Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku

Tijana Radivojević

Primena zakona velikih brojeva u životnom osiguranju

Master rad

mentor:
doc. dr. Dora Seleši

Novi Sad, 2011

Sadržaj

Predgovor **ii**

1 Uvod **1**

2 Pojmovi verovatnoće i stohastičke analize **3**

3 Klasična matematika životnog osiguranja **12**
- 3.1 Model 12
- 3.2 Ugovori životnog osiguranja 13
- 3.3 Tablice mortaliteta 16

4 Koncept finansijske matematike u diskretnom vremenu **20**
- 4.1 Model 20
- 4.2 Nearbitraža i ekvivalentna martingalna mera 21
- 4.3 Vrednovanje 27

5 Moderna matematika životnog osiguranja **30**
- 5.1 Principi moderne matematike životnog osiguranja 31
- 5.2 Model 33
- 5.3 Vrednovanje 39
- 5.4 Hedžing i diverzifikacija 44

6 Primer vrednovanja na osnovu tržišta **48**

7 Zaključak **54**

Dodatak **55**

Literatura **57**

Predgovor

Određivanje minimalne fer cene jedan je od najvažnijih problema matematike životnog osiguranja, a ovaj rad se bavi upravo izvođenjem metoda za određivanje tih cena. U klasičnom slučaju, gde su tržišta deterministička, princip ekvivalencije, a preko zakona velikih brojeva, osigurava da kompanija životnog osiguranja može postići da bilans po polisi konvergira ka nuli skoro sigurno za rastući broj nezavisnih klijenata. U aksiomatskom pristupu, ova ideja je prilagođena za opšti slučaj stohastičkih finansijskih tržišta. Minimalna fer cena opštih proizvoda životnog osiguranja jedinstveno je određena preko proizvoda ekvivalentne martingalne mere finansijskog tržišta sa merom verovatnoće prostora biometričkih stanja.

Svom mentoru, dr Dori Seleši, se zahvaljujem na predloženoj temi ovog master rada, jer je bila veoma zanimljiva i izazovna za mene. Posebno joj se zahvaljujem na svesrdnoj pomoći, savetima i razumevanju koje mi je pružila kako tokom izrade ovog rada, tako i tokom osnovnih i master studija.

Osim svom mentoru, zahvaljujem se i članovima komisije, prof. Nataši Krejić i prof. Danijeli Rajter-Ćirić, na razumevanju i mnogobrojnim preporukama koje su napisale za mene i time poboljšale standard mojih studija i podržale njihov nastavak kroz doktorske studije.

Želim da se zahvalim kolegi i prijatelju Rankov Milanu, na sadržajnim diskusijama i sugestijama vezanim za ovaj rad.

Zahvaljujem se i svima koji su mi, na bilo koji način pružili pomoć i podršku, prvenstveno prijateljima Ani, Jovani, Sonji, Stanislavi, Miroslavu, Slavetu, Vladimiru, Bobanu i Saši.

Posebno se zahvaljujem sestri Andrijani i roditeljima na neizmernoj podršci, ljubavi i celokupnom doprinosu koji nesebično čine.

Novi Sad, jun 2011. god. *Tijana Radivojević*

1

Uvod

Industrija osiguranja je najveći akumulator kapitala, a penzioni fondovi, kao i osiguravajuće kompanije, su najveći institucioni investitori današnjeg društva. Osiguravajuće kompanije sprovode investicione strategije koje zavise kako od njihovih prihoda tako i od operacija osiguranja (dizajna proizvoda, upravljanja rizikom, visine premija, procedura za izvršenje zahteva itd.).

Baveći se matematikom osiguranja i koristeći alate iz raznih disciplina, aktuarska nauka se definiše više pravcem njenih primena nego modelima i metodima koje koristi. Ipak, postoji bar jedan pravac aktuarske nauke koji predstavlja probleme i metode na dovoljno različit način tako da zaslužuje status nezavisnog polja naučnog istraživanja, a to je matematika životnog osiguranja. Ovo je oblast primenjene matematike koja proučava rizik pridružen životnom i penzionom osiguranju i metodima za upravljanje takvim rizicima. Određivanje cena ugovora životnog osiguranja i upravljanje rizicima koji se tome pridružuju, glavna su pitanja matematike životnog osiguranja.

U klasičnoj matematici životnog osiguranja, finansijska tržišta su po pretpostavci deterministička. Klasičan princip ekvivalencije tvrdi da kompanija životnog osiguranja treba poslovati tako da bilans po polisi konvergira ka nuli skoro sigurno, za rastući broj klijenata. Grubo govoreći, premije se određuju tako da su dobici i gubici "balansirani oko sredine". Ova ideja vodi do metoda vrednovanja koji se naziva princip očekivanja i bazira se na dvema komponentama: stohastička nezavisnost pojedinačnih života i jak zakon velikih brojeva.

U modernoj matematici životnog osiguranja, gde su finansijska tržišta po pretpostavci stohastička i gde se razmatraju opštiji proizvodi, široko prihvaćen princip vrednovanja je takođe princip očekivanja. Međutim, odgovarajuća mera verovatnoće je drugačija, pošto je minimalna fer cena zahteva za osiguranje određena preko nearbitražnog metoda, poznatog iz finansijske matematike. Odgovarajuća ekvivalentna martingalna mera je proizvod date ekvivalentne martingalne mere finansijskog tržišta sa merom verovatnoće prostora biometričkih stanja.

Cilj ovog rada je izvođenje principa vrednovanja tako da se zadovolji zahtev za konvergencijom bilansa po polisi, koji je ispunjen u klasičnom slučaju, preko jakog zakona velikih brojeva. U diskretnom vremenu, princip vrednovanja je izveden iz aksioma koje odražavaju opšte prihvaćene pretpostavke moderne matematike životnog osiguranja, a neke od njih su nezavisnost klijenata, nezavisnost biometričkih i finansijskih događaja, nearbitražno određivanje cena itd. Rezultujuća minimalna fer cena za opšte proizvode životnog osiguranja jedinstveno je određena preko ekvivalentne martingalne mere date proizvodom ekvivalentne martingalne mere finansijskog tržišta sa merom verovatnoće prostora biometričkih stanja.

Pod pomenutim aksiomima, pokazano je kako kompanija životnog osiguranja može postići da bilans po ugovoru u bilo kom budućem vremenu t konvergira ka nuli skoro sigurno za rastući broj klijenata. Odgovarajuća (čisto finansijska) hedžing strategija, kojom se postiže takva konvergencija, može biti finansirana preko minimalnih fer premija.

2

Pojmovi verovatnoće i stohastičke analize

Pre nego što predstavimo koncepte i modele životnog osiguranja i finansijske matematike, podsetićemo se određenih definicija i teorema iz teorije verovatnoće i stohastičke analize.

Definicija 2.1. *σ-algebra* na skupu X je familija skupova $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ sa osobinama:

1. $X \in \mathcal{F}$;
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{F}$;
3. $A_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$.

Skup X sa σ-algebrom $\mathcal{F}$ nazivamo *prostor sa σ-algebrom.*

Definicija 2.2. *Borelova σ-algebra* je najmanja σ-algebra koja sadrži zatvorene skupove (proizvoljnog topološkog prostora X). Sa $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ označava se Borelova σ-algebra na skupu realnih brojeva.

Definicija 2.3. Neka je $(X, \mathcal{F})$ prostor sa σ-algebrom. *Mera* μ na $\mathcal{F}$ je funkcija $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ za koju važi:
ako je $A_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}$, disjunktna familija skupova, tada je

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \ \ (\sigma\text{-aditivnost}).$$

$(X, \mathcal{F}, \mu)$ se naziva *merljiv prostor* ili *prostor sa merom.* Elemente σ-algebre $\mathcal{F}$ nazivamo *merljivim skupovima.*

Propozicija 2.1. *Neka je F neopadajuća desno neprekidna funkcija na $\mathbb{R}$. Tada postoji jedinstvena mera μ na $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ tako da je*

$$\mu((a, b]) = \mu_F((a, b]) = F(b) - F(a)$$

za svaki ograničeni interval $(a, b]$.

Ako je $F \equiv Id$ (Id je identičko preslikavanje), tada se μ_{Id} naziva *Lebegova mera* na $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ i predstavlja najvažniju meru na realnoj pravoj.

Neka je μ mera na prostoru $(X, \mathcal{F}, \mu)$ takva da je $\mu(X) = 1$. Mera sa ovakvom osobinom normiranosti naziva se *mera verovatnoće*, a prostor verovatnoće se obično označava sa $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Aksiomatska teorija verovatnoće upravo se zasniva na teoriji mere i integrala. Elementi prostora Ω su svi mogući ishodi nekog procesa, ili sva moguća stanja, a merljivi skupovi se nazivaju *događajima*. Nadalje u radu mera će se odnositi na meru verovatnoće.

Kada opisujemo osobine slučajnih promenljivih koje važe za (skoro) sve $\omega \in \Omega$, odn. na skupu mere 1, kažemo da važe *skoro sigurno* (ili $\mathbb{P}$-skoro sigurno, ako želimo da naglasimo u kojoj meri).

Definicija 2.4. Skup funkcija $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$[1] sa osobinom $\int_X |f|^p d\mu < \infty$, i u kojem identifikujemo funkcije jednake skoro svuda, sa uobičajenim operacijama sabiranja i množenja, je vektorski prostor L^p.

Ako za slučajnu promenljivu X kažemo da pripada prostoru $L^p = L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, to znači da ima konačni p-ti momenat, odn. $\mathbf{E}[X^p] < \infty$. Specijalno, za $p = 2$, prostor L^2 je *Hilbertov prostor* slučajnih promenljivih sa konačnim drugim momentom, a skalarni proizvod je dat sa $\langle X, Y \rangle = \mathbf{E}[XY]$, $X, Y \in L^2$.

Pošto se u radu koristi princip proizvoda mera, posle definicije proizvoda σ-algebri navodimo teoremu koja daje egzistenciju mere na proizvodu dva prostora.

Definicija 2.5. Neka su $(X, \mathcal{F})$ i $(Y, \mathcal{G})$ prostori sa σ-algebrama. *Proizvod σ-algebri* $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ je σ-algebra na proizvodu $X \times Y$ koju generišu skupovi oblika $A \times B$, gde je $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{G}$.

Teorema 2.1. *Neka su $(X, \mathcal{F}, \mu)$ i $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ prostori sa σ-algebrama $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ i konačnim merama μ i ν. Postoji jedinstvena mera η na $\mathcal{H} = \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ tako da je*

$$\eta(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$$

za sve pravouganike $A \times B, A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{G}$.

Generalizacija za beskonačne proizvode je takođe moguća.

Teorema 2.2 (Fubinijeva teorema). *Neka su $(X, \mathcal{F}, \mu)$ i $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ prostori sa σ-algebrama i konačnim merama i neka je $\eta = \mu \otimes \nu$ mera na $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$. Ako je funkcija F na $X \times Y$ u $\mathbb{R}$ η-integrabilna, tada*

[1] $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

$$\int_X (\int_Y F_x d\nu) d\mu = \int_{X\times Y} F d\eta = \int_Y (\int_X F^y d\mu) d\nu. \tag{2.1}$$

Pošto mi radimo sa merama verovatnoće, izraz (2.1) svodi se na

$$\mathbf{E}_\mu[\mathbf{E}_\nu[F]] = \mathbf{E}_{\mu\otimes\nu}[F] = \mathbf{E}_\nu[\mathbf{E}_\mu[F]].$$

Matematička očekivanja $\mathbf{E}_\nu[F]$ i $\mathbf{E}_\mu[F]$ postoje μ-skoro sigurno i ν-skoro sigurno, respektivno.

Definicija 2.6. *Uslovno očekivanje* slučajne promenljive X iz prostora $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ za datu σ-algebru $\mathcal{G}$ je skoro sigurno jedinstveno određena $\mathcal{G}$-merljiva slučajna promenljiva $\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]$ za koju važi

$$\int_A \mathbf{E}[X|\mathcal{G}] d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P}$$

za svako $A \in \mathcal{G}$.

Propozicija 2.2. *Uslovno očekivanje ima sledeće osobine:*

1. $\mathbf{E}[aX + bY|\mathcal{G}] = a\mathbf{E}[X|\mathcal{G}] + b\mathbf{E}[Y|\mathcal{G}]$ *(linearnost);*

2. $\mathbf{E}[\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbf{E}[X]$*;*

3. $\mathbf{E}[XY|\mathcal{G}] = X\mathbf{E}[Y|\mathcal{G}]$ *ako je X $\mathcal{G}$-merljivo;*

4. $\mathbf{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbf{E}[X]$ *ako je X nezavisno od $\mathcal{G}$;*

5. $\mathbf{E}[\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = \mathbf{E}[X|\mathcal{H}]$ *za $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$.*

U finansijskoj matematici se često javlja potreba za promenom mere verovatnoće. To se može pokazati veoma korisnim, kao što ćemo videti u daljem radu. Zato sada dajemo pregled osnovnih definicija i teorema koje omogućuju prelazak sa jedne mere na drugu.

Definicija 2.7. Dve mere verovatnoće $\mathbb{P}$ i $\mathbb{Q}$ definisane nad istim prostorom $(\Omega, \mathcal{F})$ su *ekvivalentne*, u oznaci $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$, ako imaju iste skupove mere nula, odn.

$$\mathbb{P}(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{Q}(A) = 0, \text{ za sve } A \in \mathcal{F}.$$

Teorema 2.3 (Radon-Nikodym). *Neka su $\mathbb{P}$ i $\mathbb{Q}$ ekvivalentne mere verovatnoće na prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$. Tada postoji nenegativna slučajna promenljiva Z takva da važi*

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A Z d\mathbb{P}, \ A \in \mathcal{F}. \tag{2.2}$$

Slučajna promenljiva Z je jedinstveno određena do na skup mere nula u odnosu na $\mathbb{P}$.

Takva slučajna promenljiva se naziva *Radon-Nikodimov izvod* mere $\mathbb{Q}$ u odnosu na meru $\mathbb{P}$ i označava se sa $d\mathbb{Q}/d\mathbb{P}$. Iz jednakosti (2.2) sledi da za svaku slučajnu promenljivu X iz prostora $(\Omega, \mathcal{F})$ važi

$$\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}[X] = \mathbf{E}_{\mathbb{P}}\left[X\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right]. \tag{2.3}$$

Radon-Nikodimov izvod se može interpretirati kao odnos gustina raspodele neke slučajne promenljive u merama $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{P}$, respektivno.

Da bismo odredili uslovno očekivanje slučajne promenljive X u odnosu na σ-algebru $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ u ekvivalentnoj meri $\mathbb{Q}$, primenjujući osobinu 2. iz propozicije 2.2 dobijamo

$$\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[X|\mathcal{G}\right]Y\right] = \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[XY\right], \tag{2.4}$$

za sve $Y \in \mathcal{G}$. Izraz sa leve strane jednakosti (2.4) se može napisati kao

$$\mathbf{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[X|\mathcal{G}\right]Y\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right] = \mathbf{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[X|\mathcal{G}\right]\mathbf{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G}\right]Y\right].$$

Izraz sa desne strane jednakosti (2.4) je zapravo

$$\mathbf{E}_{\mathbb{P}}\left[XY\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right] = \mathbf{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathbf{E}_{\mathbb{P}}\left[X\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G}\right]Y\right].$$

Sledi da (2.4) važi sa sve $Y \in \mathcal{G}$ ako i samo ako

$$\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[X|\mathcal{G}\right]\mathbf{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G}\right] = \mathbf{E}_{\mathbb{P}}\left[X\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G}\right],$$

pa se uslovno očekivanje u ekvivalentnoj meri $\mathbb{Q}$ definiše kao

$$\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[X|\mathcal{G}\right] = \frac{\mathbf{E}_{\mathbb{P}}\left[X\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G}\right]}{\mathbf{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G}\right]}.$$

Stohastički procesi

Definicija 2.8. *Realan stohastički proces*, u oznaci $(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$, je familija realnih slučajnih promenljivih definisanih na istom prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, gde je $\mathbb{T}$ parametarski skup.
$S_t(\cdot)$ je za svako fiksirano $t \in \mathbb{T}$ jedna realna slučajna promenljiva.
$S_\cdot(\omega)$ je za svako fiksirano $\omega \in \Omega$ jedna realna funkcija na $\mathbb{T}$, koja se naziva *trajektorija* ili *realizacija* stohastičkog procesa $(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$.

Mnoge pojave u finansijskoj matematici su stohastički procesi, npr. proces cena akcija, finansijskih derivata, kretanja kamatnih stopa, razne vrste rizika, itd.

Mi ćemo nadalje za parametarski skup $\mathbb{T}$ uzeti skup $\{0, 1, ..., T\}$ jer je to vreme koje ćemo posmatrati, odn. vreme od početka ugovora o osiguranju do njegovog isteka.

Definicija 2.9. Familija σ-algebri $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ na Ω naziva se *filtracija* stohastičkog procesa ako je

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$$

za sve $s, t \in \mathbb{T}$ takve da je $s \leq t$.

σ-algebra $\mathcal{F}_t$ će predstavljati informacije dostupne u trenutku t, odn. istoriju stohastičkog procesa do trenutka t, uključujući i t. $\mathcal{F}_t$ sadrži sve događaje čija je mera u trenutku t poznata. Kako t raste, tih događaja je sve više ("The longer you live the wiser you become").

Za proces $(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$ kažemo da je *adaptiran* filtraciji $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ ako je slučajna promenljiva S_t $\mathcal{F}_t$-merljiva za svako $t \in \mathbb{T}$. U ovom radu to će značiti da je cena aktive u trenutku t deo informacija $\mathcal{F}_t$ koje su dostupne u trenutku t.

Definicija 2.10. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ prostor verovatnoća i $(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$ stohastički proces adaptiran filtraciji $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$. Proces $(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$ je *martingal* u meri $\mathbb{P}$ ako je

$$\mathbf{E}[S_t|\mathcal{F}_{t-1}] = S_{t-1} \ \ \mathbb{P}\text{-skoro sigurno}, \ \ t = 1, 2, ..., T,$$

što je ekvivalentno sa

$$\int_A S_t d\mathbb{P} = \int_A S_{t-1} d\mathbb{P} \ \ \text{za svako } A \in \mathcal{F}_{t-1}, \ t = 1, 2, ..., T.$$

Pošto osobina martingala zavisi od mere verovatnoće, reći ćemo da je proces S $\mathbb{P}$-martingal, kada je potrebno naglasiti u kojoj verovatnoći. Martingal je matematički izraz koji zapravo označava fer igru. Prema definiciji, za martingal se očekuje da ostane na trenutnom nivou. Na primer, ako je martingal proces bogatstva jednog investitora, to znači da je očekivanje njegovog budućeg bogatstva jednako trenutnom bogatstvu.

Zakon velikih brojeva

Jedan od važnih zakona u teoriji verovatnoće je zakon velikih brojeva. Postoji više teorema o ovom zakonu, ali svaka tvrdi da empirijske prosečne vrednosti konvergiraju ka očekivanoj vrednosti. Ove teoreme se često nazivaju *zakoni proseka*. Prvi dokaz dao je švajcarski matematičar Jakob Bernoulli 1713. godine.

Slika 2.1: Jakob Bernoullie

Na švajcarskoj komemorativnoj poštanskoj marki, pored slike Bernulija, nalazi se ilustracija koja pokazuje da prosečna vrednost eksperimenta konvergira nekom broju, sa porastom broja izvedenih eksperimenata.

Zakoni velikih brojeva uglavnom se dele na slabe zakone i jake zakone, a među njima postoje varijante sa različitim nivoima opštosti.

Neka je $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih slučajnih promenljivih sa jednakim raspodelama i konačnim očekivanjem $\mathbf{E}[X]$ i neka je $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ empirijska srednja vrednost niza. Sledi matematička formulacija slabog zakona velikih brojeva.

Slab zakon velikih brojeva. $\overline{X}_n$ konvergira *u verovatnoći* ka $\mathbf{E}[X]$, odnosno

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\left|\overline{X}_n - \mathbf{E}[X]\right| < \epsilon) = 1 \text{ za svako } \epsilon > 0.$$

To znači da verovatnoća da se uzoračka sredina neće značajno udaljiti od sredine u raspodeli teži ka 1, kako veličina uzorka teži ka beskonačnosti.

Slab zakon se ne odnosi na beskonačan niz realizacija neke slučajne promenljive, već samo tvrdi da će se 'balansirani' nizovi javljati sa većom verovatnoćom ako posmatramo duže nizove.

Jak zakon velikih brojeva se odnosi na isti problem, ali tvrdi da empirijska sredina konvergira skoro sigurno ka očekivanju u raspodeli. On se odnosi samo na beskonačne nizove realizcija slučajne promenljive, tačnije, na skup tih beskonačnih nizova, i tvrdi da skup 'balansiranih' nizova ima verovatnoću 1.

Jak zakon velikih brojeva. $\overline{X}_n$ konvergira *skoro sigurno* ka $\mathbf{E}[X]$, odnosno

$$\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} \overline{X}_n = \mathbf{E}[X]) = 1. \tag{2.5}$$

Ova verzija nosi naziv jak zakon iz razloga što ako slučajne promenljive konvergiraju skoro sigurno (jače) one konvergiraju i u verovatnoći (slabije). Jak zakon velikih brojeva implicira slab zakon.

U ovom radu ćemo koristiti sledeći oblik jakog zakona velikih brojeva, koji je ekvivalentan sa (2.5)

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbf{E}[X_i]) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ skoro sigurno} \tag{2.6}$$

Dokaz slabog zakona velikih brojeva se jednostavno izvodi iz nejednakosti Čebiševa, dok su dokazi za jak zakon nešto komplikovaniji. Većina dokaza jakog zakona, koji pretpostavljaju konačnu varijansu, bazirani su na Kolmogorovljevoj nejednakosti, koja predstavlja generaliziciju nejednakosti Čebiševa.

Teorema 2.4 (Kolmogorovljev kriterijum). *Za svaki niz nezavisnih slučajnih promenljivih $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sa konačnim očekivanjem važi jak zakon velikih brojeva ako je ispunjen jedan od uslova*

1. *Za svako n varijansa od X_n je konačna i*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Var(X_n)}{n^2} < \infty.$$

2. *Slučajne promenljive imaju istu raspodelu.*

Dokaz

1. Konstruišemo martingal

$$M_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{X_i - \mathbf{E}[X_i]}{i}$$

Ako je $\mathcal{F}_n$ σ-algebra generisana sa $X_1, ..., X_n$, onda je

$$\mathbf{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] = M_n + \frac{\mathbf{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] - \mathbf{E}[X_{n+1}]}{n+1} = M_n,$$

jer iz nezavisnosti X_{n+1} i $\mathcal{F}_n$ sledi da je $\mathbf{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbf{E}[X_{n+1}]$. Dakle, M je martingal u odnosu na filtraciju $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Takođe, zbog nezavisnosti X_n, varijansa od M_n je

$$Var(M_n) = \sum_{i=1}^{n}\frac{Var(X_i - \mathbf{E}[X_i])}{i^2} \leq \sum_{i=1}^{n}\frac{Var(X_i)}{i^2} < \infty.$$

Na osnovu nejednakosti $\mathbf{E}[|M_n|] \leq \sqrt{\mathbf{E}[M_n^2]} = \sqrt{Var(M_n)}$ znamo da je M martingal iz prostora L^1, pa sledi da granična vrednost $M_\infty = \lim_{n\to\infty} M_n$ postoji i konačna je, sa verovatnoćom 1.

Jak zakon velikih brojeva sada sledi iz Kronekerove leme, koja kaže da za niz realnih brojeva $x_1, x_2, ...$ i $0 < b_1, b_2, ...$ takve da b_n raste ka beskonačnosti i $\sum_n x_n/b_n$ ima konačan limes, važi

$$\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{n} x_i \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

U našem slučaju, za $x_n = X_n - \mathbf{E}[X_n]$ i $b_n = n$ dobijamo konvergenciju (2.6).

2. Primetimo da sada slučajne promenljive X_n ne moraju biti kvadratno integrabilne, ali su i.i.d. (nezavisne slučajne promenljive sa jednakim raspodelama). Definišemo

$$\widetilde{X}_n := X_n - \mathbf{E}[X_n]$$

tako da su $\widetilde{X}_n$ i.i.d. slučajne promenljive sa očekivanjem $\mathbf{E}[\widetilde{X}_n] = 0$. Pored toga, definišemo

$$Y_n := \tilde{X}_n I_{\{|\tilde{X}_n|<n\}}.$$

Pošto X_n ima istu raspodelu kao i X_1 onda je

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbf{E}[Y_n^2]}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{E}\left[\frac{1}{n^2}I_{\{|\tilde{X}_n|<n\}}\widetilde{X}_n^2\right]\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{E}\left[\frac{1}{n^2}I_{\{|\tilde{X}_1|<n\}}\widetilde{X}_1^2\right]\\ &= \mathbf{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}I_{\{|\tilde{X}_1|<n\}}\widetilde{X}_1^2\right]. \qquad (2.7)\end{aligned}$$

Ako je N najmanji ceo broj koji je veći od $|\tilde{X}_1|$, onda

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}I_{\{|\tilde{X}_1|<n\}} &\leq \sum_{n=N}^{\infty}\frac{4}{4n^2-1} = \sum_{n=N}^{\infty}\left(\frac{2}{2n-1}-\frac{2}{2n+1}\right)\\ &= \frac{2}{2N-1} \leq \frac{2}{N} \leq \frac{2}{|\widetilde{X}_1|}.\end{aligned}$$

Ubacujući u jednakost (2.7) dobijamo

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Var[Y_n]}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbf{E}[Y_n^2]}{n^2} \leq \mathbf{E}\left[\frac{2}{|\widetilde{X}_1|}\widetilde{X}_1^2\right] = \mathbf{E}\left[2|\widetilde{X}_1|\right] < \infty.$$

Prema tome, Y_n ima potrebne osobine za primenu jakog zakona velikih brojeva za kvadratno integrabilne slučajne promenljive i dobijamo da

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \mathbf{E}[Y_i]) \longrightarrow 0 \qquad (2.8)$$

kada $n \to \infty$, sa verovatnoćom 1. Takođe,

$$\mathbf{E}[Y_n] = \mathbf{E}[\widetilde{X}_n I_{\{|\widetilde{X}_n|<n\}}] = \mathbf{E}[\widetilde{X}_1 I_{\{|\widetilde{X}_1|<n\}}]$$

konvergira ka nuli, kada $n \to \infty$. Stoga, izraz (2.8) je ekvivalentan sa

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \longrightarrow 0 \tag{2.9}$$

kada $n \to \infty$, sa verovatnoćom 1.

Primetimo da je

$$\mathbf{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} I_{\{\widetilde{X}_n \neq Y_n\}}\right] = \mathbf{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} I_{\{|\widetilde{X}_1| \geq n\}}\right] \leq \mathbf{E}[|\widetilde{X}_1|] < \infty,$$

pa je $\sum_{n=1}^{\infty} I_{\{\widetilde{X}_n \neq Y_n\}} < \infty$ i $Y_n = \widetilde{X}_n$ za dovoljno veliko n, sa verovatnoćom 1. Zamenjujući sada Y_i sa $\widetilde{X}_i$ u (2.9) dobija se traženi rezultat. $\square$

3

Klasična matematika životnog osiguranja

Princip ekvivalencije u klasičnoj matematici životnog osiguranja tvrdi da premije treba određivati tako da su prihodi i gubici "balansirani oko sredine". Pod pretpostavkom da su finansijska tržišta deterministička, ova ideja vodi do metoda vrednovanja koji se naziva princip očekivanja. Upotrebom ova dva principa osiguravajuća kompanija može postići (hedžingovanjem) da bilans po polisi konvergira ka nuli skoro sigurno za rastući broj osiguranika. Ovo se često odnosi na mogućnost "diverzifikacije" smrtnosti (biometričkog rizika), a za to je potrebna stohastička nezavisnost pojedinačnih života i jak zakon velikih brojeva.

3.1 Model

U klasičnoj matematici životnog osiguranja, finansijska tržišta su po pretpostavci deterministička. Stoga su cene hartija od vrednosti deteminističke pozitivne funkcije na skupu $\mathbb{T} = \{0, 1, ..., T\}$.

Odsustvo arbitraže je veoma bitna pretpostavka u teoriji određivanja cena. Kasnije ćemo dati matematičku definiciju za mogućnost arbitraže na stohastičkim tržištima, a za sada ćemo je formulisati kao priliku za ostvarivanje profita bez mogućnosti gubitka, odn. bez rizika. Sama pretpostavka o odsustvu arbitraže nije potpuno realna, već predstavlja pojednostavljenje modela. Međutim, ako se na tržištu i pojavi mogućnost za arbitražu, tržište reaguje brzo tako da ona nestaje u veoma kratkom vremenskom periodu.

Pošto pretpostavljamo da na tržištu nema arbitraže, sve cene aktiva moraju imati dinamike identične do na skaliranje. Zbog toga možemo pretpostaviti da na tržištu postoji samo jedna aktiva sa procesom cena $S = (S_t)_{t\in\mathbb{T}}$ kao determinističkom funkcijom vremena i da je $S_0 = 1$.

Biometrički prostor verovatnoće označava se sa $(B, \mathcal{B}_T, \mathbb{B})$. Biometrički podaci odnose se na biološke i neke od socijalnih statusa ljudi (npr. zdravstveno stanje, starost, pol, bračno stanje, radna sposobnost itd.). Ove informacije se modeluju preko filtracije $(\mathcal{B}_t)_{t\in\mathbb{T}}$, što znači da tokom vremena ne dolazi do gubitka informacija. Pored toga, $\mathcal{B}_0 = \{\emptyset, B\}$, odn. u trenutku $t = 0$ poznata su sva stanja.

Novčani tok $X_\mathbb{T} = (X_0, X_1, ..., X_T)$ je niz isplata X_t koje su $\mathcal{B}_t$-merljive. Na primer, isplata $X_t = 100$ n.j. ako osiguranik umre u periodu $(t-1, t]$, u suprotnom $X_t = 0$.

Princip očekivanja

U klasičnoj matematici životnog osiguranja, fer vrednost (ili cena) u vremenu $s \in \mathbb{T}$ za $\mathbb{B}$-integrabilnu isplatu X u vremenu t je uslovno očekivanje diskontovane isplate u odnosu na $\mathcal{B}_s$, odn. za t-isplatu X imamo

$$\Pi_s^t(X) := S_s \cdot \mathbf{E}\left[\frac{X}{S_t}|\mathcal{B}_s\right], \; s \in \mathbb{T}. \tag{3.1}$$

Ovakav princip vrednovanja poznat je pod nazivom *princip očekivanja.*

Sadašnja vrednost (present value) novčanog toka $X_\mathbb{T}$ u trenutku $s \in \mathbb{T}$ je

$$\begin{aligned} PV_s(X_\mathbb{T}) &= \sum_{t\in\mathbb{T}} \Pi_s^t(X_t) \\ &= \sum_{t\in\mathbb{T}} S_s \cdot \mathbf{E}\left[\frac{X_t}{S_t}|\mathcal{B}_s\right]. \end{aligned} \tag{3.2}$$

3.2 Ugovori životnog osiguranja

Karakteristika ugovora životnog osiguranja je da su isplate uslovljene neizvesnim događajima u životu klijenata (koji su uglavnom nepovezani sa događajima na tržištu). Zatim, ugovori su dugoročni i ograničavajući za osiguravača i stoga, za takve ugovore ne postoji likvidno tržište.

U ponudi osiguravajućih kompanija postoje razne vrste ugovora o životnom osiguranju. Osnovna podela je sledeća:

Doživotno osiguranje života (whole life insurance) - isplaćuje osiguranu sumu[1] kada osiguranik umre; najređi oblik osiguranja.

[1]Osigurana suma je unapred određeni iznos koji će biti isplaćen u slučaju nastupanja osiguranog slučaja (doživljenja ili smrti).

Riziko osiguranje (term insurance) - najjednostavniji oblik životnog osiguranja; obezbeđuje isplatu osigurane sume ako se smrt dogodi tokom naznačenog perioda.
Osiguranje za slučaj doživljenja (pure endowment) - isplaćuje osiguranu sumu na fiksiran datum ako je osiguranik živ.
Mešovito osiguranje za slučaj smrti i doživljenja (endowment) - kombinacija riziko osiguranja i osiguranja za slučaj doživljenja; najčešći oblik osiguranja koje isplaćuje osiguranu sumu na fiksiran datum u budućnosti u slučaju doživljenja, ili ranije u slučaju smrti (osigurana suma za slučaj smrti ne mora biti ista kao osigurana suma za doživljenje); uglavnom se prodaje uz dopunska osiguranja za nezgode.
Rentno osiguranje (life annuity) - obezbeđuje godišnje isplate unapred ugovorenih iznosa (rente) dok god je osiguranik živ.

Zahtevi za isplatu (osigurane sume) predstavljaju novčani tok $X_{\mathbb{T}} = (X_0, X_1, ..., X_T)$ koji osiguravajuća kompanija plaća osiguraniku.

Premije predstavljaju novčani tok $Y_{\mathbb{T}} = (Y_0, Y_1, ..., Y_T)$ koji osiguranik plaća osiguravajućoj kompaniji. Obično se premije plaćaju unapred, a u zavisnosti od ugovora mogu se plaćati mesečno, kvartalno, polugodišnje ili godišnje i mogu biti konstantnog ili promenljivog iznosa.

Sa stanovišta kompanije, ugovor je dat novčanim tokom $Y_{\mathbb{T}} - X_{\mathbb{T}}$.

Princip ekvivalencije

Osnovu klasičnog životnog osiguranja čini princip ekvivalencije, koji se bazira na diverzifikaciji rizika u velikim portfolijima pod pretpostavkom da su poznata buduća kretanja kamatnih stopa i drugih relevantnih ekonomskih i demografskih uslova.

Princip ekvivalencije u aktuarstvu kaže da sadašnja vrednost budućih obaveza (gubitaka) osiguravača mora biti jednaka sadašnjoj vrednosti budućih obaveza osiguranika (premija). Prema tome, *neto premija* ili *minimalna fer premija* se određuje tako da

$$PV_0(X_{\mathbb{T}}) = PV_0(Y_{\mathbb{T}}). \tag{3.3}$$

U početnom trenutku, vrednost ugovora je $PV_0(Y_{\mathbb{T}} - X_{\mathbb{T}}) = 0$.

Princip ekvivalencije (3.3) i princip očekivanja (3.2) predstavljaju temelje klasične matematike životnog osiguranja.

Napomena 1. Što se tiče izračunavanja premije, klasičan princip očekivanja se obično smatra principom minimalne premije, zato što svaka osiguravajuća kompanija mora biti u stanju da odgovori na troškove veće od očekivanih. Takozvani faktori opterećenja na minimalne fer premije se mogu dobiti preko složenijih principa za određivanje premija. Druga mogućnost za njihovo dobijanje je preko principa očekivanja ali sa prilagođenom bazom prvog reda[2] za biometričke i finansijske događaje, npr. dobro izabrane stope smrtnosti i kamatne stope baze drugog reda[3], koje predstavljaju scenario za najgori mogući slučaj budućih dešavanja.

Razmotrimo sada princip vrednovanja (3.1). Posmatramo zahteve za isplatu $\{(-{}^iX_t)_{t\in\mathbb{T}} : i \in \mathbb{N}\}$ koji pristižu kompaniji, gde ${}^iX_t$ zavisi od života i-tog klijenta. Pored toga, pretpostavljamo da za sve $t \in \mathbb{T}$ postoji $c_t \in \mathbb{R}^+$ tako da

$$\left\|{}^iX_t\right\|_2 \leq c_t, \tag{3.4}$$

za sve $i \in \mathbb{N}$, gde $\|\cdot\|_2$ označava L^2 normu Hilbertovog prostora svih kvadratno integrabilnih realnih funkcija na $(B, \mathcal{B}_T, \mathbb{B})$. Sada se za svako $i \in \mathbb{N}$ i svako $t \in \mathbb{T}$ kupuju portfoliji $\mathbf{E}_{\mathbb{B}}[{}^iX_t]$, gde se $\mathbf{E}_{\mathbb{B}}[{}^iX_t]$ interpretira kao finansijski proizvod sa dospećem u vremenu t, odn. novčana isplata $\mathbf{E}_{\mathbb{B}}[{}^iX_t] \cdot S_t$ za t je kupljena u trenutku 0. Razmotrimo ravnotežu dobitaka i gubitaka u trenutku t. Sredina svih isplata u trenutku t za m polisa data je sa

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\mathbf{E}_{\mathbb{B}}[{}^iX_t] -{}^i X_t) \cdot S_t. \tag{3.5}$$

Ovaj izraz konvergira ka nuli $\mathbb{B}$-skoro sigurno, jer možemo primeniti jak zakon velikih brojeva, preko Kolmogorovljevog kriterijuma (izraz (3.4)). Štaviše, iz (3.1) direktno sledi da je $\Pi_0^t(\mathbf{E}_{\mathbb{B}}[{}^iX_t]) = \Pi_0^t({}^iX_t)$ za sve $i \in \mathbb{N}$. Stoga, u klasičnom slučaju fer vrednost bilo kog zahteva za isplatu jednaka je ceni hedža u vremenu 0 tako da za rastući broj nezavisnih zahteva za isplatu bilans isplata i hedževa konvergira ka nuli skoro sigurno.

Razmotrimo sada skup ugovora životnog osiguranja $\{({}^iX_t, {}^iY_t)_{t\in\mathbb{T}} : i \in \mathbb{N}\}$. Pošto se sa stanovišta kompanije polisa može predstaviti vektorom portfolija $({}^iY_t -{}^i X_t)_{t\in\mathbb{T}}$, analogni hedž dat je sa $(\mathbf{E}_{\mathbb{B}}[{}^iX_t] - \mathbf{E}_{\mathbb{B}}[{}^iY_t])_{t\in\mathbb{T}}$. Na osnovu principa ekvivalencije (3.3) vrednost polise jednaka je nuli. Stoga iz principa očekivanja (3.2) dobijamo da je za svako $i \in \mathbb{N}$

$$\sum_{t\in\mathbb{T}} \Pi_0^t(\mathbf{E}_{\mathbb{B}}[{}^iY_t] - \mathbf{E}_{\mathbb{B}}[{}^iX_t]) = \sum_{t\in\mathbb{T}} \Pi_0^t({}^iY_t -{}^i X_t) = 0. \tag{3.6}$$

Dakle, na osnovu (3.2) i (3.3), osiguravajuća kompanija može (bez troškova u vremenu 0) izvršiti hedžing tako da srednja vrednost bilansa po ugovoru u bilo kom trenutku t konvergira ka nuli skoro sigurno, za rastući broj polisa:

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}({}^iY_t -{}^i X_t - \mathbf{E}_{\mathbb{B}}[{}^iY_t] + \mathbf{E}_{\mathbb{B}}[{}^iX_t]) \cdot S_t \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ \mathbb{B}\text{-skoro sigurno}. \tag{3.7}$$

[2]Baza prvog reda (tehnička baza ili baza premija) sadrži kamatnu stopu i stope smrtnosti prvog reda pod kojima se dobijaju premije u skladu sa principom ekvivalencije.

[3]Baze drugog reda su iskustvene baze.

Kao direktna posledica, srednja vrednost krajnjeg bilansa konvergira ka nuli takođe:

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{T}({}^{i}Y_t -{}^{i} X_t - \mathbf{E}_{\mathbb{B}}[{}^{i}Y_t] + \mathbf{E}_{\mathbb{B}}[{}^{i}X_t]) \cdot S_T \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ \ \mathbb{B}\text{-skoro sigurno.} \tag{3.8}$$

Možemo reći da princip očekivanja (3.2) implicira da cena isplata pokriva bar troškove za čisto finansijski hedž tako da za rastući broj nezavisnih zahteva za isplatu srednja vrednost bilansa isplata i hedževa konvergira ka nuli skoro sigurno. Na ovaj način se u klasičnom slučaju javlja diverzifikacija biometričkih rizika. Iz principa ekvivalencije (3.3) sledi da hedžing bilo kog ugovora za osiguranje ne košta ništa u vremenu 0, što je važno jer i ugovor takođe ne košta (zbog (3.6)).

Primer 3.1. Posmatramo vremenski period od 1 godine ($T = 1$) i neka je kamatna stopa r fiksna. Za $i \in \mathbb{N}$ nezavisne Bernulijeve slučajne promenljive B_i date su sa

$$B_i = \begin{cases} 0 & \text{ako je } i\text{-ti klijent živ posle 1 godine} \\ 1 & \text{ako } i\text{-ti klijent nije živ posle 1 godine} \end{cases}$$

$$\mathbb{B}(B_i = 0) = p_0 > 0,\ \mathbb{B}(B_i = 1) = p_1 > 0,\ p_0 + p_1 = 1$$

Isplate po ugovoru životnog osiguranja su c_iB_i, gde je $c_i \in \mathbb{R}^+$ i $0 \leq c_i \leq const$ za sve $i \in \mathbb{N}$. Sadašnja vrednost ugovora za i-tog klijenta jednaka je diskontovanoj očekivanoj isplati

$$PV^i = (1 + r)^{-1} \cdot c_i \cdot \mathbf{E}[B_i] = (1 + r)^{-1} \cdot c_i \cdot p_1$$

Primenom jakog zakona velikih brojeva, ovakve sadašnje vrednosti (minimalne fer cene) dopuštaju hedžing takav da

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}((1 + r)PV^i - c_iB_i) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ skoro sigurno.}$$

◇

3.3 Tablice mortaliteta

Tablice mortaliteta daju sistematizovanu, celovitu sliku smrtnosti stanovništva i predstavljaju najbolji statistički opis različite smrtnosti po starosti i polu. S obzirom na njihov značaj izrađuju se u gotovo svim zemljama sveta.

Premije se u klasičnom životnom osiguranju obračunavaju na osnovu tablica mortaliteta, odn. verovatnoća umiranja i unapred određene diskontne kamatne stope r.

Osnovna biometrijska funkcija u tablicama mortaliteta je verovatnoća umiranja kao funkcija starosti, odn. verovatnoća da osoba starosti x umre u x-toj godini života i nju obeležavamo sa q_x. Verovatnoća umiranja je osnovna funkcija, jer se jedino ona dobija na osnovu poređenja podataka o umrlima po starosti i određenih skupova živih lica po starosti. Sve ostale biometrijske funkcije se izvode iz nje.

Tabela 3.1 predstavlja deo tablice mortaliteta, sa izravnatim verovatnoćama umiranja i verovatnoćama preživljavanja, za muško stanovništvo Republike Srbije, za period 2001-2003 godine koju je izradio Republički zavod za statistiku, a mi ćemo je koristiti u daljem radu.

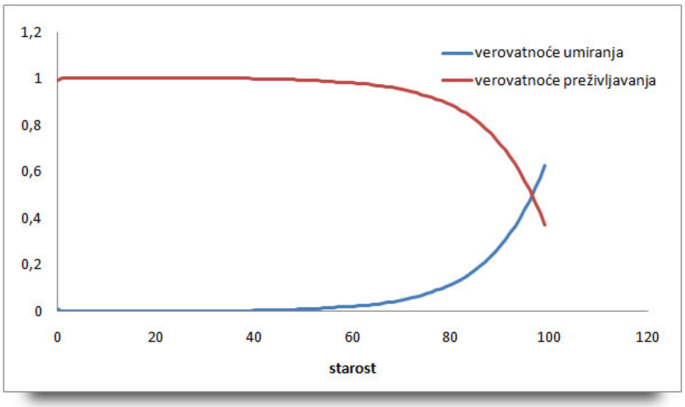
x	q_x	p_x
0	0,01163	0,98837
1	0,00097	0,99903
2	0,00045	0,99955
3	0,00036	0,99964
4	0,00030	0,99970
5	0,00028	0,99972
6	0,00024	0,99976
7	0,00015	0,99985
8	0,00020	0,99980
9	0,00023	0,99977
10	0,00024	0,99976
11	0,00022	0,99978
12	0,00030	0,99970
13	0,00036	0,99964
14	0,00037	0,99963
15	0,00033	0,99967
16	0,00041	0,99959
17	0,00062	0,99938
18	0,00083	0,99917
19	0,00087	0,99913
20	0,00091	0,99909
21	0,00091	0,99909
22	0,00101	0,99899
23	0,00105	0,99895
24	0,00113	0,99887
25	0,00116	0,99884
26	0,00116	0,99884
...	...	...
97	0,52446	0,47554
98	0,57346	0,42654
99	0,62704	0,37296
100	1,00000	-

Tabela 3.1: Tablica mortaliteta

Prva kolona tabele 3.1 (vrednosti x) predstavlja starost osiguranika. Drugu kolonu čine izravnate verovatnoće umiranja q_x. Sa ${}_tq_x$ označavamo verovatnoću da osoba starosti x umre u toku narednih t godina, a sa ${}_{s|t}q_x$ verovatnoću da osoba preživi narednih s godina i umre u intervalu $(s, s+t]$. Verovatnoću da osoba starosti x preživi narednih t godina označavamo sa ${}_tp_x$. Konvencionalna oznaka za ${}_1p_x$ je p_x, što je verovatnoća da osoba doživi $(x+1)$-u godinu života. Jasno, $p_x = 1 - q_x$. Pored toga, primetimo da je

$$ {}_{s+t}p_x = {}_sp_x \cdot {}_tp_{x+s} \quad \text{i} \quad {}_{s|t}q_x = {}_sp_x \cdot {}_tq_{x+s}. \tag{3.9} $$

Krajnja starost tablice mortaliteta je starost u kojoj je verovatnoća umiranja jednaka 1. U našem slučaju je $q_{100} = 1$.



Slika 3.1: Verovatnoće umiranja i preživljavanja

Tabela 3.1 je tabela prvog reda (videti napomenu 1). Upotreba internih tabela drugog reda kompanija životnog osiguranja bila bi pogodnija, ali one obično nisu dostupne iz razloga konkurentnosti. Međutim, u Srbiji se koriste samo tabele prvog reda, koje izrađuje Republički zavod za statistiku, jer ne postoje kompanije koje posluju dovoljno dugo i sa dovoljno velikim portfeljom da mogu praviti svoje tabele.

Primer 3.2. Neka je $\mathbb{T} = \{0, 1, 2, 3\}$ i $r = 5\%$ godišnja kamatna stopa. Novčani tok $X_{\mathbb{T}} = (X_0, X_1, X_2, X_3)$ dat je isplatama $X_t = 100$ u slučaju smrti tokom perioda $(t-1, t]$ za $t = 1, 2, 3$, u suprotnom $X_t = 0$. Ako pretpostavimo da klijent ima 50 godina, iz tabele 3.1 čitamo verovatnoće smrtnosti i doživljenja q_{50}, q_{51}, q_{52}, p_{50}, p_{51} i time računamo verovatnoće ${}_{1|1}q_{50}$ i ${}_{2|1}q_{50}$ preko (3.9). Neto premija takvog ugovora iznosi

$$
\begin{aligned}
PV_0(X_{\mathbb{T}}) &= \sum_{t\in\mathbb{T}} \mathbf{E}\left[\frac{X_t}{S_t}\right] = \frac{q_{50}\cdot 100}{1,05} + \frac{{}_{1|1}q_{50}\cdot 100}{1,05^2} + \frac{{}_{2|1}q_{50}\cdot 100}{1,05^3} \\
&= \frac{0.00660\cdot 100}{1.05} + \frac{0.99340\cdot 0.00719\cdot 100}{1.05^2} \\
&\quad + \frac{0.99340\cdot 0.99281\cdot 0.00797\cdot 100}{1.05^3} \\
&\approx 1.96 \qquad \diamond
\end{aligned}
$$

4

Koncept finansijske matematike u diskretnom vremenu

4.1 Model

Stohastički model za trgovanje hartijama od vrednosti u diskretnom i konačnom vremenu uveli su Harrison i Pliska (1981), a Taqqu i Willinger (1987) [13] su se dalje bavili ovim modelom i postavili ga u okvire konačnih prostora verovatnoća.

Neka je $(F, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{F})$ filtrirani prostor verovatnoća, gde je $\mathbb{T} = \{0, 1, 2, ..., T\}$ diskretna konačna vremenska osa. Filtracija $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ opisuje dostupnost informacija prilikom trgovine hartijama od vrednosti tokom vremena. Pretpostavljamo da je $\mathcal{F}_0$ trivijalno, tj. $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, F\}$, što znači da su poznata sva stanja u vremenu $t = 0$. Neka je dinamika cena d hartija od vrednosti na finansijskom tržištu data adaptiranim d-dimenzionalnim realnim procesom $S = (S_t)_{t\in\mathbb{T}}$, odnosno S_t je $\mathcal{F}_t$-merljivo za svako $t \in \mathbb{T}$. Trguje se sa d aktiva sa procesima cena $(S_t^0)_{t\in\mathbb{T}}, ..., (S_t^{d-1})_{t\in\mathbb{T}}$ u vremenima $t \in \mathbb{T}$. Prva aktiva sa procesom cena $(S_t^0)_{t\in\mathbb{T}}$ je nerizična aktiva i ima osobine da je $S_0^0 = 1$ i $S_t^0 > 0$ za $t \in \mathbb{T}$. Uobičajene pretpostavke u ekonomskoj literaturi su da nema troškova transakcija, sve aktive su savršeno deljive, aktive ne plaćaju dividende i dozvoljena je kratka prodaja. Stohastički model sa takvim pretpostavkama, prostorom verovatnoća i procesom cena označava se sa $M^F = (F, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{F}, \mathbb{T}, S)$ i naziva *model tržišta hartija od vrednosti*.

Portfolio u M^F dat je preko d-dimenzionalnog vektora $\theta = (\theta^0, ..., \theta^{d-1})$ realnih slučajnih promenljivih θ^i $(i = 0, ..., d-1)$ iz $(F, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{F})$, koje predstavljaju udeo i-te aktive u portfoliju. Ako agenti trguju sa θ u vremenima $0, 1, ..., T$, tada odluke trebaju doneti na osnovu informacija koje su dostupne u tim trenucima. To znači da *t-portfolio* θ_t mora biti $\mathcal{F}_t$-merljiv za $t \in \mathbb{T}$. Vrednost portfolija θ_t u vremenu $s \geq t$ je

$$\langle \theta_t, S_s \rangle = \sum_{i=0}^{d-1} \theta_t^i S_s^i.$$

Strategija za trgovanje je vektor $\theta_{\mathbb{T}} = (\theta_t)_{t\in\mathbb{T}}$ koji čine t-portfoliji θ_t. U trenutku t investitor ima portfolio θ_t čiji proces cena je S_t, a u sledećem trenutku $t+1$ je S_{t+1}, što investitoru daje dobitak (ili gubitak) od $\theta_t \cdot (S_{t+1} - S_t)$ u trenutku $t+1$. Ako sa $\bar{S} := (S_t/S_t^0)_{t\in\mathbb{T}}$ označimo proces cena diskontovan nerizičnom aktivom, onda je diskontovani ukupni dobitak (ili gubitak) strategije za trgovanje dat sa

$$\sum_{t=0}^{T-1} \left\langle \theta_t, \bar{S}_{t+1} - \bar{S}_t \right\rangle .$$

Samofinansirajuća strategija $\theta_{\mathbb{T}}$ je strategija za koju je $\langle \theta_{t+1}, S_t \rangle = \langle \theta_t, S_t \rangle$ za svako $t = 1, ..., T-1$. To znači da tokom perioda koji se posmatra ne dolazi ni do kakvog priliva ili odliva kapitala i da do promene vrednosti portfolija može doći jedino promenom cena aktiva koje on sadrži.

4.2 Nearbitraža i ekvivalentna martingalna mera

U finansijskoj matematici, rizik-neutralna mera ili ekvivalentna martingalna mera, je mera verovatnoće koja proizilazi iz pretpostavke da je trenutna vrednost svih aktiva jednaka očekivanoj budućoj vrednosti tih aktiva diskontovanoj nerizičnom kamatnom stopom. Ovaj koncept se koristi u određivanju cena derivata.

Ideja nastanka rizik-neutralne mere je sledeća. Cene aktiva značajno zavise od njihovog rizika i investitori žele nadoknadu za neizvesnost koju prihvataju. Trenutna cena neke rizične aktive koja se realizuje u budućem vremenu se obično razlikuje od njene očekivane vrednosti. Štaviše, pošto investitori imaju određenu averziju prema riziku trenutna cena je često niža od očekivanja, kao naknada onima koji snose rizik. Zbog toga, da bi se odredila cena aktiva, neophodno je očekivanu vrednost tih aktiva prilagoditi uključenom riziku.

Međutim, pod određenim uslovima (odsustvo arbitraže) postoji alternativno rešenje za određivanje cene aktive. Umesto da se prvo izračuna očekivanje, a zatim prilagodi riziku, mogu se prvo prilagoditi verovatnoće budućih ishoda tako da one uključuju efekat rizika, a zatim se odredi očekivanje pod tim prilagođenim verovatnoćama. Ove prilagođene verovatnoće se nazivaju rizik-neutralne verovatnoće i one čine rizik-neutralnu meru.

Verovatnoće stvarnih ishoda nisu uključene u konstrukciju novih, pseudoverovatnoća. One se računaju samo zbog drugačijeg načina određivanja cena, koji je jednostavniji.

Prednost proizilazi iz činjenice da kada se jednom odrede rizik-neutralne verovatnoće, cene svih aktiva se mogu odrediti samo računanjem očekivane vrednosti, odn. kao da su investitori rizik neutralni. Kada bismo koristili stvarne, fizičke verovatnoće, za svaku aktivu bi bilo potrebno posebno prilagođavanje, s obzirom na različite nivoe rizika.

Pod rizik-neutralnom merom sve aktive imaju istu očekivanu stopu prinosa, a to je rizik-neutralna ili nerizična kamatna stopa.

Matematički, prilagođavanje verovatnoća je ustvari transformacija mere u ekvivalentnu martingalnu meru. Ovo je moguće uz pretpostavku da nema arbitraže. Štaviše, jedinstvenost ekvivalentne martingalne mere povezana je sa osobinom kompletnosti tržišta, koja omogućava jedinstveno određivanje cena bilo kog finansijskog instrumenta na tržištu.

Definicija 4.1. *Ekvivalentna martingalna mera (EMM)* ili *rizik-neutralna mera* je mera $\mathbb{Q}$ ekvivalentna meri $\mathbb{P}$ tako da je diskontovani proces cena $\bar{S}$ martingal u meri $\mathbb{Q}$.

Pređimo sada na ključnu ideju u teoriji modernih finansija, koja se naziva "zakon nearbitraže". Mogućnost za arbitražu predstavlja bezrizični plan za ostvarivanje profita bez početnih investicija. Osnovno načelo u modernim finansijama, za postojanje ekonomskog ekvilibrijuma, je da ne postoje mogućnosti za arbitražu. Stoga, procesi cena hartija od vrednosti moraju biti takvi da investitori nemaju prilike za arbitražu. Sledi matematička definicija.

Definicija 4.2. Samofinansirajuća strategija $\theta_{\mathbb{T}}$ predstavlja *mogućnost za arbitražu* ako je

$$\langle \theta, S \rangle_0 = 0 \text{ i } \langle \theta, S \rangle_T \geq 0 \text{ skoro sigurno i } \mathbb{F}(\langle \theta, S \rangle_T > 0) > 0. \tag{4.1}$$

Proces cena S iz M^F ispunjava *nearbitražni uslov (NA)* ako *ne* postoji samofinansirajuća strategija $\theta_{\mathbb{T}}$ za koju važi (4.1).

Za inicijalni portfolio θ treba platiti $\langle \theta, S \rangle_0 = 0$, što zapravo znači da nema gubitka prilikom kupovine portfolija. Pošto je $\theta_{\mathbb{T}}$ samofinansirajuće, nema priliva ili odliva novca iz portfolija između vremena 0 i T. Na kraju, portfolio vredi $\langle \theta, S \rangle_T \geq 0$. Sledi da je u najgorem slučaju dobitak od 0, nakon prodaje portfolija u vremenu T. Prema tome, gubitak je nemoguć na početku, a verovatnoća dobitka na kraju je pozitivna.

Iako je uslov (NA) definisan "globalno" (uključuje samo trenutke 0 i T), on važi i "lokalno", odnosno u bilo kom vremenu $t = 0, 1, ..., T$. Sledeća lema tvrdi da mogućnost za arbitražu postoji tokom čitavog perioda (do T) ako i samo ako postoji u nekom trenutku $t \in \mathbb{T}$.

Lema 4.1. *Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) Postoji mogućnost za arbitražu.

(ii) Za neko $t = 0, 1, ..., T-1$ postoji $\mathcal{F}_t$-merljiva d-dimenzionalna realna slučajna promenljiva θ_t tako da je

$$\langle \theta_t, (S_{t+1} - S_t) \rangle \geq 0 \text{ skoro sigurno i } \mathbb{F}(\langle \theta_t, (S_{t+1} - S_t) \rangle > 0) > 0.$$

(iii) Za neko $t = 0, 1, ..., T-1$ postoji $\mathcal{F}_t$-merljiva $(d-1)$-dimenzionalna realna slučajna promenljiva $\bar{\theta}_t$ tako da je

$$\left\langle \bar{\theta}_t, (\bar{S}_{t+1} - \bar{S}_t) \right\rangle \geq 0 \text{ skoro sigurno i } \mathbb{F}(\left\langle \bar{\theta}_t, (\bar{S}_{t+1} - \bar{S}_t) \right\rangle > 0) > 0.$$

Dokaz

Krenimo od implikacije (i)$\Rightarrow$(ii). Pretpostavimo da $\theta_{\mathbb{T}}$ predstavlja mogućnost za arbitražu, dakle ispunjava (4.1). Definišemo

$$s \equiv \inf \left\{ t : \langle \theta, S \rangle_{t+1} \geq 0 \text{ skoro sigurno i } \mathbb{F}(\langle \theta, S \rangle_{t+1} > 0) > 0 \right\}$$

Ovaj skup nije prazan jer za $t = T - 1$ važi (4.1). Sada su moguća dva slučaja: (a) $\langle \theta, S \rangle_s = 0$ skoro sigurno ili (b) verovatnoća događaja $A \equiv \{\langle \theta, S \rangle_s < 0\}$ je pozitivna.

Ako je (a), onda

$$\langle \theta, S \rangle_{s+1} = \langle \theta, S \rangle_{s+1} - \langle \theta, S \rangle_s = \langle \theta_s, S_{s+1} - S_s \rangle \geq 0 \text{ skoro sigurno i}$$

$$\mathbb{F}(\langle \theta_s, S_{s+1} - S_s \rangle > 0) = \mathbb{F}(\langle \theta, S \rangle_{s+1} > 0) > 0$$

pa (ii) važi.

U slučaju (b), na skupu A je

$$\langle \theta_s, S_{s+1} - S_s \rangle = \langle \theta, S \rangle_{s+1} - \langle \theta, S \rangle_s \geq - \langle \theta, S \rangle_s > 0.$$

Prema tome, ako je $\tilde{\theta}_s \equiv I_A \theta_s$, onda imamo

$$\left\langle \tilde{\theta}_s, S_{s+1} - S_s \right\rangle \geq 0 \text{ i } \mathbb{F}(\left\langle \tilde{\theta}_s, S_{s+1} - S_s \right\rangle > 0) = \mathbb{F}(A) > 0$$

čime je (ii) dokazano.

Ekvivalencija (ii) i (iii) je trivijalna. Pokažimo sada (iii)$\Rightarrow$(i). Pretpostavimo da postoji $t \in \{0, 1, ..., T-1\}$ i $\mathcal{F}_t$-merljiva $(d-1)$-dimenzionalna slučajna promenljiva $\bar{\theta}$ tako da

$$\left\langle \bar{\theta}, (\bar{S}_{t+1} - \bar{S}_t) \right\rangle \geq 0 \text{ skoro sigurno i } \mathbb{F}(\left\langle \bar{\theta}, (\bar{S}_{t+1} - \bar{S}_t) \right\rangle > 0) > 0.$$

Zbog toga je verovatnoća skupa $W \equiv \left\{ \mathbb{F}(\langle \bar{\theta}, (\bar{S}_{t+1} - \bar{S}_t) \rangle > 0 | \mathcal{F}_t) > 0 \right\}$ pozitivna. Konstruišimo strategiju za trgovanje $\theta_{\mathbb{T}}$ takvu da je $\langle \theta, S \rangle_0 = 0$ i $\langle \theta, S \rangle_T \geq 0$ skoro sigurno i $\mathbb{F}(\langle \theta_T, S_T \rangle > 0) > 0$, što će predstavljati mogućnost za arbitražu.

Definišemo θ_s za svako $s \in \{0, 1, ..., T-1\}$ na sledeći način:

za $s \leq t : \theta_s = 0$

za $s = t+1$: na skupu W, $\theta^i_{t+1} = \begin{cases} \bar{\theta}^i & i \in \{1, ..., d-1\} \\ -\sum_{i=1}^{d-1} \bar{\theta}^i \bar{S}^i_t & i = 0 \end{cases}$

na skupu W^c, $\theta_{t+1} = 0$

za $t+1 < s < T$: $\theta^i_s = \begin{cases} \langle \theta, S \rangle_{t+1} & i = 0, \text{na skupu } W \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$

Proveravamo da li je $\theta_{\mathbb{T}}$ samofinansirajuća strategija, odn. da li je $\langle \theta_s, S_s \rangle = \langle \theta_{s+1}, S_s \rangle$, što očito važi za $s < t$ i $s > t$. U slučaju $s = t$, leva strana jednakosti je jednaka nuli, $\langle \theta_t, S_t \rangle = 0$. Desna strana je na skupu W jednaka

$$\langle \theta_{t+1}, S_t \rangle = -\sum_{i=1}^{d-1} \bar{\theta}^i \bar{S}^i_t S^0_t + \sum_{i=1}^{d-1} \bar{\theta}^i S^i_t = 0,$$

a na skupu W^c je $\langle \theta_{t+1}, S_t \rangle = 0$. Dakle, $\theta_{\mathbb{T}}$ je samofinansirajuća strategija.

Dalje, primetimo da je $\langle \theta, S \rangle_0 = 0$ i $\langle \theta, S \rangle_T \geq 0$ skoro sigurno. Zapravo, za sve $s > t+1$ je

$$\langle \theta, S \rangle_s = \begin{cases} \langle \theta, S \rangle_{t+1} = \left\langle \bar{\theta}, (\bar{S}_{t+1} - \bar{S}_t) \right\rangle \geq 0 & \text{na skupu } W \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

i stoga

$$\mathbb{F}(\langle \theta, S \rangle_T \geq 0) = \mathbb{F}(\left\langle \bar{\theta}, (\bar{S}_{t+1} - \bar{S}_t) \right\rangle \geq 0) = 1$$

Štaviše, iz definicije W

$$\mathbb{F}(\langle \theta, S \rangle_T > 0) = \mathbb{F}(\{\langle \theta, S \rangle_T > 0\} \cap W) = \mathbb{F}(I_W \mathbb{F}(\left\langle \bar{\theta}, (\bar{S}_{t+1} - \bar{S}_t) \right\rangle > 0 | \mathcal{F}_t)) > 0.$$

čime je pokazano da strategija $\theta_{\mathbb{T}}$ predstavlja mogućnost za arbitražu. $\square$

Harrison i Pliska (1981) su prvi postavili pitanje: Kada postoji ekvivalentna martingalna mera? Ovim problemom bavilo se više autora tokom godina, a neki od rezultata se mogu naći u [3], [5], [12], [13]. Kao što je pomenuto, ekonomska pretpostavka o nearbitraži je potrebna i dovoljna za egzistenciju ekvivalentne martingalne mere za proces cena.

Dalang, Morton i Willinger [3] su prvi dokazali egzistenciju ekvivalentne martingalne mere za model iz ovog rada (konačan vremenski skup, d-dimenzionalni proces cena), koja proizilazi iz proste ekonomske pretpostavke kao što je nearbitraža. Delbaen i Schachermayer (1994) dokazuju egzistenciju za neprekidan slučaj.

Teorema 4.1 (Dalang, Morton, Willinger). *Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) Proces cena S zadovljava uslov (NA).

(ii) Postoji ekvivalentna martingalna mera $\mathbb{Q}$ za proces $\bar{S}$.

Štaviše, ako važi jedan od ovih uslova, moguće je naći meru $\mathbb{Q}$ preko ograničenog Radon-Nikodym izvoda $d\mathbb{Q}/d\mathbb{F}$.

Za dokaz ove teoreme koristićemo sledeće pomoćno tvrđenje, čiji dokaz se može naći u [3].

Tvrđenje 4.1. *Neka su $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$ dve pod-σ-algebre od $\mathcal{F}$ i neka je R proizvoljna $\mathcal{H}$-merljiva slučajna promenljiva. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) Za sve $\mathcal{G}$-merljive slučajne promenljive θ

$$\theta \cdot R \geq 0 \textit{ skoro sigurno } \Rightarrow \theta \cdot R = 0 \textit{ skoro sigurno.}$$

(ii) Postoji $\mathcal{H}$-merljiva slučajna promenljiva D takva da

$$0 < D \leq 1 \textit{ skoro sigurno i } \mathbf{E}[R \cdot D|\mathcal{G}] = 0.$$

Dokaz teoreme 4.1

(i)$\Rightarrow$(ii). Pretpostavimo da proces S ispunjava uslov (NA), odnosno da na tržištu nema arbitraže. Lema 4.1(iii) implicira da za svako $t = 0, 1, ..., T-1$ i svako $\bar{\theta}_t$

$$\bar{\theta}_t(\bar{S}_{t+1} - \bar{S}_t) \geq 0 \ \mathbb{F}\text{-skoro sigurno} \implies \bar{\theta}_t(\bar{S}_{t+1} - \bar{S}_t) = 0 \ \mathbb{F}\text{-skoro sigurno.} \tag{4.2}$$

Neka je $\mathcal{F}_{T+1} = \mathcal{F}_T$, $\bar{S}_{T+1} = \bar{S}_T$, $D_{T+1} = 1$, $R_{T+1} = 0$. Fiksiramo $t < T$ i indukcijom unazad pretpostavljamo da smo definisali $D_{t+1}, ..., D_{T+1}$ i $R_{t+1}, ..., R_{T+1}$ na taj način da za $t + 1 \leq l \leq T$

$$D_l \text{ je } \mathcal{F}_l\text{-merljivo i } \ 0 < D_l \leq 1, \ \mathbb{F}\text{-skoro sigurno}$$

$$R_l = (\bar{S}_l - \bar{S}_{l-1})\mathbf{E}_{\mathbb{F}}[D_{l+1}...D_{T+1}|\mathcal{F}_l] \ \mathbb{F}\text{-skoro sigurno} \tag{4.3}$$

$$\mathbf{E}_{\mathbb{F}}[R_{l+1} \cdot D_{l+1}|\mathcal{F}_l] = 0. \tag{4.4}$$

Koristeći tvrđenje 4.1, konstruisaćemo $\mathcal{F}_t$-merljivu slučajnu promenljivu D_t takvu da $0 < D_t \leq 1$ $\mathbb{F}$-skoro sigurno, na taj način da ako je R_t definisano preko (4.3) sa $l = t$, onda (4.4) važi za $l = t$. Pošto je $0 < D_l \leq 1$ $\mathbb{F}$-skoro sigurno, onda je $0 < \mathbf{E}_{\mathbb{F}}[D_{t+1}...D_{T+1}|\mathcal{F}_t] \leq 1$ $\mathbb{F}$-skoro sigurno i zato zbog (4.2) R_t ispunjava uslov (i) iz tvrđenja 4.1. R_t je $\mathcal{F}_t$-merljivo pa tvrđenje 4.1 implicira egzistenciju $\mathcal{F}_t$-merljive slučajne promenljive D_t tako da (4.4) važi za $l = t$.

Dakle, indukcijom unazad definisane su slučajne promenljive $D_1, ...D_{T+1}$ i $R_1, ...R_{T+1}$ tako da (4.3) i (4.4) važe za $1 \leq l \leq T + 1$. Neka je

$$D_0 = \frac{1}{1 + \left\|\bar{S}_0\right\|} \quad \text{i} \quad D = D_0...D_{T+1}.$$

Primetimo da je $0 < D \leq 1$ $\mathbb{F}$-skoro sigurno.

Neka je $\mathbb{Q}$ mera ekvivalentna sa $\mathbb{F}$ i čiji Radon-Nikodym izvod je jednak D. Pokazaćemo da je $\mathbb{Q}$ martingalna mera za proces $\bar{S}$.

Dovoljno je pokazati da je $\mathbf{E}_{\mathbb{F}}[(\bar{S}_{l+1} - \bar{S}_l) \cdot D|\mathcal{F}_l] = 0$ da bi važilo $\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}[\bar{S}_{l+1}|\mathcal{F}_l] = \bar{S}_l$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\mathbb{F}}[(\bar{S}_{l+1} - \bar{S}_l) \cdot D|\mathcal{F}_l] &= D_0...D_l \cdot \mathbf{E}_{\mathbb{F}}[(\bar{S}_{l+1} - \bar{S}_l) \cdot D_{l+1}...D_{T+1}|\mathcal{F}_l] \\
&= D_0...D_l \cdot \mathbf{E}_{\mathbb{F}}[(\bar{S}_{l+1} - \bar{S}_l) \cdot D_{l+1}\mathbf{E}_{\mathbb{F}}[D_{l+2}...D_{T+1}|\mathcal{F}_{l+1}]|\mathcal{F}_l] \\
&= D_0...D_l \cdot \mathbf{E}_{\mathbb{F}}[D_{l+1}R_{l+1}|\mathcal{F}_l] \\
&= 0
\end{aligned}$$

zbog (4.4), za sve $0 \leq l < T$.

(ii)$\Rightarrow$(i). Pretpostavimo da postoji EMM $\mathbb{Q}$ i da postoji mogućnost za arbitražu. Tada na osnovu leme 4.1(iii) postoji $\mathcal{F}_t$-merljiva slučajna promenljiva $\bar{\theta}_t$ tako da je

$$\bar{\theta}_t(\bar{S}_{t+1} - \bar{S}_t) \geq 0 \text{ skoro sigurno i } \mathbb{Q}(\langle\bar{\theta}_t, (\bar{S}_{t+1} - \bar{S}_t)\rangle > 0) > 0. \tag{4.5}$$

Ako $\bar{\theta}_t$ zamenimo sa

$$\bar{\theta}_t = \begin{cases} 0 & |\bar{\theta}_t| = 0 \\ \bar{\theta}_t|\bar{\theta}_t|^{-1} & \text{inače} \end{cases}$$

možemo pretpostaaviti da je $\bar{\theta}_t$ ograničeno. Stoga, $\bar{\theta}_t(\bar{S}_{t+1} - \bar{S}_t) \in L^1(\mathbb{Q})$ i ima $\mathbb{Q}$-očekivanje 0, jer je $\bar{S}$ $\mathbb{Q}$-martingal, što je u kontradikciji sa (4.5). $\Box$

Napomena 2. U slučaju diskretnog procesa cena S sa beskonačnim skupom $\mathbb{T}$, teorema 4.1 ne garantuje egzistenciju ekvivalentne martingalne mere.

4.3 Vrednovanje

Definicija 4.3. *Princip vrednovanja* na skupu portfolija Θ iz M^F je linearno preslikavanje $\pi^F : \theta \to (\pi_t^F(\theta))_{t\in\mathbb{T}}$, gde je $(\pi_t^F(\theta))_{t\in\mathbb{T}}$ adaptirani realni stohastički proces (proces cena) tako da

$$\pi_t^F(\theta) = \langle \theta, S_t \rangle = \sum_{i=0}^{d-1} \theta^i S_t^i \tag{4.6}$$

za svako $t \in \mathbb{T}$ za koje je θ $\mathcal{F}_t$-merljivo.

Za sada, skup Θ nije posebno definisan.

Posmatramo tržište bez mogućnosti za arbitražu sa datim procesom cena S i portfolio θ sa procesom cena $\pi^F(\theta)$. Na osnovu teoreme 4.1 znamo da proces $S' = ((S_t^0, ..., S_t^{d-1}, \pi_t^F(\theta)))_{t\in\mathbb{T}}$ ispunjava uslov (NA) ako i samo ako postoji ekvivalentna martingalna mera $\mathbb{Q}$ za $\bar{S}'$, odn. $\mathbb{Q} \sim \mathbb{F}$ i $\bar{S}'$ je $\mathbb{Q}$-martingal. Prema tome,

$$\frac{\pi_t^F(\theta)}{S_t^0} = \mathbf{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{\pi_T^F(\theta)}{S_T^0} | \mathcal{F}_t \right]$$

što je ekvivalentno sa

$$\pi_t^F(\theta) = S_t^0 \cdot \mathbf{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{\langle \theta, S_T \rangle}{S_T^0} | \mathcal{F}_t \right] \tag{4.7}$$

Ako određujemo cenu portfolija pod uslovom (NA), proces cena mora imati oblik (4.7) za neko $\mathbb{Q}$.

Za t-portfolio θ i $s < t$ imamo

$$\pi_s^F(\theta) = S_s^0 \cdot \mathbf{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{\langle \theta, S_t \rangle}{S_t^0} | \mathcal{F}_s \right]. \tag{4.8}$$

Nekada je pogodnije određivati proces vrednosti koji je definisan direktno za isplate. $\mathcal{F}_t$-merljiva isplata C_t uvek odgovara t-portfoliju θ i obrnuto.

Definicija 4.4. *t-zahtev* sa isplatom C_t u vremenu t je t-portfolio oblika $\frac{C_t}{S_t^0} e_0$, gde je C_t $\mathcal{F}_t$-merljiva slučajna promenljiva i $e_0 = (1, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^d$.

Novčani tok za period $\mathbb{T}$ je vektor t-zahteva $(\frac{C_t}{S_t^0} e_0)_{t\in\mathbb{T}}$.

t-zahtev se interpretira kao ugovor o isplati u iznosu C_t u udelu nerizične aktive u vremenu t. To znači da možemo pretpostaviti da je vlasnik ugovora zapravo dobio novčani iznos C_t u vremenu t.

Prema tome, za $C_t = \langle \theta, S_t \rangle$, (4.8) postaje

$$\pi_s \left(\frac{C_t}{S_t^0} \right) = S_s^0 \cdot \mathbf{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{C_t}{S_t^0} | \mathcal{F}_s \right],$$

što možemo uporediti sa (3.1).

To znači da je cena ugovora jednaka očekivanju diskontovanih isplata, pri čemu se diskontovanje vrši nerizičnom aktivom i stopa prinosa je jednaka nerizičnoj stopi. Ovo je pogodan način određivanja cena zato što pretpostavka o tržišnoj ceni rizika nije potrebna.

Kompletnost

Ovo poglavlje završavamo kratkim osvrtom na problem jedinstvenosti mere $\mathbb{Q}$ i njene ekonomske interpretacije, a koja je povezana sa kompletnošću tržišta.

Definicija 4.5. Tržište M^F je *kompletno* ako se svaki portfolio može *replicirati* samofinansirajućom strategijom do trenutka T.

Značaj replicirajućih portfolija za finansijske institucije je u tome što omogućavaju *hedžing*, odn. kontrolisanje ili eliminisanje rizika usled nepredvidivosti tržišta, a prinos ostaje isti. Hedžingovanje protiv investicionog rizika znači strategijsko korišćenje instrumenata na tržištu radi umanjenja rizika od bilo kojih nepovoljnih promena cena. Investitori hedžuju jednu investiciju tako što ulažu u drugu investiciju.

Lema 4.2. *(i) Svaki $\mathcal{F}_t$-merljivi portfolio može biti repliciran samofinansirajućom strategijom iz M^F do trenutka t.*

(ii) Svaka $\mathcal{F}_t$-merljiva isplata može biti replicirana samofinansirajućom strategijom iz M^F do trenutka t.

Dokaz

(i) Kako je M^F kompletno, svaka $\mathcal{F}_T$-merljiva isplata C_T u vremenu T može biti replicirana do trenutka T. Stoga, za svaki $\mathcal{F}_t$-merljivi portfolio θ_t postoji replicirajuća strategija $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{T}}$ iz M^F, tj. $\langle \varphi_T, S_T\rangle = \langle \theta_t, S_T\rangle$, jer se može izabrati $C_T = \langle \theta_t, S_T\rangle$. Zbog nemogućnosti arbitraže, treba da je $\pi_s^F(\theta_t) = \langle \varphi_s, S_s\rangle$ za $s \in \mathbb{T}$ i stoga $\langle \theta_t, S_s\rangle = \langle \varphi_s, S_s\rangle$ za sve $s \geq t$. Prema tome, postoji samofinansirajuća strategija tako da $\langle \theta_t, S_t\rangle = \langle \varphi_t, S_t\rangle$, tj. portfolio θ_t se može replicirati do trenutka t.

(ii) Iz (i) sledi da za bilo koju $\mathcal{F}_t$-merljivu isplatu C_t portfolio $\theta_t = \frac{C_t}{S_t^0} e_0$ može biti repliciran do trenutka t. Primetimo da je $\langle \theta_t, S_t\rangle = C_t$. □

Neka je dat ugovor θ koji isplaćuje iznos od C_T u vremenu T. Želimo da odredimo cenu ugovora za vreme $t = 0$ ako model M^F ne dozvoljava arbitražu. Poznato je da uslov (NA) ne implicira jednistveni proces cena za θ kada portfolio ne može biti repliciran strategijom za samofinansiranje $\varphi_{\mathbb{T}}$. Međutim, ako je θ replicirajuće, dakle postoji $\varphi \in \Theta$ tako da $C_T = \pi_T(\varphi)$ $\mathbb{F}$-skoro sigurno, onda uslov (NA) implicira da je cena ugovora θ u trenutku $t = 0$ data sa

$$\pi_0(\theta) = \pi_0(\varphi).$$

Dakle, na kompletnom tržištu M^F, uslov (NA) implicira jednistvene cene, koje se smatraju jednakim ako su jednake skoro sigurno i stoga implicira jednistvenu EMM $\mathbb{Q}$. Zapravo, model tržišta hartija od vrednosti M^F bez mogućnosti arbitraže je kompletan ako i samo ako postoji jedinstvena ekvivalentna martingalna mera [3], [13].

5

Moderna matematika životnog osiguranja

Okvir za moderno životno osiguranje predstavlja uopštenje modela klasičnog životnog osiguranja, kao i njegovu kombinaciju sa modelom stohastičkih finansijskih tržišta. Pored pretpostavki iz poglavlja 4.1, za takvo finansijsko tržište M^F pretpostavljamo da je kompletno, bez mogućnosti za arbitražu, iz čega sledi da postoji jedinstvena ekvivalentna martingalna mera $\mathbb{Q}$. Sada posmatramo prostor proizvoda $(F, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{F}) \otimes (B, (\mathcal{B}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{B})$ finansijskog i biometričkog prostora verovatnoća, gde je $\mathbb{T} = \{0, 1, ..., T\}$. Portfolio $\theta = (\theta^0, ..., \theta^{d-1})$ na prostoru proizvoda je vektor $\mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}_T$-merljivih slučajnih promenljivih θ^i. Za isplatu $\langle\theta, S_T\rangle = \sum_{i=0}^{d-1} \theta^i S_T^i$ u trenutku T, sadašnja vrednost biometrički zavisnog portfolija data je sa

$$\begin{aligned} PV_0(\theta) = \pi_0(\theta) &= \mathbf{E}_{\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}}\left[\frac{\langle\theta, S_T\rangle}{S_T^0}\right] \\ &\overset{\text{Fubini}}{=} \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\langle\mathbf{E}_{\mathbb{B}}[\theta], S_T\rangle}{S_T^0}\right]. \end{aligned}$$

Primer 5.1. Posmatramo unit-linked polisu životnog osiguranja. Neka je $T = 1$, B_i definisano kao u primeru 3.2. Na tržištu postoje dve aktive, od kojih je jedna nerizična, a druga rizična. Isplata u trenutku T je $X = c_i B_i S_T^1 = c_i B_i$ akcija rizične aktive u trenutku T. Ako je S_0^1 sadašnja (tržišna) vrednost tih akcija, onda je sadašnja vrednost isplate X

$$\begin{aligned} \Pi_0^T(X) &= \mathbf{E}_{\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}}\left[\frac{X}{S_T^0}\right] \overset{\text{Fubini}}{=} \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[c_i \cdot \mathbf{E}_{\mathbb{B}}[B_i] \cdot \frac{S_T^1}{S_T^0}\right] \\ &= c_i \cdot \mathbf{E}_{\mathbb{B}}[B_i] \cdot \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_T^1}{S_T^0}\right] = S_0^1 \cdot c_i \cdot \mathbf{E}_{\mathbb{B}}[B_i]. \end{aligned}$$

◇

Postavljaju se pitanja: Da li potreba za hedžing strategijama, takvim da bilansi po polisi konvergiraju ka 0 skoro sigurno, implicira potrebu za pristupom proizvoda mera? Može li se naći sistem pretpostavki za modernu matematiku životnog osiguranja?

U radu [6] postavljeno je sedam pretpostavki, odn. osam principa, koji predstavljaju osnovu za modernu matematiku životnog osiguranja i implementiraju pristup proizvoda mera.

5.1 Principi moderne matematike životnog osiguranja

Sledećih osam principa neformalno opisuju biometrički i finansijski okvir za moderno životno osiguranje. Formulacija matematičkih pretpostavki će uslediti kasnije. Jasno je da principi ovog modela nisu savršeni i kompletni, kao npr. idealna pretpostavka o nezavisnoj biometriji pojedinaca (princip 3). Ipak, predloženi model treba posmatrati kao elementarni okvir za životno osiguranje koji sadrži neke osnovne ideje i idealizovane pretpostavke iz klasične teorije, ali koji se bavi stohastičkim finansijskim tržištima. U tom smislu, on predstavlja osnovu za moderno životno osiguranje. Svaki princip je dat sa kratkim objašnjenjem razloga za njegovo uvođenje.

1. **Nezavisnost biometričkih i finansijskih događaja**. Za biometričke (ili tehničke) događaje, npr. smrt ili povreda klijenata, pretpostavlja se da su stohastički nezavisni od događaja na finansijskim tržištima, iako se u realnosti mogu desiti kontraprimeri. Nasuprot reosiguranju, gde kretanja na finansijskim tržištima mogu biti jako povezana sa tehničkim događajima, npr. zemljotresima, takvi efekti su malo verovatni u slučaju životnog osiguranja.

2. **Kompletna finansijska tržišta, bez mogućnosti arbitraže**. U ovom radu razmatraju se samo takve vrste tržišta. Iako ova pretpostavka može biti nerealna sa stanovišta finansija, ona je realna sa stanovišta životnog osiguranja. Razlog tome je što kompanija životnog osiguranja nema u ponudi čisto finansijske proizvode, za razliku od banaka. Stoga, možemo pretpostavljati da se svim finansijskim proizvodima koje razmatramo može trgovati na tržištu, ili se mogu kupiti od banaka ili se mogu replicirati nekom samofinansirajućom strategijom. Bez obzira na to, očigledno je da zahtev, koji takođe zavisi od biometričkog događaja (npr. smrt neke osobe) ne može biti hedžovan preko hartija od vrednosti, odnosno, zajedničko tržište sa finansijskim i biometričkim rizikom nije kompletno. U tom slučaju, finansijske portfolije ćemo ograničiti na one koji se mogu replicirati.

3. **Biometrička stanja pojedinaca su nezavisna**. Ovo je standardna pretpostavka klasične matematike životnog osiguranja. Kontraprimeri kao bračni parovi su irelevantni, a ako zanemarimo mogućnost epidemija ili ratova, ovaj princip može biti odgovarajući i u modernoj matematici životnog osiguranja. Iako postoje realniji modeli koji uključuju zavisnost, u ovom radu ćemo se ipak držati date pretpostavke, jer je za glavni argument potrebna mogućnost diverzifikacije biometričkih rizika.

4. **Velike grupe sličnih klijenata**. Da bi se primenio zakon velikih brojeva u klasičnoj matematici životnog osiguranja, potrebna je pretpostavka o velikom broju klijenata pod nekim ugovorom u osiguravajućoj kompaniji. Štaviše, obično se pretpostavlja da su grupe sličnih klijenata velike, npr. klijenti istog životnog doba, pola i zdravstvenog stanja. Osiguravajuća kompanija treba biti u mogućnosti da se izbori sa takvim velikim grupama sličnih klijenata, čak iako svi članovi grupe imaju istu vrstu polise.

5. **Među sličnim klijentima se ne pravi razlika**. Radi pravičnosti, svaka dva klijenta sa sličnim očekivanim biometričkim kretanjima trebaju platiti istu cenu za istu vrstu ugovora. Pored toga, za sve akcije (npr. hedžing) preduzete od strane kompanije za dva klijenta koji imaju istu vrstu polise, pretpostavlja se da su identične, dok god su njihova moguća biometrička kretanja nezavisno identična, sa stohastičkog stanovišta.

6. **Nearbitražno određivanje cena**. Kao što je poznato iz teorije finansijskih tržišta, važna karakteristika pravilnog određivanja cena je odsustvo arbitraže, odnosno odsustvo dobitka bez rizika. U ovom slučaju, ne sme postojati mogućnost ostvarivanja profita prodajom i kupovinom proizvoda životnog osiguranja na npr. postojećem ili hipotetičkom tržištu reosiguranja. Stoga, cena ili vrednost svakog proizvoda i novčanog toka će biti određena pod principom nearbitraže.

7. **Minimalne fer cene dopuštaju hedžing takav da bilansi konvergiraju ka nuli skoro sigurno**. Princip nezavisnosti biometričkih događaja je usko povezan sa principom očekivanja iz klasične matematike životnog osiguranja. U klasičnom slučaju, gde se pretpostavlja da su finansijska tržišta deterministička, ovaj princip tvrdi da je vrednost ili neto premija novčanog toka očekivani zbir njegovih diskontovanih isplata (očekivana sadašnja vrednost). Zakon velikih brojeva predstavlja vezu između ova dva principa. Vrednosti ili cene određuju se tako da za rastući broj ugovora izdatih nezavisnim klijentima, osiguravajuća kompanija može postići da krajnji bilans po polisi konvergira ka nuli skoro sigurno (varijansa ovog bilansa takođe konvergira ka nuli). Analogno klasičnom slučaju, zahtevamo

da minimalna fer cena bilo koje polise (sa stanovišta osiguravajuće kompanije) mora pokriti bar cenu finansijske hedžing strategije koja dopušta da bilans po polisi konvergira ka nuli skoro sigurno za rastući broj ugovora.

Napomena 3. U teoriji determinističkih finansijskih tržišta, cena budućeg novčanog toka u vremenu 0 naziva se *sadašnja vrednost*. Vrednost budućeg novčanog toka izloženog riziku, koja se određuje preko klasičnog principa očekivanja, naziva se njegovom *očekivanom sadašnjom vrednošću*. Vrednost istog novčanog toka koji se određuje preko principa moderne matematike životnog osiguranja (u stohastičkim finansijskim tržištima), u literaturi se naziva *tržišna vrednost*, jer se vrednovanje obično vrši preko tržišnih cena odgovarajućih hartija od vrednosti koje ne sadrže biometričke rizike. Međutim, pojam tržišne vrednosti je na neki način varljiv, jer uglavnom ne postoji trgovina među ugovorima životnog osiguranja i stoga uglavnom za njih ne postoje cene koje su direktno određene tržištem. U skladu sa principom 7, tržišnu vrednost ćemo nazivati *minimalna fer cena.*

8. **Princip ekvivalencije**. Kao što je rečeno u poglavlju 3.2, ovaj princip podrazumeva da se buduće obaveze osiguranika (premije) trebaju određivati tako da je njihova (tržišna) vrednost jednaka (tržišnoj) vrednosti budućih obaveza osiguravača (isplate). Ideja je da se obaveze osiguravajuće kompanije (isplate, zahtevi) mogu hedžovati pomoću premija.

5.2 Model

Sada ćemo uvesti pretpostavke koje se tiču osobina modela tržišta i koje uključuju biometričke događaje.

Neka je dat filtrirani prostor verovatnoće $(B, (\mathcal{B}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{B})$ koji opisuje razvoj samo bioloških stanja svih posmatranih ljudi.

Pretpostavka 1. Dat je zajednički filtrirani prostor verovatnoće za finansijske i biometričke događaje

$$(M, (\mathcal{M}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P}) = (F, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{F}) \otimes (B, (\mathcal{B}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{B}) \tag{5.1}$$

odn. $M = F \times B$, $\mathcal{M}_t = \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_t$ i $\mathbb{P} = \mathbb{F} \otimes \mathbb{B}$. Pritom je $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, F\}$ i $\mathcal{B}_0 = \{\emptyset, B\}$.

Biometrički i finansijski događaji su nezavisni i ova pretpostavka odgovara principu 1 iz prethodnog poglavlja.

Kako je $\mathcal{M}_0 = \{\emptyset, F \times B\}$ model implicira da su dešavanja potpuno poznata u vremenu 0. Oznake $M, \mathcal{M}_t$ i $\mathbb{P}$ su uvedene radi jednostavnije notacije. M i $\mathcal{M}_t$ su izabrani jer opisuju događaje $m$odela glavnog tržišta, a $\mathbb{P}$ označava fizičku ($p$hysical) meru verovatnoće. Kasnije će se $\mathbb{M}$ koristiti za označavanje $m$artingalne mere.

Pretpostavka 2. Dat je model kompletnog tržišta hartija od vrednosti

$$M^F = (F, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{F}, \mathbb{T}, {}_FS)$$

sa jedinstvenom ekvivalentnom martingalnom merom $\mathbb{Q}$. Zajednički model tržišta sa finansijskim i biometričkim rizicima označićemo sa

$$M^{F\times B} = (M, (\mathcal{M}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P}, \mathbb{T}, S)$$

gde je $S(f,b) = {}_FS(f)$ za sve $(f,b) \in M$.

Primetimo da ovoj pretpostavci odgovara princip 2.

Nadalje, $M^{F\times B}$ predstavlja model tržišta hartija od vrednosti. Ostale oznake su nepromenjene.

Napomena 4. S je odgovarajući proces iz $(M, (\mathcal{M}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P})$ procesa ${}_FS$ iz prostora finansijskih događaja. Obično ćemo koristiti istu oznaku za slučajnu promenljivu X iz $(F, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{F})$ i slučajnu promenljivu Y iz $(M, (\mathcal{M}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P})$ kada je $Y(f,b) = X(f)$ za sve $(f,b) \in M$. Svaki portfolio ${}_F\theta$ iz kompletnog finansijskog tržišta M^F može biti repliciran samofinansirajućom strategijom ${}_F\theta_{\mathbb{T}} = ({}_F\theta_t)_{t\in\mathbb{T}}$. Pod nearbitražnim uslovom, jedinstveni proces cena $\pi^F({}_F\theta)$ za portfolio ${}_F\theta$ dat je sa

$$\pi_t^F({}_F\theta) = {}_FS_t^0 \cdot \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\langle {}_F\theta, {}_FS_T\rangle}{{}_FS_T^0} | \mathcal{F}_t\right].$$

Pošto je proces S iz $(M, (\mathcal{M}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P})$ odgovarajući procesu ${}_FS$, portfolio ${}_F\theta$ iz $M^{F\times B}$ se replicira strategijom ${}_F\theta_{\mathbb{T}} = ({}_F\theta_t)_{t\in\mathbb{T}}$ iz $M^{F\times B}$. Prema tome, da bi se izbegle mogućnosti za arbitražu, svaki prihvatiljivi princip vrednovanja π mora karakterisati proces cena $\pi({}_F\theta)$ iz $M^{F\times B}$ takav da $\pi_t({}_F\theta) = \pi_t^F({}_F\theta)$ $\mathbb{P}$-skoro sigurno za svako $t \in \mathbb{T}$. Pošto je $\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}[X|\mathcal{F}_t] = \mathbf{E}_{\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}}[X|\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_0]$ $\mathbb{P}$-skoro sigurno za bilo koju slučajnu promenljivu X iz $(F, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{F})$, mora biti $\mathbb{P}$-skoro sigurno

$$\begin{aligned}\pi_t({}_F\theta) &= S_t^0 \cdot \mathbf{E}_{\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}}\left[\frac{\langle {}_F\theta, S_T\rangle}{S_T^0} | \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_0\right] \\ &= S_t^0 \cdot \mathbf{E}_{\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}}\left[\frac{\langle {}_F\theta, S_T\rangle}{S_T^0} | \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_t\right]. \qquad (5.2)\end{aligned}$$

Pretpostavka 3. Postoji beskonačno mnogo klijenata i imamo

$$(B, (\mathcal{B}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{B}) = \bigotimes_{i=1}^{\infty} (B^i, (\mathcal{B}_t^i)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{B}^i)$$

gde je $B_H = \{(B^i, (\mathcal{B}_t^i)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{B}^i) : i \in \mathbb{N}\}$ skup filtriranih prostora verovatnoća koji opisuju razvoj i-tog klijenta. Svako $\mathcal{B}_0^i$ je trivijalno, pa sledi da je i $\mathcal{B}_0$ trivijalno, tj. $\mathcal{B}_0 = \{\emptyset, B\}$.

Princip 3 odgovara ovoj pretpostavci.

Pretpostavka 4. Za svaki prostor $(B^i, (\mathcal{B}_t^i)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{B}^i)$ iz B_H postoji beskonačno mnogo njemu izomorfnih (identičnih, ali ne u indeksima).

Odgovarajući princip je princip 4.

Ove četiri pretpostavke definišu model drugog reda.

U ovakvoj postavci, biometrički razvoj po definiciji nema uticaj na proces cena S na finansijskom tržištu i obratno. Zbog toga imamo situacije da portfolio θ koji sadrži biometrički rizik (portfolio koji nije oblika $\theta = {}_F\theta$ $\mathbb{P}$-skoro sigurno, gde je ${}_F\theta$ M^F-portfolio) ne može biti repliciran nekim čisto finansijskim proizvodom. Dakle, uopšteno određivanje cena proizvoda životnog osiguranja u odnosu na M^F nije moguće. Obično se ne trguje polisama životnog osiguranja i nije data mogućnost određivanja vrednosti takvih ugovora preko tržišta. Trište $M^{F\times B}$ sa finansijskim i biometričkim rizicima je nekompletno. Bez obzira na to, proizvodi moraju imati cenu iz razloga što npr. osiguranik obično ima pravo da raskine ugovor u bilo kom trenutku njegovog trajanja. Stoga, potreban je prihvatljiv princip vrednovanja π za posmatrane portfolije Θ na tržištu $M^{F\times B}$ i posebno za osnovne proizvode životnog osiguranja.

Definicija 5.1. *Osnovna polisa životnog osiguranja* je vektor $(\alpha_t, \beta_t)_{t\in\mathbb{T}}$ parova (α_t, β_t) t-portfolija iz Θ (radi kraće notacije izostavljene su unutrašnje zagrade iz $((\alpha_t, \beta_t))_{t\in\mathbb{T}}$). Za svako $t \in \mathbb{T}$, portfolio α_t predstavlja plaćanje osiguranika osiguravaču (*premija*) i β_t predstavlja plaćanje osiguravača osiguraniku (*osigurana suma*), respektivno koja se dešavaju u trenutku t. Oznaka $(\alpha_t^i, \beta_t^i)_{t\in\mathbb{T}}$ znači da ugovor zavisi od života i-tog klijenta, tj. za sve (f, x), $(f, y) \in M$

$$(\alpha_t^i(f, x), \beta_t^i(f, x))_{t\in\mathbb{T}} = (\alpha_t^i(f, y), \beta_t^i(f, y))_{t\in\mathbb{T}}$$

kad god je $p^i(x) = p^i(y)$, gde je p^i projekcija od B na B^i.

Za svaku polisu $(\alpha_t, \beta_t)_{t\in\mathbb{T}}$ prodatu nekom klijentu, tok plaćanja je sa stanovišta osiguravača ekvivalentan posedovanju portfolija $(\alpha_t - \beta_t)_{t\in\mathbb{T}}$.

Iako još uvek nije razmotren nijedan poseban princip vrednovanja za takve portfolije, pretpostavljamo da je odgovarajući princip π minimalna fer cena u skladu sa principom 7 iz poglavlja 5.1. Karakteristike minimalne fer cene će biti definisane i objašnjene malo kasnije.

Pretpostavka 5. Neka je π odgovarajući princip vrednovanja na skupu portfolija Θ. Za svaku polisu životnog osiguranja $(\alpha_t, \beta_t)_{t\in\mathbb{T}}$ princip ekvivalencije zahteva da

$$\pi_0\left(\sum_{t=0}^{T}\alpha_t\right) = \pi_0\left(\sum_{t=0}^{T}\beta_t\right). \tag{5.3}$$

Kao što je već pomenuto u poglavlju 5.1 (princip 8), ideja ove jednakosti je da obaveze $(\beta_t)_{t\in\mathbb{T}}$ mogu na neki način biti hedžovane preko premija $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{T}}$, s obzirom da su njihove sadašnje (tržišne) vrednosti jednake. Primećujemo analogiju principa ekvivalencije u slučaju klasične matematike životnog osiguranja.

Model klasične matematike životnog osiguranja se uklapa u dati model modernog životnog osiguranja. U klasičnom slučaju finansijska tržišta su deterministička, a tu pretpostavku realizujemo preko $|\mathcal{F}_T| = 2$, odn. $\mathcal{F}_T = \{\emptyset, F\}$ i identifikujući $(M, (\mathcal{M}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P})$ sa $(B, (\mathcal{B}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{B})$. Zbog pretpostavke da na tržištu nema mogućnosti za arbitražu, sve cene aktiva moraju imati dinamike identične do na skaliranje. Stoga pretpostavljamo da je $S = (S_t^0)_{t\in\mathbb{T}}$, odn. $d = 1$ i da je jedina aktiva na tržištu nerizična aktiva kao deterministička funkcija vremena.

Sledi primer primene jednakosti (5.3) za unit-linked osiguranje (polisa unit-linked životnog osiguranja obično zavisi od akcija fonda koje su kombinacije aktiva kojima se trguje).

Primer 5.2. Koristimo pretpostavke 1 i 2. Za $T = 2$ i $d = 2$, neka je M^F model kompletnog tržišta hartija od vrednosti bez mogućnosti arbitraže, sa dve aktive od kojih je jedna deterministička (obveznica, S^0), a druga stohastička (akcija, S^1). Razmatramo život osobe starosti x. Ovaj život je modelovan prostorom $(B, (\mathcal{B}_t)_{t\in\{0,1,2\}}, \mathbb{B})$ i pretpostavljamo da je ta osoba živa u trenutku 0. Neka je δ $\mathcal{B}_1$-merljivo sa $\delta(b) \in \{0, 1\}$ za svako $b \in B$. Neka je $\delta = 1$ ako i samo ako je klijent živ u trenutku 1. Sada definišemo

$$\beta_0 = (0, 0),\ \beta_1 = (0, 100(1-\delta)),\ \beta_2 = (0, 150\delta),$$

i

$$\alpha_0 = (P, 0),\ \alpha_1 = \alpha_2 = (0, 0),$$

gde je $P \in \mathbb{R}^+$. Ovi portfoliji definišu jednostavno unit-linked osiguranje za posmatranog klijenta. Polisu sačinjava premija u iznosu P u trenutku 0, u slučaju smrti do trenutka 1 dobit od 100 akcija u trenutku 1 ili, u suprotnom, dobit od 150 akcija u trenutku 2. Za izračunavanje vrednosti P preko (5.3), koristimo princip proizvoda mera, koji ćemo kasnije pojasniti. Stoga, pretpostavljamo da je π dato sa

$$\pi_t(\theta) = S_t^0 \cdot \mathbf{E}_{\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}}\left[\frac{\langle\theta, S_2\rangle}{S_2^0}|\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_t\right], \quad t \in \{0,1,2\}. \tag{5.4}$$

Važi

$$\pi_0(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2) = \pi_0(\beta_0 + \beta_1 + \beta_2)$$
$$\pi_0((P,0)) = \pi_0(100(0, 1 + 0.5\delta)).$$

Iz (5.4) je

$$\begin{aligned}\pi_0(100(0,1+0.5\delta)) &= S_0^0 \cdot \mathbf{E}_{\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}}\left[\frac{\langle 100(0,1+0.5\delta),(S_2^0,S_2^1)\rangle}{S_2^0}|\mathcal{F}_0 \otimes \mathcal{B}_0\right] \\ &= 100 \cdot \mathbf{E}_{\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}}\left[(1+0.5\delta)\frac{S_2^1}{S_2^0}\right]\end{aligned}$$

i

$$\pi_0((P,0)) = P.$$

Iz toga dobijamo

$$\begin{aligned}P &= 100 \cdot \mathbf{E}_{\mathbb{B}}[1+0.5\delta] \cdot \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_2^1}{S_2^0}\right] \\ &= 100 \cdot (1 + 0.5\mathbf{E}_{\mathbb{B}}[\delta]) \cdot S_0^1 \\ &= 100 S_0^1 + p_x 50 S_0^1,\end{aligned}$$

gde je $p_x = \mathbf{E}_{\mathbb{B}}[\delta]$ međunarodna aktuarska oznaka za verovatnoću da osoba starosti x preživi narednu godinu, kao što je navedeno u poglavlju 3.3. Zaključujemo da je vrednost premije jednaka zbiru 100 cena akcije u trenutku 0 i 50 cena akcije u trenutku 0 umnoženih sa jednogodišnjom verovatnoćom preživljavanja za osobu starosti x. Time se dobija polisa koja sigurno isplaćuje 100 akcija u nekom od trenutaka 1 ili 2 i dodatnih 50 akcija u trenutku 2 ako je klijent preživeo prvu godinu. $\diamond$

Kao što je već navedeno, potreban je odgovarajući skup portolija Θ na koji ćemo primeniti određeni princip vrednovanja. Pored toga, potrebna je matematička formulacija onoga što je nazvano "sličnim" u principu 5 iz pogavlja 5.1.

Definicija 5.2. (i) Neka su skupovi portfolija dati sa

$$\Theta = (L^1(M, \mathcal{M}_T, \mathbb{P}))^d$$

i

$$\Theta^F = (L^1(F, \mathcal{F}_T, \mathbb{F}))^d,$$

gde Θ^F predstavlja odgovarajući podskup od Θ.

(ii) Skup $\Theta' \subset \Theta$ portfolija iz $M^{F\times B}$ je *skup nezavisnih slučajnih promenljivih sa jednakim raspodelama u odnosu na* $(B, \mathcal{B}_T, \mathbb{B})$, skraćeno *B-i.i.d.*, ako su za skoro svako $f \in F$ slučajne promenljive $\{\theta(f,.) : \theta \in \Theta'\}$ i.i.d. na prostoru $(B, \mathcal{B}_T, \mathbb{B})$. Pod pretpostavkom 4, takvi skupovi postoje.

(iii) Pod pretpostavkama 1, 2 i 3, skup $\Theta' \subset \Theta$ zadovoljava uslov (K) ako za skoro svako $f \in F$ elementi od $\{\theta(f,.) : \theta \in \Theta'\}$ su stohastički nezavisni na $(B, \mathcal{B}_T, \mathbb{B})$ i $\|\theta^j(f,.)\|_2 < c(f) \in \mathbb{R}^+$ za svako $\theta \in \Theta'$ i svako $j \in \{0, 1, ..., d-1\}$.

Skupovi koji ispunjavaju uslov (B-i.i.d.) ili (K) indeksirani su odgovarajućim simbolom. Objašnjenje Kolmogorovljevog kriterijuma datog uslovom (K) biće navedeno kasnije (u napomeni 7), nakon nekoliko primera.

Sada se mogu formulisati ostale pretpostavke u vezi sa vrednovanjem. Sledeća pretpostavka motivisana je zahtevom da kad god je tržište sa d prvobitnih hartija od vrednosti sa cenama S uvećano konačnim brojem procesa cena $\pi(\theta)$, a zbog portfolija $\theta \in \Theta$, uslov (NA) treba da važi za novo tržište. Ova pretpostavka odgovara principu 6 iz poglavlja 5.1.

Pretpostavka 6. Svaki princip vrednovanja π mora za svako $t \in \mathbb{T}$ i $\theta \in \Theta$ biti oblika

$$\pi_t(\theta) = S_t^0 \cdot \mathbf{E}_{\mathbb{M}} \left[\frac{\langle \theta, S_T \rangle}{S_T^0} | \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_t \right] \tag{5.5}$$

za meru verovatnoće $\mathbb{M} \sim \mathbb{P}$. Pored toga, treba da je

$$\pi_t({}_F\theta) = \pi_t^F({}_F\theta) \tag{5.6}$$

$\mathbb{P}$-skoro sigurno za svaki M^F-portfolio ${}_F\theta$ i za svako $t \in \mathbb{T}$, gde je π_t^F proces cena u M^F.

Propozicija 5.1. *Pod pretpostavkom 6, proces* $(S_t/S_t^0)_{t\in\mathbb{T}}$ *je* $\mathbb{M}$*-martingal.*

Dokaz

Za ${}_F\theta = e_{i-1}$, gde je e_{i-1} i-ti jedinični vektor baze u $\mathbb{R}^d$, na osnovu jednakosti (5.6) i (4.6) sledi

$$\pi_t({}_F\theta) = \sum_{j=0}^{d-1} e_{i-1}^j S_t^j = S_t^i.$$

Iz (5.5) dobijamo

$$\pi_t({}_F\theta) = S_t^0 \cdot \mathbf{E}_{\mathbb{M}} \left[\frac{S_T^i}{S_T^0} | \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_t \right],$$

što daje

$$\frac{S_t^i}{S_t^0} = \mathbf{E}_{\mathbb{M}} \left[\frac{S_T^i}{S_T^0} | \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_t \right]. \quad \square$$

Sledeća pretpostavka se odnosi na peti i sedmi princip.

Pretpostavka 7. Pod pretpostavkama 1, 2, 3, 4 i 6, *minimalna fer cena* određena je principom vrednovanja π na Θ tako da za svako $\theta \in \Theta$ mora važiti

$$\pi_0(\theta) = \pi_0^F(H(\theta)) \tag{5.7}$$

gde je preslikavanje

$$H : \Theta \longrightarrow \Theta^F \tag{5.8}$$

takvo da

(i) $H(\theta)$ je t-portfolio ako je θ t-portfolio.

(ii) $H({}^1\theta) = H({}^2\theta)$ za B-i.i.d. portfolije ${}^1\theta$ i ${}^2\theta$.

(iii) Za t-portfolije $\{\theta^i : i \in \mathbb{N}\}_{B-i.i.d.}$ ili $\{\theta^i : i \in \mathbb{N}\}_K$ važi

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \left\langle {}^i\theta - H({}^i\theta), S_t \right\rangle \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \;\; \mathbb{P}\text{-skoro sigurno.} \tag{5.9}$$

Izraz (5.8) označava da je *hedž* $H(\theta)$ portfolio iz finansijskog tržišta. Podsetimo se da je finansijsko tržište M^F kompletno i da za svaki t-portfolio postoji replicirajuća strategija za finansiranje do trenutka t (lema 4.2). Pored toga, (5.8) implicira da hedžing strategija ne reaguje na biometričke događaje koji se dešavaju nakon vremena 0. Zbog osobine (ii), kao i u klasičnom slučaju, *hedžing metod* H ne pravi razliku između sličnih (B-i.i.d.) klijenata (princip 5). Osobina (iii) je takođe prenešena iz klasičnog slučaja, gde je odgovarajuća konvergencija obezbeđena principom očekivanja za odgovarajuće proizvode osiguranja kombinovane sa odgovarajućim hedževima (princip 7). Osobina (iii) se pored toga odnosi na princip 4 iz poglavlja 5.1, jer bi osiguravajuće kompanije trebale poslovati sa velikim grupama sličnih (B-i.i.d.) ugovora.

5.3 Vrednovanje

Pre formulacije i dokaza glavnog tvrđenja za vrednovanje u opštem slučaju, potrebno je navesti nekoliko lema.

Lema 5.1. *Neka su $g_1, g_2, ..., g_n$, gde je $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, merljive funkcije na proizvodu dva proizvoljna prostora verovatnoća $(F, \mathcal{F}, \mathbb{F}) \otimes (B, \mathcal{B}, \mathbb{B})$. Tada je $g_1 = ... = g_n$ $\mathbb{F}\otimes\mathbb{B}$-skoro sigurno ako i samo ako je $\mathbb{F}$-skoro sigurno $g_1(f, .) = ... = g_n(f, .)$ $\mathbb{B}$-skoro sigurno.*

Dokaz

Za $i \neq j$ razlika $g_{i,j} := g_i - g_j$ je merljiva, stoga je skup $Q := \bigcap_{i \neq j} g_{i,j}^{-1}(0)$ $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}$-merljiv. Za svako $Q \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}$ znamo da je

$$\mathbb{F} \otimes \mathbb{B}(Q) = \int \mathbb{B}(Q_f) d\mathbb{F},$$

gde je $Q_f = \{b \in B : (f, b) \in Q\}$ i funkcija $\mathbb{B}(Q_f)$ na F je $\mathcal{F}$-merljiva. Sada je $g_1 = ... = g_n$ skoro sigurno ekvivalentno sa $\mathbb{F} \otimes \mathbb{B}(Q) = 1$ što je ekvivalentno sa $\mathbb{B}(Q_f) = 1$ $\mathbb{F}$-skoro sigurno. S druge strane, $\mathbb{B}(Q_f) = 1$ je ekvivalentno sa $g_1(f, .) = ... = g_n(f, .)$ $\mathbb{B}$-skoro sigurno. □

Lema 5.2. *Neka su $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i g niz i funkcija, respektivno, iz prostora $L^0(F \times B, \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}, \mathbb{F} \otimes \mathbb{B})$, gde je $(F \times B, \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}, \mathbb{F} \otimes \mathbb{B})$ proizvod dva proizvoljna prostora verovatnoća. Tada $g_n \to g$ $\mathbb{F} \otimes \mathbb{B}$-skoro sigurno ako i samo ako $\mathbb{F}$-skoro sigurno $g_n(f, .) \to g(f, .)$ $\mathbb{B}$-skoro sigurno.*

Dokaz

Neka $g_n \to g$ $\mathbb{F} \otimes \mathbb{B}$-skoro sigurno. Elementi prostora $L^0(F \times B, \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}, \mathbb{F} \otimes \mathbb{B})$ su merljive realne funkcije. Znamo da za bilo koji niz realnih brojeva $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i bilo koje $h \in \mathbb{R}$ važi da je $h_n \to h$ ekvivalentno sa $\limsup h_n = \liminf h_n = h$. Kako limes superior i limes inferior realne merljive funkcije uvek postoje, iz leme 5.1 dobijamo da je

$$\limsup_{n \to \infty} g_n = \liminf_{n \to \infty} g_n = g \quad \mathbb{F} \otimes \mathbb{B}\text{-skoro sigurno}$$

ako i samo ako je $\mathbb{F}$-skoro sigurno

$$\limsup_{n \to \infty} g_n(f, .) = \liminf_{n \to \infty} g_n(f, .) = g(f, .) \quad \mathbb{B}\text{-skoro sigurno}$$

što je ekvivalentno sa $\mathbb{F}$-skoro sigurno $g_n(f, .) \to g(f, .)$ $\mathbb{B}$-skoro sigurno. □

Lema 5.3. *Pod pretpostavkama 1 i 2, na $(F \times B, \mathcal{F} \otimes \mathcal{B})$ važi*

$$\mathbb{Q} \otimes \mathbb{B} \sim \mathbb{F} \otimes \mathbb{B}. \tag{5.10}$$

Za Radon-Nikodym izvode, $\mathbb{F} \otimes \mathbb{B}$-skoro sigurno važi

$$\frac{d(\mathbb{Q} \otimes \mathbb{B})}{d(\mathbb{F} \otimes \mathbb{B})} = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{F}}. \tag{5.11}$$

Dokaz

Za bilo koji $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}$-merljivi skup Z znamo da je $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{B}(Z) = 0$ ako i samo ako $\mathrm{I}_Z = 0$ $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{B}$-skoro sigurno, gde je I_Z indikator funkcija skupa Z. Na osnovu leme 5.1, $\mathrm{I}_Z = 0$ $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{B}$-skoro sigurno ako i samo ako je $\mathbb{Q}$-skoro sigurno $\mathrm{I}_Z(f, .) = 0$ $\mathbb{B}$-skoro sigurno.

Međutim, $\mathbb{Q}$ je ekvivalentno meri $\mathbb{F}$, odn. $\mathbb{Q}$-skoro sigurno je ekvivalentno sa $\mathbb{F}$-skoro sigurno, pa sledi da je $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{B}(Z) = 0$ ekvivalentno sa $\mathbb{F} \otimes \mathbb{B}(Z) = 0$. Stoga važi (5.10).

Za bilo koji $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}$-merljivi skup Z, iz Fubinijeve teoreme sledi da je

$$\mathbb{Q} \otimes \mathbb{B}(Z) = \mathbf{E}_{\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}}[\mathrm{I}_Z] = \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbf{E}_{\mathbb{B}}[\mathrm{I}_Z]].$$

$d\mathbb{Q}/d\mathbb{F}$ postoji i ograničeno je, pa koristeći (2.3) dobijamo

$$\mathbb{Q} \otimes \mathbb{B}(Z) = \mathbf{E}_{\mathbb{F}}\left[\mathbf{E}_{\mathbb{B}}[\mathrm{I}_Z]\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{F}}\right] = \mathbf{E}_{\mathbb{F}\otimes\mathbb{B}}\left[\mathrm{I}_Z\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{F}}\right],$$

iz čega sledi

$$\frac{d(\mathbb{Q} \otimes \mathbb{B})}{d(\mathbb{F} \otimes \mathbb{B})}(Z) = \mathrm{I}_Z\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{F}}.$$

□

Lema 5.4. *Pod pretpostavkama 1 i 2, neka je za svako $\theta \in \Theta$*

$$H^*(\theta) := \mathbf{E}_{\mathbb{B}}[\theta] \in \Theta^F. \tag{5.12}$$

Postoji samofinansirajuća strategija koja replicira H^* i pod pretpostavkom 6

$$\pi_t(H^*(\theta)) = S_t^0 \cdot \mathbf{E}_{\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}}\left[\frac{\langle\theta, S_T\rangle}{S_T^0}|\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_0\right] \tag{5.13}$$

za $t \in \mathbb{T}$. Pored toga, H^* ima osobine (i), (ii) i (iii) iz pretpostavke 7.

Dokaz

Na osnovu Fubinijeve teoreme, $\mathbf{E}_{\mathbb{B}}[\theta(f, .)]$ postoji $\mathbb{F}$-skoro sigurno i $\mathbf{E}_{\mathbb{B}}[\theta]$ je $\mathbb{F}$-merljivo i -integrabilno. Prema tome, zbog kompletnosti M^F i jedinstvenosti $\mathbb{Q}$, portfolio H^* se može replicirati hartijama od vrednosti iz M^F, a zbog pretpostavke 6 i napomene 4 ima proces cena

$$\pi_t(\mathbf{E}_{\mathbb{B}}[\theta]) = S_t^0 \cdot \mathbf{E}_{\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}}\left[\frac{\langle\mathbf{E}_{\mathbb{B}}[\theta], S_T\rangle}{S_T^0}|\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_0\right]. \tag{5.14}$$

Pošto je svako θ^i $(i = 0, ..., d-1)$ $\mathbb{F} \otimes \mathbb{B}$-integrabilno, $S_T^0 > 0$ i S_T^0 skoro sigurno uzima samo konačne vrednosti [3], onda je $\langle\theta, S_T\rangle / S_T^0$ $\mathbb{F} \otimes \mathbb{B}$-integrabilno. Na osnovu leme 5.3, $\pi_t(H^*(\theta))$ dato sa (5.13) postoji jer je (5.11) ograničeno. Kako je

$$\mathbf{E}_{\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}}\left[\mathbf{E}_{\mathbb{B}}[X]|\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_0\right] = \mathbf{E}_{\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}}\left[X|\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_0\right] \ \mathbb{P}\text{-skoro sigurno}$$

za svako $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{B}$-integrabilno X (podsetimo se da je $\mathcal{B}_0 = \{\emptyset, B\}$), jednakost (5.14) ekvivalentna je sa (5.13) $\mathbb{P}$-skoro sigurno.

Pošto je $\mathbf{E}_{\mathbb{B}}[X] = \mathbf{E}_{\mathbb{F}\otimes\mathbb{B}}\left[X|\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_0\right]$ $\mathbb{P}$-skoro sigurno za $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_t$-merljivo X, onda je $H^*(\theta)$ t-portfolio.

Osobina (ii) iz pretpostavke 7 je očigledno zadovoljena.

Za bilo koji t-portfolio $\{{}^i\theta : i \in \mathbb{N}\}_K$ ili $\{{}^i\theta : i \in \mathbb{N}\}_{B-i.i.d.}$, jak zakon velikih brojeva (Kolmogorovljev kriterijum) implicira da za skoro svako $f \in F$

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left\langle {}^i\theta(f,.) - H^*({}^i\theta)(f), S_t(f)\right\rangle \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ \ \mathbb{B}\text{-skoro sigurno.} \tag{5.15}$$

Primenjujući lemu 5.2 dobijamo da H^* ima i osobinu (iii). □

Lema 5.5. *Pod pretpostavkama 1 i 2, za svako $\theta \in \Theta$, svako $t \in \mathbb{T}$ i za $\mathbb{M} \in \{\mathbb{F}\otimes\mathbb{B}, \mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}\}$ važi*

$$\mathbf{E}_{\mathbb{M}}\left[\langle \theta - H^*(\theta), S_t\rangle\right] = 0. \tag{5.16}$$

Dokaz

Sledi iz Fubinijeve teoreme. □

Za portfolije koji mogu predstavljati polise životnog osiguranja, sledeća lema pokazuje da bilo koji metod finansijskog hedžingovanja, odn. strategije koja ne koristi biometričke informacije, koji ima osobine (i), (ii) i (iii) iz pretpostvke 7, ima proces cena isti kao i H^* dato sa (5.12). Štaviše, ne postoji hedžing metod sa boljom osobinom konvergencije nego što ima takvo H^*.

Lema 5.6. *Pod pretpostavkama 1, 2, 3, 4 i 6, za svako $H : \Theta \longrightarrow \Theta^F$ koje ima osobine (i), (ii) i (iii) iz pretpostvke 7, važi da za svako θ iz nekog $\Theta_{B-i.i.d.}$*

$$\pi_t(H(\theta)) = S_t^0 \cdot \mathbf{E}_{\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}}\left[\frac{\langle\theta, S_T\rangle}{S_T^0}|\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_0\right],\ t \in \mathbb{T}. \tag{5.17}$$

Dokaz

Neka je dato $H : \Theta \longrightarrow \Theta^F$ sa osobinama (i), (ii) i (iii) iz pretpostvke 7 i skup portfolija $\{{}^i\theta : i \in \mathbb{N}\}_{B-i.i.d.}$ koji sadrži dati portfolio $\theta \in \Theta$. Kako je svako $\theta \in \Theta$ T-portfolio, lema 5.2 implicira da je $\mathbb{F}$-skoro sigurno

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left\langle {}^i\theta(f,.) - H(\theta)(f), S_T(f)\right\rangle \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ \ \mathbb{B}\text{-skoro sigurno.} \tag{5.18}$$

Na osnovu jakog zakona velikih brojeva sledi $\mathbb{F}$-skoro sigurno

$$\langle H(\theta)(f), S_T(f)\rangle = \langle \mathbf{E}_{\mathbb{B}}[\theta(f,.)], S_T(f)\rangle\,.$$

Pretpostavka 6 (5.6) i uslov (NA) na M^F impliciraju $\pi_t(H(\theta)) = \pi_t(\mathbf{E}_{\mathbb{B}}[\theta])$ $\mathbb{P}$-skoro sigurno za $t \in \mathbb{T}$. Primenom leme 5.4 dobija se (5.17). $\square$

Nakon predstavljenih principa i pretpostavki može se formulisati glavno tvrđenje.

Teorema 5.1 (Fischer, 2007). *Pod pretpostavkama 1, 2, 3, 4, 6 i 7, minimalna fer cena π na Θ jednistveno je određena merom $\mathbb{M} = \mathbb{Q} \otimes \mathbb{B}$, odn. za $\theta \in \Theta$ i $t \in \mathbb{T}$ važi*

$$\pi_t(\theta) = S_t^0 \cdot \mathbf{E}_{\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}} \left[\frac{\langle \theta, S_T \rangle}{S_T^0} | \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_t \right]. \tag{5.19}$$

Dokaz

Iz leme 5.3 znamo da je $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{B} \sim \mathbb{F} \otimes \mathbb{B}$. Preko leme 5.4 i jednakosti (5.2), dobijamo da (5.19) postoji i stoga ispunjava uslove pretpostavke 6. Pored toga, (5.19) predstavlja minimalnu fer cenu iz pretpostavke 7 jer za $H = H^*$ iz Fubinijeve teoreme i

$$\mathbf{E}_{\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}} \left[\frac{\langle \theta, S_T \rangle}{S_T^0} \right] = \mathbf{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{\langle H^*(\theta), S_T \rangle}{S_T^0} \right]$$

dobijamo

$$\pi_0(\theta) = \pi_0^F(H(\theta)),$$

a (i), (ii) i (iii) su na osnovu leme 5.4 ispunjeni. $\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}$ je ekvivalentna martingalna mera za proces S u prostoru proizvoda, pa je (5.19) je princip vrednovanja jer je $(S_t/S_t^0)_{t\in\mathbb{T}}$ $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{B}$-martingal i stoga $\pi_t(\theta_t) = \langle \theta_t, S_t \rangle$ za svaki t-portfolio $\theta_t \in \Theta$.

Treba pokazati još jedinstvenost. Neka je π minimalna fer cena iz pretpostavke 7 i neka je dat skup $\{{}^i\theta : i \in \mathbb{N}\}_{B-i.i.d.}$. Tada na osnovu leme 5.6 znamo da je

$$\pi_0({}^i\theta) = \pi_0(H^*({}^i\theta)) = \mathbf{E}_{\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}} \left[\frac{\langle {}^i\theta, S_T \rangle}{S_T^0} \right]$$

za svako $i \in \mathbb{N}$. Međutim, možemo izabrati skup $\{{}^i\theta : i \in \mathbb{N}\}_{B-i.i.d.}$ tako da ${}^1\theta = (\mathrm{I}_Z, 0, ..., 0)$, gde I_Z predstavlja indikator funkciju skupa $Z = F' \times B_1 \times B_2 \times ...$, gde $F' \in \mathcal{F}_T$ i $B_j \in \mathcal{B}_T^j$ za $j \in \mathbb{N}$ i $B_j \neq B^j$ za samo konačno mnogo j (pretpostavka 4 je krucijalna za mogućnost ovakvog izbora). Konačne unije skupova oblika Z čine algebru koja generiše $\mathcal{M}_T$, σ-algebru prostora proizvoda, a M predstavlja element ovog generatora. Iz (5.13) i (5.5) dobijamo $\pi_0({}^1\theta) = \mathbb{Q} \otimes \mathbb{B}(Z) = \mathbb{M}(Z)$. $\mathbb{M} = \mathbb{Q} \otimes \mathbb{B}$ sledi iz podudarnosti mera na generatoru. $\square$

Iako je ovaj princip vrednovanja dobro postavljen u literaturi, u ovom radu je prikazano detaljno izvođenje sa vrlo opštom osnovom. Jasno je da je (3.2) specijalan slučaj od (5.19) kada je u pitanju determinističko finansijsko tržište. Pošto je π jedinstveno, onda predstavlja i minimalni princip vrednovanja sa traženim osobinama. Ne postoji drugi princip vrednovanja koji pod pretpostavkama 1, 2, 3 i 4 zadovoljava 6 i 7 i koji pod principom ekvivalencije (pretpostavka 5) implicira premije niže nego (5.19). Zapravo, osobina (iii) iz pretpostavke 7 obezbeđuje da osiguravajuća kompanija za svaki prodati proizvod ne naplaćuje više nego što su troškovi za prihvatljiv čisto finansijski hedž. Zbog toga, minimalna fer cena je fer sa stanovišta osiguranika, kao i sa stanovišta kompanije.

Primer 5.3 (*Asimptotske mogućnosti za arbitražu*)**.** Posmatrajmo skup portfolija $\{^i\theta : i \in \mathbb{N}\}_{B-i.i.d.}$. Minimalna cena svakog portfolija data je sa (5.19), u vremenu $t = 0$. Ako osiguravajuća kompanija prodaje proizvode $\{^1\theta, ..., ^m\theta\}$ po tim cenama, onda može kupiti hedžing portfolije tako da bilans konvergira ka nuli skoro sigurno (pretpostavka 7, osobina (iii)). Međutim, ako kompanija naplaćuje

$$\pi_0(^i\theta) + \epsilon,$$

gde je $\epsilon > 0$ dodatna naplata i π je dato sa (5.19), tada i dalje postoji takav hedž, ali prihod ϵ po ugovoru je ostvaren u vremenu $t = 0$. Prema tome, faktor opterećenja ϵ omogućava osiguravajućoj kompaniji da postane mašina za pravljenje novca, kada $m \to \infty$. $\diamond$

Grubo govoreći, u idealizovanoj ekonomiji koja je blizu ekvilibrijuma, za bilo koju EMM $\mathbb{M}'$ tržišta $M^{F\times B}$ koja bi bila dobijena (indirektno, preko cena) od slobodnog trgovanja portfolijima iz $M^{F\times B}$, treba očekivati da bude bliska meri $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{B}$, gde bi $\mathbb{Q}$ bila ekvilibrijumska EMM dobijena trgovinom samo u M^F. Bilo koja jaka sistematska devijacija može dovesti do porasta mogućnosti za arbitražu, kao što smo videli u ovom primeru.

5.4 Hedžing i diverzifikacija

U ovom poglavlju pokazuje se na koji način osiguravajuća kompanija može hedžovati svoj rizik preko proizvoda finansijskog tržišta, pod uslovom da je tržište dovoljno likvidno.

Neka važe pretpostavke 1, 2, 3 i 4 i neka je skup polisa životnog osiguranja $\{(\alpha^i_t, \beta^i_t)_{t\in\mathbb{T}} : i \in \mathbb{N}\}$ takav da $\{\alpha^i_t : i \in \mathbb{N}\}_K$ i $\{\beta^i_t : i \in \mathbb{N}\}_K$ za svako $t \in \mathbb{T}$. Koristeći hedžing metod H^* iz leme 5.4, portfoliji (ili replicirajuće strategije) $-\mathbf{E}_{\mathbb{B}}[^i\alpha_t]$ i $\mathbf{E}_{\mathbb{B}}[^i\beta_t]$ se kupuju u vremenu 0 za sve $i \in \mathbb{N}$ i sve $t \in \mathbb{T}$. Razmotrimo bilans dobitaka i gubitaka u bilo kom vremenu $t \in \mathbb{T}$. Za srednju vrednost svih isplata po ugovoru u vremenu t iz leme 5.4 znamo da je

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left\langle ^i\alpha_t -^i \beta_t - \mathbf{E}_{\mathbb{B}}[^i\alpha_t -^i \beta_t], S_t\right\rangle \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \;\; \mathbb{P}\text{-skoro sigurno.} \tag{5.20}$$

Analogno sa klasičnim slučajem (poglavlje 3), srednja vrednost krajnjeg bilansa takođe konvergira ka nuli skoro sigurno, odn.

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{T}\left\langle {}^i\alpha_t -{}^i\beta_t - \mathbf{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\alpha_t -{}^i\beta_t], S_T\right\rangle \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ \ \mathbb{P}\text{-skoro sigurno.} \tag{5.21}$$

Ovaj način upravljanja rizikom je statičan u smislu da nijedna strategija za trgovanje ne reaguje na biometričke događaje koji se dešavaju posle vremena 0, što se podudara sa razmatranjem u klasičnom slučaju.

Napomena 5. Lema 5.5 implicira da bilansi iz (5.20) i (5.21) imaju očekivanje 0 u meri $\mathbb{P} = \mathbb{F}\otimes\mathbb{B}$.

Što se tiče izračunavanja premija, ako se princip ekvivalencije (5.3) primeni na minimlanu fer cenu (5.19), za svako $i \in \mathbb{N}$ dobija se

$$\sum_{t=0}^{T}\pi_0(\mathbf{E}_{\mathbb{B}}[-{}^i\alpha +{}^i\beta_t]) = \sum_{t=0}^{T}\pi_0({}^i\alpha_t -{}^i\beta_t) = 0.$$

Napomena 6. Primenom (5.3) i (5.19) osiguravajuća kompanija može bez troškova u vremenu 0 izvršiti samofinansiranje tako da bilansi po ugovorima u bilo kom trenutku t konvergiraju ka nuli skoro sigurno za rastući broj klijenata. Na ovaj način treba biti shvaćena diverzifikacija biometričkih rizika u datom modelu. Realizacija takvog hedža zahteva precizne podatke (baze drugog reda) date pretpostavkama 1–4.

Nasuprot drugim, potpunijim hedžing metodima, predstavljen metod ima tu prednost da nije potrebno uzimati u obzir kretanje biometričkih stanja klijenata pojedinačno. Dovoljne su informacije dostupne u vremenu potpisivanja ugovora ($t = 0$).

Primer 5.4 (*Klasične polise životnog osiguranja*)**.** Posmatramo polisu životnog osiguranja koja je za i-tog klijenta data novčanim tokovima

$$({}^i\alpha_t)_{t\in\mathbb{T}} = \left(\frac{{}^iA_t}{S_t^0}e_0\right)_{t\in\mathbb{T}} \quad \text{i} \quad ({}^i\beta_t)_{t\in\mathbb{T}} = \left(\frac{{}^iC_t}{S_t^0}e_0\right)_{t\in\mathbb{T}}$$

gde je $\mathbb{T} = \{0, 1, ..., T\}$ dato u godinama. Pretpostavimo da je

$${}^i\alpha_t = {}^i\beta_t = 0 \text{ za } t \text{ veće od nekog } T_i \in \mathbb{T},$$

odn. da je datum isteka ugovora T_i i da je svako ${}^iA_t$ za $t \le T_i$ dato sa

$${}^iA_t(f, b) = {}^ia\,{}^i\delta_t^{\alpha}(b^i) \text{ za sve } (f, b) = (f, b^1, b^2, ...) \in M$$

gde je ${}^ia$ pozitivna konstanta. Neka je $({}^i\beta_t)_{t\in\mathbb{T}}$ definisano analogno sa promenljivima ${}^iC_t, {}^ic$ i ${}^i\delta_t^{\beta}$. Pretpostavimo da je ${}^i\delta_t^{\alpha(\beta)}$ $\mathcal{B}_t^i$-merljivo sa ${}^i\delta_t^{\alpha(\beta)}(b^i) \in \{0, 1\}$ za sve $b^i \in B^i$ ($t \le T_i$).

Portfolio e_0/S_t^0 se može interpretirati kao garantovana isplata novčane jedinice u vremenu t. Ova vrsta ugovora naziva se **nula-kupon obveznica** sa dospećem u t. Njena cena u vremenu $s < t$ označava se sa $p(s, t-s) = \pi_s(e_0/S_t^0)$, gde $t-s$ predstavlja vreme do dospeća i $p(s, 0) := 1$ za sve $s \in \mathbb{T}$.

Razmotrićemo dve vrste klasičnih polisa.

1. Riziko osiguranje. Pretpostavimo da za $t \leq T_i$ vazi ${}^i\delta_t^\beta = 1$ ako i samo ako je i-ti klijent umro u intervalu $(t-1, t]$ i za $t < T_i$ da je ${}^i\delta_t^\alpha = 1$ ako i samo ako je i-ti klijent živ u trenutku t, ali ${}^i\delta_{T_i}^\alpha \equiv 0$. Pretpostavka je da je i-ti klijent živ u trenutku $t = 0$. Ovakav ugovor predstavlja riziko osiguranje sa jednakim godišnjim premijama u iznosu ${}^ia$ i osiguranom sumom ${}^ic$ u slučaju smrti. $\mathbf{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\delta_t^\beta]$ i $\mathbf{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\delta_t^\alpha]$ predstavljaju verovatnoće smrtnosti i preživljavanja tokom intervala $(t-1, t]$, respektivno, i mogu se naći u tablicama mortaliteta. Međunarodna aktuarska oznaka je ${}_{t-1|1}q_x = \mathbf{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\delta_t^\beta]$ $(t > 0)$ i ${}_tp_x = \mathbf{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\delta_t^\alpha]$ $(0 < t < T_i)$ za osobu starosti x (za $t = 0$ je ${}_{-1|1}q_x = 0$ i ${}_0p_x = 1$). Hedž H^* za portfolio ${}^i\alpha_t - {}^i\beta_t$ je za $t < T_i$ dat preko

$$({}^ic \, {}_{t-1|1}q_x - {}^ia \, {}_tp_x) \text{ nula-kupon obveznica sa dospećem u } t,$$

a za $t = T_i$ preko

$${}^ic \, {}_{T_i-1|1}q_x \text{ nula-kupon obveznica sa dospećem u } T_i.$$

2. Mešovito osiguranje. Pretpostavimo da je za $t < T_i$ ${}^i\delta_t^\beta = 1$ ako i samo ako je i-ti klijent umro u intervalu $(t-1, t]$ ali ${}^i\delta_{T_i}^\beta = 1$ ako i samo ako je umro u intervalu $(T_i - 1, T_i]$ ili je živ u trenutku T_i. Dalje, ${}^i\delta_t^\alpha = 1$ ako i samo ako je i-ti klijent živ u trenutku $t < T_i$, ali ${}^i\delta_{T_i}^\alpha \equiv 0$. I ovde pretpostavljamo da je i-ti klijent živ u trenutku $t = 0$. Ovaj ugovor predstavlja mešovito osiguranje za slučaj smrti i doživljenja, koji sačinjavaju godišnje premije ${}^ia$, osigurana suma ${}^ic$ u slučaju da se smrt desila do datuma dospeća i osigurana suma ${}^ic$ u slučaju doživljenja. Hedž H^* za portfolio ${}^i\alpha_t - {}^i\beta_t$ je za $t < T_i$ dat preko

$$({}^ic \, {}_{t-1|1}q_x - {}^ia \, {}_tp_x) \text{ nula-kupon obveznica sa dospećem u } t,$$

a za $t = T_i$ preko

$${}^ic \, ({}_{T_i-1|1}q_x + {}_{T_i}p_x) \text{ nula-kupon obveznica sa dospećem u } T_i.$$

$\diamond$

Zapravo, u slučaju klasičnih polisa, svaki hedžing može biti izveden preko nula-kupon obveznica.

Primer 5.5 (*Unit-linked proizvodi*)**.** Ovi proizvodi su zanimljivi jedino u slučaju da se ne sastoje iz klasičnih polisa i jednostavne fond polise (što je ponekad slučaj u praksi). Zato ćemo pretpostaviti da je polisa data preko novčanog toka premija $({}^i\alpha_t)_{t\in\mathbb{T}}$ kao u primeru 5.4 i novčanog toka osiguranih suma $({}^i\beta_t)_{t\in\mathbb{T}}$ tako da je

$$
{}^i\beta_t(f,b) = {}^i\theta_t \cdot {}^ic\,{}^i\delta_t^\beta(b^i) \text{ za sve } (f,b) \in M,
$$

gde je ${}^i\theta_t \in \Theta^F$ proizvoljan čisto finansijski t-portfolio. Neka su ostale oznake iste kao u uvodu primera 5.4. Možemo posmatrati npr. akcije nekog indeksa ili neku aktivu zajedno sa evropskim prodajnim opcijama koje osiguravaju izvesnu dobit, tj. "unit-linked proizvod sa garancijama". Strategija koja se odnosi na portfolio ${}^i\alpha_t - {}^i\beta_t$ data je sa ${}^ic \cdot \mathbf{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\delta_t^\beta]$ puta replicirajuća strategija za ${}^i\theta_t$ umanjenu za ${}^ia \cdot \mathbf{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\delta_t^\alpha]$ nula-kupon obveznica sa dospećem u vremenu t. Ako je ${}^i\theta_t$ konstantan portfolio, strategija je vrlo jednostavna, pošto portfolio ne mora biti repliciran, već se može direktno kupiti. $\diamond$

Napomena 7. Sada ćemo razmotriti tehničku pretpostavku (K) koja je uvedena na početku ovog poglavlja i koja je dovoljna za konvergenciju (5.20) (definicija 5.2(iii)). U slučaju klasičnih polisa, kao u primeru 5.4, realističan uslov ${}^ic, {}^ia \leq const \in \mathbb{R}^+$ za sve $i \in \mathbb{N}$ implicira (K) za skupove $\{{}^i\alpha_t : i \in \mathbb{N}\}$ i $\{{}^i\beta_t : i \in \mathbb{N}\}$ za sve $t \in \mathbb{T}$. U slučaju unit-linked proizvoda, pretpostavimo da postoji samo konačno mnogo mogućih portfolija ${}^i\theta_t$ za svako $t \in \mathbb{T}$, što je takođe vrlo realistično pošto se često razmatraju akcije samo jednog fonda. Pod ovom pretpostavkom takođe ${}^ic, {}^ia \leq const \in \mathbb{R}^+$ za sve $i \in \mathbb{N}$ implicira (K) za skupove $\{{}^i\alpha_t : i \in \mathbb{N}\}$ i $\{{}^i\beta_t : i \in \mathbb{N}\}$ za sve $t \in \mathbb{T}$. Stoga, uslov (K) ne predstavlja prepreku za praktičnu primenu.

6

Primer vrednovanja na osnovu tržišta

Posmatramo klasične polise životnog osiguranja, opisane u primeru 5.4. Primenjujući aktuarski princip ekvivalencije, tražimo da je

$$\pi_0\left(\sum_{t=0}^{T_i} {}^i c^i \delta_t^\beta \frac{e_0}{S_t^0}\right) = \pi_0\left(\sum_{t=0}^{T_i} {}^i a^i \delta_t^\alpha \frac{e_0}{S_t^0}\right). \tag{6.1}$$

Pretpostavimo da se za određivanje premije koristi minimalna fer cena π iz (5.19), odn. princip vrednovanja

$$\pi_0(\theta) = \pi_0^F(H(\theta)) = \pi_0^F(\mathbf{E}_{\mathbb{B}}[\theta]). \tag{6.2}$$

Tada je prema (4.7)

$$\pi_0(\theta) = \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\langle \mathbf{E}_{\mathbb{B}}[\theta], S_T\rangle}{S_T^0}|\mathcal{F}_0\right].$$

Pošto je

$$\pi_0\left({}^i\delta_t^\beta \frac{e_0}{S_t^0}\right) = \mathbf{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\delta_t^\beta]\cdot \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\left\langle \frac{e_0}{S_t^0}, S_T\right\rangle}{S_T^0}|\mathcal{F}_0\right] = \mathbf{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\delta_t^\beta]\cdot \pi_0\left(\frac{e_0}{S_t^0}\right) = \mathbf{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\delta_t^\beta]\cdot p(0,t),$$

konačno dobijamo

$$\frac{{}^i a}{{}^i c} = \frac{\sum_{t=0}^{T_i} \pi_0\left({}^i\delta_t^\beta \frac{e_0}{S_t^0}\right)}{\sum_{t=0}^{T_i} \pi_0\left({}^i\delta_t^\alpha \frac{e_0}{S_t^0}\right)} = \frac{\sum_{t=0}^{T_i} p(0,t)\cdot \mathbf{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\delta_t^\beta]}{\sum_{t=0}^{T_i} p(0,t)\cdot \mathbf{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\delta_t^\alpha]}, \tag{6.3}$$

gde je $p(0,t)$ cena nula-kupon obveznice, kao što je definisano u primeru 5.4. Važna posledica (6.3) je ta što količnik minimalne fer premije i osigurane sume (${}^i a/{}^i c$) zavisi od cene nula-kupon obveznice (ili kretanja prinosa) u vremenu 0. Kako kamatna stopa varira iz dana u dan, ovo posebno znači da ${}^i a/{}^i c$ varira iz dana u dan i stoga zavisi od dana potpisivanja ugovora (štaviše, zavisi od tačnog vremena). Osiguravajuće kompanije ne određuju cene svakog dana i zbog toga, u ovom modelu, mogu prouzrokovati finansijske rizike.

Kamatna stopa $R(t,\tau)$ za interval $[t,t+\tau]$, pri čemu je $T=t+\tau$ datum dospeća, definisana je sa

$$R(t,\tau) = -\frac{\ln p(t,\tau)}{\tau}. \tag{6.4}$$

Izraz (6.4) pokazuje da kamatne stope (prinosi) i cene nula-kupon obveznica sadrže iste informacije, naime sadašnju vrednost budućih isplata. Na stohastičkim tržištima, $(R(t,\tau))_{t\in\mathbb{T}}$ i $(p(t,\tau))_{t\in\mathbb{T}}$ su stohastički procesi.

Kako su podaci o prinosima dati za bilo koje t na istorijskoj osi koju posmatramo, moguće je izračunati istorijsku vrednost ${}^i a/{}^i c$ za t (koje predstavlja datum potpisivanja odgovarajućeg ugovora) preko (6.4) i (6.3). Time za riziko osiguranje dobijamo

$$\frac{{}^i a}{{}^i c}(t) = \frac{\sum_{\tau=0}^{T_i} p(t,\tau)\,{}_{\tau-1|1}q_x(t)}{\sum_{\tau=0}^{T_i-1} p(t,\tau)\,{}_{\tau}p_x(t)}, \tag{6.5}$$

a za mešovito osiguranje

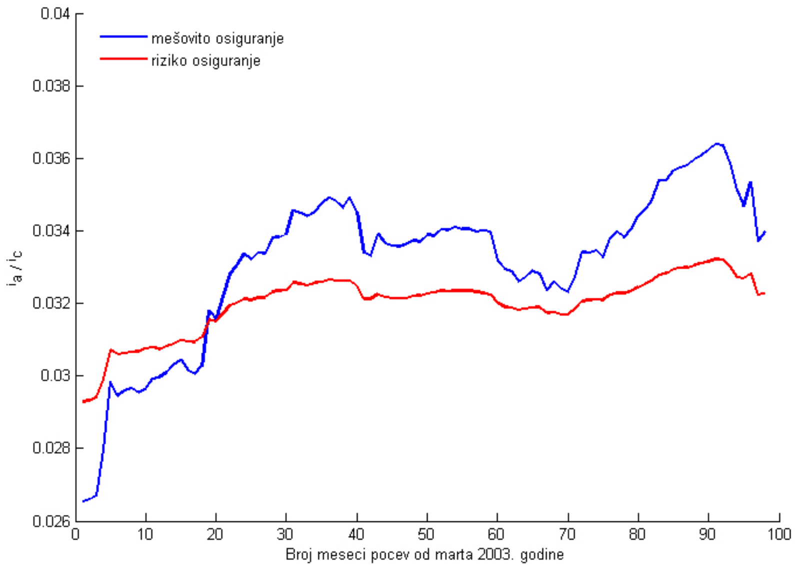
$$\frac{{}^i a}{{}^i c}(t) = \frac{p(t,T_i)\,{}_{T_i}p_x(t) + \sum_{\tau=0}^{T_i} p(t,\tau)\,{}_{\tau-1|1}q_x(t)}{\sum_{\tau=0}^{T_i-1} p(t,\tau)\,{}_{\tau}p_x(t)}. \tag{6.6}$$

Prema podacima sa tržišta Republike Srbije pokazaćemo uticaj vrednovanja na osnovu tržišta za izvestan skup ugovora.

Zbog nedostupnosti podataka o stopama prinosa nula-kupon obveznica, uzete su vrednosti prosečnih ponderisanih stopa prinosa na obveznice stare devizne štednje Republike Srbije po godinama dospeća, u periodu od marta 2003. godine do aprila 2011. godine, na početku svakog meseca [15]. Vremenski period dospeća je podeljen na godine i u intervalu je od 0 do 13 godina, a obveznice dostižu 31. maja u godini dospeća.

Vrednosti ${}_{\tau-1|1}q_x(t)$ $(\tau>0)$ i ${}_{\tau}p_x(t)$ $(0<\tau<T_i)$ uzete su iz tablice mortaliteta 3.1 ili izračunate preko (3.9) i smatraju se konstantnim u vremenu.

Posmatramo sada klijenta starosti $x=40$ i vremensku osu $\mathbb{T}=\{0,1,...,5\}$ (u godinama). Na slici 6.1 prikazani su skalirani količnici (6.5) i (6.6). Radi poređenja, neskalirane vrednosti u početnoj tački (mart 2003. god.) su ${}^i a/{}^i c = 0.1327$ za mešovito i ${}^i a/{}^i c = 0.0029$ za riziko osiguranje. Grafik pokazuje dinamiku količnika i stoga minimalnih fer premija ${}^i a$ ako su osigurane sume ${}^i c$ konstantne. Premije za mešovito osiguranje više podležu uticajima fluktuacija kamatnih stopa nego premije riziko osiguranja. Na primer, minimalna godišnja fer premija ${}^i a$ za 5-ogodišnje mešovito osiguranje sa osiguranom sumom od ${}^i c$ =1 000 000 RSD bila je 152 190 RSD 1. maja 2004. i 174 610 RSD 1. maja 2006. godine. Za riziko osiguranje, sa istom osiguranom sumom, dobija se ${}^i a$ =3 097.40 RSD 1. maja 2004. i 3 262.20 RSD 1. maja 2006. godine (tabela 6).



Slika 6.1: Grafik količnika $^{i}a/^{i}c$ za 5-ogodišnje mešovito životno osiguranje (plava) i riziko osiguranje (crvena), za klijenta starosti 40 godina

Ako pretpostavimo diskretnu tehničku[1] kamatnu stopu R_{tehn}, možemo izračunati tehničke količnike $^{i}a_{tehn}/^{i}c$ računajući tehničku vrednost nula-kupon obveznica, odn. $p_{tehn}(t,\tau) = e^{-\tau R_{tehn}}$ i ubacivajući ih u (6.5) i (6.6). Ako osiguravajuća kompanija naplaćuje tehničke premije $^{i}a_{tehn}$ umesto minimalnih fer premija ^{i}a i ako koristimo princip vrednovanja (5.19), respektivno (6.2), tržišna vrednost posmatrane polise u vremenu t je

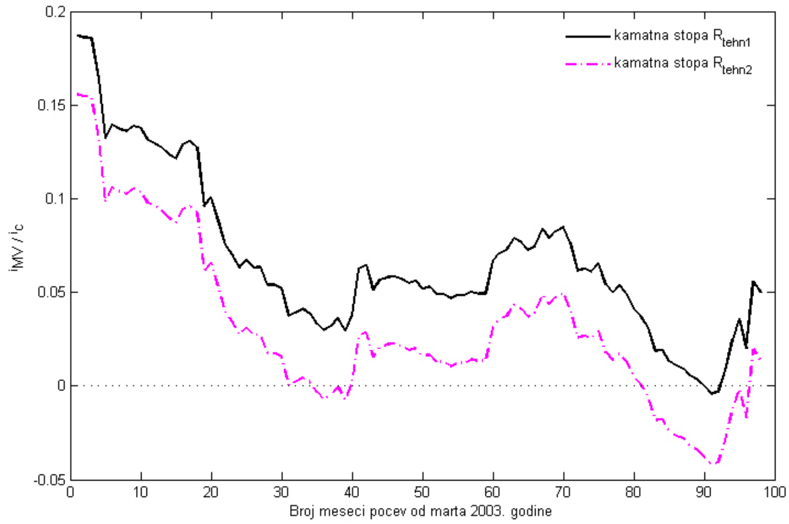
$$^{i}MV(t) = (^{i}a_{tehn} -^{i} a) \cdot \sum_{\tau=0}^{T_i-1} p(t,\tau)\,{}_{\tau}p_x(t) \tag{6.7}$$

na osnovu principa ekvivalencije, odnosno (6.1). To znači da osiguravajuća kompanija može ostvariti dobitak ili gubitak (6.7) u vremenu 0 dok god se posle toga sprovodi odgovarajući menadžment rizika, kao što je opisano u primeru 5.4. Prema tome, tržišna vrednost (6.7) predstavlja meru profita osiguravajuće kompanije, odn. očekivani diskontovani profit od posmatranog ugovora ako zanemarimo sve dodatne troškove.

Slika 6.2 prikazuje kretanje količnika $^{i}MV/^{i}c$ za 5-ogodišnje mešovito osiguranje i tehničku kamatnu stopu $R_{tehn} = 0.03$, što je maksimalna kamatna stopa propisana od strane NBS (crna linija). Na primer, tržišna vrednost ^{i}MV 5-ogodisnjeg mešovitog osiguranja sa osiguranom sumom ^{i}c =1 000 000 RSD bila je 133 200 RSD 1. maja 2004., dok je 1. maja 2006. vredela samo 41 793 RSD. Vrednost je još nepovoljnija u

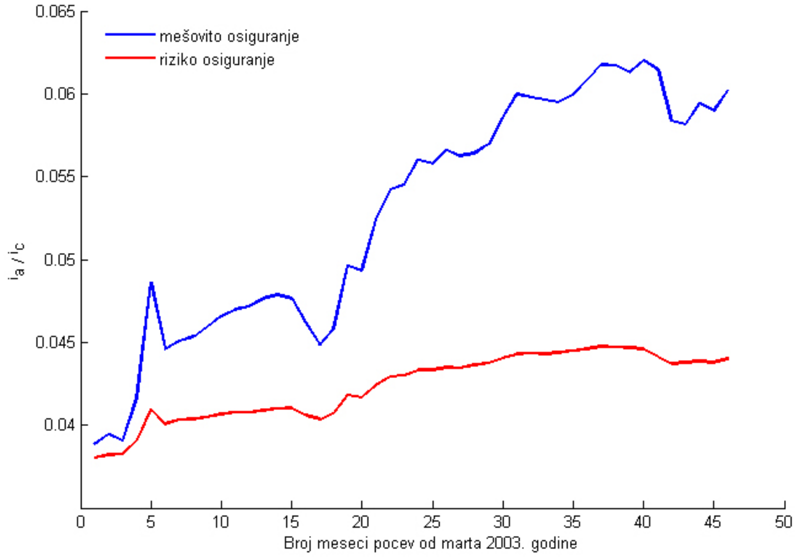
[1]Kamatna stopa prvog reda, videti napomenu 1

slučaju tehničke kamatne stope $R_{tehn} = 0.05$ (ljubičasta linija). 1. maja 2004. takav ugovor vredeo je 87 434 RSD, a 1. maja 2006. –7 287.70 RSD, odnosno ugovor zapravo predstavlja gubitak. Neke tržišne vrednosti 5-ogodišnjeg riziko osiguranja mogu se naći u tabeli 6.

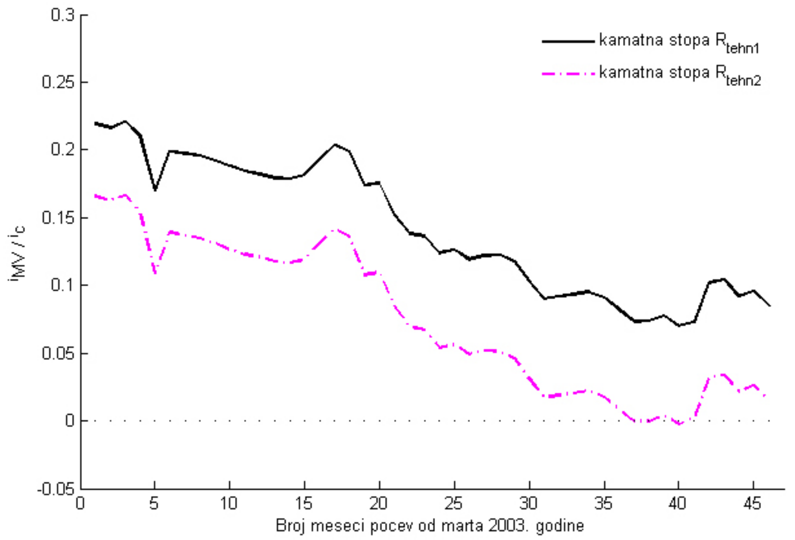


Slika 6.2: Grafik količnika ${}^iMV/{}^ic$ za 5-ogodišnje mešovito životno osiguranje sa tehničkom kamatnom stopom od 0.03 (crna) i 0.05 (ljubičasta), za klijenta starosti 40 godina

Sva pomenuta izračunavanja izvedena su i za 10-ogodišnje riziko i mešovito osiguranje i neki rezultati se mogu videti u tabeli 6. Odgovarajući grafici dati su na slikama 6.3 i 6.4. Minimalna fer premija ${}^ia$ za 10-ogodišnje mešovito osiguranje sa osiguranom sumom ${}^ic$ =1 000 000 RSD bila je 59 572 RSD 1. maja 2004. i 76 609 RSD 1. maja 2006. godine. Za riziko osiguranje sa istom osiguranom sumom, dobijamo ${}^ia = 4\ 101.60$ RSD za 1. maj 2004. i 4 466 RSD za 1. maj 2006. godine. Možemo primetiti da ugovori jako zavise od strukture prinosa.



Slika 6.3: Grafik količnika $^{i}a/^{i}c$ za 10-ogodišnje mešovito životno osiguranje (plava) i riziko osiguranje (crvena), za klijenta starosti 40 godina



Slika 6.4: Grafik količnika $^{i}MV/^{i}c$ za 10-ogodišnje mešovito životno osiguranje sa tehničkom kamatnom stopom od 0.03 (crna) i 0.05 (ljubičasta), za klijenta starosti 40 godina

	1. maj 2004.		1. maj 2006.
Mešovito osiguranje - 5 godina			
godišnja minimalna fer premija ^{i}a	152 190		174 610
tržišna vrednost ^{i}MV $(R_{tehn} = 0.03)$	133 200		41 793
tržišna vrednost ^{i}MV $(R_{tehn} = 0.05)$	87 434		-7 287.70
tehnička premija $^{i}a_{tehn}$ $(R_{tehn} = 0.03)$		183 880	
tehnička premija $^{i}a_{tehn}$ $(R_{tehn} = 0.05)$		172 990	
Riziko osiguranje - 5 godina			
godišnja minimalna fer premija ^{i}a	3 097.40		3 262.20
tržišna vrednost ^{i}MV $(R_{tehn} = 0.03)$	1 006.30		336.30
tržišna vrednost ^{i}MV $(R_{tehn} = 0.05)$	662.79		-32.09
tehnička premija $^{i}a_{tehn}$ $(R_{tehn} = 0.03)$		3 336.80	
tehnička premija $^{i}a_{tehn}$ $(R_{tehn} = 0.05)$		3 255	
Mešovito osiguranje - 10 godina			
godišnja minimalna fer premija ^{i}a	59 572		76 609
tržišna vrednost ^{i}MV $(R_{tehn} = 0.03)$	181 620		77 482
tržišna vrednost ^{i}MV $(R_{tehn} = 0.05)$	119 050		4 121.80
tehnička premija $^{i}a_{tehn}$ $(R_{tehn} = 0.03)$		86 352	
tehnička premija $^{i}a_{tehn}$ $(R_{tehn} = 0.05)$		77 127	
Riziko osiguranje - 10 godina			
godišnja minimalna fer premija ^{i}a	4 101.60		4 466
tržišna vrednost ^{i}MV $(R_{tehn} = 0.03)$	3 715.40		1 458.80
tržišna vrednost ^{i}MV $(R_{tehn} = 0.05)$	2 487.30		18.70
tehnička premija $^{i}a_{tehn}$ $(R_{tehn} = 0.03)$		4 649.50	
tehnička premija $^{i}a_{tehn}$ $(R_{tehn} = 0.05)$		4 468.40	

Tabela 6.1: Neke vrednosti ugovora za klijenta starosti 40 godina, pri fiksiranoj osiguranoj sumi od 1 000 000 RSD

7

Zaključak

Princip proizvoda mera preko kojeg se određuje minimalna fer cena je opšte prihvaćeni princip vrednovanja u modernoj matematici životnog osiguranja. U ovom radu pokazano je da se on može bazirati na skupu od osam principa ili sedam matematičkih pretpostavki koje čine okvir modela i preko kojih se određuje jedinstvena minimalna fer cena. Jedan od njih, diverzifikacija, potreban je zbog konvergencije bilansa (koja se prenosi iz klasičnog slučaja) pri određenim hedževima koji se mogu finansirati preko tih minimalnih cena. Kao i u klasičnom slucaju, zakon velikih brojeva ima glavnu ulogu. Zapravo, samo dva principa nisu klasični, a to su potreba za kompletnim tržištem bez mogućnosti arbitraže i princip nearbitražnog određivanja cena. Primeri u poslednjem poglavlju kao i primeri za hedžing, potvrdili su značaj pricipa vrednovanja baziranih na tržištu i značaj metoda finansijskog hedžingovanja u modernoj praksi matematike životnog osiguranja.

Iako je model razmatran u ovom radu ograničen na konačan broj vremenskih koraka, pristup je prilično opšti u smislu da ne predlaže posebne modele za dinamiku hartija od vrednosti ili biometričkih događaja. Koncept ugovora životnog osiguranja uveden je na veoma opšti način i prikazani metodi nisu ograničeni na posebnu vrstu ugovora. Pored toga, svi metodi i rezultati u ovom radu se mogu primeniti na neživotno osiguranje dok god su pretpostavke pogodne za slučajeve koji se razmatraju.

Buduća istraživanja se trebaju baviti adaptacijom rezultata za modele sa neprekidnim vremenom.

Dodatak

Za generisanje grafika 6.1, 6.2, 6.3, 6.4 i izračunavanje određenih premija korišćen je sledeći kod za programski paket MATLAB:

```
function osiguranje(d,R,Q,Pr,x,Rtehn1,Rtehn2,vreme,os)
%d - duzina ugovora, najvise 13 godina
%R - matrica prinosa
%Q - verovatnoce smrtnosti
%Pr - verovatnoce prezivljavanja
%x - starost klijenta
%Rtehn1, Rtehn2 - tehnicke kamatne stope
%vreme - odredjeni datum za koji se racunaju cene
%os - osigurana suma
%MVpoC1(2) - odnosi trzisne vrednosti za mesovito osiguranje

clf reset
hold on
v=min(98,(14-d)*12-2);%maximalan broj meseci koji razmatramo -
(14(poslednja 2016.godina) - d) *12 - 2(jer u prvoj godini ima 10 meseci)
for j=1:v
   for k=1:(d+1)
      Cene(j,k)=exp(-0.01*R(j,ceil(j/12)+k-1)*(k-1));
      Cenetehn1(k)=exp(-Rtehn1*(k-1));
      Cenetehn2(k)=exp(-Rtehn2*(k-1));
   end
end

q(1)=0;
q(2)=Q(x+1);
p(1)=1;
p(2)=Pr(x+1);
for k=3:(d+1)
   q(k)=q(k-1)*Pr(x+k-2)*Q(x+k-1)/Q(x+k-2);
   p(k)=p(k-1)*Pr(x+k-1);
end

odnostehn1riz=(Cenetehn1(1:(d+1))*q')/(Cenetehn1(1:d)*p(1:d)');
odnostehn2riz=(Cenetehn2(1:(d+1))*q')/(Cenetehn2(1:d)*p(1:d)');
odnostehn1mes=(Cenetehn1(d+1)*p(d+1)+(Cenetehn1(1:(d+1))*q'))/(Cenetehn1(1:d)*p(1:d)');
odnostehn2mes=(Cenetehn2(d+1)*p(d+1)+(Cenetehn2(1:(d+1))*q'))/(Cenetehn2(1:d)*p(1:d)');
for j=1:v
   odnosriz(j)=(Cene(j,1:(d+1))*q')/(Cene(j,1:d)*p(1:d)');
   odnosmes(j)=(Cene(j,d+1)*p(d+1)+(Cene(j,1:(d+1))*q'))/(Cene(j,1:d)*p(1:d)');
   MVpoC1riz(j)=(odnostehn1riz-odnosriz(j))*(Cene(j,1:d)*p(1:d)');
   MVpoC2riz(j)=(odnostehn2riz-odnosriz(j))*(Cene(j,1:d)*p(1:d)');
```

```
   MVpoC1mes(j)=(odnostehn1mes-odnosmes(j))*(Cene(j,1:d)*p(1:d)');
   MVpoC2mes(j)=(odnostehn2mes-odnosmes(j))*(Cene(j,1:d)*p(1:d)');
end

figure(1)
plot(1:v,0.8*odnosmes,'-b',1:v,10*odnosriz,'-r','LineWidth',2);
xlabel('Broj meseci pocev od marta 2003.  godine');
ylabel('$^ia/^ic$');
legend('mešovito osiguranje','riziko osiguranje',2);
legend('boxoff');

figure(2)
plot(1:v,MVpoC1mes,'-k',1:v,MVpoC2mes,'-.m',1:v,0,'-k','LineWidth',2)
xlabel('Broj meseci pocev od marta 2003.  godine');
ylabel('$^iMV/^ic$');
legend('kamatna stopa R$_{tehn1}$','kamatna stopa R$_{tehn2}$',1);
legend('boxoff');

premijariz=dobitak*(Cene(vreme,1:(d+1))*q')/(Cene(vreme,1:d)*p(1:d)');
premijames=dobitak*(Cene(vreme,d+1)*p(d+1)+Cene(vreme,1:(d+1))*q')/
(Cene(vreme,1:d)*p(1:d)');
premijatehn1riz=os*odnostehn1riz;
premijatehn2riz=os*odnostehn2riz;
premijatehn1mes=os*odnostehn1mes;
premijatehn2mes=os*odnostehn2mes;

disp('Premija za riziko osiguranje je'), disp(premijariz),
disp('a za mesovito osiguranje'), disp(premijames)
disp('na datum t='), disp(vreme)
disp('i za osiguranu sumu od'), disp(os), disp('dinara')

disp('Za riziko osiguranje tehnicka1 premija je'), disp(premijatehn1riz),
disp('a tehnicka2 premija'), disp(premijatehn2riz);
disp('Za mesovito osiguranje tehnicka1 premija je'), disp(premijatehn1mes),
disp('a tehnicka2 premija'), disp(premijatehn2mes);

MVmes1=os*MVpoC1mes(vreme);
MVmes2=os*MVpoC2mes(vreme);
MVriz1=os*MVpoC1riz(vreme);
MVriz2=os*MVpoC2riz(vreme);

disp('Trzisna vrednost ugovora mesovitog zivotnog osiguranja za vreme t=')
disp(vreme)
disp('osiguranu sumu od'), disp(os), disp('dinara je')
disp(MV1), disp('za tenhicku kamatnu stopu'), disp(Rtehn1)

disp('i'), disp(MV2), disp('za tehn kamatnu stopu'), disp(Rtehn2);
```

Literatura

[1] Brzezniak Z., Zastawniak T., *Basic Stochastic Processes*, Springer, 2002.

[2] Capinski M., Kopp E., *Measure, Integral and Probability*, London: Springer-Verlag, 2005.

[3] Dalang R. C., Morton A., Willinger W., *Equivalent Martingale Measures and No-Arbitrage in Stochastic Securities Market Models*, Stochastics and Stochastics Reports 29 (2), 185-201, 1990.

[4] Delbaen F., *The Dalang-Morton-Willinger Theorem*, ETH Zürich, 1999. http://www.math.ethz.ch/delbaen/ftp/teaching/DMW-Theorem.pdf

[5] Delbaen F., Schachermayer W., *Non-Arbitrage and the Fundamental Theorem of Asset Pricing: Summary of Main Results*, Introduction to Mathematical Finance, "Proceedings of Symposia in Applied Mathematics" of the AMS, Vol. 57, pp. 49-58, 1999.

[6] Fischer T., *A law of large numbers approach to valuation in life insurance*, Insurance: Mathematics and Economics 40, 35-57, 2007.

[7] Luenberger D. G., *Investment Science*, Oxford University Press, 1998.

[8] Møller T., Steffensen M., *Market-Valuation Methods in Life and Pension Insurance*, International Series on Actuarial Science, Cambridge University Press, 2007.

[9] Norberg R., *Basic Life Insurance Mathematics*, Lecture Notes, Laboratory of Actuarial Mathematics, University of Copenhagen, 2002.

[10] Pilipović S., Seleši D., *Teorija mera, skripte*, Novi Sad, 2007.

[11] Promislow S. D., *Fundamentals of Actuarial Mathematics*, Wiley, 2006.

[12] Rogers L. C. G., *Equivalent martingale measures and no-arbitrage*, Stochastics and Stochastics Reports, 1994.

[13] Taqqu M. S., Willinger W., *The Analysis of Finite Security Markets Using Martingales*, Advances in Applied Probability 19, 1-25, 1987.

[14] webrzs.stat.gov.rs/WebSite/repository/documents/00/00/17/33/Mortalitet_2001-2003.pdf
stanje na dan 27/03/2011

[15] www.nbs.rs/internet/cirilica/80/index.html
stanje na dan 20/05/2011

Kratka biografija

Tijana Radivojević je rođena u Kraljevu 23. maja 1986. godine. Završila je Osnovnu školu Sutjeska u Raški kao đak generacije, a potom Gimnaziju u Raški, prirodno-matematički smer, kao nosilac Vukove diplome. 2005. godine upisuje studije matematike finansija na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, koje završava u oktobru 2009. godine sa prosečnom ocenom 9.88. Iste godine na istom fakultetu upisuje master studije primenjene matematike, modul finansijska matematika. Zaključno sa oktobarskim ispitnim rokom 2010. godine, polaže sve predviđene ispite sa prosečnom ocenom 9.86.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj: **RBR**	
Identifikacioni broj: **IBR**	
Tip dokumentacije: **TD**	monografska dokumentacija
Tip zapisa: **TZ**	tekstualni štampani materijal
Vrsta rada: **VR**	master rad
Autor: **AU**	Tijana Radivojević
Mentor: **ME**	dr Dora Seleši
Naslov rada: **NR**	Primena zakona velikih brojeva u životnom osiguranju
Jezik publikacije: **JP**	srpski (latinica)
Jezik izvoda: **JI**	s/en
Zemlja publikovanja: **ZP**	Republika Srbija
Uže geografsko područje: **UGP**	Vojvodina
Godina: **GO**	2011

Izdavač: **IZ**	autorski reprint
Mesto i adresa: **MA**	Novi Sad, Trg D. Obradovića 4
Fizički opis rada: **FOR**	(7/58/13/2/2/4/0) (broj poglavlja/strana/lit.citata/tabela/slika/grafika/priloga)
Naučna oblast: **NO**	matematika
Naučna disciplina: **ND**	primenjena matematika
Predmetne odrednice, ključne reči (**PO, UDK**):	zakon velikih brojeva, ekvivalentna martingalna mera, odsustvo arbitraže, klasična matematika životnog osiguranja, moderna matematika životnog osiguranja, određivanje cena
Čuva se: **ČS**	U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku
Važna napomena: **VN**	
Izvod (**IZ**):	U radu se izvodi metod za određivanje cena polisa životnog osiguranja pod pretpostavkom da je diverzifikacija biometričkih rizika moguća, za šta je potrebna primena jakog zakona velikih brojeva. Pritom, osiguravajuća kompanija hedžingovanjem može postići da bilans po polisi konvergira ka nuli skoro sigurno za rastući broj klijenata. Pod izvesnim pretpostavkama, rezultujuća minimalna fer cena opšteg ugovora životnog osiguranja se jednistveno određuje preko proizvoda date ekvivalentne martingalne mere finansijskog tržišta sa merom verovatnoće prostora biometričkih stanja. Dati su primeri za određivanje cena nekih vrsta ugovora, na osnovu podataka sa finansijskog tržišta Republike Srbije.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: **DP**	14.01.2011.
Datum odbrane: **DO**	septembar 2011.
Članovi komisije: **KO**	
Predsednik:	dr Nataša Krejić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član:	dr Danijela Rajter-Ćirić, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Mentor:	dr Dora Seleši, docent Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Serial number: **SNO**	
Identification number: **INO**	
Document type: **DT**	monograph type
Type of record: **TR**	printed text
Contents code: **CC**	master's thesis
Author: **AU**	Tijana Radivojević
Mentor: **ME**	dr Dora Seleši, Assistant Professor
Title: **TI**	Application of law of large numbers in life insurance
Language of text: **LT**	Serbian (Latin)
Language of abstract: **LA**	s/en
Country of publication: **CP**	Republic of Serbia
Locality of publication: **LP**	Vojvodina
Publication year: **PY**	2011

Publisher: **PU**	author's reprint
Publication place: **PP**	Novi Sad, Trg D. Obradovića 4
Physical description: **PD**	(7/58/13/2/2/4/0) (chapters/pages/literature/tables/pictures/ graphs/add.lists)
Scientific field: **SF**	Mathematics
Scientific discipline: **SD**	Applied Mathematics
Subject, key words (**SKW**):	law of large numbers, equivalent martingale measure, non-arbitrage, classical life insurance mathematics, modern life insurance mathematics, valuation
Holding data: **HD**	In library of Department of Mathematics and Informatics
Note: **N**	

Abstract (**AB**):

This thesis is devoted to the derivation of valuation method for pricing of life insurance policies, supposing that diversification of biometric risks is manageable, for which Strong Law of Large Numbers is used. Thereby, life insurance company can accomplish that mean balance per contract converges to zero almost surely for increasing number of clients. Under certain assumptions, the resulting minimal fair price of a general life insurance contract is uniquely determined by product of the given equivalent martingale measure of financial market with the probability measure of the biometric state space. Using data from financial market of Republic of Serbia, examples for pricing of some types of contracts are given.

Accepted on Scientific board on: **AS**	14.01.2011.
Defended: **DE**	September 2011
Thesis Defend board: **DB**	
President:	dr Nataša Krejić, Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member:	dr Danijela Rajter-Ćirić, Associate Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Mentor:	dr Dora Seleši, Assistant Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad