UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Teodora Knežević

Analiza fazi vremenskih serija

-Master rad-

Novi Sad, 2013.

Sadržaj

Predgovor

Tema ovog master rada su Fazi vremenske serije. Reč je posebnoj vrsti vremenskih serija, koje pri radu koriste fazi podatke i imaju značajnu primenu u prirodnim i društvenim naukama, a naročito u ekonomiji, finansijama, menadžmentu i drugim. Kako je proces donošenja odluka često povezan sa predviđanjem budućih vrednosti promenljivih koje zavise od vremena, vremenske serije predstavljaju pogodno sredstvo za predviđanje budućih vrednosti. U analizi vremenskih serija, trend podataka je osnova za otkivanje ponašanja događaja kao što su: rast, opadanje, ciklično ponašanje ili velika odstupanja. Na osnovu određenih karakteristika ponašanja, optimalan model može se izabrati iz familije poznatih modela. Međutim, ima mnogo informacija koje nisu dorečene u objavljenim podacima. Kao primer može se uzeti cena akcije na berzi. Koliko današnja cena akcije može da utiče na današnju trgovinu? Koliko je akcija prodato po datoj ceni? Kakve su varijacije u trgovini po datoj ceni? Pokušaji da se konstruiše matematički model, po ugledu na tradicionalne modele i metode analize, kako bi se interpretirali podaci i trend vremenske serije, za rezultat mogu imati preplavljeni *(eng. over-fitting)* model. Sa druge strane, koncept fazi logike obezbeđuje realniji i moderniji pristup za rukovanje fenomenom više-složenosti i neizvesnosti. Pošto fazi teorija dozvoljava rad sa lingvističkim promenljivim, ona moze da minimizira probleme koji nastaju u radu sa nepreciznim podacima. Upravo iz tog razloga fazi teorija pronalazi veliku primenu u mnogim poljima, kao što su mehaničko inženjerstvo, medicina, geologija i drugim.

Poslednih decenija primena fazi logike na dinamičke podatke privlači sve veću paznju. Prvi korak u analizi fazi vremenskih serija jeste integracija lingvističkih promenljivih kako bi se rešio problem neizvesnosti. Iz tog razloga, osamdesetih i devedesetih godina prošlog veka, su predlagani mnogi logički metodi kao što su tabela odlučivanja, lingvistički rezime i drugi. Međutim, mnogi metodi su teško primenljivi u viševrednosnim sistemima. S toga, fazi relacione jednačine su prilagođene problemu koji se posmatra.

U društvenim naukama, fazi statistika i fazi korelacija postepeno su privlačili pažnju. Ovo je prirodno, pošto je teško u potpunosti objasniti komplikovan fenomen društvenih nauka. Uzimajući akciju na berzi kao primer, njena krajnja cena je nejasna i neizvesna. Postoji mnogo faktora koji utiču na formiranje cene, kao što su promet trgovanja, kurs i drugi. S toga, ukoliko posmatramo samo krajnju cenu akcije prethodnog dana, ne samo da se može podceniti trend u budućnosti, već se može pretrpeti nepotreban gubitak. U početku su istraživanja bila više okrenuta jednovrednosnim fazi vremenskim serijama, a mnogo manje viševrednosnim dinamičkim podacima. Kasnije, javljaju se integrisani postupci za modeliranje viševrednosnih fazi vremenskih serija, kao i njihova teorijska struktura bazirana na relacionim jednačinama.

Rad se sastoji iz pet poglavlja. Prvo poglavlje ima za cilj da predstavi vremenske serije, druga dva da uvedu čitaoca u fazi okruženje i način razmišljanja u fazi okruženju. Poslednja dva dela imaju za cilj da predstave fazi vremenske serije i kroz primere opišu primenu fazi vremenskih serija.

U prvom poglavlju dat je detaljan pregled pojmova vezanih za vremenske serije. One su u radu predstavljene kao stohastički proces i date su definicije i pojmovi koji opisuju pomenute procese. U analizi vremenskih serija interesantna je posebna klasa stohastičkih procesa, a to su linearni stacionarni procesi. Predstavljene su tri grupe linearnih stacionarnih procesa koji se koriste za modeliranje vremenskih serija, a to su autoregresivni procesi (AR), procesi pokretnih sredina (MA) i autoregresioni procesi pokretnih sredina $(ARMA)$. Kako postoji mogućnost da pretpostavka o stacionarnosti bude narušena, biće predstavljeni i nestacionarni proces, autoregresivni integrisani proces pokretnih sredina, $ARIMA$. Literatura korištena pri izradi ovog poglavlja je [2,3,4,5,8,9].

U drugom poglavlju su predstavljeni osnovni pojmovi i definicije vezani za fazi skupove. Kroz primere je predstavljena razlika između klasičnih i fazi skupova. Posebna pažnja je posvećena trougaonim fazi brojevima. Takođe, ovaj deo sadrži i opis trougaonih normi i konormi, kao i njihovih osobina. Literatura korištena pri izradi ovog poglavlja je [1,6,7,10,11,12,13]

U trećem poglavlju je predstavljena fazi logika, sa akcentom na fazi relacijama i njihovoj primeni u analizi fazi vremenskih serija. Takođe je predstavljena i viševrednosna logika. U okviru ovog poglavlja predstavljena je i fuzija fazi podataka. Pri izradi ovog poglavlja korištena je literatura označena sa [1,6,7,13].

U narednom, četvrtom, poglavlju tema rada je u potpunosti razrađena. Date su definicije i teoreme koje detaljno opisuju fazi vremenske serije, fazi relacionu matricu Markova, te postupci i pravila za modeliranje fazi vremenskih serija. Akcenat je stavljen na viševrednosne fazi vremenske serije. Takođe je jedan deo poglavlja posvećen merenju poverenja u rezultate predviđene vševrednosnim fazi vremenskim serijama. U ovom poglavlju korištena je literatura [1,14,15,16].

U poslednjem poglavlju predstavljena je primena fazi vremenskih serija na Taivanski ponderisani indeks cena akcija $-TAIEX$, pomoću definicija datih u predhodnom poglavlju. Na kraju je napravljeno poređenje između realizovanih i predviđenih vrednosti i potrvđena je validnost predviđanja pomoću fazi vremenskih serija. Za izradu ovog poglavlja korištena je literatura [1].

***

Najveću zahvalnost za izradu master rada i odabir teme dugujem svom mentoru, dr Ivani Štajner Papuga. Zahvaljujem se na izdvojenom vremenu kao i na korisnim primedbama i sugestijama bez kojih rad ne bi primio sadašnji oblik. Takođe, želela bih da se zahvalim prof. Dr Zagorki Lozanov-Crvenković i prof. dr Ljiljani Gajić, članovima komisije za odbranu ovog master rada.

Posebnu zahvalnost dugujem svojim roditeljima, bratu, sestri i prijateljima. Hvala im na ukazanom poverenju, razumevanju i bezuslovnoj podršci koju su mi pružali tokom celokupnog školovanja.

Novi Sad, septembar, 2013 *Teodora Knežević*

1. Analiza vremenskih serija

Analiza vremenskih serija je statistička disciplina koja je našla primenu u mnogim oblastima ekonomije, finansija, prirodnih i društvenih nauka i dr., te, obzirom na to, beleži dinamičan razvoj poslednjih decenija. Polazni pojam u analizi vremenskih serija je sama vremenska serija. Ona predstavlja niz opservacija uređenih u odnosu na vreme, a to uređenje se obično ostvaruje u jednakim vremenskim intervalima. Osnovni cilj vremenske serije jeste da na osnovu istorijskih podataka, prognozira buduću vrednost neke pojave. Vremenske serije su predstavljane kao stohastički procesi, a na osnovu osobina koje poseduju možemo ih podeliti na stacionarne i nestacionarne. Date su tri klase procesa stacionarnih vremenskih serija: autoregresioni procesi, procesi pokretnih sredina i autoregresioni procesi pokretnih sredina, a kao model nestacionarnih vremenskih serija predstavljen je autoregresinoni integrisani proces pokretnih sredina. Takođe, na osnovu vremenskih serija koje učestvuju u formiranju vrednosti određene vremenske serije, mogu se posmatrati posmatrati kao jednovrednosne (jednodimenzione) vremenske serije ili kao viševrednosne (višedimenzione) vremenske serije.

1.1. Stohastički procesi

Vremenske serije poseduju stohastički karakter, iz tog razloga pretpostavljamo da je vrednost vremenske serije u trenutku t, realizacija slučajne promenljive X_t. U tom kontekstu, vremenska serija je realizacija familije slučajnih promenljivih koja se zove stohastički proces. U ovom poglavlju dat osvrt na bitne pojmove vezane za stohastičke procese (videti [2,4,5]).

Sledi pregled osnovnih definicija vezanih za stohastičke procese.

Definicija 1.1.1. [4] Neka je Ω skup svih mogućih ishoda jednog eksperimenta. Elementi ovog skupa nazivaju se **elementarni događaji** i označavaju se sa $w_i, i = 1,2, \ldots$.

Definicija 1.1.2. [4] Podskup $\mathcal{F}$ partitivnog skupa $\mathcal{P}(\Omega)$ je ***σ*-polje** (σ-algebra) nad Ω ako važe uslovi:

- $\Omega \in \mathcal{F}$,
- ako $A \in \mathcal{F}$, onda $\bar{A} \in \mathcal{F}$,
- ako $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$, onda $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Definicija 1.1.3. [4] Neka je Ω skup elementarnih događaja i $\mathcal{F}$ σ-polje nad Ω. Funkcija $P: \mathcal{F} \to [0,1]$ se zove **verovatnoća** na prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ ako zadovoljava uslove:

- $P(\Omega) = 1$,
- Ako $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$, $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1,2, \ldots$, onda

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Prostor verovatnoća je uređena trojka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gde je Ω skup svih elementarnih događaja, $\mathcal{F}$ je σ- polje nad Ω, a P je verovatnoća na $(\Omega, \mathcal{F})$.

Definicija 1.1.4. [4] Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ prostor verovatnoća. Preslikavanje $X : \Omega \to \mathbb{R}$ se zove **slučajna promenljiva** ako za svako $S \in \mathcal{B}$ važi da je

$$X^{-1}(S) \in \mathcal{F},$$

gde je $\mathcal{B}$ Borelova σ- algebra.

Definicija 1.1.5. [5] Familija slučajnih promenljivih $\{X_t(w) : t \in T, w \in \Omega\}$ definisanih nad istim prostorom verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$, zove se **stohastički proces**, sa indeksnim skupom T.

Promenljiva w se često izostavlja u zapisu, pa se umesto toga stohastiči proces označava sa $\{X_t : t \in T\}$ ili kraće $X(t)$ ili X_t. Stohastički proces je funkcija dve promenljive, w i t. Ako se fiksira vremenski trenutak t dobija se jedna slučajna promenljiva koja se zove zasek ili sečenje. Ukoliko se fiksira elementarni događaj $w \in \Omega$, dobija se jedna realna funkcija vremena, koja se zove trajektorija ili realizacija stohastičkog procesa.

Definicija 1.1.6 [5] Neka je ζ skup $((t_1, t_2, \dots, t_n) \in T^n, t_1 < t_2 < \dots < t_n, n = 1,2, \dots)$. Tada su **konačno dimenzionalne funkcije raspodele** stohastičkog procesa funkcije $\{F_t(\cdot), t \in \zeta\}$ definisane sa

$$F_t(x) = P\{X_{t_1} \le x_1, X_{t_2} \le x_2, \dots, X_{t_n} \le x_n\}, \qquad (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Sistem funkcija raspodele $\{F_t(\cdot), t \in \zeta\}$, zadovoljava sledeća dva uslova:

- Uslov simetrije: ako je $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ jedna permutacija brojeva $\{1,2, .. n\}$, tada važi
$$F_{t_{i_1}, \dots t_{i_n}}(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) = F_{t_1, \dots t_n}(x_1, \dots, x_n),$$
- Uslov saglasnosti: ako je $m < n$ i proizvoljno $t_1, \dots, t_n \in T^n$ važi
$$F_{t_1, \dots, t_m, t_{m+1}, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_m, \infty, \dots, \infty) = F_{t_1, \dots, t_m}(x_1, \dots, x_m).$$

Teorema 1.1.1. [5] **Fundamentalna teorema Kolmogorova**

Za svaku familiju funkcija raspodele koje zadovoljavaju uslove simetrije i saglasnosti postoji prostor verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ i stohastički proces $\{X_t : t \in T\}$ definisan na njemu koji ima date raspodele kao svoje konačno-dimenzionalne raspodele.

Neka je $\{X_t : t \in T\}$ stohastički proces. Tada je:

- Srednja vrednost stohastičkog procesa $E(X_t) = \mu_t,\ t \in T,$
- Varijansa stohastičkog procesa $Var(X_t) = \sigma_t^2,\ t \in T,$
- Kovarijansa stohastičkog procesa
$$\gamma_x(r, s) = Cov(X_r, X_s) = E\left((X_r - E(X_r))(X_s - E(X_s))\right),\ r, s \in T,$$

- Korelacija stohastičkog procesa

$$\rho_x(r,s) = \frac{Cov(X_r, X_s)}{\sqrt{Var(X_r)Var(X_s)}}, \quad r, s \in T.$$

Stohastički proces može biti stogo i slabo stacionaran, te slede definicije stacionaranosti stohastičkog procesa.

Definicija 1.1.7. [5] Stohastički proces je **strogo stacionaran** ako su njegove konačno-dimenzionalne funkcije raspodele invarijantne u odnosu na t, odnosno ako za $t_i, t_i + t \in T, i = 1,2, \dots$

$$F_{t_1,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{t_1+t,\dots,t_2+t}(x_1, \dots, x_n).$$

Definicija 1.1.8. [5] Stohastički proces $\{X_t : t \in T\}$, je **slabo stacionaran**, ukoliko su ispunjeni sledeći uslovi:

- $E(X_t) = \mu = const, \forall\, t \in T,$
- $E(X_t^2) < \infty, \forall\, t \in T,$
- $\gamma_x(t, t+k) = Cov(X_t, X_{t+k}) = \gamma_x(k), \forall\, r, s, t \in T.$

Iz stroge stacionarnosti sledi slaba stacionarnost stohastičkog procesa.

Definicija 1.1.9. [5] Stohastički proces je **Gausovski proces** ako sve njegove konačno-dimenzionalne funkcije raspodele imaju višedimenzionalnu normalnu raspodelu.

Ako je $\{X_t : t \in T\}$ slabo stacionaran Gausovski proces, onda slučajni vektori $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ i $(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \dots, X_{t_n+h})$, $\forall\, h, t_1, t_2, \dots \in \mathbb{Z}, \forall\, n \in \mathbb{N}$ imaju istu očekivanu vrednost i autokovarijansnu matricu, te je $\{X_t : t \in T\}$ strogo stacionaran proces.

Dakle, jedino u slučaju kada je stohastički proces Gausovski, slaba stacionarnost implicira strogu. Obrnuto uvek važi.

Definicija 1.1.1. [5] **Kovarijansna funkcija** stohastičkog procesa $\{X_t : t \in T\}$ je definisana sa

$$\gamma_k = Cov(X_t, X_{t+k}) = \Big(\big(X_t - E(X_t)\big)\big(X_{t+k} - E(X_{t+k})\big)\Big), t \in T, k \in \mathbb{Z},$$

a **korelaciona funkcija** je definisana sa

$$\rho_k = \frac{Cov(X_t, X_{t+k})}{\sqrt{Var(X_t)Var(X_{t+k})}}, \qquad t \in T, k \in \mathbb{Z}.$$

Sa

$$\Gamma_n = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{n-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n-1} & \gamma_{n-2} & \cdots & \gamma_0 \end{bmatrix}$$

je definisana **kovarijansna matrica reda $\boldsymbol{n}$**, a sa

$$\mathrm{R}_n = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{n-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n-1} & \rho_{n-2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

je definisana **korelaciona matrica reda $\boldsymbol{n}$.**

Dakle, očigledno je da važi $\Gamma_n = \frac{1}{\gamma_0}\mathrm{R}_n$.

Naredne dve teoreme daju dodatne osobine slabo stacionarnog procesa, za dokaze videti [2].

Teorema 1.1.2. [2] Ako su γ_k i ρ_k autokovarijansna i autokorelaciona funkcija slabo stacionarnog stohastičkog procesa tada važi sledeće:

- $\gamma_0 = Var(X_t) \geq 0 \Rightarrow \ \rho_0 = \frac{\gamma_0}{\gamma_0} = 1,$
- $\gamma_k = \gamma_{-k}, \rho_k = \rho_{-k},$
- $|\gamma_k| \leq \gamma_0, |\rho_0| \leq 1,$
- Autokorelaciona funkcija je pozitivno semidefinitna.

Definicija 1.1.11. [2] Funkcija $q\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ je pozitivno semidefinitna ako

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_i q\big(t_i - t_j\big) a_j \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{R}^n, \forall\ t = (t_1, t_1, \dots, t_n).$$

Teorema 1.1.3. [5] Ako je $\{X_t\ :\ t \in T\}$ slabo stacionaran proces, onda je njegova kovarijansna matrica pozitivno semidefinitna.

1.2. Konvergencija u verovatnoći i konvergencija u raspodeli

U ovom poglavlju predstavljene su osnovne definicije i pojmovi koji su potrebni za razumevanje konvergencije slučajnih promenljivih u verovatnoći i raspodeli.

Definicija 1.2.1. [4] Niz slučajnih promenljivih $X_1, X_2, \dots$ **konvergira u verovatnoći** ka slučajnoj promenljivoj X, ako za svako $\varepsilon > 0$ važi da

$$P\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} \to 0, n \to \infty.$$

Definicija 1.2.2. [4] Niz slučajnih promenljivih $X_1, X_2, \dots$ **konvergira u raspodeli** ka slučajnoj promenljivoj X, kada $n \to \infty$, ako niz odgovarajućih funkcija raspodele $F_{X_1}(x), F_{X_2}(x), \dots$ konvergira ka funkciji raspodele slučajne promenljive $X, F_X(x)$ za svako $x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ za koje je $F_X(x)$ neprekidna funkcija.

Konvergencija u verovatnoći se označava sa

$$X_n \xrightarrow{p} X, n \to \infty,$$

a konvergencija u raspodeli se označava sa

$$X_n \xrightarrow{r} X, n \to \infty.$$

Sledeće teoreme i leme predstavljaju osobine nizova slučajnih promenljivih koji konvergiraju u verovatnoći i raspodeli. Dokazi datih teorema nalaze se u literaturi označenoj sa [2,4].

Teorema 1.2.1. [2] Ako niz slučajnih promenljivih $X_1, X_2, ...,$ konvergira u verovatnoći ka slučajnoj promenljivoj X, kada $n \to \infty$, onda taj niz konvergira i u raspodeli ka slučajnoj promenljivoj X, kada $n \to \infty$. Obrnuto važi samo u slučaju kada je $X = const$.

Lema 1.2.1. [2] Ako $X_n \xrightarrow{r} X$ i $Y_n \xrightarrow{p} c = const$ tada

$$X_n + Y_n \xrightarrow{r} X + c \text{ i } X_n Y_n \xrightarrow{r} Xc.$$

Lema 1.2.2. [2] Ako $X_n \xrightarrow{r} X$ i $Y_n \xrightarrow{p} 0$ tada

$$X_n\, Y_n \xrightarrow{p} 0.$$

Teorema 1.2.2. [4] **Zakon velikih brojeva Hinčina**

Ako nezavisne slučajne promenljive $X_1, X_2, ...,$ imaju istu raspodelu i konačno očekivanje $E(X_i) = \mu, i = 1,2, ...$ onda važi:

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \xrightarrow{p} \mu, n \to \infty.$$

Teorema 1.2.3. [4] **Centralna granična teorema**

Ako nezavisne slučajne promenljive $X_1, X_2, ...,$ imaju istu raspodelu, $E(X_i) = \mu$ i $Var(X_i) = \sigma^2, i = 1,2, ...$ onda za

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$$

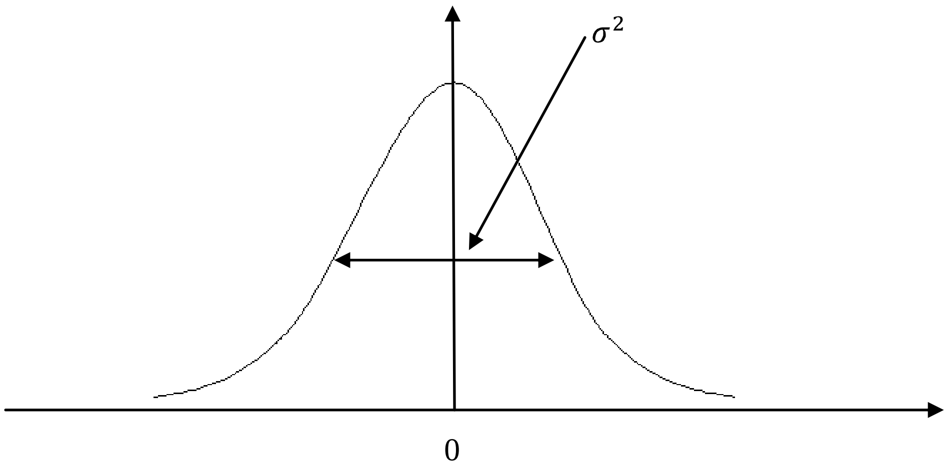
važi,

$$\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mu) \xrightarrow{r} N(0, \sigma^2).$$

<u>*Napomena.*</u> Zakon velikih brojeva Hinčina i centralna granična teorema važe za niz slučajnih vektora kao i za njihove transformacije samo ukoliko je preslikavanje neprekidno.

1.3. Beli šum

Beli šum je potpuno slučajan proces, koji na izvestan način korespondira slučajnoj grešci linearnog modela. Sam termin beli šum je izveden iz spektralne analize bele svetlosti. Proces $\{\varepsilon_t, t \in T\}$ je proces belog šuma ako su $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ nekorelisane slučajne promenljive koje imaju jednaku raspodelu, gde su $E(\varepsilon_i) = 0$ i $Var(\varepsilon_i) = \sigma^2, i = 1,2, \ldots$. Više o ovoj temi može se naći u literaturi ([2,8]).



Slika 1. [8] Raspodela procesa belog šuma

Kovarijansna funkcija procesa belog šuma je:

$$\gamma_i = cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \begin{cases} \sigma^2, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}, i = 1,2, \ldots, j = 1,2, \ldots .$$

Da bi se beli šum definisao kao stohastički proces u klasičnom smislu potrebno je da se definiše uopšteni stohastički proces. Neka je K prostor svih beskonačno diferencijabilnih funkcija $\varphi(t), t \in \mathbb{R}$ koje su identički jednake nuli van konačnog intervala. Svaka neprekidna linearna funkcionela Φ, definisana na K se naziva distribucija ili uopštena funkcija.

Uopšten slučajan stohastički proces je slučajna uopštena funkcija u sledećem smislu: Svakom $\varphi \in K$ je dodeljena slučajna promenljiva tako da važe sledeća dva uslova:

- Funkcionela Φ je lienarna na K sa verovatnioćom 1, odnosno za proizvoljne φ i ψ iz K i proizvoljno α i β važi da je

$$\Phi(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha\Phi(\varphi) + \beta\Phi(\beta).$$

- $\Phi(\varphi)$ je neprekidna u sledećem smislu: konvergencija $\varphi_{k_j} \to \varphi_k$ u prostoru $K, k = 1,2,\dots,n,$ implicira konveregenciju vektora raspodele $\left(\Phi\left(\varphi_{1_j}\right),\dots,\Phi\left(\varphi_{n_j}\right)\right)$ ka raspodeli $\left(\Phi(\varphi_1),\dots,\Phi(\varphi_n)\right)$ u smislu konvregencije u raspodeli.

Klasa uopštenih procesa je šira od klase klasičnih, pa svaki klasični proces može da se posmatra kao uopšteni proces.

Vinerov proces W_t je stohastički proces koji ima nezavisne, stacionarne i normalno raspodeljene priraštaje, $W_t - W_s$. Raspodela priraštaja Vinerovog procesa je normalna sa očekivanjem 0 i disperzijom $t - s$, $\mathcal{N}(0, t - s)$. Početna vrednost procesa je $W_0 = 0$ i ima skoro skoro sigurno neprekidne trajektorije. Ukoliko se Vinerov proces posmatra kao uopšteni proces, može da se pokaže da je kovarijansna funkcija izvoda Vinerovog procesa Dirakova delta distribucija $\delta(t)$, a to je upravo kovarijansna funkcija belog šuma. Dakle, u smislu poklapanja kovarijansi beli šum je izvod Braunovog kretanja kada se Braunovo kretanje posmatra kao uopšteni stohastički proces.

U daljem radu pod procesom belog šuma se podrazumeva familija slučajnih promenljivih, koje su nekorelisane, sa konačnom varijansom i očekivanjem nula.

1.4. Stohastički procesi i vremenske serije

Vremenska serija predstavlja jednu realizaciju stohastičkog procesa. Neka je data jedna realizacija stohastičkog procesa $(x_1,\dots,x_n)$, odnosno vremenska serija. Da bi se odredile neke od osnovnih karakteristika stohastičkog procesa, kao što su srednja vrednost, varijansa i kovarijansa, potrebno je više od jedne njegove realizacije. Čak i u slučaju kada je dostupno beskonačno mnogo vrednosti te iste realizacije postavlja se pitanje je da li je ona dovoljna da bi se proces objasnio u celini. Više o ovoj temi može se naći u literaturi označenoj sa [2,8].

Uslov da je vremenska serija ergodična znači da uzorački momenti koji su izračunati na osnovu jedne realizacije, konvergiraju srednje kvadratno ka odgovarajućim momentima populacije kada $n \to \infty$. U analizi vremenskih serija od najvećeg značaja je da momenti prvog i drugog reda za jednu realizaciju procesa konvergiraju ka odgovarajućim prvim i drugim momentima populacije stohastičkog procesa kada se obim uzorka povećava, odnosno da je ispunjeno sledeće:

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \mu\right)^2\right] = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu) - \sigma^2\right)^2\right] = 0.$$

Jedna od najbitnijih statističkih osobina vremenskih serija jeste njihova stacionarnost. Za stacionarne vremenske serije mogu tačno se odrediti njihovi prvi i drugi momenti kao i autokovarijansna funkcija, što omogućava lakše i preciznije predviđanje budućih vrednosti vremenskih serija.

Trend vremenske serije opisuje njeno osnovno ponašanje u dužem vremenskom periodu ili preciznije, u čitavom vremenskom periodu za koji je vremenska serija poznata. Trend vremenske serije može da bude deterministički i stohastički. U slučaju kada je trend detreministički postoji matematička funkcija vremena kojom trend može da se opiše. U zavisnosti od izbora funkcije postoje različiti modeli trenda vremenske serije: linearni, parabolični, eksponencijalni, logaritamski... Ukoliko je trend vremenske serije stohastički tada se on menja pod uticajem slučajnih faktora, odnosno ponašanje vremenske serije ne može da se predvidi i ima stohastički karakter.

Za ocenu teorijskih pojmova se koriste sledeće uzoračke ocene:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_t,$$

$$\widehat{Var(X_t)} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(X_t - X)^2,$$

$$\widehat{\gamma_k} = \frac{1}{n}\sum_{t=k+1}^{n}(X_t - \bar{X})(X_{t-k} - \bar{X}),$$

$$\widehat{\rho_k} = \frac{\widehat{\gamma_k}}{\widehat{\gamma_0}} = \frac{\sum_{t=k+1}^{n}(X_t - \bar{X})(X_{t-k} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^{n}(X_t - X)^2}.$$

Za uzoračke ocene $\widehat{\gamma_k}$ i $\widehat{\rho_k}$ je zadovoljen uslov da je sledeća matrica pozitivno semidefinitna.

$$\widehat{\Gamma_n} = \begin{bmatrix} \widehat{\gamma_0} & \widehat{\gamma_1} & \cdots & \hat{\gamma}_{n-1} \\ \widehat{\gamma_1} & \hat{\gamma}_0 & \cdots & \hat{\gamma}_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\gamma}_{n-1} & \hat{\gamma}_{n-2} & \cdots & \widehat{\gamma_0} \end{bmatrix}.$$

Ako se $\widehat{\Gamma_n}$ predstavi u obliku $\widehat{\Gamma_n} = \frac{1}{n}NN^T$, gde je N matrica $n \times 2n$ sa elementima

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & Y_1 & \dots & Y_n \\ 0 & 0 & \dots & Y_1 & \dots & Y_n & 0 \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ Y_1 & \dots & Y_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

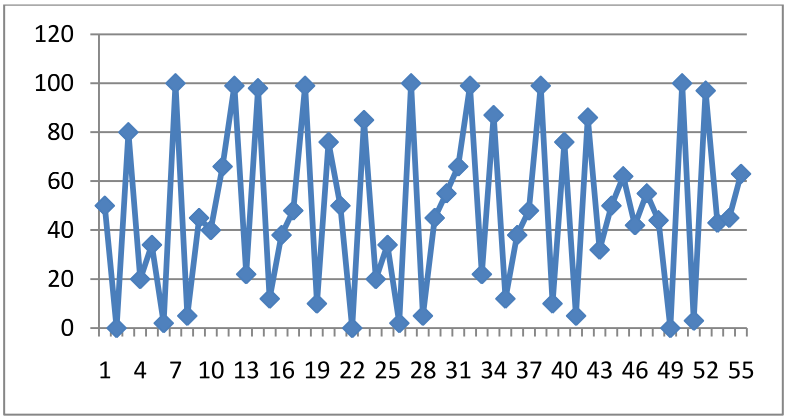
gde je, $Y_i = X_i - \bar{X}, i = 1,2, \dots, n$.

Tada za proizvoljan vektor $a \in \mathbb{R}^n$, važi

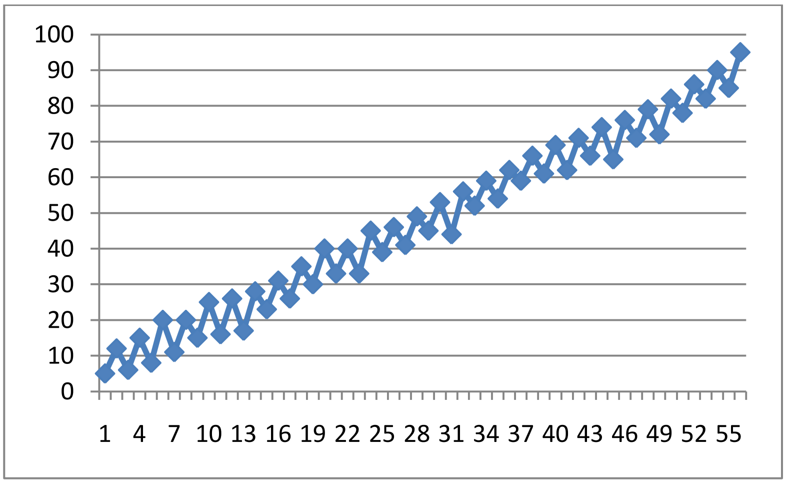
$$a^T\widehat{\Gamma_n}a = \frac{1}{n}(a^T N)(a^T N)^T \geq 0.$$

Kako postoji mnogo parova (X_t, X_{t-k}) u praksi za uzorak obima n ne izračunava više od $n/_4$ autokorelacionih koeficijenata.

Ključna podela vremenskih serija je na stacionarne i nestacionarne vremenske serije. Stacionarnost je svojstvo vremenske serije čije se kretanje tokom vremena odvija po ustaljenom obrascu, u smislu nepromenljivosti svojstava. Suprotno, ukoliko su parametri kretanja vremenske serije funkcija vremenskog trenutka, tada je vremenska serija nestacionarna. Ova podela vremenskih serija pravi razliku između vremenskih serija koje se različito ponašaju tokom vremena. U daljem radu biće predstavljene stacionarne i nestacionarne vemenske serije i one su prikazane na sledećim slikama.



Slika 2. Primer stacionarne vremenske serije



Slika 3. Primer nestacionarne vremenske serije

1.5. Stacionarne vremenske serije

Pri modeliranju jedan od najbitnijih zadataka jeste pronalaženje odgovarajuće funkcionalne veze između određenih ulaznih i izlaznih informacija. Linearan proces predstavlja najopštiji okvir modeliranja stacionarnih vremenskih serija. Dakle, jedna od najčešćih pretpostavki jeste da je veza između ulaznih i izlaznih parametara linearna. U analizi vremenskih serija linearni filter L je operator koji transformiše vremensku seriju $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ u vremensku seriju $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$. U ovom poglavlju dati su linearni procesi i linearne vremenske serije. Korištena literatura pri izradi ovog poglavlja je ([2,5,8]).

Vrednost vremenske serije $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ u trenutku t zavisi od sopstvenih prošlih i budućih vrednosti. Kako su u praksi na raspolaganju istorijski podaci, uvodi se pretpostavka da je $j \geq 0$, pa se dolazi do definicije linearnog filtera.

$$Y_t = L(X_t) = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j X_{t-j},$$

gde vrednost $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ u trenutku t zavisi samo od sopstvenih prošlih vrednosti, a koeficienti ω_j su vremenski invarijantni.

Definicija 2.1.1. [2] Proces $\{X_t, t \in T\}$ je **linearan** ako može da se predstavi u obliku

$$X_t = \mu_t + \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j \varepsilon_{t-j},$$

gde su

- μ_t deterministička komponenta,
- $\{\varepsilon_t, t \in T\}$ proces belog šuma,
- $\theta_1, \theta_2, \dots$ nepoznati parametri.

Osnovna karakteristika determinističke komponente je da ona može biti aproksimirana nekom matematičkom funkcijom, što u situaciji prognoziranja vremenske serije znači da će izabrani tip funkcije važiti i u budućem periodu.

Suma

$$\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j \varepsilon_{t-j},$$

predstavlja stohastičku komponentu procesa i ona opisuje dejstvo slučajnih faktora u modelu. Osnovna pretpostavka je da stohastička komponenta može da se modelira pomoću procesa belog šuma.

Očekivanje i varijansa lineranog procesa su:

$$E(X_t) = E(\mu_t) + \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j E(\varepsilon_{t-j}) = \mu_t + 0 = \mu_t,$$

$$Var(X_t) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} {\theta_j}^2.$$

Momenti prvog i drugog reda su konačni u slučaju kada je:

$$\mu_t \equiv \mu = const,$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} {\theta_j}^2 < \infty.$$

Tada su kovarijansna i korelaciona funkcija:

$$\gamma_k = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \theta_{j+k}\, \theta_j,$$

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \theta_{j+k}\, \theta_j}{\sum_{j=0}^{\infty} {\theta_j}^2}.$$

Sledeća teorema predstavlja dekompoziciju stohastičkog procesa na deterministički i stohastički deo.

Teorema 2.1.1 [2] **Woldova dekompozicija**

Stohastička komponenta slabo stacionarne vremenske serije $\{X_t, t \in T\}$ može da se predstavi u formi linerarnog procesa oblika:

$$X_t - V_t = \sum_{j=1}^{\infty} X_j \varepsilon_{t-j},$$

gde su

- $V_t = \mu = E(X_t)$ deterministička komponenta,
- $\{\varepsilon_t, t \in T\}$ je proces belog šuma,
- $\sum_{j=1}^{\infty} {X_j}^2 < \infty, X_0 = 1,$
- $E(\varepsilon_t, V_t) = 0.$

Definicija 2.1.2. [2] Linearan proces $\{X_t, t \in T\}$ za koji važi da je $E(X_t) = \mu, \forall t \in T,$ je **invertibilan** ako postoje $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ takvi da je

$$\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j (X_{t-j} - \mu) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j {X^*}_{t-j},$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\varphi_j| < \infty.$$

Definicija 2.1.3. [8] Linearna vremenska serija je jedna realizacija linearnog stohastičkog procesa.

Kako u do sada definisanim modelima linearnih vremenskih serija figuriše beskonačan broj parametara, cilj je da se njihov broj ograniči na konačno mnogo. Postoje tri grupe linearnih procesa koje imaju konačan broj parametara:

- autoregresivni proces reda p ($AR\ (p)$),
- proces pokretnih sredina reda q ($MA\ (q)$),
- proces $ARMA(p,q)$ je kombinacija $AR(p)$ i $MA(q)$ procesa.

1.5.1. Autoregresivni proces $\boldsymbol{AR}(\boldsymbol{p})$

Auto regresivni proces je regresioni proces u kome je zavisna promenljiva predstavljena članom vremeske serije u trenutku t, dok skup nezavisnih promenljivih čine članovi iste vremenske serje ali u trenucima $t-1, t-2, \dots, t-p$. Zavisna promenljiva se opisuje kao funkcija sopstvenih predhodnih vrednosti vremenske serije. Literatura korištena u izradi ovog poglavlja je [2,8,9].

Definicija 1.5.1.1. [2] Proces $\{X_t, t \in T\}$ je $\boldsymbol{AR}(\boldsymbol{p})$, autoregresivni proces reda p, ako može da se predstavi u obliku

$$X_t = \mu + \sum_{j=1}^{p} \varphi_j X_{t-j} + \varepsilon_t,$$

gde je:

- μ konstanata
- $\{\varepsilon_t, t \in T\}$ proces belog šuma
- $\varphi_j, j = 1,2, \dots, p$ nepoznati parametri.

Neka je dat proizvoljan proces $\{Z_t, t \in T\}$. ***L* operator** transformiše proces iz sadašnjeg vremenskog trenutka u isti proces u prethodnom vremenskom trenutku

$$LZ_t = Z_{t-1}.$$

Koristeći $LZ_t = Z_{t-1}$ za proces $\{Z_t, t \in T\}$ važi:

$$Z_{t-2} = LZ_{t-1} = L^2 Z_t,$$

$$Z_{t-3} = LZ_{t-2} = L^2 Z_{t-1} = L^3 Z_t,$$

$$\vdots$$

$$Z_{t-m} = LZ_{t-(m-1)} = \cdots = LL^{m-1} Z_t = L^m Z_{t.}$$

Koristeći L operator $AR(p)$ proces može da se predstavi kao

$$\varphi(L)X_t = \varepsilon_t,$$

gde je $\varphi(L) = 1 - \varphi_1 L - \ \dots - \varphi_p L^p$ karakteristični polinom $AR(p)$ procesa.

Jednačina $\varphi(z) = 0, z \in \mathbb{C}$ je karakteristična jednačina $AR\ (p)$ procesa. Rešenja karakteristične jednačine su karakteristični koreni $AR\ (p)$ procesa.

Uslovi stacionarnosti AR procesa su definisani sledećom teoremom.

Teorema 1.5.1.1. [2] Neka su $z_1, z_2, \dots, z_p$ karakteristični koreni autoregresivnog procesa reda p. Ako za svako $z_i \in \mathbb{C}$ važi $|z_i| < 1, i = 1,2, \dots, p$ onda je vremenska serija stacionarna.

U slučaju kada je $AR(p)$ slabo stacionaran, mogu da se odrede $E(X_t)$, $Var(X_t)$, γ_ki ρ_k.

$$E(X_t) = E(X_{t-1}) = \cdots = E\big(X_{t-p}\big),$$

$$E(X_t) = \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^{p} \varphi_j},$$

$$\gamma_k = Cov(X_t, X_{t-k}) = Cov(\sum_{i=0}^{p} \varphi_i X_{t-i}, X_{t-k}) = \sum_{i=0}^{p} \varphi_i \gamma_{k-i} + \begin{cases} \sigma^2, k = 0 \\ 0, k \neq 0 \end{cases},$$

$k = 0$

$$Var\ (X_t) = \gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1 - \varphi_1 \rho_1 - \ \dots - \varphi_p \rho_p},$$

$k > 0$

$$Var(X_t) = \gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_1 \gamma_{k-2} + \ \dots\ \phi_1 \gamma_{k-p},$$

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_1 \rho_{k-2} + \ \dots\ \phi_1 \rho_{k-p}.$$

Ukoliko se sistemi jednačina koji određuju kovarijansnu i korelaciju autoregresivnog procesa zapišu u matričnom obliku dobija se:

$$\boldsymbol{\gamma} = \Gamma_p \boldsymbol{\varphi},$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{\boldsymbol{p}} \end{bmatrix}, \Gamma_p = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \cdots & \gamma_{p-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{p-1} & \cdots & \gamma_0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_{\boldsymbol{p}} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\rho} = \mathrm{R}_p \boldsymbol{\varphi},$$

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_p \end{bmatrix}, \mathrm{R}_p = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \rho_{p-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{p-1} & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_p \end{bmatrix}.$$

Sistem definisan sa $\boldsymbol{\rho} = \mathrm{R}_p \boldsymbol{\varphi}$ u literaturi je poznat pod nazivim *Yule-Walker-ov* sistem jednačina [8].

1.5.1.1. Parcijalana autokotelaciona funkcija

U statistici se često dešava da je korelacija između dve promenljive ustvari rezultat njihove koreliranosti sa trećom promenljivom u modelu. Zbog toga uvodi se pojam parcijalne korelacije. Parcijalna korelacija predstavlja korelaciju između dve promenljive uz eliminisan uticaj drugih promenljivih iz modela. Više o ovoj temi se može naći u [2,8,9].

Stepen korelisanosti između X_t i X_{t-k}, obično se meri autokorelacionim koeficientom ρ_k, koji je definisan ne sledeći način:

$$\rho_k = \frac{Cov(X_t, X_{t-k})}{\sqrt{Var(X_t)Var(X_{t-k})}}, k = 1,2, \dots .$$

Po definiciji parcijalni koeficijent korelacije između X_t i X_{t-k}, u oznaci φ_{kk}, je k −ti regresioni koeficijent u autoregresivnom procesu reda k. Niz $\phi_{11}, \phi_{22}, \dots$ predstavlja parcijalnu atokorelacionu funkciju, čiji se grafički prikaz naziva parcijalni korelogram.

Parcijalni autokorelacini koeficient φ_{kk} definiše se kao obični auttokorelacioni koeficient između formiranih članova $(X_t - \hat{X}_t)$ i $(X_{t-k} - \hat{X}_{t-k})$:

$$\varphi_{kk} = \frac{Cov\left[\left(X_t - \hat{X}_t\right), \left(X_{t-k} - \hat{X}_{t-k}\right)\right]}{\sqrt{Var\left(X_t - \hat{X}_t\right)Var\left(X_{t-k} - \hat{X}_{t-k}\right)}},$$

gde je $\hat{X}_t$ ocena zavisnosti X_t od $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-k+1}$, dobijena metodom najmanjih kvadrata, koja opisuje kretanje X_t u funkciji datog skupa objašnjavajućih promenljivih. Dakle razlika, $(X_t - \hat{X}_t)$ predstavlja deo od X_t koji ne sadrži uticaj $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-k+1}$. Analogno važi i za $(X_{t-k} - \hat{X}_{t-k})$.

Posmatrajmo autokorelacioni model reda k:

$$X_t = \varphi_0 + \varphi_{11} X_{t-1} + \varphi_{22} X_{t-2} + \dots + \varphi_{kk} X_{t-k} + \varepsilon_t.$$

Ovaj model možemo predstaviti pomoću *Yule-Walker-ovog* sistema jednačina [8]:

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \rho_{p-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{p-1} & \cdots & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_p \end{bmatrix}.$$

Za $k = 1$

$$\varphi_{11} = \rho_{1.}$$

Za $k = 2$

$$\varphi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - {\rho_1}^2}{1 - {\rho_1}^2}.$$

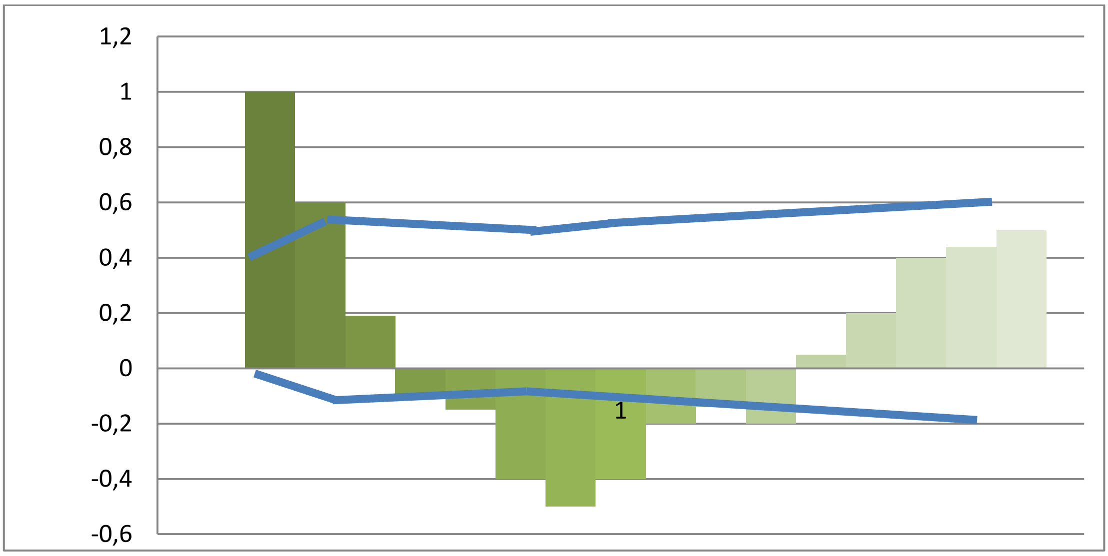
Za $k = 3$

$$\varphi_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}.$$

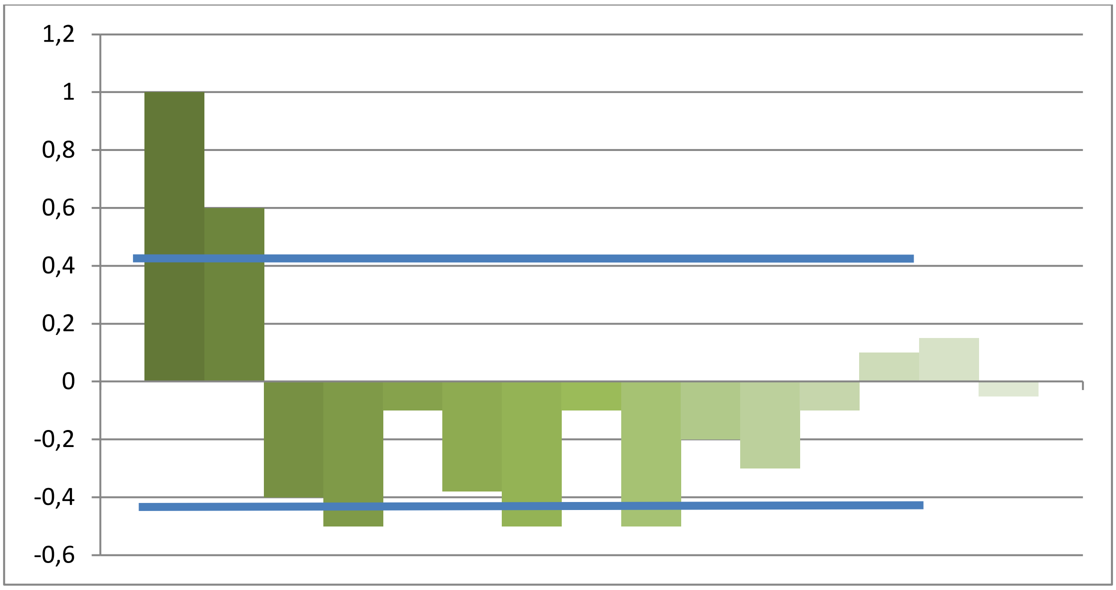
Klasu $AR(p)$ procesa karakteriše parcijalna autokorelaciona funkcija sa sledećim svojstvima (videti [8]):

- Vrednosti parcijalnih autokorelacionih koeficijenata uzimaju vrednosti različite od 0, $\varphi_{kk} \neq 0$, za $k \leq p$,
- Poslednji nenulti parcijalani autokorelacioni koeficient jednak je poslednjem autoregresionom parametru, φ_p,koji figuriše uz X_{t-p}.
- Vrednosti parcijalnih autokorelacionih koeficienata su jednake nuli, $\varphi_{kk} = 0$, za $k \ > p$, gde je p red procesa.

Na sledećim slikama prikazane su korelaciona i parcijalna autokorelaciona funkcija funkcija za proces $AR(1)$.



Slika 4. Primer korelacione funkcije $AR(1)$ procesa, po ugledu na primer iz [2]



Slika 5. Primer parcijalne autokorelacione funkcije $AR(1)$ procesa, po ugledu na primer iz [2]

1.5.2. Proces pokretnih sredna $\boldsymbol{MA(q)}$

Naziv ovog procesa na engleskom jeziku je *movig average*, te se u literaturi najčešće koristi skraćenica MA, odnosno $MA(q)$ za proces pokretnih sredina reda q. Proces pokretnih sredina dovodi se u vezu sa postupkom izravnanja vremenske serije. Pokretne sredine se mogu računati na osnovu aritmetičke sredine i medijane. U literturi [8] predstavljeno je izravnanje vremenske serije na osnovu aritmentičke sredine, koje sledi u daljem radu.
Neka je dat niz podataka:

$$X_1, X_2, \dots, X_T: \; X_1, \dots, X_{t-m}, \dots, X_{t-2}, X_{t-1}, X_t, X_{t+1}, X_{t+2}, \dots, X_{t+m}, \dots X_T$$

Svaki podatak X_t zamanjuje se novim podatkom Y_t dobijenim na sledeći način:

$$Y_t = \sum_{i=-m}^{m} a_i X_{t-i}, t = m+1, \dots, T-m, \sum_{i=-m}^{m} a_i = 1.$$

I u narednim koracima koriste se novodobijeni podaci. Navedeni postupak izravnavanja se može primeniti više puta, takođe se može uočiti da se ovim ostupkom gubi prvih m i poslednjih m podataka. Izravnanjem se dobija vremenska serija približno iste aritmetičke sredine, ali sa znatno manjim varijabilitetom. Korištena literatura u ovom poglavlju je [2,8,9].

Definicija 1.5.2.1. [2] Proces $\{X_t, t \in T\}$ je $\boldsymbol{MA(q)}$, proces pokretnih sredina reda q, ako može da se predstavi u obliku

$$X_t = \mu + \varepsilon_t - \sum_{j=1}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j},$$

gde je:

- $\mu = E(X_t)$,
- $\{\varepsilon_t, t \in T\}$ proces belog šuma,
- $\theta_j, j = 1,2, \dots, q$ nepoznati parametri.

U datom modelu nivo vremenske serije u trenutku t opisuje se u funkciji od članova procesa belog šuma u trenucima $t, t-1, \dots, t-q$. Pomeranjem u vremenu menjaju se članovi zbira, ali broj sabiraka u zbiru ostaje isti. Proces pokretnih sredina reda q je linearni proces sa konačnim očekivanjem i konačnim brojem parametara pa je zbog toga:

$$E(X_t) = \mu,$$

$$Var(X_t) = \sigma^2 \left(1 + {\theta_1}^2 + \dots + {\theta_q}^2\right),$$

$$\gamma_k = \begin{cases} 0, & k > q \\ \sigma^2 \displaystyle\sum_{j=0}^{q-k} \theta_j \theta_{j+k}, & 1 \le k \le q \end{cases},$$

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \begin{cases} 0, & k > q \\ \frac{\sum_{j=0}^{q-k} \theta_j \theta_{j+k}}{\sum_{j=0}^{q} \theta_j{}^2}, & 1 \leq k \leq q \end{cases}.$$

Dake, pošto za proces pokretnih sredina važi sledeće:

$$E(X_t) < \infty,$$

$$Var(X_t) < \infty,$$

$$\gamma_k = f(k).$$

očigledno je da je dati proces **uvek slabo stacionaran.**

Proces pokretnih sredina može da se predstavi pomoću L operatora

$$X_t = \mu + \left(1 - \theta_1 L - \cdots - \ \theta_q L^q\right)\varepsilon_t = \mu + \theta(L)\varepsilon_t$$

gde je $\theta(L)$ karakteristini polinom, a $\theta(z) = 0, z \in \mathbb{C}$, je karakteristična jednačina $MA\ (q)$ procesa. Rešenja karakteristične jednačine su karakteristični koreni $MA\ (q)$ procesa.

Teorema 1.5.2.1. [1] Proces pokretnih sredina reda $q, MA(q)$, je invertibilan ako su svi karakteristični koreni $z_i i = 1,2, \dots, q$ njegove karakteristične jednačine $\theta(z) = 0, z \in \mathbb{C}$, po modulu strogo manji od jedinice.

Ukoliko je proces invertibilan, tada se kaže da on ima $AR(\infty)$ reprezentaciju.

Sumirajući dobijene rezultate može se reći da stacionarnom autoregresivnom modelu konačnog reda odgovara model pokretnih sredina beskonačnog reda, i invertibilnom modelu pokretnih sredina konačnog reda odgovara autoregersivni model beskonačnog reda. Uzajamna veza između koeficijenata ova dva modela našla je odraz u odnosu njihovih korelacionih i parcijalnih korelacionih koeficijenata. Korelaciona funkcija $AR\ (p)$ procesa i parcijalna korelaciona funkcija $MA\ (q)$ procesa lagano idu ka 0, a parcijalna korelaciona funkcija $AR\ (p)$ i korelaciona funkcija $MA\ (q)$ su jednake 0 kada je k veće od reda procesa.

1.5.3. Autoregresivni model pokretnih sredina $\boldsymbol{ARMA(p,q)}$

Autoregresioni model pokretnih sredina, u oznaci $ARMA(p,q)$, je model u kom p predstavlja red auto regresione komponente i q predstavlja red komponente pokretnih sredina. $ARMA(p,q)$ model obuhvata predhodno razmatrane procese kao svoje specijalne slučajeve: $AR(p) = ARMA(p,0)$ i $MA(q) = ARMA(0,q)$. Specifikacija $ARMA$ modela se ne javlja često u modeliranju makroekonomskih vremenskih serija, ali je relevantna kod osnovnih modela volatilnosti koji se koriste u analizi finansijskih vremenskih serija. Više o ovoj temi može se naći u literaturi [2,8,9].

Definicija 1.5.3.1. [2] $\{X_t, t \in T\}$ je $ARMA(p,q)$ model ukoliko može da se predstavi na sledeći način:

$$X_t = \sum_{j=1}^{p} \varphi_j X_{t-j} + \varepsilon_t - \sum_{j=1}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j},$$

odnosno

$$\varphi(L) X_t = \theta(L) \varepsilon_{t,}$$

gde su

- $\varphi = \left(1 - \varphi_1 L - \ ... - \varphi_p L^p\right)$ AR karakteristični polinom $ARMA(p,q)$ procesa,
- $\theta = (1 - \theta_1 L - \cdots - \ \theta_q L^q)$ MA karakteristični polinom $ARMA(p,q)$ procesa.

Za ove polinome se pretpostavlja da ne sadrže zajedničke faktore i da opisuju redom autoregresionu i konponentu pokretnih sredina stacionarne i invertibilne vremenske serije X_t.

$ARMA(p,q)$ može da se predstavi u obliku

$$\underbrace{X_t - \sum_{j=1}^{p} \varphi_j X_{t-j}}_{AR\ komponenta} = \underbrace{\varepsilon_t - \sum_{j=1}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j}}_{MA\ komponenta}.$$

Pošto je model pokretnih sredina konačnog reda uvek stacionaran i autoregresivni model konačnog reda uvek invertibilan onda važi sledeće:

- $ARMA(p,q)$ model je stacionaran ako AR komponenta ispunjava uslove stacionarnosti,
- $ARMA(p,q)$ model je invertibilan ako MA komponenta ispunjava uslove invertibilnosti,

Ukoliko je $ARMA(p,q)$ model stacionaran, onda može da se predstavi kao model pokretnih sredina sa beskonačno mnogo parametara, a ukoliko je invertibilan može da se predstavi kao autoregresivni model sa beskonačno mnogo parametara.

Prognoziranje budućeg kretanja vremenske serije jeste jedan od osnovnih zadataka analize vremenskih serija. U postupku predviđanja mogu se koristiti različite specifikacije od kojih su $ARMA$ modeli samo jedna. Najčešće korišćen kriterijum za određivanje prognoze vremenske serije jeste prognoziranje sa minimalnom srednje kvadratnom greškom. Neka su :

- X_{t+h} buduća vrednost vremenske serije za interval h
- $\hat{X}_{t+h}$ prognozirana vrednost vremenske serije za interval h

a srednje kvadratna greška prognoziranja je

$$E\left(X_{t+h} + \hat{X}_{t+h}\right)^2.$$

Ideja je da se na osnovu poznatih vrednosti vremenske serije formira $\hat{X}_{t+h}$ za koje srednje kvadratna greška prognoziranja ima minimalnu vrednost.

1.6. Nestacionarne vremenske serije

Jedna od osnovnih karakteristika najvećeg broja makroekonomskih vremenskih serija jeste tendencija dugoročnog rasta ili pada tokom vremena. Postojanje sistematske komponente rasta (pada) uobičajeno se opisuje na osnovu sledeće dve klase procesa:

- Trend-stacionarana klasa procesa
- Diferencno-stacionarna klasa procesa

Lieratura korištena u ovom poglavlju je [2,8,9].

Trend-stacionarna klasa procesa za vremensku seriju X_t definiše se na sledeći način:

$$Y_t = D_t + Z_t.$$

Definiše se kao vremenska serija stacionarna oko determinističke komponente koja može da se predstavi nekom matematičkom funkcjom od vremena. Najčešće je to linearna funkcija tako da se na dalje, bez umanjenja opštosti, smatra da je $D_t = \beta_0 + \beta_1 t$.

Ukoliko sa obe strane oduzmemo linearni trend, dobijamo stacionarnu vremensku seriju:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 t + Z_t \;\; /-(\beta_0 + \beta_1 t),$$

$$Y_t^* = Z_t.$$

Modeli kod kojih se stacionarnost postiže uklanjanjem determinističke komponente se nazivaju trend **stacionarni modeli**.

Druga grupa obuhvata vremenske serije sa sledećim karakteristikama:

- Varijansa vremenske serije nije stabilna, već funkcija vremena koja se linearno povećava sa protokom vremena.

- Autokovarijansna funkcija zavisi od k i od vremenskog trenutka t. Vrednosti autokovarijansnih koeficienata se linearno povećavaju tokom vremena.
- Obična autokorelaciona funkcija, pri uslovu $t > k$, uzima niz vrednosti koje su bliske vrednosti 1.

Pored naziva diferencno staconarna klasa procesa u literaturi se koriste i sledeći nazivi:

- Integrisano-stacionarna vremenska serija,
- Vremenska serija sa stohastičkim trendom,
- Vremenska serija sa jediničnim korenom,
- Slučajan hod (sa konstantnm pripraštajem).

Grupa diferencno stacionarnih procesa obuhvata one modele kod kojih se stacionarnost postiže odgovarajućim transformacijama. Ono što uzrokuje nestacionarnosti procesa je nestacionarnost stohastičke komponente. Da bi se definisale transformacije potrebno je da se utvrdi uzrok nestacionarnosti procesa, a kako bi se lakše ilustovale transformacije potrebno je definisati slučajan hod.

Definicija 1.6.1. [8] $\{X_t, t \in T\}$ je **proces slučajnog hoda** ako važi:

$$X_t = X_{t-1} - \varepsilon_t$$

gde je $\{\varepsilon_t, t \in T\}$ proces belog šuma.

Vremensku seriju koja prati slučajan hod karakterišu periodi rastućeg i opadajućeg trenda, gde se trend se menja iznenada i promena je nepredvidiva.

Postupak kojim se opisuje staconarnost:

Ukoliko se sa obe strane oduzme X_{t-1}, dobijamo

$$X_t = X_{t-1} - \varepsilon_t \; / -X_{t-1}$$

$$\nabla X_t = \varepsilon_t$$

dobija se stacionaran proces. Predhodna operacija se zove diferenciranje, a operator ∇ je diferencni operator. Procesi kod kojih se stacionarnost postiže diferenciranjem se nazivaju diferencno stacionarni procesi. Nekada je potrebno više puta diferencirati proces da bi se postigla stacionarnost

Definicija 1.6.2. [8] Stohastički proces $\{X_t, t \in T\}$ je **integrisan proces reda $\boldsymbol{d}$** ako može da bude transformisan u stacionaran stohastički proces diferenciranjem d puta.

Definicija 1.6.3. [8] $\boldsymbol{ARIMA}$ $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{q})$ je proces je definisan sa

$$\varphi(L)\nabla^d X_t = \theta(L)\varepsilon_t \Leftrightarrow \varphi(L)(1-L)^d X_t = \theta_0 + \theta(L)\varepsilon_t$$

gde su

- d diferencni opertor reda d,
- $\varphi(L)$ karakteristični polinom $AR(p)$ procesa,
- $\theta(L)$ karakteristični polinom $MA(q)$ procesa,
- ε_t proces belog šuma.

Za polinome $\varphi(L)$ i $\theta(L)$ pretpostavlja se da ne sadrže zajedničke faktore.

Definicija 1.6.4. [8] $\{X_t, t \in T\}$ je **proces slučajnog hoda sa konstantim priraštajem** ako važi:

$$X_t = c + X_{t-1} - \varepsilon_{t,}$$

gde je $\{\varepsilon_t, t \in T\}$ proces belog šuma i c konstanta.

Slučajan hod sa konstantnim priraštajem takođe spada u grupu diferencno stacionarnih procesa, jer se njegovim diferenciranjem dobija stacionarna vremenska serija.

$$\nabla X_t = \varepsilon_t + c.$$

Stacionarnost se postiže tako što prvo uklonimo determinističku komponentu, a zatim primeni diferenciranje.

Dati tip procesa obuhvata kao svoje specijalne slučajeve predhodno razmatrane modele na sledeći način:

AR(p)	MA(q)	ARMA(p,q)	Beli šum	Slučajan hod
ARIMA(p,0,0)	ARIMA(0,0,q)	ARIMA(p,0,q)	ARIMA(0,0,0)	ARIMA(0,1,0)

Tabela 1. [8] Specijalni slučajevi $ARIMA$ procesa

1.7. Vektorske vremenske serije

Vektorska vremenska serija se definiše na sledeći način:

$$\boldsymbol{X_t} = \begin{bmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \\ \vdots \\ X_{mt} \end{bmatrix}, t = 1,2, \dots .$$

U ovom vektoru dimenzime $m \times 1$ komponente su vremenske serije $X_{1t}, X_{2t}, \dots, X_{mt}$. Vektorska vremenska serija $\boldsymbol{X_t}$ je slabo stacionarna ako zadovoljava sledeća dva uslova:

- očekivanje je konstantno, tj.:

$$E(\boldsymbol{X_t}) = \boldsymbol{\mu} = const, \text{ gde je } \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} E(X_{1t}) \\ E(X_{2t}) \\ \vdots \\ E(X_{mt}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_m \end{bmatrix}, t = 1,2, \dots$$

- kovarijansa je funkcija od $t - s$, tj.:
  $cov\left(X_{it}, X_{js}\right) = \gamma_{ij} = g(t - s), i, j = 1,2, \dots, m = 1,2, \dots$.

Kovarijansna matrica vektorske vremenske serije data je na sledeći način:

$$\Gamma_k = E(\boldsymbol{X_t} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X_{t-k}} - \boldsymbol{\mu})^T = \begin{bmatrix} \gamma_{11}(k) & \gamma_{12}(k) & \dots & \gamma_{1m}(k) \\ \gamma_{21}(k) & \gamma_{22}(k) & \dots & \gamma_{2m}(k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{m1}(k) & \gamma_{m2}(k) & \dots & \gamma_{mm}(k) \end{bmatrix}.$$

Vektorska vremenska serija je slabo stacionarna ako svi elementi kovarijansne matrice Γ_k zavise samo od rastojanja k. Iz uslova slabe stacionarnosti pojedninačnih vremenskih serija u vektoru $\boldsymbol{X_t}$ ne proizilazi slaba stacionarnost vremenske serije $\boldsymbol{X_t}$.

Neka je D dijagonalana matrica dimenzije $m \times m$, čiji su elementi varijanse pojednih članova vremenske serije $\boldsymbol{X_t}$: $D = diag[\gamma_{11}(0), \gamma_{22}(0), \dots, \gamma_{mm}(0)]$, matrica autokorelacionih koeficienata $\boldsymbol{\rho_k}$ se definiše na sledeći način:

$$\boldsymbol{\rho_k} = \mathrm{D}^{-1/2}\Gamma_k D^{-1/2},$$

$$\boldsymbol{\rho_k} = \begin{bmatrix} \rho_{11}(k) & \rho_{12}(k) & \dots & \rho_{1m}(k) \\ \rho_{21}(k) & \rho_{11}(k) & \dots & \rho_{2m}(k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{m1}(k) & \rho_{m2}(k) & \dots & \rho_{mm}(k) \end{bmatrix},$$

gde je $\rho_{ij}(k) = \frac{\gamma_{ij(k)}}{\sqrt{\gamma_{ii(0)}\gamma_{jj(0)}}}$.

Definicija 1.7.1. [2] Vektorski m −dimenzionalni proces belog šuma je definisan sa

$$\boldsymbol{\varepsilon_t} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \vdots \\ \varepsilon_{mt} \end{bmatrix},$$

$$E(\boldsymbol{\varepsilon_t}) = 0.$$

Definicija 1.7.2. [2] **Linearni vektorski stohastički proces** je definisan sa

$$X_t = \mu + \varepsilon_t + \Theta_1\varepsilon_{t-1} + \Theta_2\varepsilon_{t-2} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \Theta_i\varepsilon_{t-i},$$

gde su

- $\varepsilon_{t-1}, t = 1,2, \dots$, vektorski m −dimenzioni procesi belog šuma,

- $\boldsymbol{\Theta_i} = \begin{bmatrix} {\theta_{11}}^i & \cdots & {\theta_{1k}}^i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ {\theta_{m1}}^i & \cdots & {\theta_{mk}}^i \end{bmatrix}, i = 1,2, \ldots$ matrice koeficienata.

Koristeći L operator vektorski linearni proces može da se predstavi na sledeći način:

$$\boldsymbol{X_t} - \boldsymbol{\mu} = \sum_{\boldsymbol{i=0}}^{\infty} \boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{L^i} = \boldsymbol{\Theta}(L)\boldsymbol{\varepsilon_t},$$

Ukoliko je linearni proces invertibilan onda je

$$\boldsymbol{X_t} - \boldsymbol{\mu} = \sum_{\boldsymbol{i=0}}^{\infty} \boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{X_{t-i}} - \boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{\varepsilon_t} = \sum_{\boldsymbol{i=0}}^{\infty} \boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{i}} L^i(\boldsymbol{X_{t-i}} - \boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{\varepsilon_t} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\Psi}(L)(\boldsymbol{X_t} - \boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{\varepsilon_t}.$$

Treba naglasiti da postoje sledeće tri grupe konačnih linearnih procesa vektorskih vremenskih serija:

- vektorski autoregersivni proces,
- vektorski proces pokretnih sredina,
- vektorski ARIMA proces.

2. Fazi skup

U sledećoj etapi su opisani osnovni pojmovi vezani za razumevanje fazi okruženja, odnosno pristup rešavanja problema neodređenosti baziran na fazi skupovima. U klasičnoj teoriji skupova, pripadanje objekta nekom skupu je jasno i precizno definisano: objekat ili pripada nekom skupu ili ne pripada, odnosno karakteristična funkcija uzima samo vrednosti 0 ili 1. Na žalost, veoma su česte situacije kada nije moguće napraviti jasnu razliku između pripadanja i nepripadanja nekog elelmenta datom skupu. Na primer, sistemi savremenog poslovanja, industrijskog inženjeringa, finansija i menadžerstva su izuzetno kompleksni i često ne raspolažu jasnim i preciznim informacijama, te tradicionalne tehnike ne uspevaju na najbolji način da ih oslikaju. Upravo iz tih razloga, biće predstavljena matematička aparatura pomoću koje se može predstaviti problem i računati sa tako nepreciznim pojmovima i tvrđenjima. Zapravo, fazi skup predstavlja uopštenje klasičnog skupa, kod kog se za svaki njegov elemenat određuje stepen pripadnosti skupu. U pisanju ovog poglavlja korištena je sledeća literatura [1,6,7,10,11,12,13].

2.1. Osnovne definicije i pojmovi

Osnovna razlika fazi skupova u odnosu na klasične je to što dozvoljavaju da neki element samo u određenoj meri pripada skupu. Funkcija kojom se opisuje stepen pripadnosti nekog elementa fazi skupu naziva se funkcija pripadnosti i data je sledećom definicijom [1,6,7].

Definicija 2.1.1. [7] **Funkcija pripadnosti,** μ, je preslikavanje $\mu : U \rightarrow [0,1]$ gde je U univerzalni skup.

Fazi skupovi se definišu preko svoje funkcije pripadnosti.

Definicija 2.1.2. [7] Neka je A klasičan podskup univerzalnog skupa U. **Fazi skup** A_f je skup uređenih parova $(x, \mu_{A_f}(x))$ definisan na sledeći način:

$$A_f = \left\{\left(x, \mu_{A_f}(x)\right) : x \in A, \mu_{A_f}(x) \in [0,1]\right\},$$

gde x predstavlja objekat klasičnog skupa A koji zadovoljava neku osobinu P, a $\mu_{A_f}(x)$ je broj iz intervala $[0,1]$ i označava koliki je stepen zadovoljenja osobine P.

U daljem radu koristiće se sledeća notacija: sa velikim štampanim latiničnim slovima $A, B, C, \ldots$ označavaće se klasični skupovi, a sa velikim štampanim latiničnim slovima sa indeksom f, $A_f, B_f, C_f, \ldots$ biće označeni fazi skupovi.

U sledećem primeru prikazana je razlika između klasičnih i fazi skupova.

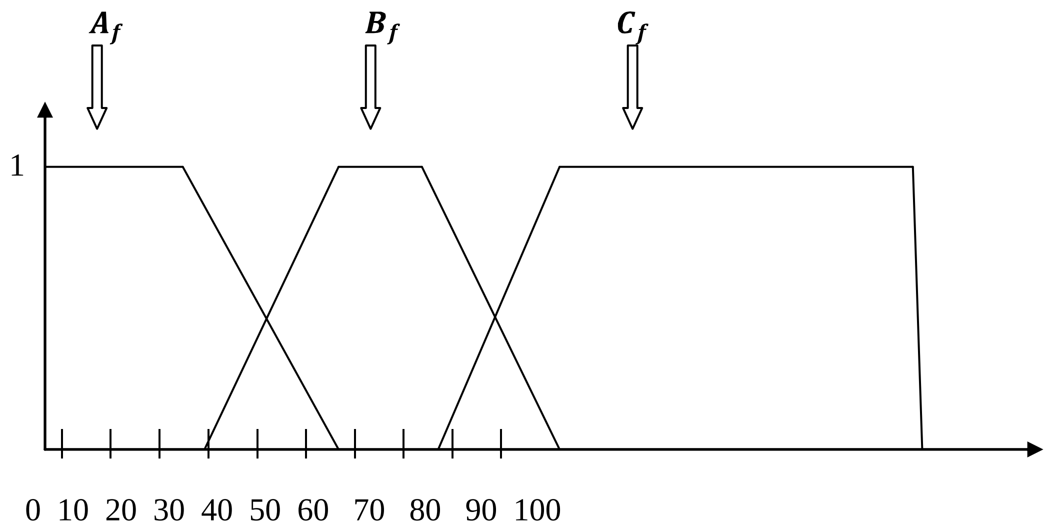
Primer 2.1.1. [1] Neka je dat klasičan skup A pomoću koga želimo da opišemo mlade ljude, odnosno neka je skup $A =$ {mladi ljudi} podskup skupa $U = [0,100]$. Pretpostavimo da je čovek mlad ako ima manje od 40 godina, dok u suprotnom čovek nije mlad. Karakteristična funkcija skupa $A =$ {mladi ljudi}, data je na sledeći način:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, 0 \leq x < 40 \\ 0, \quad\quad x \geq 40 \end{cases}$$

Možemo zaključiti da ovakav opis nije zadovoljavajući, jer ako posmatramo fazi skup B_f=*Tom je mlad*, dobijamo neodređenost. Na primer, osoba koja ima 39 godina, je starija od osobe koja ima 18 godina, a na osnovu date karakteristične funkcije obe osobe su kategorisane kao mlade. Takođe, na osnovu date funkcije pripadnosti, možemo da zaključimo da je osoba koja ima 40 godina iste starosti kao osoba koja ima 80 godina, dok je drastična razlika među odobama koje imaju 39 i 40 godina starosti.

Kod opisivanja lingvističkih promenljivih klasičnim skupovima dolazi do izražaja njihov nedostatak, koji se ne pojavljuje u teoriji fazi skupova, kod kog funkcija pripadnosti opisuje stepenom pripadnosti koji varira od 0 do 1.

Primer 2.1.2. [6] Neka je X skup svih ljudi. Posmatrajmo njegova tri podskupa: $A_f = \{mladi\ ljudi\}, B_f = \{ljudi\ srednjih\ godina\}$ i $C_f = \{stari\ ljudi\}$. Odgovarajuće funkcije pripadnosti date su na sledecoj slici.



Slika 6.[6] Funkcije pripadnosti odgovarajućih fazi skupova

Sa grafika se može primetiti da mladi ljudi koji imaju od 0 do 20 godina imaju vrednost funkcije pripadnosti 1, kako broj godina raste, vrednost njihove funkcije pripadnosti linearno opada. Slično je i kod ljudi koji po starosnoj dobi pripadaju skupu C_f,odnosno za ljude od 60 godina pa naviše, funkcija pripadnosti ima vrednost 1, a na intervalu od 45 do 60 godina, funkcija pripadnosti raste linearno. Slično je i kod ljudi koji pripadaju skupu B_f. Vrednost njihove funkcije pripadnosti je 1 na intervalu $[30,50]$, a na intervalima $[20,35]$ i $[45,60]$, funkcija uzima vrednosti iz intervala [0,1].

Analitički, date funkcije pripadnosti mogu biti predstavljene na sledeći način:

Na podskupu A_f

$$\mu_{A_f}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,20] \\ -\frac{1}{15}x + \frac{7}{3}, & x \in [20,35] \end{cases}$$

Na podskupu B_f

$$\mu_{B_f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{15}x - \frac{4}{3}, & x \in [20,35] \\ 1, & x \in [30,50] \\ -\frac{1}{15}x + 4, & x \in [45,60] \end{cases}$$

Na podskupu C_f

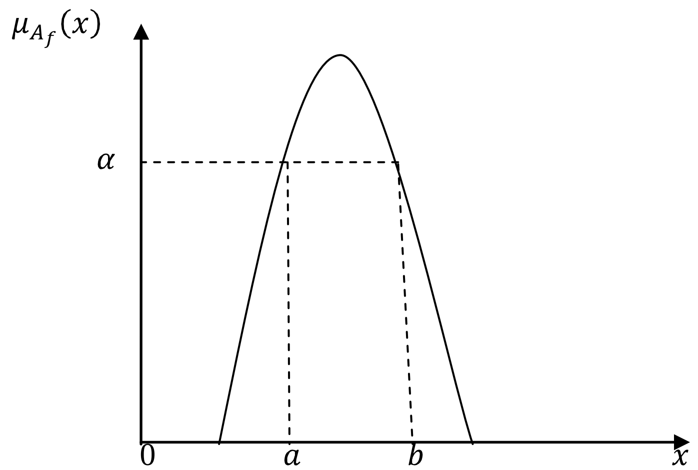
$$\mu_{C_f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{15}x - 3, & x \in [45,60] \\ 1, & x \in [60,100] \end{cases}$$

Definicija 2.1.3. [7] **α-presek** fazi skupa A_f, u oznaci A_α, predstavlja klasičan skup elemenata koji pripadaju fazi skupu A_f sa stepenom pripadnosti bar α, odnosno

$$A_\alpha = \left\{x \in U: \mu_{A_f}(x) \geq \alpha\right\}, \alpha \in [0,1].$$

α-presek pruža granicu nivoa poverenja α, koju se koristiti prilikom modeliranja donošenja odluka pomoću fazi skupova. Pomoću te granice moguće je odbaciti iz razmatranja one elemente x čiji je stepen pripadanja $\mu_{A_f}(x) < \alpha$.

Na sledećoj slici ilustrovan je α −presek.



Slika 7. [7] $\alpha -$ presek fazi skupa A_f

Teorema 2.1.1. [7] Za svaki fazi podskup A_f važi

$$A_f = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha A_\alpha ,$$

gde je ∪ unija fazi skupova.

<u>Dokaz</u>

Neka je x proizvoljan fiksan elemenat iz univerzalnog skupa U i neka je $\mu_{A_f}(x) = r$. Tada je $\mu_{\bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha A_\alpha}(x) = sup_{\alpha\in[0,1]}\mu_{\alpha A_\alpha}(x) = max\left(sup_{\alpha\in[0,r]}\mu_{\alpha A_\alpha}(x), sup_{\alpha\in(r,1]}\mu_{\alpha A_\alpha}(x)\right)$.

Kako je za $\alpha \in [0, r]$ uvek $\mu_{A_f}(x) = r \geq \alpha$, to je $\mu_{\alpha A_\alpha} = \alpha$, a za $\alpha \in (r, 1]$ uvek je $\mu_{A_f}(x) = r < \alpha$, pa je $\mu_{\alpha A_\alpha} = 0$, te važi

$$\mu_{\bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha A_\alpha}(x) = sup_{\alpha\in[0,1]}\alpha = r = \mu_{A_f}(x). \blacksquare$$

Definicija 2.1.4. [7] Fazi skup A_f je **konveksan** ako za svaka dva elementa $u, v \in A_\alpha$ i svako $\alpha \in [0,1]$ važi: $\lambda\, u + (1 - \lambda)\, v \in A_\alpha, \lambda \in [0,1]$; odnosno, ako i samo ako je svaki α-presek konveksan skup.

Definicija 2.1.5. [7] Fazi skup A_α je konveksan ako i samo ako važi :

$$\mu_{A_f}(\lambda\, x_1 + (1 - \lambda)\, x_2) \geq min\left\{\mu_{A_f}(x_1), \mu_{A_f}(x_2)\right\}, \text{ za } x_1, x_2 \in A_\alpha \text{ i } \alpha \in [0,1]$$

Prethodna definicija se može tumačiti na sledeći način: Ako se uzmu dva elementa x_1 i x_2 iz konveksnog fazi skupa A_α i povuče duž koja ih spaja, vrednost funkcije pripadnosti za svaku tačku sa te duži mora biti veća ili jednaka od minimuma vrednosti funkcije pripadnosti za elemente x_1 i x_2.

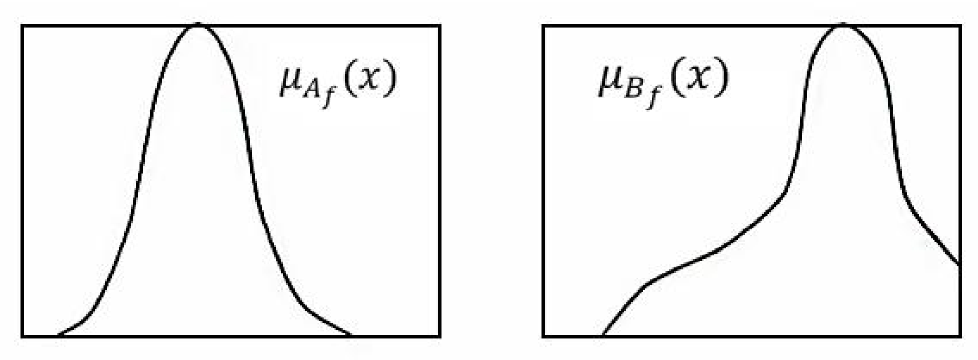
2.2. Operacije nad fazi skupovima

U ovom poglavlju akcenat je na fazi skupovima koji su definisani nad istim univerzalnim skupom. Neka su dati sledeći fazi skupovi:

$$A_f = \left\{\left(x, \mu_{A_f}(x)\right) : \mu_{A_f}(x) \in [0,1]\right\},$$

$$B_f = \left\{\left(x, \mu_{B_f}(x)\right) : \mu_{B_f}(x) \in [0,1]\right\}.$$

Operacije sa fazi skupovima definisane su preko operacija nad funkcijama pripadnosti.



Slika 8. [7] Funkcije pripadnosti fazi skupova A_f i B_f

Slede osvnovne definicije vezane za operacije nad fazi skupovima.

Definicija 2.2.1. [7] Fazi skupovi A_f i B_f su **jednaki,** u oznaci $A_f = B_f$, ako i samo ako za svako $x \in U$, važi da je $\mu_{A_f}(x) = \mu_{B_f}(x)$.

Definicija 2.2.2. [7] Fazi skup A_f je **podskup** fazi skupa B_f, u oznaci $A_f \subseteq B_f$, ako za svako $x \in U$, važi da je $\mu_{A_f}(x) \leq \mu_{B_f}(x)$.

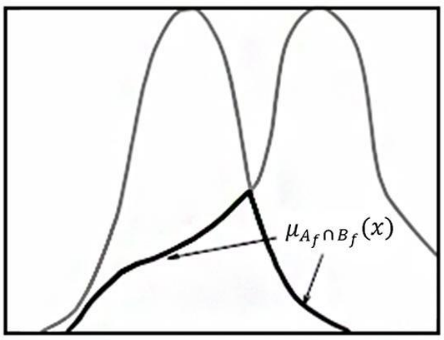
Definicija 2.2.3. [7] Fazi skup A_f je **strogi podskup** fazi skupa B_f, u oznaci $A_f \subset B_f$, ako je $A_f \subseteq B_f$ i $A_f \neq B_f$, odnosno

$$\begin{cases} \mu_{A_f}(x) \leq \mu_{B_f}(x), & \forall x \in U \\ \mu_{A_f}(x) < \mu_{B_f}(x), za\ najmanje\ jedno\ x \in U \end{cases}$$

Definicija 2.2.4. [7] Fazi skupovi A_f i ${A_f}^C$ su **komplementni** ako je $\mu_{{A_f}^c}(x) = 1 - \mu_{A_f}(x)$ ili $\mu_{{A_f}^c}(x) + \mu_{A_f}(x) = 1$. Funkcija pripadanja $\mu_{{A_f}^c}(x)$ je u odnosu na liniju $\mu = 0.5$ simetrična sa $\mu_{A_f}(x)$.

Definicija 2.2.5. [7] **Presek fazi skupova** A_f i B_f, u oznaci $A_f \cap B_f$ definišemo:

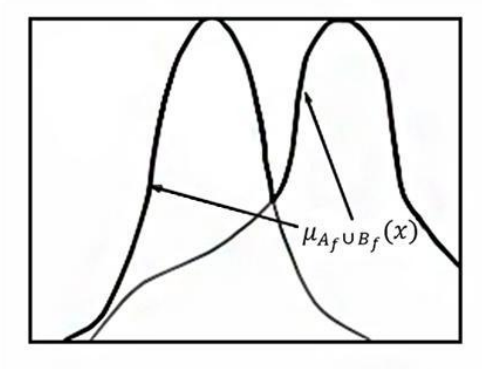
$$\mu_{\,A_f \cap B_f} = min\left(\mu_{A_f}(x), \mu_{B_f}(x)\right), x \in U.$$



Slika 9. [7] Funkcija pripadnosti preseka fazi skupova A_f i B_f

Definicija 2.2.6. [7] **Uniju fazi skupova** A_f i B_f, u oznaci $A_f \cup B_f$ definišemo:

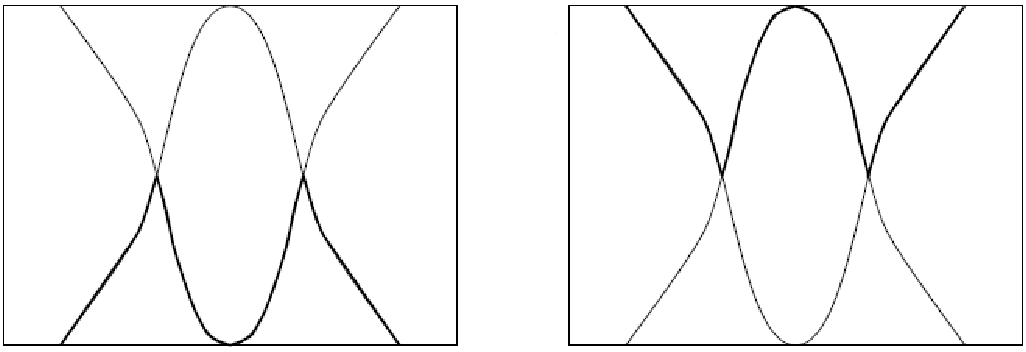
$$\mu_{A_f \cup B_f} = max\left(\mu_{A_f}(x), \mu_{B_f}(x)\right), x \in U \; .$$



Slika 10. [7] Funkcija pripadnosti unije fazi skupova A_f i B_f

Za razliku od klasičnih skupova, čiji članovi ili poseduju ili ne poseduju određenu osobinu, kod fazi skupova elementi mogu delimično posedovati neku osobinu. Zbog toga treba naglasiti da kod fazi skupova ne važi zakon isključenja trećeg tj.

$$A_f \cap A_f^{\,C} \neq \emptyset \text{ i } A_f \cup A_f^{\,C} \neq U$$



Slika 11. [7] Zakon isključenja trećeg ne važi kod fazi skupova

Odsustvo zakona isključenja trećeg je značajna osobina fazi skupova jer ih čini mnogo fleksibilnijim od klasičnih skupova i veoma pogodnim za opisivanje procesa sa nepotpunim, nejasnim i nepreciznim informacijama.

2.3. Trougaone norme

U ovoj glavi predstavljene su specijalne operacije na jediničnom intervalu [0,1], koje se zovu trougaone norme (*eng. triangular norms*). U matematičkoj literaturi su se prvi put javile 1942. godine u radu Mengera *(Karl Menger)*. Danas se najviše koristi definicija koju je dao Skalar 1959. godine (*Abe Skalar)*. Ove operacje su svoju upotrebu, osim u teoriji probabilističkih metričkih prostora, pronašle i u teroiji fazi skupova i fazi logike, te ovom prilikom biće dati osnovni pojmovi i definicije vezane za t −norme, gde je t dobijeno od trougaona. Rezultati prezentovani u ovom poglavlju si iz [1,6].

Definicija 2.3.1. [6] **Trougaona norma** T je funkcija $T: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ takva da za svako $x, y, z \in [0,1]$ važe sledeći uslovi:

- $(T1)$ $T(x,y) = T(y,x)$, komutativnost
- $(T2)$ $T\big(x, T(y,z)\big) = T(T(x,y),z)$, asocijativnost
- $(T3)$ $T(x,y) \leq T(x,z)$, za $y \leq z$, monotonost
- $(T4)$ $T(x,1) = x$, rubni uslov.

Direktno po definiciji sledi da je $T(0,x) = T(x,0) = 0$ i $T(1,x) = x$.

U sledećem primeru prikazane su četiri najvažnije t −norme.

<u>*Primer 2.3.1.* [6]</u>

1. $T_M(x,y) = min(x,y)$
2. $T_P(x,y) = xy$
3. $T_L(x,y) = max(0, x + y - 1)$
4. $T_W(x,y) = \begin{cases} min(x,y), ako\ je\ max(x,y) = 1 \\ 0, \quad inače \end{cases}.$

Za elementarne trougaone norme važi da je $T_W < T_L < T_P < T_M$, gde je $T_1 \leq T_2$ ako je $T_1(x,y) \leq T_2(x,y)$ za svako $(x,y) \in [0,1]$.

Asocijativnost date t −norme T omogućava njeno proširenje na n −arnu operaciju

$$T_{i=1}^{n}: [0,1]^n \to [0,1],$$

na sledeći način:

$$T_{i=1}^{n} x_i = T(T_{i=1}^{n-1} x_i, x_n) = T(x_1, \ldots, x_n).$$

Definicija 2.3.2. [6] Trougaona norma je **konveksna** kada za $\forall\, x, y, u, v \in [0,1]$ postoje $r \in [x,u]$ i $s \in [y,v]$, tako da važi $c = T(r,s)$, kad god je $T(x,y) \leq c \leq T(u,v)$.

Sledi tvrđenje o osobinama T_M i T_W nome.

Tvrđenje 2.3.3. [6]

i. Trougaona norma T_M je jedina t-norma koja zadovoljava $T(x,x)=x$ za sve $x\in[0,1]$.
ii. Trougaona norma T_W je jedina t-norma koja zadovoljava $T(x,x)=0$ za sve $x\in[0,1)$.

<u>*Dokaz*</u>

i. Neka za t −normu T važi $T(x,x)=x$ za sve $x\in[0,1]$. Tada za $y\leq x<1$ na osnovu monotonosti T imamo $y=T(y,y)\leq T(x,y)\leq min(x,y)=y$.
Odatle na osnovu komutativnosti i rubnog uslova sledi da je $T=T_M$.
ii. Neka za t −normu T važi $T(x,x)=0$ za sve $x\in[0,1)$. Tada za sve $y\in[0,x)$ važi
$$0\leq T(x,y)\leq T(x,x)=0,$$
što daje $T=T_W$.■

Trougaona norma T je striktna ako je neprekidna (kao funkcija dve promenljive) i važi

$$T(x,y)<T(x,z)$$

kad god je $x>0$ i $y<z$.

Osobina stiktne monotonosti je ekvivalnetna sa osobinom kancelacije (skraćivanja): za $x>0$, $T(x,y)=T(x,z)$, sledi $y=z$.

Sledi definicija trougaone konorme.

Definicija 2.3.4. [6] Trougaona norma S, $\boldsymbol{t}$ **−konorma,** je funkcija $S:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ takva da za svako $x,y,z\in[0,1]$ važe sledeći uslovi

- $(S1)$ $S(x,y)=S(y,x)$ komutativnost,
- $(S2)$ $S\big(x,S(y,z)\big)=S(S(x,y),z)$ asocijativnost,
- $(S3)$ $S(x,y)\leq S(x,z)$ za $y\leq z$ monotonost,
- $(S4)$ $S(0,x)=x$ rubni uslovi.

Očigledno je da se se t −norme i t −konorme razlikuju samo po rubnnim uslovima.

U sledećem primeru biće prikazane četiri najvažnije t-konorme.

<u>*Primer 2.3.2. [6]*</u>

- $S_M(x,y)=max(x,y)$
- $S_P(x,y)=x+y-xy$
- $S_L(x,y)=min(1,x+y)$
- $S_W(x,y)=\begin{cases} max(x,y), & ako\ je\ min(x,y)=0 \\ 1, & inače \end{cases}$.

Tvrđenje 2.3.2 t −konorma S predstavlja **dualnu operaciju** za datu t −normu T, odnosno za $\forall\, x, y, z\ \in [0,1]$ važi da je:

$$S(x, y) = 1 - T(1 - x, 1 - y).$$

Bilo koja t −konorma S se može predstaviti na ovaj način.

Operator negacije, takođe mozemo posmatrati kao klasu operatora (odnosno kao t −normu) definisanu sa η: $[0,1] \longrightarrow [0,1]$, tavih da je:

a) $\eta(0) = 1, \eta(1) = 0$,
b) η je nerastuća funkcija
c) $\eta(\eta(x)) = x$.

Operator implikacije fazi logike, predstavlja generalizaciju klasičnog operatora implikacije dvovrednosne logike. Specijalno, fazi implikaciju možemo predstaviti kao preslikavanje:

$$\Longrightarrow : [0,1] \times [0,1] \to [0,1].$$

Gde se restrikcija na $\{0,1\} \times \{0,1\}$, svodi na istinitosnu tablicu matematičke implikacije dvo-vrednosne logike.

Primer 2.3.3. [1]:

- $(x \Rightarrow y) = \begin{cases} 1, ako\ x \leq y \\ 0, ako\ x \geq y' \end{cases}$
- $(x \Rightarrow y) = min(1, (1 - x - y))$,
- $(x \Rightarrow y) = min(y, (1 - x))$.

Kao i izbor t −normi, t −konormi, tako i izbor operatora negacije i fazi implikacije, takođe, zavisi od problema koji se posmatra.

2.3.1. Operacije nad fazi skupovima bazirane na t-normama i t-konormama

Kako trougaona norma predstavlja uopstenje operacije preseka i trougaona konorma predstavlja uopstenje operacije unije, na formalan način, biće definisane, operacije preseka i unije fazi skupova bazirane na trougaonim normama i trougaonim konormama (videti [12]).

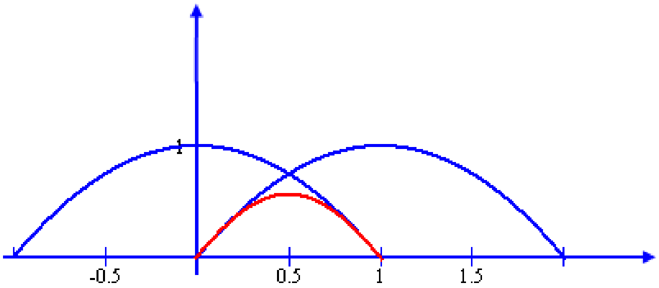
Definicija 2.3.1.1. [12] Neka je T proizvoljna t - norma. T– **presek,** $A \cap B$, fazi skupova A_f i B_f se definiše na sledeći način:

$$\mu_{A \cap B}(x) = T\left(\mu_{A_f}(x), \mu_{B_f}(x)\right), \forall x \in U.$$

Primer 2.3.1.1.

Neka su dati fazi skupovi A_f i B_f čije su funkcije pripadnosti $\mu_{A_f} = 1 - x^2$ definisane na intervalu $[-1,1]$ i $\mu_{B_f} = 1 - (1 - x^2)$ definisana na intervalu $[0,2]$ i neka je data trougaona norma $T(x, y) = xy$. Tada dobijamo da je funkcija pripadnosti fazi preseka $A \cap B = \mu_{A \cap B}(x) = (1 - x^2)\big(1 - (1 - x^2)\big)$.

Na sledećoj slici crvenom bojom je prikazan presek fazi skupova A_f i B_f.



Slika 12. [12] $T-$ **presek** fazi skupova A_f i B_f

Definicija 2.3.1.2. [12] Neka je S proizvoljna *t* - konorma. $S-$ **unija,** $A \cup B$, fazi skupova A_f i B_f se definiše na sledeći način:

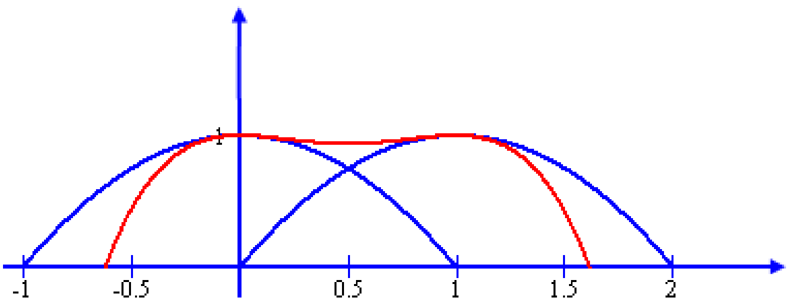
$$\mu_{A \cup B}(x) = S\left(\mu_{A_f}(x), \mu_{B_f}(x)\right), \forall x \in U.$$

Primer 2.3.1.2.

Neka su dati fazi skupovi kao u predhodnom primeru i neka je data trougaona konorma $S(x, y) = x + y - xy$. Tada se dobija da je funkcija pripadnosti fazi unije $A \cup B$ data na sledeći način:

$$\mu_{A \cup B}(x) = 1 - x^2 + 1 - (1 - x^2) - (1 - x^2)\big(1 - (1 - x^2)\big) = \\ -x^4 + 2x^3 - x^2 + 1$$

Na sledećoj slici crvenom bojom je prikazana unija fazi skupova A_f i B_f.



Slika 13. [12] S $-$unija fazi skupova A_f i B_f

2.4. Fazi brojevi

Korišćenje fazi skupova i fazi logike, kao matematičkog modela za modeliranje fazi podataka, proširilo se na mnoga polja nauke i tehnologije. Nepreciznost posmatranih vrednosti slučajnih promenljivih rezultirala je zamenom brojeva intervalima, ili preciznije, fazi intevalima. U narednom delu biće prikazan specijalan slučaj fazi skupova, fazi brojevi. Više o ovoj temi se može naći u [1,6,7,12,13].

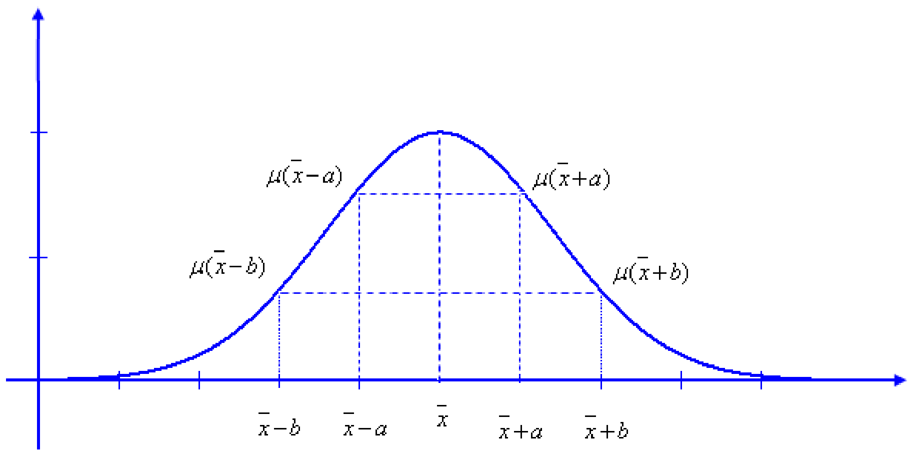
Definicija 2.4.1. [13] Fazi podskup A_f od R je **fazi broj** ako zadovoljava sledeće uslove:

- $\mu_{A_f}(x) = 1$, za neko $x \in R$, odnosno A_f je normalizovan skup,
- $x < y < z \Rightarrow \mu_{A_f}(y) \geq min\left(\mu_{A_f}(x), \mu_{A_f}(z)\right), \forall x, y, z \in R$, tj. A_f je konveksan skup.

Predhodna definicija uopštava pojam intervala. Naime, za svako $\alpha \in (0,1)$, odgovarajući α-presek $[A]_\alpha$ fazi broja A_f je zatvoren interval.Važi još i da ako je $\mu_{A_f}(x) = 1$, za neko $x \in R$ tada $\mu_{A_f}|_{[-\infty,x]}$ je monotono neopadajuća funkcija, a $\mu_{A_f}|_{[x,\infty]}$ je monotono nerastuća funkcija. Takođe vidimo da su realni brojevi, fazi brojevi.

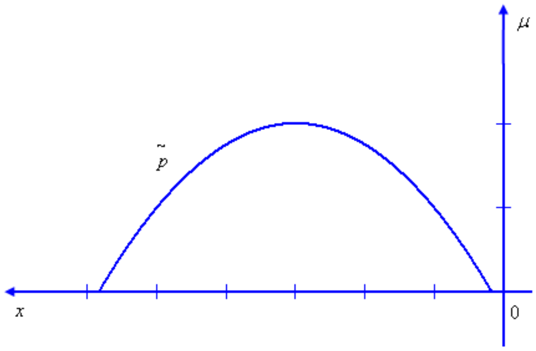
Vrednost x kojoj odgovara maksimalni stepen pripadnosti, naziva se *modalna vrednost* fazi broja A_f. Sa $P'(R)$ označen je skup svih mogućih fazi brojeva A_f.

Definicija 2.4.3. [6] Fazi broj $A_f \in P'(R)$ je **simetričan,** ako njegova funkcija pripadnosti $\mu_{A_f}(x)$, ako je $\mu_{A_f}(\bar{x} + x) = \mu_{A_f}(\bar{x} - x), \forall x \in R$.



Slika 14. [13] Funkcija pripadnosti simetričnog fazi broja

Definicija 2.4.4. [13] Fazi broj $A_f \in P'(R)$ je strogo pozitivan, u oznaci $A_f > 0$, ako i samo ako nosač tog fazi broja $sup(A_f) \subseteq (0, \infty)$ ili je fazi broj strogo negativan, u oznaci $A_f < 0$, ako i samo ako $sup(A_f) \subseteq (-\infty, 0)$.
Na sledećoj slici prikazan je primer funkcije pripadnosti strogo negativnog fazi broja.



Slika 15. [13] Funkcija pripadnosti strogo negativnog fazi broja

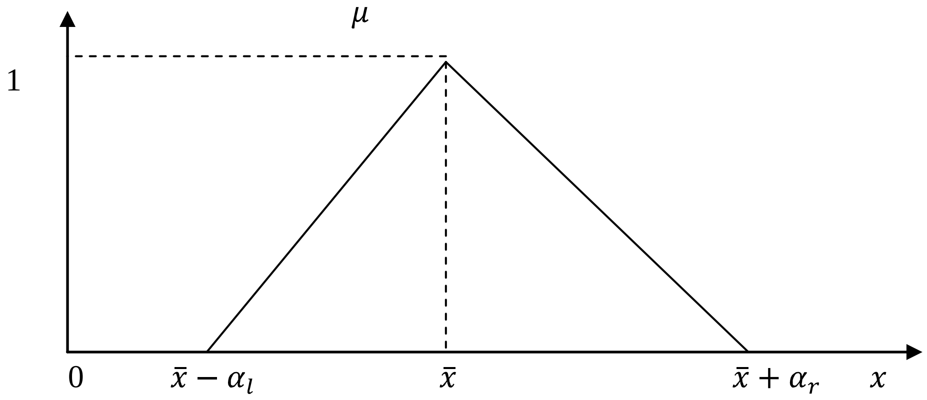
Definicija 2.4.5. [13] Fazi broj $A_f \in P'(R)$ naziva se *fazi-nula* broj, u oznaci $sgn(A_f) = 0$, ako nije ni pozitivan ni negativan, tj. ako $0 \in supp(A_f)$.

2.4.1. Trougaoni fazi brojevi

Sa stanovista primene trougaoni fazi brojevi su i najčešce korisćeni fazi brojevi. Koriste se u drustvenim naukama, menadžmentu, finansijama, mnogim drugim naukama. Trougaoni fazi brojevi imaju linearnu funkciju pripadnosti, te se zato nazivaju i linearni videti ([12,13]). Njihova funkcija pripadnosti je definisana na sledeći način:

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{x - \bar{x}}{\alpha_l}, \bar{x} - \alpha_l \leq x \leq \bar{x} \\ 1 - \dfrac{x - \bar{x}}{\alpha_r}, \bar{x} \leq x \leq \bar{x} + \alpha_r \\ \quad 0, \qquad inače \end{cases}$$

Trougaoni fazi broj se oznacava sa $p = tfn(\bar{x}, \alpha_l, \alpha_r)$ ili $p = (\bar{x} - \alpha_l, \bar{x}, \bar{x} + \alpha_r)$, gde je $\bar{x}$ modalna vrednost fazi broja, a α_l i α_r predstavljaju odstupanje sa leve, odnosno desne strane od modalne vrednosti.



Slika 16. [13] Trougaoni fazi broj

Interval $[\,\bar{x}-\alpha_l, \bar{x}+\alpha_r]$ se naziva *nosač fazi broja*. Često se u praksi tacka $\bar{x}$ nalazi u sredini nosećeg intervala, $\bar{x}=\frac{\bar{x}-\alpha_l+\bar{x}+\alpha_r}{2}$ te zamenjujući tu vrednost u funkciji pripadnosti dobijamo simetričan (centralni) trougaoni fazi broj.

Jedna od bitnih osobina trougaonih fazi brojeva je to što mogu lako da se konstruišu na osnovu malog broja podataka kojim se raspolaže. Pretpostavka je da se može odrediti najmanja moguća i najveća moguća vrednost neke neprecizne vrednosti koja se posmatra. Na taj način se dobija noseći interval $[\,\bar{x}-\alpha_l, \bar{x}+\alpha_r]$. Dalje, ako se odredi kao najpogodniji da predstavi tu posmatranu vrednost, onda će vrh trougaonog fazi broja biti u $(\bar{x}, 1)$. Na taj način se dobijaju tri vrednosti pomoću kojih se jednostavno može konstruisati trougaoni fazi broj i zapisati njegova funkcija pripadnosti u skladu sa predhodno navedenim zapisom.

3. Fazi logika

Klasična logika se bavi tvrdnjama koje su ili tačne ili netačne, nju takođe nazivamo i dvovrednosna logika. Za razliku od klasične, viševrednosna logika ima više od dve istinitosne vrednosti i predstavlja uopštenje klasične logike. Fazi logika proširuje viševrednosnu logiku, jer se bavi fazi skupovima i fazi relacijama. Fazi logika pruža metodologiju za rad sa lingvističkim promenljivim i olakšava opisivanje modifikatora kao što su "skoro", "malo", ''veoma"… Uvođenjem fazi skupova i fazi relacija u sistem viševrednosne logike, Zadeh *(Zadech)* (1973.) je uveo novu naučnu oblast poznatu kao *fazi logika*. Litertura korištena u izradi ovog dela rada je [1,6,7,13]

3.1. Viševrednosna logika

Oduvek se sumnjalo da osnovna pretpostavka klasične logike, da je svaka tvrdnja ili tačna ili netačna, ne mora uvek biti ispravna. Jedan od razloga za sumnju je to što je istinitosna vrednost nekog događaja u budućnosti nam nije poznata. Kao na primer u slučaju iskaza: "Sutra će padati kiša." Vrednost ovog događaja ne možemo da procenimo ni kao tačnu ni kao netačnui i biće nam poznata tek kada se desi događaj. Klasična dvovrednosna logika nije dovoljna za opisivanje istinitosnih vrednosti ovakvih događaja. Iz tog razloga se javila potreba za uvođenjem treće istinitosne vrednosti koja nije u potpunosti ni tačna, ni netačna. Više o ovoj temi se može naći u [7,13].

Navodimo Lukašievičevu tro-vrednosnu logiku koja je nastala dvadesetih godina prošlog veka (videti [7,13]).

Pretpostavimo da neki iskaz može da ima tri istinitosne vrednosti: "tačan" koji označavmo sa 1, "netačan" koji označavamo sa 0 i "neutralan" u oznaci $\frac{1}{2}$. One formiraju sledeći skup istinitosnih vrednosti: $T_3 = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$.

Ako su p i q izrazi čije se vrednoti nalaze u T_3, onda su logički veznici definisani na sledeći način.

Negacija: $\boldsymbol{\overline{p} = 1 - p}$

Konjunkcija: $\boldsymbol{p \wedge q = min(p, q)}$

Disjunkcija: $\boldsymbol{p \vee q = max(p, q)}$

Implikacija: $\boldsymbol{p \Rightarrow q = min(1, 1 - p + q)}$

Istinitosne vrednosti datih izraza date su u sledećoj tabeli.

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$
1	1	0	0	1	1	1
1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
1	0	0	1	0	1	0
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	1	0	0	1	1
0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	1	1	0	0	1

Tabela 2. [7] Tabela istinitosnih vednosti za p i $q \in T_3$

Tro-vrednosna logika predstavlja uopštenje dvovrednosne logike. Dalje uopštavanje dozvoljava izrazima da imaju više od tri vrednosti. Za bilo koi priprodan broj $n \geq 3$ istinitosne vrednosti biće prikazane u vidu racionalnih brojava na intervalu $[0,1]$, tako da dele taj interval na jednake delove i čine vrednosti u skupu istinitosnih vrednosti $T_n = \left\{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$ i na taj način se dobija viševrednosna logika.

3.2. Osnovni pojmovi fazi logike

Promenljive čije vrednosti su izražene rečima ili rečenicama,nazivaju se lingvističke promenljive. One ne mogu biti precizno okarakterisane, te se koriste fazi skupovi i fazi logika kako bi se aproksimirali i na taj način dobili precizne podatke. Posmatraćemo lingvističke promenljive i lingvističke modifikatore kao bitan aspekt fazi logike. Lingvističke promenljive imaju važnu ulogu u nekim oblastima finansijskih i menadžerskih sistema, za njih su od značaja lingvističke promenljive kao što su "inflacija", "rizik", "profit" i sl.

Neka je $x \in U$, dat je fazi skup sa funkcijom pripadnosti $\mu_A(x)$ i neka je m lingvistički modifikator koji opisuje pojmove kao što su negacija, veoma, skoro i sl. Sa mA označava se modifikovan fazi skup sa funkcijom pripadanja $\mu_{mA}(x)$ i pomoću njega definiše se sledeće:

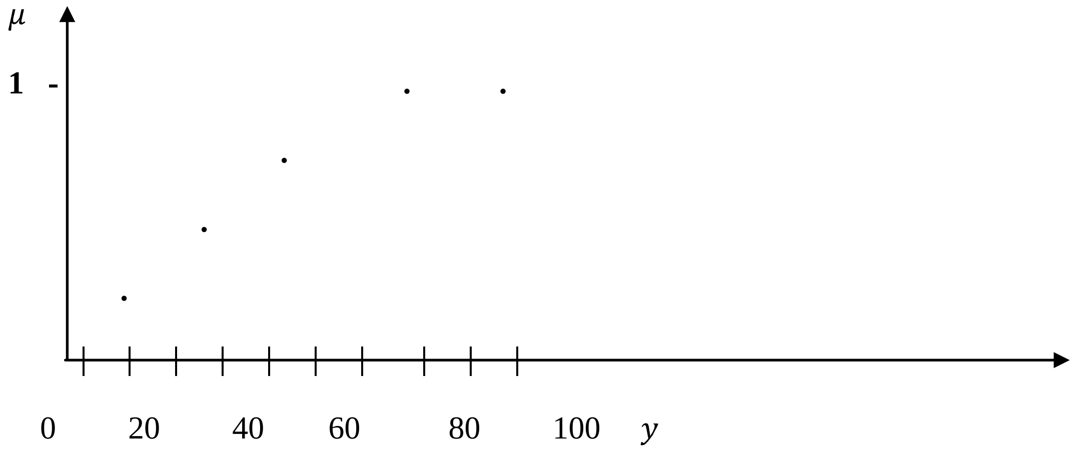
$$negacija: \mu_{neA}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

$$veoma: \mu_{veomaA}(x) = [\mu_A(x)]^2$$

$$skoro: \mu_{skoroA}(x) = [\mu_A(x)]^{\frac{1}{2}}$$

Primer 3.2.1. [7]

Neka je dat fazi skup $B_f = \{dobar\ kredit\}$, čija je funkcija pripadnosti opisana na sledećem grafiku



Slika 17. [7] Funkcija pripadnosti fazi skupa $B_f = \{dobar\ kredit\}$

y	0	20	40	60	80	100
$\mu_{dobar}(y)$	0	0.2	0.4	0.7	1	1

Tabela 3.[7] Tabelarni prikaz funkcije pripadnosti fazi skupa $B_f = \{dobar\ kredit\}$

Promenljiva y je data na univerzalnom skupu $U = \{0,20,40,60,80,100\}$, koji predstavlja diskretan skup za opisivanje kreditnog rejtinga.

Fazi skup $B_f = \{dobar\ kredit\}$ modifikovaćemo pomoću modifikatora koji su predhodno navedeni.

y	0	20	40	60	80	100
$\mu_{loš}(y)$	1	0.8	0.6	0.3	0	0
$\mu_{veomadobar}(y)$	0	0.04	0.16	0.49	1	1
$\mu_{skorodobar}(y)$	0	0.45	0.63	0.84	1	1

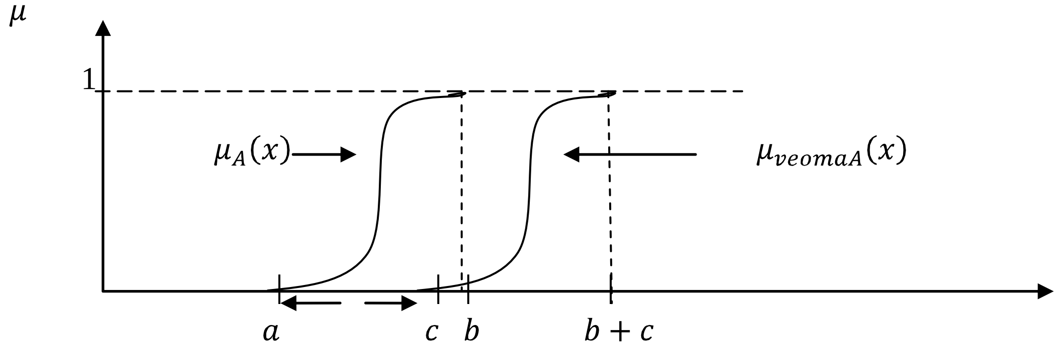
Tabela 4.[7] Tabelarni prikaz za modifkovani fazi skup $B_f = \{dobar\ kredit\}$

Na ovaj način predstavljen mA bi trebao na adekvatan način da izrazi modifikovane lingvističke promenljive. Ipak, ne postoji jedinstven način da se to uradi.

Na primer, modifikator $veoma$, takođe može biti izražen preko smene funkcije $\mu_A(x)$ koja je na grafiku pomera u desno.

$$\mu_{veomaA}(x) = \mu_A(x - c), a + c \leq x \leq b + c,$$

Gde je $c > 0$, odgovarajuća konstanta. Takođe i $skoro$ mođe biti predstavljano smenom koja funkciju $\mu_A(x)$ pomera u levo.



Slika 18. [7] Modifikator veoma

3.3. Fazi relacije

Fazi relacije predstavljaju jedan od bitnih elemanata pri analizi fazi vremenskih serija. Koriste se u određivanju stepena autokorelisanosti među fazi vremenskim serijama i na osnovu fazi relacija određuje se fazi relacionu matricu, pomoću koje se predviđa buduća vrednost fazi vremenske serije. Upravo međuzavisnost vremenskih serija ukazuje na potrebu da se vremenske serije posmatraju u njihovim relacijama, kako bi doneseni zaključci bili što relevantniji. U daljem tekstu objašnjeno je na koji način se koriste fazi relacije i kako na nam one pomažu pri donošenju odluka. Literatura u kojoj se može naći više o fazi relacijama je [1].

Klasična n-vrednosna relacija je podskup $\mathcal{R}$, Kartesianovog proizvoda *(Cartesian),* $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$ n skupova. Prema tome, n-vrednosna fazi relacija na skupu $V = U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$ je fazi podskup R_f od U, odnsno $R_f: V \rightarrow [0,1]$.

Na primer, R_f može biti dato na sledeći način: R_f =*je mogo bitnije od* i ono predstavlja dvovrednosnu fazi relaciju. Ova relacija često se koristiti pri donošenju odluka i rangiranju mogućnosti koristeći Satijev metod iz AHP-a *(eng. Analytic Hierarchy Process).* Selekcije koje se prave tokom istraživanja ili razvoja nekog projekta, su slične problemu determinisanja funkcije pripadnosti u fazi okruženju. Pretpostavimo da je potrebno izabrati opciju (alternativu) iz skupa opcija (alternativa), odnosno da je potrebno izabrati jednu od m kuća. Ova odluka treba biti izvršena na osnovu skupa kriterijuma, kao što su lokacija, cena i stanje u kom se kuća nalazi.

AHP procedura rangiranja je linearni operator, odnosno ponderisani prosek stepena bitnosti kriterijuma (*eng. weighted avreage of degress of importance of criteria*). Da bi se odredili stepeni bitnosti, AHP predlaže poređenje kriterijuma. Postavlja se pitanje kako numerički procentiti poređenje: *kriterijum i je mnogo bitniji od kriterijuma j*. Dakle, u problemima sličnim ovom, fazi relacije su prirodna pojava.

3.4. Fuzija fazi podataka

Pretpostavimo da u rešavanju problema statističke regresije, zavisna i nezavisna promenljiva X i Y nisu posmatrane sa potpunom preciznošću, odnosno podaci $\left(x^{(i)}, y\right), i = 1,2, \ldots n$ mogu biti predstavljani kao fazi podaci.

Pretpostavimo da je $X = (X_1, X_2, \ldots, X_d)$ d-dimenzionalni slučajan vektor, a Y je slučajna promenljiva. $X = a$ će biti genaralizovano sa $X = A_f$ gde $a \in R^d$ i A_f je fazi podskup od R^d, odnosno A_f je fazi skup oko određenog vektora. Tako da su posmatrani podaci u formi: *if-then* **(ako-onda)** pravila. Pravilo se označava sa R_l.

$\boldsymbol{R_l}$**: Ako** za X_1 imamo fazi podskup A_{f1i}, za X_2 fazi podskup je A_{f2i}, …, , za X_d fazi podskup je A_{fdi}, **onda** za Y imamo fazi podskup $B_f, i = 1,2, \ldots n$ gde su A_{fji} i B_{fi} fazi podskupovi od R.

Svrha regresije je da izvrši aproksimaciju $Y = g(X)$ na osnovu parova koji su predhodno dati. Dato je pravilo za regresiju tipa *model-free*. Ono se može predstaviti pomoću procesa koji sadrži nekoliko koraka:

1. **Korak**. Za modeliranje lingvističkih promenljivih A_{ji} i B_i postoje pravila (R_l).
2. **Korak.** Izbor logičkog veznika, kao što su *t-norme*, operator *fazi implikacije*,operator ako-onda *(if-then)*...
3. **Korak.**Izbor operatora fuzije.
4. **Korak**.Izbor operatora defazifikacije.

Jedan od načina za izbor logičkog veznika je:

Neka C, koje je fazi podskup od R, sadrži ogovarajuće vrednosti od Y i zavisi od ulaznih promenljivih $(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ ovu zavisnost mozemo opisati na sledeći način:

$$C(y) = \mathrm{S}\left(T(A_{ji}(x))\right), j = 1,2, \ldots, d, i = 1,2, \ldots, n,$$

gde je S dual za t-normu T.

Na primer, neka je S $=\vee=$ max i T $=\wedge=$ min, onda je

$$C(y) = max\left(min\, A_{ji}(x)\right), j = 1,2, \ldots, d, i = 1,2, \ldots, n.$$

Izbor T i S, $t -$konorme i $t -$norme zavisi od problema koji se posmatra ili može biti opravdan nekim kriteriumom za određivanje osetljvosti analize.

Da bi se dobila jedna izlazna vrednost za y (gde nam je $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$ ulazna vrednost) mora da transformiše funkcija pripadnosti C u realan broj $D(C)$. Ovakva transformacija naziva se *defazifikacija*. Poseban oblik defazifikacije, jeste usrednjavanje, odnosno izračunavanje očekivane vrednosti na sledeći način:

$$D(C) = \frac{\int yC(y)\,dy}{\int C(y)dy}$$

Sada će biti predstavljana metodologija dizajniranja koja je racionalnija u odnosu na predhodno prikazanu.

Veza između ulaznih i izlaznih veličina $y = f(x)$ je nepoznata i postoje samo neke fazi informacije o njima. Prema tome dobro dizajniranje, će dati dobru dobru aproksimaciju za *f*. Ova medtodologija dizajniranja se satoji od izbora funkcije pripadnosti za A_f i izbora logičkih veznika kao što su S,T, negacija, fazi implikacija, itd, i defazifikacije D, kako bi se dobilo preslikavanje:

$$f^*: (x_1, x_2, \dots, x_d) \to y^*$$

Potrebno je ispitati kakvo proširenje f^* bi bila dobra aproksimamcija za f. U osnovi ovo je problem aproksimacije funkcije. Tako da će metodologija dizajniranja dati dobru aproksimaciju za f ukoliko postoji $\varepsilon > 0$, za koje možemo naći f^*, tako da važi $\|f - f^*\| \leq \varepsilon$, gde $\|\cdot\|$ označava udaljenost između f i f^*. Koliko je aproksimacija, može biti pokazano pomoću Ston-Vaerštrasove teoreme *(Stone-Weierstrass),* koja poseduje odgovarajuću opremu za dizajniranje pomoću koje dobijamo odgovarajući podskup funkcija.

Teorema 3.4.1. [1] **Stone-Weierstrass-ova teorema**

Neka je (U, δ) kompaktan metrički prostor. Neka je $C(U)$ prostor realnih neprekidnih funkcija na U i neka je $H \subseteq C(U)$, onda H predstavlja gustinu na $C(U)$ ako zadovoljava

- H je podalgebra od $C(X)$, odnosno za $a, b \in R$ i f, g iz H su $af, f + g, fg$ iz H
- H postoji na celom U,odnosno za svako $u \in U$, postoji $h \in H$, tako da je $h(u) \neq 0$
- H razdvaja tačke, odnosno ako $u, v \in U$onda postoji $h \in H$ tako da je $h(u) \neq h(v)$

Dakle, predhodno opisana metodologija dizajna direktno zavisi od funkcije pripadnosti A_{fji}, B_{fi}, t-norme T, i t-konorme S i procesa defazifikacije koji direktno vodi do finalnog y^*. Dakle, metodologija dizajna je trojka $(\mathcal{M}, \mathcal{L}, \mathcal{D})$, gde $\mathcal{M}$ označava klasu funkcija pripadnosti, $\mathcal{L}$ označava klasu logičkih veznika, a $\mathcal{D}$ proces defazifikacije. U izradi ovog poglavlja korištena je literatura [1].

4. Fazi vremenske serije

Problem modeliranja sistema i samo identifikovanje problema, privuklo je značajnu pažnju poslednjih decenija, naročito zbog velike primene modeliranja u raznim poljima. U ovom poglavlju biće predstavljeni osnovni pojmovi i definicije vezane za modeliranje fazi vremenskih serija, njihovu anallizu i predviđanje kroz fazi relaciju Markova.

Poznato je da se profit koji se ostvaruje od investiranja, ne mora poklapati sa predviđenom vrednosti. Što je veći stepen poverenja u tačnost predviđene vrednosti, investitori se usuđuju da ulože više novca, što rezultira povećanjem profita. Sa druge strane, ako je stepen poverenja u predviđenu vrednost mali, investitori neće investirati mnogo kapitala, sto implicira da će ostvariti i manji profit. Odnosno, investitori se neće usuditi da ulažu mnogo kapitala u datu investiciju. Iz tog razloga, prikazana je studija koja na osnovu funkcije poverenja, objašnjava rezultate dobijene kao predviđenu vrednost viševrednosnih fazi vremenskih serija, odnosno objašnjava stepen poverenja, koji dati model ima za predviđeni rezultat. Rezultati prikazani u ovom poglavlju su iz literature označena sa [1,14,15,16].

4.2. Osnovne definicije i pojmovi

Koncept fazi logike se primarno fokusira na merama zasnovanim na ljudskoj percepciji, a ne na preciznim i jasnim merama. U ekonmskim i društvenim istraživanjima često se srećemo sa nepotpunim i neizvesnim informacijama, kada tražimo familiju modela kako bi konstruisali odgovarajući model vremenskih serija. Jedan od problema koji se može posmatrati je sledeći: Da li odrediti kurs eura prema dinaru koristeći početnu i krajnju dnevnu cenu ili prosek najviše i najniže dnevne cene? Prvi korak u analizi fazi vremenskih serija jeste transformacija podataka u fazi skupove, koristeći funkciju pripadnosti. Dalje se mogu analizirati fazi informacije pomoću preciznih matematičkih metoda.

Fazi vremenske serije predstavljaju metod kombinovanja lingvističkih promenljivih sa procesom primene fazi logike na vremenske serije, kako bi se rešila fazivnost podataka. Pre nego što bude predstavljen model viševrednosnih vremenskih serija, date su osnovne definicije vezane za fazi vremenske serije.

U daljem radu sa $\{X_t \in R, t = 1,2, \ldots , n\}$ označena je vremenska serija, Ω predstavlja opseg vremenske serije $\{X_t \in R, t = 1,2, \ldots , n\}$ i $\{P_i, i = 1,2, \ldots , r, \bigcup_{i=1}^{r} P_i = \Omega\}$ predstavlja uređenu particiju na Ω. Sa $\left\{L_{fi}, i = 1,2, \ldots r\right\}$ označene su lingvističke promenljive (fazi skupovi) u odnosu na skup uređenih particija.

Definicija 4.2.1. [1] ***Fazi vremenske serije***

Ako $\mu_{L_{fi}}(X_t)$, stepen pripadnosti vremenske serije $\{X_t\}$ lingvističkoj promenljivoj L_{fi}, zadovoljava uslov $\mu_{L_{fi}}: R \rightarrow [0,1]$ i $\sum_{i=1}^{r} \mu_{L_{fi}}(X_t) = 1,\ t = 1,2, \dots, n,\ i = 1,2, \dots, r$, onda sa FX_t označavamo fazi vremensku seriju od $\{X_t\}$ u zapisu:

$$FX_t = \left(\mu_{L_{f1}}, \mu_{L_{f2}}, \dots, \mu_{L_{fr}}\right).$$

Pri izračunavanju stepena pripadnosti, koristi se trougaona funkcija pripadnosti kako bi se prikazao proces transformacije. Sledeći primer opisuje postupak izračunavanja fazi vrmenske serije na osnovu Definicije 4.2.1.

<u>*Primer 4.2.1.*</u> [1]

Neka je data vremenska serija $\{X_t\} = \{0.7, 1.9, 2.7, 4.2, 3.5, 3.1, 4.4, 3.7\}$. Neka je $\Omega = [0,5]$ i biramo uređenu particiju $\{[0,1), [1,2), [2,3), [3,4), [4,5]\}$ na Ω. Sa $\{L_1, L_2, L_3, L_4, L_5\}$ označićemo lingvističke pormenljive *veoma nizak*=L_{f1}, *nizak*=L_{f2}, *srednji*=L_{f3}, *visok*=L_{f4}, *veoma visok*=L_{f5}.

Koristi se funkcija pripadnosti data na sledeći način:

Ukoliko vrednost vremenske serije pripada intervalu $(0, m_1)$ funkcija pripadnosti je:

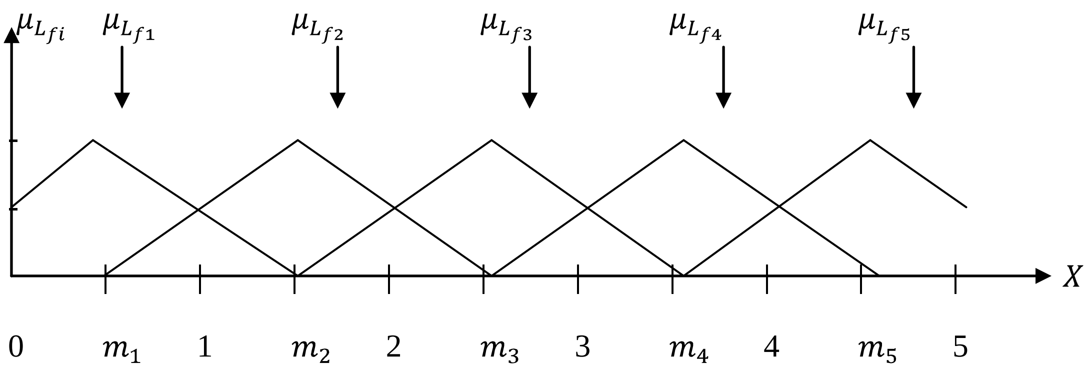
$$\mu_{L_{f1}}(X) = |m_1 + X|.$$

Ukoliko vrednost vremenske serije pripada intervalu (m_i, m_{i+1}) funkcija pripadnosti je:

$$\mu_{L_{fi}}(X) = \frac{|m_{i+1} - X|}{|m_{i+1} - m_i|}\ i\ \mu_{L_{fi+1}}(X) = \frac{|m_i - X|}{|m_{i+1} - m_i|}, i = 1,2,3,4\ .$$

Ukoliko vrednost vremenske serije pripada intervalu $(m_5, 5)$ funkcija pripadnosti je:

$$\mu_{L_{f5}}(X) = |m_4 - X + 0.5|.$$



Slika 19. Grafički prikaz funkcije pripadnosti

Potrebno je izračunati sredine skupova particije:

$$L_{f1}: m_1 = 0.5\ ;\ L_{f2}: m_2 = 1.5;\ L_{f3}: m_3 = 2.5;\ L_{f4}: m_4 = 3.5;\ L_{f5}: m_5 = 4.5$$

Kako je X_1 između 0.5 i 1.5 na osnovu funkcije pripadnosti računa se stepen pripadnosti skupovima L_{f1}i L_{f2}, odnosno skupovima $\{L_{f1}, L_{f2}, L_{f3}, L_{f4}, L_{f5}\}$:

$$\mu_{L_{f1}}(X_1) = \frac{|m_2 - X_1|}{m_2 - m_1} \text{ i } \mu_{L_{f2}}(X_1) = \frac{|m_1 - X_1|}{m_2 - m_1}$$

$$\frac{1.5 - 0.7}{1.5 - 0.5} = 0.8, \frac{0.7 - 0.5}{1.5 - 0.5} = 0.2.$$

Na osnovu ovoga dobija se fazi skup $FX_1 = \{0.8, 0.2, 0, 0, 0\}$. Na isti način izračunavaju se i ostali fazi skupovi i dobija sledeća tabela:

	Veoma nizak	*Nizak*	*Srednji*	*Visok*	*Veoma visok*
$FX_1 =$	0.8	0.2	0	0	0
$FX_2 =$	0	0.6	0.4	0	0
$FX_3 =$	0	0	0.8	0.2	0
$FX_4 =$	0	0	0	0.3	0.7
$FX_5 =$	0	0	0	1	0
$FX_6 =$	0	0	0.4	0.6	0
$FX_7 =$	0	0	0	0.1	0.9
$FX_8 =$	0	0	0	0.8	0.2

Tabela 5. [1] Fazi vremenske serije $\{FX_t\}$ od $\{X_t\}$

U modeliranju i analizi vremenskih serija, determinisanje autokorelacione vrednosti je veoma bitno zato sto ona odražava autokorelaconi trend vremenske serije. Ali za skupove sa nepreciznim i nepotpunim podacima, autokorelacija se ne može objasniti konkretnim brojem. Zbog toga koristi se fazi relacija, da bi se analizirao stepen autokorelisanosti fazi vremenskih serija.

Definicija 4.2.2. [1] ***Relacija fazi skupova***

Neka je $\{P_i, i = 1,2, \dots, r\}$ uređena particija na Ω, neka su $G_f = (\mu_1, \dots, \mu_r)$ i $H_f = (v_1, \dots, v_r)$ fazi skupovi (fazi vremenske serije), onda je R fazi relacija između G_f i H_f u oznaci $R = {G_f}^t \circ H_f = \left[R_{ij}\right]_{r \times r}$, gde μ_i i v_j, $i, j = 1,2, \dots, r$ označavaju stepen pripadnosti i $R_{ij} = min\left(\mu_i, v_j\right)$.

4.3. Fazi relaciona matrica Markova R

Za konstruisanje dobrog modela fazi vremenskih serija, ključna je fazi relacija. Ukoliko se može precizno rukovati fazi relacionom matricom kroz fazi relaciju, onda će model fazi vremenskih serija dati tačnije rezultate. Postoji mnogo različitih načina za izračunavanje fazi relacione matrice. U literaturi označenoj sa [13,14] predložene su neke metode za izračunavanje fazi relacione matrice, ali nijedan od njih nije bio zasnovan na istim pretpostavkama. U daljem radu pretpostavljeno je da svaka vremenska serija u viševrednosnim fazi vremenskim serijama ima stacionaran trend. Ovo se pretpostavlja iz razloga što većina operacija na finansijskim tržištima poseduje osobinu Markova. Iz tog razloga akcenat je na istraživanju viševrednosnih fazi vremenskih serija sa osobinom Markova. Pre svega potrebno je definisati Fazi relacionu matricu Markova, $\boldsymbol{R}$.

Definicija 4.3.1. [1] ***Fazi relaciona matrica Markova***

Pretpostavimo da $\{FX_t, t = 1,2,\dots,n\}$ je $FAR(1)$ (Fazi auto regresiona vremenska serija prvog reda, $p = 1$). Za bilo koje vreme t, FX_t zavisi samo od FX_{t-1}. Ako se fazi skup FX_t, sastoji od konačnog broja funkcija pripadnosti $\mu_{L_{fi}}(X_t), i = 1,2,\dots,r$ lingvističkoj promenljivoj L_{fi}, $i = 1,2,\dots,r$, onda matricu

$$\boldsymbol{R} = [R_{ij}]_{r\times r} = \max_{2\le t\le n}\left[min\left(\mu_i(X_{t-1}), \mu_j(X_{t-1})\right)\right]_{r\times r},$$

nazivamo Fazi relaciona matrica Markova.

Sledeći primer ilustruje postupak za formiranje Fazi relacione matrice Markova.

<u>*Primer 4.3.1.*</u> [1]

Posmatra se fazi vremenska serija $\{FX_t\}$ iz Primera 4.2.1. i tabela 5., uz pretpostavku da je fazi vremenska serija $\{FX_t\}$ autoregresiona reda 1 i da se detektuju lingvističke promenljive prema položaju najvećeg stepena pripadnosti. Na osnovu vremenske serije $\{X_t\} = \{0.7, 1.9, 2.7, 4.2, 3.5, 3.1, 4.4, 3.7\}$ mogu se definisati relacije među lingvističkim promenljivim na sledeći način: $L_{f1} \to L_{f2}, L_{f2} \to L_{f3}$, $L_{f3} \to L_{f5}$, $L_{f5} \to L_{f4}, L_{f4} \to L_{f4}$, $L_{f4} \to L_{f5}$, $L_{f5} \to L_{f4}$. Pošto je $L_{f1} = (1, 0.5, 0,0,0)$, a $L_{f2} = (0.5, 1, 0.5,0,0)$ na osnovu definicije Markove fazi relacione matrice dobijamo da je:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [0.5 \quad 1 \quad 0.5 \quad 0 \quad 0] = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

gde je operacija množenja zamenjena operacijom minimuma.

Slično, možemo da dobijemo fazi relacije za $\{FX_t\}$:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$R_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad R_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$R_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

I na kraju, na osnovu Definicije 4.3.1. dobija se Fazi relaciona matrica Markova $\boldsymbol{R}$:

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

4.4. Modeliranje viševrednosnih fazi vremenskih serija i prognoziranje

U analizi viševrednosnih fazi vremenskih serija, podaci mogu biti dati numerički, kvalitativno ili lingvističkim promenljivim. Osnovni problem jeste kako podeliti fazi podatake. Ne postoji definisano pravilo o broju odgovarajićih uređenih particija na posmatranom fazi skupu. U suštini, što je veći broj particija, biće veća preciznost, međutim to bi oduzelo više vremena u kompjuterskom računanju i model bi bio komplikovaniji. Ne postoji konkretan metod koji bi definisao tu vrednost u procesu fazifikacije, u [1] je predstavljeno izvođenje reprezentativne vrednosti iz mediana, sredine ili klaster centra. Nedostatak koji se javlja pri koršćenju klaster centra, jeste taj da se može javiti više karakterističnih vrednosti u okviru jednog skupa, onda je proces transformacije dodatno zakomplikovan jer se dobija trapezoidna funkcija pripadnosti. Sa druge strane, koristeći medianu ili srednju vrednost kao karakterističnu vrednost, dobija se samo jedna karakteristična vrednost u svakom datom skupu, te je proces transformacije je mnogo jednostaviji, jer se dobija trougaona funkcija pripadnosti.

U daljem radu posmatrane su stacionarne fazi vremenske serije. Redosled, odnosno poredak međusobnih uticaja vremenskih serija, ima veoma bitnu ulogu u analizi viševrednosnih fazi vremenskih serija. Ako je predstavljen tačan redosled faktora koji utiču, može se shvatiti trend i izgraditi matematički model. U praksi, indeks akcija, kurs i drugi imaju najčešće nelinearni karakter, visoke cene imaju trend dugoročnog rasta, a niske imaju trend dugoročnog pada. Takođe, većina operacija na finansijskim tržištima ima Markovsko svojstvo. Tako da izbor poretka faktora uticaja zavisi od realne situacije koja se posmatra. Formirani poredak zajedno sa faktorima, koristi se za formiranje Fazi relacione matrice Markova. U [14] korištene su fazi izlazne veličine i procenjene fazi izlazne veličine kako bi se dobila manja greška pri izračunavanju, međutim ovaj metod zahteva previše numeričkih operacija i prevše je komplikovan. S toga, se u daljem radu fokus je na metodu za izračunavanje fazi relacione matrice Markova $\boldsymbol{R}$, koji su predstavljeni u [15, 16].

Sledi definicija viševrednosnih fazi autoregresivnih vremenskih serija prvog reda ($FVAR(1)$).

Definicija 4.4.1. [1] $\boldsymbol{FVAR(1)}$ ***Vremenske serije***

Ako viševrednosna fazi vremenska serija $\{(FX_{1t}, FX_{2t}, \dots, FX_{kt})\}$ za svako t, može biti zapisana na sledeći način:

$$(FX_{1t}, FX_{2t}, \dots, FX_{kt}) = (FX_{1t-1}, FX_{2t-1}, \dots, FX_{kt-1}) \begin{bmatrix} R_{11} & \cdots & R_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{k1} & \cdots & R_{kk} \end{bmatrix},$$

gde je R_{ij} Fazi relaciona matrica Markova za i-tu promenljivu, u odnosu na j-tu promenljivu, gde $i, j = 1,2, \dots, k$. Onda kažemo da je viševrednosna vremenska serija $\{(FX_{1t}, FX_{2t}, \dots, FX_{kt})\}$, viševrednosna autoregresivna vremenska serija prvog reda u oznaci $FVAR(1)$.

U ovom modelu, $(FX_{1t}, FX_{2t}, \dots, FX_{kt})$ zavisi samo od $(FX_{1t-1}, FX_{2t-1}, \dots, FX_{kt-1})$, pa dati model predstavlja *Proces Markova*.

4.4.1. Princip kvalitativne identifikacije osnovnog fazi pravila

Kod viševrednosnih fazi vremenskih serija, jedan od najbitnijih koraka jeste transformisanje fazi brojeva u odgovarajuće lingvističke promenljive. U suštini, odgovarajuća lingvistička promenljiva je određena maksimalnom vrednošću funkcije pripadnosti. Međutim, ako postoji više maksimalnih vednosti funkcije pripadnosti kako se odlučiti koju od njih izabrati? Postoji mnogo faktora koji utiču na vremenske serije. Na primer, na $TAIEX$ (Taivanski ponderisani dnevni index cena), utiču promet na tržištu, kurs, kamatne stope, politički uslovi i drugi faktori. Međutim, u realnom vremenu i otvorenim brezama, prvi i osnovni faktor koji utiče na formiranje cene akcije u sledećem preiodu, je krajnja cena akcije predhodnog dana. Drugi bitan faktor bio bi promet te akcije na tržištu, jer je on obično vodeći indikator za cenu akcije. Rast prometa na tržištu je preduslov za rast cene akcije. Pored svega toga, u tradicionalnoj analizi vremenskih serija postoji visoka autokorelacija između predhodnih i trenutnih podataka. Predhodno pomenuta dva faktora mogu biti iskorištena kako bi se konstruisale viševrednosne fazi vremenske serije. Zbog toga, kroz Fazi relacionu matricu

Markova, može se dobiti sledeći fazi broj od predhodnog fazi broja. Postavlja se pitanje kako prevesti fazi brojeve u odgovarajuće lingvističke promenljive. Pre svega biće data definicija.

Definicija 4.4.1. [1] ***Indikator funkcija lingvističkog vektora***

Neka je $L_{fi} = \{(L_{fi1}, \ldots, L_{fir});\ L_{fij}\ lingvistička\ promenljiva; j = 1,2, \ldots, r\}$ lingvistički vektor od $\{FX_{i,t}\}$ i neka je $F\hat{X}_{i,t}$ vektor pripadnosti fazi vremenske serije $\{FX_{i,t}\}$ u $L_{fi}, i = 1, \ldots k$. Onda je

$$F\tilde{X}_{i,t} = \{(I_{i1_t}, \ldots, I_{ir_t});\ I_{ij} = 1\ ili\ 0; j = 1, \ldots, r\}$$

Indikator funkcija lingvističkog vektora, za $i = 1, \ldots, k$ i

$$I_{ij} = \begin{cases} 1, ako\ je\ \mu_{L_{ij}}(FX_{i,t}) \geq k \\ 0, ako\ je\ \mu_{L_{ij}}(FX_{i,t}) < k \end{cases},$$

gde $\mu_{L_{fij}}(FX_{i,t})$ označava pripadnost $FX_{i,t}$ u L_{fij}.

Sledi primer koji ilustruje indikator funkciju lingvističkog vekora.

<u>*Primer 4.4.1.*</u> [1]

Neka je $[L_1, L_2] = \{\ \{[(L_{11}, L_{12}, L_{13}, L_{14}, L_{15})(L_{21}, L_{22}, L_{23}, L_{24}, L_{25})]\ \}\ gde\ je\ L_{11} = nagli\ pad(eng. plunge), L_{12} = pad(eng. drop),\ L_{13} = nerešeno\ (eng. draw), L_{14} = rast(eng. soar), L_{15} = nagli\ rast(eng. surge), L_{21} = veoma\ nisko, L_{22} = nisko, L_{23} = srednje, L_{24} = visoko, L_{25} = veoma\ visoko\}$, dvovrednosni lingvistički vektor od $\{(FX_{1,t}, FX_{2,t})\}$. Podaci i reztultati ovog primera dati su u literaturi [1]. Vektor $[F\hat{X}_{1,t}, F\hat{X}_{2,t}] = [(1,1.5,2,2,1.5), (1,1.5,1.5,2,1.5)]$ se dobija nakon izračunavanja dvovrednosne vremenske serije koristeći fazi relacionu matricu Markova. A na osnovu Definicje 4.4.1. dobija se da je $[F\tilde{X}_{1,t}, F\tilde{X}_{2,t}] = [(0,0,1,1,0)(0,0,0,1,0)]$.

Na osnovu Definicije 4.4.1. očigledno je da se fazi brojevi mogu prevesti iz fazi vremenskih serija u indikator funkciju lingvističkog vektora. Takođe će Definicija 4.4.1. biti korištena kako bi se ustanovila granična funkcija i dobilo osnovno fazi pravilo i dalje analizirale njene lingvističke promenljive.

Osnovno fazi pravilo je ekspertni sistem koji je ustanovljen za rad sa nekim fazi fenomenima iz svakodnevnog života. Ovo pravilo je zasnovano na činjenici da su tradicionalne vremenske serije međusobno statistički zavisne i tada koristimo atuokorelacionu funkciju (ACF) i parcijalnu autokorelacionu funkciju ($PACF$) da bi smo pronašli koeficiente za model vremenskih serija. Kako se ACF i $PACF$ ne mogu korisiti u nelinearnim vremenskim serijama, u tom slučaju prati se tradicionalni autoregresivni integrisani model pokretnih sredina ($ARIMA$) i koristimo se za konstruisanje sledeća tri koraka:

- Ustanovljavanje poretka,
- Ocenivanje parametara,

- Dijagmostičku proveru.

Po ugledu na vremenske serije iz predhodnog primera, napravljen je opseg skupa na sledeći način {nagli pad, pad, nerešeno, rast, nagli rast} i {veoma nisko, nisko, srednje, visoko, veoma visoko} za krajnju cenu ili razliku u prometu na tržištu i grupisanje n vrednosti u 5 delova. Takođe koristimo vektor $\left(I_{k1_t}, \dots, I_{k5_t}\right)$ kao fazi indikator, gde je $I_{kj_t} = 1\ ili\ 0, j = 1,2, \dots, 5$ i sledi da mogu biti uspostavljena 32 lingvistička vektora indikator funkcije. Mora se isključiti vektor $(0,0,0,0,0)$ jer on ne predstavlja nijednu lingvističku promenljivu. Kako god, nije lako kategorisati 31 lingvistički vektor indikator funkcije prema njihovim odgovarajućim lingvističkim promenljivim. Ako se samo jedna "1" pojavljuje u lingvističkoj vektor indicator funkciji, izlazna promenljiva će biti odgovarajuća lingvistička promenljiva, u odnosu na to na kom se mestu u vektoru "1" nalazi. Na primer, $(0,0,0,1,0)$ predstavlja lingvističku promenljivu kada je "rast" "1", tako da je izlazna lingvistička promenljiva "rast".

Šta raditi kada se u lingvističkom vektor indikatoru pojavi više od jedne "1". Bilo bi veoma dugotrajno kada bi se ispitivala svaka komponenta lingvističke vektor indikator funkcije u fazi vremenskoj seriji. Na primer, ispitati za svako I_{kj_t}, gde $j = 1,2,3, \dots 5$, od $I_{k1_t} = 1\ ili\ 0$ do $I_{k5_t} = 1\ ili\ 0$. Ako se uzme cela indikator funkcija lingvističkog vektora pod razmatranje, lako se može identifikovati njena reprezentativna lingvistička promenljiva. Na primer $(0,0,0,1,1)$ predstavlja i funkciju pripadnost i "rast" i "nagli rast". Kroz data pravila može se videti da je izlazna lingvistička promenljiva "nagli rast". Na isti način iz $(1,1,0,0,0)$ vidimo se da je izlazna lingvistička promenljiva "nagli pad".

Koristeći gore prikazanu metodologiju, granična funkcija H_t definiše se na sledeći način:

$$H_t = \begin{cases} nagli\ pad\ (veoma\ nisko), & ako\ je\ K_t \leq -2 \\ pad\ (nisko), & ako\ je -2 < K_t \leq -1\ ili\ ako\ K_t = -2\ i \sum_{j=1}^{5} I_{kj} \geq 3 \\ nerešeno\ (srednje), & ako\ je\ K_t = 0 \\ rast\ (visoko), & ako\ je\ 1 \leq K_t < 2\ ili\ ako\ je\ K_t = 2\ i \sum_{j=1}^{5} I_{kj} \geq 3 \\ nagli\ rast\ (veoma\ visoko), & ako\ je\ K_t \geq 2 \end{cases}$$

gde je $K_t = \sum_{j=1}^{5} (j-3) I_{kj}$.

Na kraju, koristi se ova granična funkcija da bi se izračunalo osnovno fazi pravilo.

Osnovno fazi pravilo

Za $i = 1, \dots, k$

1) Ako je $F\tilde{X}_{i,t} \in \{(1,0,0,0,0), (1,1,0,0,0), (1,0,1,0,0), (1,1,1,0,0)\}$ onda je izlazna lingvistička promenljiva „nagli pad (veoma nisko)"

2) Ako je $\tilde{FX}_{i,t} \in \{(0,1,0,0,0),\ (1,1,0,1,0),\ (1,1,1,0,1),\ (1,1,0,0,1),\ (1,0,0,1,0),\ (1,1,1,1,0),\ (0,1,1,0,0,),\ (1,0,1,1,0)\}$ onda je izlazna lingvistička promenljiva „pad (nisko)"

3) Ako je $\tilde{FX}_{i,t} \in \{(0,0,1,0,0),\ (1,0,1,0,1),\ (\ 1,0,0,0,1),\ (1,1,1,1,1),\ (0,1,0,1,0),\ (1,1,0,1,1),\ (0,1,1,1,0)\}$, onda je izlazna lingvistička promenljiva „skretanje (srednje)"

4) Ako je $\tilde{FX}_{i,t} \in \{(0,0,0,1,0), (0,1,0,1,1), (1,0,1,1,1,), (1,0,0,1,1),\ (0,1,0,0,1),\ (0,1,1,1,1),\ (0,0,1,1,0),\ (0,1,1,0,1)\}$ onda je izlazna lingvistička promenljiva „rast (visoko)"

5) Ako je $\tilde{FX}_{i,t} \in \{(0,0,0,0,1), (0,0,0,1,1), (0,0,1,0,1), (0,0,1,1,1)\}$, onda je lingvistička promenljiva „nagli rast (veoma visoko)".

U primeru 4.4.1. dobijeno je da je $\left[\tilde{FX}_{1,t}, \tilde{FX}_{2,t}\right] = [(0,0,1,1,0)(0,0,0,1,0)]$. S toga, kroz osnovno fazi pravilo može se dobiti da su izlazne lingvističke promenljive za cenovni limit i promet na tržištu dati sa „rast" i „visoko", respektivno.

4.5. Predviđanje pomoću fazi vremenskih serija

U procesu modeliranja akcenat je stavljen na stacionarne vremenske serije koje imaju osobinu Markova. S toga, u modeliranju i predviđanju pomoću fazi vremenskih serija koriste se autoregresivni procesi prvog reda. Sledi objašnjenje procesa predviđanja pomoću fazi vremenskih serija.

Za model viševrednosnog fazi autoregresivnog precesa prvog reda

$$(FX_{1t}, FX_{2t}, \dots, FX_{kt}) = (FX_{1t-1}, FX_{2t-1}, \dots, FX_{kt-1}) \begin{bmatrix} R_{11} & \cdots & R_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{k1} & \cdots & R_{kk} \end{bmatrix}$$

i observacije $(FX_{1t}, FX_{2t}, \dots, FX_{kt}), t = 1,2, \dots, n$, važi:

1) Viševrednosna fazi vremenska serija u prvom koraku je

$$\left(FX_{1t}(1), FX_{2t}(1), \dots, FX_{kt}(1)\right) = \left(FX_{1,n}, FX_{2,n}, \dots, FX_{k,n}\right)\begin{bmatrix} R_{11} & \cdots & R_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{k1} & \cdots & R_{kk} \end{bmatrix}$$

2) Viševrednosna fazi vremenska serija u drugom koraku je

$$\left(FX_{1t}(2), FX_{2t}(2), \dots, FX_{kt}(2)\right) = \left(FX_{1,n}, FX_{2,n}, \dots, FX_{k,n}\right)\begin{bmatrix} R_{11} & \cdots & R_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{k1} & \cdots & R_{kk} \end{bmatrix}^2$$

3) Viševrednosna fazi vremenska serija u l-tom koraku je

$$(FX_{1t}(l), FX_{2t}(l), \dots, FX_{kt}l) = \left(FX_{1,n}, FX_{2,n}, \dots, FX_{k,n}\right)\begin{bmatrix} R_{11} & \cdots & R_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{k1} & \cdots & R_{kk} \end{bmatrix}^l.$$

4.5.1. Prosečna tačnost predviđanja

Kako su model viševrednosnih fazi vremenskih serija i osnovno fazi pravilo ustanovljeni, potrebno je uporediti grešku između izlaznih lingvističkih promenljivih i realnih vrednosti. Koristi se neparametarski opseg kako bi se obezbedila odgovarajuća vrednost za svaku lingvističku promenljivu. Na primer, označeno je na sledeći način: „nagli pad“ sa -2, „pad“ sa -1, „nerešeno“ sa 0, „rast“ sa 1 i „nagli rast“ sa 2. Sledi definicija prosečne tačnosti predviđanja.

Definicija 4.5.1.1. [1] ***Prosečna tačnost predviđanja***

Neka su sa $\{RL_t, t = 1, \dots, n\}$ označene realne i sa $\{FL_t, t = 1, \dots, n\}$ izlazne lingvističke promenljive vremenske serije. Neka je sa
$L = \left\{(L_1, L_2, \dots, L_r) = \left(\frac{-(r-1)}{2}, \frac{-(r-3)}{2}, \dots, \frac{(r-1)}{2}\right);\ L_j\colon\ lingvistička\ promenljiva\right\}$ data odgovarajuća vrednost lingvističkih promenljivih, onda je P prosečna tačnost predviđanja

$$P = 1 - \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{|FL_t - RL_t|}{r-1},$$

gde r predstavlja broj lingvističkih promenljivih.

<u>*Primer 4.5.1.1.*</u> [1]

Pod pretpostavkom da su $\{pad,\ nerešeno,\ pad,\ nagli\ rast,\ nerešeno,\ ,talasanje, pad,$ $nerešeno,\ nagli\ pad\}$ realne lingvističke promenljive određene vremenske serije, onda su odgovarajuće vrednosti lingvističke promenljive $\{-1, 0, -1, 2, 0, -1, 2, -1, 0, -2\}$. Izlazne lingvističke promenljive su $\{pad, nerešeno,\ nagli\ pad,\ nagli\ rast,\ nerešeno, nerešeno,$ $nagli\ rast,\ pad,\ nagli\ rast,\ nerešeno, \}$, onda su odgovarajuće vrednosti lingvističke promenljive $\{-1, 0, -2, 2, , 0, 0, 2, -1, 2, 0\}$. Na osnovu predhodne definicije, dobija se da je

$$P = 1 - \frac{1}{10}\sum_{t=1}^{10}\frac{|FL_t - RL_t|}{4} = 1 - \frac{6}{40} = 0.85$$

Sledi pregled integrisanog procesa i toka modeliranja viševrednosnih fazi vremenskih serija.

Integrisani proces za modeliranje viševrednosnih fazi vremenskih serija [1]

1. **Korak:** Posmatra se vremenska serija $\{X_{1t}\}, \dots, \{X_{kt}\}$. Odredi se opseg skupa Ω_i i lingvističke promenljive $\{(L_{i1}, L_{i2}, \dots, L_{ir})\}$ od $\{X_{it}\}$ za $i = 1,2, \dots, k$.
2. **Korak:** Izračunavanje fazi vremenske serije $\{FX_{it}\}$ od $\{X_{it}\}$, $i = 1,2, \dots, k$ i odrede se lingvističke promenljive u odnosu na poziciju najveće pripadnosti u $\{FX_{it}\}, i = 1,2, \dots, n$.
3. **Korak:** Izračunavanje fazi relacije između $\{FX_{it}\}$ i $\{FX_{jt}\}, i, j = 1,2, \dots, k$.
4. **Korak:** Po ugledu na 3.Korak, sve fazi relacije između $\{FX_{it}\}$ i $\{FX_{jt}\}, i, j = 1,2, \dots, k$ napišu se u fazi relacionoj matrici Markova i na taj način konstuiše se model viševrednosnih fazi vremenskih serija.
5. **Korak:** Ispitivanje $F\tilde{X}_{i,t}, i = 1,2, \dots, k$. Ako postoji samo jedna „1“ u lingvističkoj vektor indikator funkciji, odmah se određuje odgovarajća lingvistička promenljiva, inače se odgovarajuća lingvistička promenljiva određuje na osnovu Osnovnog fazi pravila
6. **Korak:** Izračunavanje prognozirane vrednosti pomoću konstruisanog modela fazi vremenskih serija.
7. **Korak:** Stop.

4.5.2. Merenje poverenja u procesu predviđanja

Kako ljudi pokušavaju da donesu odluke za buduće poslove, obično to rade u odnosu na prošle događaje i iskustvo. Prognoziranje pomoću viševrednosnih fazi vremenskih serija, je slično ljudskom donošenju odluka. Fazi relaciona matrica potiče od veze količina-cena i ona prestavlja pređašnje iskustvo u ljudskom donošenju odluka. S toga, pomoću fazi relacione matrice, može se doći do rezultata predviđanja. Baš kao što ni ljudi nisu uvek u pravu u vezi odluka koje donesu, tako i razultati koji nastaju previđanjima pomoću modela ne moraju uvek biti ispravni. Pitanje je kako se odnositi prema rezultatu dobijenom u predviđanju. Da li ga prihvatiti u potpunosti, delimično ili jedva?

Pored donošenja odluke postoji i stepen poverenja u donesenu odluku. U daljem radu pored predviđanja zasnovanih na viševrednosnim fazi vremenskim serijama, biće ustanovljena i funkcija poverenja. Funkcije poverenja služe za opisivanje stepena poverenja u predviđene vrednosti. Kako je funkcija poverenja zasnovana na matematičkim temeljima, definicije i osobine funkcije poverenja date su pod određenim uslovima.

Definicija 4.5.2.1. [1] Neka je Ω konačan skup. Skupovna funkcija $G: 2^{\Omega} \to [0,1]$ je **funkcija poverenja** ako

- $G(\emptyset) = 0, G(\Omega) = 1.$
- Za svako $n \geq 1$ i $A_i \subseteq \Omega, i = 1, \dots, n,$

$$G\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \geq \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{|I|+1} G\left(\bigcap_{j \in I} A_j\right).$$

Teorema 4.5.2.1. [1]

1. Neka je G funkcija poverenja na Ω. Onda je funkcija g definisana na 2^{Ω},
$$g(A) = \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|A \setminus B|} G(B)$$
nenegativna.
2. Neka su G i g dve funkcije koje slikaju 2^{Ω} na R. Onda je
$$G(A) = \sum_{B \subseteq A} g(B) \text{ ako i samo ako je } g(A) = \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|A \setminus B|} G(B).$$

<u>*Dokaz*</u>

1. Neka je $A = \{w_1, w_2, \dots, w_n\} \subseteq \Omega$ i $A_i = A \setminus \{w_i\}$. Onda je
$$G(A) \geq \sum_{i=1}^{n} G(A_i) - \sum_{i<j} G(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^n \sum_{i=1}^{n} G\left(\bigcap_{j \neq i} A_j\right),$$
Primetimo da je
$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \emptyset, \text{pa je } g(A) \geq 0$$
2. $(\Longrightarrow)$ Pretpostavimo da je
$$G(A) = \sum_{B \subseteq A} g(B) \text{ . Onda je}$$
$$\sum_{B \subseteq A} (-1)^{|A \setminus B|} G(B) = \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|A \setminus B|} \sum_{D \subseteq B} g(D) = \sum_{D \subseteq B \subseteq A} (-1)^{|A \setminus B|} g(D).$$
Ako je $D = A$, onda je poslednji izraz jednak $g(A)$.

   Ako je $D \neq A$. Vidi se da polovina vrednosti $(-1)^{|A \setminus B|}$ uzima vrednost $+1$, a ostatak uzima vrednost -1.

   Za svako $D, D \neq A$

$$\sum_{D\subseteq B\subseteq A}(-1)^{|A\setminus B|}\, g(D) = 0 \;\; \Rightarrow \sum_{B\subseteq A}(-1)^{|A\setminus B|}G(B) = g(A).$$

($\Leftarrow$) Analogno prethodnom.

Iz teoreme sledi da bilo koja funkcija poverenja G, može biti zapisana pomoću funkcije $g: 2^{\Omega} \rightarrow [0,1]$, za koju važi $\sum_{A\subseteq\Omega} g(A) = 1$ i $g(\emptyset) = 0$. Dakle, formalno g je funkcija raspodele verovatnoće nekog slučajnog skupa S iz Ω, odnosno $P(S = A) = g(A)$ i $G(A) = P(S \subseteq A)$. ■

Teorema 4.5.2.2. [1]

Neka je $g: 2^{\Omega} \rightarrow [0,1]$, $g(\emptyset) = 0$ i $\sum_{A\subseteq\Omega} g(A) = 1$. Neka je $G(A) = \sum_{B\subseteq A} g(B)$. Tada, skupovna funkcija G je funkcija poverenja.

<u>Dokaz</u>

Pošto je $G(\emptyset) = 0$ i $G(\Omega) = 1$, cilj je pokazati da je G neograničeno monotona. Neka je $I = \{1,2,\ldots,n\}$ i $A_i \subseteq \Omega, i \in I$. Dobija se da je :

$$G\left(\bigcup_I A_i\right) = \sum_{B\subseteq \bigcup_I A_i} g(B) \geq \sum_{B\in\Gamma} g(B),$$

gde na bar jednom A_i postoji Γ koje je poskup od $\bigcup_I A_i$.

$$\sum_{\emptyset\neq J\subseteq I}(-1)^{|J|+1} G\left(\bigcap_J A_J\right) = \sum_{\emptyset\neq J\subseteq I}(-1)^{|J|+1} \sum_{B\subseteq \bigcap_J A_j} g(B) =$$

$$= \sum_{B\in\Gamma}\sum_{\emptyset\neq J\subseteq I}(-1)^{|J|+1}\, g(B) = \sum_{B\in\Gamma} g(B).$$

Pošto je

$$\sum_{\emptyset\neq J\subseteq I}(-1)^{|J|+1} = 1$$

teorema je dokazana. ■

U analizi fazi vremenskih serija postavlja sa još jedno pitanje, kako ustanoviti i izračunati stepen poverenja?

U literaturi koja je korištena koristi se maksimalna pripadnost da bi se predviđena fazi vrednost pretvorila u lingvistički vektor i onda se dobijaju predviđeni atributi lingvističkog vektora koristeći osnovno fazi pravilo. Slično je kao i kada ljudi nisu uvek u potponosti sigurni u odluke koje su vezane za događaje u budućnosti, tako i viševrednosne fazi vremenske serije nemaju uvek isti stepen poverenja u svako predviđanje koje naprave. Dakle, neophodno je da se formira funkcija koja će računati stepen poverenja predviđene vrednosti modela. Pre svega dati su pojmovi potrebni za razumevanje definicija koje slede. $L = \{(L_{11}, \dots, L_{15}), \dots, (L_{k1}, \dots, L_{k5})\text{: gde je } L_{ij} \text{ jlingvistička promenljiva}\}$ je lingvistički vektor, FX_t funkcija pripadnosti viševrednosne fazi vremenske serije u odnosu na L. $F\bar{X}_t$ je indeks lingvističkog vektora dobijen iz FX_t, tada je $F\bar{X}_t = \{(I_{11}, \dots, I_{15}), \dots, (I_{k1}, \dots, I_{k5});\ I_{ij} = 0\ ili\ 1\}$.

Definicija 4.5.2.2. [1] ***Uopšteni rang pripadnosti i maksimalna pripadnost***

Uopšteni rang pripadnosti od $F\hat{X}_t$, u oznaci FA_{ti}, je:

$$FA_{ti} = \left[\sum_{j=1}^{5} (j-3) I_{ij}\right] \Big/ \left[\sum_{j=1}^{5} I_{ij}\right]$$

i maksnimalna pripadnost od $F\hat{X}_{ti}$, u oznaci FC_{ti}, je data na sledeći način:

$$FC_{ti} = max[\ \mu L_{11}(FX_t), \dots, \mu L_{15}(FX_t)],$$

gde je $\mu_{L_{ij}}(FX_t)$ funkcija pripadnosti od FX_{ti} u lingvističkoj promenljivoj L_{ij}.

<u>*Primer 4.5.2.1.*</u> [1]

Pretpostavlja se da postoji funkcija pripadnosti viševrednosne fazi vremenske serije, u odnosu na L, tada je (podaci su preuzeti iz [1]:

$F\hat{X}_t = \{0.56, 0.95, 1.15, 1.38, 1.38\}, \{0.96, 1.32, 1.40, 0.74, 0.28\}$, onda je

$F\bar{X}_t = \{(0, 0, 0, 1, 1), (0, 0, 1, 0, 0,)\}$. Po ugledu na predhodnu definiciju dobijamo da je

$FA_{t1} = (-2 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1)/(0 + 0 + 0 + 1 + 1) = 1.5$

$FA_{t2} = (-2 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0)/(0 + 0 + 1 + 0 + 0) = 0.$

Može se izračunati maksimalna pripadnosti i ona iznosi $FC_{t1} = 1.38$ i $FC_{t2} = 1.40$.

Definicija 4.5.2.3. [1] **Ocena poverenja**

Ocena poverenja za svako $F\hat{X}_t$, u oznaci FI_{tij} , data je na sledeći način:

$$FI_{tij} = \frac{(1 - I_{ij})\mu_{L_{ij}}(FX_t)}{FC_{ti}}, j = 1,2, \dots, 5,$$

gde je $\mu_{L_{ij}}(FX_t) = F\hat{X}_t$ funkcija pripadnosti za FX_t lingvističkom vektoru L_{ij}.

<u>*Primer 4.5.2.2.*</u> [1]

Pretpostavlja se da je $F\hat{X}_t = \{(0.56, 0.45, 1.15, 1.38, 1.38), (0.96, 1.32, 1.40, 0.74, 0.28)\}$, onda su rezltati za ocenu poverenja za svaki elemenat, na osnovu predhodne definicije i rezultata dobijenih u Primeru 4.5.2.1., sledeći:

$$FI_{t11} = 0.41, \quad FI_{t12} = 0.33, \quad FI_{t13} = 0.83, \quad FI_{t14} = 0, \quad FI_{t15} = 0.41$$

$$FI_{t21} = 0.66, \quad FI_{t22} = 0.94, \quad FI_{t23} = 0, \quad FI_{t24} = 0.53, \quad FI_{t25} = 0.2\,.$$

Definicija 4.5.2.4. [1] ***Težina ocene poverenja***

Težina ocene poverenja FI_{tij} za svako $F\hat{X}_t$, u oznaci FW_{tij}, data je sa:

$$FW_{tij} = \frac{|(\mathrm{j} - 3) - FA_{ti}|}{4}, j = 1, 2, \dots, 5.$$

<u>*Primer 4.5.2.3.*</u> [1]

Neka je $F\hat{X}_t = \{(0.56, 0.45, 1.15, 1.38, 1.38), (0.96, 1.32, 1.40, 0.74, 0.28)\}$, onda su težine ocene poverenja svakog elementa, koristeći predhodnu definiciju i rezultate iz Primera 4.5.2.1. , dobijaju se sledeći rezultati:

$$FW_{t11} = 0.88, \quad FW_{t12} = 0.63, \quad FW_{t13} = 0.38, \quad FW_{t14} = 0.13, \quad FW_{t15} = 0.13$$

$$FW_{t21} = 0.5, \quad FW_{t22} = 0.25, \quad FW_{t23} = 0, \quad FW_{t24} = 0.25, \quad FW_{t25} = 0.5\,.$$

Definicija 4.5.2.5. [1] ***Funkcija poverenja***

Funkcija poverenja od $F\hat{X}_{ti}$, u oznaci C_{ti}, data je na sledeći način:

$$C_{ti} = 1 - \frac{\sum_{j=1}^{5} FI_{tij}\, FW_{tij}}{\sum_{j=1}^{5}(1 - I_{ij})},$$

gde je $F\hat{X}_t = \{F\hat{X}_{t1}, F\hat{X}_{t2}, \dots, F\hat{X}_{tk}\}$.

<u>*Primer 4.5.2.4.*</u> [1]

Neka je $FX_t = \{(0.56, 0.45, 1.15, 1.38, 1.38), (0.96, 1.32, 1.40, 0.74, 0.28)\}$. Funkcije poverenja izračunavaju se na osnovu predhodno dobijenih rezultata i Definicije 4.5.2.5. . Verdnosti dobijene za funkcije poverenja su:

$$C_{t1} = 1 - \frac{0.41 \cdot 0.875 + 0.33 \cdot 0.625 + 0.83 \cdot 0.375 + 0.125 \cdot 0 + 0.125 \cdot 0}{(1 + 1 + 1 + 0 + 0)} = 0.71$$

i

$$C_{t1} = 1 - \frac{0.66 \cdot 0.5 + 0.94 \cdot 0.25 + 0 \cdot 0. + 0.53 \cdot 0.25 + 0.2 \cdot 0.5}{(1 + 1 + 0 + 1 + 1)} = 0.80.$$

Slede osobine funkcije poverenja.

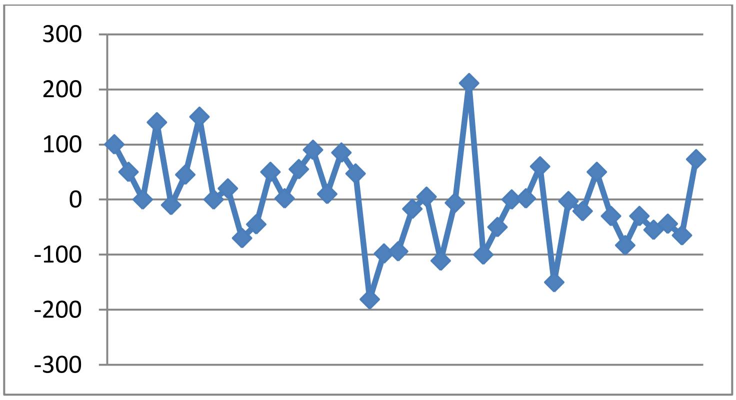
1. **Osobina.** Neka je C_{ti} funkcija poverenja prognozirane fazi vrednosti FX_{ti}. Ako se ocena poverenja i težinski koeficient svakog elementa smanjuju, za uopšteni rang FA_{ti} i maksimalnu pripadnost FC_{ti}, vrednost funkcije poverenja, C_{ti}, se povećava.
2. **Osobina**. Ako funkciju raspodele pripadnosti možemo da aproksimiramo uniformnom raspodelom, onda će vrednost funkcije poverenja, C_{ti}, biti niža.
3. **Osobina.** Ako je prognozirana osobina nepromenjena (srednja), onda će vrednost funkcije poverenja, C_{ti}, biti viša. Odnosno, ukoliko je prognozirana osobina nagli rast (veoma visoko) ili nagli pad (veoma nisko), onda će vrednost funkcije poverenja ,C_{ti}, biti niža.
4. **Osobina.** Pod pretpostavkom da su $C_{(t-1)i}$ i C_{ti} funkcije poverenja prognoziranih fazi vrednosti $FX_{(t-1)i}$ i FX_{ti}, respektivno, $C_{(t-1)i}$ neće uticati na C_{ti}. Drugim rečima, prognozirana vrednost funkcije poverenja određenog dana, ne utiče na prognoziranu vrednost funkcije poverenja narednog dana.

5. Empirijske studije

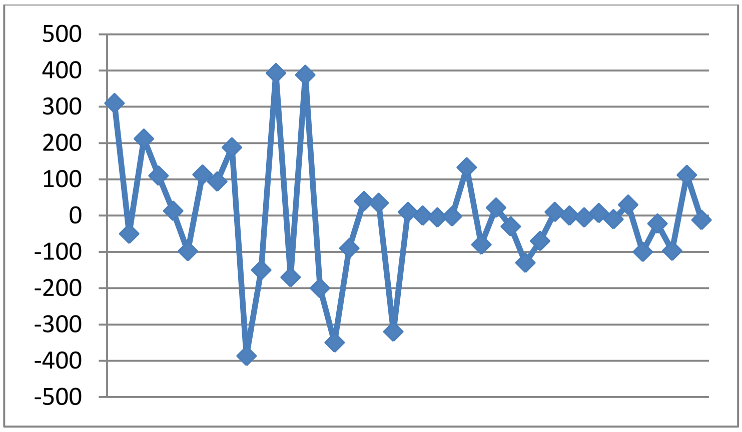
U ovom poglavlju dat je primer koji opisuje primenu viševrednosih fazi vremenskih serija na osnovu definicija i pravila definisanih u predhodnom poglavlju. Razmatrani podaci su indeks dnevnog kretanja cene akcije i razlika u prometu akcija na tržištu. Preuzeti su iz [1] i odnose se na Taivansku berzu za period od 3.Janura 2003. do 11.Marta 2003.

5.1. Analiza podataka

Razmatrani podaci su indeks dnevnog kretanja cene akcije $(TAIEX)$ i razlika u prometu akcija na tržištu. Preuzeti su iz [1] i odnose se na Taivansku berzu za period od 3.Janura 2003. do 11.Marta 2003.



Slika 20. [1] Kretanje $TAIEX$-a od 3.01.2003. do 11.03.2003. godine, po ugledu na grafik iz [1]



Slika 21. [1] Razlika u prometu akcija (u stotinaama miliona) od 3.01.2003. do 11.03.2003. godine, po ugledu na grafik iz [1]

Kao i što je pokazano na graficima, videti [1], dnevna maksimalna vrednost indeksa kretanja cena akcije iznosi 211.09 i dnevni minimum iznosi -118.58; maksimalna vrednost razlike između najvišeg i najnižeg dnevnog prometa je 393 (stotina milona) i minimalna -387 (stotina miliona). Kako bi univerzalni skup trebao da uključi minimalnu i maksimalnu vrednost, izabrani su sledeći skupovi $(-181.58, 211.09)$ i $(-387, 393)$ za univerzalne skupove indeksa dnevnog kretanja cena i dnevnu razliku u prometu akcija na tržištu, respektivno. Pošto je ova studija zasnovana na fazi teoriji, pre svega je potrebno fazifikovati podatke i onda ustanoviti model. Skupovi $(-181.58, 211.09)$ i $(-387, 393)$ mogu se podeliti na 5 intervala. Njihova podela je preuzeta je iz [1], i oni su podeljeni na sledeći način: na sledeći način

$I_{11} = (-181.58, -91.5)$, i njegova reprezentativna vrednost je -181.58 ;

$I_{12} = (-91.5, -24.23)$, i njegova reprezentativna vrednost je -46.58 ;

$I_{13} = (-24.23, 11.22)$, i njegova reprezentativna vrednost je -2.35 ;

$I_{14} = (11.22, 85.53)$, i njegova reprezentativna vrednost je 43.25 ;

$I_{15} = (85.53, 211.09)$, i njegova reprezentativna vrednost je 211.09 ;

$I_{21} = (-378, -154)$, i njegova reprezentativna vrednost je -387 ;

$I_{22} = (-154, -52)$, i njegova reprezentativna vrednost je -81 ;

$I_{23} = (-52, 34)$, i njegova reprezentativna vrednost je -16 ;

$I_{24} = (34, 129)$, i njegova reprezentativna vrednost je 48 ;

$I_{25} = (129, 393)$, i njegova reprezentativna vrednost je 393 .

$\{I_{11}, I_{12}, I_{13}, I_{14}, I_{15}\}$ i $\{I_{21}, I_{22}, I_{23}, I_{24}, I_{25}\}$ su pet podintervala intervala $(-118.58, 211.09)$ i $(-387, 393)$ respektivno. Na osnovu toga mogu se definisati pet lingvističkih promenljivih na skupovima $(-118.58, 211.09)$ i $(-387, 393)$ tako da je $L_{11} =$ nagli pad; $L_{12} =$ pad; $L_{13} =$ nepromenjenost; $L_{14} =$ rast; $L_{15} =$ nagli rast;

$L_{21} =$ veoma nisko; $L_{22} =$ nisko; $L_{23} =$ srednje; $L_{24} =$ visoko; $L_{25} =$ veoma visoko.

Svaka lingvistička promenljiva odgovara jednom fazi skupu, i komponenete fazi skupa su I_{ij} $(i = 1,2; j = 1, \dots, 5)$ i odgovarajuća funkcija pripadnosti.

5.2. Konstruisanje modela fazi vremenskih serija

Pre konstuisanja modela podaci se moraju fazifikovati i za dnevni indeks kretanja cena i za promet akcija. Procedura koja je definisana Definiciji 4.2.1. i data u Primeru 4.2.1. primenjena je na svaki fazi skup L_{ij} $(i = 1,2; j = 1, \dots, 5)$ i na taj na čin dobijaju se dnevni indeks kretanja cena akcija i promet akcija kao odgovarajuće funkcije pripadnosti, što je i prikazano u naredne dve tabele. Prikazano je samo prvih deset podataka.

Datum	*Dnevno kretanje TAIEX-a*	L_{11}	L_{12}	L_{13}	L_{14}	L_{15}
3.1.3003.	101,45	0,00	0,00	0,00	0,65	0,35
6.1.2003.	63,54	0,00	0,00	0,00	0,88	0,12
7.1.2003.	11,22	0,00	0,00	0,7	0,30	0,00
8.1.2003.	135,85	0,00	0,00	0,00	0,45	0,55
9.1.2003.	-23,2	0,00	0,47	0,53	0,00	0,00
10.1.2003.	37,07	0,00	0,00	0,14	0,86	0,00
13.1.2003.	140,46	0,00	0,00	0,00	0,42	0,58
14.1.2003.	1,16	0,00	0,00	0,92	0,08	0,00
15.1.2003.	25,28	0,00	0,00	0,39	0,61	0,00
16.1.2003.	-74,41	0,20	0,00	0,00	0,00	0,00

Tabela 6. [1] Stepen pripadnosti dnevnog kretanja TAIEX-a

Datum	*Promet akcija (u stotinama miliona)*	L_{21}	L_{22}	L_{23}	L_{24}	L_{25}
3.1.3003.	325	0,00	0,00	0,00	0,20	0,80
6.1.2003.	-56	0,00	0,62	0,38	0,00	0,00
7.1.2003.	221	0,00	0,00	0,00	0,50	0,50
8.1.2003.	110	0,00	0,00	0,00	0,82	0,18
9.1.2003.	24	0,00	0,00	0,38	0,63	0,00
10.1.2003.	-89	0,03	0,97	0,00	0,00	0,00
13.1.2003.	116	0,00	0,00	0,00	0,80	0,20
14.1.2003.	92	0,00	0,00	0,00	0,87	0,13
15.1.2003.	-154	0,24	0,76	0,00	0,00	0,00
16.1.2003.	171	0,20	0,00	0,00	0,64	0,36

Tabela 7. [1] Stepen pripadnosti dnevnog prometa akcija

Pretpostavlja se da je maksimalni stepen pripadnosti datie promenljive određenog dana lociran u $L_{1j}, j = 1, \dots, 5$ i njena lingvistička promenljva biće označena sa $L_{1j}, j = 1, \dots, 5$. Na primer, za 3. Januar.2003., maksimalni stepen pripadnosti locirani su u L_{14} i L_{25}, dakle, indeks kretanja cene akcije 3. Januara 2003 je L_{14} i promet akcija je L_{25} ili može se reći da je kretanje cene akije tog dana bilo u „porastu“ (rast) i promet akcija je bio „veoma visok“. Takođe, fazi veze među podacima mogu biti locirane. One mogu biti ustanovljene na datim podacima, šta više, mogu biti oformljene pomoću fazi relacione matrice Markova.

R je fazi relaciona matrica markova koja se sastoji od matrica R_{11}, R_{12}, R_{21} i R_{22},

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}.$$

R_{11} je fazi relaciona matrica Markova kretanja cene akcije određenog dana i kretanja cene akcije narednog dana. R_{12} je fazi relaciona matrica Markova kretanja cene akcije određenog dana i prometa akcija narednog dana. R_{21} predstavlja fazi relacionu matricu Markova prometa akcija oderđenog dana i kretanja cene akcije narednog dana. R_{22} je fazi relacina matrica Markova koja predstavlja uticaj prometa akcija određenog dana na promet akcija narednog dana.

$$R = \begin{bmatrix} 0.38 & 0.62 & 0.80 & 0.10 & 0.00 & 0.38 & 0.26 & 0.80 & 0.78 & 0.00 \\ 0.33 & 0.75 & 0.94 & 0.75 & 0.30 & 0.80 & 0.94 & 0.77 & 0.64 & 0.23 \\ 0.52 & 0.59 & 0.95 & 0.94 & 0.74 & 0.48 & 0.86 & 0.63 & 0.74 & 0.36 \\ 0.99 & 0.61 & 0.94 & 0.75 & 0.58 & 0.52 & 0.75 & 0.7 & 0.95 & 1.00 \\ 0.39 & 0.61 & 0.58 & 0.35 & 0.12 & 0.25 & 0.83 & 0.38 & 0.58 & 0.13 \\ 0.20 & 0.51 & 0.48 & 1.00 & 0.25 & 0.34 & 0.86 & 0.36 & 0.64 & 0.26 \\ 0.97 & 1.00 & 0.8 & 0.86 & 0.58 & 0.66 & 0.68 & 0.95 & 0.95 & 0.80 \\ 0.52 & 0.74 & 0.77 & 0.63 & 1.00 & 0.22 & 0.94 & 0.63 & 0.95 & 0.38 \\ 0.39 & 0.67 & 0.90 & 0.63 & 0.50 & 0.77 & 1.00 & 0.89 & 0.80 & 0.18 \\ 0.23 & 0.36 & 0.48 & 0.98 & 0.50 & 0.36 & 0.74 & 0.38 & 0.50 & 0.18 \end{bmatrix}$$

R je Fazi relaciona matrica Markova koja je oformljena na osnovu ustanovljenih fazi relacija među podacima i na osnovu procedure date u Definiciji 4.3.1.

Viševrednosni autoregresioni model prvog reda dat je na sledeći način

$$\left(FX_{1,t}, FX_{2t}\right) = \left(FX_{1,t-1}, FX_{2t-1}\right)R.$$

$\left(FX_{1,t}, FX_{2t}\right)$ i $\left(FX_{1,t-1}, FX_{2t-1}\right)$ predstavljaju funkcije pripadnosti za lingvističke promenljive viševrednosnih fazi skupova, kretanja cene akcije i prometa akcija, dana t i dana $t-1$. Naredne dve tabele predstavljaju vrednosti funkcije pripadnosti izlaznih veličina po modelu i konvrertovanih vrednosti funkcija pripadnosti pomoću indikator funkcije lingvističkog vektora.

Datum	*Funkcija pripadnosti izlazih veličina po modelu*
6.1.2003.	$(0.89, 0.96, 1.13, 1.46, 1.08)(0.88, 1.39, 1.04, 1.15, 0.83)$
7.1.2003.	$(1.49, 1.22, 1.49, 1.37, 1.16)(1.14, 1.37, 1.31, 1.49, 1.49)$
8.1.2003.	$(0.91, 1.09, 1.20, 1.20, 1.20)(0.98, 1.20, 1.13, 1.20, 0.54)$
9.1.2003.	$(0.84, 1.22, 1.37, 1.07, 0.95)(1.22, 1.37, 1.27, 1.35, 0.63)$
10.1.2003.	$(0.91, 1.16, 1.16, 1.16, 1.03)(1.10, 1.16, 1.16, 1.16, 0.73)$
13.1.2003.	$(1.84, 1.58, 1.67, 1.62, 1.16)(1.84, 1.43, 1.65, 1.82, 1.67)$
14.1.2003.	$(0.81, 1.25, 1.38, 1.05, 0.92)(1.19, 1.38, 1.22, 1.38, 0.60)$
15.1.2003.	$(0.91, 1.26, 1.80, 1.55, 1.24)(1.25, 1.74, 1.50, 1.54, 0.54)$
16.1.2003.	$(1.37, 1.37, 1.37, 1.37, 1.16)(1.18, 1.28, 1.37, 1.37, 1.37)$

Tabela 8. [1] Izlazne veličine funkcije pripadnosti po modelu za $TAIEX$ i razliku u prometu na tržištu

Datum	*Funkcija pripadnosti nakon konverzije*
6.1.2003.	(0,0,0,1,0)(0,1,0,0,0)
7.1.2003.	(1,0,1,0,0)(0,0,0,1,1)
8.1.2003.	(0,0,0,1,1)(0,1,0,1,0)
9.1.2003.	(0,0,1,0,0)(0,1,0,0,0)
10.1.2003.	(0,1,1,1,0)(0,1,1,1,0)
13.1.2003.	(1,0,0,0,0)(0,0,0,1,0)
14.1.2003.	(0,0,1,0,0)(0,1,0,1,0)
15.1.2003.	(0,0,1,0,0)(0,1,0,0,0)
16.1.2003.	(1,1,1,1,0)(0,0,1,1,1)

Tabela 9.[1] Konvrertovane vrednosti funkcija pripadnosti pomoću indikator funkcije ligvističkog vektora za $TAIEX$ i razliku u prometu na tržištu

5.3. Upoređivanje i analiza dobijenih rezultata

Pošto se ovaj primer u najvećoj meri fokusira na osobini tendencije vremenskih serija, korišteno je osnovno fazi pravilo da bi se verifikovala konvertovana funkcija pripadnosti i osobine dobijenih rezultata. Šta više, uključeno je značenje i definicja funkcije poverenja. Osobine predviđenih rezultata i funkcije poverenja su prikazani u Tabelama 10. i 11.

Datum	*Realizovana vrednost*	*Vrednost predviđena pomoću fazi vremenskih serija*	*Funkcija poverenja u predviđenu vrednost*
6.1.2003.	Rast	Rast	0.71
7.1.2003.	Nepromenjeno	Nagli pad	0.65
8.1.2003.	Nagli rast	Nagli rast	0.47
9.1.2003.	Nepromenjenost	Nepromenjenost	0.73
10.1.2003.	Rast	Nepromenjenost	0.58
13.1.2003.	Nagli rast	Nagli pad	0.51
14.1.2003.	Nepromenjenost	Nepromenjenost	0.74
15.1.2003.	Rast	Nepromenjenost	0.75
16.1.2003.	Pad	Pad	0.47
17. 1.2003.	Pad	Nepromenjenost	0.75
20. 1.2003.	Rast	Rast	0.79
12. 1.2003.	Nepromenjenost	Nagli pad	0.50
22. 1.2003.	Rast	Rast	0.78
23. 1.2003.	Rast	Nagli pad	0.50
24. 1.2003.	Rast	Rast	0.74
27. 1.2003.	Rast	Pad	0.42
28. 1.2003.	Rast	Rast	0.72
6.2.2003.	Nagli pad	Nagli pad	0.54

7. 2.2003.	Pad	Nepromenjenost	0.83
10. 2.2003.	Pad	Nepromenjenost	0.75
11. 2.2003.	Pad	Rast	0.75
12. 2.2003.	Nepromenjenost	Pad	0.60
13. 2.2003.	Nagli pad	Nepromenjenost	0.69
14. 2.2003.	Nepromenjenost	Pad	0.60
17. 2.2003.	Nagli rast	Nagli rast	0.55
18. 2.2003.	Pad	Nepromenjenost	0.76
19.2.2003.	Pad	Nepromenjenost	0.76
20. 2.2003.	Nepromenjenost	Nepromenjenost	0.80
21. 2.2003.	Nepromenjenost	Nepromenjenost	0.71
24. 2.2003.	Rast	Rast	0.65
25. 2.2003.	Nagli pad	Nagli pad	0.66
26. 2.2003.	Nepromenjenost	Nepromenjenost	0.81
27. 2.2003.	Nepromenjenost	Nepromenjenost	0.69
3.3.2003.	Rast	Rast	0.44
4. 3.2003.	Pad	Nepromenjenost	0.73
5. 3.2003.	Pad	Nagli rast	0.48
6. 3.2003.	Nepromenjenost	Nepromenjenost	0.78
7. 3.2003.	Pad	Pad	0.63
10. 3.2003.	Pad	Nepromenjenost	0.74
11.3.2003.	Pad	Pad	0.66
Prosečna poklapanja 0.53			
Prosečna tačnost predviđanja: 0.81			

Tabela 10. [1] Poređenje realizovane i predviđene rednosti kretanja TAIEX indeksa

Datum	*Realizovana vrednost*	*Vrednost predviđena pomoću fazi vremenskih serija*	*Funkcija poverenja u predviđenu vrednost*
6.1.2003.	Nizak	Nizak	0.70
7.1.2003.	Veoma visok	Veoma visok	0.48
8.1.2003.	Visok	Srednji	0.79
9.1.2003.	Visok	Nizak	0.68
10.1.2003.	Nizak	Srednji	0.60
13.1.2003.	Visok	Visok	0.67
14.1.2003.	Visok	Srednji	0.78
15.1.2003.	Nizak	Nizak	0.73
16.1.2003.	Visok	Veoma visok	0.44
17. 1.2003.	Veoma nizak	Veoma nizak	0.61
20. 1.2003.	Nizak	Nizak	0.75
12. 1.2003.	Veoma visok	Veoma visok	0.52
22. 1.2003.	Nizak	Nizak	0.77
23. 1.2003.	Veoma visok	Veoma visok	0.50
24. 1.2003.	Nizak	Nizak	0.69
27. 1.2003.	Veoma nizak	Srednji	Tie-undecided
28. 1.2003.	Nizak	Nizak	0.70

6.2.2003.	Visok	Visok	0.68
7. 2.2003.	Visok	Srednji	0.80
10. 2.2003.	Veoma nizak	Srednji	0.67
11. 2.2003.	Visok	Nizak	0.73
12. 2.2003.	Srednji	Nizak	0.61
13. 2.2003.	Nizak	Nizak	0.72
14. 2.2003.	Srednji	Visok	0.59
17. 2.2003.	Visok	Visok	0.73
18. 2.2003.	Nizak	Nizak	0.77
19.2.2003.	Visok	Visok	0.61
20. 2.2003.	Srednji	Nizak	0.74
21. 2.2003.	Nizak	Nizak	0.72
24. 2.2003.	Nizak	Visok	0.64
25. 2.2003.	Visok	Veoma visok	0.48
26. 2.2003.	Srednji	Srednji	0.79
27. 2.2003.	Srednji	Nizak	0.73
3.3.2003.	Visok	Srednji	0.65
4. 3.2003.	Srednji	Nizak	0.67
5. 3.2003.	Visok	Visok	0.70
6. 3.2003.	Nizak	Nizak	0.74
7. 3.2003.	Srednji	Visok	0.65
10. 3.2003.	Nizak	Nizak	0.75
11.3.2003.	Visok	Visok	0.63
Prosečna poklapanja: 0.55			
Prosečna tačnost predviđanja: 0.86			

Tabela 11. [1] Poređenje realizovane i predviđene vrednosti kretanja razlike u prometu

Kao što je prikazano u tabelama 10. i 11. model viševrednosnih fazi vremenskih serija za predviđanje prikazan u ovom radu, predstavlja veoma efikasno sredstvo za predviđanje. Pošto su predviđanja pravljena na uzorku koji je podeljen na 5 delova, prosečno polapanje trebalo bi da iznosi 0.20, za kretanje cene akcije, kao i za promet akcija na tržištu. U ovom primeru prosečna poklapanja iznose 0.53 za kretanje cene akcije i 0.55 za promet na tržistu, a prosečna prognozirana tačnost iznosi 0.81 i 0.86, respektivno. Takođe je i funkcija poverenja od pomoći u donošenju odluke koliku količinu kapitala investirati i kako kontrolisati rizik. Očigledno ja da što je vrednost funkcije poverenja veća, osobine koje se predviđaju su u saglasnosti sa osobinama realizovanih vrednosti. Sa druge strane, kada su osobine predviđenih i realizovanih vrednosti veoma različite, vrednost funkcije poverenja za previđene vrednosti je niska. U sledećoj tabeli su predstavljene realizovane karakteristike i karakteristike predviđene modelom, za kretanje cene akcije od 12. Marta do 23. Aprila 2003. godine.

Datum	*Realizovana vrednost*	*Prognozirana vrednost viševrednosnih fazi vremenskih serija*	*Funkcija poverenja predviđene vrednosti*
12.3.2003.	Rast	Nepromenjenost	0.79
13. 3.2003.	Rast	Nepromenjenost	0.67
14. 3.2003.	Rast	Nepromenjenost	0.74
17.3.2003.	Nagli pad	Rast	0.58
18.3.2003.	Nagli rast	Rast	0.74
18.3.2003.	Pad	Rast	0.72
20.3.2003.	Rast	Nepromenjenost	0.53
21.3.2003.	Nepromenjenost	Nepromenjenost	0.66
24.3.2003.	Nepromenjenost	Rast	0.65
25.3.2003.	Pad	Rast	0.60
26.3.2003.	Nepromenjenost	Nepromenjenost	0.73
27.3.2003.	Nepromenjenost	Nepromenjenost	0.70
28.3.2003.	Pad	Nepromenjenost	0.73
31.3.2003.	Nagli pad	Nepromenjenost	0.73
1.4.2003.	Nepromenjenost	Nepromenjenost	0.81
2.4.2003.	Pad	Rast	0.59
3.4.2003.	Rast	Pad	0.59
4.4.2003.	Nagli rast	Nepromenjenost	0.74
7.4.2003.	Rast	Nepromenjenost	0.73
8.4.2003.	Nepromenjenost	Nepromenjenost	0.71
9.4.2003.	Nepromenjenost	Nepromenjenost	0.54
10.4.2003.	Nepromenjenost	Rast	0.61
11.4.2003.	Nepromenjenost	Nepromenjenost	0.71
12.4.2003.	Pad	Rast	0.61
15.4.2003.	Rast	Pad	0.68
16.4.2003.	Rast	Nagli rast	0.45
17.4.2003.	Pad	Rast	0.73
18.4.2003.	Rast	Nepromenjenost	0.74
21.4.2003.	Nepromenjenost	Rast	0.73
22.4.2003.	Pad	Rast	0.62
23.4.2003.	Nepromenjenost	Nepromenjenost	0.66
Prosečno poklapanje: 0.27			
Prosečna tačnost predviđanja: 0.72			

Tabela 12. [1] Realizovana vrednost, prognozirana vrednost i funkcija poverenja za kretanje $TAIEX$ −a

Datum	Realizovana vrednost	Prognozirana vrednost viševrednosnih fazi vremenskih serija	Funkcija poverenja predviđene vrednosti
8.4.2003.	Nepromenjenost	Nepromenjenost	0.71
9.4.2003.	Nepromenjenost	Nepromenjenost	0.54
10.4.2003.	Nepromenjenost	Rast	0.61
11.4.2003.	Nepromenjenost	Nepromenjenost	0.71

12.4.2003.	Pad	Rast	0.61
15.4.2003.	Rast	Pad	0.68
Prosečno poklapanje: 0.5			
Prosečna tačnost prognoziranja: 0.79			

Tabela 13. [1] Realizovana vrednost, prognozirana vrednosti i funkcija poverenja za kretanje $TAIEX$ −a

Napomena : U periodu od 20. Marta do 2.maja 2003. godine Taivanska berza je pretrpela veliki udar zahvaljujući Drugom Zalivskom Ratu. Prvi znaci SARS virusa javili su se 8. Marta na Taivanu i proširenje ovog virusa mnogo je uticalo na Taivansku berzu. I pored ozbiljnih oscilacija na tržištu, prosečno poklapanje u narednih 31 dan, kao sto je i pokazano u tabeli 12., uspeva da dostigne 0.27 i prosečna tačnost prognoziranja je 0.72. Ukoliko se isključe deset dana pre i posle Zalivskog rata i dani nakon izbijanja SARS virusa, dobija se šest dana sa prosečnim poklapanjem 0.5 i prosečna tačnost prognoziranja 0.79. Ovo dokazuje da je model viševrednosnih fazi vremenskih serija koji je predstavljen, u velikoj meri, verodostojan u budućim predviđanjima. Jedan od razloga iz kog se neke predviđene vrednosti ne poklapaju sa realizovanim vrednostima je taj što se uzima samo maksimalna vrednost funkcije pripadnosti i zanemaruje drugi stepen pripadnosti u radu sa modelom.

Zaključak

Proces donošenja odluka često je povezan sa predviđanjem budućih vrednosti koje zavise od vremena, a pored toga, donošenje odluka se često zaniva na nepreciznim i nekompletnim informacijama. Obzirom na to, u ovom radu su opisane Fazi vremenske serije. Jer su one dobre za donošenje relevantnih zaključaka pri radu sa nepreciznim podacima. Takođe su opisani i osnovni pojmovi vezani za vremenske serije, fazi skupove i fazi logiku.

Kroz rad je detaljno opisan postupak modeliranja koji se zasniva, kako na vremenskim serijama tako i na fazi teoriji. Pre svega, definisani su osnovni pojmovi vezani za vremenske serije, fazi skupove i fazi logiku. Definisane su fazi vemenske serije, fazi relacije i fazi relaciona matrica Markova. Nakon toga je data konstrukcija viševrednosne vremenske serije, kao pogodnog modela za predviđanje budućih vrednosti. Kako bi se dobio odgovovarajući lingvistički vektor, korištena je granična funkcija pri formiranju osnovnog fazi pravila. Na kraju je izgrađen dobar integrisani proces modeliranja, te je upravo taj proces iskorišten za konstruisanje modela za predviđanje cene i razlike u prometu Taivanskog ponderisanog indeksa cena akcija. Za prikaz performansi viševrednosnih fazi vremenskih serija korištena je proesčna tačnost predviđanja. Dati model se u poređenju sa tradicionalnim modelima pokazao kao najbolji.

Naravno, kao ni svi modeli, tako ni modeli nastali modeliranjem viševrednosnih fazi vremenskih serija nisu savršen prikaz stanja. Iz tog razloga u radu je predstavljena funkcija poverenja u dobjene rezultate. Dakle, što je stepen funkcije poverenja veći,veća je sigurnost u dobijene rezultate i automatski mogućnost profita investitora pri ulaganju kapitala veća.

Literatura

[1] Hung T. Nguyen, Berlin Wu, *Fundamentals of Statistics with Fuzzy Data*, 2006.

[2] J.D.Hamilton, *Time Series Analysis*, Princeton University Press, New Jersey, 1994.

[3] Zagorka Lozanov-Crvenković, *Statistika*, Novi Sad, 2011.

[4] Danijela Rajter-Ćirić, *Verovatnoća,* Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno- matametički fakultet u Novom Sadu, Novi Sad, 2009.

[5] Danijela Rajter-Ćirić, *Beleške sa kursa Stohastička Analiza*, Novi Sad, 2012.

[6] Endre Pap, *Fazi mere i njihova primena,* Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, Novi Sad, 2009.

[7] Bojadziev G., Bojadziev M., *Fuzzy logic for business, finance and management*, World Scientific 1999.

[8] Zorica Mladenović, Aleksandra Nojković, *Primenjena analiza vremenskih serija,* Centar za izdavačku delatnost ekonomskog fakulteta u Beogradu, 2012.

[9] G. Kirchgässner, J. Wolters, *Introduction to Modern Time Series Analysis*, Springer, 2007.

[10] M. Stojaković, Z. Stojaković, *Series of fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems* 160, 2009, 3115-3127

[11] M. Stojaković, *Fuzzy Random Variables, Expectation and Martingales*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 184, 1994, 594-606

[12] Klement E. P., Meisar R., Pap E., *Triangular norms*, Kluwer Academic Publisher, 2000

[13] Hans M, *Applied fuzzy Arithmetic-an introduction with enginiering application*, Springer, 2005

[14] Li B., Sun C., *Language, Information and Computation* (PACLIC 11), 337-346, Seul, Korea, 1999

[15] Wu B., Hung S., *Fuzy Set and System*, 108, 257-287, 1999

[16] Sugeno M., K. Tanaka, *Fuzy Sets and Systems*, 42, 315-334, 1991

[17] D. C. Montgomery, C. L. Jennings, M. Kulachi, *Introduction to Time Series Analysis and Forecasting*, John Wiley and Sons, 2008.

Biografija

Teodora Knežević je rođena 11.januara 1989. godine u Vrbasu. Osnovnu školu „Vuk Karadžić“ u Crvenki završila je 2004. godine kao nosilac Vukove diplome i đak generacije. Uporedo sa osnovnom školom pohađa i Osnovnu školu za muzičko obrazovanje u Kuli, koju završava 2004. godine kao nosilac Vukove diplome. Zatim upisuje gimnaziju „Žarko Zrenjanin“ u Vrbasu, prirodno-matematički smer, koju završava, takođe kao nosilac Vukove diplome.

Obzirom na veliku sklonost ka prirodnim naukama,2008. godine upisuje Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, smer Primenjena matematika. Zaključno sa junskim ispitnim rokom 2011. godine, položila je sve ispite predviđene planom i programom i time stekla zvanje Matematičar primenjene matematike. Nakon toga, iste godine upisuje master studije, smer Primenjena matematika. Položila je sve ispite zaključno sa aprilskim ispitnim rokom 2013. godine i time stekla uslov za odbranu master rada.

Ključna dokumentacija

UNIVERZITET U NOVOM SADU

PRIRODNO MATEMATIČKI FAKULTET

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: *Monografska dokumentacija*
TD

Tip zapisa: *Tekstualni štampani materijal*
TZ

Vrsta rada: *Master rad*
VR

Autor: *Teodora Knežević*
AU

Mentor: *dr Ivana Štajner-Papuga*
MN

Naslov rada*: Analiza fazi vremenskih serija*
NR

Jezik publikacije: *srpski (latinica)*
JP

Jezik izvoda: *s /en*
JI

Zemlja publikovanja: *Republika Srbija*
ZP

Uže geografsko područje: *Vojvodina*
UGP

Godina: *2013.*
GO

Izdavač: *Autorski reprint*
IZ

Mesto i adresa: *Prirodno – matematički fakultet, Novi Sad, Trg D. Obradovića 4*
MA

Fizčki opis rada: (5/80/17/13/21/0/0)
FO (*broj poglavlja, strana, lit.citata, tabela, slika, grafika,priloga)*

Naučna oblast: *Matematika*
NO

Naučna disciplina: *Statistika*
ND

Predmetne odrednice, ključne reči*:fazi vremenske serije, viševrednosne fazi vremenske serije, prognoziranje buduće vrednosti,fazi relaciona matrica Markova, modeliranje viševrednosnih fazi vremenskih serija*

UDK

Čuva se: *U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku*
ČU

Važna napomena: *Nema*
VN

Izvod: *U ovom radu je dat detaljan opis Fazi vremenskih serija sa akcentom na viševrednosne fazi vremenske serije. Dati su osnovni pojmovi i definicije vezani za vremenske serije. Takođe, objašnjeni su i osnovni pojmovi iz teorije fazi skupova i fazi logike. Kroz konkretan primer prikazana je primena fazi vremenskih serija u procesu predviđanja cene akcije i prometa na tršistu.*

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: *19. 03. 2013.*
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik:	*Dr Zagorka Lozanov-Crvenković, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu*
Član:	*Dr Ljiljana Gajić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu*
Mentor:	*Dr Ivana Štajner-Papuga, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu*

UNIVERSITY OF NOVI SAD

FACULTY OF NATURAL SCIENCES & MATHEMATICS

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: *Monograph documentation*
DT

Type of record: *Textual printed material*
TR

Contents code: *Master thesis*
CC

Author: *Teodora Knežević*
AU

Mentor: *Dr Ivana Štajner-Papuga*
MN

Title: *Analysis of Fuzzy Time Series*
TI

Language of text: *Serbian (Latin)*
LT

Language of abstract: *en/s*

LT

Country of publication: *R Serbia*
CP

Locality of publication: *Vojvodin*a
LP

Publication year: *2013*
PY

Publisher: *Author's reprint*
PU

Publ. place: *Faculty of Natural Sciences and MathematicsNovi Sad, Trd D. Obradovića 4*
PP

Physical description: (5/80/17/13/21/0/0)
PD

Scientific field: *Mathematics*
SF

Scientific discipline: *Statistics*
SD

Subject Key words: *fuzzy time series, multivariative fuzzy time series, forecastig of future value, fuzzy Markov relation matrix,multivariative fuzzy time series modeling*

SKW
UC

Holding data: *Library of the Department of Mathematics and Computer Sciences*
HD

Note: *None*
N

Abstract: *This paper presents a detailed description of Fuzzy time series, with focus on multivarative fuzzy time series. Here are presented basis concepts of the theory of time series. Basic concepts of the theory of fuzzy sets and fuzzy logic are explained, too. Application of fuzzy time series in process of forecating, on stock price and trade volume, is shown through the example.*

AB

Accepted on Scientific board on: *19. 03. 2013.*
AS

Defended: *2013.*
DE

Thesis Defend board:
D

President: *Dr Zagorka Lozanov-Crvenković, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad*

Member: *Dr Ljiljana Gajić, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad*

Mentor: *Dr Ivana Štajner-Papuga, associate professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad*