UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Tijana Mandić

Napredni pristup merenja operativnog rizika

-master rad-

Novi Sad, 2013.

Predgovor

Razvoj savremenog bankarstva i privrede povećava izloženost različitim vrstama rizika u poslovanju. Blagovremeno identifikovanje svih vrsta rizika i adekvatne mere zaštite postaju izuzetno važan faktor uspešnosti poslovanja. Shodno tome, rizici, kao mere verovatnoće slučajnog događaja, poslednjih deset godina su jedna od najaktuelnijih tema u debatama nučne i stručne javnosti.

Pre samo nekoliko godina kreditni i tržišni rizik su predstavljali osnovni izvor rizika u finansijskim institucijama, dok je operativni rizik bio razmatran kao deo ostalih rizika. Osnovni razlog je taj što su operacije unutar bankarskog sektora do pre dvadesetak godina bile podvrgnute brojnim restrikcijama, relativno jednostavnim vođenjem trgovine, ograničenom raznovrsnosti poslovanja. Prema tome, značaj operativnog rizika je bio predstavljen kao manje bitan, sa ograničenim uticajem na odlučivanje o poslovanju i raspoređivanju kapitala, u poređenju sa kreditnim i tržišnim rizikom. Međutim, ozbiljne promene na globalnom finansijskom tržištu u poslednje dve decenije prouzrokovale su primetne promene profila bankarskog rizika. Globalni finansijski sistem karakteriše globalizacija i deregulacija, koje teže da efektivno ujedine razdvojeno svetsko finansijsko tržišta u ujedinjenu, jedinstvenu mrežu. Takođe, karakterišu ga i ubrzan tehnološki razvoj i revolucionarni napredak informacionih mreža, kao i povećan broj finansijskih usluga i proizvoda. Shodno prethodno navedenom, danas, ova vrsta rizika je prisutna u skoro svim segmentima poslovnih aktivnosti, što dovoljno govori o značaju koji ima i potrebi za upravljanjem njime. Permanentan rastući trend prisutnosti operativog rizika u poslovanju je realnost sa kojom se suočavaju, ne samo bankarske institucije, već i subjekti u privrednom i vanprivrednom sektoru, što problematiku operativnog rizika čini izuzetno važnom i aktuelnom. Upravljanje ovom vrstom rizika, kao posebnom i veoma kompleksnom kategorijom, veliki je izazov za razvijene bankarske industrije, kao i za privredne sisteme.

Osnovni cilj i motiv izrade ovog rada je predstavljanje upotrebe matematičkih modela i statističkih alatki pri modeliranju operativnog rizika. Najveći akcenat je, kako što i sam naziv master rada kaže, stavljen na predstavljanje Naprednog pristupa merenja operativnog rizika.

U uvodnom delu ovog rada biće predstavljene osnovne definicije i pojmovi iz oblasti verovatnoće i statistike koji će biti korišćenji u okviru rada, kao i neke osobine i teoreme vezane za njih.

U okviru drugog dela rada će biti predstavljena opšteprihvaćena definicija operativnog rizika, kao i istorijski osvrt na rad Bazelskog komiteta za bankarski nadzor, kao institucije koja se ozbiljno bavi, između ostalog, problematikom vezanom za operativni rizik, čije propisane ragulative iz ove oblasi koristi veliki broj zemalja širom sveta.

Osnovni cilj modeliranja određene pojave je pronalaženje adekvatnog modela koji opisuje posmatranu pojavu na osnovu dostupnih podataka vezanih za nju. U kontekstu modeliranja operativnog rizika, potrebno je prvenstveno pronaći odgovarajući model koji opisuje frekvenciju događaja koji prouzrokuju operativni gubitak, kao i visinu operativnog gubitka koji je prouzrokovan pojavom datog događaja. Stoga, u trećem delu su navedeni neki osnovni modeli koji opisuju frekvenciju i visinu gubitka, a koji se koriste u praksi pri modeliranju ove vrste rizika. U toku pronalaženju odgovarajućeg modela, veoma je bitno izvršiti dobru ocenu parametara koji određuju osobine modela, a zatim i testirati da li dobijeni model dovoljno dobro opisuje dopustiv skup podataka vezanih za posmatranu pojavu. Zbog toga, u poslednja dva dela trećeg odeljka ovog rada navedene su metode ocenjivanja parametara raspodele i testovi sagalasnosti.

Krajnji cilj modeliranja operativnog rizika je dobijanje ukupnog kapitalnog zahteva za operativni rizik. Shodno tome, u četvrtom delu ovog rada će biti predstavljen model agregatnog gubitka, kao i metode izračunavanja raspodele agregatnog gubitka. Zatim će biti pirkazana najčešće korišćena u praksi mera za izračunavanje kapitalnog zahteva, a to je VaR.

U poslednjem delu će piti prikazana dva osnovna pristupa modeliranja operativnog rizika, pristup raspodele gubitka i pristup scenario analize, kao i njihovo integrisanje sa ciljem što preciznijeg određivanja ukupne visine kapitalnog zahteva za operativni rizik.

Ovom prilikom bih htela da se zahvalim svim profesorima na saradnji i ukazanom znanju tokom studija. Posebno se zahvaljujem svom mentoru, prof. dr Nataši Krejić, na ukazanom poverenju, kao i za stručno usmeravanje i izvarednoj saradnju pri izradi ovog rada.

U Novom Sadu, 2013. Tijana Mandić

Sadržaj:

1. Uvod

Kao što je navedeno u predgovoru, u ovom delu rada će biti predstavljene osnovne definicije, pojmovi i teoreme iz oblasti verovatnoće i statistike koje će se koristiti u toku rada.

1.1 Osnovni pojmovi, definicije i teoreme

Model operativnog rizika je skup funkcija koje predstavljaju neizvesne buduće događaje. Neizvesnost se ogleda u pogledu mogućnosti da se pojavi događaj, vremena pojavljivanja, kao i visine gubitka koji prouzrokuje. Ta neizvesnost se predstavlja putem verovatnoće, stoga model merenja operativnog rizika je model verovatnoće.

Shodno prethodno navedenom, pri modeliranju operativnog rizika koriste se pojmovi iz oblasti verovatnoće i statistike, koji će biti predstaljeni u nastavku.

<u>Aksioma 1.1</u>: *Neka je Ω skup elementarnih događaja i F σ-polje nad Ω. Funkcija $P: F \to [0,1]$ se zove verovatnoća na prostoru (Ω, F), ako zadovoljava uslove:*

1. $P(\Omega) = 1$,
2. Ako $\{A_i\}_{i \in N} \subseteq F, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j,\ \ i, j = 1, 2, \ldots$ onda

$$P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Skup Ω je skup svih mogućih ishoda, elementarnih događaja, nekog eksperimenta. Slučajan događaj A_i , i = 1, 2,.., je podskup skupa elementarnih događaja Ω. Svaki od događaja se sastoji od elementarnih događaja, koji imaju svojstvo kojim se dati događaj definiše.
Prostor verovatnoća je uređena trojka (Ω, F, P).

<u>Definicija 1.1</u>: *Preslikavanje $X: \Omega \to R$ je slučajna promenljiva nad prostorom verovantoća (Ω, F, P), ako $X^{-1}(S) \in F$ za svako $S \in B$, gde je $B = B(\mathbb{R})$ Borelovo σ-polje.*

<u>Definicija 1.2</u>: *Funkcija $F_X(x): \mathbb{R} \to [0,1]$ definisana sa*

$$F_X(x) = P_X\big((-\infty, x)\big) = P\{\omega \in \Omega | X(\omega) < x\},$$

naziva se funkcija raspodele slučajne promenljive X.

Funkcija raspodele, $F_X(x)$ ili $F(x)$, slučajne promenljive X predstavlja verovatnoću događaja sastavljenog od onih ishoda ω čija je slika $X(\omega)$ manja ili jednaka datoj vrednosti x. Kraće se može zapisati na sledeći način, $F_X(x) = P\{X \leq x\}$.
Funkcija raspodele postoji i jedinstvena je za svaku slučajnu promenljivu.

<u>Teorema 1.1</u>: *Funkcija raspodele $F_X(x)$ ima sledeće osobine:*

- $F(x)$ *je neopadajuća funkcija.*

- $F(x)$ *je neprekidna sa leve strane.*
- $lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
- $lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
- $P\{a \leq X \leq b\} = F_X(b) - F_X(a),\ za\ svako\ a, b \in \mathbb{R}\ \ i\ a < b.$

<u>Definicija 1.3</u>: *Funkcija preživljavanja* $\bar{F}_X(x)$, *ili* $\bar{F}(x)$, *slučajne promenljive X predstavlja verovatnoću događaja sastavljenog od onih ishoda ω čija je slika* $X(\omega)$ *veća od date vrednosti x.*
Kraće se može zapisati na sledeći način, $\bar{F}_X(x) = P\{X > x\}$.

<u>Definicija 1.4</u>: *Slučajna promenljiva X je diskretna (diskretnog tipa), ako postoji prebrojiv skup brojeva* R_X *takav da je* $P\{X \in \bar{R}_X\} = 0$, *odnosno da je skup slika od X najviše prebrojiv skup.*

<u>Definicija 1.5</u>: *Funkcija verovatnoće,* $p_X(x)$ *ili* $p(x)$, *diskretne slučajne promenljive X predstavlja verovatnoću događaja* $\{X = x\}$, *tj.* $p_X(x) = P\{X = x\}$.
Funkcija raspodele i funkcija preživljavanja slučajne promenljive diskretnog tipa imaju sledeći oblik: $F(x) = \sum_{y \leq x} p(y)$ i $\bar{F}(x) = \sum_{y > x} p(y)$, respektivno.

<u>Definicija 1.6</u>: *Slučajna promenljiva X je apsolutno neprekidnog tipa, ako postoji nenegativna integrabilna funkcjia* $f_X(x), -\infty < x < \infty$, *takva da za svaki skup* $S \in B(\mathbb{R})$ *važi*

$$P\{X \in S\} = \int_S f_X(x) dx.$$

<u>Definicija 1.7</u>: *Funkcija gustine,* $f_X(x)$ *ili* $f(x)$, *je prvi izvod (tj. nagib) funkcije raspodele, ekvivaletno, suprotna vrednost prvog izvoda funkcije preživaljavanja, tj.*

$$f(x) = F'(x) \ \ ili \ \ f(x) = -\bar{F}'(x).$$

Funkcija gustine je definisana samo za vrednosti u kojma je funkcija raspodele diferencijabilna.
Funkciju raspodele i funkcija preživljavanja neprekidne slučajne promenljive imaju sledeći oblik:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\, dy \quad \text{i} \quad \bar{F}_X(x) = \int_{x}^{\infty} f_X(y)\, dy.$$

<u>Definicija 1.8</u>: *Hazard stopa, ili stopa propasti, u oznaci* $h_X(x)$ *ili* $h(x)$, *predstavlja odnos funkcije gustine i funkcije preživljavanja u svim tačkama za koje je funkcija gustine definisana, tj.*

$$h(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)}.$$

<u>Definicija 1.9</u>: *Momenat reda k,* $E[X^k]$ *ili* m_k, $k \in \mathbb{Z}$, *slučajne promenljive X, je očekivana vrednost k-tog stepena slučajne promenljive X.*
Prvi momenat se naziva očekivanje slučajne promenljive *X* i obeležava sa m.

<u>Definicija 1.10</u>: *Centralni momenat reda k slučajne promenljive X,* $E[(X - m)^k]$ *ili* $\mu_k, k \in \mathbb{Z}$, *je očekivana vrednost k-tog stepena odstupanja vrednosti promenljive od njenog očekivanja.*

Centrali momenat reda *k* se računa pomoću sledećih formula:
$\mu_k = E[(X-m)^k] = \int_{-\infty}^{\infty}(X-m)^k f(x)dx$, ako je slučajna promenljiva *X* neprekidnog tipa,
$\mu_k = E[(X-m)^k] = \sum_j \left(x_j - m\right)^k p\left(x_j\right)$, ako je slučajna promenljiva *X* diskretnog tipa.
Drugi centralni momenat se naziva varijansa ili disperzija, i označava sa σ^2.
Kvadratni koren varijanse se naziva standardna devijacija i označava sa σ.

Definicija 1.11: *Koeficijent asimetrije, K_A, predstavlja odnos trećeg centralnog momenta i korena kuba drugog centralnog momenta, tj.* $K_A = \frac{\mu_3}{{\mu_2}^{3/2}}$.
Ovaj koeficijent predstavlja meru asimetrije raspodele slučajne promenljive. Ako je:
- $K_A = 0$, raspodela je simetričan,
- $K_A > 0$, raspodela je asimetrična u desno,
- $K_A < 0$, raspodela je asimetrična u levo.

Definicija 1.12: *Koeficijent spljoštenosti, K_S, predstavlja odnos četvrog centralnog momenta i kvadrata drugog centralnog momenta, tj.* $K_S = \frac{\mu_4}{{\mu_2}^2}$.
Ovaj koeficijent predstavlja meru spljoštenosti raspodele slučajne promenljive Ako je:
- $K_S = 3$, raspodela ima normalnu spljoštenost (mezokurtična raspodela),
- $K_S > 3$, raspodela je više izdužena u odnosu na normalnu raspodelu (leptokurtična raspodela),
- $K_S < 3$, raspodela više spljoštena u odnosu na normalnu raspodelu (platikurtična raspodela).

Definicija 1.13**:** *Za slučajnu promenljivu X, kvantil reda p,* $p \in (0,1)$*, je vrednost slučajne promenljive M_p, sa osobinom*

$$P\{X < M_p\} \leq p \;\; i \;\; P\{X > M_p\} \leq 1 - p.$$

Kvatnil reda *p* ima osobinu da 100*p*% vrednosti slučajne promenljive *X* je manje od M_p, a 100(1-*p*)% vrednosti je veće od M_p.

Definicija 1.14: *Neka je X slučajna promenljiva.*
Funkcija generatrisa momenta je funkcija $M_X(t) = E\left(e^{itx}\right)$*, koja je definisana za svako t za koje postoji dato očekivanje.*
Funkcija generatrisa verovanoće je funkcija $P_X(z) = E(z^t)$*, koja je definisana za svako z za koje dato očekivanje postoji.*

Funkcija generatrisa momenta se najčešće koristi u slučaju kada je *X* neprekidna slučajna promenljiva, a funkcija generatrisa verovatnoće kada je *X* diskretna slučajna promenljiva. Obe funkcije određuju jedinstveno slučajnu promenljivu *X*, tj. jedinstvene su za svaki tip slučajne promenljive.

<u>*Teorema 1.2*</u>: *Neka je* $S_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$*, gde su slučajne promenljive* $X_1, X_2, \dots, X_k$ *međusobno nezavisne. Tada se raspodela slučajne promenljive* S_k *može definisati pomoću funkcije generatrise momenta i funkcije generatrise verovatnoće na sledeći način:*

$$M_{S_k}(t) = \prod_{j=1}^{k} M_{X_j}(t) \ \ i \ \ P_{S_k}(z) = \prod_{j=1}^{k} P_{X_j}(z).$$

<u>*Definicija 1.15*</u>: *Karakteristična funkcija slučajne promenljive X, u oznaci* $\varphi_X(t)$*, je funkcija* $\varphi_X: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *definisana na sledeći način:*

$$\varphi_X(t) = E\left[e^{itx}\right], \qquad t \in \mathbb{R}, i^2 = -1.$$

U okviru rada koristiće se sledeće oznake:

$\mathbb{Z}$ - skup celih brojeva,

$\mathbb{N}$ - skup prirodnih brojeva,

$\mathbb{R}$ - skup realnih brojeva,

$\mathbb{C}$ - skup kompleksnih brojeva.

2. Operativni rizik

U ovom delu rada će biti predstaljena najšire prihvaćena definicija pojma operativni rizik, definisana od strane Bazelskom komiteta za bankarski nadzor. Zatim će biti naveden kratak istorijat Bazelskog komiteta, koji je vezan za razvoj oprativnog rizika kao jednog od tri osnovna tipa raizika u bankarstvu.

2.1 Definicija operativnog rizika

Ne postoji jedinstvena definicija pojma rizik. Definicija zavisi od konteksta i svrhe za koju neko želi da definiše ovaj pojam. Shodno tome, u kontekstu operativnog rizika, rizik se definiše kao mera verovatnoće da se desi gubitak. Na taj način definisan rizik se doživljava kao verovatnoća negativne devijacije, tj. izražava opasnost da efekti budućih ishoda događaja odstupaju od očekivanih ishoda na negativan način.

Zbog prirode ove vrste rizika, ne postoji njegova opšte prihvaćena definicija. Definicija koju je usvojio Bazelski komitet za bankarski nadzor, pa samim tim i opšte najprihvaćenija definicija, glasi:

"Operativni rizik je rizik direktnih ili indirektnih gubitaka koji nastaju zbog neadekvatnih procedura ili neuspelih internih procesa, ljudskog faktora, sistemskih ili eksternih događaja."

Bitno je napomenuti da prethodno navedena definicija eksplicitno uključuje pravni rizik, ali isključuje strateški i reputacioni[1]. Takođe, ukazuje na uzroke operativnog rizika bazirane na izvoru, a to su: ljudi, procesi, sistemi i eksterni faktori.

2.2 Bazelski komitet za bankarski nadzor

Krajem 1974. guverneri zemalja članica G10[2] osnovali su Bazelski komitet za bankarski nadzor, kao jedan od komiteta pri BIS[3], koji ima za cilj unapređenje bankarskog nadzora na nivou celog

[1] Pravni rizik predstavlja mogućnost nastanka gubitka usled kazni i sankcija proisteklih iz sudskih sporova po osnovu neispunjenih ugovornih i zakonskih obaveza, kao i usled kazni i sankcija izrečenih od strane regulatornog tela.
Strateški rizik se odnosi na mogućnost nastanka gubitka usled nepostojanja dugoročne razvojne komponente u upravljačkom i rukovodećem timu banke.
Reputacioni rizik se odnosi na mogućnost nastanka gubitaka usled negativnog uticaja na tržišno pozicioniranje banke.
Date definicije su preuzete sa oficijalnog sajta Narodne banke Srbije, *www.nbs.rs*.

sveta. 1975. godine komitet počinje sa radom. Njegovo formiranje je sledilo nakon naftnog šoka, koji je potresao ceo svet početkom osme decenije 20. veka, pa i bankarski sektor. Danas, članstvo u komitetu ima trinaest zemalja: Belgija, Holandija, Francuska, Kanada, Japan, Luksemburg, Nemačka, Italija, Španija, Velika Britanija, SAD, Švedska i Švajcarska.

Prvobitan cilj Bazelskog komiteta je bio uspostavljanje veze između regulatornih vlasti zemalja članica. Prvenstveno se diskutovalo o zajedničkom zalaganju za popunjavanje rupa u mreži supervizora, ali njegov širi cilj bio je unapređenje i razumevanje procesa kontrole banaka širom sveta.

Bazelski komitet nema nadnacionalni autoritet kontrole, ne poseduje nijedan nadnacionalni nadzorni organ, i njegovi zaključci nemaju pravnu snagu. Umesto toga, on formuliše osnovne supervizorske standarde, smernice i preporučuje najbolje prakse u svojim dokumentima, u očekivanju da će ih supervizori širom sveta primeniti na način koji je pogodan za njihove nacionalne sisteme. Na taj način, komitet obezbeđuje istovetne principe i zajedničke standarde supervizije u različitim zemljama. Bitno je napomenuti, da on ima lidersku ulogu u uspostavljanju smernica procene upravljanja rizikom banaka.

Bitan deo onoga što formuliše Bazelski komitet, a odnosi se na sadržaj ovog rada, su preporučeni koeficijenti adekvantnosti kapitala, kao i modeli za merenje rizika, pre svega operativnog rizika. Shodno tome, u nastavku ovog dela rada je prikazan osvrt razvoja rada Bazelskog komiteta u navedenim oblastima.

Osamdesetih godina prošlog veka na pomolu je bila kriza prezaduženosti. Koeficijent adekvatnosti kapitala se znatno pogoršavao, što je ukazivalo na teška vremena za svetsko bankarstvo. Komitet, sa ciljem da poboljša tadašnje stanje, težio je da definiše nove modele za merenje rizika, kao i merenje adekvatnosti kapitala. Rezultat tog zalaganja bio je skup standarda pod nazivom **Bazel I**, donet 1988. godine. Njegove prednosti su bile u tome što je predstavljao značajan pomak u upravljanju rizicima i superviziji banke, porastu adekvatnosti kapitala međunarodno aktivnih banaka, kao i porast discipline u procesu upravljanja kapitalom. Međutim, zamerke su bile vezane za to što je prvenstveno u njemu tretiran kreditni rizik, a zanemareni ostali rizici. Prema okviru, definisanim ovim sporazumom, neophodno je bilo da banke održavaju koeficijent adekvatnosti kapitala na nivou od minimalno 8%, tj. na osnovu njega za sve kredite, nezavisno od stepena rizičnosti, primenjivan je isti koeficijent kapitala, 8% u razvijenim zemljama, a u zemljama sa većom izloženošću riziku, koristio se veći koeficijent. Posle nekoliko godina otklonjeni su neki nedostaci standarda Bazel I. Međutim, neotklonjeni nedostaci i dalji razvoj delatnosti banaka uslovili su višegodišnji rad Bazelskog komiteta i nastanak novih preporuka i skupa standarada 2004. god., pod nazivom **Bazel II.**

---

[2] Članice G10: Belgija, Francuska, Nemačka, Italija, Svedska, Velika Britanija, Holandija, Sjedinjene Američke države, Kanada, Japan.

[3] BIS (*Bank for International Settlements*) – Banka za međunarodne obračune osnovana je 1930. na konferenciji u Hagu sa sedištem u švajcarskom gradu Bazelu. Zadatak ove banke je da se kroz saradnju među centranim bankama zemalja članica brine o stabilnosti međunarodnog finansijskog sistema.

U odnosu na Bazel I, Bazel II uz kredini i tržišni uvodi i operativni rizik, dok ključni faktor u upravljanju rizikom postaje VaR (*Value at Risk* – rizikovana vrednost), koji se izračunava za svaku grupu rizika i, u skladu sa tim, određuje se visina ekonomskog kapitala. Prema dokumentu Bazel II, od banake se zahteva da imaju koeficijent kapitala (KK) od 8%, minimalno, pri čemu se KK izračunava prema sledećoj formuli:

$$KK = \frac{\text{ponderisan kapital banke}}{\text{rizikom ponderisana aktiva}}.$$

Rizikom ponderisana aktiva predstavlja sumu rizikom ponderisane aktive za svaki od tri rizika: kreditni, tržišni i operativni rizik.

Bazel II se sastoji od tri međusobno povezana skupa pravila, tzv. stuba, a to su[4]:

(i) Zahtevi za minimalnim kapitalom - definiše minimalne kapitalne zahteve za kreditni, tržišni i operativni rizik, uz mogućnost korišćenja sofisticiranih modela i tehnika za njihovo izračunavanje.

(ii) Proces pregleda supervizora – učvršćuje vezu između optimalnih kapitalnih zahteva i vrste i stepena rizika kojima je banka izložena u svom poslovanju uvodeći proces interne procene adekvatnosti kapitala i jačajući proces supervizije.

(iii) Tržišna disciplina – upotpunjuje vezu između Stuba I i Stuba II, ističući značaj tržišne discipline uvođenjem minimalnih zahteva za objavljivanje informacija banaka.

Poslednja svetska finansijska kriza motivisala je Bazelski komiteta za bankarski nadzor da definiše **Bazel III**, sveobuhvatan skup reformskih mera za jačanje regulatornog okvira banke, supervizije banaka i upravljanje rizicima u bankarskom sektoru. On je izgrađen na osnovama Bazela II. Tekst dokumenta o Bazel III pravilima sastavljen je od strane guvernera i rukovodiocima supervizije i podržan na Novembarskom samitu, održanom 2010. godine. Ove mere imaju za cilj da:

- unaprede sposobnost bankarskog sektora da absorbuje šokove koji proističu iz finansijskih i ekonomskih stresova, ma koji bio izvor,
- unaprede upravljanje rizikom i
- unaprede transparentnost poslovanja banaka i obelodanjivanje informacija.

2.4 Pristupi merenje operativnog rizika

Putem Bazela II, tačnije Stubom I, koji se nalazi u okviru datog dokumenta, su definisana tri pristupa merenja operativnog rizika. Dva jednostavna pristupa, a to su Pristup osnovnog indikatora i Standardnizovan pristup, i jedan složeniji pristup, Napredni pristup merenja operativnog rizika. Prva dva pristupa definišu nivo kapitalnog zahteva za operativni rizik banke kao deo njenog bruto prihoda, dok Napredni pristup merenja operativnog rizika dozvoljava bankama da razviju njihov interni model za ocenjivanje kapitalnog zahteva za operativni rizik.

[4] Kratak opis sadržaja Stuba I, Stuba II i Stuba III preuzet je sa oficijalnog sajta Narodne banke Srbije, *www.nbs.rs*.

Prva dva pristupa predstavljaju vrstu pristupa koji se nazivaju *top-down* pristupi, dok napredni pristup merenja pripada *bottom-up*[5] pristupima. Bankama je dozvoljeno da prihvate jedan od navedenih pristupa u zavisnosti od njihove izloženosti operativnom riziku i praksi upravljanja. Internacionalne banke sa razvijenim poslovnim aktivnostima usvajaju najčešće treći pristup, dok domaće banke, banke sa manjim kapitalom, koriste neki od prva dva pristupa.

Pristup osnovnog indikatora (*The Basic Indicator Approach-BIA*)

Ovaj pristup predstavlja najjednostavniji pristup. Kapitalni zahtev za operativni rizik, u slučaju ovog pristupa, je jednak proizvodu trogodišnjeg proseka indikatora izloženosti i stope kapitalnog zahteva, α. Sledi, da se kapitalni zahtev za operatavni rizik računa pomoću sledeće formule:

$$K_{BIA} = \alpha \times \frac{\sum_{j=1}^{3} GI_j}{3}, \qquad (2.1)$$

gde je:

α – fiksni procenat od pozitivnog *GI* (trenutno iznosi 15%),

GI – bruto prihod,

K_{BIA} – kapitalni zahtev za operativni rizik.

Pri čemu je bruto prihod, definisan od strane Bazelskog komiteta, jednak zbiru neto prihodu od kamate i neto nekamatnog prihoda i predstavlja indikator izloženosti operativnom riziku.

Prednosti ovog pristupa ogledaju se u tome što je lako primenljiv, naročito za banke male i srednje veličine u ranim fazama primene. Takođe, koristi se za prvu fazu primene Bazel II pravila, posebno kada su podaci o gubicima nedovoljni za izgradnju kompleksnijih modela.

Slabe strane ovog pristupa je u tome što dobijeni rezultati ne ukazuje na nivo izloženosti operativnom riziku, kao ni indikatore izloženosti.

Standardizovani pristup (*The Standardized Approach-SA*)

Kod ovog pristupa merenja bankarske aktivnosti su razvrstane u 8 poslovnih linija[6]. Kapitalni zahtev za operativni rizik se računa posebno za svaku poslovnu liniju, kao proizvod indikatora izloženosi, GI_k, k = 1,..., 8, sa odgovarajućom stopom kapitalnog zahteva, β_k, k = 1,..., 8. Zatim, ukupan kapitalni zahtev za operativni rizik se dobija kao prosek godišnjih kapitalnih zaheva za sve poslovne linije u prethodne tri godine, pomoć sledeće formule:

$$K_{SA} = \frac{\sum_{j=1}^{3} max\{\sum_{k=1}^{8} GI_{jk} \times \beta_k, 0\}}{3}, \qquad (2.2)$$

[5]*Top–down* pristupi merenja operativnog rizika mere operativni rizik bez pokušaja da identifikuju pojedinačne događaje ili gubitke vezane za ovu vrstu rizika. Tačnije, visina kapitalnog zahteva se meri na makro osnovama. Osnovna prednost pristupa ovog tipa ogleda se u tome što je potreban mali napor pri prikupljanju podataka i izračunavanju operativnog rizika.

Bottom–up pristupi merenja operativnog rizika mere operativni rizik na mikro nivou. Bazirani su na identifikaciji pojedinačnih događaja, a zatim se dobijene informacije uključuju u ukupan kapitalni zahtev za operativni rizik. Prednost pristupa ovog tipa, u odnosu na prethodni, leži u njegovoj mogućnosti da objasni mehanizam kako i zašto je operativni rizik nastao u okviru institucije.

[6] Postovne linije su: Finansiranje privrede, Trgovina i prodaja, Obračun i plaćanje, Komercijalno bankarstvo, Agencijske usluge, Poslovi sa stanovništvom, Upravljanje aktivom , Brokerski poslovi sa stanovništvom.

gde je GI_k, $k = 1,..., 8$, bruto prihodi k-te poslovne linije. Pri čemu, date stope β_k, $k = 1,...,8$, određuje Bazelski komitet[7].

Juna 2004. direktive Bazel-a II predlažu usvajanje Alternativnog standardizovanog pristupa. Kod ovog pristupa za poslovne linije Poslovi sa stanovništvom (GP) i Komercijalno bankarstvo (KB) indikator izloženosti se određuje na osnovu ukupnih kredita (LA), umesto na osnovu bruto prihoda. Faktor β za date poslovne linije se množi sa skalarnim faktorom m, koji iznosi 0.035. Kao i u prethodnim slučajevima, posmatraju se tri poslednje poslovne godina za računje kapitalnih zahteva za date dve poslovne linije pomoću sledećih formula:

$$K_{GP} = \beta_{GP} \times m \times \frac{\sum_{j=1}^{3} LA_j GP}{3} \text{ i } K_{KB} = \beta_{KB} \times m \times \frac{\sum_{j=1}^{3} LA_j KB}{3}. \quad (2.3)$$

Loša strane ovog pristupa su iste kao kod prethodnog, dok se prednosti ovog pristupa u odnosu na prethodno navedeni ogleda u tome što izloženost operativnom riziku izračunava posebno za definisane poslovne linije, pa samim ti se pretpostavlja da različite poslovne linije imaju različitu izloženost operativnom riziku.

Napredni pristup merenja operativnog rizika (*The Advanced Measurement Approach-AMA*)

Ova vrsta pristupa je najsloženija od date tri vrste pristupa za merenje operativnog rizika. Bankama koje koriste ovaj pristup je dozvoljeno da definišu interni metod za identifikaciju, procenu i merenje izloženosti operativnom riziku, kao i izračunavanje kapitalnog zahteva za operativni rizik. Kod ovog pristupa, bankarske aktivnosti su, kao i kod Standardizovanog pristupa, razvrstane u osam poslovnih linija. Međutim, definisano je i sedam tipova događaja[8], koji se mogu desiti u okviru svake poslovne linije, koji prouzrokuju gubitke po osnovu operativnog rizika. Banke, koje odluče da koriste ovaj pristup, teže da, na osnovu internih i eksternih podataka, scenario analize, kao i faktora poslovnog okuženja i unutrašenja kontrole, definišu model, pomoću koga će se izračunavati kapitalni zahtev za operativni rizik za svaku kombinaciju poslovna linija/tip događaja, a zatim i ukupan kapitalni zahtev banke za operativni rizik, kao zbir kapitalnih zahteva za svaku od datih 56 kombinacija poslovna linija/tipa događaja.
U petom poglavlju je prikazan detaljniji opis ovog pristupa.

[7] Visine stopa su trentuno definisani od strane Bazelskog komiteta na sledeći način:

- za poslovne linije: Finansiranje privrede, Trgovina i prodaja, Obračuni i plaćanje, stopa iznosi 18%,
- za Komercijalno bankarstvo i Agencijske usluge, stopa iznosi 15% i
- za Poslove sa stanovništovm, Upravljanje aktivom i Brokerske poslove sa stanovništovm, stopa iznosi 12%.

[8] Sedam tipova događaja koji mogu prozrokovati operativne gubitke su: Interne prevare, Eksterne prevare, Odnos prema zaposlenima i bezbednost na radnom mestu, Oštećenje fiksne imovine, Prekid poslovanja i pad sistema, Izvršenje, isporuka i upravljanje procesima i Klijenti, proizvodi i poslovna praksa.

3. Raspodele u modelima naprednog pristupa

U ovom poglavlju će prvo biti predstavljeni ulazni elementi modela Naprednog pristupa merenja operativnog rizika. Zatim će biti navedene raspodele pogodne za modeliranje frekvencije događaja gubitka, kao i visine gubitka koje dati događaji prouzrokuju. Kada se odabere raspodela, potrebno je izvršiti ocenjivanje parametara dobijene raspodele, zato će u trećem delu ovog poglavlja biti prikazane metode ocenjivanja parametara datih raspodela. Zatim, u četvrtom delu će biti navedene različite vrste testova saglasnoti pomoću kojih se na najlakši način može doneti zaključak koliko dobijena raspodela dobro fituje dopustiv skup podataka o frekvenciji ili visini gubitaka. Nekada se kao rezultat analize može doći do više rezultata, tj. više raspodela koje su pogodne za fitovanje određenog skupa podataka. Testovi saglasnosti se mogu koristiti i u tom slučaju, za odlučivanje koji je model bolji.

3.1 Ulazni elementi modela naprednog pristupa

Bankama koje koriste Napredni pristup merenja operativnog rizika, kao što je prethodno napomenuto, je dozvoljeno da razvijaju sopstveni model, sve dok je on sveobuhvatan i sistematski, za ocenjivanja kapitalnog zaheva za njihovu jednogodišnju izloženost operativnom riziku. Ovo je najnapredniji i najkompleksniji pristup merenja operativnog rizika. Shodno tome, veliki broj podataka predstavljaju ulazne elemente modela, koji su njime definisani.

Ulazni elementi ili podaci koji se koriste u okviru AMA mogu se grupisati u četiri kategorije, a to su:

- interni podaci,
- eksterni podaci,
- podaci scenario analize,
- faktori poslovnog okruženja i unutrašnje kontrole.

Banke moraju definisati politiku i procedure vezano za podatke, kao što su smernice o opsegu primene, minimalni period posmatranja, referentni datum, modeliranje praga minimuma, obrada podataka. Kombinacije i ponderisanje prethodno navedene četiri vrste podataka je značajan problem banaka. Postoje mnogobrojne tehnike njihovog kombinovanja koje se upotrebljavaju u praksi.

Interni podaci

Na osnovu smernica Bazelskog komiteta, sistem za merenje operativnog rizika banke mora da obuhvata istorijske podatke za period najmanje dužine pet godina (tri godine, ukoliko banka prvi puta vrši merenje). Analiza ove vrste podataka pruža bolje razumevanje o izloženosti operativnom riziku i olakšava poređenje nivoa kapitalnog zahtev za operativni rizik i stvarnih gubitaka. Pri evidentiranju gubitaka u internu bazu potrebno je uneti referenti broj, određene informacije o ovim gubicima (kao što su datum nastanka, datum uticaja i datum otkrića), tip događaja koji ga prouzrokovao, liniju poslovanja za koju je vezan, bruto visinu gubitka, iznos bruto gubitka koji je pokriven osiguranjem i koji nije pokriven osiguranjem. Nakon prikupljanja podataka, neophodno ih je standardizovati u skupove pogodne za upotrebu u daljoj deskriptivnoj i statističkoj analizi.

Eksterni podaci

Ova vrsta podataka obezbeđuje banci podatke o visokim gubicima, koji se u posmatranoj banci još nisu desili. Shodno tome, oni su dopuna bazi podataka o internim gubicima pri modeliranju visine gubitka. Ovi podaci se prvenstveno koriste kao vredna informacija o osobinama repa raspodele gubitka, ali i kao ulazni element kod scenario analize, tako što daju infromacije o visini gubitaka na osnovu iskustva drugih banaka. Takođe, mogu pružiti informacije o visini rizika nove poslovne linije, koja se do sada nije nalazila u okviru posmatrane banke. Može da se desi da eksterni podaci ne odgovaraju profilu rizika određene banke, shodno tome, banke moraju da definišu proces za procenu relevantnosti eksternih podataka.

Podaci scenario analize

Banke ovu vrstu podataka obezbeđuju koristeći jedan od tri šablona, u zavisnosti koji je najkonzistentiji sa njihovim pristupom scenario analize, a to su: individualni pristup, scenario baziran na intervalima i scenario baziran na percentilima. Rezultat individualnog pristupa scenario analize se sastoji od procena visine gubitka koja ima određenu verovatnoću pojavljivanja za svaki scenario. Interval pristup scenario analize daje kao rezultat ocene frekvencija gubitaka čije visine pripadaju različitim domenima. Dok su rezultati percentil pristupa ocene vrednosti određenih percentile raspodele gubitka. Kao i kod internih podataka i ovi podaci se nakon prikupljanja standardizuju u skupove pogodne za primenu u deskriptivnoj i statističkoj analizi. Najčešće se koriste da bi se dobile dodatne informacije o repu raspodele, tj. podaci koji se nalaze iznad tačke do koje banke imaju iskustava na osnovu interne baze podataka, na osnovu mišljenja stručnjaka.

Četvrta vrsta podataka, koja predstavlja ulazni element kod Naprednog pristupa merenja, neće biti razmatrana u ovoj master tezi. Bitno je napomenuti da oni znatno utiču na formiranje mišljena stručnjaka.

U sledećem delu rada će biti predstavljene raspodele koje se mogu koristiti za modeliranje frekvencije događaja gubitka.

3.2 Modeliranje frekvencije događaja gubitka

Većina operativnih gubitaka se javljaju i budu otkriveni skoro svakodnevno. Često su operativni gubici povezani sa minimalnim greškama, načinjenim od strane neiskusnih radnika, pronevere kreditnih kartica, kašnjenje zbog problema sa kompjuterima, itd.. Međutim, neki procesi se javljaju jednom u 5, 10 ili 50 godina, kao što su znatne materijalne štete prouzrokovane prirodnim katastrofama ili terorističkim napadima. Šta više, neki gubici se dešavaja tokom dužeg vremenskom perioda, ali mogu ostati neotkriveni mesecima ili godinama, kao što su dugotrajne neovlašćene trgovinske aktivnosti. U sva tri slučaja, posmatrani gubici nastaju na nepravilan način, pri čemu je period između pojave događaja, koji prouzrokuju gubitke, od nekoliko sati do nekoliko godina, pa i decenija.

U ovom delu rada će biti predstavljene neke vrste diskretnih raspodela koje se mogu koristiti za modeliranje frekvencije operativnih gubitaka, kao i njihove karakteristike i osobine relevantne pri analizi oprativnog rizika.

Najčešće korišćene raspodele u praksi za modeliranje frekvencije događaja koji prouzrokuju operatini gubitak su Poasonova i negativna binomna raspodela, a samo u neki retkim slučajevima se koriste binomna i geometrijska raspodela.

3.2.1 Binomna raspodela

Ova vrsta raspodele je najjednostavnija vrsta raspodele koja se može koristi za modeliranje frekvencije događaja gubitka. Zavisi od dva parametra, $n \in \mathbb{N}$ i $p \in (0,1)$.

Binomna raspodela predstavlja model za izvođenje n nezavisnih eksperimenata, pri čemu se svaki od njih može realizovati pozitivno ili negativno. Broj eksperimenata koji se posmatraju mora biti konačan broj. Verovatnoća da ishod bude pozitivan je ista za svaki eksperiment i označava se sa p. Shodno tome, verovatnoća da ishod bude negativan iznosti 1-p i označava se sa q. Binomna slučajna promenljiva predstavlja broj eksperimenata, od n posmatranih, čiji je ishod bio pozitivan.

Neka je N binomna slučajna promenljiva. Ako se posmatra n eksperimenata, verovatnoća da N ima vrednost k se može izračunati na sledeći način:

$$p_k = P\{N = k\} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k},\ k = 0, 1, 2 \dots, n. \qquad (3.1)$$

Očekivanje i varijansa binomne slučajne promenljive N imaju sledeći oblik:

$$E(N) = np \text{ i } Var(N) = npq. \qquad (3.2)$$

U kontekstu operativnog rizika, može se posmatrati eksperiment koji se odnosi na pojavu određenog događaja u toku jednog dana, čija realizacija može prouzrokovati operativni gubitak. Broj eksperimenata može biti ukupan broj dana u toku jedne godine, npr. 250 radinih dana.

Stoga, slučajna promenljiva koja opisuje frekvenciju događaja može biti definisana kao broj dana tokom godine u kojima se desio bar jedan posmatrani događaj koji je prouzrokovao operativni gubitak.

Bitna osobina ove raspodele ogleda se u činjenici da kada parameter p ima veoma nisku vrednost, a parametar n visoku ona se može aproksimirati pomoću Poasonove raspodele[9] sa parametrom $\lambda = np$. Takođe, kada je parameter n ima dovoljno visoku vrednost, može se koristi i aproksimacija binomne raspodele pomoću normalne raspodele[10] sa parametrima $m = np$ i $\sigma = \sqrt{np(1-np)}$.

3.2.2 Geometrijska raspodela

Ova raspodela je jednoparametarska raspodela, sa parametrom $p \in (0,1)$. Geometrijska rasodela se koristi za modeliranje verovatnoće pojavljivanja događaja prvi put, pri pretpostavci da se dati događaj nije pojavljivao do sada. Neka slučajna promenljiva N predstavlja broj nezavisnih ponavljanja eksperimenta do prve realizacije određenog događaja, pri čemu je verovatnoća da se događaj realizuje u okviru eksperimenta konstantna i ima vrednost p. Verovatnoća da će se posmatrani događaj realizovati u k-tom ponavljanju eksperimenta može se izračunati na sledeći način:

$$p_k = P\{N = k\} = q^{k-1}p,\ k = 1,2,\dots \text{ i } q = 1 - p. \qquad (3.3)$$

Očekivanje i varijansa slučajne promenljive N koja ima gaometrijsku raspodelu su:

$$E(N) = \frac{1}{p} \text{ i } Var(N) = \frac{1-p}{p^2}. \qquad (3.4)$$

U slučaju modeliranja frekvencije događaja operativnog gubitka, geometrijska raspodela se može koristiti za određivanje verovatnoće da će k-ti dan ishod određenog događaja biti gubitak, pri čemu je ista verovatnoća pojave gubitaka u toku svakog dana.

Funkcija verovatnoće ove raspodele eksponencijalno opada. Ova osobina je bitna, jer omogućava određivanje da li neka druga raspodela frekvencije ime debeo ili tanak rep. Ako raspodela, kojoj želimo kvalitativno da odredimo debljinu repa, sporije (brže) opada nego geometrijska, ona ima debeo (tanak) rep.

3.2.3 Poasonova raspodela

Kao što je napomenuto u delu 3.2.1, radi jednostavnijeg izračunavanja verovatnoće kod binomne raspodele kada je broj ponavljanja eksperimnta, n, velik definisana je Poasonova raspodela.

[9] Poasonova raspodela je predstavljena u delu 3.2.3.

[10] Slučajna promenljiva X ima normalnu $N(m, \sigma^2)$ raspodelu, $m \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$, ako je njena gustina raspodele $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}$.

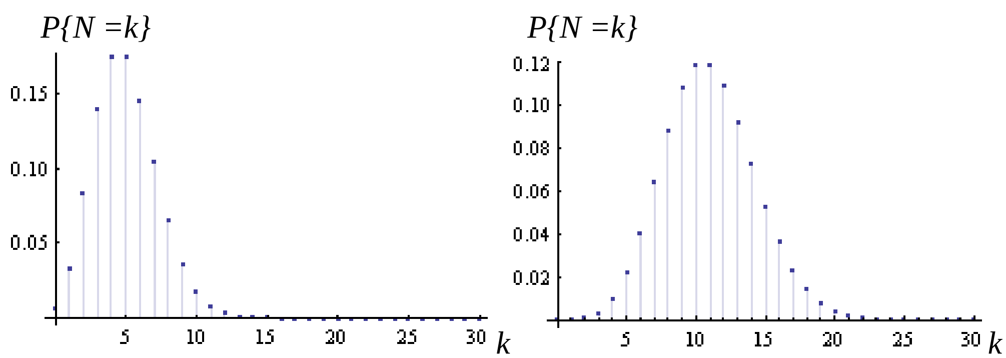
Osnovna razlika izmedju ove dve raspodele je u tome što kod Poasonove raspodele ne važi pretpostavka o fiksnom broju ponavljanja eksperimenta. Ova raspodela predstavlja jednoparametraku raspodelu sa prametrom λ, $\lambda > 0$. Koristi se za određivanje verovatnoća da će se određen broj događaja pojaviti u datom vremenskom intervalu.

Neka je N Poasonova slučajna promenljiva i neka je očekivani broj događaja tokom posmatranog vremenskog intervala jednak λ. Tada se verovatnoća da će se realizovati k događaja tokom tog vremenskog intervala može izračunati pomoću sledeće formule:

$$p_k = P\{N = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots . \qquad (3.5)$$

Očekivanje i varijansa Poasonove slučajne promenljive N sa parametrom λ imaju sledeći oblik:

$$\mathrm{E}(N) = \lambda, \ \mathrm{D}(N) = \lambda. \qquad (3.6)$$



Grafik 3.1 Funkcija Poasonove raspodele verovatnoće za $\lambda = 5$ i $\lambda = 11$.

Shodno prethodno navedenim osobinama Poasonove raspodele, u kontekstu modeliranja frekvencije događaja operativnog gubitka, ako je poznat očekivani broj događaja gubitka koji će se realizovati u fiksnom vremenskom intervalu, λ, i on je konstantan za svaki interval date dužine, moguće je empirijsku raspodelu frekvencije fitovati pomoću Poasonove raspodele sa parametrom λ. Bitno je napomenuti da očekivani broj događaja zavisi od dužine vremenskog intervala koji se posmatra.

Takođe, na osnovu činjenice da su očekivanje i varijansa Poasonove slučajne promenljive jednaki, jednostavan način da se proveri da li se posmatrana raspodela podataka može okarakterisati pomoću Poasonove raspodele je da se izvrši poređenje očekivanja i varijanse broja događaja i na taj način proveri da li su oni jednaki.

Poasonova raspodela ima dve pogodne osobine koje se mogu koristi u analizi operativnog rizika. Jedna od te dve osobine govori o tome da zbir nezavisnih Poasonovih slučajnih promenljivih je Poasonova slučajna promenljiva. Ova osobina sledi na osnovu sledeće teoreme.

Teorema 3.1 [1]: *Neka su N_1, N_2, ..., N_n, nezavisne Poasonove slučajne promenljive sa parametrima λ_1, λ_2, ..., λ_n, respektivno. Tada slučajna promenljiva $N = N_1 + N_2 + \dots + N_n$ ima Poasonovu raspodelu sa parametrom $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$.*

Dokaz:

Na osnovu pretpostavke, navedne u teoremi, da su N_1, N_2, …N_{n-1} i N_n nezavisne slučajne promenljive i formule funkcije generatrise verovatnoće za Poasonovu raspodelu, koja ima sledeći oblik:

$$P_{N_j}(z) = e^{\lambda_j(z-1)}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

sledi

$$\begin{aligned} P_N(z) &= \prod_{j=1}^{n} P_{N_j}(z) \\ &= \prod_{j=1}^{n} e^{\lambda_j(z-1)} \\ &= e^{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j (z-1)} \\ &= e^{\lambda(z-1)}, \end{aligned}$$

gde je $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$.

Na osnovu činjenice da funkcija generatrisa verovatnoće jedinstveno određuje raspodelu svake slučajne promenljive, kao i da dobijeni oblik funkcije generatrise verovatnoće raspodele slučajne promenljive N je jednak funkciji generatrisi Poasonove raspodele, sledi da slučajna promenljiva N ima Poasonovu raspodelu sa parametrom λ, $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$.

□

Druga bitna osobina Poasonove raspodele je prikazana u sledećoj teoremi.

Teorema 3.2 [1]: *Neka je N slučajna promenljiva koja predstavlja broj događaja i ima Poasonovu raspodelu sa parametrom* λ, $\lambda > 0$. *Nadalje, neka važi pretpostavka da se svaki događaj može klasifikovati u jedan od m, prethodno definisanih, tipova događaja sa verovatnoćom* $p_1, p_2, \ldots, p_m$, *nezavisno od drugih događaja. Tada su slučajne promenljive* $N_1, N_2, \ldots, N_m$ *koje predstavljaju broj događaja koji odgovara tipu događaja 1, 2, …, m, respektivno, međusobno nezavisne slučajne promenljive i imaju Poasonovu raspodelu sa parametrima* $\lambda p_1, \lambda p_2, \ldots, \lambda p_m$, *respektivno.*

Dokaz:

Neka je n fiksni ukupan broj datih realizovanih događaja, tj. neka je $N = n$.

Uslovna marginalna raspodela slučajne promenljive $N_j|N = n$, $j = 1, \ldots, m$, u oznaci $P\{N_j = njN=n$, je binomna raspodela sa parametrima (n, p_j). Slučajna promenljiva $NjN=n$, $j = 1, \ldots, m$ ima binomnu raspodelu, jer ona ima dva moguća ishoda, ili događaj pripada j-tom tipu sa verovantoćom p_j ili ne pripada sa verovantoćom $1 - p_j$.

Uslovna raspodela za m-dimenzionalnu slučajnu promenljivu $(N_1, N_2, \ldots, N_m)$ je multinomna raspodela[11] sa parametrima $(n, p_1, p_2, \ldots, p_m)$.

---

[11] Nad prostorima verovatnoća za n nezavisnih eksprimenata (Ω_n, F_n, P) neka je difinisana m-dimenzionalna slučajna promenljiva $N_n = (N_n^1, N_n^2, \ldots, N_n^m)$, gde je $N_n^i, i = 1, \ldots, m$, broj realizacija događaja $A_i, i = 1, \ldots, m$, $\sum_{i=1}^{m} A_i = \Omega_n$. Funkcija raspodele verovatnoće slučajna pormenljive N je $P\{\{N_n^1 = j_1\} \cap \{N_n^2 = j_2\} \cap \ldots \cap$ $Nnm=jm=n!j1!\ldots jm!p1j1\ldots pmjm$, gde je $j1,\ldots,jm \in 0,1,\ldots,n$ i $j1+\ldots+jm=n$. Raspodelea ovako definisane k-dimenzinalne slučajne promenljive N_n se zove multinomna rapodela.

Na osnovu prethodno navedenih činjenica, može se odrediti marginalna raspodela slučajne promenljive N_j, $j= 1, \dots ,m$, kao i zajednička raspodela slučajanih promenljivih $N_1, N_2, \dots, N_m$.
Zajednička funkcija raspodele verovatnoće slučajnih promneljivih $N_1, N_2, \dots, N_m$ se izračunava na sledeći način:

$$\begin{aligned} P\{N_1 = n_1, N_2 = n_2, \dots, N_m = n_m\} &= P\{N_1 = n_1, N_2 = n_2, \dots, N_m = n_m | N = n\} \times P\{N = n\} \\ &= \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_m!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_m^{n_m} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \qquad (3.7) \\ &= \prod_{j=1}^{m} e^{-\lambda p_j} \frac{(\lambda p_j)^{n_j}}{n_j!}, \end{aligned}$$

gde je $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$.

Marginalna raspodela za slučajnu promenljivu N_j , $j = 1, \dots, m$, ima sledeći oblik:

$$\begin{aligned} P\{N_j = n_j\} &= \sum_{n=n_j}^{\infty} P\{N_j = n_j | N = n\} P\{N = n\} \\ &= \sum_{n=n_j}^{\infty} \binom{n}{n_j} p_j^{n_j} (1 - p_j)^{n-n_j} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p_j)^{n_j}}{n_j!} \sum_{n=n_j}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p_j))^{n-n_j}}{(n-n_j)!} \qquad (3.8) \\ &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p_j)^{n_j}}{n_j!} e^{\lambda(1-p_j)} \\ &= e^{-\lambda p_j} \frac{(\lambda p_j)^{n_j}}{n_j!}. \end{aligned}$$

Na osnovu jednakosti (3.7) i (3.8) može se uočiti da je zajednička raspodela slučajnih promenlijvih $N_1, N_2, \dots, N_m$ proizvod njihovih marginalinih raspodela, što ukazuje na to da su slučajne promenljive $N_1, N_2, \dots, N_m$ međusobno nezavisne.
Takođe, na osnovu dobijene funkcije raspodele verovatnoće, (3.8), slučajne promenljive N_j, $j= 1, \dots ,m$, sledi da svaka od njih ima Poasonovu raspodelu sa parametrima λp_j, $j = 1, \dots , m$, respektivno.

Napomena:
U toku dokaza je korišćen razvoj eksponencijalne funkcije pomoću Tejlorovog red, tj. jednakost $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

□

Još jedna bitna osobina Poasonove raspodele je vezana za raspodelu dužine vremenskog perioda između pojave dva uzastopna događaja. Ta osobnia se ogleda u tome da dužina intervala između uzastopnih događaja prati Eksponencijalnu raspodelu[12] sa parametrom λ, koji je jednak parametru odgovarajuće Poasonove raspodele. Stoga, očekivanje slučajne promenljive broja događaja koja ima Poasonovu raspodelu ima uticaj na dužinu vremenskih intervala između pojavljivanja dva uzastopna događaja.

[12] Eksponencijalna raspodela će biti predstavljena u delu 3.3.2.1.

3.2.4 Negativna binomna raspodela

Ova raspodela je dvoparametarska raspodela, sa realnim parametrima r i p, $r > 0$ i $p \in [0,1]$. Funkcija raspodele verovatnoće negativne binomne slučajne promenljive N ima sledeći oblik:

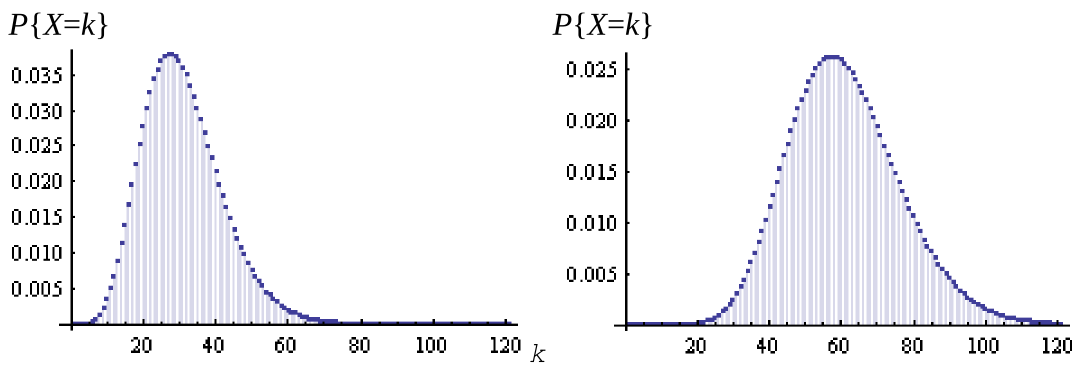
$$P\{N = k\} = p_k = \binom{k + r - 1}{k} p^k (1-p)^r, \; k = 0, 1, 2,... \qquad (3.9)$$

Očekivanje i varijansa date slučajne promenljive N se mogu izračunati pomoću sledećih jednakosti:

$$E(N) = \frac{rp}{1-p} \text{ i } Var(N) = \frac{rp}{(1-p)^2}. \qquad (3.10)$$

Negativna binomna slučajna promenljiva pokazuje koliko puta treba izvesti događaj, da se k puta ne desi.

Na osnovu činjenice da vrednosti parametra p pripadaju intervala $[0,1]$ sledi $1 - p \in [0,1]$, stoga može se zaključiti da je varijansa veća od očekivanja, dok kod Poasonove raspodele, ove dve veličine imaju jednake vrednosti. Prethodno navedena činjenica ukazuje na to da, ako za određeni skup podataka o frekvenicji događaja gubitka se utvrdi da je varijansa veća od očekivanja, negativna binomna raspodela je verovatno bolji izbor za modeliranje frekvencije događaja gubitka od Poasonove raspodele.



Grafik 3.2 Funkcija negativne binomne raspodele sa parametrima r = 10, p = 0.25 i r = 20, p = 0.25.

Negativna binomna raspodela je uopšten slučaj Poasonove raspodele, u kom stopa intenziteta nije više konstantna, već se pretpostavlja da prati gama raspodelu[13]. Ova činjenica ukazuje na to da očekivanje nije konstantno tokom vremenskog perioda. Dokaz je predstavljen u nastavku.

Neka N ima Poasonovu raspodelu sa paremetrom Λ. Parametar Λ je slučajna promenljiva koja ima dvoparametarsku gama raspodelu sa parametrima n i β (n > 0, β > 0). Neka je funkcija gustine gama raspodele označena sa $G(\lambda)$ i neka važi sledeća jednakost:

$$G(\lambda) = \frac{\lambda^{n-1} e^{-\frac{\lambda}{\beta}}}{\beta^n \Gamma(n)}, \quad n > 0, \beta > 0.$$

[13] Gama raspodela će biti predstavjene u delu 3.3.2.4.

Pri čemu važi:

- ako n pripada skupu pozitivnih kompleksnih brojeve, gama funkcija ima sledeći oblik:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty \lambda^{n-1} e^{-\lambda}\, d\lambda \ .$$

- ako n pripada skupu celih brojeva tada važi sledeća jednakost

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

Oba prethodno navedena oblika gama funkcije će se koristiti u okviru dokaza.
Na osnovu zakona totalne verovatnoće sledi

$$\begin{aligned} p_k = P\{N=k\} &= E[P\{N=k|\Lambda\}] \\ &= \int_0^\infty P\{N=k|\Lambda=\lambda\} G(\lambda)\, d\lambda. \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \cdot \frac{\lambda^{n-1}e^{-\frac{\lambda}{\beta}}}{\beta^n \Gamma(n)}\, d\lambda \\ &= \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{\beta^n \Gamma(n)} \int_0^\infty e^{-\lambda\left(1+\frac{1}{\beta}\right)} \lambda^{k+n-1} d\lambda \\ &= \frac{\Gamma(k+n)}{k!\,\Gamma(n)} \cdot \frac{\beta^k}{(1+\beta)^{k+n}} \\ &= \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!} \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^n \\ &= \binom{k+n-1}{k} \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^n. \end{aligned}$$

Za $p = 1/(1+\beta)$, na osnovu dobijene jednakosti, može se uočiti da dobijena funkcija raspodele verovatnoće slučajna promenljive N je jednaka funkciji raspodele verovatnoće negativne binomne raspodele, pa shodno tome, N je negativna binomna slučajna promenljiva.

3.2.4 Klase raspodela (*a*, *b*, 0) i (*a*, *b*, 1)

Klasa (a, b, o) je klasa dvoparametarskih raspodela diskretnog tipa, sa parametrima a i b. Neka slučajna promenljiva N ima raspodelu koje pripada ovoj klasi. Raspodela se definiše, tako što se prvo odrede parametri a i b, kao i početna vrednost verovatnoće p_0. Verovatnoća da slučajna promenljiva ima više vrednosti može se izračunati pomoću rekurzivne formule date u sledećoj definiciji.

Definicija 3.1: *Raspodela diskretne slučajne promenljive N je klase (a, b, 0), ako zadovoljava rekurzivnu vezu:*

$$p_n = \left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \tag{3.11}$$

pri čemu je $p_n = P\{N=n\}$, *a* p_0 *proizvoljna početna vrednost.*

Ovoj klasi raspodela pripadaju Poasonova, binomna, negativna binomna i geometrijska raspodela.

U sledećoj tabeli su prikazani vrednosti parametara a i b, kao i vrednosti za p_0 za prethodno navedene raspodele.

Raspodela/parametar	a	b	p_0	skup vrednosti param.
Poasonova $P(\lambda)$	0	λ	$e^{-\lambda}$	$\lambda > 0$
Binomna $B(n,p)$	$-p/(1-p)$	$(n+1)p/(1-p)$	$(1-p)^n$	$n\epsilon\mathbb{N}, p\epsilon[0,1]$
NegativnaBinomna$NB(n,\beta)$	$\beta/(1+\beta)$	$(n-1)\beta/(1+\beta)$	$(1+\beta)^{-n}$	$n > 0, \beta > 0$
Geometrijska $G(p)$	$\beta/(1+\beta)$	0	$(1+\beta)^{-1}$	$\beta > 0$

Tabela 3.1 Raspodele klase (*a*, *b*, 0).

Za podatke o broju gubitaka, verovatnoća da je broj gubitaka jednak nuli je jednaka verovatnoći da se ni jedan gubitak ne desi u toku određenog perioda. Kada je verovatnoća da se događaj desi mala, tada je verovatnoća da je broj događaja jednak nuli velika. Stoga, bitno je obratiti pažnju na određivanje vrednosti funkcije verovatnoće u nuli. U nekim slučajevima modeliranja frekvencije događaja gubitka, potrebno je zanemariti vrednost raspodele verovantoće u nuli. U tim slučajevima koriste se raspodele koje pripadaju klasi (*a*, *b*, 1).

Klasa raspodela (*a*, *b*, 1) je klasa raspodela koje nisu definisane u nuli. Raspodele iz ove klase se mogu dobiti modifikovanjem raspodela iz klase (*a*, *b*, 0) na dva načina, koja će biti predstavljena u nastavku.

Sledi definicija klase raspodela (*a*, *b*, 1).

<u>Definicija 3.2</u>: *Raspodela diskretne slučajne promenljive N pripada klasi raspodela (a, b, 1), ako zadovoljava sledeću rekurzivnu vezu:*

$$p_n = \left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1}, \ n = \ 2,3,\ldots, \qquad (3.12)$$

pri čemu je $p_n = P\{N = n\}$ *i* $p_0, \ p_1$ *proizvoljne početne vrednosti.*

Osnovna razlika između date dve klase diskretnih raspodela, kao što se može uočiti, je u tome što rekurzija kod prve klase počinje od p_0, a kod druge klase od p_1.

Druga klasa se može dobiti modifikovanjem prve klase na dva načina.

Prvi način: Neka raspodela slučajne promenljive *N* pripada klasi (*a*, *b*, 0). Raspodela nove slučajne promenljive, $\bar{N}$, koja pripada klase (*a*, *b*, 1), može se dobiti modifikovanjem raspodele verovatnoće slučajne promenljive *N* na sledeći način:

$$\bar{p}_0 = 0 \ \text{ i } \ \bar{p}_i = \frac{1}{1-p_0} p_i, \ \ i = 1,2, \ldots..$$

Na ovaj način je anulirana verovanoća u nuli. Novodobijena raspodela se naziva nula-odsečena raspodela.

Drugi način: Neka važe iste pretposavke kao u prvom slučaju. Modifikacija raspodele verovatnoće se vrši na sledeći način:

$$\bar{p}_0\text{-modifikovana vrednost od } p_0, \ p_0 > 0, \ \text{ i } \ \bar{p}_i = \frac{1-\bar{p}_0}{1-p_0} p_i, \ \ i = 1,2, \ldots..$$

U ovom slučaju vrednost funkcije raspodele u nuli se modifikuje na osnovu odluke osobe koja definiše model i zavisi od pojave koju želi da opiše.
Ova podklasa raspodela se naziva nula-modifikovana klasa raspodela.

3.2.5 Model agregatne frekvencije

U ovom delu rada je predstavljen izraz funkcije raspodele verovatnoće složene diskretne slučajne promenljive S, $S = M_1 + M_2 + \ldots + M_N$, koji predstavlja model agregatne frekvencije, pri čemu važe sledeće pretpostavke:

- $M_1, M_2, \ldots, M_N$ su nezavisne diskretne slučajne promenljive, koje imaju istu raspodelu i
- N je diskretne slučajna promenljiva, nezavisne od M_j, $j = 1, 2, \ldots, N$.

Takođe će biti predstavljena funkcije generatrisa verovatnoće date složene diskretne slučajne promenljive S, a zatim i oblik raspodele verovatnoće slučajne promenljive S, ako N pripada jednoj od klasa raspodela $(a, b, 0)$ ili $(a, b, 1)$.

Verovatnoća da slučajna promenljiva S ima vrednost k, tj. $P\{S = k\}$, se izračunava na sledeći način:

$$\begin{aligned} P\{S = k\} &= \sum_{n=0}^{\infty} P\{S = k | N = n\} P\{N = n\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P\{\mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2 + \cdots + \mathrm{M}_\mathrm{N} = k | N = n\} P\{N = n\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P\{\mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2 + \cdots + \mathrm{M}_\mathrm{n} = k\} P\{N = n\} \end{aligned}$$

Neka je:

- $g_k = P\{S = k\}$,
- $p_n = P\{N = n\}$ i
- $f_M{}^{*n}(k) = P\{\mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2 + \cdots + \mathrm{M}_\mathrm{n} = k\}$.

Sledi, formula raspodele verovatnoće može biti prikazana u sledećem obliku:

$$g_k = \sum_{n=0}^{\infty} p_n f_M^{*n}(k), \qquad (3.13)$$

pri čemu je $f_M^{*n}(k), k = 0,1, \ldots$ n-puta konvolucija funkcije f_M, tj. verovatnoća da suma n nezavisnih slučajnih promenljivih, koje imaju istu raspodelu sa funkcijom verovatnoće f_M, ima vrednost k.

Pošto je M diskretna slučajna promenljiva, n-kontolucija se izračunava pomoću sledeće jednakosti:

$$f_M^{*n}(k) = \sum_{y=0}^{k} f_M^{*(n-1)}(k - y) f_M(y) \text{ za } k = 0,1, \ldots \text{ i } n = 2, 3, \ldots.$$

Neka je nadalje M slučajna promenljiva koja ima istu raspodelu, kao i slučajne promenljive M_1, M_2, …, M_N.

<u>Teorema 3.3</u> [1]: *Neka je N diskretna slučajna promenljiva čija je funkcija generatrisa verovatnoće* $P_N(z)$. *Neka su* $M_1, M_2, \ldots M_N$ *nezavisne diskretne slučajne promenljive sa identičnom raspodelom, sa istom funkcijom generatrise verovatnoće,* $P_M(z)$. *Neka važi pretpstavka da* M_j, $j = 1, 2, \ldots, N$ *ne zavisi od N. Funkcija generatrisa verovatnoće slučajne promenljive* $S = M_1 + M_2 + \ldots + M_N$ *ima sledeći oblik:*

$$P_S(z) = P_N[P_M(z)]. \qquad (3.14)$$

<u>Dokaz</u>:

Koristeći pretpostavke navedene u okviru teoreme 3.3, važe sledeće jednakosti:

$$\begin{aligned} P_S(z) &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} P\{S = k\} z^k \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P\{S = k | N = n\} P\{N = n\} z^k \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P\{M_1 + M_2 + \cdots + M_N = k | N = n\} P\{N = n\} z^k \\ &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} P\{N = n\} \sum_{k=0}^{\infty} P\{M_1 + M_2 + \cdots + M_n = k\} z^k \\ &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} P\{N = n\} [P_M(z)]^n \end{aligned}$$

Na osnovu pretpostavke o nezavisnosti slučajnih promenljivih $M_1, M_2, \ldots M_N$ i činjenice da date slučajne promenljive imaju istu raspodelu, sledi da je

$$\begin{aligned} P_{M_1+M_2+\cdots+M_n}(z) &= \textstyle\prod_{j=1}^{n} P_{M_j}(z) \\ &= [P_M(z)]^n. \end{aligned}$$

Ako se dobijena jednakost uvrsti u prethodnu jednačinu dobije se željena jednakost, tj.

$$P_S(z) = P_N[P_M(z)].$$

□

U nastavku će biti date teoreme u kojima je definisana raspodela verovatnoće slučajne promenljive *S*, prethodno definisane, u slučaju kada primarna raspodela pripada jednoj od klasa (*a*, *b*, 0) ili (*a*, *b*, 1).

U sledeće dve teoreme raspodela slučajne promenljive N predstavlja primarnu raspodelu, a zajednička raspodela slučajnih promenljivih $M_1, M_2, \ldots M_N$ sekundarnu raspodelu.

<u>Teorema 3.4</u> [4]: *Neka je* $S = M_1 + M_2 + \ldots + M_N$ *i neka važe sve pretpostake iz teoreme 3.3. Ako je primarna raspodela iz klase (a, b, 0). Tada se verovatnoća* $g_k = P\{S = k\}$ *može izračunati pomoću sledeće rekurzivne formula:*

$$g_k = \frac{1}{1 - af_0} \sum_{j=1}^{k} \left(a + \frac{bj}{k}\right) f_j g_{k-j}, \quad k = 1,2,3, \ldots, \qquad (3.15)$$

pri čemu je $g_0 = P\{S = 0\} = P_S(0) = P_N[P_M(0)] = P_N[f_0]$.

<u>Teorema 3.5</u> [4]: *Neka je* $S = M_1 + M_2 + \ldots + M_N$ *i neka važe sve pretpostake iz teoreme 3.3. Ako je primarna raspodela iz klase (a, b, 1). Tada se verovatnoća* $g_k = P\{S = k\}$ *može izračunati pomoću sledeće rekurzivne formula:*

$$g_k = \frac{[p_1-(a+b)p_0]f_k+\sum_{j=1}^{k}(a+bj/k)f_j g_{k-j}}{1-af_0}, \;\; k = 1,2,3,\ldots, \qquad (3.16)$$

pri čemu je $g_0 = P_N[f_0]$.

Rekurzije predstavlje u okviru teoreme 3.4 i teoreme 3.5 se nazivaju Penjerove rekurzije.

3.3 Modeliranje visina gubitka

U prethodnom delu rada, delu 3.2, je razmatrano modeliranje frekvencije događaja gubitka. Za određivanje ukupnog gubitka, neophodno je pored određivanja modela frekvencije, pronaći pogodan model za visinu gubitka. Predstavljanje raspodele visine operativnih gubitaka određenim modelom je težak zadatak. Podaci mogu biti pogrešno zabeleženi, nejasni, nepotpuni ili jednostavno ograničeni. Postoje dva pristupa za rešavanje ovog problema:

1. Neparametarski pristup. Ovaj pristup predstavlja direktno korišćenje empirijske gustine podataka. Neparametarski pristup može biti relevantan u dva slučaja. Prvi slučaj je kada se pretpostavlja da postojeći podaci ne prate neku opšte poznatu rapodelu, a drugi, kada se pretpostavlja da dati skup podataka dovoljno obiman.
2. Parametarski pristup. Ovaj pristup je znatno jednostavniji i koristi se u slučaju kada se dopustivi skup podaka može fitovati nekom teorijskom raspodelom. Osnovni cilj ovog pristupa je da se pronađe teorijska neprekidna raspodela koja najpribližnija odgovara raspodeli visine gubitka dopustivog uzorka podataka.

U nastavku će prvo biti predstavljen neparametrarksi pristup modeliranja operativnog gubitka, a zatim i parametarski pristup. U okviru parametarskog pristupa biće navedene neprekidne raspodela koje mogu biti relevantne za modeliranje operativnih gubitaka i do sada su najčešće korišćene u praksi.

3.3.1 Neparametraski pristup

Modeliranje operativnih gubitaka pomoću njihove empirijske funkcije raspodele je neparametarski pristup, jer ne uključuje ocenu parametara raspodele gubitka. U tom smislu, on je najjednostavniji pristup. Sa druge strane, on prati sledeće dve kritične pretpostavke u odnosu na buduće podatake o gubicima:

1. istorijski podaci o gubicima su dovoljno sveobuhvatni
2. svi gubici u prošlosti imaju jednaku šansu da se ponovo dese u budućnosti, a gubici drugih vrednosti, kao što su potencijalni ekstremni događaji, koji nisu deo postojeće baze podataka, se neće pojaviti u budućnosti.

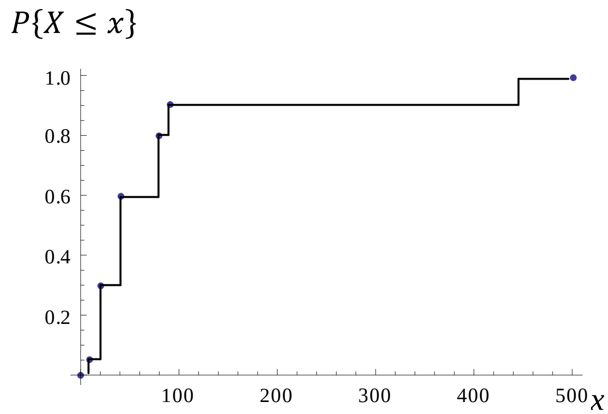
Empirijska funkcija raspodele slučajne promenljive X za određeni uzorak $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, ima sledeći oblik:

$$P\{X \leq x\} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} I(x_k \leq x), \qquad (3.17)$$

gde je $I(x_k \leq x)$ jedinična funkcija definisana na sledeći način:

$$I(x_k \leq x) = \begin{cases} 1, & x_k \leq x \\ 0, & x_k > x \, . \end{cases} \qquad (3.18)$$

Empirijska funkcija raspodele izgleda kao funkcija koraka koja se uvećava za svaku posmatranu vednost slučajne promenljive *X*, što se može uočiti na sledećem grafiku koji predstavlja empirijsku funkciju raspodele.



Grafik 3.3 Funkcija empirijske raspodele.

Empirijska raspodela se često koristi u okviru testova saglasnosti[14]. Test saglasnosti upoređuje vrednosti empirijske raspodele u određenim tačkama sa vrednostima fitovane raspodele gubitka. Ako fitovana raspodela gubitka približno prati empirijsku, to implicira da je dobro urađeno fitovanje, ako ne prati, tada raspodela gubitka nije optimalna.

3.3.2 Parametarski pristup

U ovom delu rada će biti prikazane neprekidne raspodele koje se mogu koristi za modeliranje visine gubitaka prozrokovanih događajima nastalim po osnovu operativnog rizika. Na osnovu činjenice da gubici mogu uzeti samo nenegativne vrednosti, slučajne promenljive koje ih opisuju, kao i njihove raspodele, su definisane samo za interval $(0, \infty)$.

Parametarska raspodela je skup funkcija raspodela u kom je svaki član određen specifičnom jednom ili više vrednosti koje se nazivaju parametri. Broj parametara je fiksan i konačan.

Broj kvantitativnih parametara modela ukazuje na to koliko je kompleksan model, što raspodela ima više parametara kompleksnija je. Ako je model jednostavniji, lakše se određuju vrednosti parametara, stabilniji je tokom vremena, tj. isti model će skoro isto dobro opisivati određenu

[14] Testovi saglasnosti su navedeni i objašnjeni u delu 3.5.

situaciju u budućnosti. Prednosti kompleksnijeg modela je u tome što mnogo preciznije može prikazati stvarnu, trenutnu situaciju.

U nastavku će prvo biti prikazane neke tipične jednostavne parametarske neprekidne rapodele koje se u praksi najčešće koriste za fitovanje visine gubitka, a zatim će biti date uopštene parametarske raspodele. Za svaku raspodelu će biti navedene osnovne karakteristične veličine, osobine, kao i način kako se svaki tip od navedenih slučanih promenljivih može generisati pomoću neke druge vrste raspodela, što je bitna informacija za proces modeliranja.

3.3.2.1 Eksponencijalna raspodela

Slučajna promenljiva X ima eksponencijalnu raspodelu sa parametrom $\lambda,\ \lambda > 0$ (kraće se zapisuje $X\colon \mathcal{E}(\lambda)$), ako njena funkcija gustine, $f(x)$, i funkciju raspodele, $F(x)$, imaju sledeći oblik:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad \text{i} \quad F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0\,. \end{cases} \qquad (3.19)$$

Ovu raspodelu karakteriše samo jedan parametar $\lambda,\ \lambda > 0$, koji je skalarni parametar.

Momenat reda *k* eksponencijalne slučajne promenljive *X* se računa pomoću sledeće jednakosti:

$$E(X^k) = \frac{k!}{\lambda^k}, \qquad (3.20)$$

dok očekivanje i disperzija su definisani putem sledećih formula:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \ \text{ i } \ D(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Koeficijent asimetričnosti i spljoštenosti su jednaki dva i šest, respektivno.

Inverzna funkcija raspodele ima sledeći oblik:

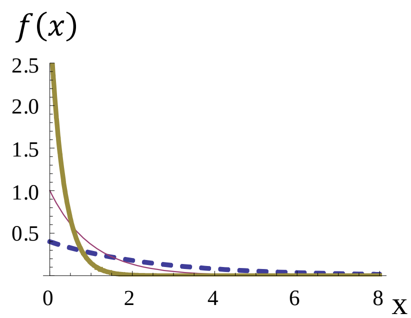
$$F^{-1}(p) = -\frac{1}{\lambda}\log(1-p), \ \ p \in (0,1). \qquad (3.21)$$

Sledi, slučajna promenljiva X koja ima eksponencijalnu raspodelu se može simulirati koristeći metodu inverzne transformacije, $X = -\frac{1}{\lambda}\log Y$, pri čemu je Y slučajna promenljiva koja ima uniformnu raspodelu, tj. $Y\colon U(0,1)$.

Funkcija gustine eksponencijalne raspodele je monotono opadajuća funkcija na desno i karakteriše je eksponencijalno opadanje desnog repa. Funkcija preživljavanja ima sledeći oblik:

$$\bar{F}(x) = e^{-\lambda x}, \qquad (3.22)$$

što znači da se događaji sa visokom vrednošću dešavaju sa verovatnoćom koje teži nuli. Zbog ovog razloga, ova raspodela se retko koristi u modeliranju operativnih gubitaka, kod kojih su centralni problemi visoki gubici (osim ako se ne koristi neka uopštena eksponecijalna raspodela ili mešovita raspodela).



Grafik 3.4 Funkcija gustine eksponencijalne raspodele za vrednosti parametra λ = 0.4 (isprekidana kriva), λ=1 (tanja kriva), λ = 3 (zadebljana kriva).

3.3.2.2 Lognormalna raspodela

Slučajna promenljiva X ima lognormalnu raspodelu, $X: LN(\mu, \sigma)$, ako su njena funkcija gustine i funkcija raspodele sledećeg oblika:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{(\log x - m)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{i} \quad F(x) = \Phi\left(\frac{\log x - m}{\sigma}\right), \qquad (3.23)$$

gde je $\Phi(x)$ funkcija raspodele standardizovane normalne slučajne promenljive X, slučajne promenljive X koja ima normalnu raspodelu sa paramtrima $\mu = 0$ i $\sigma = 1$, tj. $X : N(0, 1)$.

Kao što se može uočiti, lognormalna raspodela je dvoparametarska raspodela sa parametrima m ($-\infty < m < \infty$) i σ ($\sigma > 0$), koji su lokalni i skalarni parametar, respektivno.

Momenan reda k se računa pomoću sledeće formule:

$$E(X^k) = e^{mk + \frac{\sigma^2 k^2}{2}}, \qquad (3.24)$$

dok očekivanje i disperzija imaju sledeći oblik:

$$E(X) = e^{m + \frac{\sigma^2}{2}} \text{ i } D(X) = \left(e^{\sigma^2} - 1\right) e^{2m + \sigma^2}.$$

Koeficijent asimetričnosti i spljoštenosti su:

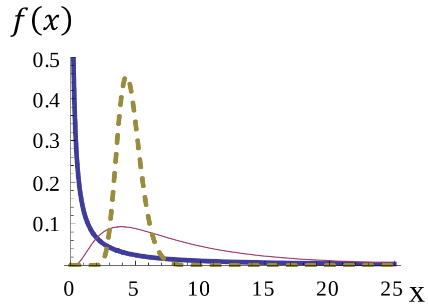
$$K_A = \sqrt{e^{\sigma^2} - 1}\left(2 + e^{\sigma^2}\right) \text{ i } \mathrm{K_S} = e^{4\sigma^2} + 2e^{3\sigma^2} + 3e^{2\sigma^2} - 6,$$

Inverzna raspodela ima sledeći oblik:

$$F^{-1}(p) = e^{\Phi^{-1}(p)\sigma + m}. \qquad (3.25)$$

Na osnovu formule (3.25), lognormalna slučajna promenljiva se može simulirati pomoću slučajne promenljive $X = e^{\Phi^{-1}(U)\sigma + m}$, pri čemu $U: U(0,1)$.

Bitna osobina lognormalna slučajna promenljiva se ogleda u tome što se ona može definisana pomoću slučajne promenljive Y koja ima nomalnu raspodelu sa parametrima m i σ, koristeći transformaciju $X = e^Y$. Stoga, ako X ima lognormalnu raspodelu, log$X$ ima normalnu raspodelu sa istim parametrima.



Grafik 3.5 Funkcija gustine lognormalne raspodele za vrednosti parametara m = 0.5 i σ = 3 (zadebljana kriva), m = 2 i σ = 0.8 (istanjena kriva), m = 1.5 i σ = 0.2 (isprekidana kriva).

Funkcija raspodele slučajne promenljive koja ima lognoramlnu raspodelu ima umereno debao rep, pri čemu njena funkcija preživaljavanja ima sledeći oblik:

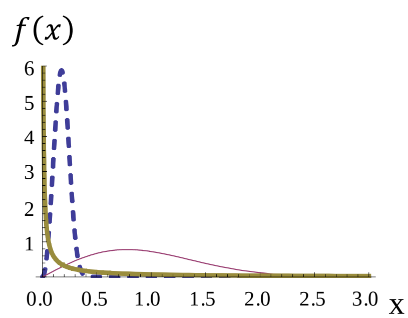
$$\bar{F}(x) \sim x^{-1} e^{-\log^2 x}. \tag{3.26}$$

3.3.2.3 Weibull-ova raspodela

Ova raspodela predstavlja uopštenje eksponencijalne raspodele. Karakterišu je dva parametra, a ne jedan, kao eksponencijalnu raspodelu. Zbog toga pruža veću fleksibilnost pri modeliranju visine gubitka. Njena funkcija gustine i raspodele su sledećeg oblika:

$$f(x) = \alpha\beta x^{\alpha-1} e^{-\beta x^{\alpha}} \text{ i } F(x) = 1 - e^{-\beta x^{\alpha}}, \;\; x > 0, \tag{3.27}$$

gde je β skalarni parameter ($\beta > 0$), a α parametar oblika (α > 0).



Grafik 3.6 Funkcija gustine Weibull-ove raspodele za vrednosti parametara α = 3 i β = 0.2 (isprekidana kriva), α = 2 i β = 1.1 (zadebljana kriva), α = 0.2 i β = 3.5 (istanjena kriva).

Momenat reda k Weibull-ove slučajne promenljive se računa pomoću formule:

$$E(X^k) = \beta^{-k/\alpha}\Gamma\left(1 + \frac{k}{\alpha}\right), \tag{3.28}$$

dok očekivanje i varijansa imaju sledeći oblik:

$$E(X) = \beta^{-1/\alpha}\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \text{ i } D(X) = \beta^{-2/\alpha}\left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\right).$$

Koeficijent asimetričnosti i spoljoštenosti su:

$$K_A = \frac{2\Gamma^3\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)-3\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)+\Gamma\left(1+\frac{3}{\alpha}\right)}{\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right]^{3/2}} \quad \text{i}$$

$$K_S = \frac{-6\left[\Gamma^4\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)+12\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)-3\Gamma^2\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)-4\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1+\frac{3}{\alpha}\right)+\Gamma\left(1+\frac{4}{\alpha}\right)\right]}{\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right]^2}.$$

Inverzna Weibull-ova slučajna promenljiva ne postoji u jednostavnom obliku. Stoga, da bi se generisala Weibull-ova slučajna promenljiva, prvo je potrebno generisati eksponencijalnu slučajnu promenljivu Y sa parametrom β, a zatim izvršiti sledeću transformaciju: $X = Y^{1/\alpha}$.

Funkcija preživaljavanja Weibull-ove slučajne promenljive ima sledeći oblik:

$$\bar{F}(x) = e^{\beta x^{\alpha}}, \tag{3.29}$$

pa prema tome raspodela ima debeo rep za $\alpha < 1$.

Bitno je napomenuti da za $\alpha = 1$ Weibull-ova raspodela se svodi na eksponencijalnu raspodelu.

3.3.2.4 Gama raspodela

Ova raspodela je još jedno uopštenje eksponencijalne raspodele i karakterišu je sledeće funkcije gustine i raspodele:

$$f(x) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \ \text{ i } \ F(x) = \Gamma(\alpha;\beta x), \ \ x > 0, \tag{3.30}$$

pri čemu parametri α i β $(\alpha > 0, \beta > 0)$ su parametar oblika i skalarni parametar, respektivno.

Momenat reda k gama slučajne promenljive se određuje pomoću sledeće jednakosti:

$$E(X^k) = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)\beta^k}, \tag{3.31}$$

dok su očekivanje i varijansa definisani na sledeći način:

$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta} \ \ i \ \ D(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

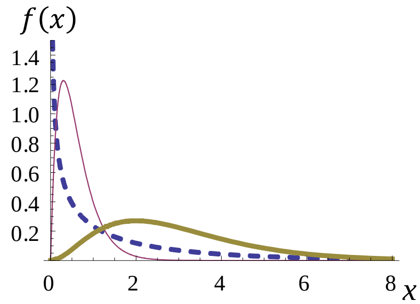
Koeficijenti asimetričnosti i spljoštenosti su:

$$K_A = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \ \ i \ \ K_S = \frac{6}{\alpha},$$

respektivno.

U ovom slučaju se koristi nekompletna gama funkcija, $\Gamma(a;b)$, definisana na sledeći način:

$$\Gamma(a;b) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^b t^{a-1} e^{-t}\, dt.$$



Grafik 3.7 Funkcija gustine gama raspodele za vrednosti parametara α = 0.5 i β = 3 (isprekidana kriva), α=2 i β=0.3 (istanjena kriva), α = 3 i β = 1 (zadebaljana kriva).

Ako je α ceo broj, gama slučajna promenljvuva se može generisati sa parametrima α i β, tako što se generiše suma od α eksponencijalnih slučajnih promenljivih koje karakteriše parametar β. Stoga, na osnovu načina generisanja eksponencijalne slučajne promenljive koji je prikazan u delu 3.3.2.1, ako su U_1, U_2, ..., U_α nezavisne uniformne slučajne promeljive nad intervalom (0,1), slučajna promenljiva $X = -1/\beta \log\left(\prod_{j=1}^{\alpha} U_j\right)$ ima gama raspodelu.

3.3.2.5 Beta raspodela

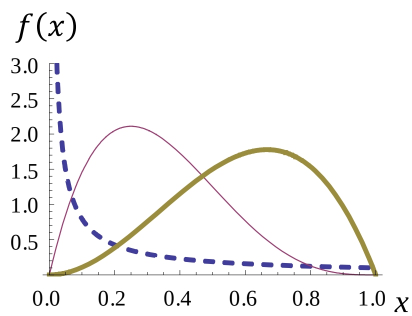
Funkcije gustina i raspodela beta slučajne promenljive imaju sledeći oblik:

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\beta-1} \ \ i \ \ F(x) = I(x;\alpha,\beta), \ \ 0 \le x \le 1, \qquad (3.32)$$

pri čemu je

$$I(x;\alpha,\beta) = \int_0^x u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1} du \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \qquad (3.33)$$

Beta funkcija.



Grafik 3.8 Funkcija gustine beta raspodele za vrednosti parametara α = 0.1 i β = 1 (isprekidana kriva), α=2 i β = 4 (istanjena kriva), α = 3 i β = 2 (zadebaljna kriva).

Kao što se može uočiti vrednosti beta slučajne promenljive X su ograničene na intervalu $[0,1]$. Prema tome, da bi se ova raspodela mogla koristiti u slučaju modeliranja visine operativnog gubitka, vrednosti visine operativnog gubitka je potrebno reskalirati da bi pripadale intervalu

$[0,1]$. U ovom slučaju, sledeći oblik funkcije gustine i raspodele beta slučajne promenljive su korisni, pri čemu važi pretpostavka da je parameter θ poznat:

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha-1}\left(1-\frac{x}{\theta}\right)^{\beta-1}\frac{1}{x} \text{ i } F(x) = I\left(\frac{x}{\theta};\alpha,\beta\right),\ 0 \le x \le \theta,\ \theta > 0. \quad (3.34)$$

Parametri α i β $(\alpha > 0$ i $\beta > 0)$ određuju oblik raspodele.

Momenat reda k beta slučajne promenljive ima sledeći oblik:

$$E(X^k) = \frac{(\alpha+\beta-1)!(\alpha+k-1)!}{(\alpha-1)!(\alpha+\beta+k-1)!}. \quad (3.35)$$

Očekivanje i disperzija za ovu raspodelu imaju sledeći oblik:

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \text{ i } D(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$$

Koeficijent asimetričnosti i spljoštenosti su definisani na sledeći način:

$$K_A = \frac{2(\beta+\alpha)\sqrt{1+\alpha+\beta}}{\sqrt{\alpha+\beta}(2+\alpha+\beta)} \text{ i } K_S = \frac{6\left[\alpha^3+\alpha^2(1-2\beta)+\beta^2(1+\beta)-2\alpha(2+\beta)\right]}{\alpha\beta(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+3)}$$

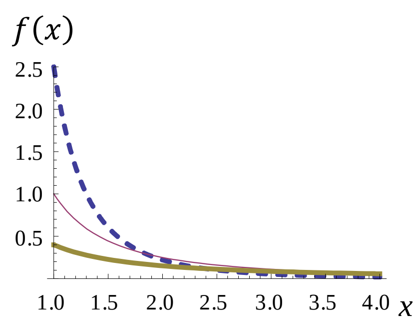
Može se uočiti da je beta raspodela povezana sa gama raspodelom. Neka su X i Y gama slučajne promenljive sa parametrima α_1, β_1 i α_2, β_2, respektivno. Tada $Z = X/(X+Y)$ ima beta raspodelu sa parametrima α_1 i α_2. Ova osobina može se koristiti za generisanje beta slučajna promenljiva pomoću dve gama slučajne promenljive.

3.3.2.6 Paretova raspodela

Paretovu raspodelu karakterišu funkcija gustine i raspodele sledećeg oblika:

$$f(x) = \frac{\alpha\beta^\alpha}{x^{\alpha+1}} \;\; i \;\; F(x) = 1 - \left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha,\ \beta < x < \infty. \quad (3.36)$$

Domen dopustivih vrednosti Paretove slučajne promenljive X zavisi od parametra lokacije β, $\beta > 0$. Drugi parametra α, $\alpha > 0$, je parametar oblika.



Grafik 3.9 Funkcija gustine Paretove raspodele za vrednosti parametara α = 2.5 i β = 1 (isprekidana kriva), α=1 i β = 1 (istanjena kriva), α = 0.4 i β = 1 (zadebljana kriva).

Red momenta k Paretove slučajne promenlji je definisan na sledeći način:

$$E(X^k) = \frac{\alpha\beta^k}{\alpha-k}, \quad (3.37)$$

sledi očekivanje i varijansa imaju sledeći oblik:

$$E(X) = \frac{\alpha\beta}{\alpha-1} \text{ i } D(X) = \frac{\alpha\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} \text{ za } \alpha > 2.$$

Koeficijent asimetirčnosti i spljoštenosti su:

$$K_A = \sqrt{\frac{\alpha-2}{\alpha}}\frac{2(\alpha+1)}{\alpha-3} \text{ i } K_S = \frac{6(\alpha^3+\alpha^2-6\alpha-2)}{\alpha(\alpha-3)(\alpha-4)},$$

respektivno.

Inverzna funkcija funkcije raspodele je

$$F^{-1}(p) = \beta\left((1-p)^{-1/\alpha} - 1\right), \tag{3.38}$$

Naravno i kod ove vrste slučajne promenljive, funkcija $F^{-1}(p)$ se koristi za generisanje njenih vrednosti.

Paretova raspodela je raspodela sa veoma debelim repom. Parametar α određuje debljinu desnog repa raspodele, koji je monotona opadajući. Funkcija preživaljavanja ove raspodele ima sledeći oblik:

$$\bar{F}(x) = \left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^{\alpha}. \tag{3.39}$$

Repovi koji su proporcionalni sa $x^{-\alpha}$ se zovu stepeni repovi, zato što prate stepenu funkciju. U slučaju kada je $\alpha \leq 1$ sledi da je rep veoma debeo, i očekivanje i varijansa su beskonačni, što znači da je gubitak beskonačno visoke vrednosti moguć.

Dok se sa jedne strane Paretova raspodela čini veoma privlačnom za modeliranje visine operativnog gubitka, jer se obuhvataju i gubici veoma visoke vrednosti, sa druge strane, mogućnost da očekivanje i varijansa mogu da budu beskonačni može prouzrokovati problem.

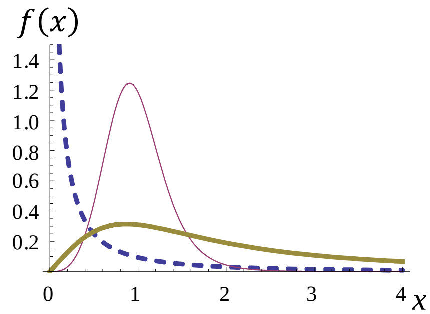
Još neke bitne činjenice vezane za Paretove raspodelu su sledeće:

- Različite verzije Paretove raspodele su moguće. Obično se koriti pojednostavljena jednoparametarska verzija Paretove raspodele, pri čemu je $\beta = 1$.
- Jednoparametarska Paretova slučajna promenljiva može se dobiti jednostavnom transformacijom eksponencijalne slučajne promenljive. Ako slučajna promenljiva Y prati eksponencijalnu raspodelu sa parametrom λ, tada slučajna promeljiva $X = e^Y$ ima jednoparametarasku Paretovu raspodelu sa istim parametrom oblika.
- Dvoparametarska Paretova raspodela može se reparametrizovati na taj način da se dobije generalizovana Paretova rasodela. Ova dobijena raspodela se može koristiti za modeliranje ekstremnih događaja koje nadmašuju visoke pragove.

3.3.2.7 Burova raspodela

Ova raspodela je uopštena troparametarska verzija Paretove raspodele, stoga omogućava veću fleksibilnost u definisanju oblika raspodele pomoću trećeg parametra γ ($\gamma > 0$). Njena funkcija gustina i funkcija raspodele se mogu predstaviti pomoću sledećih jednačina:

$$f(x) = \gamma\alpha\beta^{\alpha}\frac{x^{\gamma-1}}{(\beta+x^{\gamma})^{\alpha+1}} \ \ i\ F(x) = 1 - \left(\frac{\beta}{\beta+x^{\gamma}}\right)^{\alpha},\ x > 0. \quad (3.40)$$



Grafik 3 10 Funkcija gustine Burove raspodele za vrednosti parametara α = 3, β = 1 i γ = 0.5 (isprekidana kriva), α = 2, β = 2 i γ = 4 (istanjena kriva), α = 0.5 i β = 1.5, γ = 2 (zadebljana kriva).

Momenat reda k Burove raspodele se izračunava pomoću jednačine:

$$E(X^k) = \frac{\beta^{k/\gamma}}{\Gamma(\alpha)}\Gamma\left(1+\frac{k}{\gamma}\right)\Gamma\left(\alpha-\frac{k}{\gamma}\right),\ \ -\gamma < k < \gamma\alpha, \quad (3.41)$$

Na osnovu prethodne jednačine mogu se izvesti očekivanje i varijansa koje imaju se sledeći oblik:

$$E(X) = \frac{\beta^{1/\gamma}}{\Gamma(\alpha)}\Gamma\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{\gamma}\right),\ \ \gamma\alpha > 1 \text{ i}$$

$$D(X) = \frac{\beta^{2/\gamma}}{\Gamma(\alpha)}\Gamma\left(1+\frac{2}{\gamma}\right)\Gamma\left(\alpha-\frac{2}{\gamma}\right) - \frac{\beta^{2/\gamma}}{\Gamma^2(\alpha)}\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)\Gamma^2\left(\alpha-\frac{1}{\gamma}\right),\ \ \gamma\alpha > 2.$$

Izrazi za koeficijente asimetričnosti i spljoštenosti su komplikovani, pa neće biti predstavljeni.

Burova slučajna promenljiva može biti generisana pomoću inverzne funkcije raspodele koja ima sledeći oblik:

$$F^{-1}(p) = \left(\beta\left((1-p)^{-1/\alpha}-1\right)\right)^{1/\gamma}. \quad (3.42)$$

Funkcija preživaljavanja je stepena funkcija i ima sledeći oblik:

$$\bar{F}(x) = \left(\frac{\beta}{\beta+x^{\gamma}}\right)^{\alpha}. \quad (3.43)$$

Raspodela ima debeo rep za α < 2 , a za α < 1 veoma debeo rep.

Za $\gamma = 1$ Burova raspodela se svodi na Paretovu raspodelu, a za $\beta = 1$ je poznata kao loglogistička raspodela. Ova raspodela je takođe pogodna za modeliranje visine operativnog gubitka, ali neće biti prikazana u ovom radu.

3.3.3 Debljina repa raspodele

Osnovi cilj modeliranja je izbor modela koji najbolje opisuje određenu pojavu. U kontekstu modeliranja operativnog rizika, pri odabiru raspodele visine gubitka veoma je bitna osobina debljine repa date raspodele. Na osnovu debljine repa, može doći do prihvatanja ili odbijanja modela.

Postoji dva kriterijuma na osnovu kojih se može, na lakši način, odrediti debljina repa raspodela. Da li raspodela ima tanak ili debeo rep može se odrediti:

- Na osnovu postojanja momenta određanom reda k raspodele koja se posmatra. Ako postoje svi k-ti moment, za $k > 0$, određene raspodele, raspodela ima tanak rep. Raspodela ima debeo rep, ako postoje svi k-ti moment do određenog reda, a moment većeg reda od tog ne postoje.
- Na osnovu prirode hazard stope, može se utvrditi da li raspodela ima tanak ili debeo rep. Ako funkcija hazard stope opada, tada raspodela ima debeo rep. U suprotnom, očekuje se da raspodela ima tanak rep.

U slučaju kada je potrebno odrediti koji je pogodnije model, informacija o tome koja funkcija gustine raspodele ima deblji rep, može pomoći u odluci. Na osnovu granične vrednosti razlomka funkcija preživljavanja dve različite raspodele, tj. na osnovu jednakosti:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{F_1}(x)}{\overline{F_2}(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\overline{F_1}'(x)}{\overline{F_2}'(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{-f_1(x)}{-f_2(x)},$$

može se odrediti koja od dve posmatrane raspodele ima deblji rep. Ako ova granična vrednost divergira, tada raspodela čija se funkcija preživaljavanja nalazi u broiocu ima deblji rep, jer divergencija implicira da kod druga raspodela postoji mnogo veća verovatnoću da će se desiti događaji visoke vrednosti, nego kod prve raspodele.

3.3.4 Kreiranje nove raspodele

Često poznate raspodele ne mogu dovoljno dobro opisati dopustivi skup podataka. Stoga, mogućnosti kreiranja novih raspodela od postojećih, omogućava da se pronađe pogodniji model koj opisuje visinu gubitka.

U ovom delu rada biće prikazano kako se mogu kreirati nove raspodele na osnovu postojećih. Metode koje će biti prikazane su: metoda skaliranja, stepenovanja i eksponovanja, kao i mešanje raspodela. Ovim metodama mogu se dobiti nove raspodele ili ista raspodela, ali sa drugom vrednosti parametra.

- **Skaliranje**

Skaliranje se u slučaja operativnog rizika koristi da bi se uračunala inflacija na već izračunatu visinu gubitka na godišnjem nivou. Neka je godišnji gubitak predstavljen slučajnom promenljivom X i neka je predviđena inflacija 5%, tada se godišnji gubitak za sledeću godinu može predstaviti slučajnom promenljivom $Y = 1.05X$.

Sledeća teorema definiše funkciju raspodele skalirane slučajne promenljive.

<u>Teorema 3.6</u> [4]: *Neka je X neprekidna slučajna promeneljiva čija je funkcija raspodele $F_X(x)$, a funkcija gustine $f_X(x)$. Neka je $Y = \theta X$, gde je $\theta > 0$. Tada važi da je*

$$F_Y(y) = F_X\left(\frac{y}{\theta}\right) \quad i \quad f_Y(y) = \frac{1}{\theta} f_X\left(\frac{y}{\theta}\right). \qquad (3.44)$$

<u>Dokaz</u>:

Na osnovu definicije funkcije raspodele sledi

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} \\ &= P\{\theta X \leq y\} \\ &= P\left\{X \leq \frac{y}{\theta}\right\} \\ &= F_X\left(\frac{y}{\theta}\right) \end{aligned}$$

Na osnovu definicije funkcije gustine sledi

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{d}{dy} F_Y(y) \\ &= \frac{1}{\theta} f_X\left(\frac{y}{\theta}\right) \end{aligned}$$

Što je i trebalo dokazati.

□

- **Stepenovanje**

Stepenovanjem određene slučajne promenljive dobija se nova slučajna promenljiva, čije su funkcija raspodele i gustine date putem sledeće teoreme.

<u>Teorema 3.7</u> [4]**:** *Neka je X neprekidna slučajna promenljiva čija je funkicija gustine $f_X(x)$ i funkcija raspodele $F_X(x)$, pri čemu je $F_X(0)=0$. Neka je $Y = X^{1/\tau}$. Tada važi sledeće:*

- *ako je $\tau > 0$, funkcija raspodele slučajne promenljive Y , $F_Y(y)$, ima sledeći oblik:*

$$F_Y(y) = F_X(y^\tau) \quad i \quad f_Y(y) = \tau y^{\tau-1} f_X(y^\tau), \ y > 0. \qquad (3.45)$$

- *ako je $\tau < 0$, $F_Y(y)$ ima sledeći oblik:*

$$F_Y(y) = 1 - F_X(y^\tau) \quad i \quad f_Y(y) = -\tau y^{\tau-1} f_X(y^\tau), y > 0. \qquad (3.46)$$

<u>Dokaz</u>:

Ako je $\tau > 0$, sledi funkcija raspodele slučajne promenljive Y se može izračunati na sledeći način:

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\left\{X^{\frac{1}{\tau}} \leq y\right\} = P\{X \leq y^\tau\} = F_X(y^\tau),$$

a funkcija gustine

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \tau y^{\tau-1} f_X(y^\tau).$$

Ako je $\tau < 0$, sledi

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\left\{X^{\frac{1}{\tau}} \leq y\right\} = P\{X \geq y^\tau\} = 1 - F_X(y^\tau)$$

i

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = -\tau y^{\tau-1} f_X(y^\tau).$$

Što je i trebalo dokazati.

□

Definicija 3.3: *Neka je X neprekidna slučajna promenljiva,* $Y = X^{\frac{1}{\tau}}$ *stepenovana slučajna promenljiva. Ako je* $\tau > 0$ *raspodela slučajne promenljive Y se zove transformisana, ako je* $\tau = -1$ *zove se inverzna, a ako je* $\tau < 0$ *i* $\tau \neq -1$ *zove se inverzna transformisana.*

- **Eksponovanje**

Teorema 3.8 [4]: *Neka je X neprekidna slučajna promenljiva čija je funkicija gustine* $f_X(x)$ *i funkcija raspodele* $F_X(x)$*, pri čemu je* $f_X(x) > 0$ *za svako* $x \in \mathbb{R}$*. Neka je* $Y = e^X$*. Tada, za* $y > 0$ *funkcija raspodele i funkcija gustine slučajne promenljive Y imaju sledeći oblik:*

$$F_Y(y) = F_X(ln\, y) \quad i \quad f_Y(y) = \frac{1}{y} f_X(ln\, y). \qquad (3.47)$$

Dokaz:

Ako važe pretpostakve navedene u teoremi 3.8, tada važe sledeće jednakosti:

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{e^X \leq y\} = P\{X \leq \ln y\} = F_X(\ln y) \text{ i}$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{1}{y} f_X(\ln y).$$

Što je i trebalo dokazati.

□

- **Mešanje raspodela**

Mešanje raspodela se koristi u slučaju kada raspodela slučajne promenljive koja opisuje visinu gubitka ima parametar koji može da uzima različite vrednosti i koji je i sam slučajna promenljiva sa određenom raspodelom. Rezultati sledeća teorema se koriste za određivanje funkcije gustine raspodele čiji parameter je slučajna promenljiva.

Teorema 3.9 [4]: *Neka je X neprekidna slučajna promenljiva sa uslovnom raspodelom gustine* $f_{X|\Lambda}(x|\lambda)$ *i funkcijom uslovne raspodele* $F_{X|\Lambda}(x|\lambda)$*, gde je* λ *parametar raspodele slučajne promenljive X. Neka je* $\boldsymbol{\lambda}$ *realizacija slučajne promenljive* Λ *čija je funkcija gustine* $f_\Lambda(\lambda)$*. Tada bezuslovna funkcija gustine slučajne promenljive X ima sledeći oblik:*

$$f_X(x) = \int f_{X|\Lambda}(x|\lambda) f_\Lambda(\lambda) d\lambda, \qquad (3.48)$$

pri čemu je dati integral definisan za sve vrednosti λ *sa pozitivnom verovatnoćom. Dobijena raspodela se naziva mešana rasapodela.*

Funkcija mešane raspodele se može izračunati na sledeći način:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} \int f_{X|\Lambda}(x|\lambda) f_\Lambda(\lambda) d\lambda\, dy \\ &= \int \int_{-\infty}^{x} f_{X|\Lambda}(x|\lambda) f_\Lambda(\lambda) dy\, d\lambda \\ &= \int F_{X|\Lambda}(x|\lambda) f_\Lambda(\lambda) d\lambda\,. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Momenat reda *k* i varijansa mešane raspodede imaju sledeći oblik:

$$E(X^k) = E\left[E\left(X^k \middle| \Lambda\right)\right] \text{ i } \mathrm{Var}(X) = E[\mathrm{Var}(X|\Lambda)] + \mathrm{Var}[E(X|\Lambda)], \quad (3.50)$$

respektivno.

Bitna osobina koju imaju mešane raspodele je da teže ka raspodeli sa debelim repom, tako da je ovaj model pogodan za generisanje takvih modela, kao što su modeli operativnog rizika. Ova osobina sledi na osnovu činjenice da $f_{X|\Lambda}(x|\lambda)$ ima opadajuću hazard stopu za svako λ, stoga i mešana raspodela ima opadajuću hazard stopu za svako λ.

3.3.5 Odsečene raspodele

U slučaju operativnog rizika, često se pojavljuje slučaj u kome nije potrebno posmatrati podatke koji se nalaze ispod ili iznad određene vrednosti ili praga. U tom slučaju slučajna promenljiva koja predstavlja visinu gubitka može biti definisana na dva načina, koja će biti predstavljen u okviru ovog dela rada.

<u>Definicija 3.4</u>: *Neka je X slučajna promenljiva definisana za sve posmatrane vrednosti gubitka. Ako se ograniči vrednosti gubitka sa donje strane, sa pragom d, dobije se slučajna promenljiva sledećeg oblika:*

$$Y = (X-d)_+ = \begin{cases} 0, & X < d \\ X-d, & X \geq d. \end{cases} \quad (3.51)$$

Ova slučajna promenljiva se koristi u slučaju operativnog gubitka, ako vrednosti manje od praga *d* nisu relevantne za analizu, nemaju veliki uticaj na analizu i modeliranje.

Funkcija raspodele i funkcija gustine slučajne promenljive *Y* imaju sledeći oblik:

$$F_Y(y) = \begin{cases} F_X(y+d), & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases} \text{ i} \quad (3.52)$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(y+d), & y > 0 \\ F_X(d), & y = 0 \\ 0, & y < 0\,. \end{cases} \quad (3.53)$$

U ovom slučaju, vrednosti manje od *d* se ne ignorišu, već se definišu kao nula.

Momenat reda *k* ovako definisane slučajne promenljive ima sledeći oblik:

- $E[(X-d)_+^k] = \int_d^\infty (x-d)^k f(x) dx$, ako je *X* neprekidna slučajna promenljiva i
- $E[(X-d)_+^k] = \sum_{x_j > d} \left(x_j - d\right)^k p\left(x_j\right)$, ako je *X* diskretna slučajna promenljiva.

<u>Definicija 3.5</u>: *Neka je X slučajna promenljiva definisana za sve posmatrane vrednosti gubitka. Ako ograničimo vrednosti gubitka sa gornje strane, sa pragom u, dobije se slučajna promenljiva sledećeg oblika:*

$$Y = X \wedge u = \begin{cases} X, & X < u \\ u, & X \geq u\,. \end{cases} \qquad (3.54)$$

U kontekstu operativnog rizika, prag *u* se može definisati u slučaju kada su gubici veći od date vrednosti *u* osigurani, pa će vrednosti gubitaka iznad datog praga *u* biti pokriveni na osnovu ugovora o osiguranju.

Funkcija raspodele i funkcija gustine ovako definisane slučajne promenljive Y imaju sledeći oblik:

$$F_Y(y) = \begin{cases} F_X(y), y < u \\ 1\ , \quad\ y \geq u \end{cases} \text{ i} \qquad (3.55)$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(y)\,, & y < u \\ 1 - F_X(u), & y = u \\ 0\,, & y > u\,. \end{cases} \qquad (3.56)$$

Momenat reda *k* slučajne premenljive $Y = X \wedge u$ ima sledeći oblik:

- $E[(X \wedge u)^k] = \int_{-\infty}^{u} x^k f(x)\, dx + u^k[1 - F(u)]$, ako je X neprekidna slučajna promenljiva i
- $E[(X \wedge u)^k] = \sum_{x_j < u} x_j^k p(x_j) + u^k[1 - F(u)]$, ako je *X* diskretna slučajna promenljiva.

3.4 Ocenjivanje parametara raspodele

U slučaju kada se koristi parametarski model za opisivanje fenomena koji se posmatra, nakon odabira modela, potrebno je oceniti vrednosti parametara datog modela, a zatim odrediti koja ocena je najpogodnija za korišćenje.

U ovom delu biće predstavljeno nekoliko metoda ocenjivanja parametara posmatranog modela, kao i osobine koje se posmatraju pri odabiru najpogodnije ocene parametara.

3.4.1 Metod momenta i metod kvantila

Neka je dat slučajan uzorak $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ i neka raspodela slučajne promenljive *X* zavisi od *p* parametra, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$**.** Funkcija raspodele se označava na sledeći način:

$$F(x|\boldsymbol{\theta}), \ \ \boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)^T,$$

gde je $\boldsymbol{\theta}$ transponovani vektor parametara.

Neka je:

- $m_k(\boldsymbol{\theta}) = E(X^k|\boldsymbol{\theta})$ - momenat reda *k* slučajne promenljive *X*,
- $\pi_g(\boldsymbol{\theta})$ - teorijski 100*g*-ti percentil, pri čemu $g \in (0,1)$, raspodele slučajne promenljive *X*,
- $\widehat{m}_k = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^k$ - uzorački momenat reda *k* i
- $\hat{\pi}_g$- uzorački 100*g*–ti kvantil.

<u>Definicija 3.6</u>: *Ocena metodom momenta parametara* $\boldsymbol{\theta}$ *je svako rešenje sledećeg sistema p jednačina:*

$$m_k(\boldsymbol{\theta}) = \widehat{m}_k,\ k = 1,2, \dots p. \qquad (3.57)$$

Motiv ovog načina ocenjivanja ogleda se u tome da momenti reda *k*, $k = 1, 2, \dots, p$, posmatrane raspodele budu jednaki odgovarajućim uzoračkim momentima istog reda, uzorka čiji su elementi realizacija date slučajne promenljive.

<u>Definicija 3.7</u>: *Ocena parametra* $\boldsymbol{\theta}$ *metodom percentila je svako rešenje sledećeg sistema p jednačina:*

$$\pi_{g_k}(\boldsymbol{\theta}) = \hat{\pi}_{g_k},\ k = 1, 2, \dots, p\,, \qquad (3.58)$$

gde su $g_1, g_2, \dots, g_p$ *proizvoljno izabrani percentili.*

Motiv ovog metoda ocenjivanja parametara je da rezultat bude model koji ima istih *p* percenitla kao i empirijska raspodela.

Mana ove dve metode je u tome što postoji mogućnost da ne postoji rešenje datih sistema, kao i da, ako postoji, nije jedinsvteno. Ove metode najčešće se koriste za dobijanje početnih iteracija za maksimizaciju funkcije verodostojnosti, koja se vrši u okviru metode maksimalne verodostojnosti. Maksimizacija funkcije verodostojnosti se može vršiti metodama numeričke opitmizacije.

3.4.2 Ocena maksimalne verodostojnosti

Ocenjivanje nepoznatih parametra kod ove metode se vrši, tako što se prvo odredi funkcjia cilja, koja predstavlja funkciju verodostojnosti, a zatim se ona maksimizira. Rezultat maksimizacije date funkcije cilje, ako postoji, predstavlja ocene parametara raspodele posmatarane slučajne promenljive.

Neka je dat slučajan uzorak $(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Slučajne promenljive X_1, X_2,…, X_n imaju istu raspodelu, koja zavisi od vektora parametara, $\boldsymbol{\theta}$. Neka važi pretpostavka da su date slučajne promenljive nezavisne.

<u>Definicija 3.8</u>: *Neka važe prethodno navedene pretpostavke i neka je funkcija verodostojnosti definisana na sledeći način:*

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\theta}) &= \prod_{i=1}^{n} P\{X = X_i|\boldsymbol{\theta}\} \\ &= \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(X_i|\boldsymbol{\theta}) \end{aligned} \qquad (3.59)$$

Ocena parametara, $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$, *predstavlja vrednost parametra* $\boldsymbol{\theta}$ *za koje funkcija* $L(\boldsymbol{\theta})$ *dostiže maksimum.*

Na osnovu činjenice da funkcije $L(\boldsymbol{\theta})$ i $l(\boldsymbol{\theta}) = \ln L(\boldsymbol{\theta})$ imaju iste tačke maksimum i da je izračunavanje maksimuma funkcije $l(\boldsymbol{\theta})$ često lakše nego pronalaženje maksimuma funkcije $L(\boldsymbol{\theta})$, u mnogim slučajevima se pronalazi rešenje problem maksimizacije funkcije $l(\boldsymbol{\theta})$ i na taj način dolazi do rešenja problema maksimizacije funkcije $L(\boldsymbol{\theta})$.

Za funkciju verodostojnosti predstavljenu u definiciji 3.8 funkcija $l(\boldsymbol{\theta})$ ima sledeći oblik

$$l(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^{n} \ln f_{X_j}\left(x_j \middle| \boldsymbol{\theta}\right). \qquad (3.60)$$

Često postoje situacije kada su prikupljeni podaci grupisani. Neka je n_j, $j = 1, 2, \ldots, k$, broj opažanja unutar interval $(c_0, c_1]$, $c_0 < c_1 < \cdots < c_k$. Funkcija verodostojnosti u ovom slučaju ima sledeći oblik:

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{j=1}^{n} \left[F\left(c_j \middle| \boldsymbol{\theta}\right) - F\left(c_{j-1} \middle| \boldsymbol{\theta}\right)\right]^{n_j}. \qquad (3.61)$$

Sledi, prirodni logaritam date funkcije je

$$l(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^{n} n_j \ln\left[F\left(c_j \middle| \boldsymbol{\theta}\right) - F\left(c_{j-1} \middle| \boldsymbol{\theta}\right)\right]. \qquad (3.62)$$

Nedostaci ove metode se ogledaju u tome što rešavanjem datog problema maksimizacije se može dobiti lokalni maksimum, a ne globalni. U nekim slučajevima postoji mogućnost da rešenje datog problema maksimizacije ne postoji.

Takođe, često nije lako odrediti varijansu ocene maksimalne verodostojnosti. Međutim, moguće je aproksimirati varijansu, što će biti predstavljeno u okviru sledeće teroreme, teoreme 3.10.

<u>*Teorema 3.10*</u> [4]*: Neka funkcija gustine slučajne promenljive X ,* $f(x,\theta)$*, zadovoljava sledeće uslove u okolini tačke* θ*:*

- $\ln f(x,\theta)$ *je tri puta diferencijabilna po* θ*.*
- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial\theta} f(x,\theta)dx = 0$*.Ovo ukazuje da izvod može da se izmesti izvan integrala, pa se računa izvod od 1, što je jednako nula.*
- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} f(x,\theta)dx = 0$*. Isti koncept, kao pod(ii).*
- $-\infty < \int_{-\infty}^{\infty} f(x,\theta) \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln f(x,\theta)\, dx < 0$*, ova osobina ukazuje na to da dati integral postoji i da tačka u kojoj je prvi izvod jednak nuli je tačka maksimuma.*
- *Postoji funkcija H(x), takva da je* $\int_{-\infty}^{\infty} H(x)f(x,\theta)dx < \infty$ *i* $\left|\frac{\partial^3}{\partial\theta^3} \ln f(x,\theta)\right| < H(x)$*.*

Tada važi:

- *Kada* $n \to \infty$ *verovatnoća da jednačina* $\frac{\partial}{\partial\theta} \ln L(x,\theta) = 0$ *ima rešenje, teži 1.*
- *Kada* $n \to \infty$ *raspodela ocene maksimalne verodostojnosti* $\hat{\theta}_n$ *konvergira ka normalnoj raspodeli sa očekivanjem jendnakim* θ *i varijansom* $Var\left(\hat{\theta}_n\right)$ *takvom da važi*

$$I(\theta)Var\left(\hat{\theta}_n\right) \to 1,$$

$$gde\ je\ \ I(\theta) = -nE\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} ln\, f(x,\theta)\right] = nE\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta} ln\, f(x,\theta)\right)^2\right].$$

Matrica $[I(\theta)]^{-1}$ je korisna aproksimacija za $Var(\hat{\theta}_n)$ i naziva se informacijska matrica. Na osnovu teoreme 3.10 može se videti da je ocena maksimalne verodostojnosti $\hat{\theta}_n$ asimptotski normalna i asimptotski centrirana (nepristrasna), tj. važi jednakost $\lim_{n\to\infty} E[\hat{\theta}_n] = \theta$. Četiri uslova koja su navedena u datoj teoremi se nazivaju uslovi regularnosti. Takođe, za dovoljno veliko n , dobijena ocena predstavlja donju granicu Rao-Cramer-ove nejednakosti[15].

Stoga, na osnovu prethodno navedenih osobina, ona je asimptotski najefikasnija ocena[16], što predstavlja i najveću prednost ove metode ocenjivanja.

3.5 Testovi saglasnosti (*Goodness of Fit Tests*)

U ovom delu rada biće prikazani testovi koji se koriste za određivanje da li dobijeni model dovoljno dobro opisuje određenu pojavu koju posmatramo. Takođe, biće prikazani kriterijumi koji pokazuju koji model, od više njih, bolji. Kod modeliranja operativnog rizika, dobar izbor modela je presudan, zato što pogrešno izabran model kao rezultat može da dovede do netačnog određivanja visine kapitalnog zahteva za operativni rizik.

U ovom radu će biti predstavljeni:

- grafički testovi ispitivanja saglasnosti, kao što su Q-Q dijagram (*The Quantile-Quantile Plot*) i Dijagram očekivanog viška (*The Mean Excess Plot*)
- Hi-kvadratni testovi (*Chi-Squared Test*), kao što su Pirsonov test **(***Pearson's test*) i Test količnika funkcija verodostojnosti (*Likelihood Ratio Test*) i
- testovi koji upoređuju empirijsku i teorijsku funkciju raspodele, kao što su Kolmogorov-Smirnovljev test (*Kolmogorov-Smirnov Test*) i Anderson-Darlingov test (*Anderson-Darling Test*).

[15] <u>*Teorema 3.10.1*</u> (*Rao-Cramer*): *Ako je slučajna promenljiva X neprekidnog tipa sa funkcijom gustine $f(x,\theta)$ za koju su ispunjeni uslovi regularnosti i $\hat{\theta}_n$ centrirana ocena parametra θ tada važi sledeća nejednakost:*

$$D(\hat{\theta}_n) = E\left[(\hat{\theta}_n - \theta)^2\right] \geq \frac{1}{n\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial}{\partial\theta} ln\, f(x,\theta)\right]^2 f(x,\theta)dx}$$

[16] Ocena $\hat{\theta}_n$ je asimptotski efikasna ocena parametra θ, ako važe sledeći uslovi:

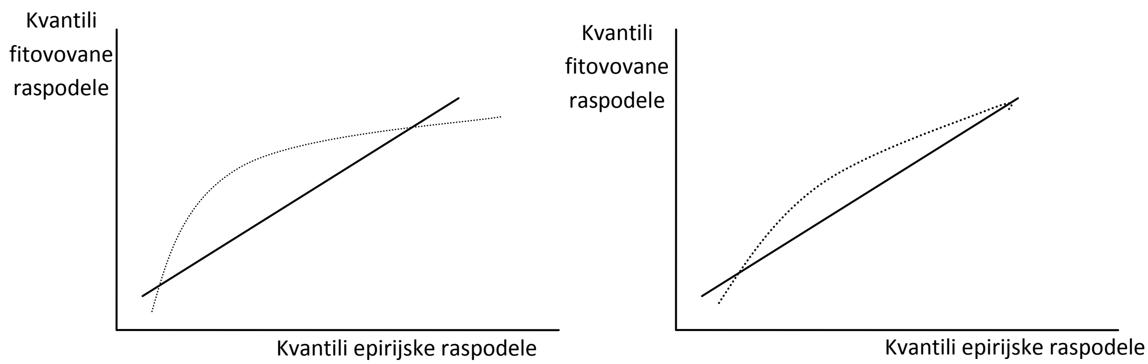
- $\hat{\theta}_n$ ima asimptotsku raspodelu sa konačnom sredinom i varijansom,
- $\hat{\theta}_n$ je konzistentan ,tj. važi $\lim_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta}_n - \theta| \leq \varepsilon\} = 1, \forall\varepsilon > 0$, i
- nijedan konzistentan ocenjivač od θ nema manju asimptotsku varijansu od $\hat{\theta}_n$.

3.5.1 Grafički testovi ispitivanja saglasnoti

Ova tehnika obezbeđuje vizuleno ispitivanje skupa podataka. Jedan od ovih testova su Test Q-Q dijagrama i Test dijagrama očekivanog viška, koji će biti predstavjeni u nastavku.

Q-Q dijagram

Q-Q grafik je grafik koji predstavlja odnos empirijskih kvantila i kvantila raspodele fitovane na osnovu podataka. U slučaju da je raspodela izabrana korektno, tada se Q-Q grafik približno podudara sa linijom koja zaklapa ugao od 45° sa osama grafika.



Grafik 3.11 Q-Q grafici uporedivanja epirijske sa različitim teorijskim raspodelama.

Dati grafici predstavljaju odnos empirisjkih kvatnitla i kvantila dve različite raspodele. Pošto je drugi grafik bliži liniji koja zaklapa ugao od 45° sa osama grafika, druga fitovana raspodela bolje opisuje dopustivi skup podataka.

Dijagaram očekivanog viška

Za određenu vrednost u, funkcija očekivanog viška za slučajnu promenljivu X je uslovno očekivanje koje se može prikazati na sledeći način:

$$e(u) = E[X - u|X > u]. \quad (3.63)$$

Funkcija očekivanog viška uzorka se računa pomoću sledećeg izraza:

$$e_n(u) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_j - u)_+}{\sum_{j=1}^{n} I_{(x_j > u)}}. \quad (3.64)$$

Grafik očekivanog viška predstavlja odnos $e_n(u)$ i vrednosti u.

Kod raspodela sa debelim repom, funkcija $e(u)$ najčešće teži beskonačnosti i predstavlja grafik rastuće krive.

3.5.2 Hi-kvadratni testovi

Slika nekada govori više od reči, ali ipak radi veće preciznosti potrebno je često izvršiti i matematičko dokazivanje određenog tvrđenja.

U ovom slučaju da bi se izvršilo testiranje, potrebno je prvo definisati dve vrste hipoteza, a to su: nulta hipoteza (H_0) i alternativna hipoteza (H_A). Cilj testiranja hipoteza je da se odredi koja hipoteza je tačna na osnovu uzorka iz posmatrane populacije.

U ovom delu će biti predstavljene dve klase ovih tesova, a to su Pirsonov test i Test kočnika funkcija verodostojnosti. Prva vrsta testova se koriste u slučaju diskretnih raspodela, a druga u slučaju neprekidnih raspodela. Ovim testovima se vrši provera da li podaci iz uzorka prate određenu, posmatranu raspodelu.

Pirsonov test

U okviru ovog testa nulta i alternativna hipoteza su definisane na sledeći način:

H_0: Podaci prate posmatranu raspodelu.

H_A: Podaci ne prate posmatranu raspodelu.

Ova vrsta testova je pogodna za testiranje saglasnosti fitovanja raspodele u slučaju kada je raspodela diskretnog tipa . Stoga, vrši se testiranje nulte hipoteze, kojom se pretpostavlja da frekvencija događaja prati određenu raspodelu diskretnog tipa. U prvom koraku vrši se podela podatke u k klasa-intervala. Zatim, drugi korak je izračunavanje hi-kvadratne test statistike, koja ima sledeći oblik:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(n_j - E_{n_j}\right)^2}{E_{n_j}}, \qquad (3.65)$$

gde su n_j i E_{n_j} ,j = 1, 2, ..., k , frekvencija uzorka za određeni interval i očekivanje raspodele frekvencije definisane putem nulte hipoteze.

U poslednjem koraku, dobijena vrednost statistike se poredi sa percentilom χ^2 raspodele[17] na određenom nivou poverenja, sa stepenom slobode d = k-1. Nulta hipoteza se odbija, ako statistička vrednost prelazi tabelarnu vrednost posmatrane χ^2 raspodele.

Mana ovog testa je u tome što je osetljiv na izbor klasa i veličinu.

Test količnika funkcija verodostojnosti

Za razliku od Prisonovog testa, ova vrsta testa se koristi u slučaju neprekidnih raspodela.

---

[17] χ^2 raspodela (hi-kvadratna raspodela) je raspodela čija funkcija gustine ima sledeći oblik:

$$f(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2}, x \geq 0,$$

gde je n, $n \in \mathbb{N}$, parametar oblika koji predstavlja broj stepeni slobode.

Kao što sam naziv testa kaže, u okviru njega vrši se poređenje funkcija verodostojnosti raspodela definisanih nultom i alternativnom hipotezom. Pri čemu su hipoteze u ovom slučaju definisane na sledeći način:

H_0: Podaci prate raspodelu tipa A.

H_A: Podaci prate raspodelu tipa B.

Raspodela definisana nultom hipotezom je specijalan slučaj raspodele koja je definisana putem alternativne hipoteze.

Neka je funkcija verodostojnosti $L(\boldsymbol{\theta})$, vrednosti L_0 i L_1 definisane na sledeći način:

- $L_0 = L(\boldsymbol{\theta_0})$ - vrednost fukcije verostojnosti za $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta_0}$, gde je $\boldsymbol{\theta_0}$ ocena parametra posmatrane raspodele koja maksimirzira funkciju verodostojnosti posmatrane raspodele. Pri čemu se uzimaju u obzira samo vrednosti parametara koje su definisane nultom hipoteze.
- $L_1 = L(\boldsymbol{\theta_1})$ - vrednost fukcije verostojnosti za $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta_1}$, gde je $\boldsymbol{\theta_1}$ ocena parametra posmatrane raspodele koja maksimizira funkciju verodostojnosti. Pri čemu, parametri mogu imati vrednosti definisane alternativnom hipotezom

Tada, test statistika se definiše na sledeći način

$$T = 2\ln(L_1/L_0) = 2(\ln L_1 - \ln L_0). \qquad (3.66)$$

Nulta hipoteza se odbija, ako je $T > c$, gde se c računa pomoću jednakosti $\alpha = P\{T > c\}$, pri čemu T prati χ^2 raspodelu sa stepenom slobode jednakim razlici broja slobodnih parametara modela koji je definisan alternativnom hipotezom i broja slobodnih parametara modela koji je definisan nultom hipotezom.

3.5.3 Testovi upoređivanja empirijske i teorijske funkciju raspodele

Ovi testovi se baziraju na posmatranju razlike između vrednosti fitovane i empirijske funkcije raspodele. U ovom radu biće predstavljene dve vrste ovih testova, a to su Kolmogorov-Smirnovljev test i Anderson-Darlingov test.

Kolmogorov-Smirnovljev test

Neka je dati uzorak $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ fitovan nekom parametarskom raspodelom $F(x, \theta)$ i $\hat{\theta}$ ocena parametra θ. Kao i kod prethodno navedenih testova potrebno je definisati nultu i alternativnu hipotezu. U slučaju ovog testa, one su definisane na sledeći način:

H_0: $F_{er}(x) \in F(x, \hat{\theta})$,

H_A: $F_{er}(x) \notin F(x, \hat{\theta})$.

Pri čemu je $F_{er}(x)$ funkcija empirijske raspodele.

Test statistika je definisana kao supremum razlike između $F_{er}(x)$ i $F(x, \hat{\theta})$ u odnosu na vrednosti datog uzorka, tj.

$$KS = \sup_{1 \leq i \leq n} \left| F_{er}(x_i) - F(x_i, \hat{\theta}) \right|. \tag{3.67}$$

Izračunavanje KS statistike je lako, što predstavlja prednost ovog testa, ali postoje i nedostaci. Nedostaci se ogledaju u tome što se ovaj test može koristiti samo kod neprekidnih raspodela, kao i to da ukazuje samo na činenicu koliko iznosi maksimalna moguća razlika između vrednosti empirijske i teorijske raspodele za određeni uzorak, ali ne i u kojoj tački se ta razlika pojavila.

Nulta hipoteza se odbija ako je p vrednost, definisana na sledeći način:

$$p = P\{KS > ks\}, \tag{3.68}$$

manja od nivoa poverenja α. Nivo poverenja, α, moža da iznosti od 5%-10%. Kritična vrednost, ks, na nivou poverenja 5% iznosi $1.36/\sqrt{n}$, a na nivo poverenja od 10% jednaka je $1.22/\sqrt{n}$.

Anderson-Darlingov test

Ovaj test je sličan prethodno navedenom testu. Nulta i alternativna hipoteza su isto definisane kao kod Kolmogorov-Smirnovljevog testa. Međutim, posmatraju se drugačije mere koje određuju razliku između empirijske funkcije raspodele i posmatrane teorijske funkcije raspodele u okviru test statistike.

Test statistika je definisana na sledeći način:

$$AD^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(F_{er}(x) - F(x, \hat{\theta})\right)^2}{F(x, \hat{\theta})\left(1 - F(x, \hat{\theta})\right)} dF(x, \hat{\theta}). \tag{3.69}$$

Na isti načina kao kod prethodnog testa se izračunava p vrednost. Pri čemu, u ovom slučaju kritične vrdnosti iznose 1.933, 2.492 i 3.857 za nivoe poverenja 10%,5% i 1%, respektivno.

U slučaju kada je funkcija raspodele visine gubitka ograničena, tada su granice datog integrala jednake donjem i gornjem ograničenju funkcije raspodele gubitka.

Mana ovog testa je u tome što se može koristiti sam kod neprekidnih raspodela. Dok je prednost u tome što test statistika ukazuje na to da li je rep funkcije dovoljno dobro fitovan, a manje govori o srednjem delu grafika raspodele, što je u slučaju analize raspodela visine gubitka kod operativnog rizika, veoma značajno.

4. Modeliranje agregatnog gubitka

Cilj ovog poglavalja je razvoj modela agregatnog gubitka za određeni fiksni period posmatranja. U slučaju operativnog rizika ovaj model se koristi za izračunavnje agregatnog, ukupnog, gubitka određene kombinacije poslovna linija/tip događaja.

U prethodnim odeljcima navedeni su modeli pogodni za fitovanje raspodele frekvencije i visine gubitka. Nakon određivanja navedenih raspodela, neophodno je, kao krajnji rezultat modeliranja, odrediti i raspodelu agregatnog gubitka koristeći dobijene modele za frekvenciju i visinu gubitka. Nakon određivanja raspodele agregatnog gubitka, pomoću mere rizika VaR, koji će biti predstavljen u delu 4.3, moguće je izračunati i ukupan kapitalni zahtev za operativni rizik, što je i krajnji cilj modeliranja operativnog rizika.

4.1 Model agregatnog gubitka

Model agregatnog gubitka ima sledeći oblik

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N, \tag{4.1}$$

gde su:

- $X_1, X_2, \dots, X_N$ – slučajne promenljive koje predstavljau visinu gubitka i
- N – slučajna promenljiva frekvenicije događaja gubitka.

Ovaj model se oslanja na sledeće pretpostavke:

- Neka je $N = n$. Slučajne promenljive $X_1, X_2, \dots, X_n$ su međusobno nezavisne i imaju zajedniču raspodelu.
- Neka je $N = n$. Zajednička raspodela slučajnih promeljivaih $X_1, X_2, \dots, X_n$ ne zavisi od n.
- Raspodela slučajne promenljive N ne zavisi od vrednosti slučajnih promenljivih $X_1, X_2, \dots, X_N$.
- $S = 0$, kada je $N = 0$.

Raspodela, ovako definisane, slučajne promenljive S se naziva složena raspodela.

Očekivanje i varijansa slučajne promenljive S se izračunavaju pomoću sledećih formula:

$$E(S) = E[N]\ E[X], \tag{4.2}$$

$$Var(S)=E[N]\ Var[X]+Var[N]\ E^2[X]. \tag{4.3}$$

Funkcija generatrisa verovanoće date slučajne promenljive S može se izračunati pomoću funkcija generatrisa slučajnih promenljivih N i X, pri čemu X ima raspodelu istu kao i slučajne promenljive $X_1, X_2, \dots, X_N$, na sledeći način:

$$P_S(z) = P_N[P_X(z)], \tag{4.4}$$

Date jednakosti se lako mogu dokazati na osnovu pretpostavki prethodno definisanih, a koje važe za model agregatnog gubitka.

4.2 Izračunavanje raspodele agregatnog gubitka

U ovom delu rada biće predstavljene neke metode numeričkog izračunavanja raspodele agregatnog gubitka za prethodno određene raspodele frekvencije i visine gubitka, a to su: Metod konvolucije, Metod Penjerove rekurzije i Metod inverzije. Predstavljene će biti baš navedene tri metode, jer koriste različite alatke za dobijanje respodele agregatnog gubitka.

U okviru metode konvolucije se koristi operacija konvolucije, u okviru metode Penjerove rekurzije se koristi rekurzivna formula, dok kod metode inverzije se koristi karakteristična funkcija visine gubitka za određivanje funkcije raspodele agregatnog gubitka.

U delu 3.2.5 predstaljene su funkcija radspodele veovatnoće složene slučajne promenljive $S = M_1 + M_2 + \ldots + M_N$, pri čemu su $M_1, M_2, \ldots, M_N$, i N slučajne promenljive diskretnog tipa, koristeći funkciju konvolucije raspodele i jednačine Penjerove rekurzije. Sličan princip određivanja funkcije složene raspodele se koristi i u ovom delu. Osnovna razlika je u tome što su sabirci slučajne promenljive koja predstavlja model agregatnog gubitka slučajne promenljive neprekidnog tipa.

4.2.1 Metod konvolucije

Ovaj metod se koristi za određivanje raspodela slučajne promenljive S pomoću funkcije konvolucije.

Neka model agregatnog gubitka ima sledeći oblik:

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N, \tag{4.5}$$

pri čemu važe pretpostavke definisane u delu 4.1.

Slučajna promenljiva S ima sledeću funkciju raspodele pomoću funkcije konvolucije:

$$F_S(x) = P\{S \leq x\} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n P\{S \leq x | N = n\} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n F_X^{*n}(x), \tag{4.6}$$

gde je $F_X(x)$ zajednička funkcija raspodele slučajnih promenljivih $X_j, j = 1, 2, \ldots, N$, $p_n = P\{N = n\}$ i $F_X^{*n}(x)$ n konvolucija funkcije raspodele slučajne promenljive X.

Ako je X neprekidna slučajna promenljijva sa osobinom $P\{X < 0\} = 0$, funkcija $F_X^{*n}(x)$ se može izračunati pomoću sledećih jednakosti:

$$F_X^{k*}(x) = \int_0^x F_X^{*(k-1)}(x - y) f_X(y) dy \text{ za } k = 2,3, \ldots., \tag{4.7}$$

pri čemu važi da je:

- za $k = 1$, $F_X^{*1}(x) = F_X$ i

- za $k = 0$, $F_X^{*0}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}.$

Diferenciranjem jednačine (4.7), dobija se funkcija sledećeg oblika:

$$f_X^{*k}(x) = \int_0^x f_X^{*(k-1)}(x-y) f_X(y) dy \text{ za } k = 2,3, \ldots.. \qquad (4.8)$$

Raspodela $F_S(x)$ se naziva složena raspodela, a njoj odgovarajuća funkcija gustine je:

$$f_S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n f_X^{*n}(x). \qquad (4.9)$$

Nedostatak ove metode se ogleda u tome što je proces izračunavanja funkcije raspodele i gustine često vaoma dugačak i zahteva dosta vremena. Takođe, u nekim slučajevima može se javiti komplikacije pri izračunavanja integrala kojim je definisana funkcija konvolucije.

4.2.2 Metod Penjerove rekurzije (Penjer's Recursive Method)

U delu 3.2.5 u okviru teoreme 3.3 predstavljena je funkcija raspodele verovatnoće složene diskretne slučajne promenljive S, $S = M_1 + M_2 + \ldots + M_N$, pri čemu su, kao što je napomenuto, $M_1, M_2, \ldots, M_N$ i N slučajne promeljive diskretnog tipa.

Data teorema se može formulisati i na drugi način, za slučaj modela agregatnog gubitka definisanog u delu 4.1, gde je S slučajna promenljiva koja predstavlja zbir neprekidnih slučajnih promenljivih.

Teorema 4.2: *Neka je S model agregatnog gubitka definisan u delu 4.1. Neka je N diskretna slučajna premenljiva koja pripada klasi (a,b,1) i $f_X(x)$ gustina raspodele neprekidne slučajne promenljive X koja predstavlja visinu gubitka. Tada $f_S(x)$ zadovoljava sledeću integralnu jednačinu:*

$$f_S(x) = p_1 f_X(x) + \int_0^x (a + by/s) f_X(y) f_S(s-y) dy. \qquad (4.10)$$

Jednačina (4.10) data u okviru teoreme 4.2 se može korisiti, ali u retkim slučajevima, jer je uglavnom jako teško izračunati datu integralnu jednačinu. Stoga, da bi se moga koristiti ovaj metod i u slučaju izračunavanja agregatnog gubitka, u slučaju kada je S zbir neprekidnih slučajnih promenljih, potrebno je izvršiti diskretizacija njenih sabiraka, $X_1, X_2, \ldots, X_N$, a zatim upotrebom teoreme 3.3 odrediti funkciju raspodele slučajne promenljive S. Kao rezultat dobija se aproksimacija slučajne promenljive S.

Jedan od mogućih postupaka diskretizacije će biti predstavljen u nastavku.

Diskretizacija raspodele neprekidne slučajne promenljive

Postoji više postupaka diskretizacije, u ovom radu će biti predstavljen jedan od njih.

Neka je X neprekidna slučajna promenljiva i neka je h korak diskretizacije. Cilj postupka diskretizacije je određivanje raspodele slučajne promenljive X^d, koja predstaljva aproksimaciju slučajne promenljive X. Ovaj postupak počinje tako što se odredi korak diskretizacije h. Bitno je napomenuti, da što je korak h manji aproksimacija će biti preciznija. Zatim, pomoću sledećeg niza jednakosti:

$$f_0 = P\left\{X \leq \frac{h}{2}\right\},$$

$$f_j = P\left\{\left(j-\frac{1}{2}\right)h \leq X \leq \left(j+\frac{1}{2}\right)h\right\}, \quad \text{j = 1, 2,….} \qquad (4.11)$$

odrediti vrednosti f_j, koje predstavljaju verovatnoću da dobijena diskretizovana slučajna promenljiva, X^d, ima vrednost jh, j = 1 , 2,….., tj. predstavlja raspodelu verovatnoće slučajne promenljive X^d. Pri čemu je važi da je $P\{X^d < 0\} = 0$.

U slučaju modela agregatnog gubitka i izračunavanja raspodele slučajne promenljive agregatnog gubitka, S, potrebno je prvo diskretizovati neprekidne slučajne prmenljive X_1, $X_2, \dots, X_N$, kao rezultat dobiju se diskretne slučajne promenljive $X_1^d, X_1^d, \dots, X_N^d$. Zatim se za N i diskretizovane slučajna promenljive $X_1^d, X_1^d, \dots, X_N^d$ primeni Penjerova rekuzija, definisana u okviru teoreme 3.3. Na taj način se dobije raspodela dikretizovna slučajna promenljiva agregatnog gubitka, S^d.

U slučaju operativnog rizika, radi dalje analize i određivanja ukupnog kapitalnog zahteva za operativni rizik, pogodno je da S bude neprekidna slučajna promenljiva. Stoga, nakon određivanja raspodele slučajne promenljive S^d, poželjno je primeniti neki od proces dediskretizacije. Dediskritizacija predstavlja proces transformisanja funkcije raspodele diskretnog tipa, u ovom slučaju raspodele diskretizovene slučajne promenljive, u funkciju raspodele neprekidnog tipa. Međutim, dati proces je veoma kompleksan i neće biti predstavljen u ovom radu, jedan takav proces se može pronaći u knjizi Harry H. Panjer [4].

4.2.3 Metod inverzije

Ovaj metod je numerički metod za dobijanje funkcije verovatnoće pomoću poznatih izraza funkcija, kao što su karakteristična funkcija i funkcija generatrisa verovatnoće.

Funkcija generatirisa verovatnoće i karakteristična funkcija raspodele agregatnog gubitka, definisanog u delu 4.1, imaju sledeći oblik:

$$P_S(z) = P_N[P_X(z)] \quad \text{i} \quad \varphi_S(z) = E\left[e^{iSx}\right] = P_N[\varphi_X(z)]. \qquad (4.12)$$

Pogodnost ove metode ogleda se u tome što karakteristična funkcija uvek postoji i jedinstvena je za svaku slučajnu promenljivu.

Brza Furijeva transormacija je algoritam koji se može koristiti za inverziju karakteristične funkcije sa ciljem dobijanja raspodele diskretne slučajne promenljive.

<u>*Definicija 4.1*</u>: *Za svaku neprekidnu funkciju $f(x)$, Furijeva transformacija ima sledeći oblik:*

$$\mathcal{F}(f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{izx} dx. \qquad (4.13)$$

Pri čemu, početna funkcija se može predstaviti pomoću njene Furijeve transformacije na sledeći način:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(z)e^{izx}dz. \tag{4.14}$$

Može se uočiti da karatkeristična funkcija neprekidne slučajne promenljive predstavlja Furijevu transformaciju funkcije gustine posmatrane slučajne promenljive.

Kada je $f(x)$ funkcija verovatnoće diskretne slučajne promenljive, prethodna definicija može uopštiti na sledeći način:

<u>*Definicija 4.2*</u>: Neka f_x označava funkciju definisanu za sve cele vrednosti *x*. Neka je f_x periodična funkcija sa dužinom perioda *n*, (tj. $f_x = f_{x+n}$ za svako *x*). Za vektor (f_0 , f_1 ,..., f_{n-1}) diskretna Furijeva transformacija, $\mathcal{F}_x$, $x = \cdots, -1, 0, -1, \ldots$, je definisana na sledeći način:

$$\mathcal{F}_k = \sum_{j=0}^{n-1} f_j \exp\left(\frac{2\pi i}{n} jk\right), k = \cdots, -1, 0, -1, \ldots . \tag{4.15}$$

$\mathcal{F}_x$ je takođe periodična funkcija sa periodom dužine *n*. Inverzijom se dobija vrednost originalne funkcije:

$$f_k = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{F}_j \exp\left(-\frac{2\pi i}{n} jk\right), j = \cdots, -1, 0, -1, \ldots . \tag{4.16}$$

U nastavku će biti prikazana proceduru upotrebe Furijeve transformacije za inverziju karakteristične funkcije, nakon što se uradi diskretizacija raspodele visine gubitka. Dati proces se vrši na sledeći način:

<u>*Algoritam 4.1*</u>*:*

Korak 1: Diskretizovati raspodelu visine gubitka upotrebom određene metode diskretizacije, čime se dobije diskretizovana raspodela visine gubtika

$$f_X(0), f_X(1), \ldots, f_X(n-1),$$

Korak 2: Neka je n = 2^r, $r \in \mathbb{Z}$, a *n* broj tačaka poželjan za raspodelu agregatnog gubitka $f_S(x)$.

Korak 3: Primeniti brzu Furijevu transformaciju na dati vektor vrednosti, definisati $\varphi_X(z)$, karakterističnu funkciju diskretizovane raspodele. Rezultat je takođe vector sa $n = 2^r$ komponenti.

Korak 4: Transformisati dobijeni vektor upotrebom transformacije putem funkcije generatrise verovatnoće raspodele frekvencije, $\varphi_S(z) = P_N[\varphi_X(z)]$, koja je karakteristična funkcija, tj. diskretna Furijeva transformacija za agregatnu raspodelu gubitka, ovaj vektor takođe ima $n = 2^r$ komponentu.

Korak 5: Primeniti inverznu Furijevu transformaciju. Dobijeni vektor dužine $n = 2^r$ predstavlja tačnu raspodelu agregatnog gubitka za dikretizovani model visine gubitka.

4.3 VaR

U kontekstu operativnog rizika, neformalna definicija VaR-a bi bila: VaR predstavlja ukupan kapital koji bi bio dovoljan da porkrije neočekivane gubitke na visokom nivou poverenja u toku jedne godine.

Vrednost (1-α)x100%-ti VaR je definisan kao (1-α)-ti percentil raspodele agregatnog gubitka za određeni posmatrani vremenski interval Δt. 1-α predstavlja nivo poverenja. Nivo poverenja uzima obično vrednost 95% ili 99%.

VaR može imati praktičan uticaj na sledeće oblasti poslovnih aktivnosti:

- Poređenje nivoa rizika na sledeći način: Poređenje različitih tipova rizika, kao što je tržišni sa kreditnim, ili rizik eksternih rizika sa rizikom prirodnih katastrofa, postaje moguće, jer može biti sprovedene pomoću uniformne matrice: VaR. Banke mogu da koriste VaR i kao merilo za poređenje rizika između poslovnih linija.
- Određivanje kapitalnog zahteva na sledeći načina: Pošto se VaR meri u novčanim jedinicama, može se koristiti za izračunavanje ekonomskog kapitalnog zahteva, preporučenog za pokrivanje gubitaka visokih vrednosti. Ako važi pretpostavka da je izračunat dovoljno precizno da predstavi pravu izloženost riziku, može se koristiti kao visina minimalnog preporučenog kapitalnog zahteva za operativni rizik.

Postoji nekoliko mana i ograničenja VaR-a, a to su:

- VaR je donja granica za visoke gubitke. VaR samo određuje donju granicu ekstremnih gubitaka, ali ne pruža informaciju o obimu gubitaka koji leže iznad te granice.
- Višedimenzionalni faktori rizika deluju na VaR. Pošto je portfolio obično pod uticajem vektora faktora rizika, potrebno je izračunati moguću strukturu zavisnosti između pokretača rizika. Ovo može značajno uticati na ocene VaR-a.
- VaR nije sposoban da spreči visoke gubitke. VaR se može sigurno koristiti za predviđenje potencijalne visine gubitka, ali ne može se koristiti da ih spreči u praksi.
- VaR u većini slučajeva nema osobinu subaditivnosti.[18]

[18] Neka je u(X) mera rizika. Mera rizika ima osobinu sabaditivnosti, ako važi sledeća nejednakost $u(X_1 + X_2) \leq u(X_1) + u(X_2)$, gde su X_1, X_2 slučajne promenljive koje opisuju visinu gubitka.

5. Vrste naprednog pristupa merenja operativnog rizika

U trećem i četvrtom poglavlju su navedeni modeli koji se koriste za opisivanje frekvencije, visine gubitka i agregatnog gubitka. Svi modeli i metode analize podataka koje su predstavljene u ta dva poglavalja koristi se u okviru Naprednog pristupa merenja operativnog rizika.

Banke su tokom prethodnih godina razvijala i definisale različite interne modele, koji pripadaju Naprednom pristupu merenja operativnog rizika, naravno vođenje predlozima i savetima Bazelskog komiteta za bankarski nadzor. Analizirajući te modele, uvidelo se da se oni mogu svrstati u dve kategorije, a to su:

- Pristup raspodele gubitka (*Loss distribution approach*-LDA) i
- Pristup baziran na scenario analizi (*Scenario-based approach*-SBA).

U ovom poglavlju će biti opisani dati pristupi i predstavljene njihove prednosti i mane, kao i način njihovog integrisanja, sa ciljem da se dobije model koji obuhvata sva četiri ulazna elementa Naprednog pristupa merenje, pomoću koga će se na najprecizniji način dobiti kapitalni zahtev za operativni rizik.

5.1 Pristup raspodele gubitka

Ovaj pristup je parametarska tehnika, prvenstveno bazirana na istorijskim podacima o internim gubicima (potencijalno obogaćenim sa eksternim podacima). Bazirana je na konceptu korišćenom kod aktuarskih modela. Zasniva se na određivanju zasebno distribucije frekvencije događaja gubitka i raspodele visine gubitka, posebno za svaku kombinaciju tip događaja/linija poslovanja navedenih u drugom poglavlju. Zatim na određivanju raspodele agregatnog gubitka sa ciljem dobijanja ukupnog kapitalnog zahteva za operativni rizik.

Kapitalni zahtev za operativni rizik, kod ovog pristupa, se računa kao suma VaR-a raspodela agregatnog gubtika za jednu godinu za svaku kombinaciju tip događaja/poslovna linija (najčešće na nivou poverenja 99,9%), tj.

$$K_{LDA} = \sum_{j=1}^{8} \sum_{k=1}^{7} VaR_{jk}. \qquad (5.1)$$

Prednosti ovog pristupa su sledeće:

- Veoma je osetljiv na rizik, direktno upotrebljava bankarske podatke o internim gubicima.
- Pristup je primenljiv u bankama sa solidnom bazom podataka.
- Pod pretpostavkom da je metodologija ocene ispravna, Pristup raspodele gubitka pruža tačan kapitalni zahtev za operativni rizik.

Loše strane pristupa su:

- Može biti komplikovano određivanje raspodele gubitka.
- Izbor nivoa poverenja za meru VaR veoma utiče na visinu kapitalnog zahteva.
- Pristup oskudeva sa komponentama gledanja unapred, jer procena rizika se bazira na istorijskim podacima.

5.2 Pristup scenario analize

Cilj ovog pristupa je korišćenje scenario analize da bi se dobile inforamacije o određenim gubicima, do kojih nije moguće doći na osnovu interne i eksterne baze podataka. Bazirano na njihovim aktivnostima i kontroli okruženja, banke kreiraju scenarija opisujući neželjene događaje. Zatim se od stručnjaka traži da daju mišljenje o verovatnoći pojavljivanja događaja (tj. frekvenciji) i potencijalnom ekonomskom uticaju koji će posmatrani događaj prouzrokovati (tj. visini gubitka).

Ova vrsta pristupa se, kao i prethodno navedeni pristup, LDA, vodi idejom kombinovanja raspodela frekvencije i visine gubitka sa ciljem određivanja raspodele agregatnog gubitka, a zatim korišćenjem VaR-a za dobijanje visine kapitalnog zahteva za operativni rizik.

Banke se oslanjaju na ovaj pristup merenja, tj. na primenu scenario analize, najčešće u slučajevima kada su u pitanju male ili srednje banke sa ograničenim aktivnostima, pri pojavi novog poslovanog okruženja ili kada se javi specifična klasa operativnog rizka, koja se do tada nije pojavljivala.

Najveći izazov ove metode je dobijanje pouzdane ocene stručnjaka. Korisnost ovog tipa nezavisnosti informacija o potencijalnim događajima u budućnosti ne treba da bude precenjena i treba da budu pažljivo integrisane sa informacijama dobijenim aktuarskom metodom, koja se bazira na događajima iz prošlosti. Preciznije, rezultati modela ovog pristupa treba da budu statistički kompatibilni sa onim koji proizilaze iz LDA, kako bi se omogućila statistički prihvatljiva kombinovana tehnika ova dva modela. Najadekvatnija tehnika za kombinovanje, tj. integrisanje LDA i SBA je metoda Bajesovog zaključivanja (*Bayesian inference*), koja će biti predstavljena u sledećem delu 5.3.

5.3 Integrisanje pristupa raspodele gubitka i pristupa scenario analize

Integrisanje data dva tipa Naprednog pristupa merenja operativnog rizika vrši se putem Bajesovog zaključivanja. Bajesovo zaključivanje je statistička tehnika veoma pogodna za udruživanje i kombinovanje svih ulaznih elemenanta AMA. Ovo udruživanje se vrši definisanjem specifičnih raspodela parametara, parametra raspodele gubitka i frekvenicije, dobijenih putem LDA, pri čemu se do date raspodele parametara dolazi na osnovu podataka dobijenih scenario analizom mišljenja stručnjaka različitim metodama.

U ovom delu rada prvo će biti date definicije nekoliko pojmova, koji se koriste u okviru Bajesove analizi, a zatim i Bajesova teorema, kao i primena Bajesovog zaključivanja u oblasti operativnog rizika.

<u>Definicija 5.1</u>: *Apriorna raspodela je raspodela slučajna promenljive Θ definisane nad prostorom mogućih vrednosti parametra. Funkcija gustine ove raspodele se obeležava sa $\pi(\theta)$ i predstavlja mišljenje stručnjaka u pogledu relativne mogućnosti da različite vrednosti θ budu prave vrednosti parametra. Pri čemu, parameter θ može biti scalar ili vektor.*

<u>Definicija 5.2</u>: *Funkija gustine zajedničke raspodele za **X** i Θ je*

$$f_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{\Theta}}(\boldsymbol{x},\theta) = f_{\boldsymbol{X}|\boldsymbol{\Theta}}(\boldsymbol{x}|\theta)\pi(\theta), \qquad (5.2)$$

gde je X slučajna promenljiva čija funkcija raspodele zavisi od parametra θ.

<u>Definicija 5.3</u>: *Aposteriorna raspodela je uslovna raspodela verovatnoće parametara u odnosu na date posmatrane podatke. Funkcija gustine ove raspodele se označava sa $\pi(\theta|\boldsymbol{X})$.*

<u>Definicija 5.4</u>: *Preditktivna raspodela je raspodela verovatnoće novog budućeg opažaja X_{n+1} u odnosu na postojeće opažaje, komponenete vekora $\boldsymbol{X}=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Označava se sa $f_{X_{n+1}/\boldsymbol{X}}(x_{n+1}/\boldsymbol{x})$.*

Prethodno dva definisana pojma predstavljaju ključni rezultat Bejesove analize. Aposteriorna raspodela prikazuje kako se mišljenje o parametrima menja u odnosu na date poznate podatke. Dok, prediktivna raspodela ukazuje na to kako može sledeći opažaj da izgleda kao data informacija sadržana u prethodno poznatim podacima.

Bajesova teorema omogućava pronalaženje željenog rezultata, tj. izračunavanje aposteriorne i prediktivne raspodele.

<u>Bejsova teorema 5.1</u> [4]**:** *Neka je dat vektor slučajnih posmatranja $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, čija je uslovna gustina raspodele, u odnosu na vektor parametara $\boldsymbol{\Theta} = (\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_k)$, $f_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{\Theta}}(\boldsymbol{x}/\boldsymbol{\theta})$ i neka važi pretpostaka da $\boldsymbol{\Theta}$ ima gustinu raspodele $\pi(\boldsymbol{\theta})$. U ovom slučaju, gustine aposteriorne i prediktivne raspodela se mogu izračuna pomoću sledećih jednakost:*

$$\pi(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{X}) = \frac{f_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{\Theta}}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta})\pi(\boldsymbol{\theta})}{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})} \quad i \qquad (5.3)$$

$$f_{X_{n+1}|\boldsymbol{X}}(x_{n+1}|\boldsymbol{x}) = \int f_{X_{n+1}/\boldsymbol{\Theta}}(x_{n+1}|\boldsymbol{\theta})\pi(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{X})d\boldsymbol{\theta}. \qquad (5.4)$$

U kontekstu operativnog rizika, upotreba Bajesove analize ogleda se u sledeća tri koraka:

I. Ocenjivanje apriorne raspodele pomoću scenario analize.
II. Određivanje aposteriorne rapodele na osnovu dobijene apriorne raspodele i upotreba Bajesove teoreme.
III. Izračunavanje prediktivne raspodele za X_{n+1}, tj. uslovne raspodele slučajne promenljive X_{n+1} u odnosu na date opažaje **X**.

Bajesovo zaključivanje pruža velike mogućnosti, a to su:

- Obezbeđuje strukturalnu i celovitu statističku tehniku za kombinovanje dva heterogena izvora informacija (subjekivno mišljenje stručnjaka i objektivno sakupljene podatke).
- Obezbeđuje transparentnost za pregled od strane interne revizije i supervizora, jer oba izvora informacija mogu biti analizirana odvojeno.
- Njihovi temelji počivaju na pretpostavkama koji se dobro uklapaju sa potrebama analize operativnog rizika.

U nastavku će biti predstavlji parovi mešanja raspodela određenjene slučajne promenljive i raspodele parametra od kojeg zavisi funkcija raspodele date slučajne promenljive. Parovi raspodela koji će biti predstavljeni u nastavku su Poasonova-Gama i LogNormalna-Normalna, jer se navedene raspodele često koriste za modeliranje frekvencije i visine gubitka u slučaju operativnog rizik.

Poasonova-Gama (modeliranje frekvencije)

Poasonova raspodela se uglavnom koristi za modeliranje frekvencije u slučaju operativnog rizika. Neka važi pretpostavka da su elemeniti vektora $\boldsymbol{N} = (N_1, N_2, ..., N_n)$ nezavisne slučajne promenljive sa Poasonovom raspodelom i parametrom λ, tj. N_i:$P(\lambda)$, $i = 1, 2,.., n$. Sledi, njihova gustina ima sledeći oblik

$$f_{N_i|\Lambda}(n_i|\lambda) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n_i}}{n_i!},\;\; \lambda \geq 0. \qquad (5.5)$$

Raspodela parametra Λ, tj. apriorna raspodela, je gama raspodela sa parametrima α i β i funkcijom gustine

$$\pi(\lambda|\alpha,\beta) = \frac{(\lambda/\beta)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\beta} exp(-\lambda/\beta),\;\; \lambda > 0, \alpha > 0, \beta > 0. \qquad (5.6)$$

Neka su $N_1|\Lambda = \lambda$,......, $N_n|\Lambda = \lambda$ uslovno nezavisne slučajne promenljive, njihova funkcija gustine ima sledeći oblik:

$$f(\boldsymbol{N}|\Lambda = \lambda) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n_i}}{n_i!}\,. \qquad (5.7)$$

Koristeći formulu za aposteriornu raspodelu dobija se sledeća jednakost:

$$\pi(\lambda|\boldsymbol{N}) \propto \frac{(\lambda/\beta)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\beta} exp(-\alpha/\beta)\prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda}\;\frac{\lambda^{n_i}}{n_i!} \propto \lambda^{\hat{\alpha}-1}exp\big(-\lambda/\hat{\beta}\big),\;\; (5.8)$$

što predstavlja funkciju gustine gama raspodele za parametre $\hat{\alpha}$ i $\hat{\beta}$, za koje važe sledeće jednakosti:

$$\hat{\alpha} = \alpha + \sum_{i=1}^{n} n_i \text{ i } \hat{\beta} = \beta/(1 + \beta \times n). \qquad (5.9)$$

Na osnovu datih činjenica, može se uočiti da aposteriorna raspodela pripada istoj familiji raspodela kao i apriorna raspodela u ovom slučaju. Kada se odredi aposteriornu raspodela može se lako izračunati očekivani broj događaja na osnovu broja događaja u prethodnim godinama, tj. E$[N_{n+1}|\boldsymbol{N}]$[19], pomoću sledeće jednačine:

[19] Neka X:Gamma(α,β), tada je E(X)= αβ.

$$\mathrm{E}[N_{n+1}|\boldsymbol{N}] = \hat{\alpha} \times \hat{\beta} = (\alpha + \sum_{i=1}^{n} n_i) \times \beta/(1+\beta \times n) = w\overline{N} + (1-w)\lambda_0,$$

gde je:

- $\overline{N} = \frac{1}{n}\sum_{i-1}^{n} n_i$ - ocena za λ koristeći samo posmatrane podatke,
- $\lambda_0 = \alpha \times \beta$ - ocena λ koristeći samo apriornu raspodelu i
- $w = \frac{n}{n+1/\beta}$ - veličina kredibiliteta[20] koja pripada intervalu [0, 1) i koja se koristi za kombinovanje vrednosti $\overline{N}$ i λ_0.

Može se uočiti da kako broj godina *n* raste, veličina kredibiliteta raste i obrnuto. Na osnovu čega sledi, da što više posmatranja imamo, tj. što je veći kredibilitet, ocena očekivanja se bazira na broju posmatranja, dok kada je veličina kredibilitet manja, uslovno očekivanje je jednako očekivanoj oceni mišljenja stručnjaka. Takođe, kako je veća nestabilnost mišljenja stručnjaka (tj. kako je veće β), veće je w, tj. očekivanje $\mathrm{E}[N_{n+1}|\boldsymbol{N}]$ teži ka $\overline{N}$.

LogNormalna-Normalna (modeliranje visine gubitka)

Lognormalna raspodela, $LN(\mu, \sigma)$, je jedna od neprekidnih raspodele koja se koristi za modeliranje visine oprativnog gubitka. Neka važi pretposavka da, za dato μ i σ, komponente vektora $\boldsymbol{X}=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ nezavisne i imaju istu raspodelu $LN(\mu, \sigma)$, koja je definisna funkcijom gustine

$$f(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma}} exp\left(-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right). \tag{5.10}$$

Neka je $Y_i = \ln X_i,\ i = 1, \ldots, n$. Slučajna promenljiva Y_i, $i = 1, \ldots, n$, ima normalnu raspodelu, $N(\mu, \sigma)$, jer slučajna promenljiva X_i, $i = 1, \ldots, n$, ima lognoramalnu raspodelu, $LN(\mu,\sigma)$. Neka je parameter σ poznat, a raspodela parametra μ, tj. apriorna raspodela, je normalna raspodela, $N(\mu_0,\sigma_0)$, sa funkcijom gustine sledećeg oblika:

$$\pi(\mu|\mu_0,\sigma_0) = \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{(\mu-\mu_0)^2}{2{\sigma_0}^2}\right). \tag{5.11}$$

Sledi,

$$f(\boldsymbol{Y}|\mu,\sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{(Y_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right). \tag{5.12}$$

Koristeći prethodne jednakosti može se odretiti aposterirna funkcija gustine i ona u ovom slučaju ima sledeći oblik:

$$\pi(\mu|\boldsymbol{Y}) \propto \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{(\mu-\mu_0)^2}{2{\sigma_0}^2}\right) \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{(Y_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{5.13}$$
$$\propto exp\left(-\frac{(\mu-\hat{\mu}_0)^2}{2{\hat{\sigma}_0}^2}\right).$$

Može se uočiti da je dobijena funkcija jednaka funkciji gustine normalne raspodele sa parametrima $\hat{\mu}_0$ i $\hat{\sigma}_0$ za koje važi sledeća jednakost

$$\hat{\mu}_0 = (\mu_0 + \omega \sum_{i=1}^{n} Y_i)/(1 + n \times \omega) \text{ i} \tag{5.14}$$

[20] Veličina kredibiliteta ukazuje na to da je optimalno koristiti i ocenu koja je rezultat dobija na osnovu iskustava, kao i ocenu dobijen na osnovu dopustivog uzorka. Ukazuje na to kada i u kojoj meri je potrebno koristi samo jednu od naveden dve ocene ili njihovu kombinaciju.

$$\widehat{\sigma}_0 = \frac{{\sigma_0}^2}{(1+n\times\omega)}, \tag{5.15}$$

gde je $\omega = {\sigma_0}^2/\sigma^2$.

I u ovom slučaju, upotrebnom prethodnih rezultata lako se može izračunati funkcija uslovnog očekivanja slučajne promenljive Y_{n+1} u odnosu na opažaje iz prošlosti, $\mathrm{E}[Y_{n+1}|\boldsymbol{X}]$, i ona ima sledeći oblik:

$$\mathrm{E}[Y_{n+1}|\boldsymbol{X}] = \mathrm{E}[\mu|\boldsymbol{X}] = \hat{\mu}_0 = \frac{\left(\mu_0+\omega\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)}{(1+n\times\omega)} = w\bar{Y} + (1-w)\mu_0,$$

gde je

- $\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i-1}^{n} Y_i$ - ocena parametra μ koristeći posmatrane podatke o visini gubitaka,
- μ_0 - ocena parametra μ koristeći apriornu raspodelu i
- $w = \frac{n}{n+\sigma^2/{\sigma_0}^2}$ - veličina kredibiliteta koja pripada intervalu [0, 1) i koja se koristi za kombinovanje $\bar{Y}$ i μ_0.

Kao i u prethodnom slučaju, što je veći broj opažaja, veća je veličina kredibiliteta i obrnuto. Kada je veća veličina kredibliteta ocena očekivanja teži $\bar{Y}$, a što je manja teži oceni dobijenoj na osnovu mišljenja stručnjaka. Takođe, veća nesigurnost kod mišljenja stručnjaka, tj. veće ${\sigma_0}^2$, dovodi do povećanju veličine kredibiliteta, uticaja veličine opažaja na ocenu očekivanja, a povećanje nesigurnosti opažaja, dovodi do smanjenja veličine kredibiliteta, tj. ocena očekivanja Y_{n+1} teži oceni dobijenoj na osnovu mišljenja stručnjaka.

Napomena: Ocena parametara apriorne raspodele može se izračunati pomoću metode maksimalne verodostojnosti koristeći poznate informacije.

Izračunavanje ukupnog kapitalnog zahteva za operatini rizik

Neka je data kombinacija j, j = 1, 2,..., 56, kombinacija poslovna linija/tip događaja. Neka je N_j, slučajna promenljiva koja opisuje frekvenciju gubitaka j-te kombinacije, pri čemu je funkcija raspodela frekvencije gubitka $F_j(\cdot\,|\lambda_j)$, i $X_{j,\,n}$ slučajna promenljiva koja opisuje visinu gubitka j-te kombinacije, pri čemu je raspodela visine gubitka $R(\cdot\,|\mu_j)$, za date λ_j i μ_j. Neka su dalje date aposteriorne raspodele $\pi(\lambda_j|N)$ i $\pi(\mu_j|X)$, i apriorne raspodele za λ_j i μ_j. Jednogodišnja raspodela agregatnog gubitka za datu kombinaciju se može izračunati pomoću Monte Carlo procedure koristeći Algoritam 5.1.

<u>Algoritam 5.1</u>:

Korak 1. Za datu kombinaciju j, simulirati paramatere rizika λ_j i μ_j pomoću njihovih aposteriornih raspodela $\pi(\lambda_j|N)$ i $\pi(\mu_j|X)$.

Korak 2. Za dobijeno λ_j u prvom koraku, simulirati broj događaja N_j za interval dužine jedne godine, pomoću funkcije raspodele $F_j(\cdot\,|\lambda_j)$.

Korak 3. Za dobijeno μ_j u prvom koraku, simulirati visinu gubitka $X_{j,n}$,$n =1,..$, N_j pomoću raspodele visine gubtika $R\left(\cdot\,\middle|\mu_j\right)$. Pri čemu, sve slučajne promenljive $X_{j,n}$,$n =1,..$, N_j imaju istu raspodelu .

Korak 4. Izračunati godišnji ukupan gubitak za datu j-tu kombinaciju, $Z_j = \sum_{n=1}^{N_j} X_{j,n}$.

Korak 5. Ponoviti prva četiri koraka K puta i izračunati godišnji gubitak svaki put. Zatim ocneniti 0.9999 kvatil koriteći uzorak $Z_j(k), k = 1, \dots, K$, na uobičajan način.

Ako važi pretpostavka da su sve kombinacije događaj gubitka/linija poslovanja nezavisne u okviru banke, tada ukupan godišnji gubitak se može izračunati tako što se na osnovu prethodno navedenih koraka izračuna ukupan gubitka za svaku kombinaciju, a zatim se dobijeni agregatni gubici saberu, tj. izračuna se vrednost $Z_{Tot} = \sum_{i=1}^{56} Z_j$. Dobjie vrednost Z_{Tot} predstavlja ukupan jednogodišnji kapitalni zahtev za operativni rizik.

U nastavku će biti prikazana primena Algoritma 5.1. Koristiće se metod mešanja raspodela navedeno u delu rada 5.3, Poasonove-Gama i Lognormalne-Normalne raspodele, kao i rezultati predstavljeni u tom delu rada. Zbog nedostatka stvarnih istorijskih podataka, izvršićemo simulaciju i pretpostaviti da su to istorijski podaci,

Primer 5.1: (primena Algoritma 5.1)

Pretpostavimo da je na osnovu istorijskih podataka i primene LDA za j-tu kombinaciju linije poslovanja/tip događaja određeno da slučajna promenljiva koja opisuje frekvenciju događaja u toku jedne godine ima Poasonovu raspodelu ($N_j: P(\lambda)$), a slučajna promenljiva koja opisuje visinu gubitka ima lognormalnu raspodelu ($X_j: LN(\mu, \sigma)$). Neka su određeni pomoću neke od metoda ocenjivanja parametara raspodele sledeće vrednosti parametara: $\lambda = 64{,}8$, $\mu = 8{,}5$ i $\sigma = 2{,}8$.

Takođe, neka važi na osnovu mišljenja stučnjaka, tj. upotrebom scenario analize da slučajna promenljiva Λ, koja opisuje vrednosti parametra λ, ima gama raspodelu ($\Lambda: Gamma(\alpha_0, \beta_0)$), a slučajna promenvljiva M, koja opisuje vrednosti parametara μ, ima normalnu raspodelu ($\mathrm{M}: \mathrm{N}(\mu_0,\ \sigma_0)$), pri čemu drugi parametar raspodele slučajne promenljive X_j, σ, ćemo pretpostaviti da je konstanta i da iznosi 2.8. Neka su na osnovu mišljenja stručnjaka sledeće vrednosti parametara datih raspodela: $\alpha_0 = 11{,}4$, $\beta_0 = 2{,}83$ i $\mu_0 = 7{,}9$, $\sigma_0 = 1{,}4$.

Upotrebom metode integrisanja LDA i SBA pristupa i Algoritma 5.1 odrediti ukupan godišnji gubitak za datu j-tu kombinaciju linije poslovanja/tip događaja na osnovu datih podataka.

Rešenje:

Da bi odredili vrednosti parametara raspodela slučajnih promenljivih $\Lambda\middle|\mathbf{N_j}$ ($\Lambda\middle|\mathbf{N_j}: Gamma\left(\hat{\alpha}_0, \hat{\beta}_0\right)$) i $M\middle|\boldsymbol{X_j}$ ($M\middle|\boldsymbol{X_j}: \mathrm{N}(\hat{\mu}_0, \hat{\sigma}_0)$), na osnovu informacija dobjienih putam oba pristupa LDA i SBA, izvršićemo simulaciju slučajnih promenljivih N_j i X_j. Njihovu simulaciju ćemo izvršiti da bi dobili fiktivne istorijske podatke, a zatim upotrebom jednakosti (5.9), (5.14) i (5.15) navedenih u radu odrediti vrednosti parametara $\hat{\alpha}_0$, $\widehat{\beta}_0$, $\widehat{\mu}_0$, $\widehat{\sigma}_0$, tj. upotrebom sledećih jednakosti:

$\hat{\alpha}_0 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} n_i$,

$\hat{\beta}_0 = \beta_0/(1 + \beta_0 \times n)$,

$\hat{\mu}_0 = \left(\mu_0 + \omega \sum_{i=1}^{k} Y_{ji}\right)/(1 + k \times \omega)$ i

$\widehat{\sigma}_0 = \frac{{\sigma_0}^2}{(1+k\times\omega)}$,

gde je $\omega = {\sigma_0}^2/\sigma^2$, $k = \sum_{i=1}^{n} n_i$, n broj godina za koje pretpostavljamo da imamo istorijske podatke, a $Y_j = \ln X_j$.

Simulaciju, kao i ostale računske operacije smo izvršitli pomoću programskog paketa *Mathematica*.

Kao rezultat pet simulacija slučajne promenljive N_j dobli smo da se u poslednjih pet godine desilo ukupno 322 takvih događaja u okviru posmatrane linije poslovanja, tj. rezutat je bio sledeći skup vrednosti, {69,65,65,59,64}. Zatim smo izvršili simulaciju visine gubitka tih 322 događaja, tačnije simulaciju slučajne promenljive $Y_j = \ln X_j$, jer nam je ona potrebana za izračunavanje vrednosti parametra $\hat{\mu}_0$.

Na osnovu dobijenih rezultata prethodnom simulacijom dobijene su sledeće vrednosti parametara: $\hat{\alpha}_0 = 333{,}4$, $\hat{\beta}_0 = 0.1825$, $\hat{\mu}_0 = 8{,}3766$ i $\widehat{\sigma}_0 = 0{,}0116$.

Nakon što smo odredili vrednosti parametara raspodele slučajnih promenljivih $\Lambda\big|\mathbf{N_j}$ i $M\big|\boldsymbol{X_j}$, možemo upotrebiti algoritam 5.1.

Prvo je izvršeno 5.000 simulacija datih slučajnih promenljivih za dobijene vrednosti parametara njihovih raspodela. Zatim smo izvršili isto toliko simulacija slučajne promenljive N_j koja predstavlja frekveniciju posmatranog događaja u okvru određene poslovne linije. Sledeći korak koji je bilo potrebno izvšiti je simulacija slučajne promenljive X_j, n_{ji} puta, $i = 1, \ldots, 5.000$, za svako dobijeno $N_j = n_{ji}, i = 1, \ldots, 5.000$, putem simulacije slučajne promenljive N_j. Kao rezultat dobili smo $Z_{ji} = \sum_{n=1}^{n_{ji}} X_{j,n}$, $i = 1, \ldots, 5.000$.

Zatim smo kao krajnji rezultat algoritma izračunali 0.99 kvantil dobijenog niza vrednosti $Z_{ji}, i = 1, \ldots, 5.000$, tj. uzorački VaR na nivou poverenja 0.99 koji iznosi $6.4159 \text{x} 10^7$.

Dobijena vrednosti 0.99 kvantila predstavalja ukupan potencijalni jednogodišnji kapitalni zahtev za datu poslovnu liniju.

□

6. Zaključak

Cilj ovog rada je predstavaljnje Naprednog pristupa merenja operativnog rizika. Kao krajnji rezultat ovog merenja je određivanje ukupnog kapitalnog jednogodišnjeg zahteva za operativni rizik. Da bi se što preciznije odredio ukupan kapitalni zahtev, potrebno je pronaći pogodne modele koji opisuju frekveniciju događaja koji pouzrokuju operativne gubitke, kao i visinu tih gubitka, a zatim i agregatni model visine gubitka, stoga su modeli koji su se u praksi pokazali kao najpogodniji predstaljveni u okviru ovog rada.

U toku rada su navedeni ulazni elementi procesa modeliranja. Veoma je bitno da ti podaci koji čine ulazne elemente modela budu što preciznije i tačnije evidentirani u bezu podataka, jer naravno od njih zavisi odabir modela, pa i krajnji rezultat modeliranja.

Kao što je navedeno u okrivu rada postoje dve vrste naprednog pristupa merenja operativnog rizika, pristup raspodele gubitka i pristup scenario analize. Pošto ova dva pristupa koriste različite ulazne elemente za modeliranje, radi što preciznijeg i tačnijeg dobijanja krajnjeg rezultata, poželjno je da se u toku analize koriste oba pristupa i na taj način upotrebe sve relevante informacije vezane za operativni rizik. Stoga, u poslednjem delu rada predstavljen je način integrisanja rezultata dobijenih upotrebom oba pristupa.

Modeli koji su predstavljeni u ovom rada su samo jedan deo od potencijalnih modela koji se koriste u praksi. Takođe, pored statističkih alatki koji su predstavljene, postoje još mnoge koje se mogu koristiti pri analizi operativnog rizika. Neki od njih se mogu pronaći u literaturi navedenoj u nastavku rada.

Literatura

[1] Harry H. Panjer, *Operatinal Risk: Modeling Analytics*, John Wiley & Sons, 2006.

[2] Anna S. Chernobai, Svetlozar T. Rachev, Frank J. Fabozzi, *A Guide to Basel II Capital Requirementents, Models and Analysis*, John Wiley & Sons, 2007.

[3] Greg N. Gregoriou, *Operational Risk Toward Basel III, Best Practical and Issues in Modeling Management, and Regulation*, John Wiley & Sons, 2009.

[4] Sruart A. Klugman, Harry H. Panjer, Gordon E. Willmot, *Loss Models From Data to Decisions*, John Wiley & Sons, 2004.

[5] Basel Committee on Banking Supervision, *Operational Risk – Supervisory Guidelines for the Advanced Measurement Approaches*, June 2011.

[6] Basel Committee on Banking Supervision, *Observed range of practice in key elements of Advanced Measurement Approaches*, July 2009.

[7] Kabir Dutta, Jason Parry, *A Tale of Tails: An Empirical Analysis of Loss Distribution Models for Estimating Operational Risk Capital*, Federal Reserve Bank of Boston, April 2007.

[8] Danijela Rajter-Ćirić, *Verovatnoća*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, 2009.

[9] Vesna Matić, *Operativni rizici*, Institut za poslovna istraživanja MBA , 2008.

[10] Oficijalni sajt Banke za međunarodne obračune, www.bis.org

[11] Oficijalni sajt Narodne banke Srbije, www.nbs.rs

Biografija

Tijana Mandić je rođena 24.05.1986. u Sarajevu. Završila je osnovnu školu „Jovan Dučić“ u Petrovadinu 2000.god., a zatim upisala gimnaziju „Jovan Jovanović Zmaj“, prirodno-matematički smer.

Godine 2004. upisala je Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, smer dip. Matematičar-matematika finansije, i završila u septembru 2009., sa prosečnom ocenom 8,49. Zatim je upisala master studije, smer Primenjena matematika i poslednji ispit položila krajem 2010. godine.

Od oktobra 2010. godine radi u firmi „Kopren“ d.o.o.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Zavšni rad
VR

Autor: Tijana Mandić
AU

Mentor: Dr Nataša Krejić
MN

Naslov rada: Napredni pristup merenja operativnog rizika
MR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: s/e
JI

Zemlja publikovanja: Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2013.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: 6 poglavlja/ 64 strana/ 1 tabela/ 11 grafika

FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Primenjena matematika
ND

Ključne reči: operativni rizik, raspodele frekvencije, raspodele visine gubitka, modeli agregatnog gubitka, Bajesova teorema
PO

UDK:

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: Tema master rada je napredni pristup merenja operativnog rizika. Svrha modeliranja operativnog rizika je određivanje visine jednogodišnjeg kapitalnog zahteva za operativni rizik. U radu su predstavljene raspodele frekvencije, visine gubitka, kao i modeli agregatnog gubitka koji se koriste u okviru dve vrste naprednog pristupa merenja, a to su pristup raspodele gubitka i pristup scenario analize. Na kraju rada je prikazan nacin integrisanja ova dva pristupa pomoću Bajesovog zaključivanja, koje se vrši radi dobijanja što preciznije ocene visine kapitalnog zahteva za operativni rizik.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 11.06.2013.
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
KO
Predsednik: Dr Zorana Lužanin, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član*:* Dr Nataša Krejić, redovni profesor Prirodno matematičkog fakulteta u Novom Sadu, mentor
Član*:* Dr Danijela Rajter-Ćirić, redovni profesor Prirodno matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE KEY
WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents code: Master’s thesis
CC

Author: Tijana Mandić
AU

Mentor: Nataša Krejić, PhD
MN

Title: The Advanced Measurement Approach for Operational Risk
TI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract:
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2013.
PY

Publisher: Author’s reprint
PU

Publ. place: Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: 6 charters/ 64 pages/ 1 table/ 11 graphics
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Applied Mathematics
SD

Key words: operational risk, frequency distributions, loss distributions, aggregate loss models, Bayes' theorem
SKW
UC:

Holding data: Library of the Department of Mathematics and Informatics
HD

Note:
N

Abstract: The subject of this master's thesis is advanced measurement approach of operational risk. The purpose of operational risk modeling is to measure the annual capital charge for operational risk exposure. In the thesis have been introduced frequency distributions, loss distributions, as well as aggregate loss models used as tools for two advanced measurent approaches, the approach of loss distribution and the approach of scenario analyses. In the conclusion, it has been presented integration model of these two approaches by using Bayesian influence. The purpose of Bayesian influence is a more accurate measurement of the value of capital charge for operational risk exposure.
AB

Accepted by the Scientific Board on: 11.06.2013.
ASB

Defended:.
DE

Thesis defend board:
DB
President*:* Zorana Lužanin, PhD, Full Professor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Novi Sad
Member*:* Nataša Krejić, PhD, Full Professor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Novi Sad, advisor
Member*:* Danijela Rajter-Ćirić, PhD, Full Professor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Novi Sad