? Kako je $\Delta_{ij}= v_j - u_i - c_{ij}$, sledi da je u ovom primeru

$$\Delta_{33}= v_3 - u_3 - c_{33} = 17 - 0 - (18 + \Delta) = -1 - \Delta.$$

Dakle, trenutna baza će ostati optimalna za $-1 - \Delta\leq 0$ tj. za $\Delta\geq -1$, odnosno za

$$c_{33} \geq 18 + \Delta= 18 + (-1) = 17.$$

3.1.2. Promena koeficijenta bazične promenljive u funkciji cilja

Zbog promene koeficijenta c_{ij} bazične promenljive, može se promeniti koeficijent svake nebazične promenjive u vrsti nula, a da bi se utvrdilo da li trenutna baza ostaje optimalna, treba pronaći nove potencijale u_i i v_j i njih koristiti da bi se odredili troškovi svih nebazičnih promenjivih. Trenutna baza ostaje optimalna sve dokle god troškovi svih nebazičnih promenjivih ostaju nepozitivni. Ilustracije radi, za prethodni problem treba odrediti opseg vrednosti troškova za slanje određene količine tereta iz trećeg terminala do prvog utovarnog mesta, za koje trenutna baza ostaje optimalna.

Neka se vrednost c_{31} promeni sa 15 na $15 + \Delta$. Tada je $\Delta_{31} = v_1 - u_3 - c_{31} = 0$, jer je x_{31} bazična, a jednačina $v_1 - u_3 = 15$ postaje $v_1 - u_3 = 15 + \Delta$. Rešenje sistema jednačina

$$u_1 = 0 \qquad v_3 - u_2 = 12 \qquad v_1 - u_3 = 15 + \Delta \qquad v_4 - u_3 = 18$$

$$v_4 - u_1 = 13 \qquad v_4 - u_2 = 13 \qquad v_2 - u_3 = 12$$

je

$$u_1 = 0,\, u_2 = 0,\, u_3 = -5,\, v_1 = 10 + \Delta,\, v_2 = 7,\, v_3 = 12,\, v_4 = 13.$$

Nakon rešavanja sistema određuje se Δ_{ij} za svaku nebazičnu promenjivu. Trenutna baza će ostati optimalna sve dok svaka nebazična promenjiva ima nepozitivan koeficijent u vrsti nula, tj. sve dok za svaku nebazičnu promenljivu x_{ij} važi $\Delta_{ij} \leq 0$.

$\Delta_{11} = v_1 - u_1 - 20 = 10 + \Delta - 0 - 20 = \Delta - 10 \leq 0$, za $\Delta \leq 10$

$\Delta_{12} = v_2 - u_1 - 11 = 7 - 0 - 11 = -4$

$\Delta_{13} = v_3 - u_1 - 15 = 12 - 0 - 15 = -3$

$\Delta_{21} = v_1 - u_2 - 17 = 10 + \Delta - 0 - 17 = \Delta - 7 \leq 0$, za $\Delta \leq 7$

$\Delta_{22} = v_2 - u_2 - 14 = 7 - 0 - 14 = -7$

$\Delta_{33} = v_3 - u_3 - 18 = 12 - (-5) - 18 = -1.$

Dakle, za nebazične x_{ij} važi $\Delta_{ij} \leq 0$ za $\Delta \leq 10$ i $\Delta \leq 7$ tj. za $\Delta \leq 7$, ili $c_{31} \leq 15 + 7$ odnosno $c_{31} \leq 22$.

3.1.3. Povećavanje ponude a_i i potražnje b_j za Δ

Povećavanje ponude a_i i potražnje b_j za Δ, ostavlja transportni problem u ravnoteži. Može se pokazati da ako trenutna baza ostane optimalna, tada je

$$nova\ F\ vrednost = stara\ F\ vrednost - \Delta \cdot u_i + \Delta \cdot v_j.$$

Na primer, ako se poveća ponuda trećeg terminala i prvog utovarnog mesta za 1 tada je

$$nova\ vrednost\ troškova = 199 - 1 \cdot 0 + 1 \cdot 15 = 214\ €.$$

Nove vrednosti promenljivih x_{ij} se određuju na sledeći način:

- Ako je x_{ij} bazična promenljiva u optimalnom rešenju, tada se x_{ij} poveća za Δ.
- Ako je x_{ij} nebazična promenljiva u optimalnom rešenju, tada treba na osnovu pravila formirati kružni put prolazeći od x_{ij}. Vrednosti polja na negativnom

polukrugu se povećavaju za Δ, a na pozitivnom se smanjuju za Δ, a vrednost x_{ij} ostaje 0.

Da bi se ilustrovala ideja, pretpostavlja se da su se vrednosti a_2 i b_3 povećale za 2. Kako je x_{23} bazična promenljiva u optimalnom rešenju, novo optimalno rešenje je

i/j		B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
	u_i/v_j	**15**	**12**	**17**	**18**	
A_1	**1**	20 0	11 0	15 0	13 2	2
A_2	**5**	17 0	14 0	12 **6**	13 2	**8**
A_3	**0**	15 3	12 3	18 0	18 1	7
b_j		3	3	**6**	5	15

Tabela 75

Nova optimalna vrednost troškova transporta je

$$F = 199 - 2 \cdot u_2 + 2 \cdot v_3 = 199 - 2 \cdot 5 + 2 \cdot 17 = 223 \text{ €}.$$

Da bi se ilustrovao drugi slučaj, pretpostavlja se da su se vrednosti a_1 i b_3 povećale za 1. Kako je x_{13} nebazična promenljiva u optimalnom rešenju, treba naći kružni put polazeći od x_{13} preko bazičnih promenljivih. Kružni put čine polja $(1,3), (1,4), (2,4)$ i $(2,3)$. Novo optimalno rešenje je dobijeno povećavanjem x_{14} i x_{23} za 1 i oduzimanjem 1 od x_{24}, i ono je oblika

i/j		B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
	u_i/v_j	**15**	**12**	**17**	**18**	
A_1	**1**	20 0	11 0	15 0	13 **3**	**3**
A_2	**5**	17 0	14 0	12 **5**	13 **1**	6
A_3	**0**	15 3	12 3	18 0	18 **0**	7
b_j		3	3	**5**	5	15

Tabela 76

a vrednost funkcija cilja u njemu je

$$F = 199 - 1 \cdot u_1 + 1 \cdot v_3 = 199 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 17 = 215 \text{ €}.$$

Treba napomenuti da povećavanje ponude a_i i potražnje b_j za Δ se ne može vršiti za bilo koju vrednost Δ. To se može videti na prethodnom primeru, jer ukoliko se uzme da je $\Delta =$ 4 optimalna baza bi bila nemoguća.

4. Transportni problem i programski paketi

Trasportni problemi koji se javljaju u praksi su najčešće problemi velikih dimenzija, pa je za njihovo rešavanje neophodna primena računara. Danas postoje mnogobrojni razvijeni softveri koji se koriste u tu svrhu kao što su LINGO, GAMS, Solver, WinQSB, WinGULF, SAS/OR, i dr.

4.1. LINGO

LINGO je korisnički orijentisan programski paket, namenjen rešavanju problema linearnog, celobrojnog i nelinearnog programiranja. Veliki broj koncepta koji se u njemu koriste je isti kao i u drugim programskim jezicima.

Pokretanjem LINGO programskog paketa pojaviće se početni ekran sa šemom koja ukazuje na parametre Lingo programa: maksimalan broj ograničenja, promenljivih i koeficijenata. Ili se radi klik na oznaku OK ili se sačeka nekoliko trenutaka i natpis sam nestaje. Tada je sve spremno za korišćenje LINGO programskog paketa.

LINGO se veoma lako koristi jer je, za najveći broj problema dovoljno poznavati sledeće komande:

- MAX - početak unosa problema maksimuma
- MIN - početak unosa problema minimuma
- END - završetak unosa problema, znak da se LINGO pripremi za prihvatanje drugih komandi
- GO - komanda za rešavanje aktuelnog problema i ispisivanje rešenja
- LOOK - prikaz izabranog dela aktuelne formulacije
- ALTER - promena jednog elementa aktuelne formulacije
- EXT - dodavanje jednog ili više ograničenja aktuelnoj formulaciji
- DEL - brisanje jednog ili više ograničenja aktuelne formulacije
- SAVE - memorisanje aktuelne formulacije problema radi kasnije upotrebe
- TABLEAU - prikaz aktuelne simpleks tabele.

LINGO model sadrži sledeće elemente:

1. funkciju cilja

2. jednu ili više promenljivih

3. jedno ili više ograničenja

Funkcija cilja se definiše u prvom redu LINGO modela korišćenjem MIN ili MAX komande, posle koje sledi znak =. Ograničenja koja predstavljaju drugi deo modela se mogu uvoditi jednim od sledeći izraza:

SUBJECT TO

SUCH THAT

S.T.

ST

LINGO izrazi se završavaju tačka zarezom (;). Nakon ograničenja se piše END.

Osnovna pravila pri korišćenju LINGO programskog paketa su sledeća:

1. Imena promenljivih mogu biti dužine najviše 32 karaktera.

2. Računske operacije i relacije koje se mogu koristiti u Lingo programu su:

sabiranje (+)

oduzimanje (−)

veće ili jednako (>=) ili samo veće (>)

manje ili jednako (<=) ili samo manje (<)

množenje (*)

deljenje (/)

stepenovanje (^).

3. Zagrada omogućuje da se odredi redosled matematičkih operacija.

4. Komentari se mogu upisati bilo gde u modelu a počinju sa simbolom ¡.

5. Pojedina ograničenja i funkcija cilja se mogu definisati u jednom ili više redova.

6. Naredbe i nazivi promenljivih se mogu upisivati bilo malim bilo velikim slovima, a LINGO ih pretvara u velika slova.

7. Sa desne strane jednakosti ili nejednakosti mogu se upisivati samo konstante.

8. Sa leve strane jednakosti ili nejednakosti mogu se upisivati samo promenljive i njihovi koeficijenti.

9. Lingo podrazumeva da su sve promenljive nenegativne, pa prema tome, pri korišćenju LINGO programskog paketa nije neophodno ukucati uslov o nenegativnosti.

10. Ekstenzija LNG će biti oznaka tipa fajla prilikom čuvanja podatka.

Pored osnovnih elemenata modela, LINGO prepoznaje i nekoliko iskaza koji se mogu upisati nakon END komande. Ovi iskazi omogućavaju naknadni opis promenljivih.

- FREE<promenljiva> Označava da promenljiva može biti pozitivna, negativna ili nula.
- @GIN<promenljiva> Ograničava vrednost promenljive na nenegativan ceo broj (general integer).
- @INT<promenljiva> Ograničava vrednost promenljive na binarni broj (0 ili 1) (binary integer).
- SLB<promenljiva><vrednost> Određuje donju granicu vrednosti promenljive (simple lower bound).
- SUB<promenljiva><vrednost> Određuje gornju granicu vrednosti promenljive (simple upper bound).

4.1.1. Primeri

Primer 13: Pomoću programskog paketa LINGO naći optimalan plan transporta testenine iz fabrika u restorane, za koje su podaci dati u Primeru 6.

Rešenje: Matematički model ovog problema je

$$F = 80 \cdot x_{11} + 55 \cdot x_{21} + 65 \cdot x_{31} + 75 \cdot x_{12} + 60 \cdot x_{22} + 69 \cdot x_{32} +$$

$$78 \cdot x_{13} + 49 \cdot x_{23} + 72 \cdot x_{33} \rightarrow min$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 250$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 450$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 600$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 350$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 450$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 600.$$

Da bi uneli ovaj problem u LINGO prvo treba proveriti da li ekran sadrži prazan prozor. Ako je neophodno, novi prozor je moguće otvoriti izborom New iz File menija ili jednim klikom na ikonu New File.

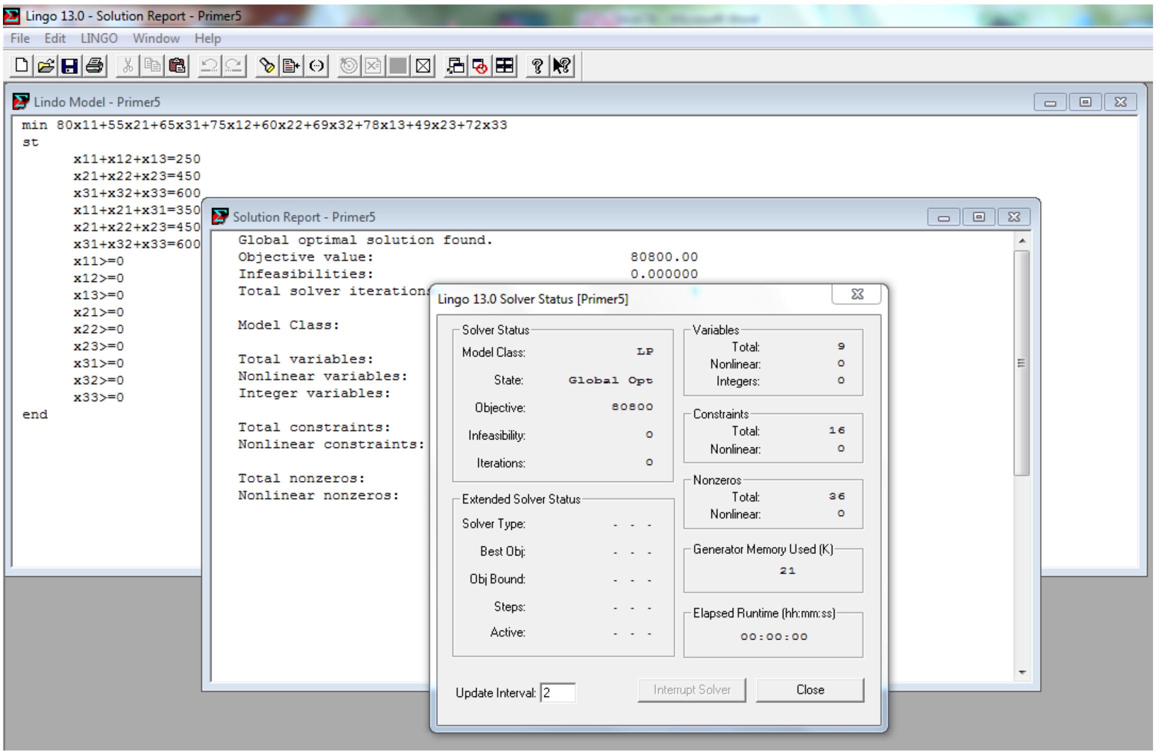
Funkcija cilja se definiše na sledeći način:

```
min 80x11+55x21+65x31+75x12+60x22+69x32+78x13+49x23+72x33
```

Početak unosa govori LINGO softveru da je reč o problemu minimuma. Nastavljajući unos, slede ograničenja:

```
st
      x11+x12+x13=250
      x21+x22+x23=450
      x31+x32+x33=600
      x11+x21+x31=350
      x21+x22+x23=450
      x31+x32+x33=600
      x11>=0
      x12>=0
      x13>=0
      x21>=0
      x22>=0
      x23>=0
      x31>=0
      x32>=0
      x33>=0
end
```

Nakon unosa ograničenja, poželjno je sačuvati podatke radi kasnije upotrebe: iz File menija izabere se komanda Save. Radi rešavanja problema treba uraditi sledeće: iz menija Solve bira se komanda Solve. Kada je rešenje kompletno, na ekranu će se pojaviti status nakon izvršene Solve komande.



Slika 4

U dijalogu *LINGO Solver Status* su prikazane opšte informacije kao npr. da je dobijeno rešenje optimalno i prikazana je vrednost funkcije cilja u optimalnom rešenju. Dijalog treba zatvoriti i otvoriti prozor *Solution Report* u kojem se nalaze rezultati analize kao što prikazuje slika 5, koja se čita na način opisan u tabeli 77.

```
Solution Report - Primer5

Global optimal solution found.
Objective value:                              80800.00
Infeasibilities:                              0.000000
Total solver iterations:                             0
Model Class:                                        LP
Total variables:                  9
Nonlinear variables:              0
Integer variables:                0
Total constraints:               16
Nonlinear constraints:            0
Total nonzeros:                  36
Nonlinear nonzeros:               0
                                Variable           Value        Reduced Cost
                                     X11        0.000000            9.000000
                                     X21        0.000000            10.00000
                                     X31        350.0000            0.000000
                                     X12        250.0000            0.000000
                                     X22        0.000000            11.00000
                                     X32        250.0000            0.000000
                                     X13        0.000000            3.000000
                                     X23        450.0000            0.000000
                                     X33        0.000000            3.000000

                                     Row    Slack or Surplus      Dual Price
                                       1        80800.00           -1.000000
                                       2        0.000000           -75.00000
                                       3        0.000000            0.000000
                                       4        0.000000            0.000000
                                       5        0.000000            4.000000
                                       6        0.000000           -49.00000
                                       7        0.000000           -69.00000
                                       8        0.000000            0.000000
                                       9        250.0000            0.000000
                                      10        0.000000            0.000000
                                      11        0.000000            0.000000
                                      12        0.000000            0.000000
                                      13        450.0000            0.000000
                                      14        350.0000            0.000000
                                      15        250.0000            0.000000
                                      16        0.000000            0.000000
```

Slika 5

OBJECTIVE FUNCTION Vrednost funkcije cilja	*VALUE* Vrednost	
	PROMENLJIVE U BAZI	PROMENLJIVE VAN BAZE
VARIABLE Oznake primalnih promenljivih	*VALUE* Vrednost primalne promenljive	*REDUCED COST* Vrednost dopunske promenljive za odgovarajući dualni uslov
ROW Redni broj ograničenja	*SLACK OR SURPLUS* Vrednost dopunske promenljive za primalne promenljive	*DUAL PRICES* Vrednost dualne promenljive-dualne cene
	Zadnja kolona simpleks tabele	Zadnja vrsta simpleks tabele

Tabela 77

Kratak pregled u *Reports window* pokazuje da je postignuta optimalna proizvodnja ako se iz prve fabrike transportuje 250 kg testenina u drugi restoran, iz druge fabrike 450 kg u treći restoran, a iz treće fabrike 350 kg u prvi i 250 kg u drugi restoran. To se čita iz kolone Value pored naziva promenljivih. Ukupni troškovi transporta iznose 80800 din.

Da bi se izvršila analiza osetljivosti treba minimizirati ekran *Reports* i izabrati Range komandu iz menija. Tada će se ponovo pojaviti ekran *Reports window* ali u proširenom obliku sa analizom osetljivosti, odnosno intervalima u kojima se koeficijenti funkcije cilja, odnosno elementi desne strane, mogu kretati.

Range Report - Primer5

Ranges in which the basis is unchanged:

Objective Coefficient Ranges:

Variable	Current Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
X11	80.00000	INFINITY	9.000000
X21	55.00000	INFINITY	10.00000
X31	65.00000	9.000000	INFINITY
X12	75.00000	3.000000	INFINITY
X22	60.00000	INFINITY	11.00000
X32	69.00000	3.000000	9.000000
X13	78.00000	INFINITY	3.000000
X23	49.00000	10.00000	INFINITY
X33	72.00000	INFINITY	3.000000

Righthand Side Ranges:

Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
2	250.0000	INFINITY	250.0000
3	450.0000	0.000000	0.000000
4	600.0000	0.000000	0.000000
5	350.0000	250.0000	350.0000
6	450.0000	0.000000	0.000000
7	600.0000	0.000000	0.000000
8	0.000000	0.000000	INFINITY
9	0.000000	250.0000	INFINITY
10	0.000000	0.000000	INFINITY
11	0.000000	0.000000	INFINITY
12	0.000000	0.000000	INFINITY
13	0.000000	450.0000	INFINITY
14	0.000000	350.0000	INFINITY
15	0.000000	250.0000	INFINITY
16	0.000000	0.000000	INFINITY

Slika 6

Koeficijenti u funkciji cilja mogu da se povećavaju ili smanjuju. Tabela pokazuje koliko se oni pojedinačno mogu povećati ili smanjiti pri čemu su ostali koeficijenti funkcije cilja konstantni, a da se pri tome ne menja optimalna baza, kao ni vrednost strukture optimalnog primalnog rešenja.

Tabela ukazuje i na moguće promene desne strane nejednakosti (kapaciteta), povećanje ili smanjenje kapaciteta pojedinačno, a da se pri tome ne menja optimalna baza.

4.2. GAMS

GAMS (General Algebraic Modeling System) je programski paket namenjen rešavanju različitih problema iz oblasti makro i mikro ekonomije, menadžmenta, poljoprivrede, ekonometrije, energetike, finansija, transporta, planiranja, stohastike, statistike i dr.

GAMS je specijalno dizajniran za modelovanje linearne, nelinearne optimizacije i za mešovite celobrojne probleme optimizacije. GAMS jezik je u formi sličan drugim, često korišćenim programskim jezicima. Pokretanjem GAMS programskog paketa pojaviće se početni ekran i sve je spremno za korišćenje programskog paketa. Tokom korišćenja GAMS programskog paketa treba obratiti pažnju na sledeće:

1. Određivanje i grupisanje elemenata modela se vrši prema tipu elemenata.

2. Kod elemenata se treba držati pravila da se ne sme upućivati ni na šta što ranije nije definisano.

3. Komponente elemanata su povezane, što podrazumeva da ih treba dodavati određenim redosledom.

4. Pri unosu treba voditi računa da numeričke vrednosti budu u manjim apsolutnim vrednostima (primer: hiljadarkama).

5. GAMS ne pravi razliku između velikih i malih slova i dozvoljava razmak između reči.

Oznake u programskom paketu GAMS:

- sets - skupovi
- variables - promenljive
- equations - ograničenje, funkcija cilja.

Korišćenjem GAMS-a, podatke je potrebno samo jednom uneti u poznatoj formi lista ili tabela. Modeli su opisani algebarskim izrazima koji se lako čitaju od strane ljudi i računara. Čitave grupe usko povezanih ograničenja su upisane u jednom izrazu. GAMS automatski kreira svaku jednačinu ograničenja i omogućava korisniku da pravi izuzetke gde opštost nije poželjna. Izrazi u modelima se mogu ponovo koristiti bez promene algebre kada se jave druge varijacije istog ili srodnih problema.

GAMS omogućava realizaciju analize osetljivosti i lako se može videti kako promene vrednosti ulaznih parametara utiču na rešenje. GAMS dozvoljava korisniku da doda tekstualna objašnjenja svakom simbolu i jednačini.

4.2.1. Primeri

Primer 14: Pomoću programskog paketa GAMS naći optimalan plan transporta materijala iz Novosadskog i Beogradskog skladišta u fabrike koje se nalaze u Subotici, Kikindi i u Zrenjaninu za koje su podaci dati u Primeru 3.

Rešenje: Matematički model ovog problema je

$$F = 2060 \cdot x_{11} + 3560 \cdot x_{21} + 2220 \cdot x_{12} + 4080 \cdot x_{22} +$$

$$1020 \cdot x_{13} + 1520 \cdot x_{23} \rightarrow \ min$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 300$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 600$$

$$x_{11} + x_{21} = 325$$

$$x_{12} + x_{22} = 300$$

$$x_{13} + x_{23} = 275.$$

Da bi uneli ovaj model u GAMS prvo treba proveriti da li ekran sadrži prazan prozor. Ako je neophodno, novi prozor je moguće otvoriti izborom New iz File menija.

Prvi upis GAMS modela odnosi se na skupove, a upisuje se kao:

```
SETS
    i   skladište       / NoviSad, Beograd /
    j   fabrike         / Subotica, Kikinda, Zrenjanin / ;
```

Tako se definiše skup *i* koji sadrži dva elemenata i skup *j* koji sadrži tri elemenata. Reči ”skladiste” i “fabrike” u GAMS-u predstavljaju *text* i taj deo nije obavezan već služi samo kao objašnjenje. Elementi skupova mogu da sadrže najviše 10 karaktera, a *text* deo najviše 80 karaktera.

Naredni deo je unos podataka.

```
PARAMETERS
    a(i)  kolicina materijala u kilogramima koja moze da stane u i sladiste
      /   NoviSad    300
          Beograd   600  /
    b(j)  kolicina materijala u kilogramima koje potrazuje j fabrika
      /   Subotica    325
          Kikinda     300
          Zrenjanin      275  / ;
 TABLE d(i,j)  udaljenost u kilometrima
                    Subotica      Kikinda     Zrenjanin
    NoviSad        103           111            51
    Beograd        178           136            76  ;
 SCALAR f  cena transporta u dinarima za jedan kilometar po kilogramima materijala /20/;
 PARAMETER c(i,j)  cena transporta u dinarima po kilogramima materijala ;
         c(i,j) = f * d(i,j) ;
```

Unos podataka sa listama vrši se komandom *Parameters* . Tako se definišu parametri a i b i odgovarajući domeni. Za svaki parametar je dato objašnjenje, i za svaki i i j su date vrednosti $a(i)$ i $b(j)$.

Unos podataka sa tabelama vrši se komandom Table. Tako se definiše parametar d i odgovarajući domen. Vrednosti parametra d su dati u tabličnoj formi, gde nisu važni razmaci.

Direktni unos podataka razlikuje se od prethodna dva. U prvom redu definiše se parametar c sa odgovarajućim domenom, i dato je objašnjenje. A u drugom redu određuje se vrednost $c(i,j)$ sa prethodno već definisanim parametrima f i $d(i,j)$.

Sledeći deo je unos promenljive sa komandom Variables:

```
VARIABLES
     x(i,j)  transportovana kolicina u kilogramima
     Z       ukupni troskovi transporta u dinarima;
POSITIVE VARIABLE x ;
```

Na ovaj način je definisana transponovana količina za svaki par (i,j). Promenljiva Z nema domen jer je skalarna veličina. Promenjivu Z treba minimizirati. Treba odrediti tip svake promenljive. Promenljiva x je pozitivna tj. njena vrednost može da ide od nule do beskonačnosti. Za promenljivu Z posebno nije određen tip, to znači da je njen tip “free”, tj. njena vrednost može da kreće od $-\infty$ do $+\infty$.

Sledeći deo je unos jednačina i nejednačina. Posle komande Equations sledi ime jednačine, domen i objašnjenje, a nakon toga definisanje tih jednačina i nejednačina.

```
EQUATIONS
     COST        funkcija cilja
     SUPPLY(i)   ogranicenja ponude sladista i
     DEMAND(j)   potraznja fabrika j koja treba da se ispune ;
COST ..        Z  =e=  SUM((i,j), c(i,j)*x(i,j)) ;
SUPPLY(i) ..   SUM(j, x(i,j))  =l=  a(i) ;
DEMAND(j) ..   SUM(i, x(i,j))  =g=  b(j) ;
```

Komanda Model određuje koji delovi programa će se rešavati:

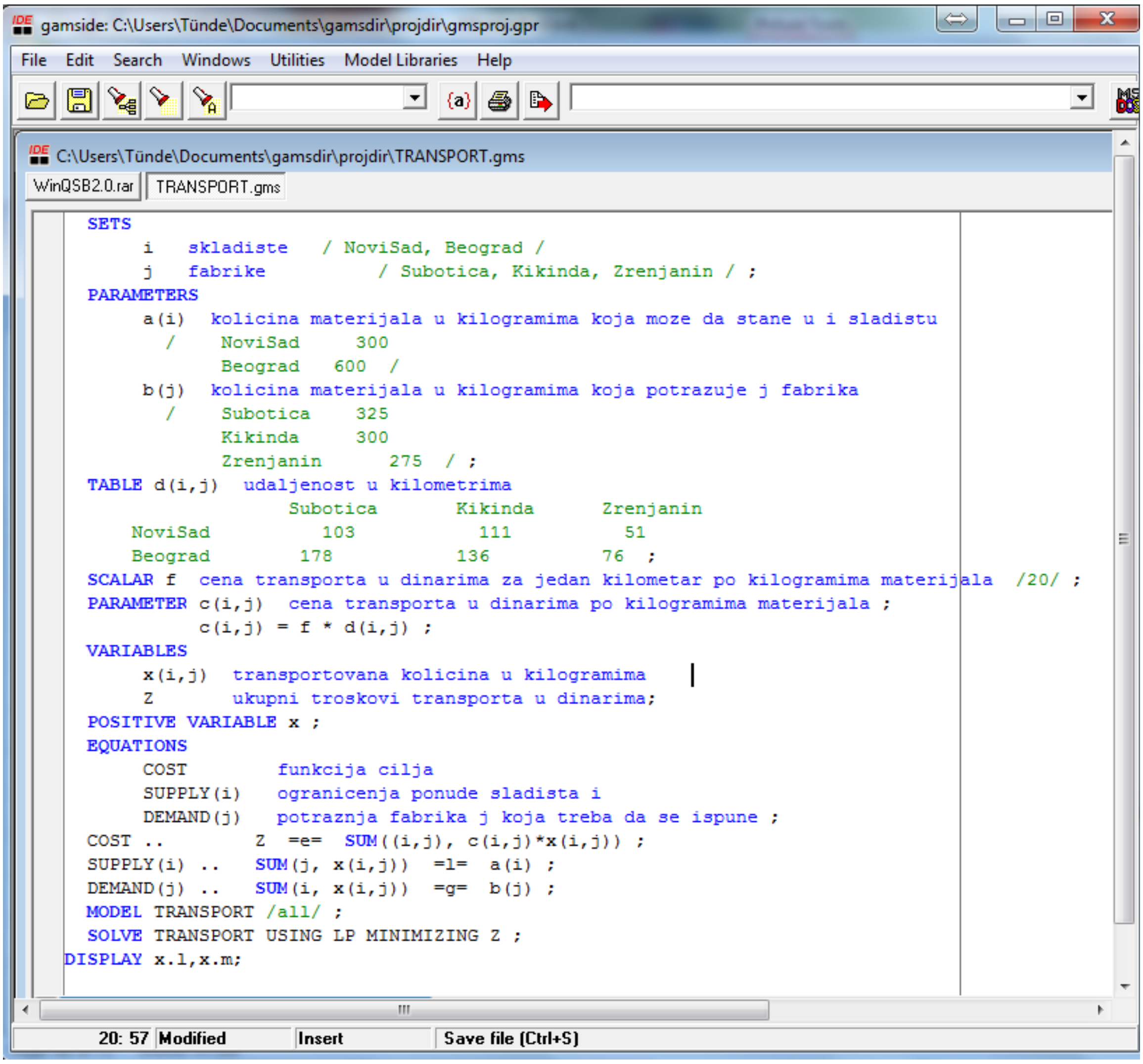
MODEL TRANSPORT /all/ ;

Na kraju se dodaje komanda rešavanja, gde se određuje tip problema i vrsta optimizacije:

SOLVE TRANSPORT USING LP MINIMIZING Z ;

Ako se doda komanda Display, dobijaju se najvažniji podaci i rezultati u posebnom prozoru:

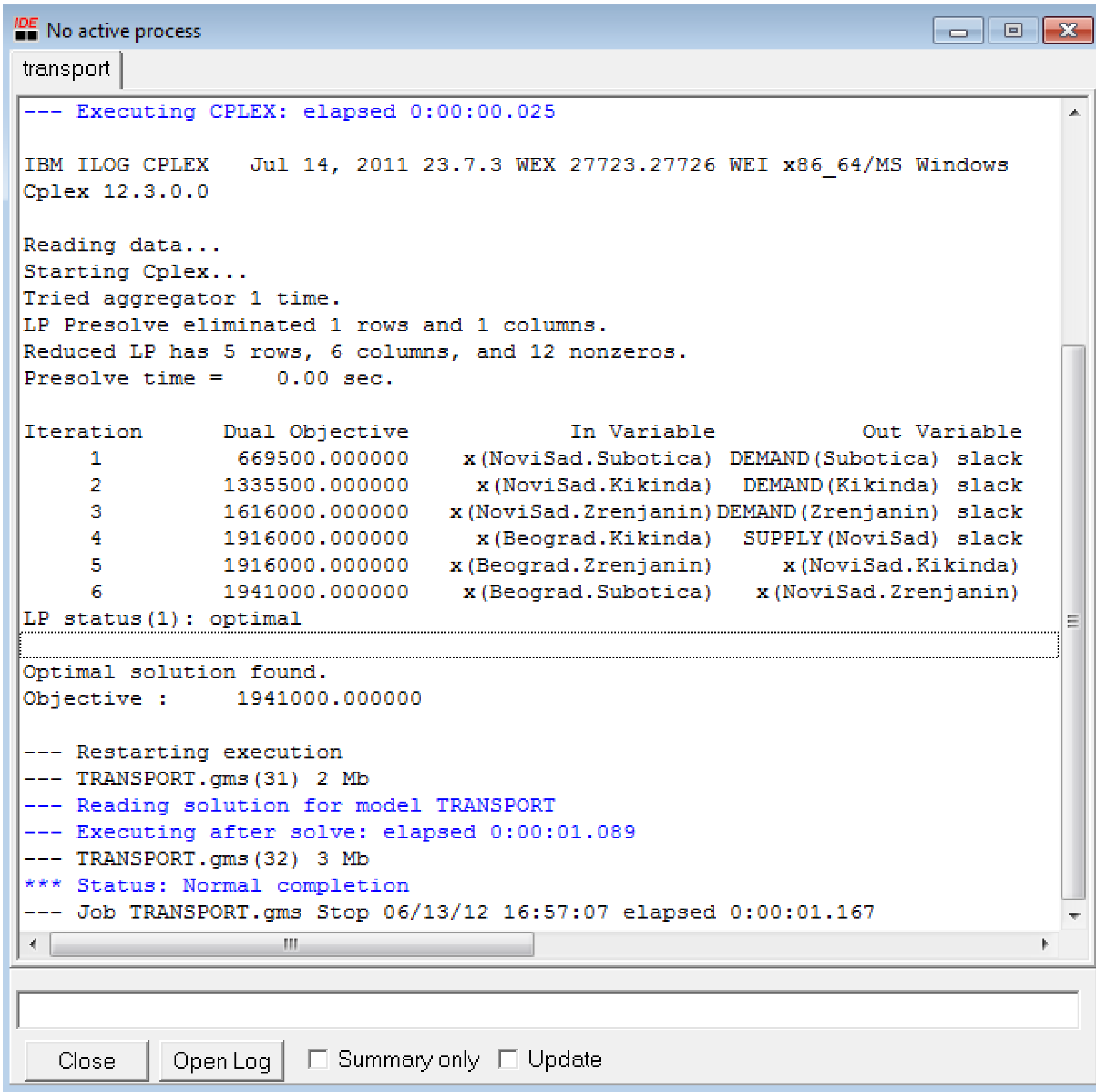
DISPLAY x.l,x.m;



Slika 7

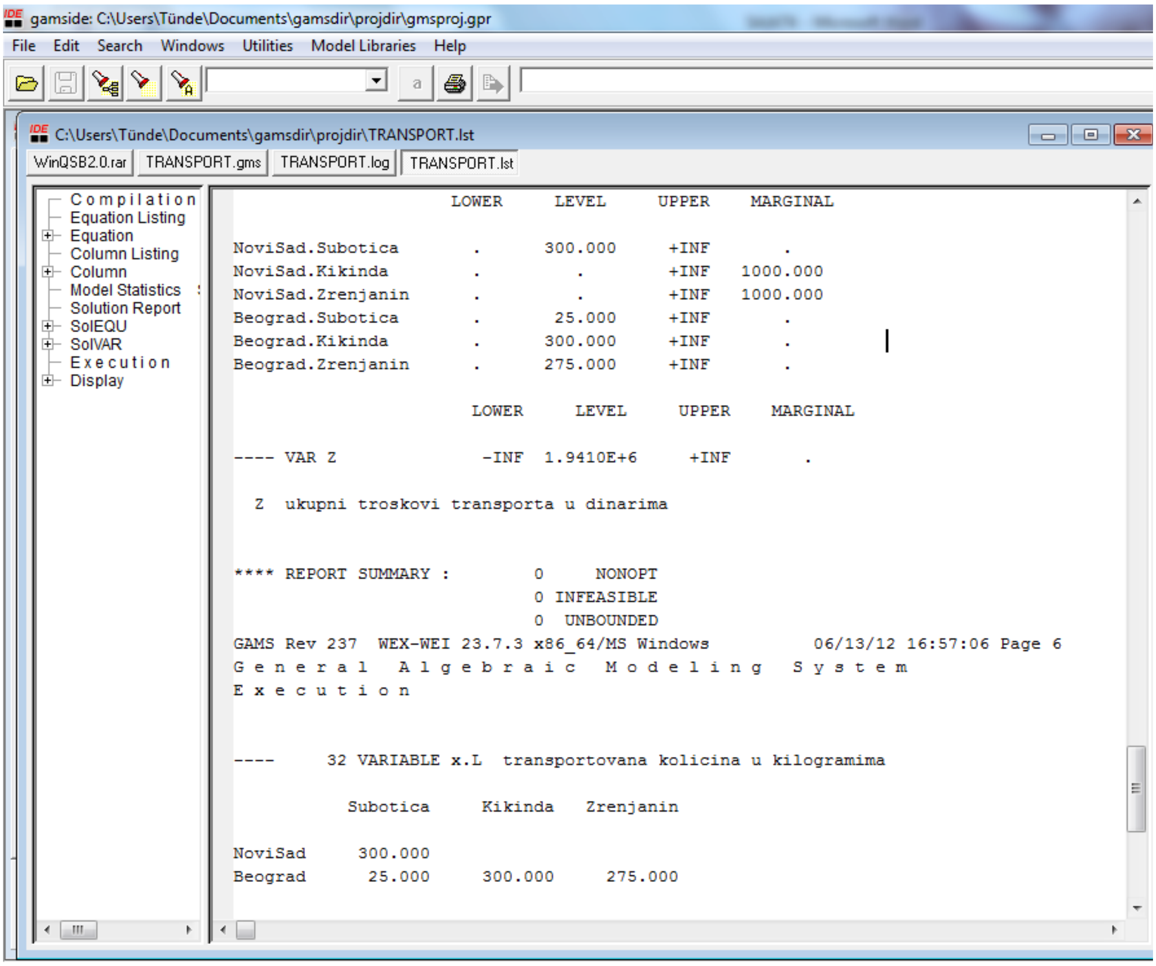
Nakon unosa programa, iz File menija poželjno je izabrati komandu Save.

Radi rešavanja problema treba uraditi sledeće: iz menija se bira komanda Run. Kada je rešenje kompletno, nakon izvršene Run komande, na ekranu će se pojaviti skraćeni rezultati u posebnom prozoru.



Slika 8

Detaljnija analiza i rešenje problema može se videti kada se zatvori prethodni prozor.



Slika 9

Optimalan plan transporta ovog problema je oblika $x^* = (300,0,0,25,300,275)^T$. Ukupni troškovi transporta su

$$F = 300 \cdot 2060 + 25 \cdot 3560 + 0 \cdot 2220 + 300 \cdot 2720 + 0 \cdot 1020 + 275 \cdot 1520 =$$

$$1\,941\,000 \text{ dinara.}$$

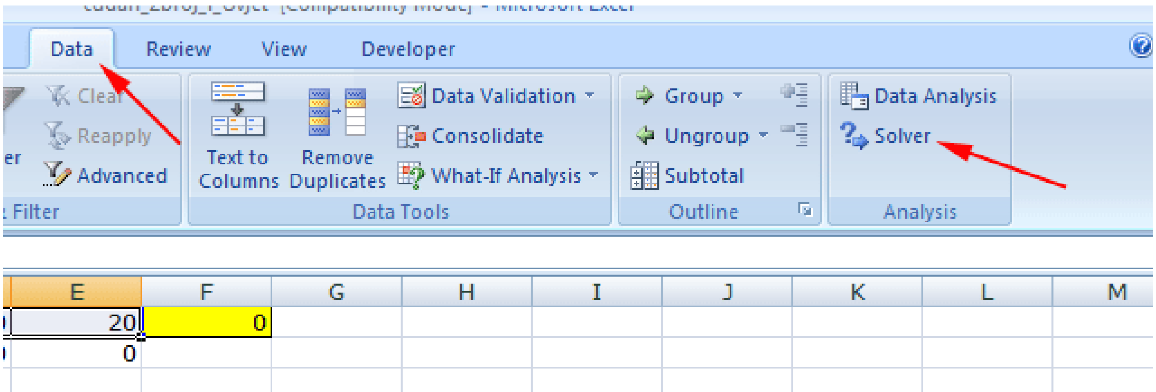
4.3. Solver

Solver je deo paketa komandi koje se nazivaju alatkama u programu Microsoft Excel. Solver obezbeđuje dodatne funkcije i mogućnost da se problemi reše uz pomoć tabela. Koristi se za rešavanje problema linearnog i nelinearnog programiranja.

Solver rešava probleme linearnog programiranja, kvadratnog programiranja, kanoničnog i konveksnog nelinearnog programiranja i celobrojnog programiranja.

Pomoću programskog dodatka Solver može se pronaći optimalna (maksimalna ili minimalna) vrednost funkcije cilja. Kod Solvera najvažnije je dobro definisati model na radnom listu. Na novom, praznom radnom listu prvo se unose imena promenljivih. U sledećem koraku se unose koeficijenti i formule ograničenja u obliku tabele. Maksimalan broj ograničenja je 500. Nakon toga se u proizvoljnu ćeliju unosi formula funkcije cilja. Ta ćelija se zove ćelija funkcije cilja. U zadatku može postojati samo jedna ćelija funkcije cilja. Vrednost ćelije funkcije cilja zavisi od vrednosti ograničenja. Grupa ćelija, koja učestvuju u izračunavanju vrednosti ograničenja i funkcije cilja su promenljive ćelije. Broj takvih ćelija je ograničen. Broj promenjivih ćelija ne sme da bude veći od 200. Solver prilagođava vrednosti u promenljivim ćelijama da bi zadovoljio ograničenja i dao željeni rezultat za ćeliju cilja. Solver ne dozvoljava korišćenje više od 1000 ćelija ukupno tokom rešavanja jednog problema.

Nakon unosa podataka, Solver se može pokrenuti iz menija Microsoft Excela. Sa klik-om na Data bira se funkcija Solver.

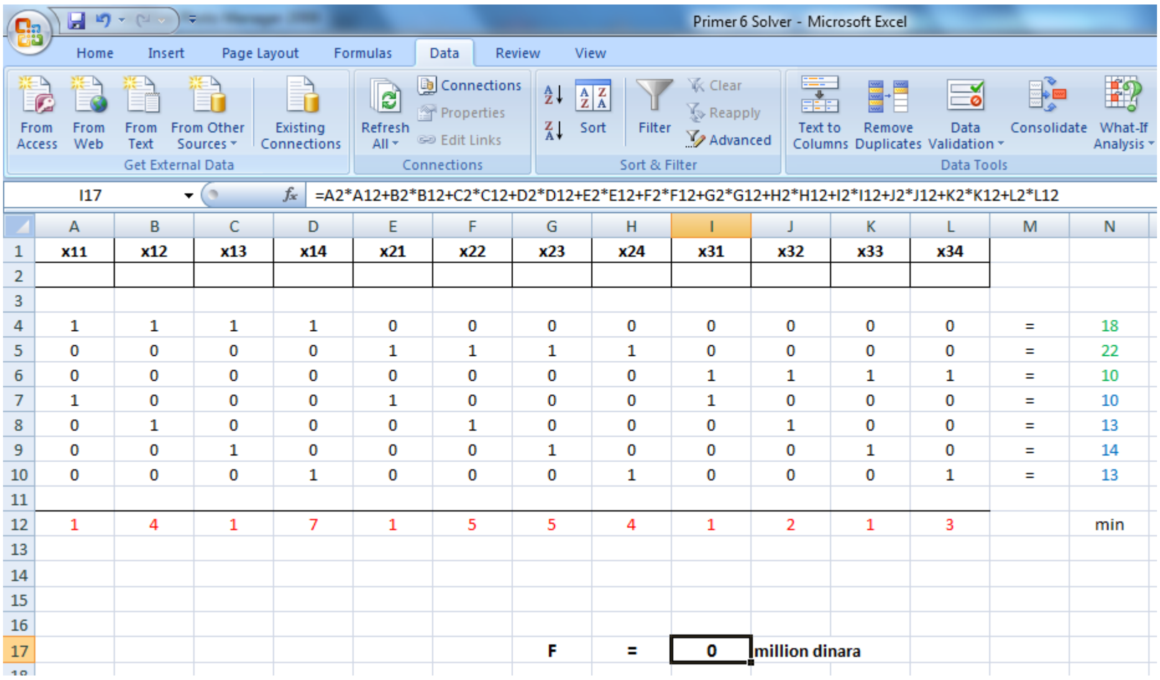


Slika 10

4.3.1. Primeri

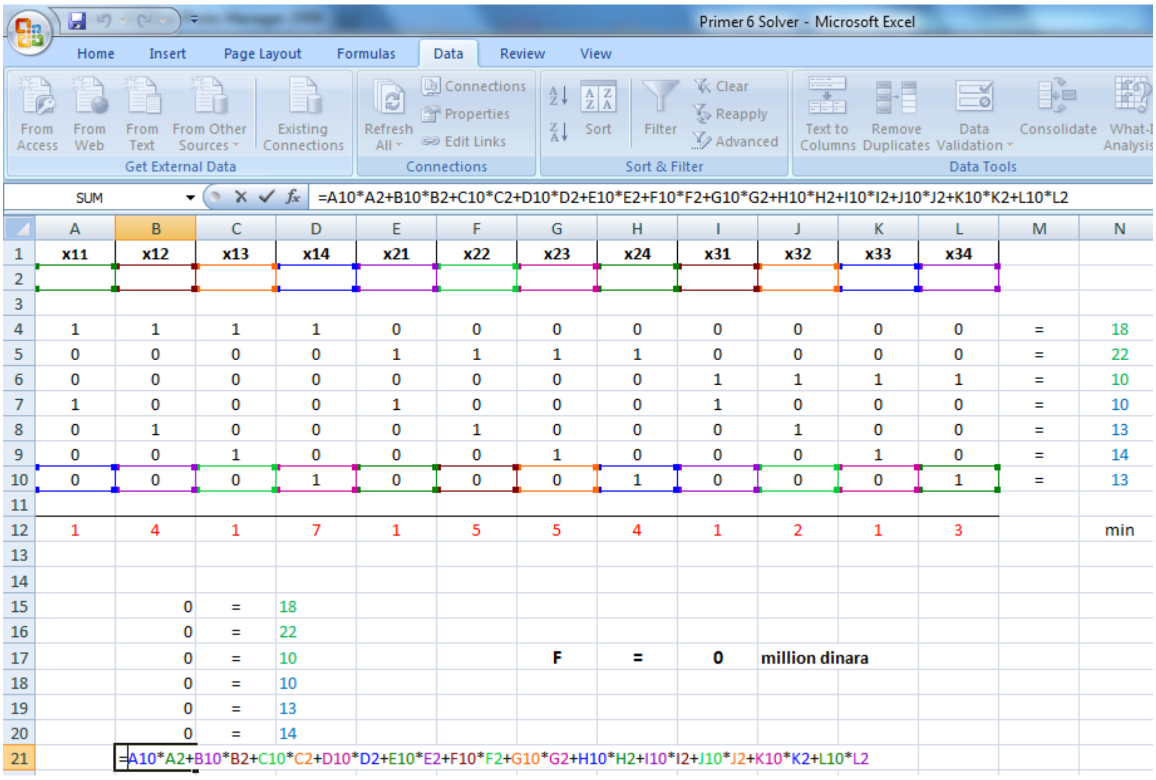
<u>Primer 15</u>: Pomoću programskog paketa Solver naći optimalan plan distribucije električne energije iz 3 elektrane do 4 grada za koje su podaci dati u Primeru 7.

Rešenje: Pokrene se program Microsoft Excel. U novom praznom fajlu na radnom listu odredi se mesto gde će se unositi promenljive, funkcija cilja i ograničenja. Prvo se unose imena promenljivih. Nije neophodno imenovati promenjive, ali se preporučuje radi preglednosti. Ispod toga se unose nule, koje će se promeniti nakon rešavanja problema. Na osnovu teksta problema se ispišu koeficijenti i unose se u obliku tabele. U jednoj ćeliji unosi se funkcija cilja pomoću promenljivih.



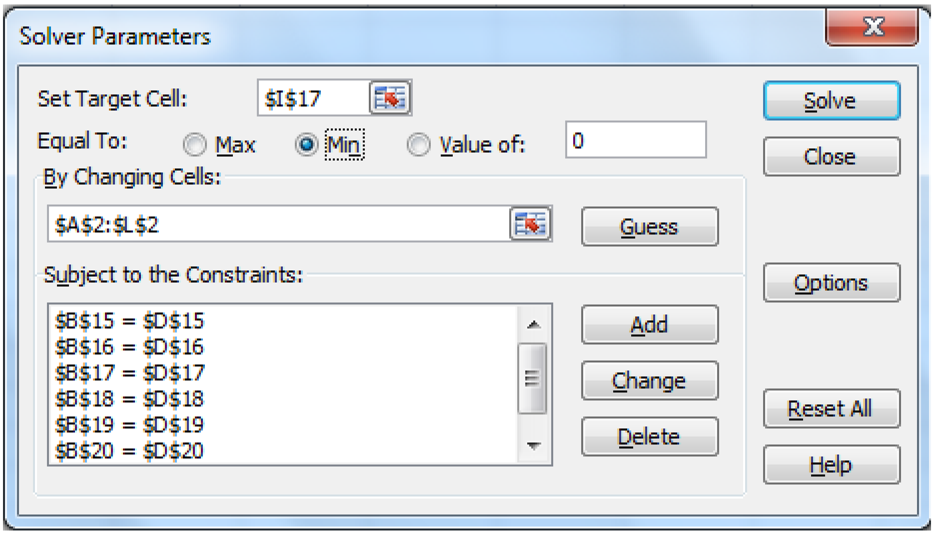
Slika 11

Nakon toga izračunava se leva strana ograničenja.



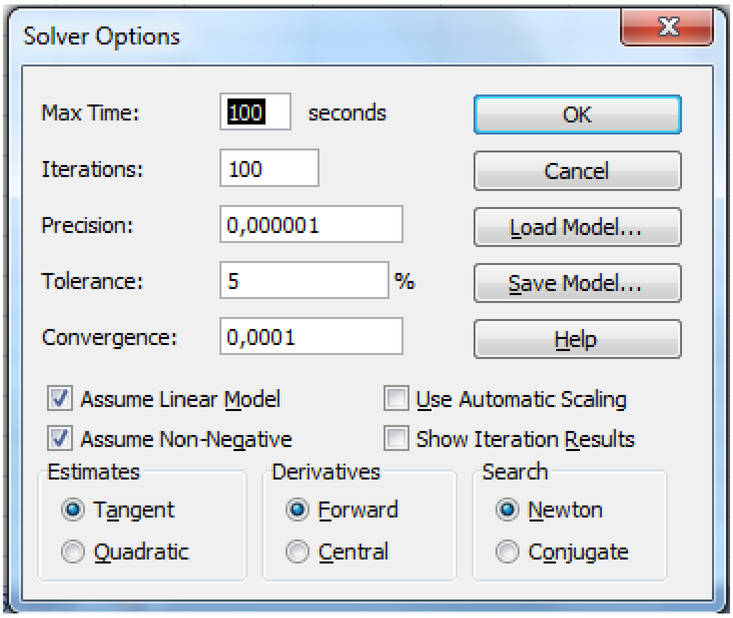
Slika 12

Kada su svi podaci uneti, pokreće se program za rešavanje klikom na funkciju Solve. Otvara se dijalog prozor *Solver Parameters* u kome se određuje ćelija funkcije cilja za (Set Target Cell) i ćelije promenljivih vrednosti (By Changing Cells). Promenljive ćelije moraju direktno ili indirektno biti u vezi sa ćelijom funkcijom cilja. Može se navesti najviše 200 promenljivih ćelija. Sa klikom na Add mogu se uneti ćelije ograničenja (Subject to the Constraints). Pored prethodnih koraka, treba da se odabere stavka Minimum u dijalogu Parametri programskog dodatka Solver.



Slika 13

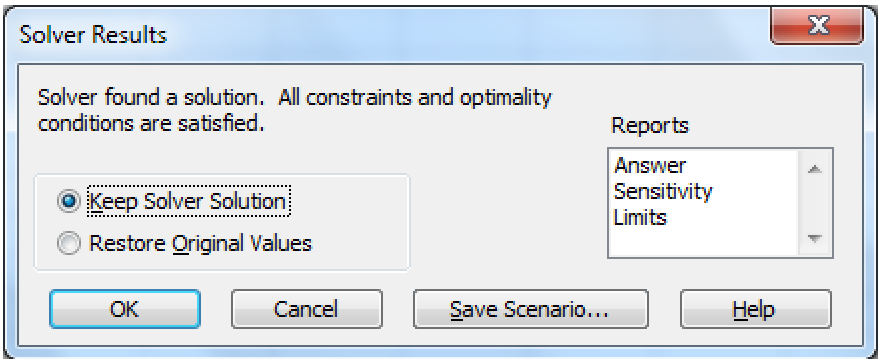
Može se još kliknuti na tipku Options kako bi se unele dodatne opcije modela, npr. da se koristi linearno programiranje, te da za količine nisu dozvoljene negativne vrednosti, itd.



Slika 14

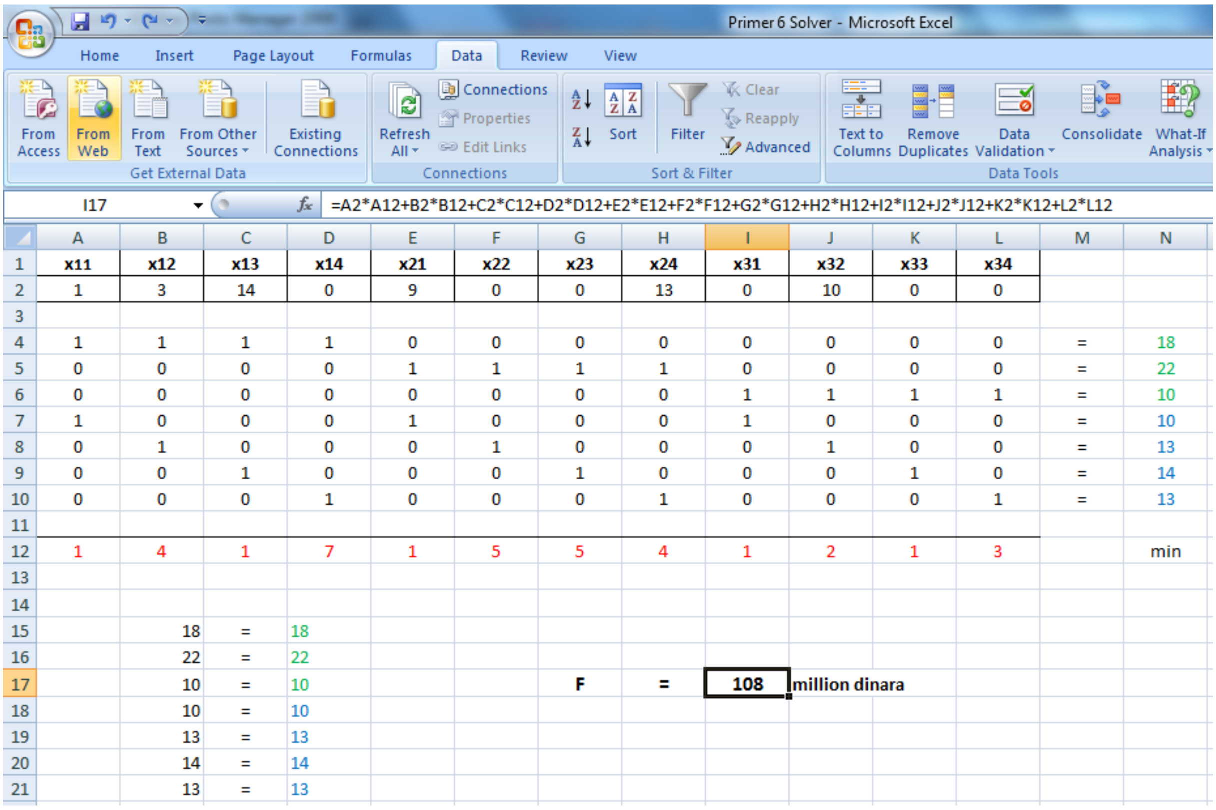
Nakon klika na dugme OK u dijalog prozoru *Solver Options*, program se vraća na početni dijalog prozor. Za rešavanje problema potrebno je pritisnuti dugme Solve, nakon čega se otvori novi dijalog prozor *Solver Results* koji pokazuje da li je dobijeno optimalno rešenje i gde treba izabrati jednu od sledećih mogućnosti:

- Keep Solver Solution – da bi program vrednosti rešenja sačuvao na radnom listu.
- Restore Original Values – da bi program vratio originalne vrednosti, vrednosti koje su bile pre klika na Solver dugme.



Slika 15

Nakon klika na dugme OK, dobija se rezultat optimizacije u ćeliji funkcija cilja, koji ima sledeći izgled:



Slika 16

Optimalan plan transporta ovog problema je oblika $x^* = (1,3,14,0,9,0,0,13,0,10,0,0)^T$. Ukupni trošak distribucije električne energije po ovom rešenju je

$$F = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 14 \cdot 1 + 0 \cdot 7 + 9 \cdot 1 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 5 + 13 \cdot 4 +$$
$$0 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 108 \text{ million dinara.}$$

Početno bazično rešenje dobijen Vogel-Korda metodom je optimalno rešenje.

Moguće je generisati izveštaj o rezultatima modela (nakon što Solver izračuna rešenje) klikom na tipku Reports gde se mogu izabrati sledeće opcije:

- Answer – generiše izveštaj o originalnim i konačnim vrednostima promenljivih u modelu i sačuva se kao novi radni list u Excel radnoj knjizi
- Sensitivity – izveštaj o promenama promenljivih u modelu
- Limits – izveštaj o dostizanju granica pojedinih promenljivih. Izveštaj će se pojaviti na novom listu u Excel fajlu.

4.4. WinQSB

WinQSB (Quantitative Systems for Business) je softverski paket koji sadrži više odvojenih alata za rešavanje različitih optimizacionih problema, kao što su na primer linearno programiranje, celobrojno programiranje, nelinearno programiranje, analize odluke, Markovi procesi, dinamičko programiranje, itd.

Alat LP/ILP služi za rešavanje problema linearnog, celobrojnog i binarnog programiranja. Pokretanjem alata otvara se prozor u kome se definišu:

- naziv problema
- broj promenljivih
- broj ograničenja
- funkcija cilja (maksimum ili minimum),

tip promenljivih:

- nenegativne
- nenegativne celobrojne
- binarne
- bez ograničenja,

format unosa podataka:

- matrična forma – U polja se upisuju samo koeficijenti koji idu uz promenljive. U prvom redu se definiše funkcija cilja. U ostalima ograničenjima moguće je promeniti znak ograničenja.
- normalan unos podataka – Pri normalnom unosu, ispisuju se ograničenja na uobičajen način.

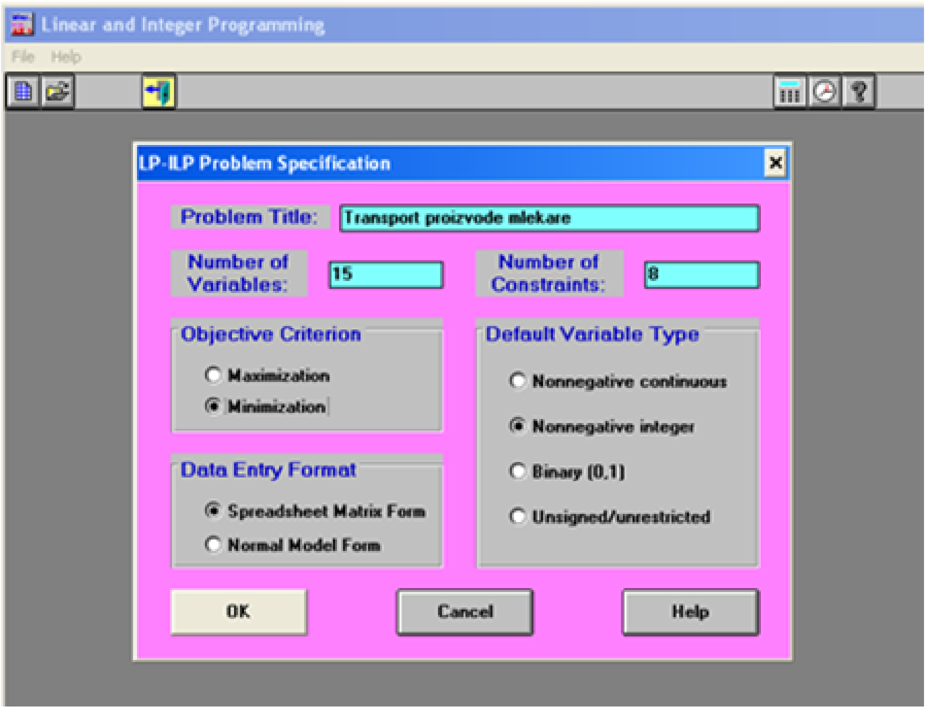
4.4.1. Primeri

<u>Primer 16</u>: Pomoću programskog paketa WinQSB naći optimalan plan problema transporta proizvoda mlekare u prodavnice za koje su podaci dati u Primeru 2.

Rešenje: Pokretanjem alata Linear and Integer Programming iz programskog paketa WinQSB pojaviće se početni ekran sa menijem.

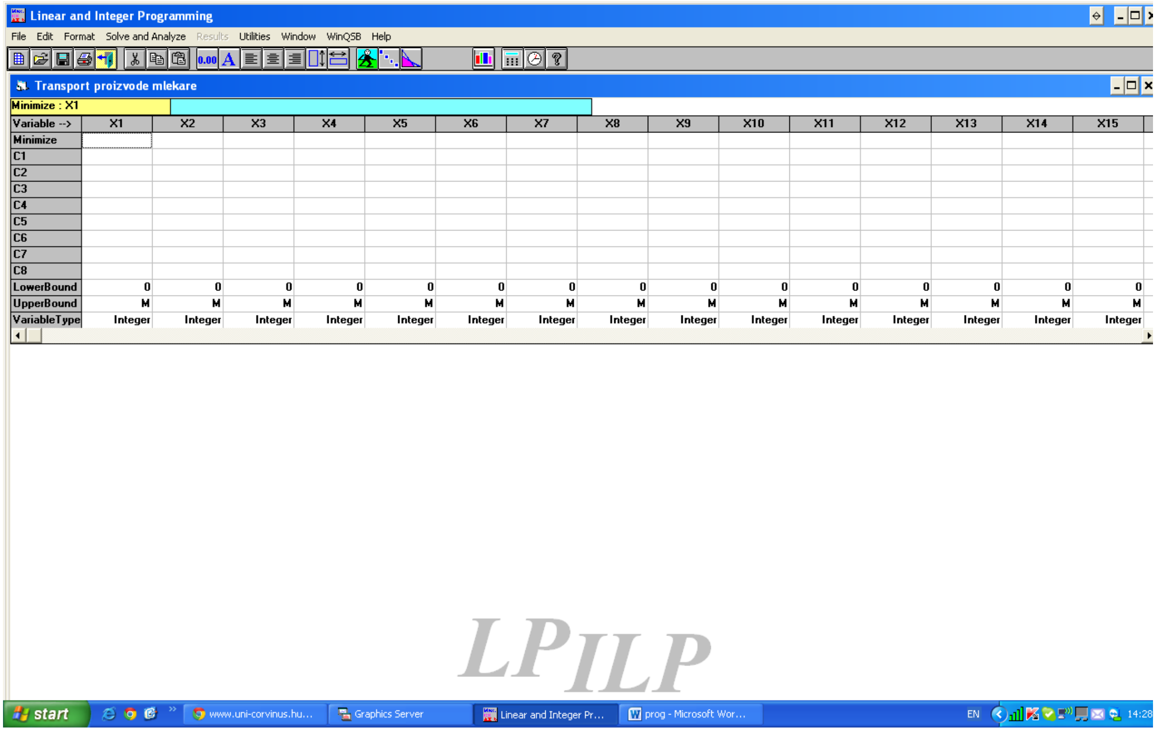
Slika 17

U meniju, klikom na File → New Problem, otvara se mali prozor, gde treba dati naziv problema, tačan broj promenljivih i ograničenja. Bira se Minimization, i Nonnegative integer, jer je u pitanju problem minimalizacije, i reč je o nenegativnim celobrojnim promenljivama.



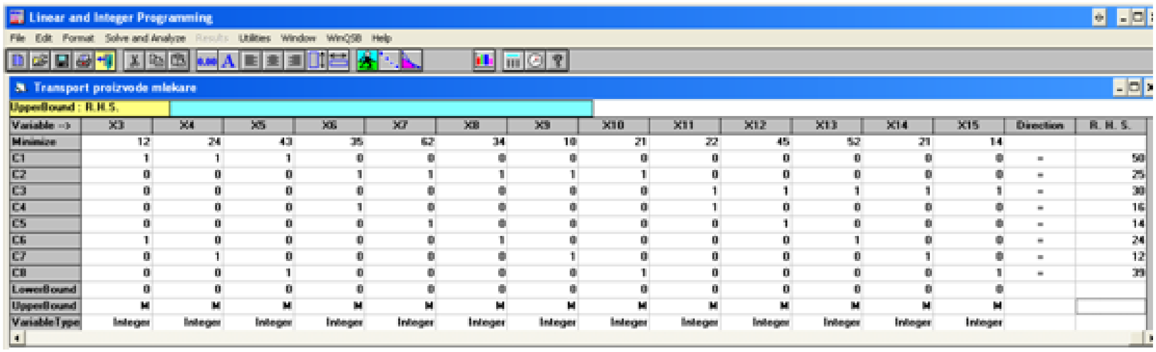
Slika 18

Klikom na OK, zatvara se mali prozor i javlja se prazan radni list, gde ima mesta za onoliko promenljivih i ograničenja koliko je uneto prethodno u malom prozoru.



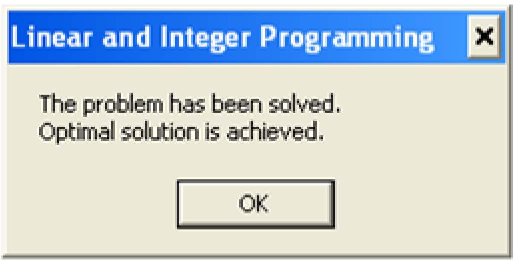
Slika 19

U prvom redu se definiše funkcija cilja, upisuju se cene c_{ij} kod odgovarajućih promeljivih x_{ij}. U ostalim redovima upisuju se ograničenja tipa jednakosti.



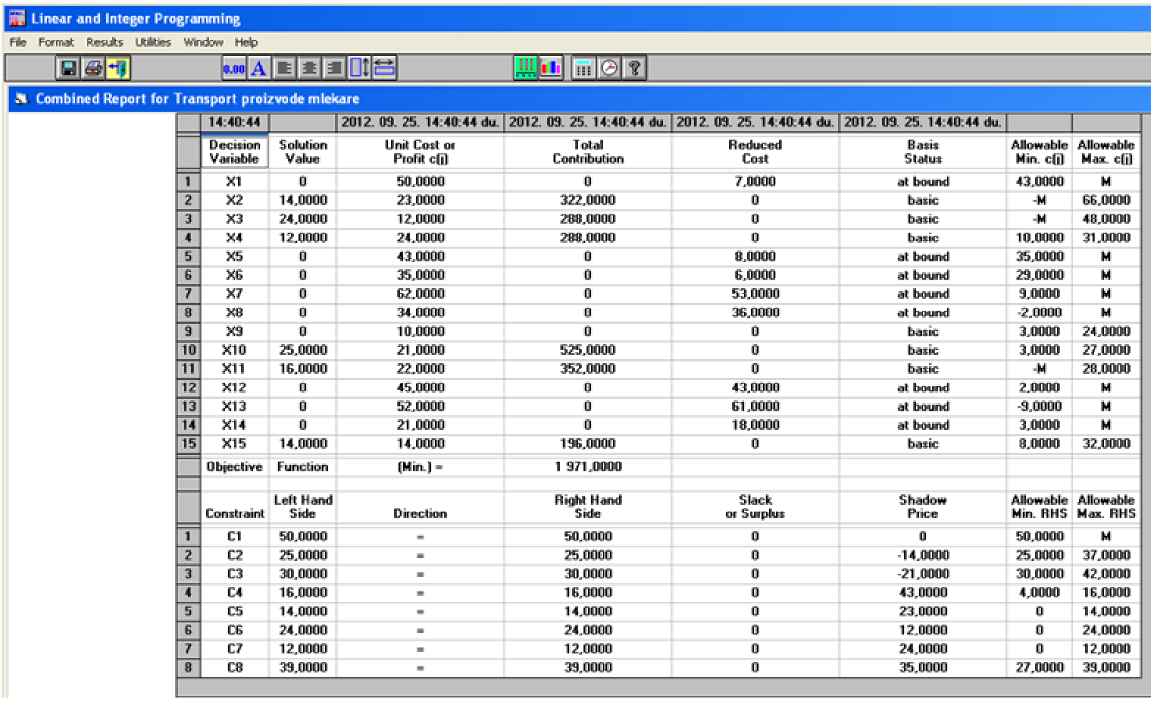
Slika 20

Nakon unosa podataka izborom opcije *Solve the problem* u meniju *Solve and Analyze*, ili klikom na dugme *Solve* startuje se rešavanje problema. Program zatim prikazuje poruku da li je problem rešen i da li je postignuto optimalno rešenje.



Slika 21

Rešenje je prikazano na slici 22.



	14:40:44		2012. 09. 25. 14:40:44 du.	2012. 09. 25. 14:40:44 du.	2012. 09. 25. 14:40:44 du.	2012. 09. 25. 14:40:44 du.		
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	X1	0	50,0000	0	7,0000	at bound	43,0000	M
2	X2	14,0000	23,0000	322,0000	0	basic	-M	66,0000
3	X3	24,0000	12,0000	288,0000	0	basic	-M	48,0000
4	X4	12,0000	24,0000	288,0000	0	basic	10,0000	31,0000
5	X5	0	43,0000	0	8,0000	at bound	35,0000	M
6	X6	0	35,0000	0	6,0000	at bound	29,0000	M
7	X7	0	62,0000	0	53,0000	at bound	9,0000	M
8	X8	0	34,0000	0	36,0000	at bound	-2,0000	M
9	X9	0	10,0000	0	0	basic	3,0000	24,0000
10	X10	25,0000	21,0000	525,0000	0	basic	3,0000	27,0000
11	X11	16,0000	22,0000	352,0000	0	basic	-M	28,0000
12	X12	0	45,0000	0	43,0000	at bound	2,0000	M
13	X13	0	52,0000	0	61,0000	at bound	-9,0000	M
14	X14	0	21,0000	0	18,0000	at bound	3,0000	M
15	X15	14,0000	14,0000	196,0000	0	basic	8,0000	32,0000
	Objective	Function	(Min.) =	1 971,0000				
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	50,0000	=	50,0000	0	0	50,0000	M
2	C2	25,0000	=	25,0000	0	-14,0000	25,0000	37,0000
3	C3	30,0000	=	30,0000	0	-21,0000	30,0000	42,0000
4	C4	16,0000	=	16,0000	0	43,0000	4,0000	16,0000
5	C5	14,0000	=	14,0000	0	23,0000	0	14,0000
6	C6	24,0000	=	24,0000	0	12,0000	0	24,0000
7	C7	12,0000	=	12,0000	0	24,0000	0	12,0000
8	C8	39,0000	=	39,0000	0	35,0000	27,0000	39,0000

Slika 22

U gornjoj polovini tabele su prikazane po kolonama vrednosti promenljivih, njihovi koeficijenti, ukupan udeo u funkciji cilja, marginalne cene, tipovi promenljivih (bazične ili nebazične), dozvoljena minimalna i dozvoljena maksimalna vrednost koeficijenata. U donjoj polovini tabele je vrednost funkcije cilja.

Uočava se da se optimalno rešenje poklapa sa rešenjem dobijenim metodom relativnih troškova u primeru 8, tj. ukupni trošak je

$$F = 0 \cdot 50 + 14 \cdot 23 + 24 \cdot 12 + 12 \cdot 24 + 0 \cdot 43 + 0 \cdot 35 + 0 \cdot 62 + 0 \cdot 34 + 0 \cdot 10 + 25 \cdot 21 + 16 \cdot 22 + 0 \cdot 45 + 0 \cdot 52 + 0 \cdot 21 + 14 \cdot 14 = 1971 \text{ dinara.}$$

5. Zaključak

Operaciona istraživanja predstavljaju skup modela, kvantitativnih metoda i algoritama, pomoću kojih se određuje najpovoljnije rešenje složenih problema iz mnogih oblasti ljudskog delovanja. Linearno programiranje, koje obuhvata i rešava veliki broj različitih problema, među koje spadaju i ekonomski problemi je važna oblast operacionih istraživanja. Problemi transporta predstavljaju specijalan slučaj problema linearnog programiranja i imaju poseban značaj u okviru linearnog programiranja.

Problem transporta podrazumeva raspoređivanje određene količine sredstava (proizvoda, robe i sl.) iz određenog broja izvora (snabdevača, proizvođača) do određenog broja odredišta (korisnika, potrošača) uzimajući u obzir troškove transporta na pojedinim relacijama s ciljem dobijanja takvog rešenja koje obezbeđuje minimalne ukupne troškove.

S obzirom na činjenicu da transportni problem spada u probleme linearnog programiranja, on se može rešiti pomoću simpleks metode, ali to nije racionalno zbog velikog broja ograničenja i promenljivih. Iz tog razloga su razvijene različite metode koje omogućavaju određivanje polaznog dopustivog baziČnog rešenja, kao i pronalaženje optimalnog rešenja transportnog problema.

Za pronalaženje početnog dopustivog baznog rešenja koriste se razne metode kao što su: metoda severezapadnog ugla, metoda najmanjeg elemenata u matrici cena transporta, metoda minimuma vrste i kolone, Vogelova aproksimativna metoda, Vogel-Korda metoda i dr. Određivanje optimalnog rešenja vrši se metodom skakanja s kamena na kamen, metodom potencijala ili Z-P metodom.

Nakon određivanja optimalnog rešenja, analizom osetljivosti se može ispitati do koje granice se mogu promeniti ulazni parametri transportnog problema a da to ne utiče na strukturu dobijenog optimalnog rešenja. Promene se mogu vršiti na koeficijentima u funkciji cilja, kao i na ponudi i potražnji. Dakle, analiza osetljivosti omogućava da se precizno ustanovi kako promene ulaznih podataka utiču na optimalno rešenje.

Transportni problemi koji se javljaju u praksi su problemi velikih dimenzija. Mnogobrojni programski paketi omogućavaju brzo i efikasno rešavanje takvih problema. Pomoću njih se veoma brzo može dobiti optimalno rešenje problema i izvršiti analiza osetljivosti koja ima veliki praktični značaj.

6. Literatura

[1] С. А. Ашманов: Линеие программиробание, Москва, 1981.

[2] N. Balakrishnan: Modified Vogel's Approximation method for unbalanced transportation problem, Applied Mathematics Letters 3 (2), 9-11, 1990.

[3] Dr. Benkő János: Logisztikai tervezés, Budapest, 2000.

[4] Marija Čileg, Tibor Kiš: Dualne cene i analiza osetljivosti u modelu transportnog problema sa ograničenim promenljivama, ANALI 14, 171-179, Subotica, 2005.

[5] S. Doustdargholi, A. Derakhasan, V. Abasgholipur: Sensitivity Analysis of Righthand-Side Parameter in Transportation Problem, Applied Mathematical Sciences 3 (30), 1501-1511, 2009.

[6] Ferenczi Zoltán: Operációkutatás, Győr, 2006.

[7] Thomas S. Ferguson: Linear programing, (www.math.ucla.edu/~tom).

[8] S. I. Gass: On solving the transportation problem, Journal of Operational Research Society 41 (4), 291-297, 1990.

[9] Glevitzky Béla: Operációkutatás I, Debrecen, 2003.

[10] S. K. Goyal: Improving VAM for unbalanced transportation problems, Journal of Operational Research Society 35 (12), 1113-1114, 1984.

[11] M. A. Hakim: An Alternative Method to Find Initial Basic Feasible Solution of a Transportation Problem, Annals of Pure and Applied Mathematics 1 (2), 2012, 203-209, Bangladesh, 2012.

[12] O. Kirca, A. Satir: A heuristic for obtaining an initial solution for the transportation problem, Journal of Operational Research Society 41 (9), 865-871, 1990.

[13] Serdar Korukoglu, Serkan Balli: An improved Vogel's approximation method for the transportation problem, Mathematical and Computational Applications 16 (2), 370-381, 2011.

[14] S. Krčevinac, M. Čangalović, V. Kovačević-Vujičić, M. Martić, M. Vujošević: Operaciona Istraživanja I, Beograd, 2006.

[15] David G. Luenberger, Yinyu Ye: Linear and nonlinear programming 3th. Edition, New York, 2008.

[16] M. Martić, D. Makajić-Nikolić, G. Savić, B. Panić: Operaciona Istraživanja I - Zbirka zadataka, Beograd, 2009.

[17] M. Mathirajan, B. Meenakshi: Experimental analysis of some variants of Vogel's approximation method, Asia-Pacific Journal of Operational Research 21 (4), 447-462, 2003.

[18] Dr Jovan J. Petrić: Operaciona istraživanja, Beograd, 1979.

[19] G. S. Ramakrishnan: An improvement to Goyal's modified VAM for the unbalanced transportation problem, Journal of Operational Research Society 39 (6), 609-610, 1988.

[20] N. V. Reinfeld, W.R. Vogel: Mathematical Programming, New Jersey, 1958.

[21] R.R.K. Sharma, S. Prasad: Obtaining a good primal solution to the incapacitated transportation problem, European Journal of Operational Research 144, 560-564, 2003.

[22] R.R.K. Sharma, K.D. Sharma: A new dual based procedure for the transportation problem, European Journal of Operational Research 122, 611-624, 2000.

[23] D. G. Shimshak, J.A. Kaslik, T.D. Barclay: A modification of Vogel's approximation method through the use of heuristics, Ineor 19, 259-263, 1981.

[24] Shweta Singh, G. C. Dubey, Rajesh Shrivastava: A Various Method to Solve the Optimality for the Transportation Problem, International Journal of Mathematical Engineering and Science 1 (4), 2277-6982, 2012.

[25] Shweta Singh, G. C. Dubey, Rajesh Shrivastava: Optimization and analysis of some variants through Vogel's approximation method (VAM), IOSR Journal of Engineering (IOSRJEN) 2 (9), 2250-3021, 2012.

[26] Katarina Surla, Zagorka L.-Crvenković: Operaciona istraživanja, Novi Sad, 2002.

[27] Y. Ílker Topcu: Operations research I, Istanbul, 2011-2012 .

[28] Ulrich A. Wagener: A new method os Solving the transportation problem, Operational Research Society 16 (4), 453-469, 1965.

[29] Wayne Winston: Operations Research Applications and Algorithms 4th. Edition, Duxbury Press, 2003.

[30] http://www.inf.unideb.hu/valseg/dolgozok/anett.racz/docs/Opkut/lingo.pdf

[31] www.scribd.com

[32] http://gazdasz2.atw.hu/kompl_szall_fel_nemme.pdf

[33] http://www.gams.com/docs/intro.htm

[34] pages.intnet.mu/cueboy/education/notes/algebra/modivam.pdf

Biografija

Tinde Ereg (rođ. Rapčanji) je rođena 30. aprila 1987. godine u Bečeju. Završila je osnovnu školu ”Zdravko Gložanski” i gimnaziju ”Gimnazija Bečej” u Bečeju. 2006. godine je upisala osnovne akademske studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer matematika finansija. Studije je završila u junu 2010. godine sa prosečnom ocenom 8,00. Iste godine je upisala master studije primenjene matematike, modul matematika finansija, na istom fakultetu. Zaključno sa januarskim ispitnim rokom 2012. godine, položila je sve predviđene ispite, kao i grupu pedagoško-psihološko-metodičkih predmeta sa prosečnom ocenom 8,44. Od septembra 2010. do avgusta 2012. je radila kao profesor matematike u Ekonomskoj-trgovinskoj školi u Bečeju.

Novi Sad, jun 2013. Tinde Ereg

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj: **RBR**	
Identifikacioni broj: **IBR**	
Tip dokumentacije: **TD**	monografska dokumentacija
Tip zapisa: **TZ**	tekstualni štampani materijal
Vrsta rada: **VR**	master rad
Autor: **AU**	Tinde Ereg
Mentor: **MN**	Prof. dr Sanja Rapajić
Naslov rada: **MR**	Problemi transporta i analiza osetljivosti
Jezik publikacije: **JP**	srpski (latinica)
Jezik izvoda: **JI**	srpski
Zemlja publikovanja: **ZP**	Srbija
Uže geografsko područje: **UGP**	Vojvodina
Godina: **GO**	2013.

Izdavač: **IZ**	autorski reprint
Mesto i adresa: **MA**	Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4.
Fizički opis rada: **FO**	(6/110/0/77/22/0/0) (broj poglavlja/strana/lit.citata/tabela/slika/grafika/priloga)
Naučna oblast: **NO**	matematika
Naučna disciplina: **ND**	Operaciona istraživanja
Predmetne odrednice, ključne reči: **PO, UDK**	linearno programiranje, problem transporta, simpleks metoda, dopustivo bazično rešenje, optimalno rešenje, analiza osetljivosti
Čuva se: **ČU**	u biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematičkog fakulteta, Univerziteta u Novom Sadu
Važna napomena: **VN**	
Izvod: **IZ**	U radu je predstavljeno rešavanje otvorenog i zatvorenog transportnog problema. Prikazane su različite metode za određivanje dopustivog bazičnog rešenja kao što su: metoda severozapadnog ugla, metoda najmanjeg elemenata u matrici cena transporta, metoda minimuma vrste i kolone, Vogelova aproksimativna metoda i Vogel-Korda metoda. Polazeći od dopustivog bazičnog rešenja, primenom metode relativnih troškova, metode potencijala ili Z-P metode određuje se optimalno rešenje. Rad se bavi i analizom osetljivosti kojom se može ispitati do koje granice se mogu menjati ulazni parametri transportnog problema a da to ne utiče na strukturu optimalnog rešenja. Osim toga, prikazano je nekoliko načina za brzo rešavanje transportnih problema velikih dimenzija primenom programskih paketa Lingo, Gams, Solver i WinQSB.

Datum prihvatanja teme: 10. 05. 2012.
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik:	dr Nataša Krejić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član:	dr Zorana Lužanin, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Mentor:	dr Sanja Rapajić, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE KEY
WORDS DOCUMENTATION

Accession number: **ANO**	
Identification umber: **INO**	
Document type: **DT**	monograph type
Type of record: **TR**	printed text
Contents Code: **CC**	master's thesis
Author: **AU**	Tinde Ereg
Mentor: **MN**	Prof. Dr. Sanja Rapajić
Title: **XI**	Transportation problems and sensitivity analysis
Language of text: **LT**	serbian(latin)
Language of abstract: **LA**	serbian
Country of publication: **CP**	Serbia
Locality of publication: **LP**	Vojvodina
Publication year: **PY**	2013.

Publisher: **PU**	author's reprint
Publication place: **PP**	Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4.
Physical description: **PD**	(6/110/0/77/22/0/0) (chapters/pages/quotations/tables/pictures/graphs/add.list)
Scientific field: **SF**	mathemathics
Scientific discipline: **SD**	Operations research
Subject,Key words: **SKW**	linear programming, transportation problem, simplex method, basic feasible solution, optimal solution, sensitivity analysis
Holding data: **HD**	in Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Note: **N**	

Abstract: **AB**	This paper deals with solving the transportation problem. It presents methods for finding the basic feasible solution and optimal solution of transportation problems. The most popular methods for finding the basic feasible solution are: north-west corner method, minimum-cost method, minimum-rows and columns method, Vogel's approximation method and Vogel-Korda method. The optimal solution is determined by using the stepping stone method, the modified distribution method or the zero point method. The work also deals with the sensitivity analysis which is very important. Transportation problems can be successfully solved by using several software packages like Lingo, Gams, Solver and WinQSB.

Accepted by the Scientific Board on: **AS**	10. 05. 2012.

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President:	Dr. Nataša Krejić, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member:	Dr. Zorana Lužanin, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Mentor:	Dr. Sanja Rapajić, associate professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad