UNIVERZITET U NOVOM SADU

PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET

DEPARTMAN ZA

MATEMATIKU I INFORMATIKU

Ciklus leveridža

Master rad

Tijana Čorak

Novi Sad, 2017

mentor: prof. dr Nataša Krejić

Sadržaj

1 Predgovor

Pojam ciklusa leveridža (*eng.Leverage cycle*) je uveo profesor sa Univerziteta Jejl, Džon Geanakoplos. Profesor Geanakoplos je osnovne studije matematike završio na Jejlu. Master studije matematike kao i doktorske studije ekonomije je završio na Harvardu. Pre finansijske krize 2007. godine koja je zadesila prvo Sjedinjene Američke države a potom i ostatak sveta profesor Geanakoplos je bio poznat po svom doprinosu Opštoj teoriji ravnoteže, a posebno nekompletnim tržištima u Opštoj teoriji ravnoteže. Početkom devedesetih godina profesor Geanakoplos je radio na Volstritu i tada prvi put dolazi na ideju o ciklusu leveridža. Inspiraciju je dobio kada je investiciona banka Kidder, Peabody & Co. koja je do tad vrlo uspešno poslovala sa nekretninama, bankrotirala. Nakon toga je učestvovao u osnivanju hedž fonda Ellington Capital Management koji se nakon nekoliko godina našao pred bankrotom. Profesor Džianakoplos smatra da je ključni element koji nedostaje u makroekonomskoj teoriji, elemenat koji se čak ni ne spominje u makroekonomskoj literaturi upravo leveridž. S druge strane, na Volstritu je leveridž ključan u brokerskoj terminologiji. Stoga je rad Džona Geanakoplosa orijentisan na odnos između leveridža i vrednovanja finansijskih sredstava. Prema rečima Džona Geanakoplosa, kriza na tržištu nekretnina 2007. godine u Sjedinjenim Američkim Državama je verodostojan primer ciklusa leveridža. Iako je situacija na tržištu nakon što su bankrotirali Kider, Pibadi & Co., a potom i Ellington Capital Management takođe jedan od primera, ipak kriza 2007. najbolje odgovara modelu ciklusa leveridža.

Džon Geanakoplos objavljuje mnogobrojne radove na temu ciklusa leveridža, ali takođe piše i o Pareto optimalnosti, sistemskom riziku, finansijskim mehurovima, uticaju kreditnih kartica, Opštoj teoriji ravnoteže kao i o mnogim drugim aktuelnim temama na polju makroekonomije.

Ciklus leveridža je istaknut kako u akademskim diskusijama tako i u fluktuacijama na finansijskim tržištima. Ovo je koncept koji nedostaje kako u makroekonomiji tako i u administraciji. Kako se navodi u Hyun Song Shin [1], uključivanje ciklusa leveridža u makroekonomiju daje koherentnu priču o uzrocima finansijskih pojava.

U ovom radu su date osnove i rezultati nekih istraživanja o teoriji leveridža. Rad se sastoji od devet poglavlja. U prvom poglavlju je dat opšti opis funkcionisanja ciklusa leveridža. U drugom poglavlju se definišu osnovni pojmovi iz opšte teorije ravnoteže i potrošačke teorije koji su potrebni za analizu kolaterala, zajmova i posledično leveridža. U trećem poglavlju se prezentuje model ugovornih obećanja, svojstva kolaterala i ravnoteže kolaterala preuzet iz rada "Promises, Promises" Džona Geanakoplosa. U četvrtom poglavlju se analizira model ciklusa leveridža u anksioznoj ekonomiji, u cilju poređenja situacije na finansijskim tržištima u anksioznoj ekonomiji i u krizi. U petom poglavlju je data analiza vrednovanja finansijskih instrumenata i pronalaženja ravnoteže uzimajući u obzir teoriju leveridža, sa akcentom na to da postoji homogenost među učesnicima na finansijskom tržištu. U šestom poglavlju se model iz petog poglavlja proširuje uvođenjem heterogenosti na finansijskom tržištu. U sedmom poglavlju je data analiza leveridža u binomnim ekonomijama, prezentovane su binomne teoreme koje omogućavaju izračunavanje leveridža i određivanje egzaktne ravnoteže. U osmom poglavlju je iznet moj zaključak nakon analize i proučavanja teorije leveridža.

Veliku zahvalnost dugujem svojoj mentorki, Nataši Krejić, na pruženim savetima i smernicama tokom pisanja ovog rada, prenetom znanju i lepoj saradnji.

Takođe bih se zahvalila članovima komsije, Danijeli Rajter - Ćirić i Sanji Rapajić na prenetom znanju i lepoj saradnji.

Novi Sad, januar 2017 Tijana Čorak

2 Pojam leveridža i ciklusa leveridža

U finansijama pod leveridžom se podrazumeva bilo koja tehnika da se umnože gubici i dobit. Najčešće uključuje kupovinu više od jednog finansijskog instrumenta koristeći pozajmljena sredstva sa uverenjem da će prinos od finansijskog instrumenta ili procena cene instrumenta biti veća od troškova pozajmljivanja. Leveridž se definiše kao odnos vrednosti finansijskog instrumenta i gotovine neophodne za kupovinu tog finansijskog instrumenta. Uvek postoji rizik da će trošak pozajmljivanja biti veći od prinosa instrumenta, ili da će vrednost finansijskog instrumenta da padne, što uzrokuje gubitak.

Leveridž se najčešće koristi u cilju kupovine nekretnina i pretpostavlja finansiranje dela kupovne cene sa hipotekarnim dugom. Leveridž se takođe koristi pri pozajmljivanju novca od brokera za investicije. Vlasnici kapitala koriste leveridž za svoje investicije, zadužuju se da bi finansirali svoj biznis. Što vlasnici kapitala više pozajmljuju, manje im je kapitala potrebno, pa je bilo kakav profit ili gubitak podeljen. Hedž fondovi (investiciono - poslovne strukture koje objedinjuju kapital raznih investitora i investiraju u hartije od vrednosti i druge finansijske instrumente) koriste leveridž finansirajući deo svojih portfolija sa gotovinskim prihodima od prodaje dugih pozicija na kratko. Hedž fondovi nisu ograničeni regulativama korišćenja leveridža.

Kada je volatilnost dugoročno niska ili kada postoji neka finansijska inovacija na tržištu dolazi do porasta aktivnosti agenata na tržištu, samim tim je agentima u interesu da poseduju više novca. Pored kapitala koji već poseduju, agenti se zadužuju. Ako je data cena finansijskih instrumenata agenti mogu da se zadužuju u nekoj određenoj meri, rast leveridža doprinosi tome da mogu da se zaduže više. Kada se zaduže, agenti mogu da kupe veći procenat finansijskih instrumenata, odnosno raste tražnja za finansijskim isntrumentima, pa raste i njihova cena. Leveridž se dakle povećava iz dva razloga. Prvi razlog za povećanje leveridža je porast u količini finansijskih instrumenata koje agenti kupuju. Drugi razlog je rast cena finansijskih instrumenata, pa se na ovaj način rast leveridža udvostručava. U prethodno opisanoj ekonomiji postoji velika količina dodatnog zaduživanja, pa ekonomija postaje nestabilna. U svojim radovima, Džon Geanakoplos je uveo termin loših vesti koje imaju zastrašujući uticaj na agente i o kojima će biti reči kasnije u ovom radu. Naime, loše vesti sa zastrašujućim uticajem na agente doprinose tome da zajmodavci redukuju količinu zajmova koju su spremni da daju, što utiče na smanjenje leveridža i pojavu novog nivoa leveridža. Smanjenje leveridža utiče na pad cena finansijskih instrumenata. Međutim zaduženost agenata ostaje ista, pa postoji velika razlika između količine zaduženosti, koja je visoka i cena finansijskih instrumenata koji se koriste kao kolaterali za pozajmljena sredstva. Neutralisanje razlike koja se javlja između cena kolaterala i količine duga se može postići opraštanjem dela duga od strane zajmodavaca.

Leveridž umnožava profit kada je prinos of finansijskog instrumenta veći od troškova pozajmljivanja. S druge strane gubici su takođe uvećani kada su troškovi pozajmljivanja veći od prinosa. Postoje razni uzroci za postojanje rizika leveridža. Rizik leveridža se može pripisati padu vrednosti kolateralnih sredstava. Broker tada može da zahteva dodatna sredstva kada vrednost finansijskih instrumenata opada. Banke takođe mogu neuspešno da obnove hipoteke kada vrednost nekretnina pada ispod nominalnog iznosa duga. Ove situacije se dešavaju kada je tržište likvidno i kada dođe do deprecijacije cena. Dakle u lošim uslovima na tržištu, leveridž se povećava, a sa tim se umnožavaju i troškovi. Povećanje leveridža može brzo da dovede do kraha, čak i kada je pad vrednosti nominalnog finansijskog instrumenta blag ili privremen. Rizik leveridža se može ublažiti ponovnim pregovaranjem o uslovima pod kojima se učesnici na tržištu zadužuju, ostavljanjem prostora za dodatno zaduživanje i upotrebu leveridža samo pri trgovini sa tekućim sredstvima.

Kada je leveridž visok, agenti mogu da kupe veliku količinu finansijskih instrumenata sa vrlo malo gotovine. S druge strane, kada je leveridž nizak, za kupovinu istih finansijskih instrumenata se mora koristiti gotovina skoro u potpunosti. Elastičan leveridž utiče na rast cena finansijskih instrumenata, jer kupci mogu lakše da se zaduže, pa troše više. Slično kada je leveridž izrazito neelastičan, odnosno kada agenti ne preferiraju da daju zajmove, cene finansijskih instrumenata naglo padaju.

Kriza nekretnina i krize na finansijskom tržištu u Sjedinjenim Američkim Državama 2008. godine je klasičan primer ciklusa leveridža. Prema teoriji Džona Geanakoplosa, osnovni problem je što, prilikom krize, vlasti (u Sjedinjenim Američkim Državama Sistem federalnih rezervi) prilagođavaju i kontrolišu kamatne stope, smatrajući da su kamatne stope glavni uzročnici krize. Federalne rezerve su 2008. godine, u cilju zaustavljanja krize, smanjile kamatne stope skoro na 0%, ali čak ni to nije bilo delotvorno. Razlog tome je što uzročnik krize nisu samo kamatne stope. Dakle, zanemarivanjem uloge kolaterala i leveridža u krizi nije moguće objasniti krizu, niti izbeći potpuni krah tržišta, jer je uzrok kraha upravo ciklus leveridža. Geanakoplosova teorija leveridža tvrdi da u svim makroekonomskim modelima nedostaje esencijalni elemenat leveridža, bez kog se kriza ne može ni objasniti, ni predvideti, a samim tim ni sprečiti.

Modeli koji se trenutno koriste u makroekonomiji se zasnivaju na ekonomskim šokovima. Međutim, u makroekonomiji se smatra da ekonomski šokovi ne utiču na rast neizvesnosti. Makroekonomski modeli takođe u potpunosti zanemaruju ulogu leveridža, verovatnoću neispunjenja ugovornih obaveza i uticaj krize na agente koji nisu zaduženi.

U praksi, nije moguće dobiti zajam ako ne postoji kolateral koji će garantovati zajmodavcu da je njegov zajam osiguran. Kolateralna stopa predstavlja vrednost kolaterala koji treba da se da u zalog da bi garantovao jednu novčanu jedinicu zajma. Velike varijacije u kolateralnim stopama, odnosno velike varijacije leveridža je fenomen koji se ponavlja. Svaki ciklus leveridža se završava sa neizvesnošću na finansijskom tržištu, rastom kolateralnih stopa i bankrotom optimističnih agenata.

Kako je Džon Geanakoplos istakao u svojim radovima, kolateralne stope (marža ili leveridž) imaju neuporedivo veći uticaj na ekonomiju od kamatnih stopa. Marža predstavlja kolateral koji vlasnik finansijskog instrumenta daje kao depozit da bi pokrio deo kreditnog rizika druge ugovorne strane (najčešce brokera) ili kreditni rizik u celosti. Kreditni rizik se javlja ukoliko je vlasnik kapitala pozajmio gotovinu od druge ugovorne strane da bi kupio finansijske instrumente, prodao finanasijske instrumente na kratko (*eng. Going short*) ili učestvovao u kupoprodaji finansijskih derivata. Sledi jednostavan primer koji slikovito objašnjava maržu, kolateral i leveridž.

Primer: Vlasnik nekretnine (hedž - fonda ili investicione banke) uzima zajam. Da bi se zajmodavac osigurao u slučaju da dužnik nije u mogućnosti da vrati svoj dug neophodno je pokriće za zajam u vidu nekretnine koju polaže dužnik. Nekretnina predstavlja kolateral. Vlasnik nekretnine mora da pregovara ne samo o kamatnoj stopi nego i o iznosu zajma koji može da uzme. Neka nekretnina košta 100000 €, vlasnik nekretnine uzima 90000 € i plati 10000 € u gotovini. Tada je marža 10% , pozajmljeni udeo u vrednosti (*eng. Loan to Value*) je $LTV = 90\%$, a kolateralna stopa je jednaka odnosu $\frac{100000}{90000} = 111.11\%$. Leveridž je recipročna vrednost marže, odnosno količnik vrednosti imovine u odnosu na novac neophodan za kupovinu, dakle $\frac{100000}{10000} = 10$.

Očigledno je da je u potpunosti svejedno da li će se posmatrati kolateralna stopa, marža ili leveridž.

U Geanakoplos [3] se razvija teorija leveridža i time objašnjava zašto se rezultati dobijeni u praksi razlikuju od klasične ekonomske teorije. U klasičnoj ekonomskoj teoriji ravnoteža ponude i tražnje determiniše kamatne stope na pozajmnice ali ne i leveridž (odnosno maržu). Geanakoplos tvrdi da je u praksi je očigledno da zakoni ponude i tražnje mogu da determinišu dve promenljive i kamatne stope i leveriž na pozajmnicu. Klasična ekonomska teorija nije dovoljno efikasna u egzaktnom objašnjenju ovih efekata jer leveridž fiksira kao konstantu, omogućavajući na taj način da jednakost ponude i tražnje predviđa samo kamatnu stopu.

Varijacija leveridža ima veliki uticaj na cenu finansijskih instrumenata, odnosno utiče na fluktuaciju cena koja doprinosi formiranju finansijskih mehurova i njihovih krahova. Vrednosti finansijskih instrumenata su relativne. Za određene finansijske instrumente postoji klasa kupaca čije preferencije utiču na to da su za njih ti instrumenti vredniji nego za ostale kupce, pa su spremni da ih plate više i na taj način utiču na njihovu cenu. Nasuprot tome klasična ekonomska teorija smatra da cene finansijskih instrumenata reflektuju fundamentalnu vrednost instrumenata. Kupci koji preferiraju neki finansijski instrument su spremni da plate više za taj instrument u odnosu na ostale kupce na tržištu. Isto važi za kupce koji imaju veću toleranciju prema riziku ili su jednostavno optimističniji. Klasa kupaca koja je spremna da plati više za neki finansijski instrument je sklonija ka uzimanju zajmova, odnosno sklonija ka kupovini sa većim leveridžom, pa daju manje kolaterala, čime utiču na rast cena tih instrumenata. Ako se kupcima ograniči mogućnost uzimanja zajmova, kupovaće manje, što utiče na to da ostali kupci manje vrednuju finansijski instrument, pa cena pada.

Džon Geanakoplos smatra da vlast, odnosno u Sjedinjenim Američkim Državama Sistem federalnih rezervi, može da utiče na leveridž. Donošenjem zakonskih regulativa koje stavljaju ograničenje na leveridž se može sprečiti kriza. Međutim ako se na vreme ne izvrši finansijska intervencija, leveridž postaje previsok u periodu finansijskog uspona a previše nizak u periodu kraha. Ciklus leveridža se definiše kao prociklična ekspanzija i kontrakcija leveridža tokom poslovnog ciklusa. Kao rezultat, cene finansijskih instrumenata su previsoke u periodu uspona, a niske u periodu krize.

Jedan od načina da se neutrališe negativna ekonomska aktivnost i spreči ciklus leveridža je da centralna banka zanemari leveridž u prosperitetnim vremenima da bi podupirala i kontrolisala leveridž u uslovima krize. Analiza Džona Geanakoplosa nije konzistentna sa fundamentalnom teorijom vrednovanja i hipotezom o efikasnim tržištima jer implicira da centralna banka može da prati i reguliše leveridž kao i kamatne stope. Klasična ekonomska teorija podrazumeva donošenje zaključaka na osnovu istorijskih cena. Međutim, ako agenti izvode zaključke o cenama na osnovu ponašanja cena u prošlosti, doprinose pogoršavanju ciklusa leveridža. Agenti smatraju da mogu bezbedno da postavljaju vrlo niske zahteve za maržu kada cene rastu. S druge strane smatraju da pad cena znači da je neophodno da postave apsurdno visoke nivoe kolaterala. Međutim oba zaključka su pogrešna i dovode do značajnog pogoršavanja ciklusa leveriža. Kada cene rastu, smanjivanje marže doprinosi većem zaduživanju agenata i rastu leveridža, kada cene padaju, visoki zahtevi za kolaterale doprinose naglom padu leveridža, dok nivo zaduženosti ostaje isti. Razlika između nivoa zaduženosti i pada cene finansijskih instrumenata stvara krizu.

Ključna pretpostavka za posmatranje ciklusa leveridža je da svaki agent deluje savršeno racionalno iz svoje perspektive, odnosno da svaki agent ima precizne informacije po pitanju trendova i ne ignoriše negativne pokazatelje o promenama na tržištu.

Ako se ciklus leveridža ne spreči na vreme, uvek dovodi do kraha na finansijskom tržištu. Krah na tržištu se uvek sastoji iz tri elementa. Prvi elemenat kraha jeste porast neizvesnosti na tržištu. Porast neizvesnosti utiče na volatilnost prinosa. Zajmodavci zatim postaju nestrpljiviji pa se postavljaju niski zahtevi za marže, što su druga dva elementa kraha. Nestrpljivost zajmodavaca i niske marže dovode do pada cena, pa se kupci sa optimističnim preferencijama suočavaju sa ogromnim gubicima. Ova tri elementa kraha koegzistiraju; Redistribucija bogatstva između optimističnih i pesimističnih agenata utiče na dalje narušavanje cena i uzrokuje veće gubitke za optimistične agente i na još oštriji nagib pada cena, što su racionalni zajmodavci očekivali i stoga zatražili veće nivoe kolaterala.

Važno je razumeti da krah ne može da se zaustavi, jedino je moguće delovati na ekonomiju pre nego što dođe do kraha, odnosno, sprečavanje ciklusa leveridža. Najbolja politika sprečavanja ciklusa leveridža je restrikcija leveridža u prosperitetnim vremenima.

Kada se desi krah na finansijskom tržištu, jedini način za neutralisanje negativnih efekata kraha jeste otklanjanje sva tri elementa kraha. Džon Geanakoplos u svojim radovima tvrdi da je jedini ispravan metod regulisanja neizvenosti na finansijskom tržištu, kada se desi krah, ukidanje konfiskovanja imovine, odnosno, opraštanje dela duga. Na taj način se sprečava da cene nekretnina imaju tendenciju slobodnog pada.

Kada se spreči slobodan pad cena nekretnina, leveridž se vraća na razuman nivo.

Leveridž se može vratiti na razuman nivo na mnogo načina. Jedan od najlakših načina za redukciju leveridža je da centralna banka direktno daje zajmove investitorima sa velikodušnim nivoima kolaterala. Neophodno je da nivo kolaterala bude velikodušniji nego što su privatna tržišta spremna da ponude. Takođe je neophodno da se povrati izgubljena kupovna moć optimističnih kupaca koji su bankrotirali, što bi čak moglo da zahteva veštačko dodavanje kapitala u finansijski sistem.

Leveridž koeficijente finansijskih instrumenata je teško odrediti istorijski. Mnogo se lakše odredjuje investitorski leveridž koji je jednak

$$\frac{dug + kapital}{kapital}$$

Koeficijenti investitorskog leveridža mogu biti varljivi. U lošim ekonomskim uslovima, kada pravi leveridž finansijskih instrumenata drastično opada, mnoge kompanije ostaju bez kapitala, pa se kompanije zadužuju, usled čega se javlja privid povećanja investitorskog leveridža, iako se ustvari drastično smanjio.

3 Osnovi opšte teorije ravnoteže

3.1 Preferencije

Neka je dat skup agenata H i skup potrošnih dobara $X = \{x, y, z, \ldots\}$.Neka su data dva potrošna dobra x i y. Agent $h \in H$ slabo preferira potrošno dobro x prema y ako je potrošno dobro x dobro bar kao potrošno dobro y, u oznaci $x \succeq y$. Ako agent slabo preferira x u odnosu na y, $x \succeq y$ i slabo preferira y u odnosu na x, $x \succeq y$, tada je agent indiferentan između x i y $x \sim y$.

Aksioma kompletnosti Za svaki par $x, y \in X$, važi ili da je $x \succeq y$, ili $y \succeq x$, ili $x \sim y$.

Aksioma tranzitivnosti Za svaku trojku $x, y, z \in X$ važi da ako je $x \succeq y$ i $y \succeq z$ onda je $x \succeq z$.

Funkcija korisnosti, označena sa $u(x) \in \mathbb{R}$ predstavlja korisnost koju agent dodeljuje nekom potrošnom dobru. Funkcija korisnosti predstavlja preferencije agenta ako važi

$$u(x) \geq u(y) \text{ ako i samo ako } x \succeq y \tag{1}$$

Teorema reprezentacije Neka su preferencije agenta $\succeq$ kompletne i tranzitivne i neka je X konačan. Postoji funkcija koristnosti $u(x) : X \to \mathbb{R}$ koja predstavlja $\succeq$.

Teorema Neka $u(x)$ predstavlja preferencije agenta $\succeq$ i neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strogo rastuća funkcija. Tada je nova funkcija korisnosti data sad $v(x) = f(u(x))$ i takođe predstavlja preferencije agenta $\succeq$.

Teorema reprezentacije pretpostavlja konačan broj dobara. Matematički je pogodnije uzeti kontinuum dobara. Neka je skup izbora dat sa $X \subseteq \mathbb{R}^n_+$. Element skupa je $x = (x_1, \ldots, x_n)$, gde je x_i i - to dobro koje agent konzumira.

Aksioma neprekidnosti Neka je $x^1, x^2, x^3, \dots$ niz pogodnih izbora, tako da $x^i \in X$ za svako i i neka niz konvergira ka $x \in X$. Ako važi $x^i \succeq y$ za svako i, tada $x \succeq y$.

Teorema reprezentacije za budžetski skup Neka su preferencije agenta $\succeq$ kompletne, tranzitivne i neprekidne i neka je $X \subseteq \mathbb{R}^n_+$. Tada postoji neprekidna funkcija preferencije $u(x) : X \to \mathbb{R}$ koja predstavlja preferenciju $\succeq$.

Ako važi da je agent indiferentan između x i y, $x \sim y$, tada važi da je $u(x) = u(y)$. Ako agent slabo preferira x u odnosu na y, $x \succeq y$ i agent nije indiferentan između x i y, onda agent strogo preferira x u odnosu na y u oznaci $x \succ y$. Ako važi $x \succ y$ onda je $u(x) > u(y)$.

Preference su monotone ako za bilo koje dve korpe dobara $x = (x_1, \dots, x_n)$ i $y = (y_1, \dots, x_n)$ važi

$$x_i \geq y_i \wedge x_i > y_i \text{ za svako } i \implies x \succ y$$

.

Preferencije su konveksne ako važi da ako je $x \succeq y$ onda je

$$tx + (1-t)y \succeq y \qquad \forall t \in [0,1]$$

Konveksnost ukazuje na to da agenti preferiraju prosečne vrednosti u odnosu na ekstremne. Ako je agent indiferentan između x i y, tada će preferirati prosek $tx + (1-t)y$ u odnosu na x ili y.

Takođe preferencije su konveksne ako važi da ako je $u(x) \geq u(y)$ onda je

$$u(tx + (1-t)y) \geq u(y) \qquad \forall t \in [0,1] \tag{2}$$

Funkcija korisnosti koja zadovoljava (2) se naziva kvazi - konkavna. Pretpostavka konveksnosti je važna pri analizi problema maksimizacije agentove korisnosti. Monotonost i konveksnost znače da svako rešenje agentovih uslova prvog reda rešava problem maksimizacije.

Definicija Indiferentna kriva agenta je skup korpi dobara koje donose isti nivo korisnosti. Odnosno

$$\text{Indiferentna kriva} = \{x \in X | u(x) = \text{const.}\}$$

Svaki agent ima kolekciju indiferentnih kriva koje odgovaraju različitim nivoima korisnosti.

Neka važi da postoje samo dva dobra x_1 i x_2 i funkcija korisnosti $u(x_1, x_2)$. Nagib indiferentne krive meri stopu po kojoj agent pristaje da zameni jedno dobro za drugo. Nagib indiferentne krive se naziva marginalna stopa supstitucije, u oznaci MRS, odnosno

$$MRS = \frac{dx_2}{dx_1}\bigg|_{u(x_1,x_2) = \text{ const.}}$$

Definicija Marginalna korisnost je jednaka dobiti u korisnosti od jedne dodatne jedinice dobra i, odnosno

$$MU_i(x_1, x_2) = \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_i}$$

Razmotrimo efekat male promene u agentovoj korpi dobara. Diferenciranjem korisnosti $u(x_1, x_2)$ dobija se

$$du = \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_2 \tag{3}$$

Duž indiferentne krive $du = 0$ jednakost (3) postaje

$$\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_2 = 0$$

Grupisanjem prethodne jednakosti se dobija

$$-\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\partial u(x_1, x_2)/\partial x_1}{\partial u(x_1, x_2)/\partial x_2}$$

Dakle važi

$$MRS = \frac{MU_1}{MU_2} \tag{4}$$

Koristeći definiciju MRS, jedna jedinica x_1 vredi MRS jedinica x_2, odnosno $MU_1 = MRS \times MU_2$. Iz monotonosti sledi da indiferentna kriva ima opadajući nagib, uzimajući u obzir jednakost (2), marginalna stopa supstitucije je pozitivna.

Ako važe pretpostavke za monotonost i konveksnost, indiferentna kriva je konveksna. Dakle, MRS je opadajuća u x_1 duž indiferentne krive. Indiferentna kriva definiše implicitnu vezu između x_1 i x_2,

$$u(x_1, x_2(x_1)) = k$$

Konveksnost implicira da je $MRS(x_1, x_2(x_1))$ opadajuća u x_1. Izbori koje agent pravi sa $u(x)$ su isti kao izbori $v(x) = f(u(x))$, gde je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strogo rastuća. Neka je data funkcija korisnosti $u(x)$ koja odgovara marginalnoj stopi supstitucije MRS. Pod funkcijom korisnosti $v(x)$, marginalna stopa supstitucije je data sa

$$MRS^v = \frac{\partial v/\partial x_1}{\partial v/\partial x_2} = \frac{f'(u)\partial u/\partial x_1}{f'(u)\partial u/\partial x_2} = MRS^u$$

Dakle, agent jednako trguje sa obe funkcije korisnosti, ima iste indiferentne krive i ima iste odluke.

3.2 Valrasov model

U Valrasovom modelu je data ekonomija razmene koja podrazumeva ekonomiju bez proizvodnje. Postoji konačan broj agenata i konačan broj dobara. Svaki agent poseduje korpu dobara. Data je ekonomija sa agentima $h \in H$ i potrošnim dobrima $l \in L$. Korpa dobara je data kao vektor $x \in \mathbb{R}^L_+$. Svaki agent h ima zaduženja $e^h \in \mathbb{R}^L_+$ i funkciju korisnosti $u^h : \mathbb{R}^L_+ \to \mathbb{R}$. Ekonomija razmene je označena sa

$\varepsilon = ((u^h, e^h)_{h\in H})$. Tržišne cene za potrošna dobra su date. Vektor cena je dat sa $\pi \in \mathbb{R}^L_+$, sve cene su nenegativne.

Svaki agent bira potrošnju koja maksimizira korisnost, uzimajući u obzir budžetska ograničenja. Za agenta h važi

$$\max_{x\in\mathbb{R}^L_+} u^h(x) \qquad \text{s.t. } \pi\cdot x \leq \pi\cdot e^h.$$

Budžetsko ograničenje se razlikuje od standardnog ograničenja u teoriji vrednovanja. Standardno budžetsko ograničenje je $\pi \cdot x \leq w$, gde je w početno bogatstvo. U ovom modelu je bogatstvo dato kao iznos koji bi agent dobio prodajom svega što poseduje $\pi \cdot e^h$.

Budžetski skup je dat kao

$$B^h(\pi) = \{x : \pi \cdot x \leq \pi \cdot e^h\}$$

.

Definicija Valrasova ravnoteža za ekonomiju razmene ε je vektor $(\pi, (x^h)_{h\in H})$ tako da važi

1. Agenti maksimiziraju svoje korisnosti : za svakog $h \in H$

$$x^h \in \arg\max_{x\in B^h(\pi)} u^h(x)$$

2. Tržišta su u ravnoteži: za svako $l \in L$

$$\sum_{h\in H} x^h_l = \sum_{h\in H} e^h_l$$

Definicija Alokacija dobara $(x^h)_{h\in H} \in \mathbb{R}^{H\cdot L}$ je ostvariva ako za svako $l \in L$ važi

$$\sum_{h\in H} x^h_l \leq \sum_{h\in H} e^h_l$$

Definicija Neka je data ekonomija razmene ε, ostvariva alokacija x je Pareto optimalna (Pareto efikasna) ako ne postoji ostvariva alokacija $\hat{x}$ takva da je $u^h(\hat{x}) \geq u^h(x^h)$ za sve $h \in H$, sa strogom nejednakosti za bar jedno $h \in H$.

Osnovne pretpostavke o preferencijama i zaduženjima agenata su:

(P1) Za sve agente $h \in H$, u^h je neprekidna.

(P2) Za sve agente $h \in H$, u^h je rastuća, odnosno $u^h(x') > u^h(x)$ ako je $x \gg x$.

(P3) Za sve agente $h \in H$, u^h je konkavna.

(P4) Za sve agente $h \in H$, $e^h \gg 0$.

Teorema (Prva teorema blagostanja) Neka je $(\pi, (x^h)_{h\in H})$ Valrasova ravnoteža za ekonomiju razmene ε. Tada ako *(P2)* važi, alokacija $(x^h)_{h\in H}$ je Pareto optimalna.

Teorema (Druga teorema blagostanja) Neka je ε ekonomija razmene koja zadovoljava *(P1) - (P4)*. Ako je $(e^h)_{h\in H}$ Pareto optimalno tada postoji vektor cena $\pi \in \mathbb{R}^L_+$ tako da $(\pi, (e^h)_{h\in H})$ Valrasova ravnoteža za ε.

Jedan od načina za identifikaciju Pareto optimalnih alokacija x^h, gde je $h \in H$ konačan skupa agenata, je pronalaženje rešenja za

$$\max_x u^h(x_1^h, \dots, x_L^h) \geq \bar{u}^h \qquad \text{za svako } h \in H \setminus \{1\}$$

s.t.

$$\sum_h x_l^h \leq \sum_h e_l^h \qquad \text{za svako } l = 1, \dots L$$

.

Ako se dosadašnjim pretpostavkama doda i diferencijabilnost funkcije korisnosti, problem zadovoljava sledeće uslove

$$\lambda^h \frac{\partial u^h}{\partial x_l^h} - \mu_l \leq 0, \qquad x_l^h \geq 0, \qquad \Big(\lambda^h \frac{\partial u^h}{\partial x_l^h} - \mu_l\Big) x_l^h = 0 \qquad (\star)$$

gde je λ^h Lagranžov množitelj za agenta h, a μ_l ograničenje za potrošno dobro l.

Dodajući ovim uslovima ograničenja

$$u^h(x_1^h, \dots, x_L^h) = \bar{u}^h \qquad \text{za } h \in H \setminus \{1\}$$

$$\sum_h x_l^h = \sum_h e_l^h \qquad \text{za } l = 1, \dots L$$

Važi konvencija da je $\lambda^1 = 1$, dok za ostale $h \in H$ važi $\lambda^h > 0$ i $\mu_l > 0$ za sve l.

Ako važi da svaki agent troši pozitivnu količinu svakog dobra kada je ekonomija optimalna, odnosno $x_l^h > 0$ za sve h, l, važi da je

$$MRS_{kl}^h = \frac{\partial u^h / \partial x_k^h}{\partial u^h / \partial x_l^h} = \frac{\partial u^{h'} / \partial x_k^{h'}}{\partial u^{h'} / \partial x_l^{h'}} = MRS_{kl}^{h'} = \frac{\mu_k}{\mu_l}$$

Neka je x Pareto optimalna alokacija. Neka je $e^h = x^h$ i cene su definisane $\pi_l = \mu_l$. Uz cene i zaduženja date na ovaj način, problem optimizacije agenta h je

$$\max_{\tilde{x}^h} u^h(\tilde{x}^h)$$

$$\text{s.t } \pi \cdot \tilde{x}^h \leq \pi \cdot e^h$$

Teorema Neka je data ekonomija razmene ε koja zadovoljava *P1 - P4*. Valrasova ravnoteža postoji u (π, x).

Definicija Funkcija viška tražnje za agenta h je data sa:

$$z^h(\pi) = x^h(\pi, \pi \cdot e^h) - e^h$$

gde je $x^h(\pi, \pi \cdot e^h)$ Valrasova funkcija tražnje.

Agregatna funkcija tražnje je:

$$z(\pi) = \sum_h z^h(\pi)$$

Ako je vektor cene $\pi \in \mathbb{R}^L_+$ zadovoljava $z(\pi) = 0$, onda je $(\pi, (x^h)_{h \in H})$ Valrasova ravnoteža.

Propozicija Neka su *(P1) - (P4)* zadovoljena. Tada je agregatna funkcija viška tražnje $z(\pi)$ zadovoljava:

(i) z je neprekidna

(ii) z je homogena stepena nula

(iii) $z(\pi) = 0$ za sve π (Valrasov zakon)

(iv) za sve $Z > 0$, $z_l(\pi) > -Z$ za sve $l \in L$ i cenu π

(v) ako $\pi^n \to \pi$, gde je $\pi \neq 0$ i $\pi_l = 0$ za neko l, tada važi $\max\{z_1(\pi^n), \ldots, z_L(\pi^n)\} \to \infty$

3.3 Opšta teorija ravnoteže: Neizvesnost

U Valrasov model se sada uvodi neizvesnost. Dato je drvo odlučivanja sa S čvorova $s \in S$. Prethodnik čvora s je označen sa s' , a svako stanje sveta $s \in S \setminus S_T$ postoji skup neposrednih sledbenika $S(s)$. Do svakog sledbenika $\tau \in S(s)$ se dolazi preko grana $\sigma \in B(s)$, odnosno $\tau = s\sigma$. Vremenski trenutak stanja sveta s, obeležen sa $t(s)$, je broj čvorova kroz koje je neophodno proći da bi se stiglo od 1 do s.

U svakom čvoru postoji L potrošnih dobara, tako da je ukupan broj potrošnih dobara jednak SL. Skup agenata je H, svaki agent $h \in H$ ima zaduženja $e^i \in \mathbb{R}^{SL}_+ +$. Skup potrošnje agenta h je $\mathbb{R}^{SL}$, a funkcija korisnosti je $u^h : \mathbb{R}^{SL} \to R$. Valrasova ravnoteža se ponovo definiše kao skup cena i alokacija takvih da svi agenti maksimiziraju svoju korisnost i da su sva tržišta u ravnoteži. Osnovna ideja je da se trguje samo u početnom trenutku $t = 0$ i da ne postoji dalja mogućnost trgovanja. Pod ovim pretpostavkama postoji Valrasova ravnoteža i teoreme blagostanja važe.

3.3.1 Jednostavan finansijski model

Dat je jednostavan model u kom postoje samo dva vremenska trenutka $t = 0, 1$, koja se odnose na sadašnjost i budućnost. Postoji $S+1$ stanje sveta, gde u početnom trenutku $t = 0$ važi $s = 0$, a u $t = 1$ postoji S mogućih stanja sveta. U svakom stanju sveta $s \in S$, postoji samo jedno, u potpunosti potrošno dobro.

Svaki agent $h \in H$ ima svoje početno zaduženje $e^h = (e^h_0, \ldots, e^h_S) \in \mathbb{R}^{S+1}_+ +$ i funkciju korisnosti $u^h : \mathbb{R}^{S+1} \to \mathbb{R}$ po korpama dobara $c^h = (c^h_0, \ldots, c^h_S) \in \mathbb{R}^{S+1}_+$. Takođe funkcija korisnosti svakog agenta zadovoljava standarnde pretpostavke - rastuća je, neprekidna i strogo konkavna. Definišimo $\bar{x} = (x_1, \dots, x_S)$ u trenutku $t = 1$ kao deo vektora $x = (x_0, x_1, \dots, x_S)$. Agregatna tražnja $e = \sum_{h \in H} e^h$.

Dat je skup J u kom postoji J finansijskih instrumenata $j \in J$. Svaki finansijski instrument j u trenutku $t = 1$ isplaćuje dividende $d^j \in \mathbb{R}^S$. Cena finansijskog instrumenta j u trenutku $t = 0$ je ρ_j. Bez gubitka opštosti važi pretpostavka da finansijski instrumenti imaju nultu neto sadašnju vrednost. Dividende finansijskih instrumenata su objedinjene u matrici

$$A = (d^1, \dots, d^J) \in \mathbb{R}^{S \times J}$$

U trenutku $t = 0$, svaki agent h bira portfolio $\varphi^h \in \mathbb{R}^J$, gde je φ^h_j količina finansijskog instrumenta j koje poseduje agent h. Portfolio agenta jedinstveno određuje njegovo bogatstvo u svakom stanju sveta, pa je njegova potrošnja $\bar{x}^h = e^h + A\varphi^h$ (cene su normalizovane i jednake jedan u početnom trenutku). Tražnja svakog agenta $\bar{x}^h - e^h$ pripada skupu linearnih kombinacija matrice isplata A

$$\langle A \rangle = \{z \in \mathbb{R}^S : \exists \varphi \in \mathbb{R}^J \text{ tako da je } z = A\varphi\}$$

Finansijska ekonomija je dakle uređena trojka $E = ((u^h, e^h)_{h \in H}, A)$. Bez gubitka opštosti važi da je $\operatorname{rang}(A) = J$, odnosno ne postoje suvišni finansijski instrumenti. Kada bi postojali suvišni finansijski instrumenti, teorija arbitraže bi implicirala da je cena nekih finansijskih instrumenata jedinstveno određena cenom nekih drugih finansijskih instrumenata, bez obzira na preferencije agenata. Smatra se da tržište nije kompletno ako je $J < S$, (broj aktiva manji od broja stanja sveta).

Pri vrednovanju finansijskih instrumenata ne postoji arbitraža ako nije moguće postići pozitivan tok prihoda u svim stanjima sveta sa trgovinom po postojećim cenama, odnosno ako ne postoji pozicija $\varphi \in \mathbb{R}^J$ sa $\rho\varphi \leq 0$ i $A\varphi \geq 0$, pri čemu je bar jedna nejednakost stroga. Ovde je $\rho\varphi$ cena portfolija φ u trenutku $t = 0$, a $A\varphi$ je vektor isplata u različitim stanjima sveta.

Ako agenti imaju strogo rastuće funkcije korisnosti, cene finansijskih instrumenata moraju sprečavati arbitražu, ili bi postojao problem sa maksimizacijom korisnosti.

Teorema Cena finansijskog instrumenta $\rho \in \mathbb{R}^J$ isključuje arbitražu ako i samo ako postoji vektor stanja cene $\pi \in \mathbb{R}^S_{++}$ tako da je $\rho = \pi' \cdot A$.

Definicija Ravnoteža finansijskog tržišta za finansijsku ekonomiju E je kolekcija portfolija $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^H) \in \mathbb{R}^{HJ}$, individualne potrošnje $(x^h)_{h \in H}$ i cene $\rho \in \mathbb{R}^J$ tako da:

1. Agenti maksimiziraju korisnost

$$(x^h, \varphi^h) \in \arg \max_{\varphi^h \in \mathbb{R}^J, c^h \in \mathbb{R}^{S+1}_+} u^h(c^h)$$

$$\text{s.t. } c^h = e^h + \begin{pmatrix} -\rho' \\ A \end{pmatrix} \varphi^h$$

2. Tržište je u ravnoteži

$$\sum_{h \in H} \varphi^h = 0$$

Jasno je da svaka ravnotežna cena mora isključivati arbitražu da bi rešenje problema maksimizacije bilo dobro definisano. Cene stanja se mogu zaključiti iz uslova prvog reda

$$\pi_s = \frac{\partial u^h(x^h)}{\partial x_s^h}$$

Ako je $J = S$ tada je ravnoteža finansijskog tržišta jednaka Valrasovoj ravnoteži. Postoji jedinstven vektor stanja cena $\pi \in \mathbb{R}^S_{++}$ tako da je $\rho = \pi' A$.Ovo je takođe cena za Valrasovu ekonomiju; Rezultujuće alokacije su iste u obe ravnoteže.

Kada tržišta nisu kompletna $J < S$, ravnoteža i dalje postoji ali ravnotežna alokacija nije efikasna.

Definicija Ako su data zaduženja $(e^h)_{h\in H}$ i finansijski instrumenti A, alokacija $(x^h)_{h\in H}$ ima svojstvo ograničene efikasnosti ako je $\sum_{h\in H}(x^h - e^h) \leq 0$, $x^h - e^h \in \langle A \rangle$ za sve $h \in H$ i postoji alternativna alokacija $(\hat{x}^h)_{h\in H}$ koja je Pareto dominatna $(x^h)_{h\in H}$ i zadovoljava $\sum_{h\in H}(\hat{x}^h - e^h) \leq 0$ i $\hat{x}^h - e^h \in \langle A \rangle$ za sve $h \in H$.

Teorema Ako je funkcija korisnosti strogo rastuća, ravnoteža finansijskih tržišta ima ograničenu efikasnost.

3.4 CAPM model (*eng. Capital Asset Pricing Model*)

Neka postoji otvoreno tržište, gde su svi rizični finansijski instrumenti dostupni. Postoji bezrizična aktiva sa kamatnom stopom r_f. Pretpostavlja se da su sve informacije dostupne. Svi agenti su investitori koji imaju racionalna očekivanja i averziju prema riziku. Kako su svim agentima dostupni isti finansijski instrumenti, informacije i svi agenti imaju iste metode odlučivanja, portfolio svih agenata leži na istoj granici efikasnosti i sačinjen je od nerizične aktive i jedinstvenog fonda rizičnih finansijskih instrumenata. Dakle, svi agenti imaju isti problem optimizacije. Efikasni fond koji se koristi od strane svih agenata se naziva tržišni portfolio i označen je sa M. Izračunavanjem vrednosti svakog finansijskog instrumenta a potom ih sumirajući dobija se ukupna kapitalna vrednost tržišta $V = V_1 + \dots V_n$, gde su $w_i = V_i/V$ ponderi za pojedinačan finansijski instrument u tržišnom portfoliju.

Neka je $(\sigma_M, \bar{r}_M)$ uređeni par standardne devijacije i prinosa koji odgovara tržišnom portfoliju M. Svaki portfolio izabran od strane racionalnog investitora će imati tačku $(\sigma, \bar{r})$ koja se nalazi na tržištnoj liniji kapitala ili CML liniji (*eng. capital market line*)

$$\bar{r} = r_f + \frac{\bar{r}_M - r_f}{\sigma_M}\sigma$$

CML linija je efikasna granica za investicije i izražava očekivani prinos za svaki efikasan portfolio preko standardne devijacije portfolio, koristeći takozvanu cenu rizika

$$\frac{\bar{r}_M - r_f}{\sigma_M}$$

koja je ujedno i nagib CML linije i predstavlja promenu očekivanog prinosa $\bar{r}$ po jedinici promene standardne devijacije.

Teorema (CAPM formula) Neka je dat tržišni portfolio M. Za svaki finansijski instrument i važi

$$\bar{r}_i - r_f = \beta_i(\bar{r}_M - r_f),$$

gde je

$$\beta_i = \frac{cov_{M,i}}{\sigma_M^2}$$

beta vrednost finansijskog instrumenta i. Beta vrednost služi kao mera rizika za finansijski instrument ili portfolio i meri nediverzifikovani rizik portfolija.

Uopštenije, za bilo koji portfolio $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ rizičnih finansijskih instrumenata, beta portfolija se može izračunati kao ponderisani prosek pojedinačnih beta finansijskih instrumenata

$$\bar{r}_\alpha - r_f = \beta_\alpha(\bar{r}_M - r_f),$$

gde je

$$\beta_\alpha = \frac{cov_{M,\alpha}}{\sigma_M^2} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i.$$

Imajući u vidu CAPM formulu za finansijski instrument i se može odrediti prinos r_i

$$r_i = r_f + \beta_i(r_M - r_f) + \epsilon_i$$

gde je

$$\epsilon_i = r_i - r_f - \beta_i(r_M - r_f)$$

slučajna promenljiva koja označava grešku vrednovanja. Takođe je deterministička vrednost $\bar{r}_M$ zamenjena sa slučajnom promenljivom r_M.

Iz CAPM formule sledi da je $E(\epsilon_i) = 0$. Takođe važi da je $cov(\epsilon_i, r_M) = 0$.

Dakle greška vrednovanja ima očekivanje 0 i nije korelisana sa tržišnim portfolijom. Ako se uzme varijansa obe strane jednakosti $r_i = r_f + \beta_i(r_M - r_f) + \epsilon_i$ dobija se

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + var(\epsilon_i)$$

Varijansa finansijskog instrumenta i se može razdvojiti na dve ortogonalne komponente. Prva komponenta $\beta_i^2 \sigma_M^2$ se naziva sistemski rizik i predstavlja deo rizika koji je povezan sa tržštom kao celinom. Komponenta $var(\epsilon_i)$ se naziva nesistemski rizik, koji se može redukovati diverzifikovanjem portfolija. Kada je $\beta_i^2 > 0$ sistemski rizik se ne može diverzifikovati.

Rešavanjem po $\bar{r}$ na tržišnoj liniji kapitala dobija se inverzna linija za efikasne portfolije

$$\sigma = \frac{\bar{r} - r_f}{\bar{r}_M - r_f} \sigma_M.$$

Koristeći CAPM formulu $\bar{r}_\alpha - r_f = \beta_\alpha(\bar{r}_M - r_f)$ može se zaključiti da za svaki efikasan portfolio α, $\sigma_\alpha = \beta_\alpha \sigma_M$. Postoji samo sistemski rizik za efikasne portfolije.

4 Ugovorna obećanja

Ključan element koji makroekonomija zanemaruje kada se govori o finansijskim tržištima su kolaterali. U cilju razumevanja ciklusa leveridža neophodno se upoznati sa terminom ugovornog obećanja preuzetog iz Geanakoplos [2]. U klasičnoj opštoj teoriji ravnoteže, agenti ispunjavaju sva svoja obećanja, pa se mogućnost neispunjavanja ugovornih obaveza i nevraćanja duga ne razmatra. Trguje se sa svakim finansijskim instrumentom, a konkurencija sprečava svakog agenta da zaradi mnogo više od ostalih agenata na finansijskom tržištu. Većina ugovornih obećanja, posebno onih koja su ugovorena na duži vremenski period, su osigurana kolateralima. Teoretski, svaki finansijski instrument koji ima trajnu vrednost se može koristiti kao kolateral. Naravno, što je vrednost finansijskog instrumenta manje sigurna, ili što je rizičnije posedovati taj finansijski instrument, manje je verovatno da će zaista biti upotrebljen kao kolateral. Dr. Džon Geanakolpos objašnjava kolaterale pomoću obveznica vlade Sjedinjenih Američkih Država. Kratkoročne obveznice Sjedinjenih Američkih Država su savršen primer kolaterala za kratkoročne zajmove, jer je njihova vrednost zagarantovana. Zajmodavcu je lako da zahteva kolateral ako dužnik ne izmiri svoje obaveze. Dugoročne obveznice vlade Sjedinjenih Američkih Država su manje pogodne za kratkoročne zajmove jer je njihova vrednost izuzetno volatilna tokom inflacije ili kada su realne kamatne stope varijabilne. Sredstvo koje se najviše koristi kao kolateral je svakako stambena nekretnina.

Stambena hipoteka je ugovorno obećanje, osigurano nekretninom, koje obezbeđuje vraćanje određene količine novca uzetog na zajam. Ako se novac ne vrati u doglednom vremenskom roku, nekretnina se može konfiskovati. Kada novčani iznos dobijen od prodaje nekretnine prevazilazi iznos duga, višak novca se vraća dužniku. S druge strane, ako dug nije pokriven novcem od prodaje nekretnine, zajmodavac je na gubitku.

Velika depresija, koja je zadesila Sjedinjene Američke Države tridesetih godina dvadesetog veka, je karakteristična po velikom broju neizmirenih dugova (*eng. Default*), posebno u slučaju farmerskih hipoteka. Krah je rezultirao pojavom amortizovanih hipoteka, koje podrazumevaju da dužnik ne samo da redovno plaća kamatu, nego plaća takođe i deo glavnice svakog meseca. Na ovaj način, ako u nekom trenutku dužnik ne može da izmiri svoje obaveze, prodajom nekretnine se lako može pokriti dug. U početku otplaćivanja hipoteke, rizik od toga da dužnik ne vrati dug zavisi od odnosa zajma i vrednosti kolaterala, odnosno *LTV* koeficijenta (*eng. Loan to value ratio*), koji je determinisan ponudom i tržnjom. U takozvanim mehur hipotekama (*eng. Baloon mortgages*) prvo se plaća kamata, a potom glavnica, pa se zajmodavac suočava sa značajnim rizikom da konfiskovanjem i prodajom kolaterala neće pokriti dug.

Sedamdesetih godina dvadesetog veka u Sjedinjenim Američkim Državama je na snagu stupila deregulacija koja je podrazumevala da banka može da proda hipoteku investitoru, bez znanja vlasnika nekretnine i na taj način se osigura od rizika kao što su inflacija ili rast realnih kamatnih stopa. Vlasnik nekretnine u ovom slučaju nastavlja da plaća istoj banci, koja tada prosleđuje novac investitoru.

Mnoge vladine agencije su tada napravile složene hartije od vrednosti, koje su uključivale veliki broj hipoteka. Složene hartije od vrednosti su mnogo privlačnije investitorima, jer na taj način investitori ne moraju da brinu o pouzdanosti vlasnika nekretnine, nemaju potrebu da istražuju pojedinačne vlasnike nekretnina i osigurani su od mogućnosti neisplaćivanja duga. Naravno, bilo je neophodno da se izračunaju prosečne dužničke stope (*eng. default rate*) kojima zajmodavci utvrđuju rizik od mogućnosti neisplaćivanja duga, ali je to ipak jeftinije od proveravanja kreditne istorije pojedinačnih vlasnika nekretnina.

Volstrit je kupio veliku količinu hipoteka i podelio ih u tranše. Derivati dobijeni na ovaj način se zovu kolateralizovane hipotekarne obligacije (*eng. Collateralized mortgage obligations - CMO*). CMO hartije od vrednosti su obezbeđene sa velikom količinom pojedinačnih hipoteka, od kojih je svaka obezbeđena nekretninom.

Investitori koji kupuju CMO koriste kolateral, plaćaju deo cene CMO tranše koji je određen ponudom i tražnjom, a ostatak pozajme koristeći CMO kao kolateral. Raspoređivanje hipoteka po tranšama utiče na rast vrednosti hipoteke za banku, pa se kamatne stope koje vlasnici nekretnina treba da plate redukuju.

4.1 Model hipotekarnih obećanja

4.1.1 Vreme i finansijski instrumenti

U [2] se uvodi skup S koji predstavlja sva moguća stanja sveta, koja podrazumevaju detaljno predviđanje o tome kako će se svaki finansijski instrument, roba ili preferecija ponašati u budućnosti. U praksi, investitori numerički izračunavaju opis svih njihovih budućih novčanih tokova, u različitim uslovima. Pod uslovima se podrazumevaju svi relevantni događaji koji će se desiti u narednih trideset godina i oni uslovljavaju različita stanja sveta. Postoji beskonačno mnogo mogućih stanja sveta, odnosno posmatra se unija svih mogućih stanja sveta, po investitorima. Jednostavnosti radi, Džon Geanakoplos u svojim radovima prvo razmatra modele u kojima se posmatraju samo dva vremenska perioda, sadašnjost i budućnost.

Neka je dat jednostavan model sa jednim periodom, gde je vreme $t = 0, 1$. Neizvesnost je predstavljena različitim stanjima sveta $s \in S$, početni čvor je definisan sa $s = 0$. Vreme stanja sveta s je označeno sa $t(s)$, tako da je $t(0) = 0$ i $t(s) = 1$, $\forall s \in S_T$, gde je S_T skup terminalnih čvorova od S. Dato jedno u potpunosti potrošno dobro i jedan finansijski instrument Y koji isplaćuje dividende d_s. Pretpostavlja se, jednostavnosti radi, da se dividende isplaćuju samo u obliku potrošnog dobra u svakom stanju sveta $s \in S_T$. Finansijski instrument ne pruža direktnu korisnost investitoru (dakle nekretnine, zemlja i druge svojine se ne smatraju finansijskim instrumentima jer pružaju direktnu korisnost vlasniku) i isplaćuje jednake dividende bez obzira na investitora. Finansijski instrumenti imaju korisnost isključivo zato što isplaćuje dividende.

4.1.2 Agenti

Drugi ključni element modela jesu agenti $h \in H$ koji imaju sklonost ka potrošnji. Agenti su određeni svojom funkcijom korisnosti u^h, diskontnim faktorom δ_h i subjektivnim verovatnoćama p_s^h, $s \in S_T$. Preferencije agenata L ka potrošnji određenog potrošnog dobra se razlikuju, kao i sklonost ka potrošnji pojedinačnog agenta u različitim stanjima sveta. Prostor potrošnje je definisan sa $\mathbb{R}_+^L \times \mathbb{R}_+^{SL}$, odnosno agenti biraju potrošna dobra koja će trošiti u sadašnjosti i dobra koja će trošiti u svakom stanju sveta u budućnosti. Za svako potrošno dobro sl postoji tržište na kom se sa njim trguje po ceni π_{sl}.

Data je verovatnoća p_s^h koju agent h dodeljuje stanju sveta $s \in S$ i monotona, diferencijabilna i konkavna funkcija potrošnje u^h koja predstavlja korisnost. Konkavnost funkcije ukazuje na to da rast potrošnje utiče na rast korisnosti kada je početni kapital manji. Stoga, agenti preferiraju da troše manje kada imaju veći kapital da bi dodatno zaradili u jednako verovatnom stanju sveta u kom očekuju da će imati malo kapitala. Kako svaki agent iz skupa agenata $h \in H$ ima proizvoljnu konkavnu, neprekidnu i monotonu funkciju korisnosti podrazumeva se da svaki agent investira i da koristi tehnike hedžinga

$$u^h : \mathbb{R}_+^L \times \mathbb{R}^{SL} \to \mathbb{R}$$

Data su proizvoljna, strogo pozitivna zaduženja agenata

$$e^h \in \mathbb{R}_{++}^L \times \mathbb{R}_{++}^{SL}$$

Očekivana korisnost agenta je data u sledećem obliku

$$\mathbb{E}(u^h) = u^h(x_0) + \delta_h \sum_{s \in S_T} p_s^h u^h(x_s)$$

Zaduženje agenta u obliku finansijskog instrumenta Y u trenutku $t = 0$ je $y_0^h \in \mathbb{R}_+$. Takođe važi da je potrošno dobro prisutno u početnom trenutku, pa za zaduženja agenta važi $\sum_{h \in H} e_0^h > 0$, $\sum_{h \in H}(e_s^h + d_s y_0^h) > 0$, $\forall s \in S_T$. Agent h koji ne trguje je primoran da troši svoje zaduženje u ovom modelu. Agent preferira da razmenjuje svoje bogatstvo u nekom stanju sveta s gde je njegova marginalna korisnost potrošnje relativno niska, za bogatstvo u stanju sveta s' gde mu je marginalna korisnost potrošnje relativno visoka.

4.2 Kolateral

Ekonomska stabilnost se postiže tako što agenti razmenjuju potrošna dobra po stanjima sveta, što je omogućeno postojanjem finansijskih tržišta. Agenti trguju po stanjima sveta tako što prave ugovorna obećanja pre nego što se stanje sveta desilo.

Agent mora da plati određenu cenu u sadašnjosti, da bi mogao da trguje sa ugovornim obećanjima u budućnosti. Ugovorno obećanje $j \in J$ obećava $j > 0$ jedinica potrošnog dobra u svakom krajnjem stanju sveta. Jedna jedinica finansijskog instrumenta Y služi kao kolateral za svako ugovorno obećanje j. Uslovi ugovora su određeni vektorom $A_j \in \mathbb{R}_+^{SL}$ koji označava korpu dobara koja su obećana kao isporuka u svakom stanju sveta, a $\pi_s \cdot A_{sj}$ novčani iznos obećan u svakom stanju sveta s. Vektori A_{sj} nisu isti u svim stanjima sveta, stoga agenti kupuju ugovorna obećanja koja treba da daju prinos u stanjima sveta za koje agenti očekuju da će se desiti, a prodaju ugovorna obećanja koja trebaju da daju prinos u stanjima sveta za koja ne očekuju da će se desiti. Iz tehničkih razloga, pravi se restrikcija kolekcije ugovornih obećanja, ali se uzima skup velike kardinalnosti pa se na taj način postiže da finansijski instrumenti iz J aproksimiraju svaki finansijski instrument na nekoj ograničenoj oblasti.

Iako agenti garantuju isporuku određene svote novca u stanju sveta s, postoji šansa da će isporučiti manje od obećanog iznosa. Neka je iznos koji agenti zaista isporuče u stanju sveta s označen sa D_{sj}^h. Razlika između obećane količine i isporučene količine, je stepen u kom obaveze nisu izmirene (*eng. Default*) i dat je sad $[\pi_s \cdot A_{sj} - D_{sj}^h]^+$.

Kada ne bi postojale kazne za neizmirenje dugova, agenti bi isplaćivali minimum od iznosa duga u svakom stanju sveta. Kolaterali obezbeđuju da zajmodavac ne mora da brine o pouzdanosti dužnika, jer ako dužnik ne isplati dug, zajmodavac može konfiskovati kolateral.

Teorema (Keneth Arrow): Ako je broj aktiva i stanja sveta jednak i ako su kazne beskonačne, tako da se niko ne usuđuje da ne izmiri svoje dugove, svaka alokacija Valrasove ravnoteže je Pareto efikasna.

U praksi je nemoguće da kazne budu beskonačne i skoro nemoguće da postoji jednak broj nezavisnih ugovornih obećanja i stanja sveta, naročito ako se sa ugovornim obećanjima trguje na likvidnim tržištima. U ovom modelu se, jednostavnosti radi, posmatra kolateral umesto kazni.

Na finansijskim tržištima ulogu kolaterala imaju obveznice i akcije. Postoji mogućnost da se kolateral skladišti kod zajmodavaca, dok se dug ne otplati, da se kolateral skladišti kod dužnika (u slučaju kada je u pitanju nekretnina, automobil i sl.) ili da se kolateral skladišti kod treće stranke, što je prevaziđen metod.

Kompleksniji metod korišćenja kolaterala koji se koristi od skoro je da jedan agent koristi kolateral u ugovornom obećanju sa drugim, potom drugi agent koristi to ugovorno obećanje kao kolateral pri ugovoru koji sklapa sa trećim agentom, zatim treći agent koristi to ugovorno obećanje kao kolateral itd. Ova pojava se naziva piramidalna šema. Prolazak hipoteka kroz hartije od vrednosti je klasičan primer piramidinga. Naravno, piramiding stvara pogodnu okolinu za lančanu reakciju neizmirivanja dugova.

Metod koji je još kompleksniji od prethodnog jeste tranširanje, odnosno kada se isti kolateral koristi kao pokriće za nekoliko različitih zajmova. Prilikom tranširanja postoji pravni ugovor u kom postoji ugovorna formula koja određuje na koji način bi zajmodavci podelili kolateral. CMO hartije od vrednosti su klasičan primer tranširanja.

U modelu se zanemaruje trenširanje i piramiding. Smatra se da su svi kolaterali roba. Kolateral se daje odmah, čim se proda ugovorno obećanje. Agentima nije dozvoljeno da zalažu svoje buduće zaduženje kao kolateral, jer tada zajmodavci ne bi bili osigurani od mogućnosti neizmirenja duga.

Svako ugovorno obećanje ima određene nivoe kolaterala, a kako svako sredstvo može da služi kao kolateral, ugovorno obećanje j se može pokriti sa kolekcijom kolaterala. Kolekcija kolaterala koja služi kao pokriće za ugovorno obećanje j je označena sa $C_j^W \in \mathbb{R}_+^L$, vektor sredstava koji zajmodavac sme da poseduje je označen sa $C_j^L \in \mathbb{R}_+^L$, a vektor sredstava koje dužnik poseduje je označen sa $C_j^B \in \mathbb{R}_+^L$. Finansijski instrument j je definisan sa ugovornim obećanjem i kolateralom $(A_j, C_j^W, C_j^L, C_j^B)$. Sa finansijskim instrumentima koji imaju ista ugovorna obećanja $A_j = Aj_{j'}$, a različite nivoe kolaterala $(C_j^W, C_j^L, C_j^B) \neq (C_{j'}^W, C_{j'}^L, C_{j'}^B)$, se trguje po različitim cenama. Slično, ako finansijski instrumenti imaju iste kolaterale, a različita ugovorna obećanja, sa njima se trguje po različitim cenama. Cena finansijskog instrumenta je ρ_j, agent prodaje finansijski instrument j, pozajmljujući količinu π_j, a za uzvrat obećava da će isporučivati novčane iznose određene ugovorom.

U modelu se razmatraju trajni kolaterali, potrošna dobra koja u sledećem periodu postaju vektor dobara, odnosno potrošno dobro l postaje vektor $Y_{sl}^0 \in \mathbb{R}_+^L$koji je isti u svakom stanju sveta, ako se koristi za potrošnju. Ako se potrošno dobro skladišti tada postaje vektor označen sa $Y_{sl}^W \in \mathbb{R}_+^L$ u svakom stanju s. Ako se kolateral nalazi kod zajmodavca dok se dug ne isplati vektor je označen sa $Y_{sl}^L \in \mathbb{R}_+^L$, a ako se nalazi kod dužnika označen je sa $Y_{sl}^B \in \mathbb{R}_+^L$ u svakom stanju sveta s. Matrice koje sumiraju trajnosti potrošnih dobara Y^0, Y^W, Y^L i Y^B su $SL \times L$ - dimenzionalne.

Neka su dati kolateralni zahtevi (C_j^W, C_j^L, C_j^B) za svako ugovorno obećanje j, osiguranje koje pružaju u svakom stanju sveta s je

$$\pi_s \cdot [Y_s^W C_j^W + Y_s^L C_j^L + Y_s^B C_j^B]$$

Količina koju agent h isporučuje po finansijskom instrumentu j u stanju sveta s je data sa:

$$D_{sj}^h = min\{\pi_s \cdot A_{j_s}, \pi_s \cdot [Y_s^W C_j^W + Y_s^L C_j^L + Y_s^B C_j^B]\}$$

4.2.1 Ravnoteža kolaterala

Objašnjenje ciklusa leveridža zahteva izračunavanje ravnoteže leveridža. Međutim, kako je ranije napomenuto, ako je poznata kolateralna stopa, može se izračunati leveridž i obrnuto. Stoga je prvo neophodno definisati ravnotežu kolaterala. Vektor ekonomije u ovom modelu je dat sa:

$$E = ((u^h, e^h)_{h\in H}, (A_j, C_j^W, C_j^L, C_j^B)_{j\in J}, (Y^0, Y^W, Y^L, Y^B))$$

Vektor ekonomije se sastoji od agentove korisnosti i zaduženja, ugovornog obećanja i nivoa kolaterala i trajnosti potrošnih dobara.

Cene potrošnog dobara i finansijskog instrumenta (π, ρ) se smatraju datima unapred, postoji savršena konkurencija, ekonomija se posmatra standardnom metodologijom opšte teorije ravnoteže i agenti imaju racionalna očekivanja za buduće cene. Savršena konkurencija obezbeđuje da ni jedan od agenata ne može samovoljno da diktira cene, pa iz perspektive agenata deluje da su cene unapred date. Cene nisu date, samo nijedan agent ne može individualno da utiče na njih. Ravnotežne cene se ne mogu izračunati unapred, treba uzeti u obzir preferencije i zaduženja agenata tako da optimizacijom trgovine dolazi do ravnoteže na svim tržištima. U ovom modelu agenti imaju savršena uslovna predviđanja za cene u odnosu na to koje će se stanje sveta desiti u budućnosti, odnosno upoznati su sa budućim cenama za svaki finansijski instrument. Nije moguće odrediti vektor isplaćivanja duga unapred. U nekim stanjima sveta s je finansijski instrument vredniji od kolaterala, dok je u nekim drugim vredniji kolateral. Međutim, dok ravnoteža ne odredi cene $\pi_s \in \mathbb{R}^L_+$, nije moguće znati da li će finansijski instrument biti vredniji od kolaterala ili obrnuto.

Neka su date cene (π, ρ). Svaki agent $h \in H$ odlučuje sa kojom količinom potrošnih dobara $x_0 - e^h_0$ trguje, koju količinu finansijskog instrumenta θ kupuje i koju količinu finansijskog instrumenta φ prodaje u sadašnjosti. U zavisnosti od ugovora φ_j dat je kolateral $(C^W_j, C^L_j, C^B_j)_{\varphi_j}$. U početnom trenutku $t = 0$ agent mora prvo da proda da bi kupovao, odnosno početno zaduženje je nula. Kada se u budućnosti realizuje neko stanje sveta $s \in S$, agent treba da odluči o kupovini potrošnih dobara $(x_s - e^h_s - Y^0_s x_0)$. Potrošno dobro je trajno pa je u budućnosti još uvek na raspolaganju, iz tog razloga postoji član $Y^0_s x_0$ koji ukazuje na to koliko je potrošnog dobra ostalo u stanju sveta s. Troškovi za kupovinu potrošnih dobara se mogu finansirati od prodaje kolaterala ili od prinosa od finansijskog instrumenta. Sada se može definisati budžetski skup agenta h:

$$B^h(\pi, \rho) = \Big\{(x, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^L_+ \times \mathbb{R}^{SL}_+ \times \mathbb{R}^J_+ :$$

$$\pi_0(x_0 - e^h_0) + \rho(\theta - \varphi) + \pi_0 \sum_{j \in J} (C^W_j + C^L_j + C^B_j)_{\varphi_j} \leq 0,$$

$$\forall s \in S \quad \pi_s(x_s - e^h_s - Y^0_s x_0) \leq \sum_{j \in J} \varphi_j \pi_s [Y^W_s C^W_j + Y^L_s C^L_j + Y^B_s C^B_j] +$$

$$\sum_{j \in J} (\theta_j - \varphi_j) min\{\pi_s A^j_s, \pi_s [Y^W_s C^W_j + Y^L_s C^L_j + Y^B_s C^B_j]\}\Big\}$$

Ekonomija $E = ((u^h, e^h)_{h \in H}, (A_j, C^W_j, C^L_j, C^B_j)_{j \in J}, (Y^0, Y^W, Y^L, Y^B))$ je u ravnoteži ako je ponuda jednaka tražnji na svim tržištima finansijskih instrumenata i potrošnih dobara, pri cenama i izborima $((\pi, \rho), (x^h, \theta^h, \varphi^h)_{h \in H})$ i ako su cene i izbori optimalni. Preciznije:

$$\sum_{h \in H} \Big(x^h_0 - e^h_0 - \sum_{j \in J} (C^W_j + C^L_j + C^B_j) \varphi_j \Big) = 0, \tag{5}$$

$$\sum_{h\in H}\Big(x^h - e_s^h - Y^0 x_0 - \sum_{j\in J}\varphi_j^h[Y_s^W C_j^W + Y_s^L C_j^L + Y_s^B C_j^B]\Big) = 0 \tag{5'}$$

$$\sum_{h\in H}(\theta^h - \varphi^h) = 0 \tag{6}$$

$$(x^h, \theta^h, \varphi^h) \in B^h(\pi, \rho) \tag{7}$$

$$(x, \theta, \varphi) \in B^h(p, \pi) \implies u^h\Big(x_0 + \sum_{j\in J}[C_j^B\varphi_j + C_j^L\theta_j], \bar{x}\Big)$$

$$\leq u^h\Big(x_0 + \sum_{j\in J}[C_j^B\varphi_j^h + C_j^L\theta_j^h], \bar{x}^h\Big) \tag{8}$$

Kako je $x^h = (x_0^h, \bar{x}^h)$ potrošnja u početnom trenutku je data sa

$$x_0^h + \sum_{j\in J}\left[C_j^B\varphi_j^h + C_j^L\theta^h\right]$$

Važna uloga kolaterala se najlakše može uvideti razmatranjem okolnosti u kojima kolateral ne postoji. U nastavku je dat model u kom se razmatraju se tri mogućnosti [2]. Važi pretpostavka da se sa svakim ugovornim obećanjem trguje.

Posmatra se ekonomija u kojoj su svi uslovi jednaki kao do sad, ali u kojima svi agenti vraćaju svoje dugove i ispunjavaju svoje obaveze, odnosno pretpostavimo da agente, ako ne vrate dug, očekuje vrlo stroga kazna, tako da nijednom agentu nije u interesu da ne vrati dug. Sada se budžetski skup redukuje na:

$$B^h(\pi, \rho) = \{(x, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}_+^L \times \mathbb{R}^{SL} \times \mathbb{R}_+^J \times \mathbb{R}_+^J : \pi_0(x_0 - e_0^h) + \rho(\theta - \varphi) \leq 0,$$

$$\pi_s(x_s - e_s^h - Y_s^0 x_0) \leq \pi_s A(\theta - \varphi), \quad \forall s \in S\}$$

U ravnoteži postoji jednakost ponude i tražnje za svako potrošno dobro i svaki finansijski instrument, pa svaki agent mora da bira svoj budžetski skup optimalno. Ravnotežni uslovi postaju:

$$\sum_{h\in H}(x_0^h - e_0^h) = 0, \quad \sum_{h\in H}(x_s^h - e_s^h - Y_s^0 x_0) = 0, \quad \forall s \in S \tag{R1}$$

$$\sum_{h\in H}(\theta^h - \varphi^h) = 0 \tag{R2}$$

$$(x^h, \theta^h, \varphi^h) \in B^h(\pi, \rho) \tag{R3}$$

$$(x, \theta, \varphi) \in B^h(\pi, \rho) \implies u^h(x) \leq u^h(x^h) \tag{R4}$$

Kako u ovom modelu postoje konveksne preferencije, savršena konkurencija i nezavisnost tražnje, postoji skup cena takav da je agregatna ponuda jednaka agregatnoj tražnji za svako potrošno dobro. Tačnije u ovom modelu, pri Arrow- Debreu ravnoteži, vrednost trajnih sredstava će dostići maksimum. Trajna sredstva mogu imati veliku vrednost jer su dostupna tokom dužeg vremenskog perioda. Ako postoji dovoljan broj finansijskih instrumenata, agenti bi mogli da prodaju svoja ugovorna obećanja da bi otplatili buduća zaduženja u potpunosti, a pri tome dobili novac da kupe trajna sredstva u sadašnjosti.

Vrednost trajnog sredstva može da fluktuira tokom vremena ili da ima fluktuacije po stanjima sveta, jer se preferencije za trajnim sredstvima menjaju. Cene trajnih sredstava ostaju nepromenjene jer agenti utiču na to da iako se apsolutna vrednost prihoda menja, relativna ostane nepromenjena.

U Arrow - Debreu ravnoteži ne postoji povezanost između neisplaćenih ugovornih obećanja i vrednosti potrošnih dobara. Prema Arrow - Debreu teoriji, kompletna tržišta uvek postoje, uz pretpostavku da su se agenti već zadužili.

Prethodno razmotren slučaj se odnosi na situaciju kada agenti svojevoljno isplaćuju svoje dugove na vreme. U drugom slučaju koji se posmatra u [2] se razmatra ekonomija u kojoj ne postoje zakonske odredbe kojima se sprovodi naplata duga. Ovaj slučaj je potpuna suprotnost prethodnom. Investitori očekuju da nijedno ugovorno obećanje neće biti ispoštovano, pa će se stoga ekonomija redukovati na ekonomiju bez finansijskih instrumenata $J = \phi$. Kako postoji pretpostavka da kupci ne smeju ugovarati isplate u budućnosti, cene trajnih sredstava će biti niske jer kupci neće moći da plate veliki iznos u sadašnjosti. Posedovanje trajnog sredstva takođe donosi rizik agentima, jer nije moguće napraviti protivtežu u cilju zaštite tog sredstva, bez posedovanja drugih trajnih sredstava. Cene trajnih sredstava su promenljive iz dva razloga. Cene zavise od stanja sveta i menjaju se usled promene preferencija agenata, ali i promena u raspodeli prihoda utiče na cene trajnih sredstava.

Treći slučaj koji se posmatra je najrealističniji. Smatra se da postoji nekolicina finansijskih instrumenata, ali nedovoljan broj da bi tržište bilo kompletno. Ovaj slučaj je objašnjen primerom GEI ravnoteže (*eng. General theory of Equilibrium with Incomplete markets*). Slučaj GEI ravnoteže je bolji, sa tačke gledišta bogatstva, od slučaja ekonomije bez finansijskih instrumenata, ali je lošiji od ekonomije u kojoj postoje kompletna tržišta. Volatilnost cena trajnih sredstava kada tržišta nisu kompletna je veća od volatilnosti cena u slučaju u kom postoje kompletna tržišta ili u ekonomiji bez finansijskih instrumenata. Neke nepogodnosti GEI ekonomije se mogu izgladiti zamenom kazni za neisplaćen dug sa kolateralima koji se mogu konfiskovati.

Džon Geanakoplos ističe da ako tržište finansijskih instrumenata nije kompletno, odnosno ako je kardinalnost skupa J manja od kardinalnosti skupa S, ali veća od 1, tada pri ravnotežnoj GEI alokaciji ne postoji idealna raspodela rizika, bez obzira na uvođenje kolaterala. On smatra da je u slučaju GEI ravnoteže, bolje dozvoliti da agenti ne vrate svoje dugove. Dakle, zamena drakonskih mera kazne kolateralom doprinosi poboljšanju sistema.

Ako postoji jedno stanje sveta za koje je mala verovatnoća da se desi, u kome važi da agent ne može da vrati dug, tada agent ne može da proda finansijski instrument u bilo kom stanju. Dug prema zajmodavcima koji agent ne može da isplati, plus kazna koju mora da plati zbog neizmirenja obaveza, može biti manje važan od dobiti koju ostvaruju zajmodavci i agent jer je dozvoljeno da pozajmljuje novac i otplati dug u ostalim stanjima sveta. Zaključak donet u [2] je sledeći: Kada su tržišta finansijskih instrumenata kompletna, treba da se postave visoke kazne u slučaju neisplaćivanja duga, ali kad tržišta nisu kompletna, treba da se postave niske kazne za neisplaćivanje duga, ili da se koristi kolateral kad god je to moguće.

Nedostatak raspoloživih finansijskih instrumenata redukuje vrednost trajnih sredstava. Ako finansijski instrumenti nedostaju, agenti imaju na raspolaganju samo prihod koji imaju od zaduženja u sadašnjosti i nekoliko ugovornih obećanja i taj prihod troše na trajna sredstva. Tražnja za trajnim sredstvima je efektivno zakrivljena, pa se njihova cena nalazi između cene koju imaju u ekonomiji sa kompletnim tržištima i cene koju imaju u ekonomiji bez finansijskih instrumenata. Volatilnost cena trajnih sredstava je veća nego u prethodna dva slučaja zbog mogućnosti postojanja leveridža.

U GEI ravnoteži se trguje sa svim finansijskim instrumentima. Razlog tome je što je u ravnoteži marginalna korisnost svakog agenta od kupovine i prodaje finansijskog instrumenta jednaka ceni tog finansijskog instrumenta. GEI model zbog toga ne može da objasni zbog čega se i pored svega trguje sa malim brojem finansijskih instrumenata. Džon Geanakoplos smatra da je jedino objašnjenje situacije koja se dešava u praksi da kod nekompletnih tržišta nedostaje mnogo finansijskih instrumenata.

GEI teorija dozvoljava velike trgovine na tržištima finansijskih instrumenata. Agent može da ima pozitivnu poziciju velikih razmera u jednom finansijskom instrumentu i negativnu poziciju velikih razmera u drugom finansijskom instrumentu, što daje protivtežu dugovima agenta. Bruto vrednost ugovornih obećanja koja zahtevaju isporuku u svakom stanju sveta može biti mnogo veća od vrednosti svih dobara u tom stanju, što je veće od vrednosti trajnih sredstava iz prethodnog perioda. Ako bi svaki agent bio primoran da isplati dug od svog prihoda, pre nego što dobije isplate od drugih, ravnoteža bi se poremetila. Zbog toga neke strukture ugovornih obećanja obećavaju više od ostalih, čak i ako imaju iste ekonomske preferecije i zaduženja. Mogućnost postojanja proizvoljno velikih transakcija sa finansijskim instrumentima ugrožava postojanje GEI ravnoteže.

4.2.2 Loše vesti sa zastrašujućim uticajem

U cilju daljeg razmatranja modela i svojstava ravnoteže kolaterala neophodno je definisati loše vesti na finansijskom tržištu. Džon Geanakoplos u svojim radovima koristi termin loših vesti sa zastrašujućim uticajem na agente radi opisivanja situacije na finansijskim tržištima koja nije u skladu sa očekivanjima agenata i koja nagoveštava gubitke. Kriza uvek počinje sa lošim vestima na finansijskom tržištu. Treba napraviti distinkciju između loših vesti o dešavanjima na tržištu koje su agenti očekivali i loših vesti koje agenti nisu očekivali i koje doprinose neizvesnosti i neusaglašenosti među agentima. Ova vrsta loših vesti ima zastrašujući uticaj na agente. Loše vesti koje imaju pretežno zastrašujući uticaj na agente na finansijskom tržištu utiču da agenti naprave loš potez u ciklusu leveridža. Zastrašujući uticaj loših vesti na agente se odražava na to da agenti imaju negativnija očekivanja, pa na taj način loše vesti utiču i na rast volatilnosti. Terminologija loših vesti, preuzeta iz radova Džona Geanakoplosa se odnosi na jedinstvenu vrstu informacije o tržištu. Loše vesti koje imaju zastrašujući uticaj na agente se značajno razlikuju od ostalih loših vesti na tržištu, jer ostale vesti predstavljaju informaciju, a informacije o dešavanjima na tržištu skoro uvek smanjuju neizvesnost, dok je ova vrsta loših vesti povećava.

Ciklus leveridža počinje tako što učesnici na tržištu misle da je potpuni krah skoro nemoguć događaj. Očekivanja agenata se razlikuju, međutim, nijedan agent ne očekuje da će se desiti toliko negativnih ishoda koliko je potrebno da se desi da bi došlo do kraha. Kako agenti smatraju da za krah ne postoji stvarna verovatnoća, na tržištu postoji neznatna neizvesnost.

Međutim, kada dovoljan broj događaja na tržištu ima negativan ishod, suprotno očekivanjima agenata, neizvesnost naglo raste. Rast neizvesnosti doprinosi porastu verovatnoće za postojanje nesuglasica među agentima.

Jedan od efekata leveridža je da je volatilnost cene akcije u negativnoj korelaciji sa prinosom akcije. Kada se cena akcije smanjuje volatilnost cene akcije ima tendenciju rasta.

Profesor Geanakoplos je dao dva ekonomska objašnjenja uticaja loših vesti sa zastrašujućim uticajem. Razmatramo uticaj loših vesti kroz primer.

Neka na tržištu postoje dva agenta, optimističan i pesimističan. Neka postoje dva događaja za koje agenti ne očekuju da će oba imati negativan ishod. Ako oba događaja imaju negativan ishod, prinos od finansijskog instrumenta za oba agenta je 1, ako jedan događaj ima negativan ishod prinos je 4, a ako ako oba događaja imaju pozitivan ishod prinos je 5. Oba agenta smatraju da su događaji nezavisni. Optimističan agent smatra da je verovatnoća negativnog ishoda za pojedinačan događaj jednaka 0.2, odnosno, verovatnoća da oba događaja imaju negativan ishod je jednaka 0.04. Očekivani ishod za optimističnog agenta je $5 \cdot 0.8^2 + 2 \cdot 4 \cdot 0.2 \cdot 0.8 + 1 \cdot 0.2^2 = 4.52$. Varijansa konačnog ishoda za optimističnog agenta je $0.8^2 \cdot (5 - 4.52)^2 + 2 \cdot 0.8 \cdot 0.2 \cdot (4 - 4.52)^2 + 0.2^2 \cdot (1 - 4.52)^2 = 0.7296 \approx 0.73$. Kada prvi agent sazna da je prvi događaj imao negativan ishod, očekivani ishod za optimističnog agenta se smanjuje na $4 \cdot 0.8 + 1 \cdot 0.2 = 3.4$. S druge strane varijansa se skoro dvostruko povećava $0.8 \cdot (4 - 3.4)^2 + 0.2 \cdot (1 - 3.4)^2 = 1.44$. Pesimističniji agent smatra da je verovatnoća da događaj ima negativan ishod 0.4. Verovatnoća da oba događaja imaju negativan ishod je 0.16 Očekivani ishod za pesimističnog agenta 3.88, a varijansa konačnog ishoda je 1.7856. Kada prvi događaj, suprotno očekivanju, ima negativan ishod, očekivani ishod je 2.8. Varijansa za pesimističnog agenta postaje 2.16 Kao što je bio slučaj sa optimističnim agentom, kada prvi događaj ima negativan ishod, očekivani ishod se smanji, a varijansa se povećava. Razlika u očekivanju optimističnog i pesimističnog agenta nakon što se desio prvi događaj se povećala. Dakle, ova vrsta loših vesti povećava nesuglasice među agentima.

Ovu vrstu vesti na finansijskom tržištu Džon Geanakoplos naziva zastrašujuće loše vesti, jer, iako su informacija o događajima na tržištu, utiču na povećanje neizvesnosti i volatilnosti.

Anatomija kraha tržišta se može opisati teorijom ravnoteže leveridža. Loše vesti sa zastrašujućim uticajem imaju za posledicu pad vrednosti finansijskih instrumenata što uzrokuje drastično smanjenje optimističnih kupaca na tržištu koji su iskoristili leveridž, pa su optimistični kupci prinuđeni na prodaju da bi pokrili troškove marže. Prodaja finansijskih instrumenata od strane optimističnih kupaca dovodi do smanjenja vrednosti finansijskih instrumenata i doprinosi smanjenju bogatstva kupaca. Smanjenje vrednosti finansijskih instrumenata i smanjenje bogatstva kupaca doprinosi utisku da je kriza pod kontrolom. Međutim, zahtevi za maržu postaju stroživiji, što utiče na rast naizvesnosti i porast neslaganja među agentima. Prinudne prodaje finansijskih instrumenata doprinose ogromnim gubicima u vrednosti finansijskih instrumenata. Kada se ovo desi mnogi optimistični kupci doživljavaju bankrot, što može uzrokovati efekat prelivanja (*eng. Spillover effect*), do kog dolazi kada optimistični kupci prodaju čak i one finansijske instrumente koji nisu podlegli efektu loših vesti na tržištu. Pod efektom prelivanja se podrazumeva ekonomski događaj koji se desio pod uticajem nekog drugog događaja koji naizgled nije povezan sa nominalnim događajem. Investitori koji opstanu, čak i u ovim uslovima, imaju velike šanse za ostvarenje profita.

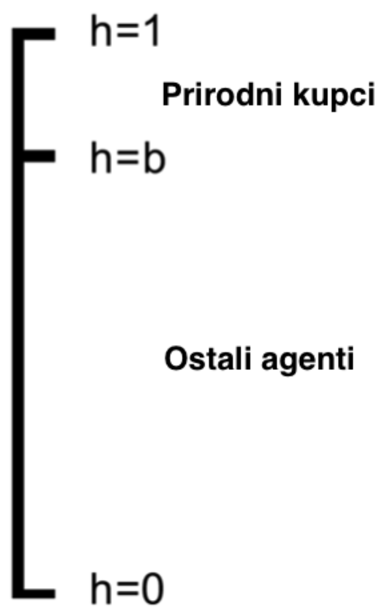
4.2.3 Heterogenost i prirodni kupci

Važna pretpostavka za razmatranje modela i razumevanje kolaterala i ciklusa leveridža jeste heterogenost među investitorima. Heterogenost je jedna od krucijalnih komponenti koncepta ciklusa leveridža. U svrhu daljeg objašnjenja Džon Geanakoplos u svojim radovima uvodi termin prirodnih kupaca. Prirodni kupci su agenti koji imaju izraženije preferencije prema finansijskom instrumentu u odnosu na ostale učesnike na finansijskom tržištu. Preferencije prirodnih kupcaca mogu imati različite uzroke, kao što su manja averzija prema riziku ili pristup tehnikama hedžinga koje čine finansijski instrument manje rizičnim, možda imaju veću korisnost od nekog finansijskog instrumenta ili pristup produkcionoj tehnologiji koja koristi finansijski instrument efikasnije ili imaju neke specijalne informacije o instrumentima ili su jednostavno optimističniji. U praksi, prirodni kupci su mešavina svih navedenih kategorija. Međutim u svrhu kreiranja modela najjednostavnije je posmatrati prirodne kupce kao najoptimisitičnije. Optimistični kupci imaju drugačije preferencije od pesimističnih. Na izvestan način optimistični kupci se ne razlikuju mnogo od onih kupaca koji imaju manju averziju prema riziku. Jedina razlika između optimističnih kupaca i kupaca koji imaju manju averziju prema riziku je u tome što su kod kupaca koji imaju manju averziju prema riziku, riziko-prilagođene verovatnoće drugačije.

Nestanak prirodnih kupaca sa tržišta značajno utiče na cene jer su prirodni kupci oni koji poseduju finansijske instrumente, licitiraju njihovu cenu i sa time utiču na rast, odnosno pad cena. Dakle nestanak prirodnih kupaca dovodi do kraha. Slično, ako prirodni kupci nisu u mogućnosti da uzimaju zajmove, takođe utiče na to da se desi krah.

Džon Geanakoplos u [3] slikovito objašnjava ovo tvrđenje na primeru CDO tržišta (CDO- Collateralized debt obligation). CDO je finansijski proizvod koji spaja finansijske instrumente koji stvaraju novčane tokove i restruktuira skupove finansijskih instrumenata u diskretne tranše koje se mogu prodati investitorima. Kada su velike banke u Sjedinjenim Američkim Državama, koje su klasičan primer prirodnih kupaca, izgubile veliku količinu svog kapitala zbog nesmotrenosti na CDO tržištu, deo kapitala je bio ponovo uspostavljen od strane internacionalnih investicija iz Singapura, ali to nije bilo dovoljno. Zbog prirode krize, inicijalna investicija je ubrzo presušila.

Sa stanovišta makroekonomije, hipoteza o prirodnim kupcima je irelevantna. Međutim, Geanakoplos smatra da je hipoteza o prirodnim kupcima u kombinaciji sa teorijom ravnoteže izuzetno značajna za objašnjenje koncepta ciklusa leveridža, a samim tim i krahova na tržištu. U [3] Geanakoplos daje analitičku reprezentaciju agenata na tržištu. Uvodi se pretpostavka da postoji beskonačno mnogo agenata h za koje važi $h \in [0,1]$. Agent h smatra da je njegova verovatnoća uspeha $p_U^h = h$, a verovatnoća neuspeha $p_D^h = 1 - h$. Veća vrednost h znači da je agent optimističniji. Posmatranjem kontinuuma agenata se izbegava stroga kategorizacija, agenti mogu da biraju da li će biti kupci rizičnih finansijskih instrumenata i uzimati zajmove ili će biti zajmodavci i prodavci rizičnih finansijskih instrumenata. Uvodi se i prelomna tačka b za koju važi da su optimističniji agenti $h > b$ na jednoj strani, a pesimističniji agenti $h < b$ na drugoj strani tržišta. Prelomna tačka je u ovom slučaju endogena. Prirodni kupci se nalaze u intervalu $(b, 1]$, dok se ostali agenti nalaze u intervalu $[0, b]$.



4.2.4 Svojstva ravnoteže kolaterala

U [2] se pretpostavlja da agenti moraju da imaju očekivanja ne samo za cene i prinos finansijskih instrumenata u svakom stanju sveta, nego da takođe imaju očekivanje o tome šta će oni da isporuče u svakom stanju sveta.

Date su pretpostavke o modelu preuzete iz Geanakoplos, Zame [4]. Neka je data ekonomija $E = \big((e^h, u^h), \mathcal{A}\big)$, gde je (e^h, u^h) konačna familija potrošača i $\mathcal{A} = (A^j, C^j)$ konačna familija kolateralizovanih finansijskih instrumentana. Skup potrošnih dobara i trajnih sredstava je fiksiran. Neka je $\bar{e} = \sum e^h$ ukupno zaduženje. Važe sledeće pretpostavke:

Pretpostavka (1): $\bar{e} \gg 0$

Pretpostavka (2): $\forall h, s \quad e^h > 0; \quad e^h_s \geq \Gamma_s(e^h_0)$

Pretpostavka (3): Za svakog potrošača i važi:

(a) u^h je neprekidna i kvazi - konkavna

(b) Ako je $x \geq y \geq 0$ onda je $u^h(x) \geq u^h(y)$

(c) Ako je $x \geq y \geq 0$ i $x_{sl} > y_{sl}$ za neko $s \neq 0$ i neko l, tada je $u^h(x) > u^h(y)$

(d) Ako je $x \geq y \geq 0$, $x_{0l} > y_{0l}$ i potrošno dobro $0l$ u potpunosti potrošno, tada je $u^h(x) > u^h(y)$

Prva pretpostavka tvrdi da su agregatna potrošna dobra striktno pozitivna. Druga pretpostavka tvrdi da su individualna zaduženja ne-nula. Na osnovu treće pretpostavke se vidi da su funkcije korisnosti neprekidne, kvazi-konkavne, slabo monotone, potrošnja svih dobara je strogo monotona u trenutku $t = 1$, a potrošnja u potpunosti potrošnih dobara je strogo monotona u trenutku $t = 0$.

Kako je i hipoteza o racionalnim očekivanjima agenata je pooštrena u odnosu na konvencionalne modele savršene konkurencije, ravnoteža u ovakvom modelu uvek postoji, dok u standardnom modelu opšte ravnoteže sa nekompletnim tržištima, ravnoteža ne mora da postoji.

Teorema(Geanakoplos, Zame, Dubej [5]) Pod pretpostavkama datim za zaduženje i korisnost, ravnoteža mora da postoji, bez obzira na strukturu finansijskih instrumenata i kolaterala.

Ako finansijski instrument ne sadrži proviziju za kolateral, tada će svaki agent očekivati da finansijski instrument neće isporučiti ništa, pa će cena instrumenta u ravnoteži biti nula. Agenti ne mogu da prodaju proizvoljno velike količine finansijskih instrumenata sa ne-nula kolateralom, jer ne poseduju zahtevani kolateral. Ovaj ograničavajući faktor garantuje postojanje ravnoteže.

Bez potrebe za kolateralom, marginalna korisnost $MU^h_j(B)$ koju agent h ima od kupovine prve jedinice finansijskog instrumenta j je ista kao marginalna korisnost gubitka $MU^h_j(S)$ od prodaje prve jedinice finansijskog instrumenta. Koristi se notacija $MU^h_j(B) = MU^h_j(S) = MU^h_j$, gde B označava kupca finansijskog instrumenta (*eng. Buyer*), a S označava prodavca (*eng. Seller*). Kada prodavac mora da obezbedi kolateral, negativna korisnost od ugovornog obećanja raste, ponekad čak postaje jednaka potrošnji od kupovine kolaterala. Ako dužnik zadrži kolateral kod sebe tokom perioda otplate duga, u skladu sa dogovorom između zajmodavca i dužnika, ne postoji dodatni gubitak korisnosti od prodaje prve jedinice finansijskog instrumenta j. Ako agent h nije planirao da zadrži kolateral i da ga koristi tada je gubitak u marginalnoj korisnosti od prodaje prve jedinice finansijskog instrumenta j veći od marginalne korisnosti koja se ostvaruje kupovinom prve jedinice finansijskog instrumenta j, $MU_j^h(S) > MU_j^h(B)$. Dakle, važi da je:

$$\min_{h \in H} MU_j^h(S) > \rho_j > \max_{h \in H} MU_j^h(B)$$

pa se stoga sa finansijskim instrumentom j uopšte ne trguje u ravnoteži.

Razmatra se restrikcija na cele brojeve skupa $\Pi = \{a \in \mathbb{Z}_+^{SL} : a_{sl} \leq 10^{10}\}$ potencijalnih ugovornih obećanja. Skup Π je konačan i uključuje svako moguće obećanje. Neka je $C = \{(c^W, c^L, c^B) \in \mathbb{Z}_+^L \times \mathbb{Z}_+^L \times \mathbb{Z}_+^L : c_l^i \leq 10^{100}\}$ konačan skup svih potencijalnih nivoa kolaterala i uzima se $J = \Pi \times C$. Svi finansijski instrumenti se vrednuju u ravnoteži, ali samo sa nekim instrumentima se trguje, što daje privid da mnoga tržišta nedostaju. Finansijski instrumenti sa kojima se ne trguje će ostati skriveni, ne zato što ne utiču u efikasnoj raspodeli rizika, nego zato što nedostatak kolaterala ne dopušta dalju trgovinu.

Najlakši način na koji se postiže ekonomičnost kolaterala, kada dođe do kraha na tržištu je dopuštanje da dužnici ne vrate svoje dugove bez ikakvih posledica. Ako neki vektor kolaterala garantuje isporuku u svim stanjima sveta, nema smisla da se trguje sa istim ugovornim obećanjem koje je kolateralizovano sa većim nivoima kolaterala. Ako se vektor ugovornih obećanja značajno razlikuje od vektora njegovih kolateralnih vrednosti po stanjima sveta finansijski instrument nije dobro sastavljen. U nekim stanjima sveta postojaće previše kolaterala, a u ostalim nedovoljno.

Očekuje se da porast u raspoloživim kolateralima utiče na rast opšteg bogatstva. S druge strane, nedostupnost kolaterala može sprečiti agente da trguju sa ugovornim obećanjima iz J što bi dovelo do poboljšanja Pareto raspodele rizika.

Teorema ograničene efikasnosti [5] Svaka ravnoteža kolaterala je Pareto efikasna sa alokacijama koje:

(1) su ostvarive

(2) date u bilo kom trenutku $t = 0$ u kom su raspodeljene odluke, respektivno sa budžetskim skupovima svakog agenta u svakom stanju s u trenutku $t = 1$ po starim ravnotežnim cenama

(3) pretpostavljaju da agenti neće isporučiti više za svoje finansijske instrumente od iznosa koji se od njih zahteva, odnosno minimum od obećanog iznosa i vrednosti kolaterala u trenutku $t = 0$, uzimajući u obzir originalne cene.

U svakoj opštoj ekonomskoj ravnoteži cene dobara zavise od korisnosti agenata i raspodele bogatstva. Ako su agenti koji najviše preferiraju neko potrošno dobro relativno bogati, cena potrošnog dobra će biti relativno visoka. Redistribucija bogatstva u korist agenata koji manje preferiraju potrošno dobro snižava cenu potrošnog dobra. Vrednost trajnih sredstava zavisi od očekivanja u velikoj meri, kada su tržišta nekompletna zavisi od averzije prema riziku potencijalnih investitora, kao i od stvarne korisnosti trajnog sredstva. Različiti načini za određivanje vrednosti trajnih sredstava utiču na to da postoje velike razlike u vrednovanju sredstava od strane različitih agenata.

Primera radi, hipotekarni derivati su mnogo vredniji investitorima koji imaju tehnologije, znanje i veštine za hedžing, nego što ih vrednuju prosečni investitori. Vrednost mnogih trajnih sredstava je određena marginalnom korisnošću agenata koji najviše preferiraju ta sredstva.

Od kraha berze u Sjedinjenim Američkim Državama 1929. godine postoji debata o tome da li niski zahtevi za maržu doprinose volatilnosti cena akcija. Argument koji govori u korist ove pretpostavke je što negativne informacije o ponašanju cena akcija dovode do brokerskog zatvaranja pozicije (*eng. Margin call*), pa su agenti koji su uzeli zajmove koristeći svoje akcije primorani da ih prodaju, što snižava cene još više.

Početna cena finansijskih instrumenata je veća kada se finansijski instrumenti mogu koristiti kao kolaterali, nego što bi bila da se instrumenti ne mogu koristiti kao kolaterali. Jedan razlog tome je što svaki agent može da priušti sebi da plati više za finansijske instrumente obećavajući svoje buduće bogatstvo. Drugi razlog je što marginalni kupac teži da ima veću marginalnu korisnost.

Kao rezultat marginalnih kupovina, investicije optimističnih agenata su visoko zadužene. Kada poraste vrednost finansijskog instrumenta, agenti profitiraju, a kada padne cena finansijskog instrumenta, agenti imaju velike gubitke. Stoga, kada dođe do loših vesti na finansijskom tržištu cene akcija padaju zbog samih vesti, jer agenti vrednuju akcije manje, pa dolazi do redistribucije bogatstva u korist pesimista koji nisu kupovali pri marži. Marginalni kupac akcije je tada manje optimističan nego što bi bio da akcija nije bila kupljena pri marži i da redistribucija prihoda nije bila tako drastična. Dakle, pad cene je mnogo drastičniji nego što bi bio da akcija nije kupljena pri marži.

5 Ciklus leveridža i anksiozna ekonomija

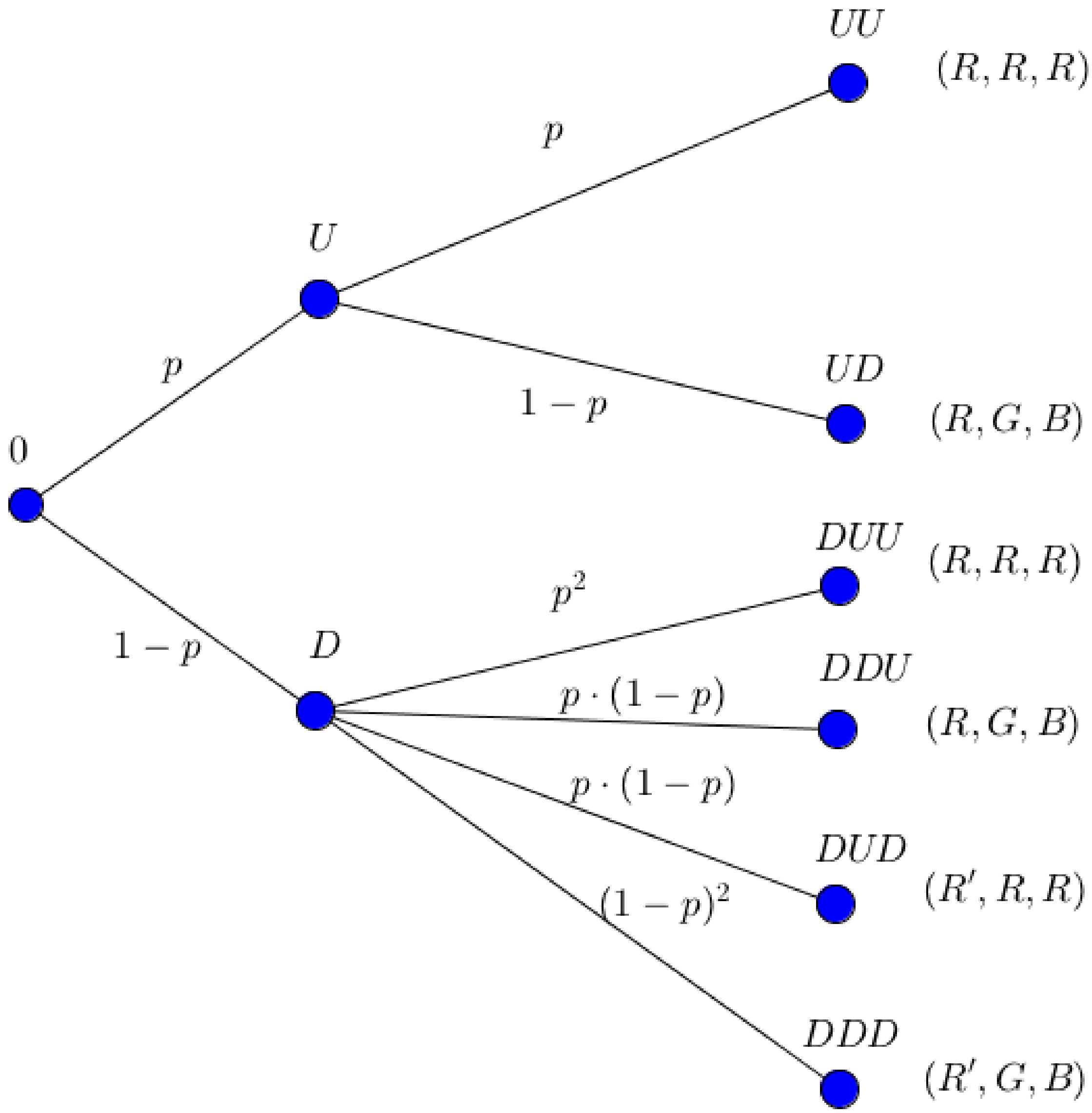
5.1 Tržišta u nastajanju

U Geanakoplos i Fostel [6] je data teorija vrednovanja finansijskih instrumenata koja stavlja akcenat na problem takozvanih finansijskih tržišta u nastajanju (*eng. Emerging markets*) koja nisu u potpunosti formirana pa nisu privlačna agentima. Tržišta u nastajanju predstavljaju integraciju finansijskog tržišta neke države u internacionalna tržišta, što može doprineti porastu volatilnosti. U ovom radu se razmatra pojava globalne anksiozne ekonomije čiji su simptom tržišta u nastajanju. Anksionzna ekonomija je karakteristična po ograničenom leveridžu i zamci likvidnosti velikih razmera, zbog čega agenti anksiozno prodaju rizične finansijske instrumente prirodnim kupcima. Za razliku od anksiozne ekonomije, u krizi su prirodni kupci, koji su se prethodno zadužili, primorani da prodaju svoje pozicije i najčešće bankrotiraju. Teorija leveridža je skoncentrisana na krizu, međutim, anksiozna ekonomija je učestaliji fenomen.

Radi razmatranja anksiozne ekonomije razmatra se prošireniji model u kom pored, u potpunosti potrošnog dobra F, trajnog sredstva H, postoje dva dugoročna finansijska tržišta u nastajanju E^G i E^B, gde je E^G tip tržišta u nastajanju koji donosi prinos agentima, a E^B tip tržišta koji donosi gubitke. Iznosi koje isporučuju finansijski instrumenti su dati u jedinicama potrošnog dobra i neizvesni su. Agenti imaju bezrizična početna zaduženja, zaduženi su sa trajnim sredstvom H i kupuju E^G i E^B, koja se u svakom stanju sveta integrišu na internacionalno tržište. Takođe data su tri vremenska trenutka $t = 1, 2, 3$, pri čemu se vesti o H saznaju u periodu $t \in (1, 2)$, dok se vesti o E saznaju u periodu $t \in (2, 3)$. U stanju sveta U, prinos od trajnog sredstva H je R skoro sigurno, međutim u stanju sveta D prinos od H može biti R sa verovatnoćom p ili $R' < R$ sa verovatnoćom $1-p$, dok o E^G i E^B ne postoje jasne informacije. Prinos od E^G ili E^B može biti R, sa verovatnoćom p, a može biti i G ili B respektivno, sa verovatnoćm $1 - p$, nezavisno od stanja sveta i prinosa H. Vrednosti R', G i B su vrednosti finansijskih instrumenata u slučaju da se dugovi ne isplate i važi $R' < R$ i $B \leq G < R$.

U stanju sveta U neizvesnost oko prinosa trajnog sredstva H ne postoji, jer je prinos jednak R skoro sigurno. Međutim u stanju sveta D neizvesnost se povećava, što je u potpunosti suprotno sa tradicionalnim finansijskim modelima koji tvrde da se vrednost finansijskih instrumenata može aproksimirati Braunovim kretanjem, pri čemu je volatilnost konstantna. Stanje sveta D se naziva anksiozna ekonomija, jer se ovo stanje sveta desi nakon što loše vesti na tržištu smanje očekivanje za isplate, povećaju očekivanu volatilnost isplata, stvarajući na taj način nesuglasice među agentima i ne dajući nikakvu informaciju o isplatama tržišta u nastajanju. Međutim, stanje anksiozne ekonomije nije jednako stanju krize.

Neka je $\mathbb{E}_s(Y)$ očekivana isplata finansijskog instrumenta Y u zavisnosti od stanja sveta s. Definiše se informaciona volatilnost $V_s(Y)$ u stanju sveta s, kao standardna devijacija $\mathbb{E}_{s'}(Y)$ po svim neposrednim prethodnicima s' stanja sveta s. U stanju sveta D očekivanje za H se smanjuje $\mathbb{E}_D(H) < \mathbb{E}_1(H) < \mathbb{E}_U(H)$, a volatilnost se povećava $V_D(H) > V_1(H) > V_U(H)$. Kako ne postoje informacije o isplatama tržišta u nastajanju u periodu $t \in (1, 2)$, važi da je $V_1(E^G) = V_1(E^B) = 0$. Kada se saznaju neke informacije o tržištima u nastajanju, postoji mnogo više vesti o tržištu E^B u odnosu na tržište E^G, pa važi $V_U(E^G) = V_D(E^G) < V_U(E^B) = V_D(E^B)$, pri čemu je $B < G < R$. Cena trajnog sredstva H se smanjuje sa R na R' i jasno je da je niža u stanju sveta D jer loše vesti smanjuju očekivanu isplatu. S druge strane, očekivane isplate od E^G i E^B, kao i informacione volatilnosti su jednake u oba stanja sveta.



Neka postoje samo dva finansijska instrumenta E i H, odnosno, razmatra se slučaj kada je $G = B$. Neka postoji reprezentativan agent sa logaritamskom funkcijom korisnosti, koji ne diskontuje. U stanju sveta D, buduća potrošnja je manja nego u U, jer su trajna sredstva H manje isplativa, pa je marginalna korisnost buduće isplate malo veća. Stoga je ravnotežna cena od E malo veća u D nego u U, pa su E i H blago negativno korelisani.

5.1.1 Efekat zaraze

Važni faktori za analizu efekta zaraze, efekta portfolija i efekta potrošnje su heterogenost među agentima i nekompletnost tržišta. Prethodni model se proširuje tako što se uvode dve klase agenata, optimisti čija je verovatnoća p^o i pesimisti čija je verovatnoća p^p i važi da je $p^o > p^p$, preciznije $p^o \approx 2 \cdot p^p$ ove verovatnoće odgovaraju stanju sveta U, odnosno dobrim vestima na finansijskom tržištu. Agenti smatraju da H i E nisu korelisani. U trenutku $t = 1$ optimistični agenti smatraju da će H isplatiti u potpunosti sa verovatnoćom $1 - (1 - p^o)^2$, dok pesimisti istom događaju pripisuju verovatnoću $1 - (1 - p^p)^2$. U stanju sveta D povećava se neusaglašenost u predviđanjima agenata $p^o \approx 2p^p > p^p$. Početna zaduženja agenata su data sa e^o i e^p i svaki agent poseduje jednu jedinicu finansijskog instrumenta u početnom trenutku.

Ako važi pretpostavka da su tržišta kompletna, odnosno sve Arrow - Debreu hartije od vrednosti su prisutne na tržištu. U ovom slučaju se javlja blagi efekat zaraze, jer agenti, zbog kompletnosti tržišta, prave transfer svog bogatstva u stanja sveta za koja smatraju da su verovatnija da se dese. U stanju sveta U cene reflektuju preferencije optimista, pa su cene u U blago povišene u odnosu na stanje sveta D. Ako se potom pesimisti obogate, pesimisti postaju reprezentativni agenti i sve cene će reflektovati samo njihove preferencije, a mala grupa optimističnih agenata nema uticaj na cene. Dakle izjednačavanje pesimista sa reprezentativnim agentom u graničnom slučaju može u potpunosti da neutrališe efekat zaraze, kada su tržišta kompletna.

Kada tržišta nisu kompletna nije moguće neutralisati efekat zaraze bogaćenjem pesimističnih agenata. Razmatra se isti model uz dodatak da tržišta nisu kompletna. Agenti trguju samo sa finansijskim instrumentima E i H i potrošnim dobrom. Ne postoje Arrow - Debreu hartije na tržištu i agentima nisu dozvoljene kupovine i prodaje na kratko. Kako je stanje sveta D neposredni prethodnik za četiri različita stanja sveta, dva finansijska instrumenta sa kojima se trguje nisu dovoljna za kompletiranje tržišta. Mada i u trenutku $t = 1$ tržište nije kompletno jer su prodaje na kratko zabranjene.

Pretpostavke date za tržište u nastajanju H impliciraju da se H može posmatrati kao domaća firma, a pretpostavke date za tržšte u nastajanju E impliciraju da se E može posmatrati kao strana firma, pa je prinos od H veći od prinosa tržišta u nastajanju E.

Optimistični agenti su klasa agenata kojima su tržišta u nastajanju privlačna, dok pesimistima nisu. Zbog nekompletnih tržišta, marginalni kupac je optimističan, pa su cene finansijskih instrumenata veće nego što je to slučaj sa kompletnim tržištima, jer cene oslikavaju očekivanja marginalnog kupca.

5.1.2 Efekat potrošnje i efekat portfolija

Takođe treba razmotriti efekat potrošnje i efekat portfolija. Efekat potrošnje nastaje usled smanjenja potrošnje koju uzrokuje smanjenje marginalne korisnosti finansijskih instrumenata. Efekat portfolija se odnosi na diferencijalnu zavisnost portfolija od informacija na tržištu. Kada ne postoji heterogenost i kada je tržište kompletno ne postoji efekat zaraze. Međutim kada postoji heterogenost među agentima na tržištu i kada je tržište nekompletno, cene za E i H rastu u stanju sveta U, padaju u stanju sveta D šireći time efekat zaraze. Obe cene se smanjuju u stanju D, usled efekta potrošnje i efekta portfolija, iako tržište u nastajanju E nije pretrpelo nikakav ekonomski šok za razliku od H.

Optimstični agenti poseduju finansijski instrument H u stanju D, dok u stanju U ne poseduju nijedan finansijski instrument H, jer postoji uslaglašenost među agentima o dobrim vestima na tržištu, te pesimisti u ovom stanju sveta poseduju sve finansijske instrumente H, što je posledica efekta portfolija. S druge strane u stanju sveta D se volatilnost finansijskog instrumenta toliko poveća da kreira velike nesuglasice u predviđanjima agenata, pa optimistični agenti poseduju sve finansijske instrumente H. Kako je bogatstvo agenata konstantno, optimisti troše manje na kupovinu E i na potrošna dobra, pa se cena E smanjuje. Efekat potrošnje kreira efekat portfolija i obrnuto. Stoga, cena tržišta u nastajanju E oponaša cenu H.

Može se zaključiti da heterogenost agenata i nekompletnost tržišta stvaraju efekat portfolija i efekat potrošnje. Kada je tržište kompletno i kada ne postoji heterogenost ne postoji čak ni efekat zaraze. Heterogena očekivanja utiču na to da su tržišta u nastajanju manje privlačna pesimističnim agentima, dok su optimističnim agentima izrazito privlačna, efekat zaraze postaje moguć kada optimisti investiraju deo svog kapitala i u finansijske instrumente visokog prinosa H.

Kako tržište nije kompletno optimistični agenti ne mogu da uzimaju zajmove od pesimističnih agenata. Tržište zajmova koje nedostaje utiče na pojavu neefikasne zamke likvidnosti. Zamka likvidnosti je veća u stanju sveta D nego u U. Uzrok tome je što zamka likvidnosti doprinosi porastu nesuglasica među agentima, što doprinosi da optimistični agenti žele da kupe H i time se kreira efekat porfolija i efekat potrošnje. Kretanje ekonomije od normalne do anksiozne predstavlja ciklus zamke likvidnosti.

5.2 Model

5.2.1 Kolateral

Za stvaranje efekta zaraze nije potreban leveridž, dovoljni su portfolio efekat i efekat potrošnje. Uvođenjem kolaterala, a samim tim i leveridža, u model može se pokazati da leveridž prvo smanjuje efekat zaraze, ali potom kreira veći krah cena. Posmatra se sličan model, s tim da sada postoji $t = 1, \ldots, T$ vremenskih trenutaka. Za stanja sveta $s \in S$ važi da ako je $s \neq 1$ postoji njegov neposredni prethodnik s', a svako stanje sveta $s \in S \setminus S_T$ postoji skup neposrednih sledbenika $S(s)$. Do svakog sledbenika $\tau \in S(s)$ se dolazi preko grana $\sigma \in B(s)$, odnosno $\tau = s\sigma$. Vremenski trenutak stanja sveta s, obeležen sa $t(s)$, je broj čvorova kroz koje je neophodno proći da bi se stiglo od 1 do s.

Kao što je ranije rečeno, finansijski ugovor j se sastoji od obećanog iznosa i kolaterala koji je pokriće za pozajmnicu, odnosno sastoji se od uređenog para (A_j, C_j). Finansijski instrumenti se koriste kao kolaterali i zajmodavac ima pravo na konfiskovanje kolaterala u slučaju neisplaćivanja duga.

U svakom stanju sveta s obećani iznos je dat sa $A_s\mathbb{1}_s$, gde je $\mathbb{1}_s \in \mathbb{R}^{S(s)}$ vektor jedinica čija je dimenzija jednaka broju prethodnika stanja sveta s. Ugovor $(A_j\mathbb{1}_s, C)$ obećava A_s jedinica potrošnog dobra u svakom sledećem stanju sveta i osiguran je kolateralom C. Ako je kolateral dovoljno veliki, tako da neisplaćivanje duga ne donosi nikakvu štetu zajmodavcu, cena ugovora je data sa

$$\frac{A_s}{1+r_s},$$

gde je r_s bezrizična kamatna stopa.

Neka su dati jedno potrošno dobro $x \in \mathbb{R}_+$, dividenda od finansijskog instrumenta d_{sj} i skup finansijskih instrumenata koji je podeljen na finansijske instrumente koji mogu da se koriste kao kolaterali $j \in J^C$ i na one koji ne mogu da se koriste kao kolaterali $j \in J \setminus J^C$. Kolaterali su dovoljno veliki, pa su zajmodavci u potpunosti osigurani u ravnoteži. Posedovanje jedne jedinice finansijskog instrumenta koji može da se koristi kao kolateral $j \in J^C$ omogućava agentu da uzme zajam, obećavajući da će isporučivati jednu jedinicu potrošnog dobra u svakom stanju sveta $t \in S(s)$ tako da važi

$$A_s \leq \min_{t \in S}[\pi_{tj} + d_{tj}]$$

Kolateralni kapacitet φ_s jedne jedinice finansijskog instrumenta j se definiše kao minimalni prinos od finansijskog instrumenta u svim neposrednim budućim stanjima sveta. Kolateralni kapacitet je endogen i zavisi od ravnotežnih cena π_{tj}. Kolateralni kapacitet nije proporcionalan sa cenom π_{sj}. Ako postoji više mogućih stanja sveta i konstantna kamatna stopa r_s, volatilnost budućih cena π_{tj} poraste, a trenutna cena ostane nepromenjena, kolateralni kapacitet će se smanjiti. Kapacitet zaduženosti finansijskog instrumenta j je definisan sa

$$\frac{\varphi_s}{1+r_s}.$$

Kupovina jedne jedinice finansijskog instrumenta j pri marži, u stanju sveta s, predstavlja prodaju ugovornog obećanja $\min_{t \in S(s)}[\pi_{tj} + d_{tj}]$ koristeći tu istu jedinicu finansijskog instrumenta j kao kolateral i plaćajući $(\pi_{sj} - \frac{1}{1+r_s} \min_{t \in S(s)}[\pi_{tj} + d_{tj}])$ u gotovini. Marža finansijskog instrumenta j je

$$M_{sj} = \frac{\pi_{sj} - \frac{1}{1+r_s} \min_{t \in S(s)}[\pi_{tj} + D_{tj}]}{\pi_{sj}}$$

Kao što je već ranije napomenuto, leveridž je inverzna vrednost marže, a $LTV = 1 - M_{sj}$. Maksimalni leveridž je endogena promenljiva koja zavisi od sadašnje cene, buduće cene finansijskog instrumenta i kamatne stope.

Svaki investitor $h \in H$ je određen sa funkcijom korisnosti u^h, diskontnim faktorom δ^h i verovatnoćama $\mathbf{p}^h$. Važi da je Bernulijeva funkcija korisnosti potrošnje u svakom stanju sveta $s \in S$, $u^h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$$u^h(x) = lnx$$

diferencijabilna, konkavna i monotona. Agent h dodeljuje verovatnoću p_s^h prelasku iz stanja s' u s i važi da je $p_1 = 1$. Verovatnoća staze od 1 do stanja s je

$$\bar{p}_s^h = \prod_{s'=1}^{s} p_{s'}^h.$$

Očekivana korisnost [1] agenta h je

$$U^h = \sum_{s \in S} \bar{p}_s^h (\delta^h)^{t(s)-1} u^h(x_s)$$

Svaki investitor h u početnom trenutku ima zaduženje $e_s^h \in \mathbb{R}_+$ potrošnog dobra u svakom stanju sveta $s \in S$ i zaduženje $y_1^h \in \mathbb{R}_+^J$ finansijskog instrumenta u početnom trenutku. Sva potrošna dobra i finansijski instrumenti postoje na tržištu, odnosno važi

$$\sum_{h \in H} y_1^h \gg 0; \quad \sum_{h \in H} e_s^h > 0, \forall s \in S$$

Cene finansijskih instrumenata i kamatne stope su date $((\pi_s, r_s), s \in S)$, svaki agent $h \in H$ bira svoju potrošnju x_s, finansijske instrumente koje poseduje y_{sj} i davanje i uzimanje zajmova φ_s da bi maksimizirao svoju korisnost u odnosu na budžetski skup definisan sa

$$\begin{gathered} B^h(\pi, r) = \big\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \varphi) \in \mathbb{R}_+^S \times \mathbb{R}_+^{SJ} \times \mathbb{R}^S : \forall s, \\ (x_s - e_s^h) + \sum_{j \in J} \pi_{sj}(y_{sj} - y_{s'j}) \leq \frac{1}{1 + r_s}\varphi_s - \varphi_{s'} + \sum_{j \in J} y_{s'j} d_{sj} \\ \varphi_s \leq \sum_{j \in J} y_{sj} \min_{t \in S(s)} [\pi_{tj} + d_{tj}]\big\} \end{gathered}$$

U svakom stanju sveta, troškovi na potrošno dobro minus zaduženja potrošnog dobra, plus ukupni troškovi na finansijske instrumente minus finansijski instrumenti koje agenti poseduju u poslednjem vremenskom periodu može biti najviše jednako novcu uzetom na zajam prodajom ugovornih obećanja, minus plaćanja po ugovornom obećanju u stanju sveta s, plus ukupne dividende od finansijskih instrumenata. Takođe važi da ukupna količina ugovornih obećanja ne može da bude veća od kolateralnog kapaciteta.

Ravnoteža kolaterala ekonomije je data kao

$$((\boldsymbol{\pi}, \mathbf{r}), (\mathbf{x}^h, \mathbf{y}^h, \varphi^h)_{h \in H}) \in \mathbb{R}_+^{SJ} \times \mathbb{R}_+^S \times (\mathbb{R}_+^S \times \mathbb{R}^{SJ} \times \mathbb{R}^S)^H : \forall s,$$

[1] Von Neumann - Morgenstern očekivana korisnost

$$\sum_{h\in H}(x_s^h - e_s^h) = \sum_{h\in H}\sum_{j\in J} y_{s'j}^h d_{sj},$$

$$\sum_{h\in H}(y_{sj}^h - y_{s'j}^h) = 0, \forall j,$$

$$\sum_{h\in H}\varphi_s^h = 0,$$

$$(x^h, y^h, \varphi^h) \in B^h(\pi, r), \forall h,$$

$$(x, y, \varphi) \in B^h(\pi, r) \Longrightarrow u^h(x) \leq u^h(x^h), \forall h.$$

Ravnoteža kolaterala postoji zbog teoreme date u [5]. U opštoj teoriji ravnoteže sa nekompletnim tržištima, ne postoji ravnoteža kolaterala jer ugovorna obećanja nisu ograničena. Zahtevi za kolaterale regulišu ovaj problem jer postavljaju ograničenja na ugovorna obećanja.

5.2.2 Prva i druga lema vrednovanja

U cilju analize uloge leveridža u anksioznoj ekonomiji treba razmotriti vrednovanje finansijskih instrumenata. Cena finansijskog instrumenta reflektuje buduće prinose od tog finansijskog instrumenta. Finansijski instrument se može koristiti kao kolateral, pa i količina novca koja se može uzeti na zajam zahvaljujući tom finansijskom instrumentu utiče na njegovu cenu. Razmatra se ravnoteža kolaterala u kom agent h poseduje finansijski instrument j u svakom stanju sveta $s \in S$, $y_{sj}^h > 0$. Ako se finansijski instrument ne može koristiti kao kolateral njegova cena reflektuje buduće prinose tog finansijskog instrumenta, odnosno

$$\pi_{sj}^h = \frac{\sum_{\sigma\in B(s)} \delta^h p_{s\sigma}^h [\pi_{s\sigma j} + d_{s\sigma}] \frac{du^h(x_{s\sigma}^h)}{dx}}{\frac{du^h(x_s^h)}{dx}} \tag{9}$$

što je normalizovana očekivana marginalna korisnost budućih prinosa agentu h u stanju s.

Čak i kada se finansijski instrument može koristiti kao kolateral i ne postoji ograničenje za kolaterale, cena finansijskog instrumenta se izračunava na ovaj način.

Kada agenti kupuju pri marži, jer je cena finansijskog instrumenta manja od vrednosti budućeg prinosa, agenti kupuju što više mogu, čak se i zadužuju da bi kupovali finansijski instrument. Međutim, što više kupuju, njihova marginalna korisnost se sve više smanjuje, dok marginalna korisnost budućeg prinosa ne postane manja od cene, odnosno

$$\pi_{sj}^h > \frac{\sum_{\sigma\in B(s)} \delta^h p_{s\sigma}^h [\pi_{s\sigma j} + d_{s\sigma}] \frac{du^h(x_{s\sigma}^h)}{dx}}{\frac{du^h(x_s^h)}{dx}} \tag{10}$$

Ako kolateral nije ograničavajući za uzimanje zajma, važi uslov pozajmljivanja prvog reda:

$$\frac{1}{1+r_s} = \frac{\sum_{\sigma \in B(s)} \delta^h p^h_{s\sigma} \frac{du^h(x^h_{s\sigma})}{dx}}{\frac{du^h(x^h_s)}{dx}} \tag{11}$$

Kada postoji ograničenje za kolaterale, agent h ne može da uzima dodatni zajam ako ne poseduje dodatni kolateral, pa uzimanje dodatnog novca na zajam najčešće nije moguće, u tom slučaju važi

$$\frac{1}{1+r_s} > \frac{\sum_{\sigma \in B(s)} \delta^h p^h_{s\sigma} \frac{du^h(x^h_{s\sigma})}{dx}}{\frac{du^h(x^h_s)}{dx}} \tag{12}$$

Definicija [6] Zamka likvidnosti ω^h_s za agenta h u stanju s je data sa

$$\frac{1}{1+\omega^h_s}\frac{1}{1+r_s} = \frac{\sum_{\sigma \in B(s)} \delta^h p^h_{s\sigma} \frac{du^h(x^h_{s\sigma})}{dx}}{\frac{du^h(x^h_s)}{dx}} \tag{13}$$

Zamka likvidnosti za agenta nastaje kada je agent spreman da obeća višak kamate u stanju sveta s da bi dobio zajam u većem iznosu, ako nije dao dodatni kolateral. Odnosno, zamka likvidnosti agenta meri razliku između kamate koju su dužnici spremni da plate i kamate koju su zajmodavci spremni da prihvate da bi smatrali svoj zajam osiguranim. Zamka likvidnosti ekonomije u stanju sveta s je maksimalni količnik desne strane formule (13) po svim parovima agenata. Prema tome, zamka likvidnosti je mera neefikasnosti kreditnog tržišta.

Definicija?? Efektivni kolateralni kapacitet φ^h_{sj} je dug agenta h čije je pokriće marginalna jedinica finansijskog instrumenta j

$$\varphi^h_{sj} = \begin{cases} 0 \qquad \text{ako je } j \notin J^C \text{ ili ako kolateral nije ograničavajući u } s \\ \min_{t \in S(s)}[\pi_{tj} + D_{tj}] \qquad \text{inače} \end{cases}$$

Definicija?? Kolateralna vrednost finansijskog instrumenta j u stanju sveta s za agenta h je marginalna korisnost tog finansijskog instrumenta kao kolaterala za uzimanje zajmova

$$c^h_{sj} = \left[\frac{1}{1+r_s} - \frac{1}{1+\omega^h_s}\frac{1}{1+r_s}\right]\varphi^h_{sj} = \frac{1}{1+r_s}\frac{\omega^h_s}{1+\omega^h_s}\varphi^h_{sj} \tag{14}$$

Vrednost kolaterala reflektuje marginalni doprinos agentove likvidnosti, doprinos zavisi od efektivnog kolateralnog kapaciteta φ^h_{sj}, od toga koliko likvidnost znači agentu i od kamatne stope r_s.

Prva lema vrednovanja [6] Neka je $y^h_{sj} > 0$ za marginalnog agenta h. Tada je cena finansijskog instrumenta koji se koristi kao kolateral jednaka sumi njegovih budućih prinosa i njegovoj kolateralnoj vrednosti, odnosno

$$\pi_{sj} = \pi_{sj}^h + c_{sj}^h$$

Dokaz. Uslov prvog reda je zadovoljen u ravnoteži, ako je marginalna korisnost gotovinskih isplata neophodnih za kupovinu finansijskog instrumenta j koji poseduje agent h jednaka marginalnoj korisnosti nezaduženih isplata, odnosno ako je prinos od j manji od zaduženosti na j:

$$\pi_{sj} - \frac{1}{1+r_s}\varphi_{sj}^h = \frac{\sum_{\sigma \in B(s)} \delta^h p_{s\sigma}^h [\pi_{s\sigma j} + d_{s\sigma j}] \frac{du^h(x_{s\sigma}^h)}{dx}}{\frac{du^h(x_s^h)}{dx}}$$

$$\pi_{sj} = \pi_{sj}^h + \frac{1}{1+r_s}\varphi_{sj}^h - \frac{1}{1+\omega_s^h}\frac{1}{1+r_s}\varphi_{sj}^h = \pi_{sj}^h + c_{sj}^h$$

□

Neka su $\boldsymbol{\mu}_s^h \in \mathbb{R}^{S(s)}$ riziko - prilagođene verovatnoće agenta h pridružene stanju sveta s

$$\mu_{s\sigma}^h = \frac{du^h(x_{s\sigma}^h)dx}{\sum_{\tau \in B(s)} p_{s\tau}^h \frac{du^h(x_{\tau\sigma}^h)}{dx}} p_{s\sigma}^h, \quad \sigma \in B(s). \tag{15}$$

Evidentno je da ako se potrošnja ne razlikuje mnogo po stanjima sveta, da su riziko - prilagođene verovatnoće približno iste kao subjektivne verovatnoće agenata $p_{s\sigma}^h$. Neka je $\mathbb{1}_s \in \mathbb{R}^{S(s)}$ vektor jedinica čija je dimenzija jednaka broju neposrednih sledbenika stanja sveta. Neka je $A_{sj} \in \mathbb{R}^{S(s)}$ vektor prinosa finansijskog instrumenta j u svakom stanju sveta s, $A_{sj} = [\pi_{s\sigma j} + d_{s\sigma j}]$, tada je vrednost prinosa finansijskog instrumenta j za agenta h

$$\pi_{sj}^h = \frac{1}{1+r_s}\frac{1}{1+\omega_s^h}\boldsymbol{\mu}_s^h \cdot \mathbf{A}_{sj} \tag{16}$$

a kolateralna vrednost finansijskog instrumenta je

$$c_{sj}^h = \frac{1}{1+r_s}\frac{\omega_s^h}{1+\omega_s^h}\boldsymbol{\mu}_s^h \mathbb{1}_s \varphi_{sj}^h. \tag{17}$$

Za riziko - prilagođene verovatnoće važi da je $\boldsymbol{\mu}_s^h \mathbb{1}_s = 1$. Kombinujući prethodne formule sa Prvom lemom vrednovanja dobija se:

Druga lema vrednovanja[6]

$$\pi_{sj} = \frac{1}{1+r_s}\frac{1}{1+\omega_s^h}\boldsymbol{\mu}_s^h \cdot \mathbf{A}_{sj} + \frac{1}{1+r_s}\frac{\omega_s^h}{1+\omega_s^h}\varphi_{sj}^h$$

$$= \frac{1}{1+r_s}\frac{1}{1+\omega_s^h}\Big[\boldsymbol{\mu}_s^h \cdot (\mathbf{A}_{sj}\phi_{sj}^h \mathbb{1}_s)\Big] + \frac{1}{1+r_s}\varphi_{sj}^h.$$

Prva lema vrednovanja upućuje na to da se zaista dva ista finansijska instrumenta koja imaju iste buduće prinose prodaju po različitoj ceni, ako se njihova kolateralna vrednost razlikuje. Isti zaključak je donešen u [2]. Druga lema vrednovanja upućuje na to da rast zamke likvidnosti smanjuje buduće prinose i povećava kolateralnu vrednost finansijskog instrumenta. Takođe, sve dok kamatna stopa r_s, riziko - prilagođena verovatnoća i kolateralni kapacitet ϕ_{sj}^h ostaju isti, rast zamke likvidnosti ω_s^h smanjuje cenu finansijskog instrumenta, jer je $A_{sj} - \varphi_{sj}^h \mathbb{1}_s \geq 0$.

5.3 Ciklus leveridža i efekat zaraze

Razmatra se model sa finansijskim instrumentom visokog prinosa H koji se ne može koristiti kao kolateral i tržištem u nastajanju E koje se može koristiti kao kolateral. Kao što je već rečeno ranije, leveridž utiče da agenti imaju veće gubitke tokom krize, jer kriza snižava cene finansijskih instrumenata. Međutim, kada je anksiozna ekonomija u pitanju, mogućnost upotrebe kolaterala utiče na povećanje cena finansijskih instrumenata, ali uzrokuje veći krah.

Kolateral omogućava uzimanje zajmova i zaduživanje, zbog čega redukuje zamku likvidnosti. Kada je ekonomija u normalnom stanju, leveridž se povećava endogeno, jer će volatilnost biti niska u narednom periodu i time se povećavaju cene finansijskih instrumenata. Kada je ekonomija anksiozna, leveridž se endogeno smanjuje, jer će volatilnost biti niska u narednom periodu, što doprinosi padu cene finansijskih instrumenata. Ovako izgleda ciklus leveridža u anksioznoj ekonomiji. Uzroci koji utiču na nastanak ciklusa zamke likvidnosti su isti uzroci koji utiču na nastanak ciklusa leveridža, pa ciklus leveridža pojačava ciklus zamke likvidnosti.

U [3] se smatra da kada su riziko - prilagođene verovatnoće optimističnih agenata približne njihovim subjektivnim verovatnoćama, pa važi da kada je kamatna stopa konstantna po stanjima sveta, cene finansijskih instrumenata su u potpunosti objašnjene sa očekivanim prinosima, efektivnim kolateralnim kapacitetom i zamkom likvidnosti. Bez obzira na to da li kolaterali postoje ili ne, cena finansijskog instrumenta E u stanju sveta U je visoka i jednaka u oba slučaja. Vrednost prinosa je visoka i jednaka bez obzira na to da li postoje kolaterali, jer je zamka likvidnosti uvek jednaka ω_U. U stanju sveta D cena E je niska u oba slučaja, ali je ipak niža kada ne postoje kolaterali. Vrednost prinosa je ista u oba slučaja u stanju D, jer je zamka likvidnosti visoka i približno ista. Međutim kolateralna vrednost ima uticaj, pa je razlika u cenama u stanju sveta U i stanju sveta D manja kada postoje kolaterali.

U početnom trenutku cena je veća kada postoji kolateral jer je veća vrednost prinosa. Vrednost prinosa je veća jer je zamka likvidnosti manja u dobroj fazi ciklusa leveridža, zbog buduće vrednosti kolaterala. Cena je takođe veća zbog kolateralne vrednosti, a i kolateralni kapacitet je visok u dobroj fazi ciklusa leveridža. Leveridž je veći u početnom trenutku nego u stanju sveta D.

Kao što je ranije napomenuto, leveridž nije neophodan za stvaranje efekta zaraze u ravnoteži. Efekat potrošnje i portfolija su sasvim dovoljni za stvaranje ciklusa zamke likvidnosti, dakle leveridž nije neophodan ni za kreiranje zamke likvidnosti. Geanakoplos i Fostel smatraju da se uticaj leveridža u anksioznoj ekonomiji svodi na kreiranje većeg kraha cena. Leveridž ne stvara krah zbog potcenjivanja finansijskih instrumenata u anksioznoj ekonomiji, do većeg kraha dolazi zbog precenjivanja finansijskih instrumenata kada je ekonomija normalna, odnosno efekat kraha se pojačava zbog rasta cene instrumenta u početku, ne zbog pada cene u stanju D. Geanakoplos i Fostel su dali dva glavna razloga za to. Prvo, ciklus leveridža pojačava ciklus zamke likvidnosti koja je uzrokovana efektom portfolija. Kao drugi razlog navode kolateralnu vrednost, koja je još jedan od načina da likvidnost utiče na cene.

Osnovni uzrok efekta zaraze je efekat portfolija, jer loše vesti o finansijskom instrumentu H pružaju optimističnim agentima mogućnost da ga poseduju, redukujući na taj način količinu novca koju investiraju u E.

Geanakoplos i Fostel uvode termin surovog efekta zaraze, koji se odnosi na proširenje efekta zaraze na druge parametre, konkretno na agentova očekivanja i bogatstvo. Kao što je ranije rečeno, kada su tržišta kompletna, porast u bogatstvu pesimističnih agenata u potpunosti neutrališe efekat zaraze. Kada tržišta nisu kompletna, bez obzira na razliku u bogatstvu između optimističnih i pesimističnih agenata, efekat zaraze je prisutan zbog razlike u očekivanjima agenata. U ovom slučaju čak važi da rast razlike u bogatstvu između optimističnih i pesimističnih agenata utiče na rast efekta zaraze. Uzrok tome je što bogati pesimistični agenti daju elastičnije zajmove, utičući na pad kamatne stope u ravnoteži. Sa manjom kamatnom stopom, kapaciteti uzimanja zajmova se povećavaju, pa se povećava i mogućnost optimista da imaju ekstremnije pozicije portfolija.

5.4 Kolateralni skok

Geanakoplos i Fostel su u [6] uočili da cene finansijskih instrumenata visokog kvaliteta imaju manji pad prilikom krize, od cena finansijskih instrumenata lošeg kvaliteta. Takođe uvode termin diferencijalni efekat zaraze, u kom ciklus leveridža ima važnu ulogu. Uočili su da je pad cene od stanja sveta U do D, kao i pad cene od početnog trenutka do D tržišta u nastajanju E^B veći, nego što je to slučaj za E^G. Kako svaki finansijski instrument ima svoj kolateralni kapacitet, svaki od finansijskih instrumenata ima svoj ciklus leveridža. Iako zamka likvidnosti ima isti uticaj na sve finansijske instrumente, kolateralne vrednosti zavise i od marže. Diferencijalno ponašanje kolateralnih vrednosti objašnjava diferencijalni pad cena. Promena u vrednosti prinosa tržišta u nastajanju E^G i E^B je jednaka po svim stanjima sveta. Pad u vrednosti prinosa od stanja U do stanja D za E^G i E^B je ublažen porastom u kolateralnoj vrednosti oba tržišta u nastajanju, ali je porast kolateralne vrednosti E^G veći od porasta kolateralne vrednosti E^B. Što se tiče pada vrednosti od početnog trenutka do stanja D, pad vrednosti za E^G je ublažen rastom kolateralne vrednosti, ali pad u vrednosti E^B je pojačan dodatnim padom kolateralne vrednosti. U stanju sveta D kolateralni kapaciteti se značajno razlikuju za E^G i E^B. Velika zamka likvidnosti i različiti kapaciteti za uzimanje zajmova utiču na stvaranje različitih kolateralnih nivoa za E^G i E^B. U stanju sveta U se kolateralni kapaciteti značajno razlikuju, ali je zamka likvidnosti mala, pa su kolateralne vrednosti zanemarljive.[2]

Geanakoplos i Fostel koriste termin kolateralni skok (*eng. flight to collateral*) za porast u razlici između finansijskih instrumenata zbog različitih kolateralnih vrednosti. Kolateralni skok se dešava kada je zamka likvidnosti velika i kada je disperzija marže između finansijskih instrumenata velika. Tokom kolateralnog skoka, agenti preferiraju da kupuju finansijske instrumente koji im omogućavaju da lakše uzimaju na zajam novčana sredstva. Investitori kojima je potrebno da imaju više gotovine više dobijaju prodajom finansijskih instrumenata na koje nisu pozajmili novac jer je prihod od prodaje veći.

Pogoršanje cena finansijskih instrumenata lošeg kvaliteta se objašnjava porastom averzije prema riziku koja smanjuje vrednost prinosa volatilnih instrumenata. Kolateralni skok stavlja akcenat na promenu kolateralnih vrednosti. Čak i kad ne postoji promena u vrednosti prinosa postoji pogoršanje cena finansijskih instrumenata lošeg kvaliteta zbog zamke likvidnosti i različitih ciklusa leveridža.

U modelu preuzetom iz [6] informacione volatilnosti tržišta u nastajanju E^G i E^B su jednake nuli. Iako se očekuje da je vrednost marže u početnom trenutku jednaka nuli za oba tržišta u nastajanju, ili bar jednaka, efekat zaraze u D uzrokuje volatilnost cena, koja utiče da su marže pozitivne u početnom trenutku. Kolateralni skok u D uzrokuje veću volatilnost za E^B nego za E^G pa je marža veća za E^B u početnom trenutku. Na osnovu marže u početnom trenutku se može predvideti koji će finansijski instrumenti pretrpeti veći pad cene tokom kolateralnog skoka u anksioznoj ekonomiji. Dakle, različiti ciklusi leveridža stvaraju kolateralni skok i diferencijalni efekat zaraze u anksioznoj ekonomiji.

6 Vrednovanje finansijskih instrumenata

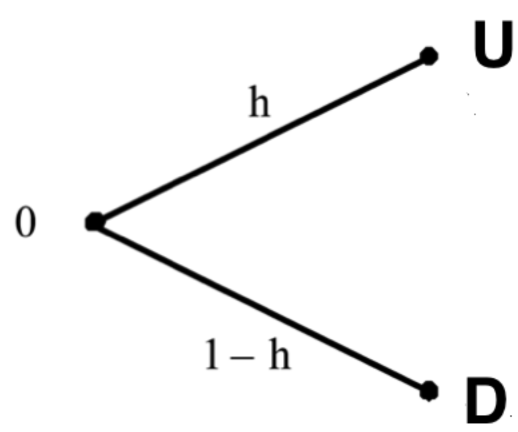
6.1 Model sa jednim periodom

U prethodnom poglavlju je razmotren leveridž i ciklus leveridža u anksioznoj ekonomiji. Međutim efekat leveridža je mnogo veći kada je ekonomija u krizi. U cilju razmatranja leveridža u vremenima krize, analizira se model koji je Džon Geanakoplos posmatrao u [3]. Posmatra se model u kom postoji jedno potrošno dobro C, jedan finansijski instrument Y, dva vremenska trenutka $t = 0$ i $t = 1$ i dva stanja sveta U i D u vremenskom trenutku $t = 1$. Prvo se posmatra model tako da važi pretpostavka da davanje i uzimanje zajmova nije moguće, odnosno posmatra se ekonomija bez kolaterala. Neka svaka jedinica finansijskog instrumenta Y isplaćuje R_U

[2]Analiza je preuzeta iz [6] na osnovu simulacije date u radu

jedinica potrošnog dobra u stanju sveta U, odnosno R_D jedinica potrošnog dobra u stanju sveta D i važi da je $R_U \geq R_D$. Neka se finansijski instrument ponaša kao hipoteka koja ili isplaćuje u celini ili se dobija povraćaj sredstava. Neka svaki agent poseduje jednu jedinicu finansijskog instrumenta i jednu jedinicu potrošnog dobra u trenutku $t = 0$. Jednostavnosti radi potrošno dobro može biti potrošeno odmah što je predstavljeno količinom c ili može da se štedi bez troškova što je predstavljeno količinom w. Agenti $h \in H$ su zainteresovani samo za maksimiziranje njihove krajnje korisnosti, bez obzira na vremenski trenutak u kom će to da se desi, odnosno agenti nisu nestrpljivi. Takođe važi da agenti imaju heterogena očekivanja. Jedina razlika koja postoji među očekivanjima agenata jesu verovatnoće p_U^h i $p_D^h = 1 - p_U^h$ gde je prva verovatnoća, verovatnoća da će desiti stanje sveta U, koje odgovara pozitivnom ishodu, a druga, verovatnoća stanja D koje odgovara negativnom ishodu.

Agenti $h \in H$ su uniformno raspoređeni na nekom neprebrojivom skupu. Neka je verovatnoća pozitivnog ishoda agenta $h \in H = [0, 1]$ jednaka $p_U^h = h$, a verovatnoća negativnog ishoda $p_D^h = 1 - h$.



Na slici iznad svakom agentu $h \in H = [0, 1]$ je dodeljena verovatnoća h u stanju sveta $s = U$ a verovatnoća $1 - h$ u stanju sveta $s = D$. Agenti čija je verovatnoća h blizu jedan su optimistični, a agenti čija je verovatnoća h blizu nule su pesimisti.

Formalnije, neka je početno zaduženje dobara i hartija od vrednosti agenta h označeno sa e^h, količina potrošnje C u stanju s je označena sa c_s, količina hartije od vrednosti Y koju poseduje agent u stanju s je y_s, a količina potrošnog dobra koje poseduje agent je w_0. Tada je

$$u^h(c_0, y_0, w_0, c_U, c_D) = c_0 + p_U^h \cdot c_U + p_D^h \cdot c_D = c_0 + hc_U + (1 - h)c_D,$$

$$e^h = (e_{C_0}^h, e_{Y_0}^h, e_{C_U}^h, e_{C_D}^h) = (1, 1, 0, 0).$$

Ako agent štedi potrošno dobro ili poseduje finanijski instrument, nema nikakvu korisnost od toga u trenutku $t = 0$, ali utiče na povećanje prihoda u budućnosti.

Neka je cena jedinice finansijskog instrumenta u trenutku $t = 0$ jednaka π_{y_0}. Agenti h koji smatraju da je

$$p_U^h \cdot y_U + p_D^h \cdot y_D = h \cdot y_U + (1-h) \cdot y_D > \pi_{y_0}$$

preferiraju kupovinu finansijskog instrumenta jer plaćanjem iznosa π_{y_0} očekuju dobit u narednom periodu koja će biti sigurno veća od π_{y_0} i stoga nisu nestrpljivi.

Agenti koji veruju da je

$$p_U^h \cdot y_U + p_D^h \cdot y_D = h \cdot y_U + (1-h) \cdot y_D < \pi_{y_0}$$

preferiraju prodaju finansijskih instrumenata.

Geanakoplos u svom modelu pretpostavlja da nije moguća prodaja na kratko (*eng. Short selling*). U stvarnosti je nemoguće prodati na kratko većinu finansijskih instrumenata, osim akcija u posebnim slučajevima. Čak i kada je moguća prodaja na kratko, samo neki agenti poseduju veštine i dovoljno su optimistični da bi to sproveli u delo. Stoga, pretpostavka da nije moguća prodaja na kratko, oslikava stanje u praksi realno.

Kada uzimanje zajmova nije dozvoljeno, većina agenata može da poseduje finansijski instrument. Neka je dat agent h za kog važi $h = b$, $b \in [0, 1]$. Tada je $p_U^h = b$, a $p_D^h = 1 - b$ i neka važi da je $b > 1 - b$, dakle agent h je optimističan. Cena finansijskog instrumenta je jednaka $\pi_{y_0} = b \cdot y_U + b \cdot y_D$. Svi agenti za koje važi $h < b$ će prodavati svoje finansijske instrumente jer ih vrednuju manje od π_{y_0}. Kako su agenti $h \in [0, 1]$, grupa od b agenata će prodavati finansijske instrumente. Svaki agent za kog važi $h > b$ će kupovati onu količinu finansijskih instrumenata koju mogu sebi da priušte, jer ih vrednuju više od π_{y_0}. Svi ovi agenata imaju dovoljno bogatstva da kupe dodatnih $\frac{1}{\pi_{y_0}}$ jedinica finansijskog instrumenta, odnosno, $(1-b) \cdot \frac{1}{\pi_{y_0}}$ u celosti. U trenutku $t = 0$ tržište je u ravnoteži, pa je opisana ravnoteža, ravnoteža kada ne postoji mogućnost uzimanja zajmova.

Formalnije, ako je cena potrošnog dobra u svakom periodu jednaka π_c i cena finansijskog instrumenta Y je π_{y_0}, budžetski skup za svakog agenta, kada ne postoji mogućnost uzimanja zajmova, se može napisati na sledeći način

$$B_0^h(\pi) = \Big\{ (c_0, y_0, w_0, c_U, c_D) \in \mathbb{R}_+^5 : \pi_{y_0} \cdot c_0 + w_0 + \pi_{y_0} \cdot (y_0 - 1) = 1,$$

$$c_U = w_0 + R_U \cdot y_0, \quad c_D = w_0 + R_D \cdot y_0 \Big\}$$

Svaki agent bira plan potrošnje $(c_0^h, y_0^h, w_0^h, c_U^h, c_D^h) \in B_0^h(\pi)$ koji maksimizira korisnost u^h. U slučaju ravnoteže važi

$$\int_0^1 (c_0^h + w_0^h) dx = 1,$$

$$\int_0^1 y_0^h dh = 1,$$

$$\int_0^1 c_U^h dh = R_U + \int_0^1 w_0^h dh,$$

$$\int_0^1 c_D^h dh = R_D + \int_0^1 w_0^h dh.$$

U slučaju ravnoteže agenti su indiferentni prema tome da li treba da troše ili štede.

6.2 Ravnoteža sa pozajmljivanjem i egzogenim kolateralima

Prethodna analiza se odnosi na vrednovanje finansijskih instrumenata kada ne postoji mogućnosti uzimanja zajmova. Treba razmotriti vrednovanje finansijskih instrumenata u ravnoteži, sa pretpostavkom da postoji tržište zajmova. Neka važi da agenti $h > b$ mogu da kupuju i poseduju zalihu nekog finansijskog instrumenta u potpunosti. Ako bi pozajmljivanje po nultoj kamatnoj stopi bilo neograničeno jedan agent bi mogao da uzima zajmove neograničeno, pa bi mogao da kupi sve finansijske instrumente. Ako pri tome važi da su agenti raspoređeni na kontinuumu $h \in [0, 1]$ tada je cena finansijskog instrumenta jednaka $\pi_{y_o} = 1$, jer bi u suprotnom po bilo kojoj ceni $\pi_{y_0} < 1$ agenti h koji su ispod jedinice mogli da preotmu finansijski instrument od agenata $h = 1$, što implicira da bi agent $h = 1$ bankrotirao , kamatna stopa ne bi bila nula i promenila bi se alokacija ravnoteže.

Kada se posmatraju nekompletna tržišta treba se fokusirati isključivo na nezavisne zajmove (*eng. Noncontingent loan*) koji obezbeđuju jednaku količinu φ u oba stanja sveta. Alokacija ravnoteže pod ovom restrikcijom nije Pareto optimalna, jer ne važi Keneth - Arrow teorema.

Ako bi postojala ravnoteža u uslovima bez mogućnosti uzimanja zajmova na tržištu, svi agenti bi mogli da profitiraju od transfera $\epsilon > 0$ jedinica potrošnog dobra u stanju U i transfera $\frac{b \cdot \epsilon}{1-b}$ jedinica potrošnog dobra u stanju D. Profitirali bi i agenti $h < b$ i agenti $h > b$. Međutim u ravnoteži ne postoji finansijski instrument koji može da pokreće kapital od stanja U do D niti obrnuto.

6.2.1 Kolaterali

U teoriji, agenti mogu neograničeno da pozajmljuju i uzimaju zajmove. U praksi su zajmodavci zabrinuti jer postoji mogućnost da im dužnici ne vrate sredstva koja su uzeli na zajam. Model bez mogućnosti uzimanja zajmova se proširuje na model u kom postoji mogućnost uzimanja zajmova i u kom je kolateral jedini način da se zajmodavac osigura da će mu dužnik isplatiti dug. Agentu je dozvoljeno da koristi finansijski instrument kao kolateral, tako da ako nije u mogućnosti da izmiri svoje obaveze, kolateral se može konfiskovati. Neka je ugovorno obećanje dato sa φ. Zajmodavac je svestan da, ako kolaterali nisu regresivni u oba stanja, će tada dobiti samo

$$min(\varphi, R_U), \quad s = U$$

$$min(\varphi, R_D), \quad s = D$$

Uvođenje kolateralizovanih tržišta zajmova dovodi u pitanje koliko novca može biti pozajmljeno, kao i pod kojom kamatnom stopom se pozajmljuje. Neka važi pretpostavka da je pozajmljivanje ograničeno $\varphi \leq 1 \cdot y_0$ odnosno da je agentima dozvoljeno da obećaju najviše 1 jedinicu potrošnog dobra kao kolateral. Sa ovim ograničenjem za kolateral, nema potrebe da se brine o neizmirenju duga. Prethodno razmatran slučaj u kom postoji ravnoteža bez pozajmljivanja se može interpretirati kao slučaj u kom je leveridž izvanredno neelastičan, gde je ograničenje $\varphi \leq 0 \cdot y_0$.

Kada se koristi kolateral u svrhu pozajmljivanja, leveridž pruža čak i najoptimističnijim agentima šansu da troše više, što povećava cenu finansijskog instrumenta. Kako agenti mogu da pozajmljuju strogo manje od vrednosti kolaterala, optimistično trošenje je još uvek ograničeno. Drugim rečima, svaki put kada agent kupi nekretninu ili hartiju od vrednosti, mora dodatno da plati iz sopstvenog budžeta pored novčanih sredstava koja ima od zajma,a zajam je dobio zahvaljujući kolateralu koji je upravo kupio. Neminovno je da će na ovaj način agent u nekom trenutku ostati bez kapitala.

Definicija budžetskog skupa je sada proširena na

$$B^h_\chi(\pi, r) = \Big\{(c_0, y_0, \varphi_0, w_0, c_U, c_D) \in \mathbb{R}^6_+ : \pi_{y_0} \cdot c_0 + w_0 + \pi_{y_0} \cdot (y_0 - 1) = 1 + \tfrac{1}{1+r} \cdot \varphi,$$

$$\varphi_0 \leq \chi \cdot y_0, \quad c_U = w_0 + R_U \cdot y_0 - \varphi_0, \quad c_D = w_0 + R_D \cdot y_0 - \varphi_0\Big\}.$$

Parametar χ je proizvoljno izabrana vrednost za maksimalan mogući iznos koji agent može da uzme, ako poseduje jednu jedinicu kolaterala.

Ako je $\varphi_0 > 0$ agent uzima zajam da bi mogao da potroši više u trenutku $t = 0$. Slično, $\varphi_0 < 0$ znači da agent na izvestan način kupuje ugovorna obećanja, što redukuje trošenje potrošnog dobra i finansijskog instrumenta u vremenskom trenutku $t = 0$, ali mu omogućava da potroši više u budučim stanjima sveta U i D. Ravnoteža je definisana cenom i kamatnom stopom (π, r), vektorom izbora agenta $(c^h_0, y^h_0, \varphi^h_0, w^h_0, c^h_U, c^h_D) \in B^h_\chi(\pi, r)$ koji maksimizira korisnost u^h. U ravnoteži važi:

$$\int_0^1 (c^h_0 + w^h_0) dh = 1,$$

$$\int_0^1 y^h_0 dh = 1,$$

$$\int_0^1 \varphi_0^h dh = 0,$$

$$\int_0^1 c_U^h dh = R_U + \int_0^1 w_0^h dh,$$

$$\int_0^1 c_D^h dh = R_D + \int_0^1 w_0^h dh.$$

Ravnoteža bez pozajmljivanja je specijalan slučaj ravnoteže sa kolateralom kada je $\chi = 0$.

6.2.2 Marginalni kupci

Neka je marginalni kupac označen sa $h = b$. Jednačine ravnoteže se mogu definisati na sledeći način [3]

$$\pi = p_U^b \cdot R_U + (1 - p_D^b) \cdot R_D = b \cdot R_U + (1 - b) \cdot R_D \tag{18}$$

$$\pi = \frac{(1-b) \cdot R_U + R_D}{b} \tag{19}$$

Rešavanjem ovih jednačina može se izračunati ravnotežna cena instrumenta. Iz prve jednakosti se vidi da je agent $h = b$ indiferentan prema kupovini. Agenti $h < b$ prodaju sve instrumente koje imaju, dok agenti $h > b$ kupuju sve instrumente koje mogu da kupe sa gotovinom koju poseduju i sa svim novcem koji mogu da pozajme. Iz druge jednakosti se vidi da $1 - b$ agenata potražuje upravo ono što b agenata prodaje.

Grupa agenata koju čini $1 - b$ agenata se zadužuju najviše što mogu, da bi kupili finansijske instrumente za koje veruju da su trenutno jeftini, dok preostalim agentima nije potreban novac za kupovinu finansijskih instrumenata tako da oni postaju zajmodavci. Kamatna stopa na zajmove je 0% jer zajmodavci ne daju na zajam svu gotovinu koju poseduju. Kako zajmodavci nisu nestrpljivi i imaju mnogo preostale gotovine indiferentni su prema davanju zajma po kamatnoj stopi 0%. S druge strane, svakako bi kokurencija među njima svela kamatnu stopu na 0%.

Na osnovu druge jednakosti se može zaključiti da je cena instrumenta Y je jednaka količini novca koju su agenti $h > b$ spremni da daju da bi kupili instrument, podeljenoj sa količinom prodatog instrumenta. Agenti tipa b koji su indiferentni prema kupovini, odnosno prodaji finansijskog instrumenta su takođe indiferentni prema kupovini instrumenata sa leveridžom.

Ako π zadovoljava $\pi = p_U^b \cdot R_U + (1 - p_U^b) \cdot R_D = b \cdot R_U + (1 - b) \cdot R_D$ jednostavnim oduzimanjem R_D sa obe strane dobija se $\pi - R_D = p_U^b \cdot (R_U - R_D) = b \cdot (R_U - R_D)$. Dakle, agenti $h > b$ će strogo preferirati kupovinu finansijskih instrumenata i takođe će strogo preferirati kupovinu instrumenata sa što većim leveridžom (jer su riziko - neutralni).

Kako postoji velika zaliha potrošnog dobra, ne postoji nestrpljivost među agentima, ravnotežna kamatna stopa je nula rešavanjem jednačina (18) i (19) po π i b i optimizujući ih po agentu dobijaju se uslovi ravnoteže.

U svom radu [3] je Geanakoplos napravio poređenje ravnoteže kada postoji mogućnost uzimanja zajmova i kada ne postoji. U poređenju sa ravnotežom bez leveridža, cena se u Geanakoplosovom primeru skromno povećava, jer se skromno pozajmljuje. Pri većoj ceni izvestan broj agenata može da poseduje sve finansijske instrumente jer je uzimanje zajmova omogućeno i nije ograničeno, pa mogu da kupuju više zahvaljujući novčanim sredstvima koje su uzeli na zajam. Kako je sa manjim kolateralom zajmodavac manje osiguran, važi da što su zahtevi za kolaterale manje strogi, to je veća cena finansijskih instrumenata.

Ako se definiše drugačija ravnotežna tačka, ravnotežna cena se dobija kao sredina između ravnotežne cene bez zaduživanja i ravnotežne cene kada je zaduživanje omogućeno. Sa stanovišta ekonomije, smanjenje kamatnih stopa dovodi do rasta cena finansijskih instrumenata, jer se njihovi novčani tokovi manje diskontuju. U slučaju kada su agenti strpljivi, kamatna stopa je nula bez obzira na restrikcije nad kolateralima, što uzrokuje promenu standarda davanja zajmova pa se kao posledica javlja rast cena finansijskih instrumenata.

Prema rečima profesora Džona Geanakoplosa, postoji nedostatak u konvencionalnim formulama vrednovanja finansijskih instrumenata.

Osnovni problem je što se pri korišenju fundamentalne jednačine vrednovanja u cilju izračunavanja cene finansijskih instrumenata, koriste verovatnoće. Što je veći leveridž marginalni kupci su optimističniji pa njihove verovatnoće određuju vrednost. Fundamentalna jednačina vrednovanja u ovakvim slučajevima ne uspeva da odredi cene finansijskih instrumenata. Jedan od mogućih uzroka tome su elastični zahtevi za kolaterale.

Leveridž je jednak
$$\lambda = \frac{\pi}{\pi - \chi}$$
gde χ označava iznos koji je agent uzeo na zajam da bi kupio finansijski instrument.

Primer Neka je cena finansijskog instrumenta jednaka 7, a iznos koji se uzima na zajam, da bi se finansijski instrument kupio jednak 1. Numerička mera leveridža je data sa $\lambda = \frac{7}{7-1} = 1.67$. LTV, odnosno zajam prema vrednosti, je jednak $LTV = \frac{1}{7} = 0.1428 \approx 14.3\%$, marža je data kao recipročna vrednost leveridža $M = \frac{6}{7} = 0.8571 \approx 85.7\%$. Ovo je leveridž u uslovima sa zaduživanjem. Ako zaduživanje nije moguće leveridž će biti jednak 1.

Leveridž se ne može smatrati endogenim, jer je maksimalna obećana količina koja može da se uzme na zajam fiksirana i konstantna.

6.3 Ravnoteža leveridža

U [3] je Džon Geanakoplos razmatrao ulogu kolaterala u modeliranju ravnotežne tačke za leveridž. Pre 1997. godine kolaterali su razmatrani samo u modelima u kojima ne postoji neizvesnost. Čak i u današnje vreme endogeni kolaterali se dobijaju tako što se posmatra proizvoljna mera rizika kao što je volatilnost i pretpostavlja se da je marža proizvoljna funkcija koja predstavlja rizičnost otplate, što kao posledicu ima da ekonomisti nisu uspešni u modeliranju ravnotežne tačke za leveridž. Uobičajeno je da se smatra da jedina promenljiva koja se može odrediti iz jednačine ponude i tražnje jeste cena i da nije moguće da ova jednačina određuje dve promenljive.

U cilju pronalaženja ravnoteže leveridža Džon Geanakoplos u svojim radovima koristi model koji podrazumeva potrošna dobra indeksirana prema njihovoj lokaciji, vremenskom trenutku ili stanju sveta tako da ista potrošna dobra na različitim mestima, u različitim vremenskim trenucima i različitim stanjima sveta imaju različite cene. Neka je dato ugovorno obećanje od x jedinica potrošnog dobra, koje kao kolateral ima jednu jedinicu nekretnine. Takođe, neka je dato ugovorno obećanje od x jedinica potrošnog dobra koje kao kolateral ima y jedinica nekretnine, gde je $y < 1$. U prvom slučaju je prinos x jedinica potrošnog dobra u oba stanja sveta $s = U, D$. Međutim u drugom slučaju je prinos x jedinica potrošnog dobra u stanju sveta U, a $x \cdot y < x$ u stanju sveta D. Dakle, kolaterali utiču na prinos od finansijskog instrumenta u budućnosti.

Zbog uvođenja kolaterala ugovori se više ne posmatraju kao ugovorna obećanja nego kao uređeni parovi ugovornih obećanja i kolaterala. Sa svakim uređenim parom ugovora se trguje na odvojenom tržištu, sa njihovom jedinstvenom cenom

$$U_j = (A_j, C_j)$$

gde je A_j obećanje, a C_j kolateral. Uređeni parovi su homogeni stepena jedan $((\alpha \cdot A_j, C_j) = (A_j, \alpha \cdot C_j) = \alpha \cdot (A_j, C_j))$. Ugovorno obećanje od x na y nekretnine je isto što i y ugovornog obećanja od x jedinica potrošonog dobra na celu nekretninu. Bez gubitka opštosti kolateral se uvek može normalizovati.

Kao što je prethodno napomenuto C_j je kolateral, koji je dat kao jedna jedinica finansijskog instrumenta Y. Sa j je dato ugovorno obećanje od j na kolateral od jedne jedinice finansijskog instrumenta Y za oba stanja sveta u budućnosti, a J skup svih finansijskih instrumenata koji se koriste kao kolateral.

Neka ugovorno obećanje j_1 ima prinos R u oba stanja sveta, j_2 ima prinos $R_U > R$ u stanju sveta U, ali $R_D = R$ u stanju sveta D, jer zaduženi agenti neće biti mogućnosti da se izmire svoje obaveze. Ugovorna obećanja se tada prodaju po različitim cenama.

Definicija ravnoteže treba da inkorporira ugovorna obećanja $j \in J$ i cene π_j. Kada je kolateral dovoljno veliki, tako da pokriva iznos duga, odnosno tako da zajmodavci, konfiskovanjem kolaterala nisu na gubitku, cena ugovornog obećanja je $\pi_j = \frac{j}{1+r}$ gde je r bezrizična kamatna stopa. Kada postoji verovatnoća za neizmirenje duga, cena se ne može izračunati samo pomoću bezrizične kamatne stope. Neka je cena π_j i neka su ugovorna obećanja nezavisna, uvek se može izračunati nominalna kamatna stopa $1 + r_j = \frac{j}{\pi_j}$.

Treba razgraničiti prodaju ugovornih obećanja $\varphi_j > 0$ (što odgovara uzimanju zajmova) i kupovinu ugovornih obećanja $\varphi_j < 0$ (što odgovara davanju zajmova).

Razlika između $\varphi_j > 0$ i $\varphi_j < 0$ nije samo u znaku, prodaja ugovornog obećanja obavezuje prodavca na davanje kolaterala, dok kupac ugovornog obećanja ne daje kolateral pa je samim tim rasterećeniji. Marginalna korisnost od kupovine ugovornog obećanja je često manja od marginalne nekorisnosti od prodaje istog ugovornog obećanja, u slučaju da agent ne želi da stekne kolateral na drugačiji način.

Sada se budžetski skup definiše kao

$$B^h(\pi,\rho) = \Big\{[c_0, y_0, (\varphi_j)_{j\in J}, w_o, c_U, c_D] \in \mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^J \times \mathbb{R}^3_+ :$$

$$c_0 + w_0 + \pi\cdot(y_0 - 1) = 1 + \sum_{j=1}^{J} \varphi_j \cdot \rho_j, \tag{20}$$

$$\sum_{j=1}^{J} max(\varphi,0) \leq y_0, \tag{21}$$

$$c_U = w_0 + R_U \cdot y_0 - \sum_{j=1}^{J} \varphi_j min(R_U, j), \tag{22}$$

$$c_D = w_0 + R_D \cdot y_0 - \sum_{j=1}^{J} min(R_D, j)\Big\}. \tag{23}$$

U jednakostima (22) i (23) su opisani nerekurzivni kolaterali. Svaki agent daje isto, ugovorno obećanje ili kolateral, koje god ima manju vrednost. Kao posledica se dobija tržište zajmova koje je potpuno anonimno, ne postoje asimetrične informacija o agentima jer svaki agent isporučuje na isti način. Zajmodavci posmatraju samo kolaterale bez obzira na identitet agenata. Primetimo da φ_j može biti pozitivno (davanje ugovornog obećanja) ili negativno (kupovina ugovornog obećanja) i da su u oba slučaja isporuke odnosno prijemi dati sa istom formulom.

Nejednakost (21) opisuje ključni kolateral ili ograničenje leveridža. Svako ugovorno obećanje treba da bude osigurano sa kolateralom, pa je suma zahteva za kolaterale po svim ugovornim obećanjima ograničena sa finansijskim instrumentom. Jednakost (20) opisuje ograničenje budžeta u trenutku $t = 0$. Ravnoteža je definisana na isti način kao i u prethodnim slučajevima osim što sada treba da postoji ravnoteža na tržištu za sve ugovore $j \in J$:

$$\int_0^1 (c_0^h + w_0^h)dh = 1,$$

$$\int_0^1 y_0^h dh = 1,$$

$$\int_0^1 \varphi_j^h dh = 0 \quad \forall \in J,$$

$$\int_0^1 c_U^h dh = R_U + \int_0^1 w_0^h dh,$$

$$\int_0^1 c_D^h dh = R_D + \int_0^1 w_0^h dh$$

Dakle ravnoteža je ostala nepromenjena. Jedini ugovor sa kojim se trguje u ravnoteži je $((j_1, j_1), 1)$ gde je $j = j_1$. Svi ostali ugovori se vrednuju u ravnoteži, ali se sa njima ne trguje. Njihove cene se mogu izračunati pomoću vrednosti koje im dodeljuje marginalni kupac b. Dakle cena π_{j_2} od ugovora koji obećava $R_U > R$ je $\pi_{j_2} = b \cdot R_U + (1-b) \cdot R$, što je svakako više od cene ugovora koji obećava R jer je $\pi_{j_1} = b \cdot R + (1-b) \cdot R$. Slično je i za cenu ugovornog obećanja π_{j_3}

Cene i respektivne kamatne stope su date kroz primer [3].

Primer Neka je marginalni agent $b = 0.69$, a ugovorno obećanje $j = 0.2$ isporučuje $R = 0.2$ u oba stanja sveta. Neka ugovorno obećanje $j = 0.3$ isporučuje $R_U = 0.3$ u stanju sveta $s = U$, a $R = 0.2$ u stanju sveta $s = D$. Ugovorno obećanje $j = 0.4$ isporučuje $R_U = 0.4$ u stanju sveta $s = U$, a $R = 0.2$ u stanju sveta $s = D$. Tada važi

$$\pi_{0.2} = 0.69 \cdot 0.2 + 0.31 \cdot 0.2 = 0.2,$$

$$1 + r_{0.2} = \frac{0.2}{0.2} = 1,$$

$$\pi_{0.3} = 0.69 \cdot 0.3 + 0.31 \cdot 0.2 = 0.269$$

$$1 + r_{0.3} = \frac{0.3}{0.269} = 1.12,$$

$$\pi_{0.4} = 0.69 \cdot 0.4 + 0.31 \cdot 0.2 = 0.337$$

$$1 + r_{0.4} = \frac{0.4}{0.337} = 1.19$$

Dakle, agent koji želi da uzme zajam u iznosu 0.2 koristeći jednu nekretninu kao kolateral može da pozajmi po kamatnoj stopi 0%. Agent koi želi da uzme zajam u iznosu 0.269 sa istim kolateralom može da pozajmi po kamatnoj stopi od 12%. Agent koji želi da pozajmi 0.337 može da pozajmi po kamatnoj stopi 19%. Iz ovoga je očigledno da ravnoteža ponude i tražnje može da odredi i kamatnu stopu i kolateral, jer svakom kolateralu odgovara jedinstvena kamatna stopa. Logično je da manje sigurne pozajmnice sa većim šansama za neizmirenje duga zahtevaju veće kamatne stope. S druge strane iznenađujuće je to što iako u ovom primeru postoji samo jedna dimenzija rizika i jedan uzrok neusaglašenosti među agentima, trguje se samo sa zajmom 0.2, iako je moguće uzimati i davati zajmove po bilo kojoj kamatnoj stopi.

Razlog tome je što agent $h = 1$ misli da za svaki novčani iznos od 0.75 koji plati po finansijskom instrumentu može sigurno dobiti 1. Agent ne preferira da pozajmljuje više čak ni po malo većoj kamatnoj stopi, jer da bi pozajmio više treba da zameni 0.4 iznosa zajma za 0.2 iznosa zajma. Takođe plaća isti iznos u slučaju nepovoljnog ishoda, ali plaća više u slučaju povoljnog ishoda u zamenu za to da dobije više u trenutku $t = 0$. Kako je agent optimističan i smatra da će se desiti stanje sveta $s = U$ koje odgovara pozitivnom ishodu, ne želi da plati više.

Zajmodavci za koje važi da je $h < b$, ne žele da kupe finansijski instrument. Zajmodavci prodaju finansijski instrument, jer veruju da postoji velika verovatnoća da se desi stanje sveta $s = D$. Nije iznenađujuće što zajmodavci ne žele da daju rizične zajmove bez obzira na to što mogu da zahtevaju velike kamatne stope, a ne 0%, jer je rizik da dužnici neće vratiti dugove previsok. Postoji savršena korelacija između rizičnih zajmova i finansijskih instrumenata koje zajmodavci ne preferiraju. Zajmodavci ne žele da daju više novca u trenutku $t = 0$ da bi dobili više novca u stanju sveta U za koje veruju da nije moguće da se desi. Iz tog razloga, pesimistični agenti više preferiraju da uzimaju zajmove nego da daju zajmove. Pesimistični agenti ipak ne mogu da uzimaju zajmove, jer da bi uzeli zajam treba da poseduju kolaterale za svoja ugovorna obećanja što im nije u interesu. Jedini zajmovi sa kojima pesimistični agenti trguju u ravnoteži su oni koji uključuju dovoljno striktne marže tako da ne postoji šansa da zaduženi agenti ne vrate svoje dugove.

Zajmodavci obično podese marže tako da šanse za neizmirenje duga budu vrlo male. Za vreme krize leveridža 1994. i 1998. godine u Sjedinjenim Američkim Državama nijedan zajmodavac nije izgubio novac trgujući sa repo ugovorima. Repo ugovor (eng. Repurchase agreement) je kombinacija hartije od vrednosti i ugovora sa kojim se prodavac osigura da može ponovo da kupi hartiju od vrednosti na neki dogovoreni datum u budućnosti. Generalno, moguće je da u ravnoteži postoji više od jedne marže i više od jedne ravnotežne kamatne stope.

U teoriji je uobičajeno da se smatra da jednakost ponude i tražnje određuje kamatne stope na zajmove. Sada se smatra da jednakost ponude i tražnje može da odredi i kamatne stope i ravnotežni leveridž. Džon Geanakoplos u svojim radovima ističe da jednakost ponude i tražnje određuje dve promenljive, odnosno da pored kamatne stope ravnoteža jedinstveno određuje i leveridž. On je primetio da je ispravan način za posmatranje endogenih kolaterala razmatranje različitih tržišta za svaki zajam u zavisnosti od količine kolaterala, tako da postoje jedinstvene kamatne stope za svaki nivo kolaterala. Zajam sa velikim kolateralom će imati nisku kamatu stopu, a zajam sa malim kolateralom će imati visoku kamatnu stopu u ravnoteži. Dakle, tržište zajmova je određeno uređenim parom (A_j, C_j) i svaki uređeni par ima sopstvenu ravnotežnu cenu na tržištu. Pitanje jedinstvenosti nivoa kolaterala za zajam se može svesti na manje paradoksalnu, ali i dalje iznenađujuću tvrdnju da će u ravnoteži agenti izabrati da trguju sa istim nivoom kolaterala za svaku vrstu ugovornog obećanja. Prethodno je pokazano da ovo jeste slučaj kada se drvo odlučivanja sastoji iz samo dva moguća stanja sveta sa riziko - neutralnim agentima koji se razlikuju po očekivanjima ali imaju iste diskontne stope. Generalno, broj kolateralnih stopa sa kojima se endogeno trguje neće biti jedinstven, ali će ih biti strogo manje od broja stanja sveta, odnosno od dimenzije prostora skupa agenata.

Kada postoje dva moguća stanja sveta ravnotežni leveridž transformiše kupovinu kolaterala u kupovinu Arrow - Debreu hartija od vrednosti: Kupac kolaterala istovremeno prodaje ugovorno obećanje (j, j) gde je j jednako isplati kolaterala u potpunosti, tako da ustvari kupuje samo $1 - j$ jedinica Arrow - Debreu hartije od vrednosti.

6.3.1 Endogeni leveridž

Poznato je da ekonomski šokovi utiču na vrednovanje finansijskih instrumenata. Ekonomski šokovi takođe utiču na ravnotežu leveridža. Postavlja se pitanje da li promena u ravnoteži leveridža pojačava efekat promene cena finansijskih instrumenata ili ga ublažava. U [3], Džon Geanakoplos pokazuje da u većini slučajeva, endogeni leveridž ublažava efekat promene cena finansijskih instrumenata.

Neka važi pretpostavimo da su agenti postali optimističniji, odnosno verovatnoće agenata postaju

$$p_D^h = (1 - h)^2 < 1 - h$$

$$p_U^h = 1 - (1 - h)^2 > h$$

za sve $h \in (0, 1)$. Zamenom novih vrednosti u funkciju korisnosti može se ponovo izračunati ravnoteža, tada se cena Y povećava na $\pi_{y'}$. Ipak ravnotežno ugovorno obećanje ostaje isto $j = \chi$, a ravnotežna kamatna stopa ostaje 0%. Leveridž se smanjuje na

$$\frac{\pi_{y'}}{\pi_{y'} - \chi}$$

Za marginalnog kupca b' važi da je $b' < b$. Efekat popravljanja stanja ekonomije je ublažen zbog smanjenja leveridža.

Slično je i kada postoji porast u količini potrošnog dobra agenata. Dodatno bogatstvo implicira porast njihove tražnje za instrumentom Y, pa raste cena Y, ali cena Y ne raste koliko bi porasla da se ravnotežni leveridž nije smanjio.

Endogeno kretanje leveridža pojačava efekat promene granične raspodele isplata finansijskog instrumenta Y. Ako se granična vrednost prinosa poveća, to će imati pozitivan efekat na očekivanu vrednost prinosa od Y, ali će efekat na cenu Y biti pojačan ekspanzijom ravnotežnog leveridža.

6.3.2 Fundamentalna teorija vrednovanja; Zakon jedne cene

Ako važi zakon jedne cene, ne postoji dvoznačnost vrednosti bilo kog vremenskog derivata u vremenu t. Kako se u kolateralnoj ravnoteži ravnotežna cena ne izračunava pomoću fundamentalne teorije vrednovanja, postoje naznake da kolaterali utiču na to da zakon jedne cene ne važi u opštem slučaju.

U opštoj teoriji ravnoteže zakon jedne cene važi. U [3] Džon Geanakoplos pokazuje da zakon jedne cene ne važi u praksi.

Neka postoje dva identična finansijska instrumenta Y i Y', gde se Y može koristiti kao kolateral, a Y' ne može. Neka svaki agent ima β jedinica instrumenta Y i $(1-\beta)$ jedinica istrumenta Y' i jednu nerizični aktivu. Postavlja se pitanje da li zakon jedne cene važi u ravnoteži, odnosno da li će se finansijski instrumenti, koji oba imaju prinos R_U u stanju sveta $s = U$ i R_D u stanju sveta $s = D$, prodavati po istoj ceni.

Kolateralizovani finansijski instrumenti se prodaju sa značajno većom premijom. Najoptimističniji kupci kupuju isključivo instrument Y sa leveridžom, manje optimistični kupci kupuju isključivo instrument Y' bez leveridža. Pesimistični agenti su kao i uvek zajmodavci i oni prodaju svoje finansijske instrumente.

Neka je dat novi finansijski instrument Y_η koji predstavlja η procenata ukupne vrednosti starog finansijskog instrumenta. Ako je $\beta = \eta$ onda samo novi finansijski instrument podleže leveridžu. Ako je $\beta = 100\%$ onda je i stari finansijski instrument podvrgnut leveridžu.

Pretpostavimo da se Y koristi kao kolateral, a Y' ne. Definicija ravnoteže se sastoji od $(r, \pi_y, \pi_{y'}, (c_0^h, y_0^h, y_0'^h \varphi_0^h, w_0^h, c_U^h, c_D^h)_{h\in H})$ tako da su individualni izbori optimalni u budžetskim skupovima

$$B^h(\pi, r) = \Big\{(c_0, y_0, y_0', \varphi_0, w_0, c_U, c_D) \in \mathbb{R}^3_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3_+ :$$

$$c_0 + w_0 + \pi_y \cdot (y_0 - \beta) + \pi_{y'} \cdot (y_0' - (1-\beta)) = 1 + \tfrac{1}{1+r} \cdot \varphi_0,$$

$$\varphi_0 \leq R_D \cdot y_0,$$

$$c_U = w_0 + R_U \cdot (y_0 + y_0') - \varphi_0,$$

$$c_D = w_0 + R_D \cdot (y_0 + y_0') - \varphi_0 \Big\}$$

U ravnoteži je:

$$\int_0^1 (c_0^h + w_0^h) dh = 1,$$

$$\int_0^1 y_0^h dh = \beta,$$

$$\int_0^1 y_0'^h dh = 1 - \beta,$$

$$\int_0^1 \varphi^h dh = 0,$$

$$\int_0^1 c_U^h dh = R_U + \int_0^1 w_0^h dh,$$

$$\int_0^1 c_D^h = R_D + \int_0^1 w_0^h dh.$$

Ravnotežne jednakosti pokazuju da se cene finansijskih instrumenata Y i Y' razlikuju, iako su finansijski instrumeni savršeni supstituti i da su kupci finansijskog instrumenta Y i finansijskog instrumenta Y' disjunktni skupovi. Takođe važi da kada se β smanjuje, tada se i ukupna vrednost Y smanjuje, kao i ukupna vrednost Y', a razlika između finansijskih instrumenata se povećava. Pad vrednosti β je smanjivanje likvidnosti na tržištu, pa pad vrednosti finansijskog instrumenta Y sledi, jer je teže kupiti finansijski instrument kada je likvidnost manja.

Formule takođe ukazuju na to da je finansijski instrument Y vredniji od njegovog savršenog supstituta Y' samo zato što se može koristiti kao kolateral.

Postoji agent a indiferentan prema kupovini finansijskog instrumenta Y sa leveridžom po visokoj ceni i finansijskog instrumenta Y' bez leveridža po niskoj ceni. Slično postoji agent b za kog važi da je $b < a$ i koji je indiferentan prema kupovini instrumenta Y' i prodaji svih finansijskih instrumenata koje poseduje. Optimistični agenti $h > a$ kupuju isključivo finansijski instrument Y sa maksimalnim mogućim leveridžom, agenti $b < h < a$ kupuju isključivo Y', a agenti $h < b$ nemaju nijedan finansijski instrument, pa su oni zajmodavci.

U ravnoteži važi

$$\pi_{y'} = b \cdot R_U + (1 - b) \cdot R_D \tag{24}$$

$$\pi_{y'} = \frac{(a - b) + \pi_y \cdot \beta(a - b)}{(1 - \beta) \cdot (1 - (a - b))}, \tag{25}$$

$$\frac{a \cdot (R_U - R_D)}{\pi_y - R_D} = \frac{a \cdot R_U + (1 - a) \cdot R_D}{\pi_{y'}}, \tag{26}$$

$$\pi_y = \frac{(1 - a) + \pi_{y'} \cdot (1 - \beta)(1 - a) + R_D \cdot \beta}{\beta \cdot a}. \tag{27}$$

Iz jednakosti (24) sledi da je agent b indiferentan prema kupovini finansijskog instrumenta Y'. Iz jednakosti (25) sledi da agenti $h \in (a, b)$ mogu da priušte da kupe samo finansijski instrument Y' koji je prodat od strane preostalih $(1-(a-b))$ agenata i njihov trošak se sastoji od jedne jedinice nerižične aktive i prinosa koji se dobije od prodaje njihovog finansijskog instrumenta Y. Iz jednakosti (26) sledi da je agent a indiferentan prema kupovini finansijskog instrumenta Y sa leveridžom i finansijskog instrumenta Y' bez leveridža. Iz jednakosti (27) se vidi da $(1 - a)$ agenata može da priušti da kupi sve finansijske instrumente Y, pri tome troše nerizičnu aktivu, prinos od prodaje svojih instrumenata Y' i količinu koju mogu da pozajme koristeći Y kao kolateral.

Neka važi da je $\beta = 0\%$ i ne postoji leveridž, pri čemu je cena finansijskog instrumenta $\pi_y = \pi_{y'}$. Ako se β poveća na $\beta = \eta$, tada je η procenata novog finansijskog instrumenta podvrgnuto leveridžu i Y' postaje izjednačen sa instrumentom Y. Vlast može da podigne cenu finansijskog instrumenta Y. Interesantno je da cena finansijskog instrumenta Y' takođe raste, iako kod ovog instrumenta ne postoji leveridž. Ako se za više finansijskih instrumenata obezbedi isti leveridž i β poveća sa η na 100%, neki od starih instrumenata podležu leveridžu, što uzrokuje da se vrednosti svih finansijskih instrumenata se povećaju. Bez obzira na povećanje cena, ako ugovorna obećanja ostanu na istom nivou, ne postoji rizik da dužnici neće vratiti svoje dugove.

Uvođenjem leveridža za nove finansijske instrumente se suštinski povećava cena novih finansijskih instrumenata, što takođe utiče na rast cena starih instrumenata koji nemaju leveridž. Na osnovu analize iznete u [3], može se zaključiti da je najbolji način da se poveća cena novih finansijskih instrumenata da se tretiraju kao da su jedini instrumenti sa leveridžom koja postoje. S druge strane, njegova analiza pokazuje da cene novih finansijskih instrumenata mogu biti dalje povećane proširenjem leveridža na sve instrumente, bez povećanja stope neizmirivanja dugova.

Razlog za ovaj paradoksalan zaključak je što optimistični kupci uvek imaju opcije za kupovinu starih instrumenata po niskoj ceni. Mora da postoji značajan leverdž kod novih instrumenata da bi ih privuklo na kupovinu jer su cene novih instrumenata značajno veće. Kada i stari instrumenti imaju leveridž i njihova cena se povećava pa raste tražnja za novim finansijskim instrumentima raste.

Ako pri kupovini jedne klase finansijskih instrumenata agenti više ne mogu da koriste leveridž, može doći do deprecijacije cena kod druge klase instrumenata čiji leveridž ostaje isti.

6.3.3 Kompletna tržista

Ako postoje kompletna tržišta i ako agenti mogu da trguju sa Arrow - Debreu hartijama bez kolaterala, razlika između Y i Y' je irelevantna. Ravnoteža je data kao $[(\pi_U, \pi_D), (x_0^h, w_0^h, x_U^h, x_D^h)]$ tako da važi $\pi_U + \pi_D = 1$ i

$$\int_0^1 (x_0^h + w_0^h) dh = 1,$$

$$\int_0^1 x_U^h dh = R_U + \int_0^1 w_0^h dh,$$

$$\int_0^1 x_D^h = R_D + \int_0^1 w_0^h dh$$

$$(x_0^h, w_0^h, x_U^h, x_D^h) \in B^h(\pi) = \Big\{(x_0, w_0, x_U, x_D) :$$

$$x_0 + \pi_U \cdot x_U + \pi_D \cdot x_D \leq 1 + \pi_U \cdot R_U + \pi_D \cdot R_D)\Big\},$$

$$(x_0, w_0, x_U, x_D) \in B^h(\pi) \Rightarrow u^h(x_0, x_U, x_D) \leq u^h(x_0^h, x_U^h, x_D^h).$$

gde su x_0, x_U i x_D količine finansijskog instrumenta koje poseduje agent u početnom trenutku i stanjima sveta, respektivno.

Na kompletnom tržištu se ravnoteža dostiže u $(\pi_U, \pi_D) = (h^*, 1 - h^*)$, pri čemu agenti $h > h^*$ troše sve svoje bogatstvom, kupujući potrošno dobro samo u stanju sveta U, a agenti $h \leq h^*$ troše sve svoje bogatstvo na jedinice x_D.

Cena Y na kompletnom tržištu je stoga $\pi_U \cdot R_U + p_D \cdot R_D$ i mnogo je niža od cene, finansijskog instrumenta Y sa leveridžom na nekompletnom tržištu. Dakle, leveridž može da podigne cenu finansijskih instrumenata mnogo iznad efikasnih granica.

6.4 Model sa dva perioda

Fundamentalna analiza cena akcija uključuje posmatranje podataka kao što su novčani tokovi, prinos hartija od vrednosti, istoriju profita upotrebljenog za buduće finansiranje, ispravnost rukovođenja kapitalom u cilju maksimizacije prinosa akcionara, šablone trgovanja akcijama, za koje može da se očekuje da utiču na cene akcija. Za razliku od tehničke analize, koja se fokusira samo na istorijske cene akcija, fundamentalna analiza se fokusira na kreiranje portreta kompanije, identifikujući intrinzična svojstva, odnosno fundamentalne vrednosti akcija i kupovinu ili prodaju akcija baziranu na tim informacijama.

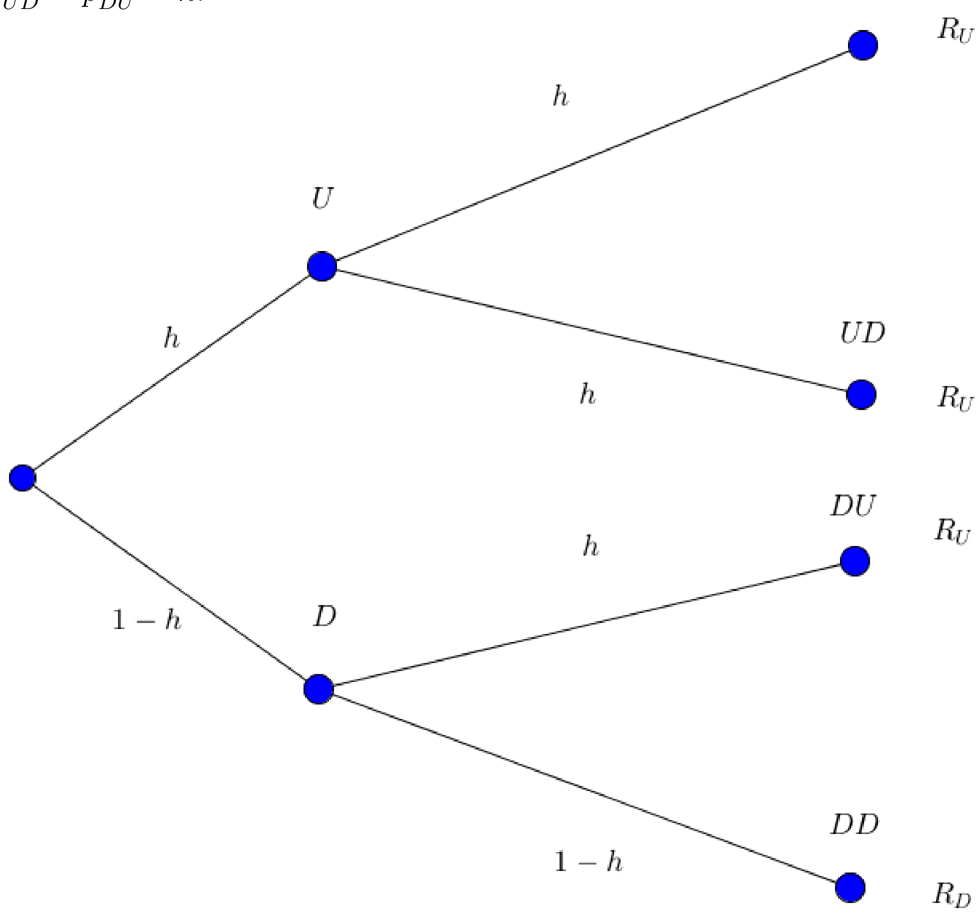
Dakle, fundamentalna analiza skuplja sve podatke i izračunava intrinzičnu, odnosno fundamentalnu vrednost, koja je nezavisna od trenutne prodajne cene.

U modelu sa jednim vremenskim periodom, kada se dese šokovi u ekonomiji, vrednost fnansijskih instrumenata počne naglo da opada i dogodi se krah. Krah koji se dogodi se odnosi na fundamentalne vrednosti. Vlast ne može da učini ništa da bi izbegla ovaj krah, iako je ekonomija daleko od kraha na početku perioda.

Poenta ciklusa leveridža jeste da višak leveridža nakon kog sledi veliki pad leveridža, uzrokuje krah na tržištu, pre nego što se desi veliki pad fundamentalnih vrednosti finansijskih instrumenata. Odnosno dogodi se krah čak i ako se posledični krah u fundamentalnim vrednostima ne desi. Cene finansijskih instrumenata su prekomerno visoke u početnoj ili normalnoj, previše zaduženoj ekonomiji, nakon smanjenja leveridža, cene su niže nego što bi bile da do prekomernog zaduživanja nikad nije došlo.

Razmatra se model sa dva perioda, preuzet iz [3]. Neka svaki agent u stanju sveta $s = 0$ ima jednu jedinicu potrošnog dobra i jednu jedinicu finansijskog instrumenta i neka su obe trajne. Neka finansijski instrument Y isplaćuje na kraju drugog vremenskog perioda. U slučaju pozitivnog ishoda u bilo kom periodu, finansijski instrument isplaćuje R_U na kraju. Samo u slučaju dva negativna ishoda finansijski instrument isplaćuje R_D. Skup stanja sveta je dat kao $S = \{0, U, D, UU, UD, DU, DD\}$.

Neka je, kao i u modelu sa jednim periodom, s' stanje sveta koje prethodi stanju s, p_s^h verovatnoća za agenta h da će nakon stanja s' uslediti s. Jednostavnosti radi, neka važi da svaki agent smatra da je pomak od U do D u periodu $t = [0, 1]$ nezavisan i jednako raspodeljen kao pomak od U do D u periodu $t = [1, 2]$, takođe neka važi da je $p_{UD}^h = p_{DU}^h = h$.



U opisanoj situaciju treba da se dese dva negativna ishoda da bi se desio krah fundamentalnih vrednosti. Investitori se razlikuju po verovatnoćama i šansama da se desi negativan ishod. Pomak od početnog trenutka $t = 0$ do stanja sveta $s = D$ smanjuje očekivanu isplatu finansijskog instrumenta Y i povećava varijansu isplate finansijskog instrumenta iz perspektive svakog agenta.

Neka važi da agenti nisu nestrpljivi i da su zainteresovani samo za očekivanu potrošnju. Neka je c_s potrošnja u stanju sveta s, e_s^h početno zaduženje potrošnog dobra u stanju s, y_0^h početno zaduženje finansijskog instrumenta Y u početnom trenutku, za sve $h \in H$ važi

$$u^h(c_0, c_U, c_D, c_{UU}, c_{UD}, c_{DU}, c_{DD}) = c_0 + p_U^h \cdot c_U + p_D^h \cdot c_D + p_U^h \cdot p_{UU}^h \cdot c_{UU}$$

$$+p_U^h \cdot p_{UD}^h \cdot c_{UD} + p_D^h \cdot p_{DU}^h \cdot c_{DU} + p_D^h \cdot p_{DD}^h \cdot c_{DD}$$

$$= c_0 + h \cdot c_U + (1-h) \cdot c_D + h^2 \cdot c_{UU} + h \cdot (1-h) \cdot c_{UD}$$

$$+(1-h) \cdot h \cdot c_{DU} + (1-h)^2 \cdot c_{DD},$$

$$(e_0^h, y_0^h, e_U^h, e_D^h, e_{UU}^h, e_{UD}^h, e_{DU}^h, e_{DD}^h) = (1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

Neka je data dividenda finansijskog instrumenta $d_{UU} = d_{UD} = d_{DU} = R_U$, $d_{DD} = R_D$, i neka je $d_0 = d_U = d_D = 0$.

Agenti su optimističniji u modelu sa dva perioda nego što su bili u modelu sa jednim periodom, jer agent h smatra da je verovatnoća da se desi stanje DD, gde je isplata R_D, jednaka $(1-h)^2$, što je manje od verovatnoće stanja sveta D koja je jednaka $p_D^h = 1-h$. Ako zajmodavci mogu da pozajmljuju kratkoročno, njihov zajam dat u početnom trenutku $t = 0$ će biti isplaćen pre kraha, što nije moguće kada se daju zajmovi u modelu sa jednim periodom.

6.4.1 Ravnoteža

U postojeći model se uvode kratkoročni zajmovi, čiji je datum dospeća u trenutku $t = 1$, tako da zajam L_j obećava iznos j u stanjima sveta $s = U$ i $s = D$ i zahteva jednu jedinicu finansijskog instrumenta Y kao kolateral (Kao primer se može uzeti repo ugovor). Budžetski skup se može predstaviti iterativno, za svako stanje sveta s.

$$B^h(\pi, \rho) = \Big\{ [c_s, y_s, (\varphi_{s_j})_{j \in J}, w_s]_{s \in S} \in (\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}^J \times \mathbb{R}_+)^{1+s} : \forall s$$

$$(c_s + w_s - e_s^h) + \pi_s \cdot (y_s - y_{s'}) = y_{s'} \cdot d_s + w_{s'} + \sum_{j=1}^J \varphi_{s_j} \cdot \rho_{L_j}$$

$$-\sum_{j=1}^{J}\varphi_{s'_j} min(\pi_s + d_s, j) \cdot \sum_{j=1}^{J} max(\varphi_{s_j}, 0) \leq y_s\Big\}.$$

U svakom stanju s, cena potrošnog dobra je normalizovana, cena finansijskog instrumenta je π_s, cena zajma L_j, koji obećava iznos j u stanjima $s = U$ i $s = D$, je ρ_{L_j}. Agent h troši više nego što je pozajmio ako koristi i štedi potrošno dobro nego ako kupi dodatnu količinu finansijskog instrumenta. Ukupan prihod agenta potiče od dividendi (dividende u stanju s dobija agent h koji poseduje finansijski instrument u stanju s'), uštеđevine u prethodnom periodu i prihoda od prodaje zajmova umanjenih za isplate zajmova. Kod kolaterala ne postoji pravo na povraćaj, tako da agent ne mora da isplati zajam, ako je voljan da odustane od kolaterala. Agenti koji uzimaju zajmove ($\varphi_{s_j} > 0$) moraju da poseduju kolateral.

Ključno pitanje za ovu analizu je koliko leveridža tržište dozvoljava u svakom stanju sveta s. Može se pokazati da u svakom stanju s, jedini zalog sa kojim će se trgovati jeste zajam koji obećava maksimalnu dobit i anulira verovatnoću za neizmirenje duga. Kako će kod ovog ugovora dug sigurno biti isplaćen, sa njim se trguje po bezrizičnoj kamatnoj stopi r_s. Koristeći ovaj uvid može se redefinisati φ_s, kao količina potrošnog dobra obećanog u stanju s, koja će biti isplaćena u narednom periodu u stanjima $s = U$ i $s = D$. Budžetski skup postaje

$$B^h(\pi, r) = \Big\{(c_s, y_s, \varphi_s, w_s)_{s\in S} \in (\mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)^{1+s} : \forall s,$$

$$(c_s + w_s - e^h_s) + \pi_s \cdot (y_s - y_{s'}) = y_{s'} \cdot d_s + w_{s'} + \sum_{j=1}^{J} \varphi_s \cdot \frac{1}{1 + r_s} - \varphi_{s'},$$

$$\varphi_s \leq y_s \cdot min(\pi_U + d_U, \pi_D + d_D)\Big\}.$$

Ravnoteža se dostiže u (π, r) tako da kada svi agenti optimizuju svoj budžetski skup birajući $(c^h_s, y^h_s, \varphi^h_s, w^h_s)_{s\in S}$, tržište je u ravnoteži u svakom stanju s

$$\int_H (c^h_s + w^h_s)dh = \int_H e^h_s dh + d_s \cdot \int_H y^h_s dh,$$

$$\int_H y^h_s dh = \int_H y^h_s dh,$$

$$\int_H \varphi^h_s dh = 0$$

.

Iz ovoga sledi da je u ravnoteži kamatna stopa jednaka nuli u svakom stanju sveta. U vremenskom trenutku $t = 0$, agenti mogu da pozajme minimum cene Y u stanju U i D za svaku jedinicu Y koju poseduju u početnom trenutku. U stanju U agenti mogu da pozajme R_U jedinica potrošnog dobra za svaku jedinicu Y koju poseduju u U. U stanju D mogu da pozajme samo R_D jedinica potrošnog dobra za svaku jedinicu potrošnog dobra koje poseduju u D. U stabilnim vremenima, u početnom trenutku $t = 0$, ne postoji verovatnoća negativnog ishoda u kratkom roku. Zajmodavci su skloni da pozajmljuju više pri istim kolateralima i leveridž može biti visok.

6.4.2 Marginalni kupci

Neka je b marginalni kupac u stanju D i neka je a marginalni kupac početnom trenutku. Tada mora da važi:

$$\pi_D = R_U \cdot p^b_{DU} + R_D \cdot p^b_{DD} \equiv R_U \cdot b + R_D \cdot (1 - b) \tag{28}$$

$$\pi_D = \frac{\frac{R_U}{a}(a-b) + R_D}{\frac{R_U}{a}b} = \frac{(R_U + R_D)a - b}{b} \tag{29}$$

$$a = \frac{b(R_U + \pi_D)}{R_U + R_D} \tag{30}$$

$$\pi_0 = \frac{(1-a) + \pi_D}{a} \tag{31}$$

$$\frac{a(1-\pi_D)}{\pi_0 - \pi_D} \equiv \frac{p^a_U(1-\pi_D)}{\pi_0 - \pi_D} = R_U \cdot p^a_U + p^a_D \frac{p^a_{DU}}{p^b_{DU}} \equiv R_U \cdot a + (1-a)\frac{a}{b} \tag{32}$$

$$\frac{a(1-\pi_D)}{\pi_0 - \pi_D} \equiv \frac{p^a_U(1-\pi_D)}{\pi_0 - \pi_D} = \frac{R_U \cdot p^a_U + p^a_D \pi_D \frac{p^a_{DU}}{p^b_{DU}}}{\pi_0} \equiv \frac{R_U \cdot a + (1-a)\pi_D \frac{a}{b}}{\pi_0} \tag{33}$$

Jednakost (28) pokazuje da je cena u D jednaka proceni za marginalnog kupca b u stanju D. Kako je marginalni kupac indiferentan prema pozajmljivanju, takođe će biti indiferentan prema kupovini. Jednakost (29) tvrdi da je cena u D jednaka količniku novca potrošenog na Y u stanju D, podeljenog sa prodatim jedinicama u D. Gornji deo skupa investitora a prestaje sa radom u stanju D, tako da nisu u mogućnosti da kupuju više. Potrošili su sav novac i prodali sve finansijske instrumente koje su imali da bi otplatili zajmove. Preostali agenti $1 - a$ moraju da zadrže sva potrošna dobra i Y, u jednakim količinama, kako su svi pozajmili istu količinu u početnom trenutku. U stanju D, preostali investitori u intervalu $[0, a)$ poseduju $\frac{R_U}{a}$ jedinica Y i zaradili su $\frac{R_U}{a}$ novčanih jedinica. U stanju D novi optimistični kupci iz intervala $[b, a)$ troše sav novac koji imaju $\frac{R_U}{a}(a - b)$ plus $R_D \cdot 1$ koje mogu da pozajme na osnovu akcije Y. Količina Y koja je prodata u stanju D je $\frac{R_U}{a}b$, čime je objašnjena jednakost (29). Preuređivanjem jednakosti (29) dobija se jednakost (30).

Jednakost (31) je veoma slična jednakosti (29) i objašnjava cenu Y u početnom trenutku koja se dobija kao količnik potrošene količine i količine koja je prodata. U početnom trenutku je moguće uzeti zajam u iznosu od π_D koristeći svaku jedninicu finansijskog instrumenta Y kao kolateral. Dakle agenti $(1-a)$ imaju količinu $(1-a)+\pi_D$ da troše na a jedinica finansijskog instrumenta Y koje se prodaju u početnom trenutku.

Jednakost (32) izjednačava marginalnu korisnost u početnom trenutku za a od jedne novčane jedinice, sa desne strane, sa marginalnom korisnošću ulaganja jedne novčane jedinice za kupovinu Y uz leveridž sa leve strane. Marginalna korisnost kupovine Y sa ulaganjem jedne novčane jedinice uz leveridž u početom trenutku je očigledna. Sa $\pi_0-\pi_D$ novčanih jedinica depozita, može se dobiti isplata od $(1-\pi_D)$ novčanih jedinica u stanju U, čemu je pripisana verovatnoća $p_U^a\equiv a$, s druge strane u stanju D ne postoji prinos. Radi objašnjenja desne strane jednakosti (32), posmatra se agent a koji može da ostvari bolji prihod ako štedi jednu novčanu jedinicu u početnom trenutku. Sa verovatnoćom $p_U^a\equiv a$ dostiže se stanje U i jedna novčana jedinica će vredeti jednu jedinicu korisnosti. Sa verovatnoćom $p_D^a\equiv 1-a$ dostiže se stanje D, pa će agent a želeti da uz leveridž sa svojom novčanom jedinicom kupi što je više moguće finansijskog instrumenta Y. Kao rezultat u D se dobija

$$\frac{a(R_U-R_D)}{\pi_D-R_D}=\frac{a(R_U-R_D)}{R_U\cdot b+R_D(1-b)-R_D}=\frac{a}{b}$$

Dakle, marginalna korisnost jedne novčane jedinice u trenutku $t=0$ je $R_U\cdot a+(1-a)\frac{a}{b}$, što objašnjava desnu stranu jednakosti (32).

Jednakost (33) tvrdi da je agent a indiferentan prema kupovini Y uz maržu u trenutku $t=0$ i kupovini Y sa gotovinom. Desna strana pokazuje da trošeći π_0 novčanih jedinica za kupovinu Y u trenutku $t=0$, agent a može dobiti isplatu od jedne novčane jedinice sa verovatnoćom a i može dobiti isplatu od od π_D novčanih jedinica u stanju D, što će vredeti $\pi_D\frac{a}{b}$ za agenta a. Jednakost (33) je tautološka posledica prethodne jednakosti. Ako se u jednakosti (32) iskoristi identitet

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\implies\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$$

dobija se

$$\frac{a(R_U-\pi_D)}{\pi_0-\pi_D}=\frac{\pi_D\cdot[R_U\cdot a+(1-a)\cdot\frac{a}{b}]}{\pi_D}=$$

$$=\frac{a(R_U-\pi_D)+\pi_D\cdot[R_U\cdot a+(1-a)\frac{a}{b}]}{\pi_0-\pi_D+\pi_D}=\frac{R_U\cdot a+(1-a)\pi_D\frac{a}{b}}{\pi_0}$$

što i jeste jednakost (33).

Pogađanjem vrednosti za b a zatim primenom iterativnog postupka kroz sve jednačine, mogu se odrediti sve promenljive kao i nova vrednost za b. Tražeći fiksiranu vrednost za b, lako se dolazi do opisanog rešenja, sa krahom vrednosti finansijskog instrumenta. Cena pada od početnog trenutka do stanja D jer postoje loše vesti na tržištu i jer se menja vrednost za marginalnog kupca sa a na b. Dakle pad cena može da se objasni kako lošim vestima, tako padom vrednosti marginalnog kupca, zbog toga loše vesti kao izolovani faktor ne mogu da objasne pad cene finansijskih instrumenata na tržištu. Vrednost za marginalnog kupca se smanjila jer su optimistični kupci bankrotirali i jer je postalo teže uzimati zajmove kada se leveridž smanjio.

6.4.3 Merenje doprinosa loših vesti, smanjivanja leveridža i bankrot optimista

U krizi koja je trajala od 2007 - 2009 postojale su loše vesti na finansijskom tržištu, ali prema mišljenju većine finansijskih analitičara, cene finansijskih instrumenata su pale mnogo više nego što je bilo za očekivati na osnovu loših vesti. Bankrotirale su brojne kompanije koje trguju sa nekretninama kao i neke od uspešnih investicionih banaka. Pad leveridža je imao enormne razmere. Slično se desilo i 1994. i 1998. godine ali je ovog puta ciklus leveridža bio žešći, jer je leveridž prethodno bio viši i loše vesti su bile gore.

U [3] Geanakoplos upoređuje pojedinačne uloge tri simptoma ciklusa leveridža u ciklusu leveridža. On uvodi se sva tri efekta ciklusa leveridža odvojeno u model i proverava za koliko se smanjuje cena finansijskih instrumenata.

Geanakoplos smatra da je prvi efekat ciklusa leveridža pojava loših vesti na finansijskom tržištu, koje utiču na subjektivne verovatnoće agenata. Loše vesti utiču na povećavanje verovatnoće koju svaki agent h pripisuje manjoj isplati u stanju DD, koja iznosi R_D. Verovatnoća se povećava sa $(1-h)^2$ na $(1-h)$. Iz tog razloga se verovatnoća u trenutku $t = 1$ izračunava kao $p_D^h \equiv \sqrt{(1-h)} > (1-h)$ za sve $s = 0, U, D$.

U Geanakoplosovom modelu je pokazano da se najveći procenat pada vrednosti finansijskih instrumenata može objasniti lošim vestima na finansijskom tržištu. Međutim, kako vrednost pada više nego što je očekivano, preostali procentualni pad u ceni ne može biti objašnjen tehničkom analizom(odnosno, nefundamentalnom analizom).

Geanakoplos smatra da se veći pad cena nego što je bilo očekivano može objasniti bankrotom najoptimističnijih kupaca i njihovim nestankom sa tržišta i smanjivanjem leveridža.

Drugi efekat ciklusa leveridža, bankrot najoptimističnijih agenata u stanju D, se može izolovati posmatranjem ekonomije bez tih agenata. Zamenom skupa agenata H sa $[0, b]$ se optimistični agenti izuzimaju iz ekonomije. Pomera se ravnoteža i vrednost finansijskih instrumenata pada u stanju D.

Može se simulirati ekfekat smanjivanja leveridža redukovanjem drveta odlučivanja na model sa jednim periodom zamenom verovatnoće za stanje D sa $1-h$ na $(1-h)^2$. U novom modelu, ravnotežno obećanje u čvoru 0 će biti samo R_D, ali će investitori nastaviti da pripisuju isplati od R_D verovatnoću $(1-h)^2$. Na ovaj način se dobija početna cena za finansijski instrument i vidi se da smanjivanje leveridža takođe objašnjava izvestan procenat kraha. Linearna dekompozicija tri faktora kraha postoji zbog linearnosti očekivanja agenata $p^h_{s=U} = h$, $p^h_{s=D} = 1 - h$ u h.

6.4.4 Konzervativni optimisti

Kod ciklusa leveridža je karakteristično da nakon kraha prinosi budu veći nego inače. Investitori koji su uspeli da opstanu nakon kraha imaju dobre prilike za ostvarenje profita. Postavlja se pitanje zašto investitori ne predvide postojanje kraha i zadrže svoja sredstva u gotovini ili u hartijama od vrednosti bez leveridža u početnom trenutku i čekaju da se desi stanje D. Mnogi investitori se ponašaju baš tako.

Marginalni kupac u početnom trenutku $t = 0$ je $h = b$, koji stanju DD pripisuje verovatnoću $(1-b)^2$, odnosno on vrednuje finansijski instrument u početnom trenutku više, pa nije u žurbi da kupi finansijski instrument po nižoj ceni. Razlog tome je što marginalni kupac posmatra ono što će se desiti u budućnosti. Marginalna korisnost agenta $h = a$ dostizanja stanja sveta D sa jednom jedinicom gotovine nije jednaka $(1 - a)$ nego $(1 - a)\frac{a}{b}$ jer agent a očekuje da će imati izuzetno veliki očekivani prinos od $\frac{a}{b}$ u stanju D. Svi investitori koji se nalaze između a i b se uzdržavaju od kupovine finansijskih instrumenata koje smatraju potcenjenim u početnom trenutku da bi zadržali gotovinu i zaradili mnogo više u stanju D. Kada bi postojalo više ovakvih inestitora ne bi se dogodio krah u stanju D. Ali kako se njihovo bogatstvo povećava raste cena u D a sa tim opada njihovo interesovanje da čekaju stanje D.

Svakako postoji vrlo malo investitora koji smatraju da je prinos u D dovoljno veliki da bi bilo vredno čekati stanje D. Ovo se dešava jer postoje investitori koji smatraju da su loše vesti na tržištu nakon isteka prvog perioda, kao i nakon isteka drugog malo verovatne. U praksi, hedž fondovi su obično optimistični na prethodno opisan način što pokazuje da je tvrdnja konzistentna sa onim što se dešava u realnom svetu.

6.4.5 Endogene nepodudarnosti datuma dospeća

Geanakoplos takođe razmatra negativan uticaj kratkoročnih zajmova na dugoročne finansijske instrumente. Treba primetiti da se kratkoročni zajmovi u modelu sa dva vremenska perioda pojavljuju endogeno. Ako bi duge pozicije u nezavisnim zajmovima u modelu sa jednim vremenskim periodom bile moguće, tada na osnovu prethodnih argumenata, kako postoje samo dva ishoda u krajnjem trenutku, jedini dugoročni zajam sa kojim bi se trgovalo bi isplaćivao jednak iznos R_D u oba stanja sveta. Agenti u ovom modelu preferiraju kratkoročno pozajmljivanje, stoga se ne trguje sa dugoročnim zajmovima.

Jedna od važnijih karakteristika realnih finansijskih tržišta je da agenti preferiraju kratkoročne zajmove. Zajmodavci znaju da je manja verovatnoća da se situacija na tržištu pogorša za kraći vremenski period pa preferiraju pozajmljivanje više novca za kraći vremenski period sa istim kolateralom nego na duži vremenski period.

Agenti koji žele da pozajmljuju biraju veću količinu kratkoročnih zajmova pa stoga postoji engodeno nepodudaranje datuma dospeća, što je uzrokovano postojanjem endogenih kolaterala.

6.4.6 CDS

Džon Geanakoplos u svojum radovima ističe da je važan okidač krize 2007-2009. uvođenje CDS ugovora na tržište nekretnina krajem 2005. kada je tržište bilo na vrhuncu. Sa CDS ugovorima na korporativne obveznice se trgovalo godinama, ali od 2005. godine nisu postojali standardizovani CDS ugovori za nekretnine. Implikacija je bila da su kasnije kako pesimistični agenti tako i optimistični agenti imali priliku za zaduživanje, što će uticati na deprecijaciju hartija od vrednosti za nekretnine.

Slično kao kod dvostrukog ciklusa leveridža, potpisnici hipotekarnih hartija od vrednosti su primorani da zahtevaju hipotekarne zajmove sa većim kolateralima što uzrokuje da vlasnici nekretnina ne mogu da refinansiraju svoje hipoteke, pa su mnogi od njih bankrotirali. Ovo dalje uzrokuje deprecijaciju cena nekretnina, pa prodaja novih hipoteka postaje otežana.

Sa stanovišta Džona Geanakoplosa trgovina CDS ugovorima jeste kritičan zanemaren faktor krize. Teoretičari su smatrali da je pad cena nekretnina 2006. doveo do krize, međutim uzrok pada cena je ostao misterija.

Neka u datom modelu važi pretpostavka da će se CDS uvesti na kraju prvog vremenskog perioda i da su svi agenti tako očekivali. Izračunavanjem ravnoteže na repo tržištu u početnom trenutku i ravnoteže na kompletnom tržištu u trenutku $t = 1$ dobija se veći pad cene sa π_{0Y} na π_{DY} nego što je slučaj kada ne postoje CDS ugovori na tržištu. Ako se CDS ugovori uvedu na tržište kraju prvog vremenskog perioda ali neočekivano, desiće se još veći krah, nego kad agenti očekuju uvođenje CDS ugovora. Ako se CDS ugovori uvedu na tržište u početnom trenutku $t = 0$ tada ne izazivaju krah jer cene nikada ne postanu previsoke. Dakle CDS ugovori kreiraju problem kada se uvedu nakon što je tržište na vrhuncu.

6.4.7 Kompletna tržišta

Uvođenje CDS ugovora na tržište pomera tržište bliže kompletnom. Ravnotežna kompletnog tržišta se lako izračunava. Do kraja drugog vremenskog perioda, sve dok se sve informacije ne otkriju, ne postoji potrošnja. Dakle, potrebno je izračunati cene u stanjima UU, UD, DU i DD. Neka su date zalihe potrošnih dobara c_{UU}, c_{UD}, c_{DU}, c_{DD} respektivno i važi da je $c_{UU} = c_{UD} = c_{DU} = c$. Kako je već ranije istaknuto, u ovom modelu je potrebno da se negativan ishod $s = D$ desi dva puta da bi agenti bili na gubitku. pa najoptimističniji agenti troše u stanju sveta UU, drugi po redu optimistični agenti troše u stanju sveta UD itd, što utiče na pad cene finansijskog instrumenta kad se ekonomija kreće od početnog trenutka do stanja D.

Ranije je pokazano da su cene na kompletnom tržištu su niže od cena na tržištu na kom postoji ravnoteža kolaterala, jer efektivno kompletno tržište uračunava dodavanje

CDS ugovora pa i pesimistični agenti mogu da se zadužuju.

Kod kompletnih tržišta takođe postoji visoka volatilnost. Pad cene od početnog trenutka do stanja D je takođe veliki kao i u prethodnim slučajevima. Sa kompletnim tržištima optimistični kupci kupuju u stanju U a prodaju u stanju D. Cena u stanju D stoga reflektuje preferencije pesimističnih agenata i zato se dešava veliki pad cena u stanju D u slučaju kompletnog tržišta.

Fenomen većeg pada cena od očekivanog je konzistentan sa kompletnim tržištem. Ako se pretpostavi da su se očekivanja agenata promenila tako da agent h smatra da verovatnoća stanja U nikad nije manja od p, odnosno, pretpostavlja se da je

$$p_U^h = max(h, p) \text{ za sve } h \text{ i } s = 0, D, U$$

Na tržištu na kom postoji ravnoteža kolaterala, u kom cena od Y pada sa π_{0Y} na p_{DY}, ravnotežni kolateral ostaje apsolutno nepromenjen, jer je najniži marginalni kupac b u stanju D. Preferencije agenata $h < b$ nemaju uticaj. Cene na kompletnom tržištu su sada $\pi_{0Y} = [1-(1-p)^2]\cdot R_U + (1-p)^2 \cdot R_D$ i $\pi_{DY} = p \cdot R_U + (1-p)\cdot R_D$. Kod kompletnih tržišta pad cene iznosi samo dve trećine pada cene ravnotežnog kolaterala i potpuno je objašnjen lošim vestima na tržištu kako to vidi svaki agent za kog važi $h \leq p$.

6.4.8 Pet razloga zbog kojih je ciklus leveridža loš

Šokovi u ekonomiji koji se javljaju kada ravnotežni leveridž opada su sami po sebi alarmantni. Osim što utiču na rast volatilnosti postoji još pet ozbiljnih problema koji se javljaju.

Kao prvo, visok leveridž utiče na to da mali skup investitora u potpunosti diktira cene finansijskih instrumenata. Ako su očekivanja agenata heterogena, klasična teorija ne može da objasni zbog čega su cene u praksi određene u potpunosti sa autlajerima koji imaju najveće vrednosti. U modelu opisanom u [3] vrlo mali procenat agenata određuje cene finansijskih instrumenata u početnom trenutku. Leveridž dopušta da nekolicina agenata ima veliki uticaj.

Kao drugo, ako se doda proizvodnja ekonomiji, posebno ireverzibilna proizvodnja, tada je cena finansijskog instrumenta u početnom trenutku iznad cene na kompletnom tržištu jer zaduženi agenti očekuju da će se desiti pozitivan ishod $s = U$. U slučaju negativnog ishoda prekomerna proizvodnja će uzorkovati velike troškove.

Treći razlog zbog kog je ciklus leveridža loš je taj što cene finansijskih instrumenata mogu imati fundamentalan uticaj na ekonomsku aktivnost. Kako je prezentovano u konceptu datom od strane profesora Džejmsa Tobina, kada su cene starih finansijskih instrumenata visoke, nova produktivna aktivnost, koja često uključuje izdavanje finansijskih instrumenata koji su zamena za stare instrumente je simulirana kada su cene instrumenata niske. Dodatna aktivnost može dovesti do potpunog zastoja. Ako se doda grupa malih preduzetnika, koji inače ne bi učestvovali na berzi, može se uočiti da oni mogu lako da prodaju zajmove u početnom trenutku ali propadaju u stanju

D. Politika vlade može čak da ima za cilj da zaštiti ove preduzetnike regulisanjem ciklusa leveridža. Ako se prevaziđu regulative koje ograničavaju obećani dohodak u početnom trenutku, tada cene u početnom trenutku padaju, a cene u stanju D se povećavaju.

Četvrti razlog zbog kog je ciklus leveridža loš se može objasniti velikim fluktuacijama u cenama finansijskih instrumenata tokom ciklusa leveridža koje dovode do velike redistribucije bogatstva i promena u nejednakostima među agentima. U početnom trenutku svi agenti imaju jednako početno bogatstvo. U vremenima izobilja optimistični agenti postaju bogatiji od pesimističnih agenata, dok u prelaznom periodu u slučaju negativnog ishoda optimisti bankrotiraju. Nejednakosti postaju ekstremne u oba slučaja.

Peti potencijalni trošak previsokog leveridža je objašnjen na sledeći način. Posmatrajmo optimistične agente kao neophodne za funkcionisanje ekonomije. Geanakoplos je pokazao da ako granični doprinos optimističnih agenata vredi više od iznosa koji se plaća tada njihov bankrot ima eksterne efekte, kako su interni efekti samo privatni gubici u obračunu iznosa za koji mogu da se zaduže. Ako važi da bankrot jednog optimističnog agenta utiče na bankrot ostalih optimističnih agenata, tada eksterni efekti mogu da imaju toliko velike razmere da jedino opraštanje duga može da doprinese poboljšanju finansijske situacije za sve agente.

7 Heterogenost koja se bazira na korisnosti za kolateral

Do sada je posmatran model u kom je važila pretpostavka da postoji neprebrojivo mnogo riziko - neutralnih agenata sa identičnim vremenom diskontovanja, koji se razlikuju u svojim preferencijama u odnosu na kolateral, na račun njihovih različitih prioriteta o kolateralnim isplatama. Geanakoplos uvodi alternativnu razliku u model koji posmatra u [3], a koja leži u tome da neki agenti preferiraju veću korisnost zbog posedovanja kolaterala, kao što je upotreba nekretnine kao kolaterala. Pretpostavlja se da su prioriteti uobičajeni. Ponovo važi da postoji jedinstven leveridž u stanju ravnoteže. U opisanoj situaciji, tržište će izabrati obećani iznos pri kom će se desiti kolaps velikih razmera u slučaju negativnog ishoda. Čak i ako zajmodavci i dužnici shvate da postoji trošak zbog poništenja prava na oslobađanje od hipoteke, slobodno tržište će i dalje birati obećanje koje dozvoljava kolaps velikih razmera.

U ovom modelu, ako se uvedu CDS ugovori zarad kompletiranja tržišta, niko ne bi trgovao sa njima. Stoga je tržište endogeno nekompletno, čak i ako svaki ugovor može biti napisan, tržište će i dalje da bira samo nekolicinu ugovora zbog potrebe za kolateralom.

Kako postoje samo dva tipa agenata u modelu, ravnoteža ne zahteva da marginalni agent bude indiferentan prema kupovini.

7.1 Zaduživanje tokom vremena

U [2] i [3] Džon Geanakoplos je pokazao da se adekvatna analiza uloge kolaterala na finansijskim tržištima ne može sprovesti bez uvođenja heterogenosti među agentima. Geanakoplosov model podrazumeva postojanje dve klase agenata, dva vremenska perioda i dve vrste potrošnih dobara u svakom periodu. Prvo je analizirao model kada postoji samo jedno stanje sveta da bi se uočila razlika u ravnoteži u odnosu na model kada postoji više stanja sveta.

Važi pretpostavka da je jedno dobro u potpunosti potrošno, dok su nekretnine u potpunosti trajne.

Takođe važi da jedna klasa agenata preferira nekretnine više od druge klase. Agent koji više preferira nekretnine je veoma siromašan u početnom periodu ali bogat kasnije, a agent koji je bogatiji u početnom trenutku poseduje akcije nekretnina.

Geanakoplos ističe da ako postoji kompletan skup Arrow-Debreu hartija sa beskonačnim dospećem za kazne i bez zahteva za kolateral, onda postoji jedinstvena ravnoteža (u cenama i korisnosti).

U njegovom modelu nekretnine imaju visoku cenu u početnom trenutku jer su u pitanju trajna sredstva koja obezbeđuju veliku korisnost agentu koji više preferira nekretnine u oba perioda. Iako je agent relativno siromašan u početnom trenutku, može da priušti da plati visoku cenu za nekretninu jer može da proda ugovorno obećanje koje isporučuje potrošno dobro u budućnosti, a koje otplaćuje svojim zaduženjima. Cena nekretnina se smanjuje sa vremenom zbog amortizacije. Promena u relativnim zaduženjima agenata nema uticaja na fluktuacije cena nekretnina.

Geanakoplos je zaključio da je Arrow - Debreu ravnoteža u ovom modelu efikasna sa stanovišta bogatstva, jer agenti koji najviše preferiraju nekretnine poseduju sve akcije nekretnina.

Zatim je posmatran model u kom je izvršena zamena Arrow - Debreu hartija sa jednim finansijskim instrumentom koji obećava isporuku jedne jedinice potrošnog dobra u budućnosti i nula jedinica nekretnina. Postoje beskonačne kazne za neisplaćivanje duga. Kako je u ovom slučaju broj aktiva jednak broju stanja sveta, tržište je kompletno pa je alokacija GEI ravnoteže identična Arrow - Debreu alokaciji. Razlika između Arrow - Debreu i GEI ravnoteže je evidentna samo u slučaju nekompletnih tržišta, odnosno, kada postoji više stanja sveta.

Kada ne postoje sofisticirani finansijski sporazumi povezani sa kolateralima ili predodređenim kaznama u slučaju neizmirivanja dužničkih obaveza, ne postoji način da se agenti primoraju na vraćanje dugova. Iz tog razloga agenti ne trguju sa ugovorima, ne postoji mogućnost uzimanja zajmova, pa je cena ugovora jednaka nuli. Stoga, agenti koji preferiraju nekretnine, uprkos svojoj preferenciji prema nekretninama i velikom bogatstvu u budućnosti nisu u mogućnosti da kupuju veliki broj nekretnina u početnom trenutku.

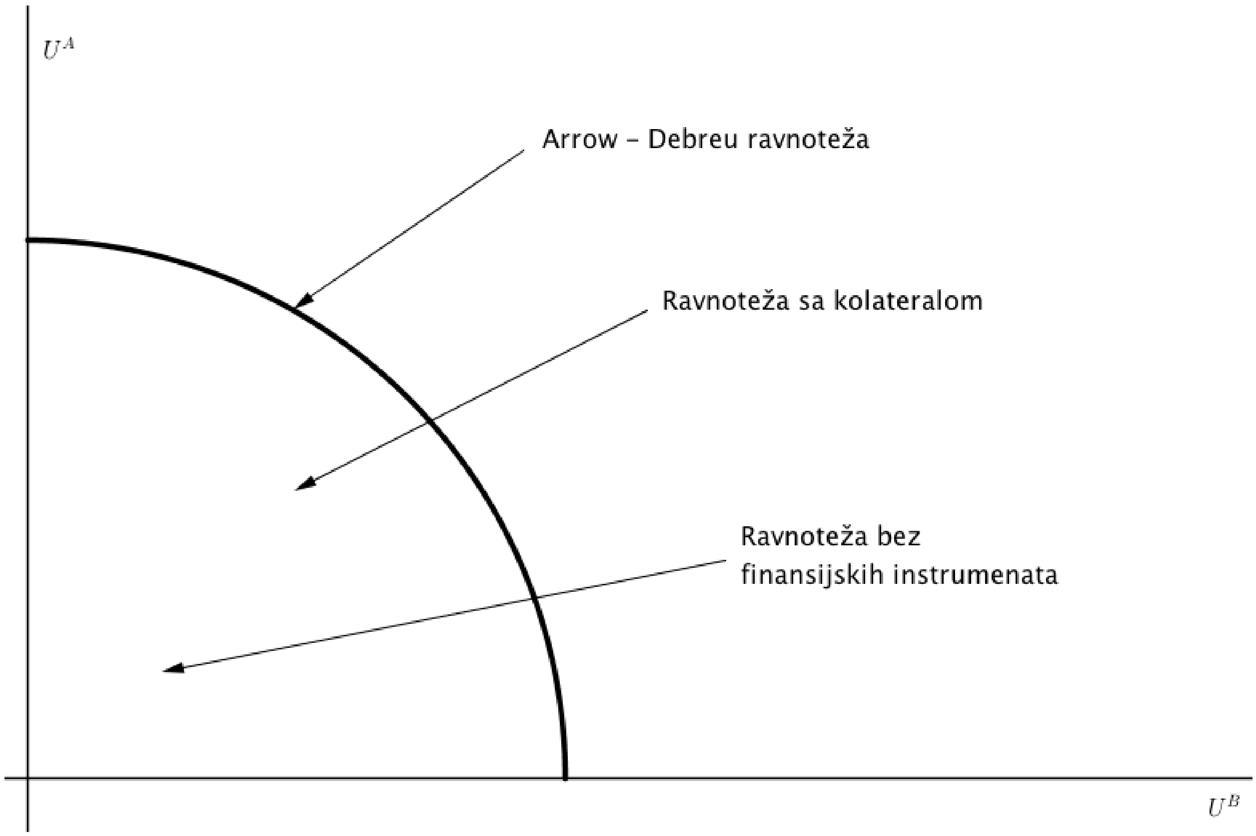
Bogatstvo agenata koji preferiraju nekretnine utiče da cene nekretnina rastu do marginalne korisnosti, jer je to najviše što agenti, licitacijom, mogu da podignu cenu. Agenti koji poseduju nekretnine u ovom slučaju mogu da ih kupe po vrlo niskoj ceni, pa su indiferentni prema kupovini. Agenti koji preferiraju nekretnine kupuju sve dok njihova marginalna korisnost potrošnje ne dosegne marginalnu korisnost posedovanja nekretnine.

Ravnoteža bez postojanja finansijskih instrumenata nije Pareto optimalna, kako agenti koji preferiraju nekretnine nemaju pravo na najveći deo akcija nekretnina. Agenti koji preferiraju nekretnine ne mogu da iskoriste svoje bogatstvo iz poslednjeg perioda da bi uticali na veću početnu kupovnu moć akcija nekretnina. Iz istog razloga je cena nekretnina je niža u ravnoteži bez finansijskih instrumenata, nego što je slučaj u Arrow - Debreu ravnoteži.

Geanakoplos poredi prethodna dva slučaja sa modelom u kom umesto kazni postoje kolaterali. U modelu postoji samo jedan finansijski instrument koji obećava jednu jedinicu potrošnog dobra u budućnosti. Postoje kolateralni zahtevi za svaku jedinicu finansijskog instrumenta i kolateral ostaje kod dužnika. Ako je kolateral koji poseduje dužnik je jednako trajan kao i potrošno dobro tada je ravnoteža kolaterala Pareto superiorna u odnosu na ravnotežu u modelu bez finansijskih instrumenata. U ovom slučaju sve akcije nekretnina pripadaju agentima koji ih vrednuje više, ali su agenti koji ih vrednuju više primorani da se odreknu previše potrošnje potrošnog dobra početnom trenutku da bi dobili akcije nekretnina. Njihova marginalna korisnost od potrošnje dobra u početnom trenutku u poređenju sa marginalnom korisnošću u budućnosti je veća nego korisnost agenata koji manje preferiraju nekretnine. Agenti mogu da poprave svoju marginalnu korisnost tako što bi agenti koji manje preferiraju nekretnine trošili manje potrošnog dobra u početnom trenutku, a više u budućnosti, a agenti koji preferiraju nekretnine obrnuto.

Nedostatak koji se javlja kada se pozajmljuje sa kolateralima je taj što je cena nekretnina, iako mnogo manja od Arrow - Debreu cene, ipak veća od cene u ravnoteži na tržištu bez finansijskih instrumenata. Iako u ravnoteži sa kolateralom ne postoji mogućnost neizmirenja duga, kada se nekretnina konfiskuje to utiče na promenu ravnoteže.

Ravnoteža u prisustvu kolaterala, kao ni ravnoteža u ekonomiji bez finansijskih instrumenata, nisu Pareto efikasne, niti je Arrow-Debreu ravnoteža dominantna u odnosu na njih. Agenti koji preferiraju nekretnine koji su ujedno i kupci trajnih sredstava, paradoksalno su pomognuti ograničenjima na tržištu jer tada ne mogu da uzimaju zajmove tako lako, ne mogu nesmotreno da se takmiče oko akcija nekretnina, zbog čega su cene niže. Uopšteno, vlasnici trajnih sredstava su ti koji ostvaruju najveću dobit smanjivanjem kontrola za kredite.



7.1.1 Ravnoteža na kompletnom tržištu

Ako postoji kompletan skup Arrow-Debreu hartija sa beskonačnim dospećem za kazne i bez zahteva za kolateral, postoji jedinstvena ravnoteža (u cenama i korisnosti).

Uz pretpostavku da agent koji manje preferira nekretnine koristi potrošno dobro i u početnom trenutku i u budućnosti, cena dobra bi trebala da bude jednaka u oba perioda, jer je marginalna korisnost agenta u oba perioda jednaka.

Agent koji manje preferira nekretnine koristi potrošno dobro samo u budućnosti, pa cena svakog dobra koje agent koristi mora biti jednaka marginalnoj korisnosti agenta za to dobro. Na kompletnom tržištu, agenti koji više preferiraju nekretnine mogu da uzimaju zajmove neograničeno, pa imaju resurse da licitiraju cenu nekretnina u početnom trenutku. Na kompletnom tržištu agenti mogu da licitiraju cenu i u budućnosti [2].

7.1.2 Bez kolaterala ne postoji ravnoteža na tržištu ugovora

U model sa kolateralima se uvodi pretpostavka da državni aparat funkcioniše tako da se nekretnina konfiskuje ako se ne isplati dug. Jedini ugovor sa kojim se trguje je ugovor koji maksimizira prihod. Cena ugovora je data preko marginalne korisnosti ugovora agentu koji manje preferira nekretnine i ovaj agent postaje kupac.

Agent koji više preferira nekretnine prodaje ugovor, pozajmljujući potrošno dobro i koristeći zajam i svoj kapital za kupovinu nekretnine. Ovaj agent koristi nekretninu kao kolateral za uzimanje potrošnog dobra na zajam. Kako dužnik može da koristi nekretninu iako se nekretnina koristi kao kolateral, agent koji preferira nekretnine ima veliku korisnost.

Agent koji manje preferira nekretnine prodaje nekretninu, jer je za njega najbolje da nakon kupovine koristi koristi nekretninu do krajnjeg trenutka i nakon toga je proda po ceni koju je agent koji preferira nekretnine spreman da plati, sa čime maksimizira svoju marginalnu korisnost. Ipak je njegova marginalna korisnost neuporedivo manja od marginalne korisnosti agenta koji preferira nekretnine.

Najinteresantniji aspekt ravnoteže kolaterala je uslov prvog reda za kupca kolaterala. Svrha kolaterala je da omogući agentima koji preferiraju nekretnine, ali ne mogu da ih priušte u bezugovornoj ekonomiji, da kupe nekretninu zadužujući se, pri čemu žive u nekretnini koji su kupili i koriste je kao kolateral. Kolateral nije savršen način za pozajmljivanje, može se očekivati da agenti koji preferiraju nekretnine neće dobiti sve nekretnine koje su im potrebne i da marginalna korisnost nekretnine može biti veća za ove agente nego marginalna korisnost potrošnog dobra, međutim tačno je upravo suportno.

Kada je kolateral u ravnoteži, marginalna korisnost jedne novčane jedinice nekretnine je značajno manja od marginalne korisnosti jedne novčane jedinice potrošnog dobra. Jedini razlog zašto je agent spreman da kupi nekretninu je taj što agent ima mogućnost zaduživanja. Agent kupuje nekretninu sa vrlo malo gotovine, zbog čega ima veliku korisnost u početnom trenutku. Osim toga, može da odustane od nekretnine u budućnosti da bi otplatio zajam. Kupovina uz leveridž donosi veliku korisnosti po svakoj novčanoj jedinici.

Kupovina uz leveridž donosi više marginalne korisnost od kupovine gotovinom svakom kupcu koji koristi određenu količinu potrošnog dobra u početnom trenutku i čije je pozajmljivanje ograničeno zahtevima za kolaterale. Kolateral nije savršen za rešavanje problema pozajmljivanja, jer utiče na nastanak zamke likvidnosti. Zahtevi za kolaterale utiču na to da je uzimanje zajmova, odnosno prodavanje ugovornih obećanja ograničeno, pa je marginalna korisnost od prodaje veća od marginalne korisnosti isporuke, što je upravo zamka likvidnosti.

U ovom modelu je cena kolaterala u relativnom odnosu sa potrošnim dobrom previsoka da bi se mogla objasniti sa korisnošću koja potiče od same prirode sredstava. Profesor Geanakoplos je objasnio da je cena visoka jer je nekretnina je dvostruko korisna, omogućava agentu koji preferira nekretnine da živi u nekretnini i da je istovremeno koristi kao kolateral za zajam, pa agent ima višak likvidnosti.

$$\text{cena nekretnine} = \text{isplata} + \text{vrednost kolaterala}$$

Hipoteza o efikasnim tržištima tvrdi da tržište određuje cene i da čak i neinformisani agent može da trguje jer cene inkorporiraju inforormacije koje imaju najinformisaniji agenti. Ovo važi kada su kolaterali u ravnoteži za ugovore, ali ne važi za sredstva koja se mogu koristiti kao kolateral. Neinformisani kupac koji ne zna kako da koristi leveridž će preplatiti nekretninu. Dakle hipoteza o efikasnim tržištima ne važi u ovom modelu.

Pretpostavimo da je vlada zabranila agentima da se toliko zadužuju. Iako svaki agent koji preferira nekretnine želi da se zaduži koliko god je moguće, kako svi agenti sličnih preferencija žele da se zadužuju, pojedinačnom agentu će ograničenje od strane vlade ići u korist. Agenti koji preferiraju nekretnine imaju manju kupovnu moć, jer im je uzimanje zajmova ograničeno, pa cene nekretnina padaju. Ograničenjem za zajmove raste zahtev za depozit koji je potreban za kupovinu nekretnine, ali ne mnogo, jer se cena nekretnine smanjila.

Potrošnja agenata koji preferiraju nekretnine u početnom trenutku je neznatno manja nego što je bila kada ograničenje nije postojalo, što utiče na podizanje marginalne korisnosti potrošnje u početnom trenutku. Neto korisnost kupovine nekretnine nakon otplate zajma se povećava, pa uslov marginalne korisnosti važi. Može se zaključiti da ograničenje za leveridž funkcioniše kao transfer korisnosti sa agenta koji manje preferira nekretnine na agenta koji više preferira nekretnine. Geanakoplos u radu pravi osvrt na rast cena nekretnina od 1996. do 2006. On smatra da objašnjenje za rast cena leži u tome što ograničenja za leveridž redukuju cene kolateralnih dobara, a ekspanzija leveridža povećava njihove cene. Promene cena tokom devedesetih do sredine prve dekade dvadeset prvog veka nisu bile pod uticajem iracionalnosti agenata u toj meri u kojoj su bile pod uticajem leveridža.

7.2 Zaduživanje u različitim stanjima sveta

Geanakoplos smatra da je krucijalan faktor za analizu uticaja kolaterala i leveridža na finansijski sistem upravo neizvesnost, pa u model uvodi stanja sveta. U model se uvode dva stanja sveta, jedno koje odgovara pozitivnom ishodu i jedno koje odgovara negativnom ishodu na finansijskom tržištu. Agentima su pripisane verovatnoće koje predstavljaju njihova očekivanja o tome koje će se stanje sveta realizovati u budućnosti. Dato je ugovorno obećanje koje obećava potrošno dobro u budućnosti i daj je kolateralni zahtev u vidu jedne nekretnine.

Jedina razlika između ovog i izvesnog slučaja je da je agent koji više preferira nekretnine siromašniji u stanju sveta u kom se dešava negativan ishod, pa se cene nekretnina smanjuju u tom stanju sveta.

U Arrow - Debreu ravnoteži agent koji više preferira nekretnine prodaje u stanju u kom očekije da će se desiti pozitivan ishod u zamenu za bogatstvo u početnom trenutku da bi mogao da podigne cenu nekretnine do njegove marginalne korisnosti. Agent koji preferira nekretnine pravi transfer bogatstva iz stanja sveta u kom očekuje pozitivan ishod u početni trenutak, a posedovanjem nekretnine takođe pravi transfer iz početnog trenutka u stanje sveta za koje veruje da će doći do negativnog ishoda. Smanjen očekivani prihod zajmodavaca. Bez obzira na to, kada su tržišta kompletno, neće se desiti krah na tržištu nekretnina jer agenti koji preferiraju nekretnine kupuju osiguranje za loše stanje sveta.

Kada je je verovatnoća da će se desiti stanje sveta kom odgovara negativan ishod dovoljno mala, samo tada postoji ravnoteže bez kolaterala.

U ravnoteži sa kolateralima, ako agent koji više preferira nekretnine obeća više nego što nekretina vredi u lošem stanju sveta, tada neće uspeti da izmiri svoje obaveze i nekretnina se konfiskuje. Kada svi agenti tipa koji preferiraju nekretnine ne izmire svoje obaveze u lošem stanju sveta, potrošiće sve svoje zaduženje na nekretnine. Agenti koji preferiraju nekretnine biraju da obećaju više nego što mogu da plate i agenti koji manje preferiraju nekretnine kupuju njihova ugovorna obećanja. Trguje se sa istim ugovorom kao i u izvesnom slučaju bez mogućnosti neizmirivanja obaveza. Cena ugovora pada jer racionalni agenti koji manje preferiraju nekretnine plaćaju manje, jer očekuju loše stanje sveta.

Kada su cene u ravnoteži svaki agent koji manje preferira nekretnine je indiferetan prema kupovini ugovora. Po tim cenama agenti koji preferiraju nekretnine se ponašaju kao i u prethodnim slučajevima. Kako je novac mnogo vredniji agentu koji manje preferira nekretnine u početnom trenutku, agent koji više preferira nekretnine će se zaduživati koliko može, čak i ako to znači da u lošem stanju sveta neće moći da vrati dugove. Neisplaćivanje dugova ne zavidi od verovatnoće dobrog stanja sveta.

Dakle, slobodno tržište ne bira nivoe kolaterala koji eliminišu loše stanje sveta u kom se dugovi ne vraćaju.

7.2.1 Višak volatilnosti

Geanakoplos ističe da se od kraha berza 1929. godine, raspravlja se o tome da niski zahtevi za maržu mogu da povećaju volatilnost cena akcija. Kada postoje loše vesti o akcijama na tržištu dolazi do poziva marže, agenti koji su zaduženi su primorani da učestvuju na berzi sa svojim akcijama, što smanjuje cene akcija još više. Nasuprot tome, u opštoj teoriji ravnoteže, svaki finansijski instrument i roba su na prodaju u svakom trenutku. Ključni korak u kom su dužnici primorani da prodaju kolateral nema posebnu oštrinu.

Korišćenje nekretnina, akcija ili hipotekarnih derivativa kao kolaterala za zajmove čini njihove cene volatilnim. Optimistični ageti koji smatraju da će cene finansijskih instrumenata biti visoke u budućnosti ili da je njihova marginalna korisnost visoka, će biti u mogućnosti da marginalnom kupovinom poseduju mnogo više finansijskih instrumenata nego što bi inače mogli da priušte. Sa lošim vestima za finansijski instrument, postoji redistribucija bogatstva u korist pesimista koji nisu kupovali pri marži. Marginalni kupac akcije je manje optimističan ili manje bogat nego što bi bio da akcije nisu marginalno kupljene i da redistribucija prihoda nije bila toliko drastična. Dakle, pad u ceni je veći nego da akcije nisu marginalno kupljene.

Kada akcija nekretnina može da se kupi i pri tome koristi kao kolateral, agenti tipa koji preferiraju nekretnine mogu da kupe sve akcije nekretnina, podižući cenu sa ravnotežne cene bez kolaterala na Arrow - Debreu ravnotežnu cenu. U lošem stanju sveta, agenti ne uspevaju da izmire svoje dužničke obaveze, sve njihove akcije nekretnina su iskorišćene. Iako kupuju sve akcije nekretnina, mogu neznatno da podignu cene nekretnina.

Kada ne postoji kolateral, agenti tipa koji preferiraju nekretnine mogu da priušte da kupe samo deo akcija nekretnina u početnom trenutku (ako je verovatnoća za negativan ishod mala). Agenti poseduju akcije bez ikakvih dugova. Dakle, kada dođe do loših vesti, ne gube ništa. Mogu da iskoriste svoje bogatstvo da bi kupili preostale akcije nekretnina, što podiže cene. Kada ne postoji leveridž, cene nekretnina nisu ni visoke, ni niske koliko bi bile da se nekretnina koristi kao kolateral. Kada je tržište kompletno, cena nekretnine je jednaka u oba stanja i nije pod uticajem šokova u ekonomiji koji se dešavaju usled promena u bogatstvu agenata koji preferiraju nekretnine.

7.2.2 Endogena nekompletna trzista

Prethodno je u ovom modelu analiziran slučaj kada tržišta nisu kompletna, što uvodi restrikciju da su ugovori nezavisni, pa je leveridž endogena promenljiva. Pretpostavimo da su ponuđeni zavisni ugovori koji isplaćuju u samo jednom od dva stanja sveta, koristeći nekretninu kao kolateral.

Ako se na finansijskom tržištu trguje samo sa ovim ugovorom i ako su isplate regulisane strogim kaznama, tada je alokacija ravnoteže Pareto efikasna. Ako svi ugovori sa kojima se trguje koriste kolateral, tada ugovori ne zavise od kolaterala i kolateral postaje beskoristan. Postoji ograničena ponuda kolaterala, jer se u jednom stanju sveta kolateralna vrednost uopšte ne koristi. Koji god ugovor da je ponuđen, trgovaće se samo sa ugovorima koji daju najvredniju nekretninu kao kolateral u svakom stanju sveta.

Situacija je drugačija ako ista nekretnina može da bude kolateral za nekoliko ugovora, jedan ugovor se isplaćuje isključivo u jednom stanju sveta i drugi ugovor se isplaćuje isključivo u drugom stanju sveta. Ovo ne vodi nužno do rešenja kompletnog tržišta jer je količina novca koja je obećana ograničena kolateralom.

U praksi, jedan kolateral retko ima nekoliko nekorelisanih zajmova vezanih za njega, osim ako su u pitanju velike količine finansijskih instrumenata. Nekretnina može imati dve hipoteke, u slučaju pozitivnog ishoda obe hipoteke su isplaćene u potpunosti dok su u slučaju negativnog ishoda obe ugrožene, jer postoji samo jedna nekretnina.

Nedostatak kolaterala na tržištu nije jednako raspodeljen kod svih ugovora, umesto toga nedostatak kolaterala utiče na to da agenti ne trguju sa većinom ugovora i i skoncentrisani su samo na ekonomične ugovore sa kolateralom.

7.2.3 Troškovi oslobadjanja od hipoteke

Posmatrajmo isti model uz dodatnu pretpostavku da je oslobađanje od hipoteke (*eng. Foreclosure*) veoma skupo. Nekretnina koja se koristi kao kolateral se amortizuje. Kako se kolateral nikad ne konfiskuje u početnom trenutku, zajmodavac kom nije isplaćen dug i koji je konfiskovao nekretninu mora da uloži novčana sredstva za popravku nekretnine. U ovom modelu se podrazumeva da agenti koji preferiraju nekretnine koriste nekretninu kao kolateral, ali je takođe koriste da bi živeli u njoj. Takođe ako je zajam skuplji od tržišne vrednosti nekretnine, zajmodavac, prilikom konfiskovanja nekretnine treba da uloži u nekretninu da bi izjednačio tržišnu vrednost nekretnine sa vrednošću zajma i na taj način popravlja štetu koju ima zbog oslobađanja dužnika od hipoteke.

Pretpostavimo da za svaku novčanu jedinicu za koju zajam prevazilazi tržišnu cenu kolaterala, konfiskator nekretnine treba da plati novčanu jedinicu radi popravke nekretnine i vraćanja nekretnine na stanje u kom može biti prodata po tržišnoj ceni. Iz ovoga sledi da nekretnina za koju važi da je zajam 60% iznad tržišne vrednosti nekretnine, zahteva 60% tržišne vrednosti da bi se popravila šteta oslobađanja od hipoteke. Zajmodavac bi korišćenjem nekretnine povratio samo $\frac{40\%}{160\%} = 25\%$ zajma. Ako su dužnici i zajmodavci svesni gubitaka zbog oslobađanja od hipoteke, postavlja se pitanje da li će bez obzira na ponašanje trgovačkih zajmova čije su ponašanje u stanju da predvide, da dozvole ogromne gubitke.

Geanakoplos ističe u svom modelu da je u ekonomiji u kojoj postoje troškovi oslobađanja od hipoteke, ravnotežni leveridž veliki. bez obzira na verovatnoće agenata.

Kada vlada reguliše leveridhž u početnom trenutku, regulisanje količine zaduženosti smanjuje cene nekretnina i posledično korisnost agenata koji manje preferiraju nekretnine, jer oni poseduju nekretnine u početnom trenutku. S druge strane, korisnost agenata koji ne poseduju nekretnine u početnom trenutku, a koji ih više preferiraju, se povećava. Agenti koji više preferiraju nekretnine su siromašni u početnom trenutku, pa smanjenje cena nekretnina pozitivno utiče na njihovu korisnost.

Kada postoje troškovi oslobađanja od hipoteke, ravnoteža za ugovore se pomera u odnosu na ravnotežu ugovora sa kojima agenti imaju slobodu da postavljaju proizvoljne uslove. Troškovi oslobađanja od hipoteke takođe utiču na to da otplate budu indeksirane cenama nekretnina. Na taj način zajmodavac uspeva da izbegne plaćanje troškova oslobađanja od hipoteke, koji se zasnivaju na amortizaciji nekretnine.

8 Leveridž u binomnim ekonomijama

U ovom poglavlju se iznose rezultati preuzeti iz rada Geanakoplosa i Fostel [7]. Prvi važan rezultat ovog rada je Binomna *No - Default* teorema koja tvrdi da u binomnim ekonomijama sa finansijskim instrumentima koji služe kao kolaterali bilo koja ravnoteža sa stvarnim alokacijama i cenama je jednaka ravnoteži u kojoj ne postoji mogućnost da dužnici ne vrate svoje dugove, odnosno ranije posmatranim ekonomijama sa drastičnim kaznama. Odnosno, kada dužnici ne vrate svoje dugove, to nema uticaj na isplatu ugovora.

Drugi rezultat dobijen u ovom radu je Binomna teorema leveridža, koja daje jednostavnu formulu za izračunavanje leveridža za svaki finansijski instrument u ravnoteži binomne ekonomije u kojoj ne postoji mogućnost da dužnici ne vrate svoje dugove.

Teorema tvrdi da je:

$$\text{Leveridž } = \frac{\text{najgora stopa prinosa}}{\text{bezrizična kamatna stopa}}$$

8.1 Leveridž u jednostavnom modelu duga

8.1.1 Vreme, finansijski instrumenti i investitori

Kao što je dato u ranijim modelima, postoje dva vremenska perioda $t = 0, 1$. Neizvesnost je predstavljena preko stanja sveta $s \in S$. Početni čvor je dat sa $s = 0$, vreme svakog čvora je označeno sa $t(s)$, tako da je $t(0) = 0$, $t(s) = 1$, $\forall s \in S_T$, gde je S_T skup terminalnih čvorova. Dato je jedno u potpunosti potrošno dobro c i jedan finansijski instrument Y koji isplaćuje dividende d_s u jedinicama potrošnog dobra, kao i ranije, u svakom krajnjem stanju sveta $s \in S_T$. Finansijski instrumenti ne donose direktnu korisnost investitorima i isplaćuju svima jednake dividende.

Svaki investitor $h \in H$ je određen svojom funkcijom korisnosti u^h, diskontnim faktorom δ_h i subjektivnom verovatnoćom p_s^h, $\forall s \in S_T$. Funkcija korisnosti $u^h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ je diferencijabilna, konkavna i monotona u svakom stanju sveta $s \in S$. Očekivana korisnost agenta h je data sa

$$U^h = u^h(c_0) + \delta_h \sum_{s \in S_T} p_s^h u^h(c_s)$$

Zaduženje investitora h je označeno sa $e_s^h \in \mathbb{R}_+$ u svakom stanju sveta $s \in S$. Njegovo zaduženje finansijskim instrumentom Y u trenutku $t = 0$ je $y_0^h \in \mathbb{R}_+$. Potrošno dobro je prisutno na tržištu, odnosno

$$\sum_{h \in H} e_0^h > 0, \qquad \sum_{h \in H} (e_s^h + d_s y_0^h) > 0, \quad \forall s \in S_T$$

.

8.1.2 Kolateral i dug

Smatra se da je potrošno dobro merilo cene finansijskog instrumenta. Cena finansijskog instrumenta Y u početnom trenutku $t = 0$ je označena sa π_0. Dužnički ugovor j koji obećava $j > 0$ jedinica potrošnog dobra u svakom krajnjem stanju sveta ima jednu jedinicu finansijskog instrumenta Y kao kolateral. Uslovi ugovora su dati kao uređeni par $(j \cdot \tilde{1}, 1)$. Prva komponenta $j \cdot \tilde{1} \in \mathbb{R}^{S_T}$ je vektor čije su sve koordinate jednake j i čija je dimenzija jednaka broju krajnjih stanja sveta, označava nezavisno ugovorno obećanje. Druga komponenta uređenog para označava jednu jedinicu finansijskog instrumenta Y koja se koristi kao kolateral. Neka je J skup svih takvih dužničkih ugovora.

Cena ugovora j je data sa ρ_j. Investitor može da uzme na zajam ρ_j danas, prodajući dužnički ugovor j u zamenu za obećani iznos j u budućnosti. Neka je

φ_j količina dužničkih ugovora j sa kojima se trguje u $t = 0$. Ne postoji ograničenje za znak φ_j, ako je φ_j veće od nule to znači da agent prodaje $|\varphi_j|$ ugovora i uzima zajam, a ako je negativno to znači da agent kupuje $|\varphi_j|$ ugovora, odnosno daje zajam.

Zajmovi nisu regresivni, odnosno, ako dužnik ne vrati dug, najviše što može da izgubi je kolateral. Stvarna isporuka dužničkog ugovora u stanju sveta $s \in S_T$ je $\min\{j, d_s\}$. Ako je ugovorno obećanje j dovoljno malo, odnosno ako važi $j \leq d_s$ u svakom krajnjem stanju sveta, tada ne postoji verovatnoća da agent ne isplati svoj dug u bilo kom stanju sveta. Kada je $j \leq d_s$ tada cena ugovora definiše bezrizičnu kamatnu stopu

$$(1 + r_j) = \frac{j}{\rho_j}$$

LTV vrednost za dužnički ugovor j je data sa

$$LTV_j = \frac{\rho_j}{\pi_0}$$

Marža M_j dužničkog ugovora j je jednaka $1 - LTV_j$, a leveridž ugovora j je jednak inverznoj vrednosti marže

$$\lambda = \frac{1}{M_j}$$

Prosečna *LTV* vrednost se definiše kao ponderisani prosek tržišne vrednosti po svim dužničkim ugovorima sa kojima se trguje u ravnoteži

$$LTV^Y = \frac{\sum_h \sum_j \max(0, \varphi_j^h)\rho_j}{\sum_h \sum_j \max(0, \varphi_j^h)\pi_0}$$

Razvodnjeni prosek *LTV* vrednosti, u čiji su obračun uključeni i finansijski instrumenti koji se ne mogu koristiti kao kolateral je jednak

$$LTV_0^Y = \frac{\sum_h \sum_j \max(0, \varphi_j^h)\rho_j}{\sum_h y_0^h \pi_0}$$

8.1.3 Budžetski skup

Neka su date cene finansijskog instrumenta i dužničkog ugovora $(\pi_0, (\rho_j)_{j \in J})$. Svaki agent $h \in H$ odlučuje o svojoj potrošnji c_0, o tome koliko će finansijskog instrumenta posedovati y i o trgovanju sa dužničkim ugovorima φ_j u početnom trenutku. Takođe donosi odluku o potrošnji c_s u svakom stanju sveta $s \in S_T$ u cilju maksimizacije svoje korisnosti.

Budžetski skup je u ovom modelu dat kao

$$B^h(\pi, \rho) = \Big\{(c, y, \varphi) \in \mathbb{R}_+^S \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^J :$$

$$(c_0 - e_0^h) + \pi_0(y - y_0^h) \leq \sum_{j \in J} \varphi_j \rho_j$$

$$(c_s - e_s^h) \leq y \cdot d_s - \sum_{j \in J} \varphi_j \min(j, d_s), \forall s \in S_T$$

$$\sum_{j \in J} \max(0, \varphi_j) \leq y\}$$

U početnom trenutku $t = 0$ agent ima na raspolaganju da troši samo sredstva koje je uzeo na zajam, koristeći finansijski instrument kao kolateral. U krajnjem vremenskom trenutku $t = 1$, u svakom stanju sveta, zaduženja potrošnim dobrima mogu biti najviše jednaka razlici dividende i otplate duga. Agenti koji uzimaju zajam moraju da poseduju zahtevani nivo kolaterala u trenutku $t = 0$.

8.1.4 Ravnoteža kolaterala

Ravnoteža kolaterala je skup koji se sastoji od cena finansijskih instrumenata, cena ugovora, individualnih zaduženja potrošnim dobrima, finansijskih instrumenata koje agent poseduje i ugovornih trgovina $((\pi, \rho), (c^h, y^h, \varphi^h)_{h \in H}) \in (\mathbb{R}_+ \times R_+^J) \times (\mathbb{R}^S \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^J)^H$ tako da važi

1. $\sum_{h \in H}(c_0^h - e_0^h) = 0$
2. $\sum_{h \in H}(c_s^h - e_s^h) = \sum_{h \in H} y^h d_s, \forall s \in S_T$
3. $\sum_{h \in H}(y^h - y_0^h) = 0$
4. $\sum_{h \in H} \varphi_j^h = 0, \forall j \in J$
5. $(c^h, y^h, \varphi_j^h) \in B^h(\pi, \rho), \forall h$

$(c, y, \varphi) \in B^h(\pi, \rho) \implies U^h(c) \leq U^h(c^h), \forall h$

Tržište potrošnih dobara je u ravnoteži u svim stanjima sveta. Ravnotežna cena finansijskih instrumenata i ugovornih obećanja se izračunava u trenutku $t = 0$ kada agenti optimizuju svoje budžetske skupove. U [4] je pokazano da pod pretpostavkama datim u ovom modelu ravnoteža kolaterala uvek postoji.

8.2 Binomna *No-Default* teorema

Posmatra se model u kom su data dva stanja sveta u trenutku $t = 1$, odnosno skup stanja sveta je $S = \{0, U, D\}$. Dividenda finansijskog instrumenta Y je označena sa

d_U u stanju sveta koje odgovara pozitivnom ishodu $s = U$, a sa d_D u stanju sveta koje odgovara negativnom ishodu $s = D$ i isplaćuje se u jedinicama potrošnog dobra. Važi da je $0 < d_D < d_U$. Do neizmirivanja dugova u ravnoteži dolazi ako i samo ako se u ravnoteži trguje sa ugovorom j za koji važi da je $j > d_D$.

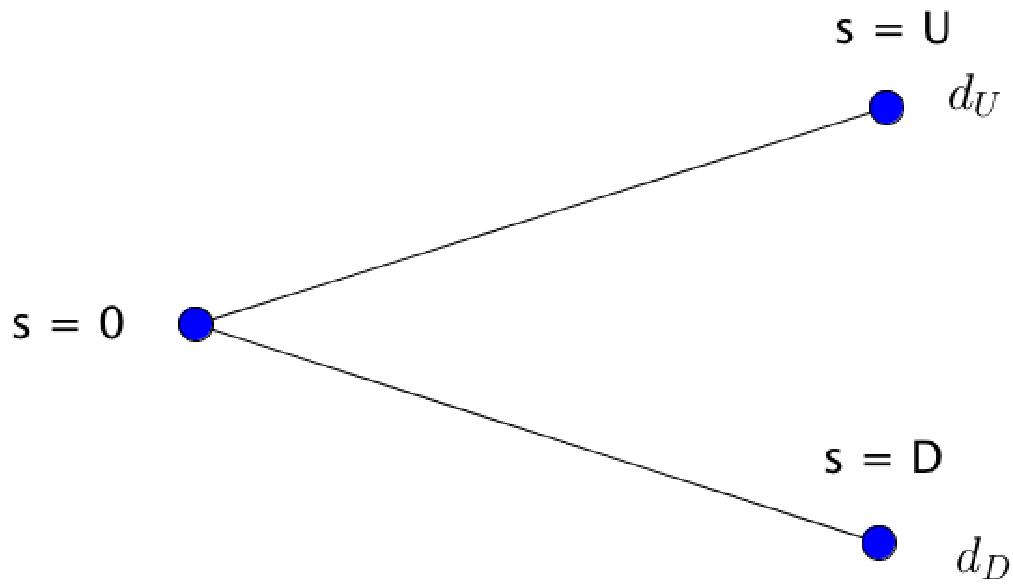
Postoji skup agenata koji vrednuju finansijski instrument više od ostalih agenata, bilo da je to zbog verovatnoće koju pripisuju stanju sveta U, ili da je zbog toga što imaju manju averziju prema riziku, ili zato što imaju velike vrednosti δ^h. Ovi agenti žele da uzmu na zajam što više novca mogu u trenutku $t = 0$, jer važi da za svako $j > j^*$, svaki agent može da uzme više novca $\rho_j > \rho_{j^*}$, prodajući ugovor j.

Bez gubitka opštosti u modelu preuzetom iz [7] jedini dužnički ugovor sa kojim se trguje u ravnoteži je j^*, sa kojim ne postoji šansa da dugovi neće biti vraćeni u ravnoteži.

Binomna *No-Default* teorema Neka postoje dva stanja sveta u vremenskom trenutku $t = 1$. Tada je skup stanja sveta jednak $S = \{0, U, D\}$. Dat je finansijski instrument Y i $\max\min$ dužnički ugovor $j^* = d_D \in J$. Ako je data neka ravnotežna tačka $((\pi, \rho), (c^h, y^h, \varphi^h)_{h \in H})$, može se konstruisati druga ravnotežna tačka $((\pi, \rho), (c^h, \bar{y}^h, \bar{\varphi}^h)_{h \in H})$ sa istim finansijskim instrumentom, cenama i potrošnim dobrima, u kojoj se trguje samo sa ugovorom j^*, odnosno važi da je $\bar{\varphi}^h = 0$ ako je $j \neq j^*$. Pa se ravnoteža za ugovore koji neće biti isplaćeni može smatrati jednakom nuli.

Dokaz. Dokaz je organizovan u tri koraka.

1. **Lema kupastih isplata** (*eng. Payoff Cone Lemma* [7]) Portfolio finansijskih instrumenata i ugovora koje svaki agent h poseduje u ravnoteži ima vektor isplata (w_U^h, w_D^h) koji leži na kupi koja ja pozitivno zakrivljena za $(d_U - j^*, 0)$ i za (j^*, j^*). Isplata Arrow - Debreu hartije od vrednosti u stanju sveta U je jednaka $(d_U - j^*, 0) = (d_U, d_D) - (j^*, j^*)$ i može se dobiti istovremenom kupovinom finansijskog instrumenta i prodajom dužničkog ugovora j^*.

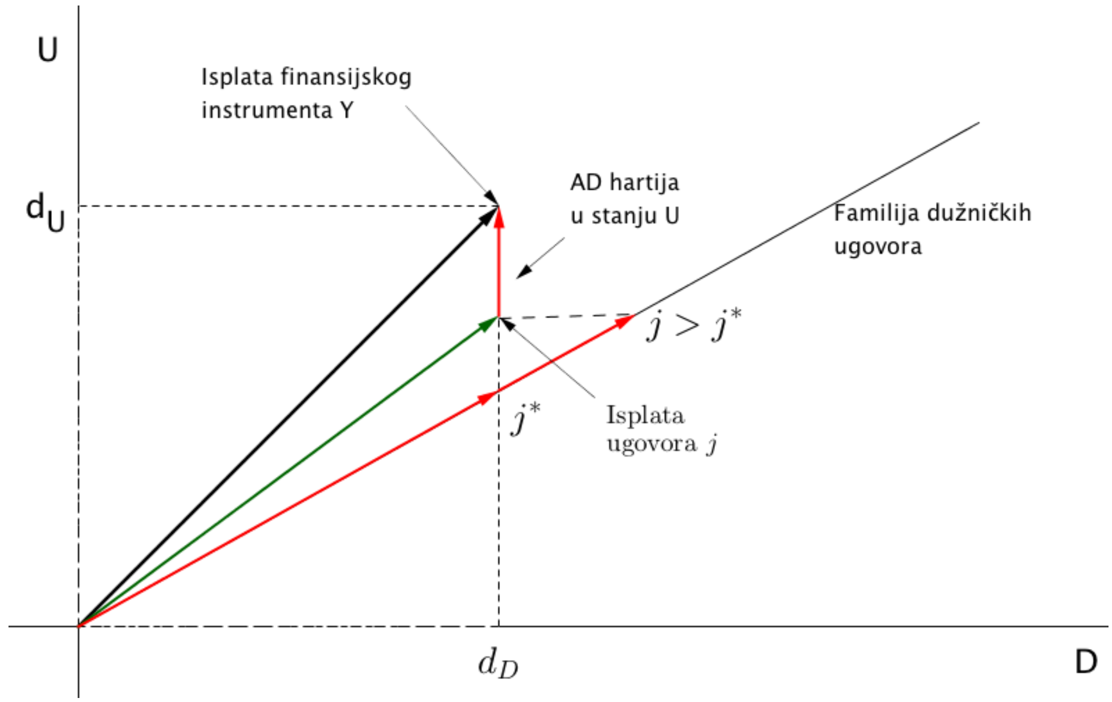


Na slici je prikazana isplata finansijskog instrumenta.

Svaka isplata portfolija (w_U, w_D) je suma isplata pojedinačnih pozicija. Moguće pozicije uključuju dužničke ugovore $j > j^*$, $j = j^*$, $j < j^*$, finansijski instrument i finansijski instrument kupljen pri marži prodajom dužničkog ugovora j. Dužnički ugovor i finansijski instrument u stanju sveta U isporučuju iznos koji je najmanje jednak iznosu isporučenom u stanju D. Isto važi pri kupovini finansijskih instrumenata sa leveridžom. Kupovina finansijskog instrumenta pri marži koristeći neki dužnički ugovor za koji važi da je $d_U > j \geq j^*$ je identična kupovini Arrow - Debreu hartije od vrednosti u stanju sveta U koja isplaćuje $(d_U - j, 0)$.

Arrow - Debreu hartija od vrednosti u stanju sveta U i j^* dužnički ugovor pozitivno zakrivljuju prostor mogućih isplata.

2. **Lema vrednovanja po stanju sveta** (*eng. State Pricing Lemma* [7]) Neka je $a > 0$ cena sintetisane Arrow - Debreu hartije od vrednosti u stanju sveta U (kreirane kupovinom finansijskog instrumenta pomoću ugovora j^* sa leveridžom). Neka je $b = \frac{\rho_{j^*}}{j^* - a}$. Tada ako neki agent h poseduje portfolio koji isporučuje (w_U^h, w_D^h), cena portfolija je $aw_U^h + bw_D^h$.



U koraku (i) se određuju cene po stanjima sveta dve hartije od vrednosti. U koraku (ii) se koristi Lema kupastih isplata da bi se pokazalo da se iste cene po stanjima sveta mogu koristiti radi vrednovanja bilo kog drugog ugovora $j \neq j^*$ sa kojim se trguje u ravnoteži.

(i) Neka je $a = \frac{\pi - \rho_{j^*}}{d_U - j^*}$ i $b = \frac{\rho_{j^*}}{j^* - a}$. Posmatra se dužnički ugovor j^* i isplata finansijskog instrumenta sa slike. Tada je $\rho_{j^*} = aj^* + bj^*$ i $\pi = ad_U + bd_D$.

Važi da je

$$aj^* + bj^* = aj^* + (\frac{\rho_{j^*}}{j^*} - a)j^* = \rho_{j^*}$$

Koristeći definicije za ρ_{j^*}, a i j^* dobija se

$$ad_U + bd_D - \rho_{j^*} = a(d_U - j^*) + b(d_D - j^*) = (\pi - \rho_{j^*}) + 0$$

Stoga je

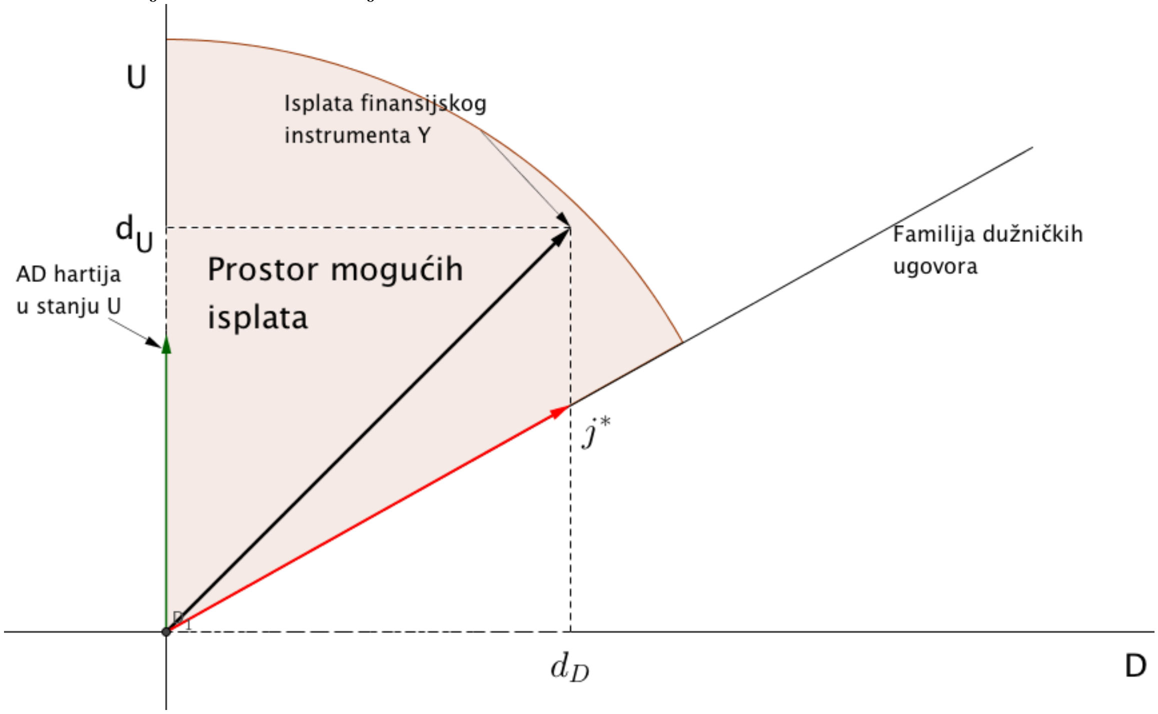
$$ad_U + bd_D = \pi$$

(ii) Pretpostavlja se da se sa dužničkim ugovorom j, za koji važi $j \neq j^* = d_D$, pozitivno trguje u ravnoteži. Tada važi

$$\rho_j = a \cdot \min\{d_U, j\} + b \cdot \min\{j^*, j\}$$

Stvarna isplata ugovora j je data sa $(\min\{d_U, j\}, \min\{j^*, j^*\})$. U slučaju da je $j \leq j^* = d_D$, ugovor u potpunosti isplaćuje u oba stanja sveta, proporcionalno ugovoru j^*. Ako cena j prevazilazi $\rho_{j^*}\frac{j}{j^*} = aj + bj$, kupci ugovora treba da kupe $\frac{j}{j^*}$ jedinica umesto j^* jedinica. Ako je cena ugovora manja od $\rho_{j^*}\frac{j}{j^*} = aj + bj^*$

prodavci ugovora bi trebali da prodaju $\frac{j}{j^*}$ jedinica ugovora umesto j^*, što bi za njih bilo ostvarivo jer zahteva manji kolateral.



Posmatra se slučaj u kom važi $j > j^*$. Prema Lemi kupastih isplata važi da je isporuka ugovora j

$$(\min\{d_U, j\}, \min\{j^*, j\}) = \alpha(d_U - j^*, 0) + \beta(j^*, j^*)$$

gde su $\alpha, \beta \geq 0$. Dakle važi $\alpha(d_U - j^*) + \beta j^* = \min\{d_U, j\}$ i $\beta j^* = \min\{j^*, j^*\}$.
Nijedan kupac ne želi da kupi finansijski instrument osim ako važi

$$\rho_j \leq \alpha a(d_U - j^*) + \beta \rho_{j^*} = a(\alpha(d_U - j^*) + \beta j^*) + b(\beta j^*) =$$

$$= a \cdot \min\{d_U, j\} + b \cdot \min\{j^*, j^*\}$$

Svaki prodavac ugovornog obećanja j ulazi u dvostruku trgovinu. Prodavac kupuje finansijski instrument i koristi ga kao kolateral, pri čemu istovremeno prodaje ugovor j, po ceni $\pi - \rho_j$. Kako svaki ugovor $j > d_U$ isplaćuje na isti način kao i ugovor $j = d_U$ u oba stanja sveta, bez gubitka opštosti se analiza modela može nastaviti uz pretpostavku da je $d_D < j \leq d_U$. Svaki agent koji prodaje takav ugovor, posedujući zahtevani kolateral, dobija $d_U - j$ u stanju U i ne dobija ništa u stanju D. Isti prinos bi imao da je zadržao $\frac{d_U - j}{d_U - j^*} < 1$ jedinica finansijskog instrumenta, a prodao $\frac{d_U - j}{d_U - j^*} < 1$ jedinica ugovora j^*, po ceni $\frac{(\pi - \rho_{j^*})(d_U - j)}{d_U - j^*}$. Agent bi trebao da postupi po opisanom postupku osim ako važi da je

$$\pi - \rho_j \leq \frac{(\pi - \rho_{j^*})(d_U - j)}{d_U - j^*}$$

$$\pi - \rho_j \leq \frac{((ad_U + bj^*) - (a+b)j^*)(d_U - j)}{d_U - j^*}$$

$$\pi - \rho_j \leq \frac{a(d_U - j^*)(d_U - j)}{d_U - j^*} = a(d_U - j)$$

$$ad_U + bj^* - \rho_{j^*} \leq a(d_U - j)$$

$$aj + bj^* \leq \rho_j$$

$$a \cdot \min\{d_U, j\} + b \cdot \min\{j^*, j\} \leq \rho_j$$

Iz ovoga sledi da je $\rho_j = a \cdot \min\{d_U, j\} + b \cdot \min\{j^*, j\}$
3. Konstrukcija ravnoteže u kojoj ne postoji mogućnost neisplaćivanja duga
Definiše se

$$(w_U^h, w_d^h) = y^h(d_U, d_D) - \sum_j (\min(j, d_U), \min(j, d_D))\varphi_j^h$$

$$\bar{y}^h = \frac{w_U^h - w_D^h}{d_U - d_D}$$

$$\bar{\varphi}_{j^*}^h = \frac{\bar{y}^h d_D - w_D^h}{j^*} = \bar{y}^h - \frac{w_D^h}{j^*}$$

Ako se u originalnoj ravnoteži, y^h zameni sa $\bar{y}^h$, a φ_j^h se zameni sa 0 kada je $j \neq j^*$, a sa $\bar{\varphi}_{j^*}^h$ kada je $j = j^*$ i sve cene i individualni izbori su isti, tada i dalje postoji ravnoteža.

Agenti maksimiziraju korisnost u novoj ravnoteži. Neka je $\bar{\varphi}_{j^*}^h \leq \bar{y}^h$, tako da izbori portfolija zadovoljavaju kolateralna ograničenja.

Nova isplata u stanju D je ista kao u originalnoj ravnoteži

$$\bar{y}^h d_D - \bar{\varphi}_{j^*}^h j^* = w_D^h$$

isto važi za isplate u stanju U

$$\bar{y}^h d_U - \bar{\varphi}_{j^*}^h j^* = \bar{y}^h(d_U - d_D) = (w_U^h - w_D^h) + w_D^h = w_U^h$$

Stoga, izbor portfolija $(\bar{y}^h, \bar{\varphi})$, daje istu isplatu (w_U^h, w^D). Iz lema, novi konstruisani portfolio mora jednako da košta. Dakle, svaki agent je optimizovao svoj portfolio.

Sumiranjem po indvidualnim agentima se dobija

$$\sum_h \bar{y}^h(d_U, d_D) - \sum_h \bar{\varphi}_{j^*}^h (j^*, j^*) =$$

$$\sum_h (w_U^h, w_D^h) = \sum_h y^h(d_U, d_D) - \sum_h \sum_j \varphi_j^h(\min(j, d_U), min(j, d_D)) = \sum_h y^h(d_U, d_D)$$

Prva jednakost sledi iz prethodne dve formule za isplate, a druga jednakost je definicija isplata u originalnoj ravnoteži. Ravnoteža sledi iz $\sum_h \varphi_j^h = 0$, što važi u originalnoj ravnoteži za ugovor j.

Stoga, važi

$$\sum_h (\bar{y}^h - y^h)(d_U, d_D) - \sum_h \bar{\varphi}_{j^*}^h(j^*, j^*) = 0$$

Zbog linarne nezavisnosti vektora (d_U, d_D) i (j^*, j^*) može se zaključiti da je

$$\sum_h \bar{y}^h = \sum_h y^h$$

$$\sum_h \bar{\varphi}_{j^*}^h = 0$$

$\square$

Posledica [7] Neka važi da je $S = \{0, U, D\}$, dat je finansijski instrument Y i max min ugovor $j^* = d_D \in J$. Ako je data bilo koja ravnoteža $((\pi, \rho), (c^h, y^h, \varphi^h)_{h \in H})$, može se konstruisati druga ravnoteža $((\pi, \rho), (c^h, \bar{y}^h, \bar{\varphi}^h)_{h \in H})$ sa istim finansijskim instrumentom, cenama, potrošnim dobrima i cenom ugovora j^*, tako da se svaki finansijski instrument i ugovor vrednuju cenama stanja $a > 0$ i $b > 0$, koje su jedinstveno određene ako je $d_U \neq d_D$. Odnosno, $\pi = a \cdot d_U + b \cdot d_D$ i za svako $j \in J$, $\bar{\rho}_j = a \cdot \min\{d_U, j\} + b \cdot \min\{d_D, j\}$. Takođe važi da je j^* jedini dužnički ugovor sa kojim se trguje, $\bar{\varphi}^h = 0$ ako je $j \neq j^*$.

Jedinstvena *No-Default* teorema(*eng. Unique No-Default Theorem* [7]) Neka se $\epsilon > 0$ jedinica kolaterala gubi po svakoj jedinici finansijskog instrumenta koji se koristi kao kolateral. Tada se u svakoj ravnoteži trguje samo sa ugovorom j^*.

Ova teorema pokazuje da ako se modelu doda mali trošak povezan sa korišćenjem kolaterala, *no default* ravnoteža je jedinstvena. Ova pretpostavka je realistična, a primeri toga su razne provizije banaka, advokata itd.

8.3 Binomna teorema leveridža

Binomna teorema leveridža (*eng. Binomial Leverage Theorem* [7]) Neka je $S = \{0, U, D\}$, Y je finansijski instrument i max min dužnički ugovor je $j^* = d_D \in J$. Ravnoteža LTV vrednosti je data kao

$$\frac{\rho_{j^*}}{\pi} = \frac{d_D/(1 + r_{j^*})}{\pi} = \frac{d_D/\pi}{1 + r_{j^*}}$$

Dokaz. Dokaz sledi iz Binomne *No-Default* teoreme. Kako važi da se u ravnoteži trguje samo sa j^* sledi

$$\frac{\rho_{j^*}}{\pi} = \frac{d_D/(1 + r_{j^*})}{\pi} = \frac{d_D/\pi}{1 + r_{j^*}}$$

□

Binomna teorema leveridža obezbeđuje jednostavno predviđanje o ravnotežnom leveridžu. Prema teoremi, ravnoteža LTV vrednosti za familiju nezavisnih dužničkih ugovora je odnos prinosa finansijskog instrumenta u najgorem slučaju i bezrizične kamatne stope.

$$LTV = \frac{d_D/(1 + r)}{\pi} = \frac{d_D/\pi}{1 + r}$$

Ravnoteža leveridža zavisi od trenutne cene finansijskog instrumenta i buduće vrednosti finansijskog instrumenta, ali je nezavisna od korisnosti i zaduženja agenata. Teorema pokazuje da je u statičnom binomnom modelu leveridž endogeno određen u ravnoteži sa pravilom da je $VaR = 0$.

Formula data u teoremi daje objašnjenje koji finansijski instrumenti lakše podležu leveridžu. Ako je data kolekcija finansijskih instrumenata sa istom cenom, finansijski instrumenti čija je buduća vrednost najveća u lošem stanju sveta su najviše podležu leveridžu. Formula takođe objašnjava zbog čega je visok leveridž povezan sa niskom kamatnom stopom.

Kolateralizovani zajmovi uvek spadaju u dve kategorije. U prvoj kategoriji zajmova, dužnik ne koristi sve svoje finansijske instrumente kao kolateral za zajmove. U tom slučaju, dužnik neće želeti dodatno da pozajmljuje po trenutnoj kamatnoj stopi, čak i ako bi mogao da uzme zajam bez kolaterala. Ako su svi agenti koji uzimaju zajmove takvi da ne žele dodatno da se zadužuju, tada kamatna stopa reguliše tržište zajmova i ne postoji pretnja da agenti neće vratiti dugove. Druga kategorija zajmova podrazumeva situaciju kada neki agenti daju sve svoje finansijske instrumente kao kolateral. U ovom slučaju, pri oskudici kolaterala na tržištu, ravnoteža na tržištu zajmova zavisi od količine neizmirenih dugova.

Kada svi finansijski instrumenti spadaju u prvu opisanu kategoriju, tada je ukupan dug u ekonomiji u potpunosti određen sa tražnjom za zajmovima. Kada svi finansijski instrumenti i agenti spadaju u drugu kategoriju, smatra se da je dug u ekonomiji određen ponudom kredita, odnosno maksimalnim kolateralnim kapacitetom finansijskih instrumenata.

8.4 Opšti binomni model

U model se uvode sledeća proširenja:

1. Ugovori čiji je rok dospeća jedan period su proizvoljni

Prethodno je važila pretpostavka da su ugovori nezavisni dužnički ugovori. Sada su dozvoljena proizvoljna ugovorna obećanja (j_U, j_D) s tim da je max min ugovorno obećanje (ξ_{j_U}, ξ_{j_D}) gde je je $\xi = \max\{\xi \in \mathbb{R}_+ : \xi(j_U, j_D) \leq (d_U, d_D)\}$ takođe dostupno.

2. Postoji više ugovora čiji je rok dospeća jedan period

Ne samo da su ugovorna obećanja zavisna, nego postoji mnogo različitih nekolinearnih tipova ugovornih obećanja koja koegzistiraju.

3. Postoji više finansijskih instrumenata

Dozvoljeno je da postoje različite vrste kolaterala istovremeno i svaki kolateral može biti kolateral za više nekolinearnih ugovornih obećanja.

4. Postoji proizvodnja i trajnost dobara

Dozvoljava se da potrošna dobra budu trajna, ali ne savršeno trajna. Postoji proizvodnja tokom perioda. Kolateral ne može da se koristi kao sirovina za proizvodnju.

5. Postoji više potrošnih dobara

Za razliku od prethodnog modela, u svakom stanju sveta postoji više od jednog potrošnog dobra.

6. Postoji više vremenskih perioda

Model se proširuje u dinamički model sa proizvoljnim konačnim brojem vremenskih perioda.

7. Postoji više stanja sveta

U svakom vremenskom trenutku postoji više stanja sveta, u kojima uređeni par isplate finansijskog instrumenta i ugovornog obećanja ima najviše dve vrednosti.

8.4.1 Model

Neizvesnost je prezentovana postojanjem različitih stanja sveta u konačnom drvetu odlučivanja $s \in S$ koje uključuje početni čvor $s = 0$ i terminalne čvorove $s \in S_T$. Kao i ranije, vreme čvora je označeno sa $t(s)$ tako da je $t(0) = 0$. Svako stanje sveta $s \neq 0$ ima neposrednog prethodnika i svaki čvor $s \in S \setminus S_T$ ima skup neposrednih sledbenika $S(s)$. Dat je skup $L = \{1, \ldots, L\}$ potrošnih dobara l, skup $K = \{1, \ldots, K\}$ finansijskih instrumenata k koji isplaćuju dividende $d_s^k \in \mathbb{R}_+^L$ u potrošnim dobrima u svakom stanju $s \in S$. Dividende d_s^k su raspoređene po investitorima koji su posedovali finansijski instrument u s'. Sa $q_s \in \mathbb{R}_+^L$ je dat vektor potrošnih dobara u stanju s, gde je $\pi_s \in \mathbb{R}_+^K$ cena instrumenta u stanju s.

Svaki investitor $h \in H$ je okarakterisan sa funkcijom korisnosti u^h, diskontnim faktorom δ_h i subjektivnim verovatnoćama p_s^h. Važi da je funkcija korisnosti $u^h : \mathbb{R}_+^L \to \mathbb{R}$ diferencijabilna, konkavna i slabo monotona u svakom stanju sveta. Zaduženja agenta h u jedinicama potrošnog dobra su označena sa $e_s^h \in \mathbb{R}_+^L$ u svakom stanju sveta. Zaduženja agenta u finansijskim instrumentima u $t = 0$ su označena sa $y_0^h \in \mathbb{R}_+^K$. Sva potrošna dobra su prisutna na finansijskom tržištu

$$\sum_{h \in H} (e_s^h + d_s y_0^h) \gg 0, \quad \forall s \in S$$

Data su trajna potrošna dobra i proizvodnja tokom vremenskog perioda. Za svako $s \in S \setminus \{0\}$ neka je $F_s^h : \mathbb{R}_+^L \to \mathbb{R}_+^L$ konkavna funkcija proizvodnje tokom vremenskog perioda koja povezuje vektor potrošnih dobara u stanju s' sa vektorom potrošnih dobara u stanju s. Za razliku od potrošnih dobara, svi finansijski instrumenti su savršeno trajni.

Za svako stanje $s \in S$, neka je $Z_s^h \subset \mathbb{R}^{L+J}$ skup svih ostvarivih proizvodnja tokom vremenskog perioda za agenta h u stanju sveta s. Potrošna dobra mogu da budu sirovine ili gotovi proizvodi. Sirovine su označene kao negativne komponente $z_i < 0$ vektora $z \in Z^h$, a gotovi prozivodi su pozitivne komponente $z_i > 0$.

Ugovor $j \in J$ obećava vektor $j_s \in \mathbb{R}_+^L$ potrošnih dobara u svakom stanju sveta s. Svaki ugovor j ima stanje u kom je izdat $s(j)$ i finansijski instrument koji se koristi kao kolateral $k(j)$. Skup ugovora izdatih u stanju sveta s čiji je kolateral instrument k je označen sa $J_s^k \subset J$. Neka su dati ugovori čiji je rok dospeća jedan period. Svaki ugovor $j \in J_s^k$ isporučuje samo u neposrednom sledećem stanju sveta od s, odnosno $j_{s^*} = 0$, osim ako je $s^* \in S(s)$. Ugovori su definisani sa svojim isplatama u svakom neposrednom sledećem stanju sveta. Definisanje ugovora na ovaj način omogućava da ugovorna obećanja imaju različite korpe dobara u različitim stanjima sveta. Važi da je

$$J_s = \bigcup_k J_s^k \quad \text{i} \quad J = \bigcup_{s \in S \setminus S_T} J_s$$

Cena ugovora j u stanju $s(j)$ je $\rho_{s(j)j}$. Investitor može da uzme na zajam $\rho_{s(j)j}$ u stanju $s(j)$ prodajom ugovora j, obećavajući $j_{s^*} \in \mathbb{R}_+^L$ u svakom stanju $s^* \in S(s(j))$, ako poseduje jednu jedinicu instrumenta $k(j)$ kao kolateral.

Kako je maksimalan iznos koji agent koji uzima zajam može da izgubi, ako ne ispoštuje ugovor, njegov kolateral, stvarna isplata ugovora j u stanjima $s^* \in S(s(j))$ je

$$\min\{q_{s^*} \cdot j_{s^*}, \pi_{s^* k(j)} + q_{s^*} \cdot d_{s^*}^k\}$$

LTV vrednost za ugovor j u stanju sveta $s(j)$ je data sa

$$LTV_j = \frac{\rho_{s(j)j}}{\pi_{s(j)k}}$$

Marža M_j za ugovor j u stanju sveta $s(j)$ je jednaka $1 - LTV_j$. Leveridž za ugovor j u stanju sveta $s(j)$ je inverzna vrednost marže

$$\lambda = \frac{1}{1 - \rho_{s(j)j}/\pi_{s(j)k}}$$

i prati monotonost LTV_j vrednosti.

Prosečna LTV vrednost za finansijski instrument k se defniše kao ponderisana tržišna vrednost LTV_j, po svim dužničkim ugovorima sa kojima se trguje u ravnoteži koji koriste k kao kolateral, definiše se i razvodnjeni prosek LTV vrednosti, LTV_0^k, koja uključuje i finansijske instrumente bez leveridža

$$LTV^k = \frac{\sum_h \sum_j \max(0, \varphi_j^h)\rho_{s(j)j}}{\sum_h \sum_j \max(0, \varphi_j^h)\pi_{s(j)k}} \geq \frac{\sum_h \sum_j \max(0, \varphi_j^h)\pi_{s(j)j}}{\sum_h y_0^h \cdot \pi_{s(j)k}} = LTV_0^k.$$

Uz date cene za potrošna dobra, finansijske instrumente, cene ugovora, (q, π, ρ), svaki agent $h \in H$ bira proizvodnju tokom perioda i finansijske instrumente $z = (z_c, z_y)$, potrošnju c, pozicije finansijskih instrumenata y, ugovorne prodaje i kupovine φ u cilju maksimizacije korisnosti. Budžetski skup se definiše kao

$$B^h(q, \pi, \rho) = \big\{(z_c, z_y, c, y, \varphi) \in \mathbb{R}^{SL} \times \mathbb{R}^{SK} \times \mathbb{R}_+^{SL} \times \mathbb{R}_+^{SK} \times (\mathbb{R}^{J_s})_{s \in S \setminus S_T} : \forall s$$

$$q_s \cdot (c_s - e_s^h - F_s^h(c_{s'}) - z_{sc}) + \pi_s \cdot (y_s - y_{s'} - z_{sy}) \leq$$

$$q_s \cdot \sum_{k \in K} d_s^k y_{s'k} + \sum_{j \in J_s} \varphi_j \rho_j - \sum_{k \in K} \sum_{j \in J_{s'}^k} \varphi_j \min\{q_s \cdot j_s, \pi_{sk} + q_s \cdot d_s^k\};$$

$$z_s \in Z_s^h;$$

$$\sum_{j \in J_s^k} \max(0, \varphi_j) \leq y_s^k, \forall k\big\}.$$

Ravnoteža kolaterala u ovoj ekonomiji je skup cena potrošnih dobara, cena finansijskih instrumenata i cena ugovora, proizvodnje i odluka o potrošnji i finansijskih odluka o finansijskim instrumentima i ugovornih pozicija $((q, \pi, \rho), (z^h, c^h, y^h, \varphi^h)_{h \in H}) \in (\mathbb{R}_+^L)_{s \in S} \times (\mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^{J_s})_{s \in S \setminus S_T} \times (\mathbb{R}^{S(L+K)} \times \mathbb{R}_+^{SL} \times \mathbb{R}_+^{SK} \times (\mathbb{R}^{J_s})_{s \in S \setminus S_T})^H$ tako da

1. $\sum_{h \in H}(c_s^h - e_s^h - F_s^h(c_{s'}) - z_{sc}^h) = \sum_{h \in H} \sum_{k \in K} y_{s'k}^h d_s^k, \quad \forall s.$
2. $\sum_{h \in H}(y_s^h - y_{s'}^h - z_{sy}^h) = 0, \quad \forall s.$
3. $\sum_{h \in H} \varphi_j^h = 0, \forall j \in J_s, \forall s.$
4. $(z^h, c^h, y^h, \varphi^h) \in B^h(q, \pi, \rho), \forall h$
   $(z, c, y, \varphi) \in B^h(q, \pi, \rho) \implies U^(c) \leq U^h(c^h), \forall h.$

8.4.2 Opšta *No-Default* ravnoteža

Binomna *No-Default* teorema Neka je S binomno drvo odlučivanja, odnosno $S(s) = \{sU, sD\}$ za svako $s \in S \setminus S_T$. Neka su svi finansijski instrumenti takvi da je jedina korisnost koju agenti imaju od njih dividenda. Neka svaki ugovor ima rok dospeća jedan period. Neka je $((q, \pi, \rho), (z^h, c^h, y^h, \varphi^h)_{h \in H})$ ravnotežna tačka. Neka je za svako stanje sveta $s \in S \setminus S_T$, svaki finansijski instrument $k \in K$ i ugovor $j \in J^{k_s}$ max min obećanje $(\xi_{j_{sU}}, \xi_{j_{sD}})$ dostupno da se sa njim trguje, gde je $\xi = \max\{\xi \in \mathbb{R}_+ : \xi(q_{sU} \cdot j_{sU}, q_{sD} \cdot j_{sD}) \leq (\pi_{sUk} + q_{sU} \cdot d_{sU}, \pi_{sDk} + q_{sD} \cdot d_{sD})\}$. Može se konstruisati nova ravnoteža $((q, \pi, \rho), (z^h, c^h, \bar{y}^h, \bar{\varphi}^h)_{h \in H})$ sa istim cenama potrošnih dobara, finansijskih instrumenata i ugovora, sa istom proizvodnjom i izborima u kojoj se trguje samo sa max min ugovorima.

8.5 Primeri

8.5.1 Binomni CAPM (Primeri su dati po uzoru na primere iz [7])

Data su dva primera binomne ekonomije sa jednim finansijskim instrumentom u kom važe *No-Default* teorema, Teorema leveridža i Posledica vrednovanja po stanjima sveta.

Neka je dato jedno u potpunosti potrošno dobro i jedan finansijski instrument koji isplaćuje dividende $d_U > d_D$ u potrošnom dobru. Neka su dati investitori sa racionalnim očekivanjima koji sa rastom rizika očekuju veći prinos $h = A, B$, okarakterisani sa svojim očekivanim korisnostima

$$U^h = u^h(c_0) + \sum_{s \in S_T} p_s u^h(c_s)$$

gde je $u^h = c_s - \frac{1}{2}\alpha^h c_s^2$, $s \in \{0, U, D\}$. Agenti ne diskontuju u budućnosti i poseduju početna zaduženja u finansijskim instrumentima y_0^h, $h = A, B$. Takođe poseduju zaduženja potrošnih dobara u svakom stanju e_s^h, $\forall s, h = A, B$. Pretpostavlja se da su sva ugovorna obećanja u obliku (j, j), gde je $j \in J$. Svaki ugovor ima jednu jedinicu finansijskog instrumenta kao kolateral. Važi da su zajmovi nerekurzivni, tako da agenti nikad neće isporučiti više od vrednosti kolaterala.

Primeri bi zadovoljili sve klasične CAPM pretpostavke, uz pretpostavku da agenti uvek ispunjavaju svoja ugovorna obećanja bez potrebe za kolateralom.

Primer: CAPM sa višestrukim ravnotežama Neka su početna zaduženja agenata finansijskim instrumentom $y_0^A = 1$, $y_0^B = 3$. Neka su zaduženja potrošnim dobrima $e^A = (e_0^A, (e_U^A, e_D^A)) = (1, (1, 5))$ i $e^B = (e_0^B, (e_U^B, e_D^B)) = (3, (5, 5))$. Parametri korisnosti su dati sa $p_U = p_D = 0.5$ i $\alpha^A = 0.1$ i $\alpha^B = 0.1$. Isplate finansijskih instrumenata su date sa $d_U = 1$, a $d_D = 0.3$. Agenti A preferiraju da kupe Arrow - Debreu hartije od vrednosti u stanju sveta U, a prodaju Arrow - Debreu u stanju D. Agenti su ograničeni restrikcijom nezavisnih zajmova (j, j).

Prema Binomnoj *No-Default* teoremi ravnoteža se traži samo za max min ugovorno obećanje $j^* = 0.2$ za koje ne postoji mogućnost da agenti ne vrate svoje dugove.

Da bi se pronašla ravnoteža potrebno je rešiti sledeći sistem jednačina. Prva jednačina je uslov prvog reda za davanje zajmova koji odgovara investitoru koji ima averziju prema riziku

$$\rho = \frac{q_U(1-\alpha^A c_U^A)d_D + q_D(1-\alpha^A c_D^A)d_D}{1-\alpha^A c_0^A}$$

Druga jednačina je uslov prvog reda za tolerantnog investitora za kupovinu finansijskog instrumenta pomoću max min ugovornog obećanja.

$$\pi - \rho = \frac{q_U(1-\alpha^T c_U^T)(d_U - d_D) + q_D(1-\alpha^T c_D^T)(d_D - d_D)}{1-\alpha^T c_0^T}$$

Treća jednakost je uslov prvog reda za investitora koji ima averziju prema riziku za posedovanje finansijskog instrumenta

$$\pi = \frac{p_U(1-\alpha^A c_U^A)d_U + p_D(1-\alpha^A c_D^A)d_U}{1-\alpha^A c_0^A}$$

U ravnoteži je cena finansijskog instrumenta $\pi = 0.3778$, cena ugovora je $\rho_{j^*} = 0.1278$, cene vrednovanja po stanju sveta su $a = \frac{\pi-\rho_{j^*}}{d_U-j^*} = 0.3125$ i $b = \frac{\rho_{j^*}}{j^*} - a = 0.3264$, a leveridž, odnosno LTV vrednost je $LTV_{j^*} = 0.3382$.

Agenti A kupuju najviše što mogu finansijskog instrumenta $y^A = 3.7763$ i koriste svoje instrumente kao kolateral da bi prodali max min ugovor, obećavajući $0.2 \cdot 3.7763$ u oba stanja sveta. Agenti B prodaju što više mogu finansijskih instrumenata i daju zajmove agentima A, pa je $y^B = 0.2237$. Potrošnja za agente u $s = 0$ je $c_0^A = 0.4337$ i $c_0^B = 3.4663$, u stanju $s = U$ je $c_U^A = 4.0211$ i $c_U^B = 5.9789$, a u stanju sveta $s = D$ je $c_D^A = 5$ i $c_D^B = 5.80$.

Prema Binomnoj posledici vrednovanja po stanjima sveta, svi finansijski instrumenti $j \neq j^*$ kao i $j = j^*$ se mogu vrednovati cenama stanja $a = 0.31.25$ i $b = 0.3264$. Prema *No-Default* teoremi nema potrebe da se posmatra trgovanje sa drugim ugovorima za koje važi $j \neq j^*$. Tačno je da agenti ne žele da trguju sa ovim ugovorom, pri cenama a i b. Svaki agent koji se zadužuje bira da proda isti max min ugovor, stoga su zaduženja po finansijskom instrumentu i ugovoru ista i u ovom slučaju. Odnosno, cena finansijskog instrumenta je $\pi = 0.3778$, ugovor je jednak $j = 0.2447$, cena ugovora $\rho_j = 0.1418$, a $LTV_j = 0.3753$.

Ravnoteža je esencijalno jedinstvena ali nije strogo jedinstvena. Postoji druga ravnoteža u kojoj važi da agent A uzima zajam, prodajući $j = 0.2447 > j^* = 0.2$. U ravnoteži u kojoj postoji mogućnost da agenti ne vrate svoje dugove, leveridž je mnogo veći. Agenti uzimaju više zajmova. Binomna *No-Default* teorema tvrdi da su u obe ravnoteže cene potrošnih dobara, finansijskih instrumenata i ugovora iste. Tako da je neizmirivanje dugova u suštini nevažno.

Na osnovu ove dve teoreme se može zaključiti da ne postoji neodređenost oko duga u ravnoteži. Bez obzira na to, leveridž se ne može redukovati ispod nivoa j^* ugovora.

No-Default teorema u ovom slučaju važi. Obe kolateralne ravnoteže se razlikuju od Arrow - Debreu ravnoteže i klasične CAPM ravnoteže. U Arrow - Debreu ravnoteži je cena finansijskog instrumenta $\pi = 0.3700$, cene po stanjima sveta su 0.3125 i 0.2875. Potrošnja u $s = 0$ je $c_0^A = 0.5338$ i $c_0^B = 3.4662$, u stanju $s = U$ je $c_U^A = 4.08$ i $c_U^B = 5.92$, u stanju sveta $s = D$ je $c_D^A = 4.5569$ i $c_D^B = 6.2431$.

Tržišni portfolio za agenta A je jednak $r_M = 0.5916$, a portfolio obveznica $r_f = 1.8328$, za agenta B je $r_M = 0.4084$, a $r_f = -1.8328$.

Cene po stanjima sveta u ravnoteži sa kolateralima se razlikuju od cena po stanjima sveta u Arrow-Debreu ravnoteži. Cena finansijskog instrumenta na kompletnom tržištu je malo niža od cene u ravnoteži sa kolateralima. Agregatno zaduženje investitora u tržišnom portfoliju je $(10, 10.8)$, a u bezrizičnoj aktivi je $(1, 1)$.

Primer: Jedinstvena CAPM ravnoteža

Posmatra se isti CAPM model, osim što agenti poseduju jedan finansijski instrument $y_0^h = 1$, $h = A, B$. Neka su zaduženje potrošnim dobrima, dividende i parametri korisnosti isti kao u prethodnom primeru.

U ravnoteži sa kolateralima je cena finansijskog instrumenta $\pi = 0.4572$, cene po stanjima sveta su $a = 0.4027$ i $b = 0.2725$. Cena ugovora je $\rho_{j^*} = 0.1350$. Leveridž je $LTV_{j^*} = 0.2952$.

Alokacija za finansijske instrumente je 2 za agenta A i 0 za agenta B. Alokacije ugovora su 2 i -2 za agente A i B, respektivno. Potrošnje u stanju sveta $s = 0$ su 0.8122 i 3.1872, u stanju $s = U$ su 2.6 i 5.4, u stanju sveta $s = D$ su 5 i 5.4 za agente A i B, respektivno.

U ravnoteži sa kolateralima agenti A kupuju sve finansijske instrumente koji postoje u ekonomiji i koriste ih kao kolateral, zadužujući se sa $\max\min$ ugovorom. Agenti B prodaju sve svoje finansijske instrumente i daju zajmove.

Za razliku od prethodnog primera, *no-default* ravnoteža je jedinstvena. Nije moguće pronaći neku drugu ravnotežu koja uključuje mogućnost da agenti ne vrate svoje dugove, sa dužnicima koji daju velika ugovorna obećanja, jer nema dovoljno kolaterala u ekonomiji. Kao u prethodnom primeru, kolateralna ravnoteža se ne podudara sa ravnotežom na kompletnom tržištu.

U Arrow - Debreu ravnoteži je cena finansijskog instrumenta $\pi = 0.4350$, cene po stanjima sveta su 0.3750 i 0.3. Potrošnja po stanjima sveta za agenta A je 0.8024 u stanju sveta $s = 0$, 3.1018 u stanju sveta $s = U$ i 4.4814 u stanju $s = D$. Potrošnja po stanjima sveta za agenta B je data 3.1976 u $s = 0$, 4.8982 u stanju sveta $s = U$ i 5.9186 u stanju sveta $s = D$.

Tržišni portfolio za agenta A je $r_M = 0.5749$, a portfolio obveznica $r_f = 1.4970$. Za agenta B važi $r_M = 0.4251$ i $r_f = -1.4970$.

9 Zaključak

Tokom poslednjih deset godina Džon Geanakoplosa je razio važnu teoriju vrednovanja finansijskih instrumenata, leveridža i kolaterala. Konvencionalni modeli vrednovanja finansijskih instrumenata su koristili isti okvir koji nije mogao da objasni krize. Geanakoplosova teorija je značajna za objašnjavanje krize u državama u kojim nekretnine imaju važnu ulogu. Geanakoplos je bio začetnik teorije i tokom dugog niza godina jedini zagovornik ove teorije. Pre krize nekretnina u SAD-u, javnost i literatura su bili skoncentrisani na ponašanje kamatnih stopa i pronalazili objašnjenje za krizu u tome. Nakon krize su teoretičari uvideli da Geanakoplosova teorija zaista objašnjava krizu, pa sada postoji značajan porast u literaturi na ovu temu.

Geanakoplos je skrenuo pažnju teoretičara da u srcu problema krize u stvari leže kolaterali i leveridž i dao mnoge predloge kako da se ciklus leveridža ne samo ublaži, nego i spreči u korenu. Esencijalno, ova teorija ističe koliko negativnih posledica može da ima kada tržište samo određuje leveridž. Javnost je ranije uvidela da kada ne postoji nikakva regulacija kamatnih stopa, tada dolazi do krize. Iako je inicijalno delovalo da kamatne stope jesu lice i naličje problema, regulacija kamatnih stopa nije uspela da zaustavi krizu koja je zadesila svet 2008. godine.

Teorija leveridža smatra da se ciklus leveridža u potpunosti može izbeći postavljanjem ograničenja za kolaterale i leveridž od strane vlasti. Geanakoplos je skrenuo pažnju javnosti da je intervencija federalnih rezervi po ovom pitanju ključna da se ciklus leveridža i krize spreče.

Kao što je istaknuto i u analizi u ovom radu, ciklus leveridža je ograničenjima za kolaterale i leveridž moguće sprečiti od nastanka. Kada se ciklus leveridža pokrene, ograničenja za kolaterale nisu delotvorna.

Teorija leveridža tvrdi da je, kada se ciklus leveridža pokrene, krah neizbežan. Jedino rešenje za krah jeste da vlast oprosti izvestan deo duga. Na taj način bi se kriza ublažila i njeni efekti bi se umanjili. Naravno, vlasti država nisu spremni na takav korak. Međutim, sve dok se regulacije i zakoni drastično ne izmene, tako da postoje ograničenja za kolaterale koja će u korenu sprečiti ciklus leveridža, ili dok vlast ne odluči da oprosti deo duga, ciklus leveridža i krize će potresati svet u budućnosti.

10 Literatura

1. Hyun Song Shin. Comments on "The Leverage Cycle". University of Chicago Press. (2010). (76-83).

2. Džon Geanakoplos. Promises, Promises. The Economy as an Evolving Complex System. (1997). (4-33).

3. Džon Geanakoplos. The Leverage Cycle. NBER Macroeconomic Annual. (2010). (12 - 59)

4. Dž. Geanakoplosa, V. Zame. Collateralized Asset Markets. Yale University Working Paper. (2002). (6-10)

5. Dž. Geanakoplos, V. Zame, P. Dubej. Default, Collateral, and Derivatives. Mimeo, Yale University. (1995).

6. Dž. Geanakoplos, A. Fostel. Leverage Cycles and Anxious Economy. American Economic Review. (2008). (1219-1238)

7. Dž. Geanakoplos, A. Fostel. Leverage and Default in Binomial Economies: A Complete Characterization. Econometrica. (2015). (7 - 28).

8. Džon Geanakoplos. Solving the Present Crisis and Managing the Leverage Cycle. Federal Reserve Bank of New York Economic Policy Review. (2010)

9. S. Turner, D. Farmer i Dž. Geanakoplos. Leverage causes fat tails and clustered volatility. Quantitative Finance. (2012)

11 Biografija

Tijana Čorak je rođena 23.05.1992. u Somboru. Osnovnu školu „Žarko Zrenjanin“ je završila 2006. godine u Apatinu kao Učenik generacije. Uporedo je završila osnovnu muzičku školu u Apatinu. Iste godine je upisala opšti smer Gimnazije „Nikola Tesla“, koju je završila 2010. godine kao nosilac Vukove diplome. Po završetku gimnazije upisala je osnovne akademske studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer primenjena matematika, modul matematka finansija koje je završila 2013. godine. Potom je upisala master akademske studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer primenjena matematika, modul matematika finansija.

Stipendista je fonda za mlade talente Republike Srbije na završnoj godini osnovnih studija i master studija u inostranstvu. Prvu godinu master studija je provela na Univerzitetu u Milanu kao nosilac stipendije Evropske komisije, programa Erasmus Mundus Action 2, Sigma Project. Od 2015. godine je zaposlena u ICT sektoru Credit Agricole Srbija.

Univerzitet u Novom Sadu

Prirodno - matematički fakultet

Ključna dokumentacijska informacija

Redni broj **RBR**	
Identifikacijski broj **IBR**	
Tip dokumentacije **TD**	Monografska dokumentacija
Tip zapisa **TZ**	Tekstualni štampani materijal
Vrsta rada **VR**	Master rad
Autor **AU**	Tijana Čorak
Mentor **MN**	prof. dr Nataša Krejić
Naslov rada **NR**	Ciklus leveridža
Jezik publikacije **JP**	srpski (latinica)
Jezik izvoda **JI**	engleski
Zemlja publikovanja **ZP**	Republika Srbija
Uže geografsko područje **UGP**	Vojvodina
Godina **GO**	2017.
Izdavač **IZ**	Autorski reprint
Naučna oblast NO	Matematika
Naučna disciplina **ND**	Primenjena matematika
Čuva se **ČU**	Biblioteka departmana za matematiku i informatiku

Članovi komisije

KO

Predsednik	dr Danijela Rajter - Ćirić redovni profesor
Mentor	dr Nataša Krejić redovni profesor
Član	dr Sanja Rapajić vanredni profesor