UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Tanja Simeunović

Agregacione funkcije kao funkcije uticaja

-Master rad-

Novi Sad, 2015.

Sadržaj:

Uvod

„Uspeh svakodnevnih aktivnosti u velikoj meri zavisi od toga koliko dobro neko utiče na druge. Sposobnost uticaja pomaže pri stvaranju njihove naklonosti i omogućava lakši dolazak do cilja.“ („ Influence functions, followers and command games“, Michael Grabisch i Agnieszka Rusinowska*)*

Ovaj rad se bavi savremenom temom koja se nalazi u okvirima Teorije odlučivanja, tačnije problemom modeliranja procesa donošenja odluka uz prisustvo uticaja. Cilj rada je da da prikaz i tumačenje veoma aktuelnih rezultata iz [11] i [12] koji se bave upravo ovom temom.

Uticaji na formiranje mišljenja su široko rasprostranjeni, kako u svakodnevnom životu, tako i u nauci: u psihologiji, sociologiji, ekonomiji, marketingu, matematici, fizici, itd. Do sada su funkcije uticaja bile determinističke, međutim, u ovom radu se razmatra novi pristup. Posmatra se dinamički mehanizam uticaja za koga se smatra da je stohastički i da prati stacionarni lanac Markova. Ograničavanje analize na stacionaran markovski proces čini da se fenomen uticaja razlikje od procesa učenja. Ovo se može posmatrati kao razumna aproksimacija stvarnosti kada postoji skup osoba koje su u interakciji neko vreme. Članovi skupa se dobro poznaju i mogu biti osetljivi na tuđe rasprave, ali zapravo nisu striktno podložni pokušajima uticaja drugih. Pod opisanim uslovima može se smatrati da je proces stacionaran, dok je učenje više aktivno u ranom stadijumu. Uzimajući u obzir pretpostavke procesa Markova, za očekivati je da iz nekog razloga predstavnici ne mogu ili ne žele da dugo pamte prethodna razmišljanja. Diskusije mogu postati previše duge ili zamorne, previše ljudi izražava svoje mišljenje, što postaje teško za pamćenje, ili predmet diskusije nije dovoljno bitan za predstavnika da bi zapamtio sve o čemu se raspravljalo. Upravo iz navedenih razloga rasprostranjeno je shvatanje da je u mnogim okruženjima esencijalno poslednje mišljenje, pa tako i u slučaju postojanja utcaja. Na primer, u slučaju izbora za predsednika republike, narod može da menja mišljenje i da pod uticajem drugih bude u nedoumici, međutim, konačna odluka će dati glas pojedincu, a najveći zbir takvih konačnih odluka će zapravo pomoći nekome da dodje do pomenute pozicije.

Razmatraće se zapravo dve šire tematske celine. U prvoj je opisan fenomen uticaja koji je opisan pomoću funkcije uticaja, funkcije sledbenika i komandne igre ([11]). U drugoj celini je prikazana detaljnija slika pomoću agregacionih funkcija ([12]). Ono što im je zajedničko jeste sam pojam uticaja i proces formiranja mišljenja koji se detaljno modelira. Zbog preglednosti su navedeni i dokazi esencijalnih tvrdjenja, mada je u pitanju prikaz rezultata.

U prvom poglavlju prikazana je tačna veza između *funkcije uticaja* i *funkcije sledbenika*- daje se potreban i dovoljan uslov, koji mora da važi, da bi funkcija bila funkcija sledbenika neke uticajne funkcije. Za datu funkciju sledbenika moguće je odrediti najveću i najmanju funkciju uticaja poznatu kao gornja i donja inverzna funkcija, te opisati strukturu skupa svih funkcija uticaja koje vode do funkcije sledbenika. Literatura korištena za izradu ovog poglavlja je [14, 11, 8, 5]

U drugom poglavlju je ilustrovana veza između *komandne igre* i *komandne funkcije*- naveden je potreban i dovoljan uslov da bi funkcija bila komandna funkcija neke komandne igre. Opisan je i minimalan skup (pobedničke koalicije) koji generiše normalnu komandnu igru. Proučavanjem tačne veze između *komandne igre* i *funkcije uticaja* u [11] dat je potreban i dovoljan uslov za ekvivalenciju između funkcije uticaja i normalne komandne igre. Pronadjeno je i jezgro uticajne funkcije ekvivalentno sa normalnom komandnom igrom. Za izradu ovog poglavlja je korištena literatura [13, 11, 8, 7].

U trećem poglavlju je dat prikaz dinamičkog modela uticaja koji se prvi put pojavljuje u [12]. U njemu predstavnici donose da-ne odluke. Svaki predstavnik ima inicijalno mišljenje, koje može da menja tokom različitih faza interakcije zbog uzajamnog uticaja. Ispituje se model uticaja zasnovan na *agregacionim funkcijama*, odnosno na operatorima agregacije. Svaki predstavnik modifikuje svoje mišljenje nezavisno od drugih, sabirajući trenutno mišljenje svih agenata. S obzirom na to da su pri ovom postupku dozvoljeni proizvoljni operatori agregacije, dati okvir pokriva brojne postojeće modele o formiranju mišljenja. Literatura korištena za izradu ovog poglavlja je [14, 13, 12].

U četvrtom poglavlju su predstavljene *uticajne koalicije* i *hipergrafovi uticaja*, dok je u petom poglavlju prikazana opšta analiza konvergencije u agregacionom modelu, te sve konačne klase i stanja detektovana tom prilikom. Može se pokazati da su moguće konačne klase, ka kojima proces uticaja može konvergirati, upravo konačna stanja (netrivijalna i opšta stanja), ciklične konače klase i unije Boolean-ovih rešetki (zvanih regularne konačne klase), te će biti dat pregled uslova za postojanje različitih vrsta konačnih klasa, baziranih na svojstvima hipergrafova uticaja. Za ovo poglavlje je korištena literatura [12].

U šestom poglavlju, s ciljem dobijanja jedne pregledne celine, predstavljena je značajna familija operatora agregacije koji čini familiju *simetričnih dekompozabilnih modela*. Dat je i prikaz empirijskog primera koji ilustruje formiranje matrice koja odgovara savetodavnoj mreži (eng. advice network). Za izradu ovog poglavlja je korištena literatura [12, 11, 8].

***

Ovom prilikom bih želela da se zahvalim svom mentoru dr Ivani Štajner-Papuga na izdvojenom vremenu i korisnim sugestijama bez kojih ovaj rad ne bi poprimio sadašnji oblik. Takođe se zahvaljujem dr Arpad Takačiju i dr Nataši Spahić, članovima komisije za odbranu master rada.

Posebnu zahvalnost dugujem svojim roditeljima i sestri. Hvala im na ukazanom poverenju, razumevanju, bezuslovnoj podršci koju su mi pružali tokom celokupnog školovanja.

Novi Sad, 2015. *Tanja Simeunović*

1.Funkcije uticaja i funkcije sledbenika

U ovom poglavlju posmatran je skup igrača- donosilaca odluke. Polazna pretpostavka je da u mreži donosilaca odluke postoje uzajamni uticaji, te da je prvobitna odluka podložna promeni. Prvi korak podrazumeva formiranje vektora sklonosti, a postojanje uticaja u grupi dovodi do formiranja funkcija uticaja. Takođe, postoje igrači koji uvek slede sklonost većine, pa se zbog toga formira i funkcija sledbenika. Kroz primere je objašnjeno kako uticaj funkcioniše.

Više o ovoj temi se može pronaći u [14, 11, 8, 5].

1.1. Uvodni pojmovi modela uticaja

U ovom delu je dat pregled uvodnih pojmova iz [11].

Neka je $N = \{1, \dots, n\}$ početni skup koji odgovara skupu glasača i koji se još naziva socijalna mreža (eng. social network). Igrači treba da donesu odluku kojom će da prihvate ili odbiju nešto. Igrač odluku donosi prema svojoj sklonosti i ima pravo da kaže DA (što će se označiti sa +1) i NE (oznaka –1). Od tih odgovora se pravi n-dimenzionalni vektor $i = (i_1, \dots, i_n)$, sastavljen od jedinica i minus jedinica i on jasno pokazuje sklonost svih igrača. U daljem tekstu vektori ovog tipa se nazivaju ***vektori skolonosti***.

Koalicija je skup glasača koji imaju istu sklonost, a dogovor je da je ta sklonost pozitivna , tj. da je odgovor *da*.

Neka je $I = \{-1, +1\}^n$ skup svih vektora sklonosti za koalicije $S \subseteq N$, $|S| \geq 1$, odnosno skup svih uredjenih n-torki elemenata iz {-1,1}. Neka I_s označava skup svih vektora u kome svi članovi S imaju istu sklnonost, tj.,

$I_s = \{ i \in I \mid \forall k,\ j \in S,\ i_k = i_j \}$.

Sledi primer koji ilustruje prethodno uvedene pojmove.

Primer 1. U školi je predloženo da se ide na ekskurziju. Učenici imaju pravo da se odluče da li će ići ili ne. Skup glasača u ovom slučaju je čitavo odeljenje. Ako se (zbog jednostavnosti) pretpostavi da u razredu postoje četiri osobe, onda te osobe predstavljaju **skup glasača** N={Sanja, Marko, Nikola, Ana}. Neka je pozitivna odluka= „otici na ekskurziju“. Ako su se Nikola i Ana izjasnili da će najverovatnije ići, a Sanja i Marko da verovatno neće, onda je **vektor sklonosti** i=(1,1,-1,-1), a potencijalna **koalicija** S={Nikola, Ana} je koalicija učenika koji idu na ekskurziju.

Zbog jednostavnosti, vektor $(1, 1, \dots, 1) \in I$ imaće oznaku 1_N, što znači da su svi članovi rekli *da*, slično i za situaciju gde su svi članovi rekli *ne* -1_N, isto važi i za mešovite slučajeve u kojima su neki članovi rekli da, a neki ne, oznaka će biti (1_S , $-1_{N\setminus S}$).

Primer 2. Ako se posmatra prethodni primer, onda je vektor sklonosti (1_2, -1_2) pošto je to mešoviti slučaj. Ako se dalje pretpostavi da su se svi učenici odlučili da idu na ekskurziju, onda bi taj vektor izgledao 1_4 ili u suprotnom, ako se niko nije opredelio za odlazak onda je vektor sklonosti -1_4.

S obzirom da igrači mogu međusobno uticati jedni na druge, onda zbog uticaja u mreži konačna odluka samog igrača može biti drugačija od prvobitne sklonosti. Tada se svaki vektor sklonosti $i \in I$ pretvara u ***vektor odluke*** Bi , gde B: $I \to I$, $i \mapsto Bi$ je ***funkcija uticaja***. Vektor odluke Bi =((Bi)$_1$, . . . , (Bi)$_n$) je n-dimenzionalni vektor koji se sastoji od jedinica i minus jedinica i pokazuje odluke koje su igrači napravili. Skup svih funkcja uticaja je označen sa $\mathcal{B}$. Ako i odgovara S, onda se Bi obeležava sa B(S) i $B(S) \subseteq N$ je skup svih glasača čija je konačna odluka potvrdna (da). Zato se uticajna funkcija se može posmatrati kao preslikavanje 2^{N} u 2^{N}.

Primer 3. Ako se ponovo posmatra primer sa učenicima koji idu na ekskurziju i ako se pretpostavi da su Nikola i Ana uplatili iznos koji je potreban, a Sanja i Marko nisu, jer definitivno neće ići, onda je vektor odluke Bi =(1,1,-1,-1). Tu nije bilo dodatnog uticaja, prvobitan vektor se nije promenio.

Jedan od glavnih pojmova modela uticaja je pojam ***sledbenika*** date koalicije, koga predstavlja glasač koji „uvek“ sledi sklonost koalicje. „Uvek“ znači u svim slučajevima u kojim svi članovi koalicije imaju istu sklonost vezanu za dato pitanje. Neka $B \in \mathcal{B}$, funkcija sledbenika pod uticajem B je skupovno preslikavanje $\mathrm{F_B}$: $2^{\mathrm{N}} \longrightarrow 2^{\mathrm{N}}$ definisano sa

$$\mathrm{F_B(S)} = \{k \in N \mid \forall i \in I_S, (Bi)_{\mathrm{k}} = i_{\mathrm{S}}\}, \quad \forall S \subseteq N, S \neq \emptyset$$

i $\mathrm{F_B}(\emptyset) = \emptyset$. $\mathrm{F_B}$(S) je skup sledbenika. U [14] je pokazano da je $\mathrm{F_B}$ monotono neopadajuće i da važi

$$F_B(S) \cap F_B(\mathrm{T}) = \emptyset, T \subseteq N, T \neq \emptyset.$$

Skup svih funkcija sledbenika je označen sa $\mathcal{F}$. Definicija skupa funkcija sledbenika postaje:

$$F_B(S) = \bigcap_{S' \supseteq S} B(S') \cap \bigcap_{S' \subseteq N \setminus S} \overline{B(S')}, \quad \forall S \subseteq N, S \neq \emptyset, \tag{1}$$

i $\mathrm{F_B}(\emptyset) = \emptyset$.

Drugim rečima, vrednost funkcije sledbenika za koaliciju S je skup dobijen kao presek svih B(S') (to su oni koji su dali finalane odgovore kao S' na početku, to je skup) nad koalicijama koje sadrže početnu i svih komplemenata $\overline{\mathrm{B}(S')}$ nad koalicijama koje ne sadrže početnu.

Neka F_B nije identički jednako praznom skupu. Jezgro od B je sledeća kolekcija skupova:

$$\mathcal{K}\ (\mathrm{B}) = \{\mathrm{S} \in 2^{\mathrm{N}}\ |\mathrm{F_B}(\mathrm{S}) \neq \emptyset \text{ i } S' \subset \mathrm{S} \implies \mathrm{F_B}(S') = \emptyset\}.$$

Ono je dobro definisano s obzirom da je F_B monotono neopadajuće. To je skup minimalnih koalicija koje imaju sledbenike (podkoalicije nemaju sledbenike).

U netrivijalnom slučaju, tj. kad se skup vrednosti za F_B razlikuje od $\{\emptyset\}$, skup minimalnih koalicija koje imaju sledbenike odgovara jezgru preslikavanje B datom sa

$$\mathcal{K}\ (\mathrm{B}) = \{\mathrm{S} \in 2^{\mathrm{N}}\ |\mathrm{F_B}(\mathrm{S}) \neq \emptyset \text{ i } S' \subset \mathrm{S} \implies \mathrm{F_B}(S') = \emptyset\}.$$

Primer 4. Posmatrajmo ponovo primer sa decom koja idu na ekskurziju. Ukoliko se Nikola i Ana druže intezivnije, a sa druge strane Sanja i Marko su najbolji drugari. Tada ako je Nikola uticao na Anu da ide na ekskurziju, onda je Ana Nikolin sledbenik, a ako je npr. Sanja uticala na Marka da ne ide, onda je Marko Sanjin sledbenik.

Početni vektor je tada i=(1,1,-1,-1) za Nikolu, Anu, Sanju i Marka i on pokazuje koji bi učenici želeli da idu, a koji ne.

S={Nikola, Ana} je koalicija učenika koji najverovatnije idu na ekskurziju,

I_S={(1,1,1,1), (1,1,-1,1), (1,1,1,-1), (1,1,-1,-1)} je skup svih mogućih vektora sklonosti.

Pretpostavimo da su Ana i Sanja pričale i da je Ana uticala na Sanju da promeni mišljenje, pa je sada:

Bi=(1,1,1,-1) vektor odluke i pokazuje da su se svi sem Marka odlučili da idu, B(S)={Nikola, Ana, Sanja} je skup onih učenika čija je odluka potvrdna, a F_B={ Nikola, Ana, Sanja} je skup sledbenika.

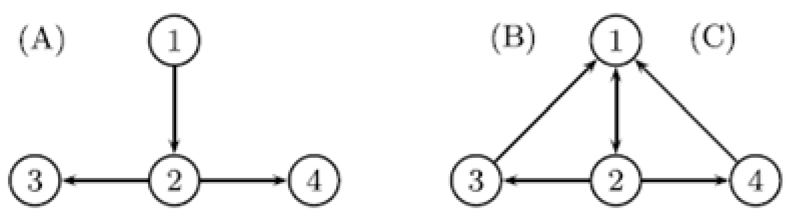
Moglo se desiti i da je Bi=(-1,1,1-1), tj. da je Nikola odustao u trenutku kada je Sanja odlučila da ide, pa je tada B(S)={Ana, Sanja} skup onih učenika čija je odluka potvrdna, a skup sledbenika je F_B={Ana,Sanja}.

Sledi primer u literaturi poznat kao Confucian-ov model društva koji u potpunosti ilustruje sve prethodno navedene pojmove.

Primer 5. [11, 8, 5] Neka je dato četvoročlano društvo N = {1, 2, 3, 4} sa kraljem (1), čovekom (2), ženom (3) i detetom (4). Skup vektora sklonosti je $I=\{-1,+1\}^4$, odnosno na raspolaganju je 16 mogućih vektora sklonosti.

Pravila po kojima funkcijoniše dato društvo su sledeća:

i) Čovek sledi kralja;
ii) Žena i dete slede čoveka;
iii) Kralj bi trebalo da poštuje ljude;



Slika 1. [11] Socijalne mreže po Confucian-ovom modelu. (A), (B) i (C) pokazuje kako kralj može interpretirati pravilo (iii)

Očigledno, u pitanju je socijalna mreža 4 igrača u kojoj neki igrači utiču (slede) na druge.

Principi (i) i (ii) definišu uslove funkcije uticaja: odluka igrača 2 se uvek podudara sa sklonošću igrača 1, dok igrači 3 i 4 uvek odlučuju prema sklonosti igrača 2. Međutim, pravilo (iii) se može interpretirati na različite načine u zavisnosti od kulture, istorije, tradicije, politike i slično, te možemo razlikovati tri interpretacije (videti sliku 1):

- *Kralj sledi samo sebe*- u takvim društvima kralj uvek donosi odluku koja je u skladu sa njegovom sklonosti. Slika 1. (A) ilustruje ovaj slučaj: na kralja nikad ne utiču njegovi ljudi (nema strelice koja ide ka igraču 1), ali kralj utiče na čoveka (strelica ide od igrača 1 do igrača 2) i čovek utiče i na ženu i na dete (strelice idu od igrača 2 do igrača 3 i 4). Zaključak je da takva mreža modelira situaciju u kojoj kralj ignoriše pravilo (iii).
- *Kralj prati samo jednoglasne ljude*- pravilo (iii) znači da kralj prati svoje ljude samo ako su jednoglasni, u suprotnom kralj donosi odluku po svojoj sklonosti. Slika 1 (B) pokazuje ove slučajeve: postoji određen uticaj ljudi na kralja iako je on prilično ograničen (strelice idu od igrača 2, 3 i 4 do igrača 1).

- *Kralj sledi većinu ljudi*- u takvom društvu kralj sledi većinu svojih ljudi. On odlučuje uzimajući u obzir sklonost bar dva igrača iz skupa $N\setminus\{1\}$. Slika 1 (C) ilustruje ovo društvo. Iako je mreža ista kao kod društva u prethodnom slučaju (B), funkcija uticaja je drugačija.

Sledi tabelarni prikaz svih mogućnosti.

Tabela 1 [11]

i ∈ I	S ⊆ N	Bi	B(S)	B'i	B'(S)	B"i	B"(S)
(1, 1, 1, 1)	N	(1, 1, 1, 1)	N	(1, 1, 1, 1)	N	(1, 1, 1, 1)	N
(1, 1, 1, -1)	123	(1, 1, 1, 1)	N	(1, 1, 1, 1)	N	(1, 1, 1, 1)	N
(1, 1, -1, 1)	124	(1, 1, 1, 1)	N	(1, 1, 1, 1)	N	(1, 1, 1, 1)	N
(1, -1, 1, 1)	134	(1, 1, -1, -1)	12	(1, 1, -1, -1)	12	(1, 1, -1, -1)	12
(-1, 1, 1, 1)	234	(-1, -1, 1, 1)	34	(1, -1, 1, 1)	134	(1, -1, 1, 1)	134
(1, -1, 1, -1)	13	(1, 1, -1, -1)	12	(1, 1, -1, -1)	12	(-1, 1, -1, -1)	2
(1, 1, -1, -1)	12	(1, 1, 1, 1)	N	(1, 1, 1, 1)	N	(-1, 1, 1, 1)	234
(-1, 1, 1, -1)	23	(-1, -1, 1, 1)	34	(-1, -1, 1, 1)	34	(1, -1, 1, 1)	134
(1, -1, -1, 1)	14	(1, 1, -1, -1)	12	(1, 1, -1, -1)	12	(-1, 1, -1, -1)	2
(-1, -1, 1, 1)	34	(-1, -1, -1, -1)	∅	(-1, -1, -1, -1)	∅	(1, -1, -1, -1)	1
(-1, 1, -1, 1)	24	(-1, -1, 1, 1)	34	(-1, -1, 1, 1)	34	(1, -1, 1, 1)	134
(1, -1, -1, -1)	1	(1, 1, -1, -1)	12	(-1, 1, -1, -1)	2	(-1, 1, -1, -1)	2
(-1, 1, -1, -1)	2	(-1, -1, 1, 1)	34	(-1, -1, 1, 1)	34	(-1, -1, 1, 1)	34
(-1, -1, 1, -1)	3	(-1, -1, -1, -1)	∅	(-1, -1, -1, -1)	∅	(-1, -1, -1, -1)	∅
(-1, -1, -1, 1)	4	(-1, -1, -1, -1)	∅	(-1, -1, -1, -1)	∅	(-1, -1, -1, -1)	∅
(-1, -1, -1, -1)	∅	(-1, -1, -1, -1)	∅	(-1, -1, -1, -1)	∅	(-1, -1, -1, -1)	∅

U cilju lakšeg razumevanja prethodno izloženog, sledi tumačenje druge vrste tabele:

- i =(1, 1, 1, -1) je vektor sklonosti, tj. kralj, čovek i žena kažu da, dok je dete za ne,
- S=123 predstavlja skup članova koji imaju istu sklonost,
- Bi=(1, 1, 1, 1) je vektor odluke u slučaju (A), tj. kada kralj utiče na ostale članove i dete je promenilo odluku,
- B(S)=N je skup svih glasača čija je odluka pozitivna u slučaju (A), tj. kada kralj sledi samo sebe,
- B'i=(1, 1, 1, 1) je vektor odluke u slučaju (B), tj. kada kralj prati samo jednoglasne ljude, odnosno ostali nisu bili jednoglasni, pa je kralj sve preinačio u odluku po svojoj volji,
- B'(S)=N je skup svih glasača čija je odluka pozitivna u slučaju (B), tj. kada kralj prati samo jednoglasne ljude,
- B"i =(1, 1, 1, 1) je vektor odluke u slučaju (C), tj.kada kralj sledi većinu ljudi,
- B"(S)=N je skup svih glasača čija je odluka pozitivna u slučaju (C), tj. kada kralj sledi većinu ljudi.

Neka su funkcije uticaja slučajeva (A), (B) i (C) označene sa B, B' i B", respektivno. Moguće je odrediti skupove sledbenika svake koalicije za sve tri funkcije uticaja.

Ako je vektor sklonosti i=(1, 1, 1, -1) tj. kralj, čovek i žena kažu *da*, dok dete kaže *ne*, tada koalicija onih koji kažu *da* je S=123. Nakon uticaja kralja je i dete promenilo odluku, pa je vektor odluke Bi=(1, 1, 1, 1), a B(S) je skup svih koji su rekli *da* i to je baš N, I_S={(1,1,1,1), (1,1,1,-1)} je skup svih ishoda. Tada za k=1, k-ta pozicija vektora Bi se poklapa sa mišljenjem koalicije, isto važi i za k=2 i k=3, pa je funkcija sledbenika za sve tri funkcije uticaja F_B(S)=N (tj. F_B(S)=N, F_B'(S)=N, F_B"(S)=N).

Funkcije sledbenika F_B , F'_B i F''_B su monotono neopadajuće i skupovi sledbenika pod uticajima B, B' i B" su disjunktni. Jezgro svake funkcije uticaja je

$$\mathcal{K}(B) = \mathcal{K}(B') = \mathcal{K}(B'') = \{\{1\}, \{2\}\}.$$

1.2. Veza između funkcije uticaja i funkcije sledbenika

S obzirom na to da se i funkcija uticaja i funkcija sledbenika mogu posmatrati kao preslikavanja iz 2^{N} u 2^{N}, postavlja se pitanje kakva je veza između ova dva osnovna pojma. Kardinalnost takvog preslikavanja je $(2^{\mathrm{n}})^{(2^{\mathrm{n}})} = 2^{\mathrm{n}2^{\mathrm{n}}}$ i postoji toliko potencijalnih funkcija uticaja koliko i funkcija sledbenika. Međutim, sve dok nema restrikcije na B, F_B bi trebalo da zadovolji uslov monotonog neopadanja. Zato postoje funkcije iz $(2^{\mathrm{N}})^{(2^{\mathrm{N}})}$ koje ne mogu biti funkcije sledbenika neke funkcije uticaja. Iz tog razloga postoje funkcije uticaja koje mogu imati istu funkciju sledbenika. Zapravo, gube se neke informacije ako se razmatra samo F_B. Formalno, ovo znači da je veza između funkcije uticaja i funkcije sledbenika data preslikavanjem

$$\phi: \mathcal{B} \longrightarrow (2^{\mathrm{N}})^{(2^{\mathrm{N}})},$$

pri čemu je $\phi(B)= F_B$, nije ni sirjekcija, niti injekcija.

U radu [11] su postavljena dva esencijalna pitanja čiji prikazi su ovom prilikom, zarad veće preglednosti, dati u naredna dva podpoglavlja.

1.2.1. Potreban i dovoljan uslov za postojanje funkcije uticaja za datu funkciju sledbenika

Odgovor na ovo pitanje daje sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 1. [11] Funkcija F: $2^{\mathrm{N}} \longrightarrow 2^{\mathrm{N}}$ je funkcija sledbenika za $B \in \mathcal{B}$ (tj. $F_B = F$ ili $\phi(B)$=F) ako i samo ako su zadovoljena sledeća tri uslova:

1) $F(\emptyset)= \emptyset$

2) F je monotono neopadajuće

3) Ako $S \cap T = \emptyset$, onda $F(S) \cap F(T) = \emptyset$

Najveća i najmanja funkcija uticaja koja pripada ϕ^{-1}(F) su funkcije uticaja $\underline{B}_F$ i $\overline{B}_F$ date sa

$$\underline{B}_F(S) = F(S), \qquad \overline{B}_F(S) = \overline{F(\bar{S})}\ , \ \forall S \subseteq N . \qquad (2)$$

Ove funkcije se zovu **gornja** i **donja inverzna funkcija** od F.

Sledi dokaz iz [11] koji je baziran na osobinama funkcije sledbenika.

Dokaz. Već se zna da svaka funkcija sledbenika ispunjava prethodna tri uslova. Neka $F:2^N \longrightarrow 2^N$ zadovoljava navedene uslove, proverava se da li je zaista ϕ(BF)=ϕ(F)= F_F=F. Treba dokazati da je F_F (S)=F(S) za svako $S \subseteq N$. Za $S = \emptyset$ je tačno, po definiciji funkcije sledbenika i na osnovu uslova $F(\emptyset) = \emptyset$. Ako se pretpostavi da je $S \neq \emptyset$, s obzirom da je F monotono neopadajuća, sledi $F(S') \supseteq F(S)$ za sve $S' \supseteq S$, što implicira da je $\bigcap_{S' \supseteq S} F(S') = F(S)$. Na osnovu (iii), $F(S') \cap F(S) = \emptyset$ za sve $S' \subseteq N \setminus S$. Zato je $\bigcap_{S' \subseteq N \setminus S} \overline{F(S')} \supseteq F(S)$.

Iz (1) se zaključuje da je $F_F(S) = F(S)$.

Ostaje da se pokaže da je F najmanja inverzna funkcija od F. Neka je $F \neq \emptyset$, za svako $S \subseteq N$, takvo da je $F(S) \neq \emptyset$, $k \in F(S)$ implicira da za svako $B \in \phi^{-1}(F)$, B (S) sadrži k. Zato, $B(S) \supseteq F(S)$ za svako $S \subseteq N$. Dokaz za gornju inverznu funkciju je analogan. $\square$

Drugim rečima, monotonost (neopadanje) i određeni vid disjunktnosti garantuju da se vrednosti funkcije F nižu od manjih ka većim.

U radu [11] su pokazene i sledece osobine:

- Za bilo koje $B \in \mathcal{B}$, $\phi(B) \leq B$.
- Skup fiksiranih tačaka ϕ (za koje je $\phi(B) = B$) je tačno $\mathcal{F}$. Stoga, $\phi^2 = \phi^3 = \ldots = \phi$.

Sledi pregled karakterističnih primera koji ilustruju kompleksnost prethodnog.

Primer 6. [11] Neka je $F(S)=\emptyset$ funkcija sledbenika za sve $S \subseteq N$. Inverzna funkcija od F preko ϕ je povratna funkcija – Id definisana sa $(-Id)i = -i$ za svako $i \in I$. Jasno, donja inverzna funkcija je konstantna $B \equiv -1_N$, dok je gornja $B \equiv 1_N$.

Neka je F=Id funkcija sledbenika. Inverzna funkcija od F je funkcija identiteta Id. U ovom slučaju i gornja i donja inverzna funkcija postaju Id, pa $\phi^{-1}(Id) = \{ Id \}$.

Primer. 7. [11] Neka je n = 3 i neka je funkcija sledbenika definisana na sledeći način:

S	∅	1	2	3	12	13	23	123
F(S)	∅	∅	2	∅	2	3	12	123

Može se proverti da to zapravo i jeste funkcija sledbenika. Gornja i donja inverzna funkcija za tako zadatu funkciju sledbenika su:

I	∅	1	2	3	12	13	23	123
$\overline{B}_F\,i$	∅	3	12	13	123	13	123	123
$\underline{B}_F\,i$	∅	∅	2	∅	2	3	12	123

Primer 8.

Ako bi se opet vratili na primer sa ekskurzijom i pretpostavili da sada imamo tri učenika: Nikolu (1), Anu (2) i Sanju (3). Tada, ukoliko je Nikola hteo da ide ali je odustao, jer ne želi da ide sam, onda je S={∅}. Vektor sklonosti je i=(1,-1,-1) i pod uticajem B prelazi u vektor odluka Bi=(-1,-1,-1), pa tražimo sve k-ove iz Bi čija se odluka poklapa s početnom odlukom koalicije, što je ovde prazan skup tj. funkcija uticaja je prazan skup.

Ako se dalje pretpostavi da su se odjednom Ana i Sanja predomislile i odlučile da idu, jer im je Nikola rekao da će posetiti zoo vrt, onda je potencijalna koalicija S={123}, što znači će sve troje najverovatnije ići, a funkcija uticaja F(S)={123}.

Tada prethodni primer možemo povezati sa ovim ako na isti način definišemo funkciju sledbenika za učenike koji idu na ekskurziju.

Gornja i donja inverzna funkcija su, takođe, iste kao u prethodnom primeru.

Zna se da je donja inverzna funkcija jednaka sa funkcijom uticaja, tako da je za vektor sklonosti $i = (123)$, koji kaže da će sva tri učenika najverovatnije ici na ekskurziju, donja inverzna funkcija jednaka {123}, dok je $\overline{B}_F = \overline{F(\overline{S})}$ pa je i to jednako {123}.

1.2.2. Struktura $\boldsymbol{\phi^{-1}}$(F)

Zna se da su sve inverzne funkcije od F između $\underline{B}_F$ i $\overline{B}_F$, sa uobičajenim poretkom ≤, odnosno (ϕ^{-1}(F), ≤) *je **parcijalno uređen skup*** i to podskup od ([$\underline{B}_F$, $\overline{B}_F$] , ≤). Radi jednostavnosti uvodi se nova oznaka

$$\mathrm{Ds} = \overline{B}_F(S) \setminus \underline{B}_F(S)\ ,\ S \subseteq N,$$

Odnosno, Ds predstavlja sve elemente koji se nalaze u $\overline{B}_F$(S), a nema ih u $\underline{B}_F$(S).

Element iz $[\underline{B}_F, \overline{B}_F]$ je lakše obeležiti 2^n-dimenzionalnim vektorima $(T_\emptyset, ..., T_N)$ gde je $Ts \subseteq D_S$ za svako $S \subseteq N$. Koristeći ovu notaciju $\underline{B}_F$ i $\overline{B}_F$ se obeležavaju sa $(\emptyset, ..., \emptyset)$ i $(D_\emptyset, ..., D_N)$ redom.

U **[11]** je pokazano da za proizvoljno $F \in \mathcal{F}$ i za proizvoljnu koaliciju $S \subseteq N$ sledi

$$D_S = D_{\overline{S}},$$

odnosno, nema razlike između početne koalicije i njenog komplementa pri konstrukciji skupa D_S.

Zaista, s obzirom da je $F(S) \cap F(\overline{S}) = \emptyset$ po tvrđenju 1 (3),

$$D_S = \overline{B}(S) \setminus \underline{B}(S) = \overline{F(\overline{S})} \setminus F(S) = \overline{F(S)} \setminus F(\overline{S}) = \overline{B}(\overline{S}) \setminus \underline{B}(\overline{S}) = D_{\overline{S}} .$$

Zbog toga T_S i $T_{\overline{S}}$ nemaju presek sa $F(S)$, niti sa $F(\overline{S})$.

Tvrđenje 2. [11] Neka je $B = (T_\emptyset, ..., T_N) \neq \overline{B}_F$ element $\phi^{-1}(F)$. Tada za svako $S \subseteq N$ takvo da $Ds \setminus T_S \neq \emptyset$ i svako $k \in D_S \setminus T_S$, $B' = (T_\emptyset, ..., T_S \cup \{k\}, ..., T_N)$ je element $\phi^{-1}(F)$ ako i samo ako jedan od sledećih uslova nije zadovoljen:

(i) Za svako $S' \supset S$, $k \in B(S')$.
(ii) Za svako $S' \subseteq N \setminus S$, $k \notin B(S')$.

Kompletan dokaz se može pronaći u [11], a baziran je na sledećoj lemi koju, takođe, navodimo bez dokaza.

Lema 1. [11] Neka su B, B' identične funkcije uticaja osim za $S \subseteq N$, gde $k \notin B(S)$ i $B'(S)=B(S) \cup k$. Ako se pretpostavi da k nije sledbenik ni za S niti sledbenik za $\overline{S}$ (tj. $k \notin F_{B'}(S)$, $k \notin F_B(\overline{S})$), onda je $F_B(S') = F_{B'}(S')$, za sve $S' \subseteq N$.

U nastavku se u potpunosti opisuje struktura $\phi^{-1}(F)$.

Tvrđenje 3. [11] Neka je dato $F \in \mathcal{F}$ i neka postoji $B = (T_\emptyset, ..., T_N)$ koje je element $[\underline{B}_F, \overline{B}_F]$. Tada $B \in \phi^{-1}(F)$ ako i samo ako su sledeći uslovi zadovoljeni:

(i) $\bigcap_{S \ni i} T_S \setminus T_{\overline{S}} = \emptyset, \forall i \in N$ (ili ekvivalentno $\bigcap_{S' \supseteq S} T_{S'} \setminus T_{\overline{S'}} = \emptyset, \forall S \subseteq N, S \neq \emptyset$).
(ii) $\bigcap_{S' \in \mathcal{C}} F(S') \cap \bigcap_{\substack{S'' \supseteq S \\ S'' \not\supseteq S', \forall S' \in \mathcal{C}}} T_{S''} \setminus T_{\overline{S''}} = \emptyset$, za sve antilance $\mathcal{C}$ u $]S, N]$.

Dokaz. Izražava $F_B(S)$ i pokazuje se koji uslovi treba da budu zadovoljeni da bi važilo $F_B(S)=F(S)$ za sve $S \subseteq N$. Jednakost je uvek ispunjena za $S = \emptyset$. Koristi se (1), definicija za B, za sve $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$. Detaljan dokaz se može naći u [8]. □

Naredna teorema je data sa kompletnim dokazom iz [8] u cilju dobijanja potpune slike o kompleksnosti ove tematike. Kako naredni rezultat povezuje prethodno sa pojmom mreže, prvo je neophodno dati definiciju priduženo-nesvodljivog elementa mreže. Visina mreže je dužina najdužeg puta od najmanjeg do najvećeg elementa, a za distributivnu mrežu njena visina je upravo broj pridruženo-nesvodljivih elemenata.

Definicija 1. [11] Pridruženo– nesvodljivi element mreže obuhvata samo jedan element. x „obuhvata" y znači $x > y$ i ne postoji z takvo da $x > z > y$.

Teorema 1. [11] Za sve F ∈ $\mathcal{F}$, skup ϕ^{-1}(F), kod koga su funkcije u uobicajenom poretku, ima sledeće osobine:

(i) Najveći i najmanji elementi su $\overline{\mathrm{B}}_{\mathrm{F}}$ i $\underline{\mathrm{B}}_{\mathrm{F}}$ = F.

(ii) To je mreža u kojoj postoje supremum i infimum za sve S ∈ 2^{N} :

$$(B \vee B')(S) = B(S) \cup B'(S),$$
$$(B \wedge B')(S) = B(S) \cap B'(S).$$

(iii) ϕ^{-1}(F) je autodualno, tj. $(\phi^{-1}(F), \leq)$ i $(\phi^{-1}(F), \geq)$ su izomorfni. Dualnost se izražava na sledeći način: svakom elementu B = ($T_{\emptyset}$, ... , T_S, ... , T_N) iz ϕ^{-1}(F) odgovara element B'= ($D_N \setminus T_N$, ... , $D_{\bar{S}} \setminus T_{\bar{S}}$, ... , $D_{\emptyset} \setminus T_{\emptyset}$).

(iv) Postoji suma $\sum_{S \subseteq N}|\mathrm{Ds}|$ pridruženo − nesvodljivih elemenata (po jedan za svako $k \in$ Ds, $S \subseteq N$) koji imaju ($k_S\,\emptyset$) formu ako elementi pripadaju ϕ^{-1}(F), nasuprot formi ($k_S\, k_{\bar{S}}\, \emptyset$), gde je notacija ($k_S\,\emptyset$) skraćenica za ($\emptyset$, ... , $\emptyset$, k, $\emptyset$, ..., $\emptyset$), a k pozicija S i slično za ($k_S\, k_{\bar{S}} \emptyset$).

(v) Mreža je distributivna i njena visina je h = $\sum_{S \subseteq N}|\mathrm{Ds}|$.

Dokaz. (i) je već poznato iz tvrđenja 1.

Pokazuje se prvo (iii). Neka je B= ($T_{\emptyset}$, ... ,T_S , ... , T_N) iz ϕ^{-1}(F). Onda dva uslova iz tvrđenja 4 važe za sve S ∈ 2^{N}. Treba dokazati da oni i dalje važe za B', što znači da treba $T_{S'} \setminus T_{\bar{S}'}$ zameniti sa ($D_{\bar{S}'} \setminus T_{\bar{S}'}$) \ ($D_{S'} \setminus T_{S'}$).

S obzirom da je $D_{S'}$ = $\overline{F(S')}$ \ F($\overline{S'}$) = $D_{\bar{S}'}$ i na osnovu slike 2, ($D_{\bar{S}'} \setminus T_{\bar{S}'}$) \ ($D_{S'} \setminus T_{S'}$)= $T_{S'} \setminus T_{\bar{S}'}$ što dokazuje potrebno.

Pokazuje se (ii). S obzirom da je ϕ^{-1}(F) podskup proizvoda skupa mreža, operacije ∧, ∨ definisane iznad, su jasno supremum i infimum. Samo treba pokazati da B $\vee B'$ i B ∧ B' pripadaju ϕ^{-1}(F) kad god B, B' pripada ϕ^{-1}(F), da bi se dokazalo da je ϕ^{-1} mreža. Zbog (iii) može samo da se dokaže npr. infimum.

Neka je B = ($T_\emptyset$, ... , T_N) i B'= ($T'_\emptyset$, ... , T'_N) u ϕ^{-1}(F). Tada B ∧ B' = ($T_\emptyset \cap T'_\emptyset$, ... ,$T_N \cap T'_N$). Koristeći tvrđenje 3, treba dokazati da su dva uslova zadovoljena. Prvi se čita kao

$$K = \bigcap_{S' \supseteq S} (T_{S'} \cap T'_{S'}) \setminus (T_{\overline{S'}} \cap T'_{\overline{S'}}) = \emptyset, \quad \forall S \subseteq N,\ S \neq \emptyset$$

iz opšte relacije

$$(A \cap A') \setminus (B \cap B') = ((A \setminus B) \cap A') \cup ((A' \setminus B') \cap A)$$

dobija se

$$K = \bigcap_{S' \supseteq S} [((T_{S'} \setminus T_{\overline{S'}}) \cap T'_{S'}) \cup ((T'_{S'} \setminus T'_{\overline{S'}}) \cap T_{S'})]$$

primenjujući distributivnost, dobija se

$$K = \bigcup_{\mathcal{S} \subseteq [S,N]} \left[\bigcap_{S' \in \mathcal{S}} (T_{S'} \setminus T_{\overline{S'}}) \cap T'_{S'} \cap \bigcap_{S' \in [S,N] \setminus \mathcal{S}} (T'_{S'} \setminus T'_{\overline{S'}}) \cap T_{S'} \right] = \bigcup_{\mathcal{S} \subseteq [S,N]} K_{\mathcal{S}}$$

Ako se uzme da je $\mathcal{S}$=[S, N] ili ∅, $K_\mathcal{S}$=∅, na osnovu tvrđenja 3 sledi da je $\bigcap_{S' \in [S,N]} T_{S'} \setminus T_{\overline{S'}} = \emptyset$ i isto to za B'. Dalje se razmatra $K_\mathcal{S}$ za ∅ ≠ S ⊂ [S, N]. Neka je $K_\mathcal{S} \neq \emptyset$, i uzevši bilo koje x ∈ $K_\mathcal{S}$ dolazi se do zaključka da:

(a) x ∈ $T_{S'}$ i x ∈ $T'_{S'}$ za sve S' ∈ [S, N];
(b) x ∉ $T_{\overline{S'}}$ za sve S' ∈ $\mathcal{S}$ i x ∉ $T'_{\overline{S'}}$ za sve S' ∈ [S, N] \ $\mathcal{S}$

Iz (a) se lako zaključuje da za sve S'⊇ S i S' ⊆ N\S, x ∉ F(S'). Zaista, iz (a) se zna da x ∈ $D_{S'}$ i tako x ∉ F(S') za sve S' ∈ [S, N]. Dalje, za svako S'⊆ N\S se zna da $\overline{S'}$ ∈ [S,N].

Tada x ∈ $D_{\overline{S'}}$=$D_{S'}$ što ponovo dokazuje da x ∉ F(S').

Iz ovoga se zaključuje da zapravo x ∉ F(N). Treba pokazati da je neophodno da x pripada F_B(N) ili $F_{B'}$(N), iz čega sledi da je F ≠ F_B ili F ≠ $F_{B'}$ a to je u kontradikciji sa hipotezom. Sve ovo dokazuje da je x sledbenik N za B ili B'. Na osnovu (a) se zna da x ∈ T_N , x ∈ T'_N, što dokazuje da x ∈ B(N) i B'(N). Iz (b) se zaključuje da x ∉ $T_\emptyset$ (ako N ∈ $\mathcal{S}$) ili x ∉ $T'_\emptyset$ (ako ∉ $\mathcal{S}$). S obzirom da je F(∅) = ∅, zaključuje se da x ∉ B(∅) ili x ∉ B'(∅). Uzimajući u obzir drugi uslov sledi,

$$K = \bigcap_{S' \in \mathcal{C}} F(S') \cap \bigcap_{S' \in \mathcal{S}_{\mathcal{C}}} (T_{S'} \cap T'_{S'}) \setminus (T_{\overline{S'}} \cap T'_{\overline{S'}}) = \emptyset,$$

Za sve antilance $\mathcal{C} \in]S,N]$, sve $S \subset N$ i $\mathcal{S}_{\mathcal{C}} = \{S'' \supseteq S, S'' \not\supseteq S', \forall S' \in \mathcal{C}\}$. Nastavljavući prethodno se dobija

$$K = \bigcup_{\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}_{\mathcal{C}}} \left[\bigcap_{S' \in \mathcal{C}} F(S') \cap \bigcap_{S' \in \mathcal{S}} ((T_{S'} \setminus T_{\overline{S'}}) \cap T'_{S'}) \cap \bigcap_{S' \in \mathcal{S}_{\mathcal{C}} \setminus \mathcal{S}} ((T'_{S'} \setminus T'_{\overline{S'}}) \cap T_{S'}) \right] = \bigcup_{\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}_{\mathcal{C}}} K_{\mathcal{S}}.$$

Treba dokazati da je $K_{\mathcal{S}} = \emptyset$, $\forall \mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}_{\mathcal{C}}$. Kao što je ranije rađeno, ako se uzme da je $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\mathcal{C}}$ili $\emptyset$ dolazi se do $K_{\mathcal{S}} = \emptyset$ po tvrđenju 3. Nakon toga se razmatra $\emptyset \neq \mathcal{S} \subset \mathcal{S}_{\mathcal{C}}$ i pretpostavlja se da je $K_{\mathcal{S}} \neq \emptyset$ za $x \in K_{\mathcal{S}}$. Ovo implicira da x pripada svakom članu preseka u $K_{\mathcal{S}}$, stoga

(c) $x \in T_{S'}$ i $x \in T'_{S'}$ za sve $S' \in \mathcal{S}_{\mathcal{C}}$;
(d) $x \notin T_{\overline{S'}}$ za sve $S' \in \mathcal{S}$ i $x \notin T'_{\overline{S'}}$ za sve $S' \in \mathcal{S}_{\mathcal{C}} \setminus \mathcal{S}$;
(e) $x \in F(S')$, $\forall S' \in \mathcal{C}$

uzimajući u obzir prethodno, zaključuje se iz (c) da $x \notin F(S')$ za sve $S' \in \mathcal{S}_{\mathcal{C}}$ i za sve $S' \subseteq N \setminus S$ tako da $\overline{S'} \in \mathcal{S}_{\mathcal{C}}$. Neka je S_0 bilo koji maksimalni element od $\mathcal{S}_{\mathcal{C}}$, bitno je primetiti da za $\forall S' \supset S_0$, $\exists S'' \in \mathcal{C}$ tako da $S' \supseteq S''$.

Zaista, $S' \supset S_0$, implicira $S' \notin \mathcal{S}_{\mathcal{C}}$. S druge strane, $S' \subseteq N$ i $S' \supset S_0 \supseteq S$ implicira $S' \in [S,N]$. Tako da po definiciji $\mathcal{S}_{\mathcal{C}}$, $S' \supseteq S''$ za neko $S'' \in \mathcal{C}$.

Treba još dokazati da $x \in F_B(S_0)$ ili $F_{B'}(S_0)$. S ozbirom da $x \notin F(S_0)$, ovo je dosta za kontradikciju, stoga $K_{\mathcal{S}} = \emptyset$ za sve $\mathcal{S}$ što dokazuje da je drugi uslov ispunjen. Zbog toga treba dokazati:

- $\forall S' \supseteq S_0$, $B(S') \ni x$ (ili isto samo za B'). Ovo je tačno za $S' = S_0$ iz (c). $S' \supseteq S''$, za neko $S'' \in \mathcal{C}$. S obzirom da $x \in F(S'')$ po pretpostavci, $x \in F(S')$, zbog toga što je F monotono neopadajuće. Zato $x \in B(S')$ i takođe $x \in B'(S')$.
- $\forall S' \subseteq N \setminus S_0$, $B(S') \not\ni x$ (ili isti uslov za B'). Iz (8) se zna da $x \notin F(N \setminus S_0)$, zato $x \notin F(S')$ za sve $S' \subseteq N \setminus S_0$), zbog monotonosti F. Ostaje da se pokaže da $x \notin T_{S'}$ za sve $S' \subseteq N \setminus S_0$ (ili isto samo za $T'_{S'}$). Na osnovu (d) se zna da $x \notin T_{\overline{S_0}}$ ili $x \notin T'_{\overline{S_0}}$ (u zavisnosti od toga da li $S_0 \in \mathcal{S}$ ili ne). Ako se pretpostavi slučaj kada $x \notin T_{\overline{S_0}}$. Na osnovu (e), $x \in F(S'')$ za sve $S'' \in \mathcal{C}$ i $F = F_B = F_{B'}$. Ovo implicira da za sve $S''' \subseteq N \setminus S''$, $S'' \in \mathcal{C}$, $x \notin T_{S'''}$. Ostaje da se pokaže da je svako $S' \subset N \setminus S_0$ obavezno podskup od $N \setminus S''$ za neko $S'' \in \mathcal{C}$, ali ovo je ekvivalentno dokazu da je svako $S' \supset S_0$ superskup nekog $S'' \in \mathcal{C}$.

Dokaz da $B \wedge B'$ pripada $\phi^{-1}(F)$ je gotov. Sada, s obzirom da su infimum i supremum iz $\prod_{S \subseteq N} 2^{D_S}$, $\phi^{-1}(F)$ je podmreža toga.

(iv) i (v) . Prvo, pošto je funkcija ϕ^{-1}(F) podmreža distributivne mreže, onda je ona distributivna. Stoga, rangirana je i dužina bilo kog maksimalnog lanca od dna do vrha je broj pridruženo-nesvodljivih elemenata. Drugo, visina mreže je najviše $\sum_{S\subseteq N}|D_S|$ s obzirom da se dodaje bar jedan novi element k nekom D_S u svakom koraku, zato je ovo maksimalan broj pridruženo-nesvodljivih elemenata.

Ispituje se šta su pridruženo-nesvodljivi elementi.

Neka je $S \subseteq N$ tako da $D_S \neq \emptyset$ i svako $k \in D_S$. ($k_S\emptyset$) obuhvata samo jedan element i to dno mreže. Tako je omogućeno da pridruženo-nesvodljivi element pripada ϕ^{-1}(F). Primenjujući tvrđenje 2, sve ovo pokazuje da bar jedan od sledeća dva uslova nedostaje:

(i) $\forall S' \supset S$, $k \in F(S')$
(ii) $\forall S' \subseteq N\backslash S$, $k \notin F(S')$.

Ako jedan od uslova nije ispunjen, onda je ($k_S\emptyset$) pridruženo-nesvodljiv element. Ako se pretpostavi da oba uslova važe, onda pridruženo-nesvodljivi $k_S\emptyset \notin \phi^{-1}$(F) zato što k postaje sledbenik za S. Dovoljno je dodati k na neko mesto S' za $S'\subseteq N\backslash S$, da bi se sprečilo da postane sledbenik za S. Primetiti da je $S'=N\backslash S$ uvek rešenje, zato što $D_S=D_{N\backslash S}$ i tako $k \in D_{N\backslash S}$. To je jedino rešenje, s obzirom da za svako $S'\subset N\backslash S$, $k \notin D_{S'}$. Zaista, ako $k \in D_{S'}$, onda $k \in D_{\overline{S'}}$, što znači da $k \notin F(\overline{S'})$. Ali $\overline{S'}$ je prikladan superskup za S, pa je ovo u kontradikciji sa pretostavkom (i). Zato je ($k_S k_{\bar{S}}\emptyset$) element iz ϕ^{-1}(F) . Na kraju, treba da se pokaže da ($k_S k_{\bar{S}}\emptyset$) obuhvata samo jedan element. Pošto po pretpostavci ($k_S\emptyset$) ne pripada ϕ^{-1}(F), onda može samo obuhvatiti ili ($k_{\bar{S}}\emptyset$) ili ako ovaj element ne pripada ϕ^{-1}(F) onda donji element. U oba slučaja je dokazano, ali primetiti da se samo prvi slučaj može desiti. Zaista, hipoteza (ii) je zadovoljena što znači da je (i) neispunjeno, ako se radi za $\bar{S}$ umesto za S.

Za sve $S\subseteq N$ i sve $k \in D_S$ pronađeno je svih $\sum_{S\subseteq N}|D_S|$ pridruženo-nesvodljivi elemenata i ne može ih biti više. □

Napomena. Iz teorije mreža se zna da kada je mreža distributivna, dovoljno je poznavati pridruzeno - nesvodljive elemente, koji imaju ulogu sličnu bazi vektorskog prostora. Bilo koji element mreže može biti zapisan na jedinstven način kao (nesvodljiv) supremum pridruzeno - nesvodljivog elementa. Mogu se generisati svi elementi mreže na sledeći način: $\mathcal{J}$ je skup pridruzeno - nesvodljivih elementa sa relacijom $\leq$. Neka je $\mathcal{A}$ antilanac iz $\mathcal{J}$, bilo koja dva elementa B, B' iz $\mathcal{A}$ su neuporedivi (tj. niti je $B \leq B'$ niti $B' \leq B$). Tada $B= \bigvee_{B'\in\mathcal{A}} B'$ je element mreže ϕ^{-1}(F) i generišući celokupne mrežne sume, generiše sve antilance iz $\mathcal{J}$.

Uzimajući u obzir (iv), proveravanje da li je ($k_S\,\emptyset$) element ϕ^{-1}(F) je urađeno koristeći tvrđenje 2 sa $(T_\emptyset, \ldots, T_N) = (\emptyset, \ldots, \emptyset)$, tj. proverava se da li neki od ova dva uslova nije ispunjen:

(i) $\forall S' \supset S,\ k \in F\ (S')$;
(ii) $\forall S' \subseteq N \backslash S, k \notin F\ (S')$.

Ako (k_S $\emptyset$) nije element ϕ^{-1}(F), onda je neophodno da ($k_{\bar{S}}$ $\emptyset$) bude.

Primer 9. [11] Ovaj primer se nadovezuje na primer 7 u kome je data funkcija F. Računaju se pridruženo-nesvodljivi elemenati iz ϕ^{-1}(F).

Skupovi D_S su sledeći:

S	$\emptyset$	1	2	3	12	13	23	123
Ds	$\emptyset$	3	1	13	13	1	3	$\emptyset$

Skup pridruženo-nesvodljivih elemenata $\mathcal{J}$ sadrži 8 elemenata i oni su dati na sledeći način:

- Za S=1, k=3: ($3_1\emptyset$) pripada ϕ^{-1}(F), tj. za S'= {1,3}, $k \notin$ F(S')={$\emptyset$} što znači da prvi uslov nije zadovoljen, dok za S'={2,3}, $k \notin$ F(S')={2} drugi uslov je zadovoljen, te sledi da je to pridruženo-nesvodljiv element.
- Za S=2, k=1: ($1_2\emptyset$) pripada ϕ^{-1}(F), tj. za S'= {1,2}, $k \notin$ F(S')={2} što znači da prvi uslov nije zadovoljen, dok za S'= {1,3}, $k \notin$ F(S')={$\emptyset$} drugi uslov je zadovoljen te sledi da je to pridruženo-nesvodljiv element.
- Za S=3, k=1: ($1_3\emptyset$) pripada ϕ^{-1}(F), tj. za S'= {1,3}, $k \notin$ F(S')={$\emptyset$} što znači da prvi uslov nije zadovoljen, dok za S'= {1,2}, $k \notin$ F(S')= {2} drugi uslov je zadovoljen te sledi da je to pridruženo-nesvodljiv element.
- Za S=3, k=3: ($3_3\emptyset$) pripada ϕ^{-1}(F), tj. za S'= {3}, $k \notin$ F(S')={$\emptyset$} što znači da prvi uslov nije zadovoljen, dok za S'= {1,2}, k $\notin$ F(S')= {2}, drugi uslov je zadovoljen te sledi da je to pridruženo-nesvodljiv element.
- Za S=12, k=1: ($1_{12}\emptyset$) ne pripada ϕ^{-1}(F), jer za S'= {1,12} $k \notin$ F(S')={2}, takođe i za S'= {3} $k \notin$ F(S')={$\emptyset$}, pa nijedan uslov nije ispunjen, zato je neophodno da ($1_{12}1_3$ $\emptyset$) pripada ϕ^{-1}(F) i to je pridruženo-nesvodljiv element.
- Za S=12, k=3: ($1_{12}\emptyset$) ne pripada ϕ^{-1}(F), jer za S'= {3,12} $k \notin$ F(S')={2}, takođe i za S'= {3} $k \notin$ F(S')={$\emptyset$}, pa nijedan uslov nije ispunjen, zato je neophodno da ($3_{12}3_3$ $\emptyset$) pripada ϕ^{-1}(F) i to je pridruženo-nesvodljiv element.
- Za S=13, k=1: ($1_{12}\emptyset$) ne pripada ϕ^{-1}(F), jer za S'= {1,13} $k \notin$ F(S')={3}, takođe i za S'= {2} $k \notin$ F(S')={2}, pa nijedan uslov nije ispunjen, zato je neophodno da ($1_{13}1_2$ $\emptyset$) pripada ϕ^{-1}(F) i to je pridruženo-nesvodljiv element.

- Za S=23, k=3: ($1_{12}\emptyset$) ne pripada ϕ^{-1}(F), jer za S'= {3,23} $k \notin$ F(S')={12}, takođe i za S'= {1} $k \notin$ F(S')={$\emptyset$}, pa nijedan uslov nije ispunjen, zato je neophodno da ($3_{23}3_1$ $\emptyset$) pripada ϕ^{-1}(F) i to je pridruženo-nesvodljiv element.

Primer 10. Prethodni primer ćemo povezati sa učenicima koji idu na eskurziju. Neka je dat skup učenika {Nikola (1), Marko (2), Sanja (3)} i ako se zna da je Nikola odlučio sam da ide na ekskurziju, onda je koalicija učenika koji idu S={1}, za k=3 to se može zapisati kao ($3_1\emptyset$). Postavlja se pitanje da li ($3_1\emptyset$) pripada ϕ^{-1}(F)? U tom slučaju je S'={1,3}, a funkcija sledbenika u je F(S')= {$\emptyset$}, vidimo da $k \notin$ {$\emptyset$}, pa samim tim prvi uslov nije ispunjen i u tom slučaju mora biti drugi uslov važeći. Za S'={2,3}, funkcija sledbenika je F(S')= {2} $k \notin$ {2}, što znači da drugi uslov važi, pa ($3_1\emptyset$) pripada ϕ^{-1}(F).

2. Komandne funkcije i funkcije uticaja

Tema ovog poglavlja su specifične igre, zvane komandne igre. Osnovna karakteristika tih igara je da su sada za svakog igrača dati glavni skup i skup dopuštenja. Dok je glavni skup definisan kao skup individualaca koje igrač mora slušati, bez obzra na svoje želje, kod skupa dopuštenja je dovoljna saglasnost da se dozvoli igraču da reaguje, ukoliko to želi.

Treba primetiti da se pojam komandnih igara i funkcija uticaja odnosi na isti problem, te je u ovom poglavlju pikazana i njihova veza.

Za ovaj deo koristimo literaturu [7,8,11].

2.1. Komandne igre

Neka je N = {1, . . . , n} skup igrača (ili glasača). Za $k \in$ N i S $\subseteq$ N \ k:

- skup S je glavni skup (eng. boss set) za k ako S direktno utiče na izbore k

- skup S je skup dopuštenja (eng. approval set) za k ako k može delovati sa dopuštenjem S

Neka nijedan podskup ne može biti i glavni skup i skup dopuštenja. Takođe, treba primetiti da prazan skup ne može imati ulogu glavnog skupa, ali može biti skup dopuštenja (što znači da igrač k može sam da reaguje). U cilju izbegavanja trivijalnog slučaja, dalje pretpostavka je da familije i glavnog skupa i skupa dopuštenja ne mogu biti prazne.

U daljem radu se oslanjamo na pojam proste igre, te je neophodno navesti sledeću definiciju.

Definicija 2. [11] ***Koaliciona igra n igrača*** je par (N, v) gde je $N = \{1, \ldots, n\}$ skup igrača, a funkcija $v{:}2^{N} \longrightarrow R$ je karakteristična funkcija koja zadovoljava uslov $v(\emptyset)=0$.

Često se traži da je vrednost dve disjunkten koalicije manja (ili bar jednaka) kada te koalicije ne sarađuju nego kada sarađuju, tj. traži se superaditivnost za skupovnu funkciju v:

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$$

ako su S i T disjunktni.

Prosta igra je koaliciona igra čija karakteristična funkcija uzima vrednosti iz skupa {0,1}. Drugim rečima pod prostom igrom možemo spatrati uređeni par (N,W) gde je N skup igrača, a W familija pobeđujućih koalicija, tj. onih koje dobijaju vredost 1. Treba naglasiti da su proste igre u tesnoj vezi sa hipergrafovima i Boolean-vim funkcijama.

Sada je moguće definisati komandnu igru.

Definicija 3. [11] Za proizvoljno k iz skupa igrača, ***komandna igra igrača k***, u oznaci $(N, \mathcal{W}_k)$, je prosta igra pri čemu je

$$\mathcal{W}_k = \{S \mid S \text{ je glavni skup za k}\} \cup \{S \cup k \mid S \text{ je glavni skup ili skup dopuštenja za k}\} \quad (3)$$

skup pobedničkih koalicija. Skup svih komandnih igara po igračima $\{(N, \mathcal{W}_k), k \in N\}$ se naziva ***komandna igra***.

Treba primetiti da, zbog prethodno navedenog, familija $\mathcal{W}_k$ nije prazna. Glavni skup za k je predstavljen na sledeći način

$$\text{Boss}_k = \{S \subseteq N\backslash k \mid S \in \mathcal{W}_k\} = \mathcal{W}_k \cap 2^{N\backslash k},$$

a skup dopuštenja za k

$$\text{App}_k = \{S \subseteq N\backslash k \mid S \cup k \in \mathcal{W}_k \text{ ali } S \notin \mathcal{W}_k\}.$$

Takođe, moguće je definisati minimalni glavni skup i minimalni skup dopuštenja za k na sledeći način:

$$\text{Boss}_k{}^* = \{S \in \text{Boss}_k \mid S' \subset S \Rightarrow S' \notin \text{Boss}_k\},$$

$$\text{App}_k{}^* = \{S \in \text{App}_k \mid S' \subset S \Rightarrow S' \notin \text{App}_k\}.$$

Sledi definicija komandne funkcije, pojma esencijanog za uspostavljanje veze sa prethodno objašnjenim funkcijama uticaja.

Definicija 4. [11] Za datu komandnu igru $\{(N, \mathcal{W}_k), k \in N\}$, komandna fukcija ω: $2^N \longrightarrow 2^N$ je definisana na sledeći način

$$\omega(S) = \{k \in N | S \in \mathcal{W}_k\}, \ \forall S \subseteq N \qquad (4)$$

Drugim rečima, $\omega(S)$ je skup svih igrača kojima S komanduje. U [5] je pokazano da je $\omega(\emptyset) = \emptyset, \omega(N) = N$ i $\omega(S) \subseteq \omega(S')$ kad god je $S \subset S'$.

Napomena. $Boss_k$ i App_k su oznake za glavni skup i skup dopuštenja za k, dok su $Boss_k$ * i App_k* oznake za minimalni glavni skup i minimalni skup dopuštenja za k.

2.2. Veza između komandne funkcije i funkcije uticaja

Treba primetiti da je moguće komandnu igru $\{(N, \mathcal{W}_k), k \in N\}$ predstaviti pomoću karakteristične funkcije $\Omega : N \times 2^N \longrightarrow \{0,1\}$ date sa

$$(k,S) \longmapsto \Omega\,(k,S) = \begin{cases} 1, & \text{ako } S \in \mathcal{W}_k \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Skup takvih funkcija je kardinalnost $2^{n\,2^n}$ što odgovara kardinalnosti skupa svih funkcija uticaja $\mathcal{B}$. Komandne funkcije su preslikavanja iz 2^N u 2^N sa, takođe, istom kardinalnošću $2^{n\,2^n}$. Postoji očigledna bijekcija između $2^{N \times 2^N}$ i $(2^N)^{(2^N)}$, označena sa Ψ i definisana na sledeći način:

$$\Psi(\Omega) = \omega, \qquad \text{sa } \omega(S) = \{k \in N \,|\, \Omega\,(k, S) = 1\}, \forall S \subseteq N, \qquad (5)$$

$$\Psi^{-1}(\omega) = \Omega\,, \qquad \text{sa } \omega(k, S) = 1 \text{ ako i samo ako } k \in \omega(S).$$

Može se primetiti da su ω i Ω ekvivalentne reprezentacije komandne igre.

Veza između funkcija uticaja i komandnih igara je data sledećom definicijom.

Definicija 5. [11] Neka je B funkcija uticaja i Ω je komandna igra. B i Ω su ekvivalentni ako važi $F_B = \omega$.

Drugim rečima, poklapanje odgovarajuće funkcije sledbenika i komandne funkcije daju traženu ekvivalenciju.

Slede primeri koji ilustruju prethodno. Prvi primer je trivijalan, ali je neophodan za postupnu ilustraciju prethodno uvedenih pojmova.

Primer 11.

Neka je dat dvočlani skup igrača $N = \{1, 2\}$ i neka su skupovi pobedničkih koalicija oblika $\mathcal{W}_1$= {12} (što znači da na igrača broj 1 utiču 1 i 2) i $\mathcal{W}_2$= {12} (što znači da na igrača broj 2 utiču, takođe, 1 i 2). Za ovako postavljen problem komandna funkcija je:

$$\omega(1) = \omega(2) = \emptyset, \quad \omega(12) = \{1, 2\}, \ (\omega(N) = N)$$

odnosno, igrači 1 i 2 sami ne komanduju nikome, ali njihova koalicija komanduje sama sebi.

Za glavni skup i skup dopuštenja važi sledeće:

$$\mathrm{Boss}_k^* = \mathrm{Boss}_k = \emptyset, \ \text{za } k=1,2$$

$$\mathrm{App}_1^* = \mathrm{App}_1 = \{2\}, \ \mathrm{App}_2^* = \{1\}, \ \mathrm{App}_2 = \{1\},$$

Primer 12. [8]

Neka je N = {1, 2, 3} skup igrača i neka su date sledeće komandne igre:

$$\mathcal{W}_1 = \{12, 13, 23, 123\}, \qquad \mathcal{W}_2 = \{12, 23, 123\}, \quad \mathcal{W}_3 = \{23, 123\}.$$

Na igrača broj 1 utiču koalicije {12}, {13}, {23}, {123}, na igrača broj 2 {12}, {23}, {123} i na igrača broj 3 utiču koalicije {23}, {123}. Komandna funkcija je:

$$\omega(1) = \omega(2) = \omega(3) = \emptyset, \quad \omega(12) = \{1, 2\}, \quad \omega(13) = \{1\}, \quad \omega(23) = N, \quad \omega(N) = N,$$

što znači da igrači 1,2 i 3 samostalno ne komanduju nikome, ali njihove koalicije komanduju. Koalicija prvog i drugog igrača komanduje sama sebi, koalicija prvog i trećeg komanduje prvom igraču, a koalicija drugog i trećeg igrača komanduje svima.

Za glavni skup i skup dopuštenja važi sledeće:

$$\mathrm{Boss}_1^* = \mathrm{Boss}_1 = \{23\}, \ \mathrm{Boss}_k^* = \mathrm{Boss}_k = \emptyset, \ \text{za } k= 2, 3$$

$$\mathrm{App}_1^* = \mathrm{App}_1 = \{2, 3\}, \ \mathrm{App}_2^* = \{1, 3\}, \ \mathrm{App}_2 = \{1, 3, 13\}, \ \mathrm{App}_3^* = \{2\}, \ \mathrm{App}_3 = \{2, 12\}.$$

Može se proveriti da familije pobedničkih koalicija $\mathcal{W}_1$, $\mathcal{W}_2$ i $\mathcal{W}_3$ daju isti rezultat. Ovo sledi na osnovu veze između funkcije sledbenika i komandne funkcije, tj. zbog ekvivalencije.

U ovom primeru, donja i gornja inverzna funkcija od ω su:

S	∅	1	2	3	12	13	23	N
$\overline{B}_{\omega}(S)$	∅	∅	23	3	N	N	N	N
$\underline{B}_{\omega}(S)$	∅	∅	∅	∅	12	1	N	N

Naravno, $F_{\underline{B}} = \omega$ i $F_{\overline{B}} = \omega$.

Primer 13. [11] Posmatrajmo ponovo Confucian-ov model društva (primer 1).

Sada je $N = \{1, 2, 3, 4\}$, a pobedničke koalicije su date sa

$$\mathcal{W}_1 = \{1234\}, \ \ \mathcal{W}_2 = \{1, 12, 13, 14, 123, 124, 134, 1234\},$$

$$\mathcal{W}_3 = \mathcal{W}_4 = \{2, 12, 23, 24, 123, 124, 234, 1234\}.$$

Na igrača broj 1 utiče koalicija sastavljena od celog društva, na igrača broj 2 utiču samo navedene koalicije, a na igrače broj 3 i 4 može samostalno uticati samo igrač broj dva i navedene koalicije. Sledi:

$$\omega(1) = \omega(13) = \omega(14) = \omega(134) = \{2\}, \ \ \omega(2) = \omega(23) = \omega(24) = \omega(234) = \{3, 4\},$$

$$\omega(3) = \omega(4) = \omega(34) = \emptyset, \ \ \omega(12) = \omega(123) = \omega(124) = \{2, 3, 4\}, \ \ \omega(N) = N,$$

Odgovarajući glavni skupovi i skupovi dopuštenja su oblika:

$\mathrm{Boss}_1^* = \mathrm{Boss}_1 = \emptyset$, $\mathrm{App}_1^* = \mathrm{App}_1 = \{234\}$, $\mathrm{Boss}_2^* = \{1\}$, $\mathrm{Boss}_1 = \{1, 13, 14, 134\}$,

$\mathrm{Boss}_3^* = \mathrm{Boss}_4^* = \{2\}$, $\mathrm{Boss}_3 = \{2, 12, 24, 124\}$, $\mathrm{Boss}_4 = \{2, 12, 23, 123\}$,

$$\mathrm{App}_k = \mathrm{App}_k^* = \emptyset, \quad \text{za } k = 2, 3, 4.$$

Gornje i donje inverzne funkcije za ω su

S	∅	1	2	3	4	12	13	14
$\overline{B}_{\omega}(S)$	∅	12	134	1	1	N	12	12
$\underline{B}_{\omega}(S)$	∅	2	34	∅	∅	234	2	2
S	23	24	34	123	124	134	234	N
$\overline{B}_{\omega}(S)$	234	134	1	N	N	12	134	N
$\underline{B}_{\omega}(S)$	34	34	∅	234	234	2	34	N

Sledi, $F_{\underline{B}} = \omega$ i $F_{\overline{B}} = \omega$.

Može se primetiti da nijedna od uticajnih funkcija B, B' i B'', definisanih u primeru 5, nije ekvivalentna sa komandnom igrom $\mathcal{W}_1 = \{1234\}$, pošto je $F_B \neq \omega$, $F_{B'} \neq \omega$, $F_{B''} \neq \omega$.

Na primer, $F_B(134) = F_{B'}(134) = F_{B''}(134) = \{1, 2\} \neq \{2\} = \omega\ (134)$.

3. Modeliranje uticaja pomoću operatora agregacije

Fokus ovog dela rada je na primeni operatora agregacije pri modelovanju različitih uticaja na donosioca odluke. Dat je prikaz rezultata iz [12] koji se bave upravo ovom tematikom.

Neka je skup N = {1, ..., n} skup igrača, odnosno, predstavnika (donosilaca odluke) koji treba da donesu da/ne odluku da se odobri račun, projekat, kandidat i slično. Pretpostavlja se da svaki predstavnik ima inicijalno mišljenje (sklonost, engl. inclination). Tokom različitih faza rasprave, predstavnici mogu promeniti mišljenje zbog mnogobrojnih međusobnih uticaja. Sada, svaki predstavnik modifikuje svoje mišljenje tako što vrši agregaciju sadašnjeg mišljenja svih predstavnika, uključujući i samog sebe (videti [12,13]).

Pretpostavimo da je početni skup da-predstavnika označen sa S. Tada, postoji određena verovatnoća da će posle jedne faze rasprave, tj. vršenja uticaja, skup da-predstavnika preći u T. Ovakva promena mišljenja može imati više iteracija, te matematički model koji opisuje ceo postupak jeste stohastički proces, koji se dalje naziva ***proces uticaja***. Proces uticaja je opšt model, te su daljem radu posmatra pojednostavljeni obilk uz markovske i stacionarne pretpostavke. Problem je eksponencijalna kompleksnost modela: matrica prelaza ima dimenzije 2^N x 2^N, što je čini upotrebljivom za mali broj predstavnika. Ovo motiviše da se traga za podfamilijom polinomne složenosti, a koja je ipak dovoljno opšta da pokrije većinu realnih situacija. Pretpostavlja se da svaki predstavnik modifikuje svoje mišljenje sakupljajući i obrađujući trenutno mišljenje svih ostalih uključujući i svoje. Način sakupljanja i obrade mišljenja je karakterističan za svakog predstavnika, tako da svaki od njih može imati potpuno drugu proceduru prikupljanja. Postupak formiranja novog mišljenja je agregacija i tom prilikom se koriste operatori agregacije. S obzirom na to da operatori agregacij numerički operatori, neophodno je izvršiti kodiranje. U ovom slučaju kodira se „da” sa 1 i „ne” sa 0. Rezultat agregacije je broj između 0 i 1, koji predstavlja verovatnoću da predstavnik kaže „da”. Rezultati i pojmovi prezentovani u ovom delu rada su iz [12].

U cilju veće preglednosti rada, prvo su dati pregledi elementarnih pojmova vezanih za procese Markova i operatore agregacije (videti [10], [15]).

3.1. Lanci Markova

Neka se u svakom momentu t nekog vremenskog intervala I $(t \in I)$ posmatra karakteristika X i neka je ona slučajnog karaktera. Tada je $X(t)$ slučajna promenjiva za svako $t \in I$ i na skup svih slučajnih promenjivih $X(t)$ se može gledati kao na slučajnu veličinu koja se menja u vremenu tj. može se smatrati da je to jedna slučajna funkcija vremena i tada se kaže da je to jedan ***stohastički*** ili ***slučajni proces***.

Definicija 6. [15] ***Stohastički proces*** $\{X(t), t \in I\}$ je familija slučajnih promenjivih definisanih na istom prostoru verovatnoća $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$. Skup I se zove indeksni ili parametarski skup.

Ako je I konačan skup, onda postoji konačno mnogo slučajnih promenjivih, a ako je prebrojiv onda se govori o stohastičkom nizu ili ***stohastičkom lancu***.

Razmatra se stohastički proces $\{X_n,\ n = 0,1,2\ldots\}$ sa konačnim ili prebrojivim skupom mogućih vrednosti. Ako se ne naglasi drugačije, skup mogućih vrednosti tzv. *skup stanja je* S=$\{X_1, X_2,...\}$.

Definicija 7. [15] Niz slučajnih promenjivih sa istim skupom stanja S=$\{X_1,\ X_2,\ ...\}$ se zove ***lanac Markova*** ako za proizvoljno $r \in N$, $n > k_1 > k_2 > ... > k_r$ važi:

$$\mathrm{P}\ \{X_n = x_n |\ X_{k_1} = x_{k_1},\ X_{k_2} = x_{k_2}, \ldots, X_{k_r} = x_{k_r}\} = \mathrm{P}\ \{X_n = x_n |\ X_{k_1} = x_{k_1}\}. \qquad (*)$$

Svojstvo (*) se zove ***markovsko svojstvo*** i ono kaže da verovatnoća da se sistem u budućnosti nađe u nekom stanju zavisi samo od sadašnjosti, a ne od prošlosti.

Definicija 8. [15] Stohastički proces je ***markovski*** ako zadovoljava ***markovsko svojstvo***.

Verovatnoća prelaza iz stanja i u stanje j u jednom koraku je

$$b_{ij} = P\{X_{n+1} = j |\ X_n = i\},\ n \geq 0.$$

Analogno, verovatnoća prelaza iz stanja i u stanje j u n koraka je

$$b_{ij}^{m,m+n} = P\{X_{m+n} = j |\ X_m = i\},\ m, n, i, j \geq 0.$$

Markovski proces je homogen ako verovatnoća prelaza ne zavisi od trenuka prelaza, te se u tom slučaju verovatnoća prelaza iz stanja i u stanje j u n koraka obeležava sa $b_{ij}(n)$.

Matrica prelaza u n koraka homogenog lanca Markova je matrica $[b_{ij}(n)]_{ij}$.

Više o lancima Markova se može naći u [15].

3.2. Operatori agregacije

Problem agregacije se sastoji u sakupljanju n objekata u jedan. U slučaju matematičke agregacije, koja i jeste posmatrana ovom prilikom, i ulazne vrednost i rezultat agregacije čine realni brojevi.

Drugim rečima, operator agregacije je funkcija koja dodeljuje realan broj y svakoj n- torci realnih brojeva:

$$y = \mathrm{A}\ (x_1\ , x_2\ ,\ldots, x_n\ )$$

Definicija 9. [12] ***Operator agregacije*** je funkcija $A\colon \bigcup_{n\in N}[0,1]^{\ n} \longrightarrow [0,1]$ koje zadovoljava sledeće uslove:

(i) A(x) = x,
(ii) A(0, . . ., 0) = 0, A(1, . . .,1) = 1, (granični uslovi)
(iii) Ako je $(x_1\ , x_2\ ,\ldots, x_n)\leq(y_1\ , y_2\ ,\ldots, y_n)$, onda je $\mathrm{A}(x_1\ , x_2\ ,\ldots, x_n)\leq\mathrm{A}(y_1\ , y_2\ ,\ldots, y_n)$ (monotonost)

Granični uslovi kažu da ako se posmatraju netačne, nepotpune ili loše ulazne vrednosti, onda će i rezultat agregacije biti takav. Takođe, ako se posmatraju dovoljno dobre, potpune i tačne ulazne vrednosti onda će i rezultat agregacija biti dobra i zadovoljavajuća vrednost.

Treba primeti da je sama definicija operatora agregacije veoma opšta, odnosno da se nameću samo granični uslovi i monotonost. U zavisnosti od tipa problema za koji se koristi određeni operator agregacije, moguće je zahtevati da budu ispunjene i neke druge osobine poput komutativnosti, asocijativnosti, neprekidnosti, bisimetričnosti ...

U narednom primeru je dat pregled nekih od najčešće korišćenih operatora agregacije (videti [14,10]).

Primer 14.

- Najčešće korišćeni operator agregacije je **aritmetička sredina**. Za prethodno opisan problem koji se oslanja na kodiranje pozitivnog odgovara sa 1, a negativnog sa 0, aritmetička sredina se svodi na brojanje predstavnika koji su rekli „da” i deljenje tog broja sa n. Odnosno, što ih je više reklo da, veća je verovatnoća da pojedinac, koji sakuplja mišljenja, kaže „da”. Ovaj operator je zanimljiv zato što daje vrednost koja je veća od najmanjeg argumenta, a manja od najvećeg.
- **Medijana** je takođe operator agregacije baziran na srednjoj vrednosti ali na sledeći način: argumenti se poredaju od najmanjeg do najvećeg i uzima se element koji je u sredini.

Ako je kardinalnost argumenata skupa paran broj, onda se ne uzima broj koji je u sredini, nego par koji stoji na tom mestu i traži se njegova srednja vrednost.

- **Minimum** i **maksimum** daje najmanju vrednost skupa, odnosno, najveću. Ne daju srednju vrednost, ali uprkos tome imaju značajnu ulogu u primenama.
- **Geometrijska sredina**: $M_{geom}(x_1, \ldots, x_n) = (\prod_{i=1}^{n} x_i)^{\frac{1}{n}}$
- **Harmonijska sredina:** $M_{harmon}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$

- **Kvazi-aritmetičkih sredina:**

$$M_f(x_1, \ldots, x_n) = f^{-1}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right] = f^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n} f(x_i)\right)\right]$$

gde je f striktno monotona, neprekidna funkcija. Može se primetiti da generator f nije jedinstven.

- **Težinski minimum i težinski maksimum:**

$$\min^{\oplus}_{\omega_1,\ldots,\omega_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \min_{i=1}^{n}\left[\max(1-\omega_i, x_i)\right]$$

$$\max^{\oplus}_{\omega_1,\ldots,\omega_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \max_{i=1}^{n}\left[\min(\omega_i, x_i)\right],$$

gde su težinski koefinicenti nenegativni i $\max_{i=1}^{n}(\omega_i) = 1$.

- **Težinska sredina:**

$$M_{\omega_1,\ldots,\omega_n}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}(\omega_i \cdot x_i)$$

Gde su težinski koeficienti nenegativni i $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$.

3.3. Opis modela

Neka je sa S obeležen trenutak u kome počinje proces uticaja, tj. skup svih da-predstavnika, a sa T trenutak u kome se završava, odnosno skup da-predstavnika posle uticaja. Tada je

- $b_{S,T}$ je verovatnoća prelaza od skupa S do skupa T (od trenutka S do T) posle jednog koraka uticaja.

Kao što je već napomenuto, proces uticaja je moguće iterirati (nekoliko krugova tokom diskusije). Drugim rečima u pitanju je stohastički proces, nazvan proces uticaja, koji opisuje evoluciju koalicije „da”-predstavnika kroz vreme.

Početne pretpostavke su:

(i) proces je markovski tj. verovatnoća zavisi od S (sadašnji trenutak) i T (budući trenutak), a ne zavisi od prošlosti;
(ii) proces je homogen (stacionaran), tj. $b_{S,T}$ ne zavisi od vremena.

Jasno, stanja posmatranog markovskog procesa su svi podskupovi $S \subseteq N$, koji predstavljaju skup „da”- predstavnika, a odgovarajuća matrica prelaza **B** = $[b_{S,T}]_{S,T \subseteq N}$ je 2^N x 2^N matrica.

Za dalji rad od elementarnog značaja je veza sa teorijom grafova koja se bazira na redukovanim matricama, u oznaci $\widetilde{\boldsymbol{B}}$, gde je

$$\tilde{b}_{S,T} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } b_{T,S} > 0 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Redukovana matrica može biti ekvivalentno predstavljena kao graf $\Gamma=(2^N, E)$, zvani ***tranzicioni graf*** ili ***graf prelaza***. Treba naglasiti da je Γ orijentisan graf tako da se parovi grana suprotnih orijentacija ne zamenjuju neorijentisanim granama, tj. digraf (eng. directed graph, digaph), pri čemu orijentisana grana koja odgovara prelazu iz stanja S u stanje T postoji, tj. pripada E, ako i samo ako je $\tilde{b}_{S,T} = 1$. Orijentisani put u grafu Γ iz stanja S u stanje T je niz stanja $S = S_0, S_1, S_2, \ldots, S_{k-1}, S_k = T$ tako da $(S_i, S_{i+1}) \in E$ za $i = 0, \ldots, k-1$.

Napomena. Ako je N skup svih predstavnika, 2^N je skup svih mogućih koalicija, odnosno skup stanja. Sada, pod grafom $\Gamma=(2^N, E)$ podrazumevamo uređeni par gde je prva komponenta skup čvorova (skup svih mogućih koalicija), a druga komponenta E je skup grana, tj. uređenih parova elemenata skupa 2^N koji su spojeni određenom binarnom relacijom.

Definicija 10. [12] Neka je $\mathcal{C}$ je neprazana kolekcija stanja. $\mathcal{C}$ je ***jako povezana*** ako je $\mathcal{C}$ = {S} ili za svaki par S, T ∈ $\mathcal{C}$, postoji put u $\mathcal{C}$ iz S do T i obrnuto. $\mathcal{C}$ je ***klasa*** ako je jako povezana i ako je maksimala (tj. svako dodavanje novog stanja u $\mathcal{C}$ narušava povezanost).

Klasa $\mathcal{C}$ je ili *prelazna* ili *terminalna*. Prelazna je ako postoje stanja $S \in \mathcal{C}$ i $T \notin \mathcal{C}$ tako da je $(S, T) \in E$ ((S,T) orijentisana izlazna grana). Terminalne klase nemaju izlaznih grana, te upravo zbog toga proces uvek konvergira ka nekoj od terminalnih klasa. Ako klasa sadrži samo jedno stanje, onda je to terminalno stanje. Terminalna klasa $\mathcal{C}$ je periodična ako postoji particija $\{P_1, \ldots P_q\}$ klase $\mathcal{C}$ pri čemu ako proces pripada stanju P_r u vremenu t, onda će biti u stanju P_{r+1} u vremenu t+1 (uz dodatni uslov $P_{q+1} = P_1$). U suprotnom $\mathcal{C}$ je neperiodična (eng. aperiodical).

Definicija 11. [12] Za dva procesa uticaja se kaže da su kvalitativno ekvivalentni ako imaju isti graf prelaza, tj. ako konvergiraju ka istim terminalnim klasama.

Sledeći korak pri formiranju modela je uvođene operatora agregacije u proces uticaja.

Svakom predstavniku $i \in \mathrm{N}$ se dodeljuje operator agregacije $\mathrm{A_i}$, tj. precizira se način na koji predstavnik i modifikuje svoje mišljenje u odnosu na tuđa mišljenja. Tada, **A**= ($\mathrm{A_1}$, ..., $\mathrm{A_n}$) je vektor operatora agregacije. Specijalno, ako se pretpostavi da je S skup predstavnika koji kažu „da", onda se posmatra $\mathbf{A}(1_S)$ = ($\mathrm{A_1}(1_S)$, ..., $\mathrm{A_n}(1_S)$), gde je 1_S karakteristični vektor za S tj. $(1_S)_j$=1 ako $j \in S$ i $(1_S)_j$=0 u suprotnom. Sada, verovatnoća prelaska iz da-koalicije S u da-koaliciju T je

$$\mathrm{b_{S,T}}= \prod_{i\in T} \mathrm{A_i}(1_S) \prod_{i\notin T}(1-\mathrm{A_i}(1_S)),$$

što determiniše **B**. Sledi da deterministički model odgovara operatorima agregacije koji zadovoljavaju $\mathrm{A_i}(1_S) \in \{0,1\}$ za sve $i \in N$. Redukovana matrica $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ je neosetljiva na moguću korelaciju među predstavnicima. Zaista, $\tilde{\mathrm{b}}_{S,T} = 1$ ako i samo ako $\mathrm{A_i}(1_S) > 0$ za sve $i \in T$ i < 1 za sve $i \notin T$, bez obzira na korelaciju među predstavnicima.

3.4. Primeri agregacionog mišljenja pri procesu odlučivanja

Pretpostavimo da se posmatra n menadžera kompanije koji raspravljaju da li treba uvesti novu tehnologiju u kompaniju. Neka diskusija ima više krugova, a prvobitna mišljenja svih menadžera zavise od njihovog zajedničkog znanja. Pitanja koja se ovom prilikom nameću su:

- Kako menadžeri formiraju mišljenje tokom diskusije?
- Da li tokom krugova rasprave menjaju mišljenje?
- Da li su pod uticajem drugih menadžera?
- Da li dostižu opštu saglasnost?
- Ka kojoj terminalnoj klasi uticajni proces konvergira?

U [12] su predstavljna sledeća tri primera koja ilustruju moguća ponašanja pri procesu donošenja odluka.

Primer 15. (*Guru*). Neka je $\tilde{k} \in N$ određeni menadžer zvani guru, koji ima osobinu da svaki drugi menadžer uvek prati njegovo mišljenje. Operator agregacije svih menadžera je identičan i dat sa $\mathrm{A_i}(1_S)$ = 1 ako $S \ni \tilde{k}$, u suprotnom je 0. Konvergencija procesa je u ovom slučaju je prilično prosta, tj. u jednom koraku konvergira ka ili N ili $\emptyset$ zavisnosno od toga da li je mišljenje gurua „da" ili „ne".

Primer 16. (*Uticaj većine*). Prirodan način donošenja odluke u društvu u kome postoji uticaj jeste da se prihvati mišljenje većine. Drugim rečima, ako većina menadžera ima sklonost da kaže da, onda svi menadžeri govore „da“, ako ne onda svi govore „ne“. Neka je q, $n \geq q > \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, nivo odsecanja većine, te tada svi menadžeri imaju isti operator agregacije:

$$A_i(1_S) = 1 \text{ ako } |S| \geq q, \text{ u suprotnom } 0.$$

Očigledno, $\emptyset$ i N su terminalna stanja i konvergencija se može dostići u jednom koraku.

Primer 17. (*Masovna psihologija).* Neka je sa ε obeleženo ili „da“ ili „ne“, a sa $\bar{\varepsilon}$ suprotno od toga. Uticaj mase znači da ako postoji dovoljan broj menadžera sa mišljenjem ε, onda je moguće da oni privuku neke menadžere sa sklonošću $\bar{\varepsilon}$ i utiču na njih da promene mišljenje.

Neka je $n \geq q > \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, onda funkcija za uticaj mase $\mathrm{Mass}^{[q]}$ zadovoljava sledeće (videti [11]):

ako je $|S| \geq q$, onda $\mathrm{Mass}^{[q]}(S) \supseteq S$,

i ako $|N \backslash S| \geq q$, onda $\mathrm{Mass}^{[q]}(S) \subseteq S$.

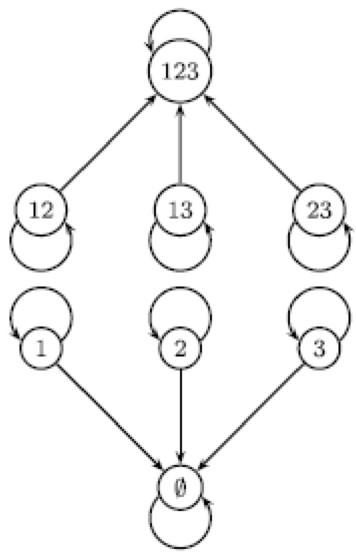
Primer stohastičke verzije funkcije masovne psihologije (sa uniformnom distribucijom) (n = 3, q = 2) je dat sledećom matricom prelaza:

$$\mathbf{Mass}^{[2]} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccc} \emptyset & 1 & 2 & 12 & 3 & 13 & 23 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{c} \emptyset \\ 1 \\ 2 \\ 12 \\ 3 \\ 13 \\ 23 \\ 123 \end{array} & \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & & & & & & & \\ 0.5 & 0.5 & & & & & & \\ 0.5 & & 0.5 & & & & & \\ & & & 0.5 & & & & 0.5 \\ 0.5 & & & & 0.5 & & & \\ & & & & & 0.5 & & 0.5 \\ & & & & & & 0.5 & 0.5 \\ & & & & & & & 1 \end{array} \right] \end{array} \quad (2)$$

gde „prazno“ mesto znači nula. Odgovarajući tranzicioni graf je dat na slici 2. Ponovo su $\emptyset$ i 123 terminalna stanja. U opštem slučaju, za uticaj masovne psihologije, $n > 3$ i $q > \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, sledi: ako prvobitno stanje S_0 zadovoljava $|S_0| \geq q$, onda konvergira ka N sa verovatnoćom 1 (sa nekim blagim uslovima za matricu prelaza). Ako $|S_0| \leq n-q$, onda konvergira ka $\emptyset$ sa verovatnoćom 1.

Ako se pretpostavi da je za svaku situaciju ($S \subseteq N$, ε= „da“ ili „ne“) $p_i^{S,\varepsilon}$ verovatnoća da menadžer $i \in N\backslash S$ nezavisno menja mišljenje, onda je ovo ekvivalentno sledećem agregacionom modelu, za svako $S \subseteq N$:

$$A_i(1_S) = \begin{cases} 1, & \mathit{ako}\ i \in S\ i\ |N\backslash S| < q \\ p_i^{S,da}, & ako\ i \in N\backslash S\ i\ |S| \geq q \\ 0, & ako\ i \in N\backslash S\ i\ |S| < q \\ p_i^{N\backslash S,ne}, & \mathit{ako}\ i \in S\ i\ |N\backslash S| \geq q \end{cases}$$



Slika 2. [12] Tranzicioni graf za uticaj masovne psihologije Mass[2] za n= 3

Matrica prelaza (2) je tada „oporavljena" na sledeći način:

$A_1(1\ 0\ 0) = 0.5$, $A_2(1\ 0\ 0) = 0$, $A_3(1\ 0\ 0) = 0$

$A_1(0\ 1\ 0) = 0$, $A_2(0\ 1\ 0) = 0.5$, $A_3(0\ 1\ 0) = 0$

$A_1(0\ 0\ 1) = 0$, $A_2(0\ 0\ 1) = 0$, $A_3(0\ 0\ 1) = 0.5$

$A_1(1\ 1\ 0) = 1$, $A_2(1\ 1\ 0) = 1$, $A_3(1\ 1\ 0) = 0.5$

$A_1(1\ 0\ 1) = 1$, $A_2(1\ 0\ 1) = 0.5$, $A_3(1\ 0\ 1) = 1$

$A_1(0\ 1\ 1) = 0.5$, $A_2(0\ 1\ 1) = 1$, $A_3(0\ 1\ 1) = 1$.

4. Uticajne koalicije i hipergrafovi uticaja

U ovom poglavlju je dat pregled rezultata iz [12] koji su zasnovani na ideji da se problem uticaja poveže sa hipergrafovima.

4.1. Uticajni igrači, uticajne koalicije i hipergrafovi

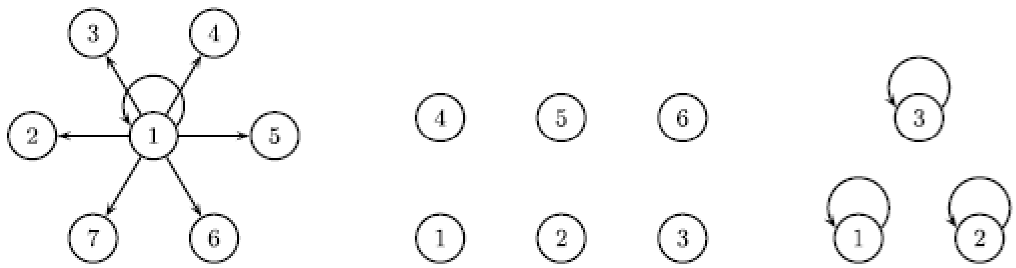
Sledeći pojmovi su fundamentalni za analizu konvergencije.

Definicija 12. [12] Neka je dat model uticaja baziran na operatoru agregacije **A**= $(A_1, \ldots, A_n)$.

(i) Predstavnik $j \in N$ je da-uticajan u A_i ako je $A_i(1_j) > 0$
(ii) Predstavnik $j \in N$ je ne-uticajan u A_i ako je $A_i(1_{N\setminus j}) < 1$
(iii) Graf da-uticaja je orijentisani graf G_A^{da}= (N, E) čiji je skup čvorova u N i postoji orijentisan grana (j, i) iz j u i ako je j da-uticajan u A_i. Graf ne-uticaja G_A^{ne} je definisan analogno.

Predstavnik j je (da ili ne) uticajan na predstavnika i ako se mišljenje j, takođe, tiče i. Zaista, pod pretpostavkom da je $i \neq j$, čak i ako svi sem predstavnika j kažu „ne", postoji pozitivna verovatnoća da ostali predstavnici promene mišljenje pod uticajem njega (i slično ako se „da" zameni sa „ne"). Treba primetiti da upravo monotonost operatora agregacije zahteva da kada je j da-uticajno u A_i važi $A_i(1_S) > 0$ za $S \ni j$ i ako je $A_i(1_S) <1$ za $S \not\ni j$, onda je j ne- uticajno.

Graf uticaja daje jasnu predstavu ko na koga utiče. Slika 3 daje da-uticajni graf za data tri primera (ne-uticajni graf je isti).



Slika 3. [12] Graf da-uticaja na guru uticajnu funkciju (levo, n=7, predstavnik 1 je guru), funkcija uticaja većine (srednja, n=6), proces uticaja masovne psihologije (desno, n=3, odgovara matrici prelaza(2))

Graf guru uticajne funkcije je zvezda, gde se jasno pokazuje uloga gurua. Druga dva grafa ne pokazuju nista jasno vezano za uticaj, a to je zato što nijedan predstavnik nije uticajan u ovim modelima. Uticaj se prikazuje samo srednjom vrednošću broja ljudi koji imaju isto mišljenje. Ovo pokazuje da graf uticaja intuitivno ne može objasniti fenomen uticaja i da je potreban jači pojam.

Definicija 13. [12] Neka je A_i operator agregacije predstavnika i. Neprazna koalicija $S \subseteq N$ je da- uticajna za i ako

(i) $A_i(1_S) > 0$;
(ii) za sve $S' \subset S$, $A_i(1_{S'}) = 0$.

Neprazna koalicija S je ne- uticajna za i ako

(i) $A_i(1_{N\setminus S}) < 1$;
(ii) za sve $S' \subset S$, $A_i\big(1_{N\setminus S'}\big) = 1$.

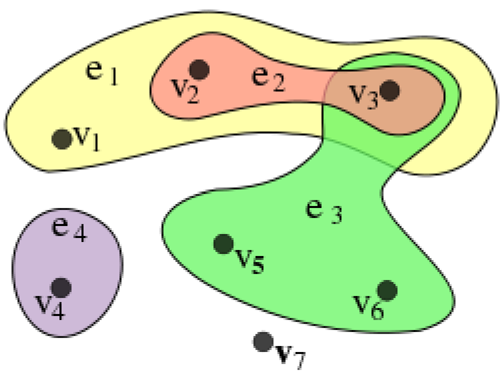
Neka su $\mathcal{C}_i^{da}$ i $\mathcal{C}_i^{ne}$ kolekcije da- i ne- uticajnih koalicija za i. Ove kolekcije nikada nisu prazne, zato što ako ne sadrže odgovarajući podskup od N, onda moraju sadržati N, po osobini $A_i(1_N)$=1 i $A_i(1_\emptyset)$= 0. Te kolekcije su antilanci, tj. svaka dva skupa iz $\mathcal{C}_i^{da}$ i $\mathcal{C}_i^{ne}$ su neuporediva, uzimajući u obzir inkluziju skupova.

Uticajne koalicije jasno generalizuju uticajne predstavnike. Koalicija S je da-uticajna za predstavnika i, ako kada predstavnik u S kaže „da“ i svi ostali predstavnici kažu „ne“, za predstavnika i postoji verovatnoća da kaže „da“ (slično i za ne-uticajne koalicije). Uslov (ii) u prethodnoj definiciji govori da nijedna podkoalicija od S ne zadovoljava prvi uslov, što znači da S nema viška predstavnika.

Deluje kao da ne postoji lak način da se grafički predstave uticajne koalicije. U daljem radu će se pokazati da je pojam hipergrafova najprirodniji za to, iako je težak za vizualizaciju.

Generalno, pod hipergrafom podrazumevamo uopštenje klasičnog grafa dobijeno tako da jedna grana povezuje više čvorova. Ovu ideju lepo ilustreuje naredni jednostavni primer (videti [16]).

Primer 18. [16] Hipergraf predstavlja generalizaciju grafa, gde grane grafa mogu povezivati bilo koji broj čvorova. Grane grafa su predstavljene parovima čvorova koje one spajaju, dok su hipergrane proizvoljni skupovi čvorova, koji mogu da sadrže proizvoljan broj čvorova.



Slika 4. [16] primer hipergrafa.

Neka je (X,E) hipergraf, gde je X skup elemenata, *čvorova*, a E je skup podskupova od X, koji se nazivaju hipergrane, pa na osnovu slike 4 imamo:

$$X = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$$

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\} = \{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_5, v_6\}, \{v_4\}\}.$$

Definicija 14. [12]

(i) Hipergraf H je par (N, ε), gde je N skup čvorova i ε skup hipergrana, gde je hipergrana S ∈ ε je neprazan podskup od N. Ako je |S| = 2 za sve S ∈ ε, onda se hipergraf svodi na klasičan graf.

(ii) Orijentisani hipergraf iz N je hipergraf gde je svaka hipergrana S uređeni par (S', S") (zvani hiperluk iz S' u S") i S', S" su neprazni i S' ∩ S" = S. Ako je S' ∩ S"= ∅, onda je hiperluk normalan.

(iii) Orijentisani *hiperput* iz *i* u *j* je niz $i_0 S_1 i_1 S_2 i_2 \ldots i_{q-1} S_q i_q$ gde je i_0= i, i_1, ... , $i_{q-1}, i_q = j$ su čvorovi, S_1=(S', S"), ... , S_q= (S'_q, S''_q) su *hiperlukovi* takvi da $S'_k \ni i_{k-1}$ i $S''_k \ni i_k$ za sve k = 1, ... , q. Orijentisana *hiperkontura* je orijentisani hiperput uz pretpostavku $i_0 = i_q$.

(iv) Hipergraf je jako povezan ako je svaki par čvorova i i j povezan orijentisanim hiperputevima od i do j i od j do i.

(v) Za svaki hipergraf H se definiše restrikcija $\widehat{H}$ tako što se uklone hiperlukovi koji nisu normalni.

(vi) Neka je dat model uticaja zasnovan na operatoru agregacije **A.** Za hipergraf $H_{\mathbf{A}}^{da}$ za da-uticaj, skup čvorova je N i postoji hipergrana (C, {i}) za svako C ∈ $\mathcal{C}_i^{da}$. Analogno se definiše hipergraf $H_{\mathbf{A}}^{ne}$ za ne-uticaje.

S obzirom da su $\mathcal{C}_i^{da}$ i $\mathcal{C}_i^{ne}$ antilanci, ne postoji hiperluk koji je uključen u neki drugi i nije neophodno da hiperlukovi budu normalni. Jasno, hipergrafovi uticaja generalizuju grafove uticaja u tom smislu da ako se uticajna koalicija svede na jednu stvar (uticajnog predstavnika), onda se hipergrafovi svode na graf uticaja.

Uzimajući u obzir prethodne primere, lako se dolazi do sledećih zaključaka:

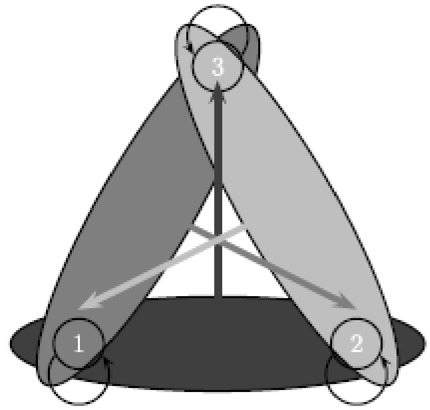
(i) Za guru funkciju je samo guru uticajan i nema druge uticajne koalicije. Zato se hipergrafovi uticaja svode na grafove uticaja.

(ii) Za funkciju uticaja većine svaka kolekcija $\mathcal{C}_i^{da}$ sadrži sve koalicije od tačno q predstavnika, dok $\mathcal{C}_i^{ne}$ sadrži sve koalicije od tačno n-q+1 predstavnika.

(iii) Za proces uticaja masovne psihologije sa n = 3 i matricom prelaza (2) je

$$\mathcal{C}_1^{da} = \mathcal{C}_1^{ne} = \{1, 23\}, \ \mathcal{C}_2^{da} = \mathcal{C}_2^{ne} = \{2, 13\} \text{ i } \mathcal{C}_3^{da} = \mathcal{C}_3^{ne} = \{3, 12\}.$$

U ovom slučaju da- i ne- uticajni hipergrafovi su identični (videti sliku 5).



Slika 5. [12] Hipergraf H_A^{da} za proces uticaja masovne psihologije sa tranzicionom matricom (2)

4.2. Ekvivalencija između hipergrafa uticaja i matrice $\widetilde{\mathbf{B}}$

Moguće je uporediti veličine modela baziranih na matricama prelaza i na hipergrafovima.

Tabela 2.

N	2	3	4	5	6	7	8
Veličina matrice prelaza	16	64	256	1024	4096	16384	65536
Maksimalna veličina hipergrafova	8	18	48	100	240	490	1120

Tabela 2 jasno prikazuje da hipergrafovi zauzimaju mnogo manje mesta, tako da se može pomisliti da hipergrafovi ne predstavljaju proces uticaja na najbolji način. Naredna teorema pokazuje da su oni ipak ekvivalentni sa redukovanom matricom $\widetilde{\mathbf{B}}$ i zbog toga sadrže ceo kvalitativan opis konvergencije.

Teorema 2. [12] Neka je **B** proces uticaja baziran na operatoru agregacije **A**. Tada $\widetilde{\mathbf{B}}$ može biti rekonstruisano iz hipergrafova H_A^{da} i H_A^{ne} na sledeći način: za svako S,T $\in 2^N$, $\tilde{b}_{S,T} = 1$ ako i samo ako

(i) Za svako $i \in$ T postoji neprazan skup $S_i' \subseteq S$ takav da je S_i' da- uticajno na i, tj. $S_i' \in \mathcal{C}_i^{da}$;
(ii) Za svako $i \notin$ T postoji neprazan skup S_i'' takav da $S_i'' \cap S = \emptyset$ i S_i'' je ne- uticajno na i, tj. $S_i'' \in \mathcal{C}_i^{ne}$.

Zapravo, $\tilde{b}_{\emptyset,T} = 0$ za sve $T \neq \emptyset$, $b_{\emptyset,\emptyset} = 1$ i $\tilde{b}_{N,T} = 0$ za sve $T \neq N$, $b_{N,N} = 1$.

Dokaz. $b_{S,T} > 0$ ako i samo ako $A_i(1_S) > 0$ za sve $i \in T$ i $A_i(1_S) < 1$ za sve $i \notin T$ i ovo ostaje tačno čak i ako nezavisnost nije pretpostavljena. Sada, iz monotonosti operatora agregacije sledi da je $A_i(1_S) > 0$ ekvivalent tome da se može reći da postoji da–uticajna koalicija S_i' za i koje je uključeno u S. S druge strane, $A_i(1_S) < 1$ znači da postoji kolicija $S_i' \neq N$ koja sadrži S tako da $N \setminus S_i'$ je ne- uticajno na i. Konačno, treba primetiti da $(N \setminus S_i') \cap S = \emptyset$ i ako se dopusti da $S_i'' = N \setminus S_i'$, onda je dokaz gotov. □

Glavna posledica ove teoreme jeste da hipergrafovi (ili ekvivalentno, kolekcije $\mathcal{C}_i^{da}$, $\mathcal{C}_i^{ne}$, $i \in N$) jesu efikasna reprezentacija procesa uticaja, kojom je moguće u potpunosti opisati kvalitativnu konvergenciju. Opis je validan iako statistička nezavisnost između igrača ne postoji.

Ako je **A** Boolean- ova (tj. svi operatori agregacije imaju 0-1- vrednosti), onda kolekcije $\mathcal{C}_i^{da}$, $\forall i \in N$, u potpunosti determinišu **A** (i marticu prelaza **B**, ako je korelacija među igračima poznata). Zaista, $A_i(1_S) = 1$ ako i samo ako $S \supseteq C$ za neko $C \in \mathcal{C}_i^{da}$ i 0 u suprotnom. Isti zaključak važi za kolekcije $\mathcal{C}_i^{ne}$, $\forall i \in N$.

5. Konvergencija u agregacionom modelu

Kada se zna tačno kako svaki predstavnik formira trenutno mišljenje na osnovu drugih i kako su korelisani, onda se može obezbediti kompletna analiza konvergencije. Međutim, u praksi se često ne zna kako predstavnici vrše agregaciju. U ovom modelu, za analizu kvalitativene konvergencije, nisu potrebne sve informacije vezane za operatore agregacije predstavnika. Ono što je potrebno da se zna su uticajne koalicije, a ta informacija se obično može saznati posmatranjem procesa uticaja.

U ovom poglavlju dat je prikaz analize konvergencije procesa uticaja baziranih na operatorima agregacije iz [12].

5.1. Tipovi terminalnih klasa

U svim prethodnim primerima se može videti da proces konvergira ka konsenzus stanjima N ili $\emptyset$, tj. stanjima gde menadžeri imaju isto mišljenje. Lako je videti da su ta dva konsenzus stanja uvek terminalna stanja, čak i ako druge terminalne klase postoje. Zapravo, za svaki operator agregacije znamo da važi $A_i(1_N) = 1$ i $A_i(0, \ldots, 0) = 0$ (granični uslovi), tj. (1, ... , 1) i (0, ... , 0) su fiksne tačke za **A**. Zato se $\emptyset$ i N zovu trivijalna terminalna stanja. Postojanje netrivijalnih terminalnih klasa je dokazano narednom teoremom.

Teorema 3. [12] Ako se razmatra proces uticaja **B** baziran na operatoru agregacije **A**, tada su terminalne klase:

(i) ili singltoni $\{S\}$, $S \in 2^N$

(ii) ili ciklična familija nepraznih skupova $\{S_1, \ldots, S_k\}$ bilo koje duzine $2 \leq k \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ (periodičnost sa periodom k) za koju važi da su svi skupovi po parovima neuporedivi (u odnosu na inkluziju skupova);

(iii) ili kolekcije $\mathcal{C}$ nepraznih skupova sa osobinom da $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{C}_p$, gde je svaka podkolekcija $\mathcal{C}_j$ ustvari Boolean-ova mreža $[S_j, S_j \cup K_j]$, $S_j \neq \emptyset$, $S_j \cup K_j \neq N$ i bar jedan K_j je neprazan.

Cikličnim terminalnim klasama zovemo terminalne klase drugog tipa, a regularnim terminalnim klasama one koje su trećeg tipa. Regularne terminalne klase mogu biti periodične (videti primer ispod). Regularne terminalne klase formirane od jedne Boolean-ove rešetke $[S, S \cup K]$ zovu se Boolean-ove terminalne klase.

Dokaz. Ideja dokaza je se bazira na skraćenom oblik

$$(1_S, x_K) = (\, 0\ldots0\underbrace{1\ldots1}_{S}\underbrace{x_1 x_2 \ldots x_k}_{K})$$

za vektore u $[0,1]^n$. Naredna lema je centralna za dokazivanje i navodi se bez dokaza.

> **Lema 2. [12]** *Za svaki skupa $S \in 2^N$, broj mogućih prelaza je oblika 2^k, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, gde je k broj komponenti u $\mathbf{A}(1_S)$ različitih i od 1 i od 0. Preciznije, ako je $\mathbf{A}(1_S) = (1_T, x_K)$ i $x_i \in (0,1)$ za sve $i \in K$, onda S ima prelaz u svaki skup Boolean-ovih rešetki*
>
> $$[T, T \cup K] = \{S' \in 2^N \mid T \subseteq S' \subseteq T \cup K\}.$$

Dalje, posmatra se terminalna klasa $\mathcal{C}$ tako da $S \in \mathcal{C}$. S ne može biti prazan skup, osim ako je $\mathcal{C}$ redukovano na jedno stanje, zato što za prazan skup nema drugih prelaza jedino sam u sebe, a tada $\mathcal{C}$ ne bi bilo klasa. Samo jedan od sledećih slučajeva se može desiti:

(i) $\mathbf{A}(1_S) = 1_S$. Tada je S terminalno stanje, tj. $\mathcal{C} = \{S\}$.

(ii) $\mathbf{A}(1_S) = 1_T$, $T \neq S$. Tada sigurno postoji prelaz iz S u T. Ako su za sve skupove u $\mathcal{C}$ prelazi sigurni, onda je $\mathcal{C}$ ciklična familija $S \longrightarrow T \longrightarrow \ldots \longrightarrow S$.

(iii) $\mathbf{A}(1_S) = (1_T, x_K)$, sa $x_i \in (0,1)$ za svako $i \in K$, $|K| = k$. Iz leme 2, sledi da postoji 2^k prelaza, koji formiraju Boolean-ovu rešetku $[T, T \cup K]$. Tada je neophodno: $[T, T \cup K]$ je uključeno u $\mathcal{C}$, za neki skup $L \in [T, T \cup K]$ koji ne pripada $\mathcal{C}$, postoji prelaz iz S u L tj.

odlazna orijentisana grana iz klase, što je kontradikcija sa pretpostavkom da je u pitanju terminalna klasa.

Detaljan dokaz se može naći u [12]. $\square$

Tvrđenje 4. [12] Neka je **A** Boolean-ova (tj. ima vrednosti u $\{0,1\}^n$), onda su terminalne klase: terminalna stanja ili ciklične familije.

Dokaz. Neka je **A** Boolean-ova i razmatraju se terminalne klase $\{S_1, \ldots, S_k\}$ sa $k > 1$. S obzirom da je svaka promena deterministička, jedina mogućnost jeste da postoji cikličnan put kroz svaki skup klasa. $\square$

Naredni primeri ilustruju prethodno uvedene pojmove.

Primer 19. Neka je N={1, 2, 3} i neka su dati sledeći operatori agregacije:

$A_1(1\ 0\ 0) = 1$ $A_2\ (1\ 0\ 0) = 0.5$ $A_3\ (1\ 0\ 0) = 0$

$A_1\ (0\ 1\ 0) = 0$ $A_2\ (0\ 1\ 0) = 0.5$ $A_3\ (0\ 1\ 0) = 0$

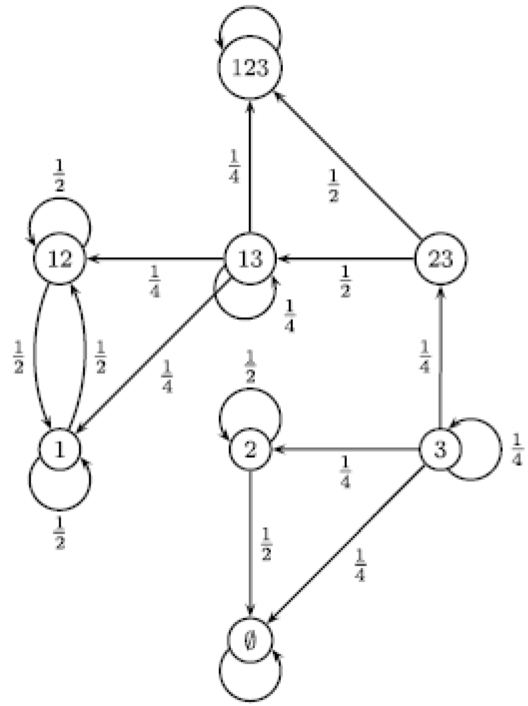
$A_1\ (0\ 0\ 1) = 0$ $A_2\ (0\ 0\ 1) = 0.5$ $A_3\ (0\ 0\ 1) = 0.5$

$A_1\ (1\ 1\ 0) = 1$ $A_2\ (1\ 1\ 0) = 0.5$ $A_3\ (1\ 1\ 0) = 0$

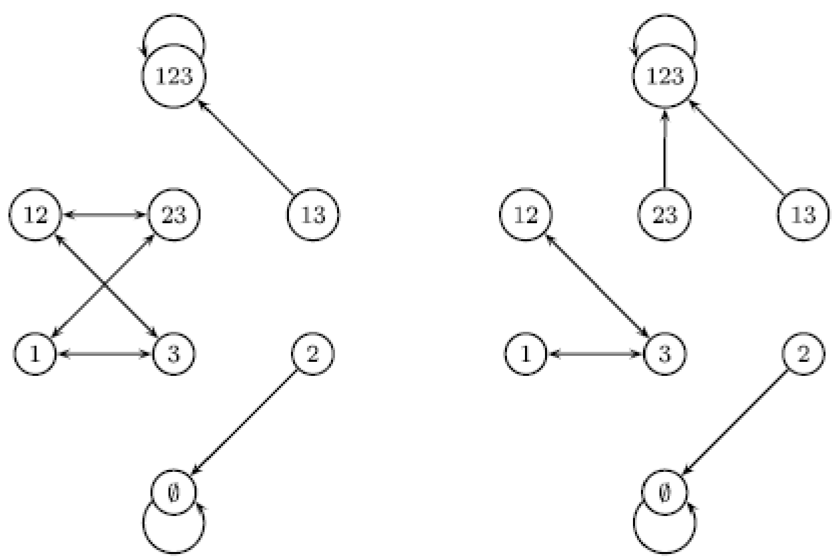
$A_1\ (1\ 0\ 1) = 1$ $A_2\ (1\ 0\ 1) = 0.5$ $A_3\ (1\ 0\ 1) = 0.5$

$A_1\ (0\ 1\ 1) = 1$ $A_2\ (0\ 1\ 1) = 0.5$ $A_3\ (0\ 1\ 1) = 1.$

Odgovarajući digraf je dat narednom slikom.



Jasno, {1, 12} je regularna terminalna klasa.



Slika 6. [12] Primeri periodičnih terminalnih klasa

Ciklične klase nisu jedini slučajevi periodičnih terminalnih klasa, što se i vidi iz sledećih primera.

Primer 20. [12] Neka je N={1, 2, 3} i dati su sledeći operatori agregacije:

A(1 0 0) = **A** (1 1 0) = (0 x 1)

A(0 0 1) = **A** (0 1 1) = (1 x 0)

A(0 1 0) = **A** (0 0 0) = (0 0 0)

A(1 0 1) = **A** (1 1 1) = (1 1 1)

za proizvoljno $0 < x < 1$. Tada je {1, 3, 12, 23} periodična terminalna klasa perioda 2 (videti sliku 6, levo). Sada se razmatraju sledeći operatori agregacije:

A (1 0 0) = **A** (1 1 0) = (0 0 1)

A (0 0 1) = (1 x 0)

A (0 1 0) = **A** (0 0 0) = (0 0 0)

A (1 0 1) = **A** (0 1 1) = A(1 1 1) = (1 1 1)

za proizvoljno $0 < x < 1$. Tada {1, 3, 12} je periodična terminalnih klasa perioda 2 sa 3 skupa (videti sliku 6, desno).

Uopšteno govoreći, da bi se konstruisala periodična regularna terminalna klasa sa periodom k, potrebno je k disjunktnih parova podkolekcija $[S_j, S_j \cup K_j]$, j=1,...,k, sa uobičajenom restrikcijom na S_j, K_j. Definiše se $A_i(1_S) = 1$ ako $i \in S_{j+1}$, $A_i(1_S) = x \in]0,1]$ ako $i \in K_{j+1}$ i 0 u suprotnom, za sve $S \in [S_j, S_j \cup K_j]$, obeležavajući k+1 sa 1. Treba primetiti da nije neohodno da su K_j-ovi jednakih dimenzija (videti sliku 6, desno).

Teorema 4 pokazuje koje sve različite vrste terminalnih klasa postoje. Sledi pregled njihovih glavnih karakteristika.

5.1.1. Terminalna stanja

Terminalna stanja su fiksne tačake za **A**, tj. S je terminalno stanje ako i samo ako

$A_i(1_S)=1 \quad \forall i \in S, \quad A_i(1_S)=0$ u suprotnom.

Postavlja se pitanje da li su trivijalna terminalna stanja jedina terminalna stanje. Treba primetiti da su trivijalna terminalna stanja jedina moguća stanja koja odgovaraju konsenzusu. Ako drugo terminalno stanje $S \neq \emptyset$ postoji, onda to znači da će društvo predstavnika na kraju biti podeljeno na dva dela S i N\S za suprotno mišljenje. Bitno je znati pod kojim uslovima se ova situacija može pojaviti.

Odgovor na postavljeno pitanje daje naredna teorema, ali je prvo neophodno uvesti pojam dolaznog i odlaznog hiperluka:

- koalicija S ima dolazni hiperluk $T = (T', T'')$ u nekom hipergrafu ako je $T' \subseteq N \setminus S$ i $T'' \subseteq S$ (i suprotno za odlazne).

Teorema 4. [12] Neka je dat proces uticaja **B** baziran na operatoru agregacije **A**. Neprazan podskup $S \subset N$ je (netrivijalno) terminalno stanje ako i samo ako nema dolaznih hiperlukova u hipergrafu $(\widehat{H}_{\mathbf{A}}^{da})^* \cup \widehat{H}_{\mathbf{A}}^{ne}$, gde $(\widehat{H}_{\mathbf{A}}^{da})^*$ je hipergraf $\widehat{H}_{\mathbf{A}}^{da}$ sa svim suprotno orijentisanim hiperlukovima.

Dokaz. Dokaz teoreme se oslanja na sledeću lemu koju navodimo bez dokaza, a on se može naći u [9].

> **Lema 3. [12]** *Neka je $S \subset N$, $S \neq \emptyset$. Tada S ne može biti terminalno stanje ako i samo ako ili postoji $S' \subseteq N \setminus S$, $i \in S$ tako da je S' ne- uticajno za i ili postoji $S' \subseteq S$, $i \notin S$ tako da je S' da- uticajno za i.*

Dalje, na osnovu leme 3 se zna da je $S \neq \emptyset$, N je eliminisano (iz skupa terminalnih stanja) ako ili postoji $S' \subseteq N \setminus S$, $i \in S$ tako da $S' \in \mathcal{C}_i^{ne}$ ili $S' \subseteq S$, $i \notin S$ tako da $S' \in \mathcal{C}_i^{da}$. Gledajući obrnuto, ustanovljena su dva pravila $\mathcal{R}^{da}$, $\mathcal{R}^{ne}$:

$\mathcal{R}^{da}$: $C \in \mathcal{C}_i^{da}$ isključuje svaku koaliciju $S \in 2^N$ tako da $S \supseteq C$ i $S \not\ni i$

$\mathcal{R}^{ne}$: $C \in \mathcal{C}_i^{ne}$ isključuje svaku koaliciju $S \in 2^N$ tako da $S \subseteq N \setminus C$ i $S \ni i$

Treba primetiti da ako $C \ni i$ i $C \in \mathcal{C}_i^{da}$, onda se ne izostavlja nijedna koalicija (isto i za $\mathcal{C}_i^{ne}$). Ovo pokazuje da se može uraditi restrikcija do normalnog hiperluka.

Za bilo koje S⊆N, ∅, ako je S eliminisano iz $\mathcal{R}^{ne}$, to znači da postoji hiperluk $\widehat{H}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{ne}}$ koji ide u S. Slično, ako je S eliminisano iz $\mathcal{R}^{da}$, onda postoji hiperluk $\widehat{H}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{da}}$ koji ide od S. Zato je S eliminisano sa $\mathcal{R}^{da}$ ili $\mathcal{R}^{ne}$ ako i samo ako S ima dolazne hiperlukove u hipergrafu H = $(\widehat{H}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{da}})^* \cup \widehat{H}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{ne}}$. Na osnovu leme 3, zaključuje se da S nije terminalno stanje ako i samo ako S ima dolazni hiperluk u hipergrafu H. □

Tvrđenje 5. [12] Neka je **B** proces uticaja baziran na operatoru agregacije **A**. Tada:

(i) Ako hipergraf ($\widehat{H}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{da}})^* \cup \widehat{H}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{ne}}$ nije jako povezan, onda postoje netrivijalna terminalna stanja.
(ii) Ako je graf ($G_{\mathbf{A}}^{\mathrm{da}})^* \cup G_{\mathbf{A}}^{\mathrm{ne}}$ jako povezan, onda nema netrivijalnih terminalnih stanja.
(iii) Ako se pretpostavi da se hipergrafovi $\mathrm{H}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{da}}$ i $\mathrm{H}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{ne}}$ redukuju do klasičnih grafova, onda je $(G_{\mathbf{A}}^{\mathrm{da}})^* \cup G_{\mathbf{A}}^{\mathrm{ne}}$ jako povezano ako i samo ako ne postoje netrivijalna terminalna stanja.

Dokaz.

(i) Za datu tačku $i \in N$, R(i) označava skup čvorova koji mogu da dosegnu do i pomoću direktnog hiperputa. Pretpostavimo da H nije jako povezano. Tada postoje $i, j \in N$ tako da R(i) $\not\ni j$. Ako R(i)= ∅, to znači da $\{i\}$ nema dolazni hiperluk. U suprotnom imamo R(i) ≠ ∅, N i po definiciji R(i) ima dolazni hiperluk. U oba slučaja postoji skup S ≠ ∅, N koji nema dolaznih hiperlukova. Suprotno nije tačno, jer odsustvo dolaznih hiperlukova ne znači i odsustvo puta.
(ii) Neka postoji skup S ≠ ∅, N bez dolaznih hiperlukova. Zapravo, ne postoji dolazna orijentisana grana u grafu G= $(\mathrm{G}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{da}})^* \cup \mathrm{G}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{ne}}$. Jasno, čvorovi u N\S≠ ∅ nisu povezani sa onim iz S u G, te G nije jako povezano.
(iii) Sledi iz (i) i (ii). □

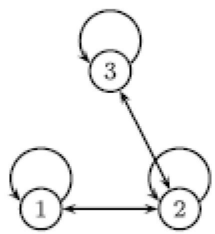
U nastavku se primenjuju ovi rezultati na prethodne primere.

Primer 21. [12]

(i) U primeru gde postoji guru, $G_{\mathbf{A}}^{\mathrm{da}}$ i $G_{\mathbf{A}}^{\mathrm{ne}}$ imaju centar u zvezdi $\tilde{\mathrm{k}}$ sa lukovima koji idu iz $\tilde{\mathrm{k}}$ u sve druge predstavnike. Stoga, $(G_{\mathbf{A}}^{\mathrm{da}})^* \cup G_{\mathbf{A}}^{\mathrm{ne}}$ jesu jako povezani i ne postoji netrivijalno terminalno stanje.
(ii) Na osnovu teoreme 4 se može pokazati da za funkciju uticaja većine ne postoji netrivijalno terminalno stanje. Zbog simetrije, dovoljno je pokazati da svaki skup S ima neki dolazni luk u $\widehat{H}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{ne}}$ ili odlazni u $\widehat{H}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{da}}$, što je tačno ako |S| ≥ q, jer sadrži uticajni skup veličine q. Ako |S| < q, onda |N\S| > n-q, zato N\S sadrži ne-uticajni skup, koji zapravo utiče na bilo koji element iz S.

(iii) Teorema 4 primenjena na funkciju uticaja masovne psihologije jasno dovodi do zaključka da ne mogu postojati netrivijalna terminalna stanja.

(iv) U primeru 19 se vidi da je predstavnik 1 da-uticajan u A_1, svi predstavnisi su da- i ne-uticajni u A_2, i predstavnik 3 je da-uticajan u A_3, dok su predstavnici 2, 3 ne- uticajni u A_3. Odgovarajući graf je $(G_{\mathbf{A}}^{\mathrm{da}})^* \cup G_{\mathbf{A}}^{\mathrm{ne}}$ (slika 7) je jako povezan, pa zato ne postoje netrivijanla terminalna stanja.



Slika 7. [12]

5.1.2. Regularne terminalne klase

Kao i u slučaju netrivijalnih treminalnih stanja, važno je znati kada regularne terminalne klase postoje. Ako Boolean-ova terminalna klasa [S, S ∪ K] postoji, to znači da nema konsenzusa, ali svi predstavnici u S bi trebalo da kažu „da“ dok bi svi predstavnici iz N\(S∪K) trebalo da kažu „ne“. Predstavnici iz K osciluju uzmeđu „da“ i „ne“ u svim mogućim pravcima, bez kraja.

Sledeća teorema daje odgovor na pitanje da li je jako povezan skup stanja Boolean-ova terminalna klasa.

Teorema 5. [12] Neka je **B** proces uticaja baziran na operatoru agregacije **A.** Neka je [S, S ∪ K] jako povezana klasa u tranzicionom grafu Γ, gde je S≠ ∅, K≠ ∅, S ∪ K≠ N. Tada je [S, S ∪ K] Boolean-ova terminalna klasa ako i samo ako su zadovoljena sledeća dva uslova:

(i) Ne postoji dolazni hiperluk od $\widehat{H}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{ne}}$ u S.

(ii) Ne postoji odlazni hiperluk od $\widehat{H}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{da}}$ u S ∪ K.

Dokaz. Neka je [S, S∪K] jako povezano u Γ. Po definiciji dolaznog i odlaznog luka treba pokazati da je [S, S∪K] Boolean-ova terminalna klasa ako i samo ako za S’⊆N\S i $i \in S$, S' nije ne- uticajno za i i za sve S' ⊆ S∪K i $i \notin$ S∪K, S' nije da- uticajno za sve i (uslov (*)). Proces dokazivanja obuhvata posebno posmatranje potrebnog i dovoljnog dela, detaljan dokaz se može pronaći u [12]. □

Sledeći primer ilustruje da bez pretpostavke o jakoj povezanosti teorema 4 ne važi.

Primer 22. [12] Neka je N={1, 2, 3, 4, 5} i neka je **A** dato na sledeći način:

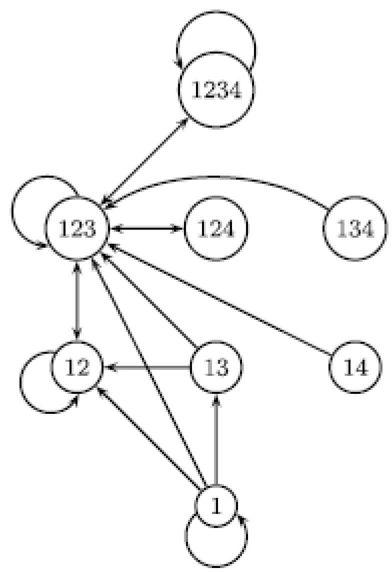
$\mathbf{A}(1_{1}) = (1, x, x, 0, 0)$, $\mathbf{A}(1_{123}) = (1, 1, x, x, 0)$

$\mathbf{A}(1_{12}) = (1, 1, x, 0, 0)$, $\mathbf{A}(1_{124}) = (1, 1, 1, 0, 0)$

$\mathbf{A}(1_{13}) = (1, 1, x, 0, 0)$, $\mathbf{A}(1_{134}) = (1, 1, 1, 0, 0)$

$\mathbf{A}(1_{14}) = (1, 1, 1, 0, 0)$, $\mathbf{A}(1_{1234}) = (1, 1, 1, x, 0)$

gde $x > 0$. Tada [1, 1234] zadovoljava uslov (i) i (ii) ali nije jako povezano u Γ što se i vidi na odgovarajućrm grafu prelaza Γ (slika 8).



Slika 8. [12] Graf prelaza iz kontraprimera.

Teorema 5 pokazuje da je S izolovana grupa koja ne prima ne- uticaj i utiče sa da- uticajem samo na predstavnike u K. Stoga, S ∪ K su na neki način forme (pod)društava kojima vlada S.

Za regularne klase koje nisu Boolean-ove, moguće je dobiti rezultate ako se posmatra „grafski deo“ hipergrafa. Ako se posmatra regularna terminalna klasa oblika $\mathcal{C} = \bigcup_{k=1}^{p}[\mathrm{S_k}, \mathrm{S_k} \cup \mathrm{K_k}]$, sa restrikcijama na $\mathrm{S_k}, \mathrm{K_k}$, moguće je uvesti gornju i donju granicu za $\mathcal{C}$:

$$\mathrm{S}_* = \bigcap_{k=1}^{p} S_k \;, \quad \mathrm{S}^* = \bigcup_{k=1}^{p} (S_k \cup K_k)$$

Jasno, $[\mathrm{S}_*, \mathrm{S}^*] \supseteq \mathcal{C}$. Treba primetiti da je $\mathrm{S}^* \backslash \mathrm{S}_* \neq \emptyset$ jer $\mathcal{C}$ nije singlton, ali i $\mathrm{S}_*=\emptyset$ i $\mathrm{S}^*=\mathrm{N}$ je moguće (slika 6, levo). Ako je $\mathrm{S}_* \neq \emptyset$ i $\mathrm{S}^* \neq \mathrm{N}$, onda se kaže da je klasa normalna.

Lema 4. [12] Ako postoji normalna regularna terminalna klasa sa gornjom i donjom granicom $\mathrm{S}_*, \mathrm{S}^*$, onda podskup S_* nema dolaznih orijentisanih grana u $\mathrm{G}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{ne}}$ i S^* nema odlaznih orijentisanih grana u $\mathrm{G}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{da}}$.

Prethodno daje jednostavan uslov za testiranje postojanja normalne regularne terminalne klase. U cilju dobijanja precizne formulacije uslova, neophodno je definisati zatvaranje za predstavnika i. Pod zatvaranjem u $\mathrm{G}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{ne}}$ za predstavnika $i \in N$, koje se obeležava sa cl(i), podrazumeva se skup predstavnika koje i može dostignuti putem iz $\mathrm{G}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{ne}}$. Važeći dogovor je da $i \in$cl(i).

Sada je moguće formulisati teoremu koja daje egsistenciju normalne regularne klase.

Teorema 6. [12] Neka je **B** proces uticaja baziran na operatorima agregacije **A**. Tada ne postoji normalna regularna terminalna klasa ako za svako i ∈ N, svaki predstavnik izvan zatvaranja cl(i) se može dostići pomoću puta iz cl(i) u $\mathrm{G}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{da}}$.

Dokaz. Dokaz je baziran na Lemi 4 koja nam garantuje da se za svaki par $\mathrm{S}_*, \mathrm{S}^*$, gde $\mathrm{S}_* \neq \emptyset$, $\mathrm{S}^* \neq \mathrm{N}$, $\mathrm{S}_* \subset \mathrm{S}^*$, može se isključiti svaka normalna regularna terminalna klasa koja se ne redukuje na trivijalnu terminalnu klasu. Odnosno, svaki par $\mathrm{S}_*, \mathrm{S}^*$ mora biti isključen po jednom od sledećih pravila:

$\mathcal{R}^{da}$: j da- uticajno za i isključuje svaku regularnu klasu sa gornjom granicom S^*, takvu da je $i \notin \mathrm{S}^*$, $j \in \mathrm{S}^*$ (orijentisana grana izlalzi iz S^* u grafu da- uticaja).

$\mathcal{R}^{ne}$: j ne- uticajno za i isključuje svaku regularnu klasu sa donjom granicom S_* , takvu da je $i \in \mathrm{S}_*$, $j \notin \mathrm{S}_*$ (orijentisana grana ulazi u S_* u grafu ne- uticaja).

Preostaje da se pokaže da pravila $\mathcal{R}^{da}$, $\mathcal{R}^{ne}$ isključuju sve normalne regularne klase ako i samo ako za svakog predstavnika i, svaki predstavnik j van cl(i) može biti dosegnuti pomoću da- puta.

Potreban uslov: pretpostavlja se da postoje $i, j \in$ N tako da se do i ne može dostići pomoću da- puta iz cl(j). Neka je R(i) skup čvorova pomoću do kojih se može doći od i pomoću da-puta. Očigledno je da R(i) ∩ cl(j) = $\emptyset$. Tada je regularna terminalna klasa, sa donjom i gornjom granicom cl(j) , N\R(i), moguća jer cl(j) nije odbačeno na osnovu pravila $\mathcal{R}^{ne}$. Dalje, N\R(i)

može biti odbačeno samo pomoću da- luka koji ulazi u R(i), što je kontradikcija sa definicijom R(i).

Dovoljan uslov: posmatrajmo sada proizvoljnu regularna klasa sa granicama S_* i S^*. Ako S_* ima dolazni ne- luk, odbacuje se na osnovu pravila $\mathcal{R}^{ne}$. Ako nema dolaznih ne- lukova, tada je to ili zatvaranje nekog predstavnika ili unija zatvaranja (zaista, sa svako $i \in S_*$, S_* mora sadržati cl(i)). Na osnovu polazne pretpostavke, svaki čvor izvan S_* (S^*) je povezan sa S_* pomoću da-puta. Pošto je $N \backslash S^*$ neprazno na osnovu pretpostavke o normalnosti, za bilo koji čvor i iz $N \backslash S^*$, postoji da- put iz S_* do i, pa zato je neophodno da da- luk izlazi iz S^*, te S^* biva odbačeno na osnovu pravila $\mathcal{R}^{da}$. □

Na osnovu prethodnog može se zaključiti da razlikujemo dva jednostavna slučaja sa uticajnim predstavnicima kada ne postoje regularne terminalne:

- kada su ili $G_{\mathbf{A}}^{da}$ ili $G_{\mathbf{A}}^{ne}$ jako povezani (Teorema 6);
- kada postoji jedan predstavnik koji je ne-uticajan za sve predstavnike, uključujući i samog sebe.

Jaka povezanost za $G_{\mathbf{A}}^{da}$ ili $G_{\mathbf{A}}^{ne}$ znači da su svi predstavnici da- ili ne- uticajni na sve druge predstavnike. Takođe, ako je jedan predstavnik uticajan na sve ostale, u nekom trenutku se dostiže konsenzus spram njegovog mišljenja.

5.1.3. Ciklične terminalne klase

Ciklične terminalne klase nisu ono što donosioci odluke žele, jer ne dolazi do konvergencije mišljenja, te upravo zbog toga fokus je pronalaženju dovoljnog uslova da se izbegnu.

Tvrđenje 6. [12] Neka je **B** proces uticaja baziran na operatorima agregacije **A**. Tada, ciklične klase ne postoje, ako je jedan od sledećih uslova zadovoljen:

(i) Postoji $j \in$ N, takvo da A_j prima vrednosti 0 i 1 samo za $\emptyset$ i N.
(ii) Postoji $j \in$ N, takvo da su svi predstavnici da- i ne- uticajni za j.
(iii) i je da- i ne- uticajno za i, za sve $i \in$ N.

Dokaz. Potrebna je sledeća lema da bi se dokazalo tvrđenje 6 (iii). Lemu navodimo bez dokaza, a on se može naći u [12].

> **Lema 5. [12]** *Ako postoji ciklična klasa sa uzastopnim S_1, S_2. Tada A_i ne može imati ne-uticajnog igrača $j \in N \backslash S_1$ ako $i \in S_2$ ili da- uticajnog igrača $j \in S_1$ ako $i \notin S_2$.*

Sada je moguće dokazati sva tri dela tvtđenja.

(i) Zbog A_j, nijedan skup $S \neq \emptyset$, N, nema prelaz u skup T sa verovatnoćom 1, što isključuje postojanje cikličnosti.

(ii) Ako su svi predstavnici da- i ne- uticajni u A_j, tada je $0 < A_j\ (1_i) < 1$ za sve $i \in N$. Zaista, $1 = A_j\ (1_i) \leq A_j\ (1_{N\setminus k})$ za sve $k \neq i$, što je u kontradikciji sa činjenicom da je k ne- uticajno u A_j. Slično, $0 < A_j\ (1_{N\setminus i}) < 1$ važi za sve $i \in N$. Sledi na osnovu monotonosti da je $A_j\ (1_S) \neq \emptyset, 1$ za sve $S \neq \emptyset$, N, što na osnovu (i) dokazuje traženo.

(iii) Na osnovu leme 5 se zna da i da- ili ne- uticajno u A_i isključuje cikličnost u kome su S_1, S_2 uzastopni tako da $S_1 \ni i$ ili $S_1 \not\ni i$ i $S_2 \ni i$. S obzirom da S_1, S_2 nisu uporedivi, odbacuje se $S_1=\{i\}$, kao i $S_1=N\setminus i$. Neka $S_1 \subset N$, $S_1 \neq \emptyset$. Tada je $S_2= L \cup T$, gde $L \subseteq N\setminus S_1$, $L \neq \emptyset$ i $T \subseteq S_1$. Neka $i \in S_1$. Činjenica da je i uticajno u A_i zabranjuje $T \not\ni i$ za sve L. S obzirom da ovo važi za sve $i \in S_1$, sledi da nijedno T nije moguće, pa samim tim ni S_2. □

U daljem radu posmatraju se Boolean-ovi operatori agregacije.

Teorema 7. [12] Neka je **A** Boolean-ova i neka je $\{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ ciklična klasa. Tada postoji hiperkontura dužine rk, za neki prirodan broj r, među predstavnicima iz $S_1 \cup \ldots \cup S_k$ u da-uticajnom hipergrafu H_A^{da}.

Dokaz. Neka je $\mathcal{C} = \{S_1, \ldots, S_k\}$ ciklična klasa tako da je $S_{k+1}=S_1$ u grafu prelaza. S obzirom na to da su skupovi neuporedivi, moguće je uočiti neko $j_{k,1} \in S_k\setminus S_1$. Po uslovu teoreme, posmatrani operatori agregacije imaju 0-1 vrednosti, a kako je $A_{j_{k,1}}(1_{S_{k-1}}) = 1$, postoji $C_{k-1,1} \subseteq S_{k-1}$ koje je uticajno na $j_{k,1}$. Treba naglasiti da je nemoguće $C_{k-1,1} \subseteq S_{k-1} \cap S_k$, jer bi postojanje takvog skupa dovelo do $1 = A_{j_{k,1}}(1_{C_{k-1,1}}) \leq A_{j_{k,1}}(1_{S_k})$, što je u kontradikciji sa činjenicom da je prelaz iz S_k u S_1 siguran. Sada, neka $j_{k-1,1} \in C_{k-1,1}\setminus S_k$.

Potpuno analogno zaključujemo da postoji $C_{k-2,1} \subseteq S_{k-2}$ koje je uticajno na $j_{k-1,1}$. I tako redom do skupa S_1, što označavamo na sledeći način:

$$C_{1,1} \longrightarrow j_{2,1} \in C_{2,1} \longrightarrow j_{3,1} \in C_{3,1} \longrightarrow \ldots C_{k-2,1} \longrightarrow j_{k-1,1} \in C_{k-1,1} \longrightarrow j_{k,1}.$$

S obzirom na to da je prethodnik od S_1 u posmatranoj cikličnoj klasi baš S_k, postoji i skup $C_{k,2} \subseteq S_k$ koji je uticajan na neko $j_{1,1}$ izabrano iz $C_{1,1}\setminus S_2$. Ako se pretpostavi da je $j_{k,1} \in C_{k,2}$, dobija se

$$j_{k,1} \in C_{k,2} \longrightarrow j_{1,1} \in C_{1,1} \longrightarrow j_{2,1} \in C_{2,1} \longrightarrow j_{3,1} \in C_{3,1} \longrightarrow \ldots C_{k-2,1} \longrightarrow j_{k-1,1} \in C_{k-1,1} \longrightarrow j_{k,1}$$

što je kontura hipergrafa H_A^{da} dužine k. Ako se pretpostavi suprotno, da $j_{k,1} \notin C_{k,2}$, tada se bira neko $j_{k,2} \in C_{k,2} \setminus S_1$ i onda postoji skup $C_{k-1,2} \subseteq S_{k-1}$ koji utiče na $j_{k,2}$. Ako je $j_{k-1,1} \in C_{k-1,2}$, opet se dobija kontura dužine k. Ukoliko se pretpostavi da nije tako i nastavi procedura pravljenjem skupova $C_{i,\ell} \subseteq S_i$ i biranjem elementa $j_{i,\ell}$ iz $C_{i,\ell} \setminus S_i$ koji je različit od prethodnih $j_{i,\ell-1}$, ... , $j_{i,1}$. Zbog konačnosti skupova $S_i \setminus S_{i+1}$ za sve i = 1, ... , k, u nekom trenutku se mora desiti $C_{i,\ell} \ni j_{i,\ell'}$, za $\ell' < \ell$, te dobijamo kontura dužine (ℓ - ℓ') k. □

Prethodna teorema pokazuje da postojanje kontura u tranzicionom grafu osigurava postojanje hiperkonturaa u da- uticajnom hipergrafu. Uslov nije neophodan, što se i vidi na primeru funkcije uticaja većine. Zaista, tada postoji mnogo kontura u da- uticajnom hipergrafu, iako nema nijedan kontura u prelaznom grafu.

6. Simetrični dekompozabilni modeli

Ovo poglavlje se fokusira na jednu veoma specifičnu klasu operatora agregacije.

Definicija 15. [9] Operator agregacije A_i je dekompozabilni ako su sve da- i ne- uticajne koalicije singltoni. Operator agregacije je simetričan ako ima iste da- i ne- uticajne koalicije.

Za model uticaja koji je baziran na dekompozabilnim operatorima agregacije se kaže da je dekompozabilni model. Takođe, simetrični operatori agregacije daju simetrični model.

Tvrđenje 7. [12] Familija uopštenih težinskih sredina, definisana sa

$$M_f(x_1, \ldots, x_n) = f^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i f(x_i)\right), \qquad (x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n$$

gde je $\omega_i \geq 0$, $i = 1,\ldots,n$, $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$ i f neprekidan automorfizam na [0,1], je familija dekompozabilnih simetričnih operatora agregacije. Predstavnik i je da- uticajan ako i samo ako je ne- uticajan ako i samo ako je $\omega_i > 0$.

Dokaz. Neka je $f(1) = 1$ (za $f(1) = 0$ analogno) i neka je $S \subset N$, $|S| > 1$ da- uticajno. Tada je $M_f(1_S) = f^{-1}(\sum_{i \in S} \omega_i) > 0$, što je ekvivalentno sa $\sum_{i \in S} \omega_i > 0$.

S druge strane, za svako $i \in S$ je $M_f(1_i) = f^{-1}(\omega_i) = 0$, šti je ekvivalentno sa $\omega_i = 0$, te se dobija kontradikcija. Slično se može pokazati da nijedna koalicija veličine veće od 1 nije ne- uticajna.

Dakle, dobija se sledeće:

$$i \text{ je da- uticano akko } f^{-1}(\omega_{\mathrm{i}}) > 0 \text{ akko } \omega_{\mathrm{i}} > 0 \text{ akko } \sum_{j \neq i} \omega_{\mathrm{j}} < 1$$

$$\text{akko } f^{-1}(\sum_{j \neq i} \omega_{\mathrm{j}}) < 1 \text{ akko je } i \text{ ne- uticajno.} \qquad \square$$

Kada je f=Id, dobija se baš aritmetička sredina sa težinama koja je korišćena u modelu iz 1974. godine (videti [1]). Drugim rečima, prethodno tvrđenje jeste uopštenje i unapređenje poznatog rezultata.

Dalji rezultati se odnose na simetrčne dekompozabilne operatore agregacije. Graf uticaja je sada označen sa G, dok je se G^0 označen graf koji odgovara grafu G ali bez orijentacije grana. Orijentisan grana iz j u i u G je označena sa j ⟶ i. U ovom slučaju formulacija teoreme 3 postaje znatno jednostavnija:

$\tilde{b}_{\mathrm{S,T}} = 1$ ako i samo ako

$$\begin{cases} \forall\, i \in T, \exists\, j \in S \; tako\; da \; \mathrm{j} \longrightarrow \mathrm{i} \text{ u G;} \\ \forall\, i \notin T, \exists\, j \notin S \; tako\; da \; \mathrm{j} \longrightarrow \mathrm{i} \text{ u G} \end{cases} \quad (6)$$

Iz (6) sledi da za svako S, T ∈ 2^{N} važi sledeća ekvivalencija

$$\tilde{b}_{\mathrm{S,T}} = 1 \Leftrightarrow \tilde{b}_{\mathrm{N \setminus S, N \setminus T}} = 1. \quad (7)$$

Centralni rezultat za simetrične dekompozabilne modele je dat narednom teoremom.

Teorema 8. [12] Svaki simetričan dekompozabilni model je kvalitativno ekvivalentan jedinstvenom modelu baziranom na aritmetičkim stredinama sa težinama. Obrnuto, svaki model baziran na aritmetičkim sredinama sa težinama je kvalitativno ekvivalentan nekom simetričnom dekompozabinom modelu.

Dokaz. Neka je **A** simetričan dekompozicioni model i neka je Γ njegov graf prelaza (ekvivalentan njegovoj redukovanoj matrici $\widetilde{\mathbf{B}}$). Neka je sa $s\mathcal{DB}$(N) označen skup redukovanih matrica prelaza simetričnog dekompozabilnog modela na N. Dokaz teoreme je baziran na sledeća dva tvrđenja koja impliciraju postojanje jedan-na-jedan preslikavanja između $s\mathcal{DB}(N)$ i skupa digrafova u N.

> **Tvrđenje 8. [12]** *Dve različite matrice* $\widetilde{\boldsymbol{B}}, \widetilde{\boldsymbol{B}'}$ *iz* $s\mathcal{DB}$ *indukuju dva različita grafa prelaza G, G'* .
>
> **Tvrđenje 9. [12]** *Dva različita grafa prelaza G, G', odgovaraju dvema redukovanim matricama* $\widetilde{\boldsymbol{B}}, \widetilde{\boldsymbol{B}'}$ *iz* $s\mathcal{DB}$.

Dalje, veza između simetričnih dekompozabilnih modela i familije $s\mathcal{DB}(N)$ daje tvrđenje teoreme. Detaljan dokaz se može pronaći u [12]. $\square$

Iz prethodnog se može zaključiti da su terminalne klase za simetrične dekompozabilne modele su direktnoj vezi sa modelima baziranim na aritmetičkim sredinama sa težinama. Postojanje terminalnih stanja je lako proveriti koristeći: S$\neq \emptyset$, N je netrvijalno terminalno stanje ako i samo ako je S povezana komponenta u G^0 i netrivijano terminalna stanja ne postoje ako i samo ako je G^0 povezano.

Sledeća teorema daje uslove za postojanje Boolean-ove terminalne klase.

Teorema 9. [12] Neka je dat simetričan dekompozabilni model. Neka su S,K$\neq \emptyset$, S∪K≠N. Tada, [S, S∪K] je Boolean-ova terminalna klasa ako G zadovoljava sledećih šest uslova:

(i) Podgraf S nema dolaznih orijentisanih grana;
(ii) Svako $i \in$ K ima orijentisanu granu j⟶ i za neko j∈ S;
(iii) Svako $i \in$ S ima orijentisanu granu j⟶ i sa j∈ S;
(iv) Podgraf N\ (S∪K) nema dolaznih orijentisanih grana;
(v) Svako $i \in$ K ima orijentisanu granu j⟶ i za neko j∈ N\ (S∪K);
(vi) Svako $i \in$ S ima orijentisanu granu j⟶ i sa j∈ N\ (S∪K).

Dodatno, ako je [S, S∪K] Boolean-ova terminalna klasa, tada važi (i), (iii), (iv) i (vi), i

(vii) za svako $i \in$ K, postoji put iz S u i i put iz N\ (S∪K) u i .

Dokaz. Za dokaz je potrebna naredna lema koja se navodi bez dokaza.

> **Lema 6. [12]** *Neka je dat simetričan dekompozicioni model. Tada za svako $\emptyset \neq S \subset N$, svako $\emptyset \neq K \subset N\backslash S$, $[S, S \cup K]$ je Boolean- ova terminalna klasa ako i samo ako je $[N(S \cup K)\,, N\backslash S]$ Boolean- ova terminalna klasa.*

Prvo pokazujemo dovoljne uslove, tj neka je (i)-(vi) zadovoljeno. Dokazuje se da je [S,S∪K] jako povezano u grafu prelaza Γ. Dovoljno je pokazati da je $b_{T,T'} > 0$ za svako T, T' ∈ [S, S∪K]. Na osnovu (6), treba pokazati da (a) svako $i \in$ T' ima dolaznu granu iz T i (b) svako $i \in$ N\T' ima dolaznu granu iz N\T.

(a) T i T' sadrže S i možda elemente iz K. Za $i \in$ S, na osnovu uslova (iii), i ima dolaznu granu iz S, pa i iz T. Za $i \in$ K se koristi uslov (ii).

(b): N\T' i N\T sadrže N\(S ∪ K) i možda elemente iz K. Za sve $i \in$ N\(S ∪ K), postoji dolazna grana iz N\(S ∪ K), na osnovu (vi). Nakon toga se gleda $i \in$ K ∩ (N\T'), koje takođe ima granu iz N\(S ∪ K) na osnovu (v).

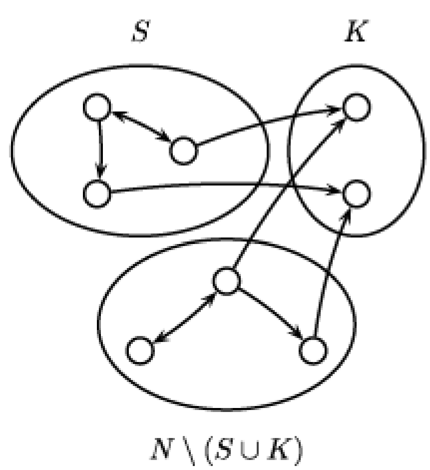
Odnosno, [S,S∪K] je jako povezano. Ostaje da se dokaže da ne postoje dolazne grane u S i nema odlazlih grana iz $S \cup K$. Ovi uslovi su zadovoljeni na osnovu (i) i (iv). Sad, na osnovu teoreme 5 sledi tvrđenje.

Sada prelazimo na potrebne uslove. Na osnovu teoreme 5 i leme 6 se zna da su (i) i (iv) potrebni uslovi.

Dalje, neka $i \in$ S ima dolaznu granu iz S. Tada je $b_{S,T} = 0$ za sve T ∈ [S,S∪K] jer iz $b_{S,T} > 0$ sledi da svako $i \in$ S ima dolaznu granu iz S (na osnovu (4)). Dakle, [S,S∪K] nije klasa, jer nije jako povezano. To pokazuje da je (iii) potreban uslov. Za uslov (vi) potrebnost se pokazuje analogno.

Ostaje jos da se pokaže da je i uslov (vii) potreban. Definiše se K_0 (može biti prazan) skup elemenaza iz K koji su povezani sa S nekim putem. Neka je $K \backslash K_0 \neq \emptyset$, tj. postoje elementi u K koji nisu povezani sa S. Sada se tvrdi se da ne postoji prelaz iz nekog T iz $[S, S \cup K_0]$ u neko T' iz [S, S∪K] koje sadrži element $K \backslash K_0$. Dovoljno je da se pokaze da [S, S∪K] nije klasa. Zaista, kada bi takav prelaz postojao, na osnovu (6), postojala bi orijentisana grana $k \longrightarrow j$ sa j $\in K_0$ i $k \in K \backslash K_0$. Takva grana ne može postojati na osnovu definicije K_0. Zato je neophodno da $K_0 = K$, te na osnovu leme 6, dobija se da je (vii) potreban uslov za $N \backslash (S \cup K)$. □

Konfiguracija grafa uticaja koji zadovoljava šest uslova je ilustrovana na slici 9.



Slika 9. [12] Primer strukture grafa uticaja koji ima Boolean-ovu terminalnu klasu.

Sledi skica empirijskog primera baziranog na savetodavnoj mreži (eng. advice network) Krackhardt [11].

Primer 23. [12]

Sakupljani su podaci menadžera male firme iz Britaniji (100 zaposlenih i 21 menadžer) o tome ko je od koga tražio savete. Baziran na ovim podacima, Jackson [8] je razvio matricu socijalnog uticaja. On je pokazao da menadžeri teže ka istom mišljenju u [0,1]. Problem se može posmatrati na drugi način ako se uzimaju informacije vezane za uticaj među menadžerima koje su prikupljene u Krackhardt-ovoj savetodavnoj mreži.

Sada se posmatraju grafovi konsenzusne strukture, što znači da postoji orijentisana grana od menadžera i do menadžera j ako postoji većina ljudi koji misle da i traži savet od j. Pretpostavlja se da postoje samo uticajni predstavnici i neuticajne koalicije, da predstavnik i traži savet od predstavnika j (što znači da j utiče na i) i da ne postoji način za razlikovanje da- i ne- uticaja. Sledi da postoji situacija koja je predstavljena u simetričnom dekompozabilnom modelu i da je graf uticaja jednostavno graf konsenzusne strukture, sa svim lukovima. Može se pretpostaviti da svaki predstavnik uključuje i svoje mišljenje u ozbir, što znači da svaki čvor grafa ima petlju.

Ako se analizira konvergencija modela koristeći prethodne rezultate. Prvo, ne postoje netrivijanla terminalna stanja zato što je G^0 povezano. Takođe, ne postoji ciklična klasa koja nastaje zbog prisustva petlji na čvorovima.

Detaljnom analizom se može zaključiti da ne postoji nijedna normalna regularna terminalna klasa. Detalja obrada ovog problema je data u [12].

Zaključak

Ideja o agregacionom modelu, gde svaki predstavnik sakuplja mišljenja drugih, nije nova. Može se naći i u DeGroot-ovom modelu [1].

U ovom modelu, mišljenje predstavnika i u vremenu t je broj $a_i(t) \in [0,1]$. Svaki predstavnik i sakuplja mišljenja ostalih predstavnika pomoću težinske sume $\sum_j \omega_j^i\ a_j(t)$. Vektor mišljenja **a**(t+1) u vremenu t+1 dat sa **a**(t+1)=**Wa**(t), gde je **W**=$[\omega_j^i]_{i,j\in N}$ matrica težinskih koeficijenata.

Pošto je **W** po vrstama stohastička matrica, proučavanje konvergencije mišljenja se oslanja na rezultate stohastičkih matrica i pokazano je da pod blagim uslovima svi predstavnici teže ka istom mišljenju $\alpha \in [0,1]$. U tom modelu proces nije stohastički s obzirom da je mišljenje svakog predstavnika čisto determinističko. Suprotno tome, model predstavljen u ovom radu jeste stohastički i svi predstavnici imaju samo dva moguća mišljenja (da ili ne). Verovatnoća da kaže "da", za datog predstavnika u narednom koraku, je dobijena pomoću agregacije mišljenja svih predstavnika ("da" je kodirano kao 1 i "ne" kao 0). Konvergencija procesa je vođena stohastičkim procesom, tj. lancima Markova.

Model prikazan u radu pokriva mnogo postojećih modela s obzirom da dozvoljava korišćenje proizvoljne agregacione funkcije.

Treba primetiti da bi agregacioni model mogao biti prilično koristan u praktičnim situacijama, pošto se uticaj u grupi predstavnika može modelirati samo na osnovu posmatranja.

Bilo bi nerazumno da se pretpostavi da su operatori agregacije koje u suštini i koriste predstavnici pozati: to bi značilo da je za svakog predstavnika vrsta operatora agregacije poznata, kao njegovi parametri. Predstavnici deluju nesvesno i nemaju osećaj da se na njih utiče. Teško je imati neko saznanje o njihovoj korelaciji. Sa druge strane, određivanje uticajnih koalicija deluje moguće i mnogo jednostavnije od sakupljanja saznanja ko na koga utiče i shodno tome mogu se utvrditi uticajne koalicije, što je od krucijalne pomoći.

Jedino ograničenje kod agregacionog modela je to što su funkcije monotono rastuće, zato reaktivno ponašanje (što više ljudi kaže „da“, više postoji želja da se kaže „ne“) ne može biti modelirano na ovaj način.

Literatura:

[1] DeGroot, M.H., 1974. Reaching a consensus. Journal of the American Statistical Association 69, 118-121

[2] DeMarzo, P., Vayanos, D., Zwiebel, J,. 2003. Persuasion bias, social influence and unidimensional opinions. Quarterly Journal of Economics 118, 909-968

[3] Dragan Mašulović, Odabrane teme diskretne matematike, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, 2006.

[4] Dragoš M. Cvetković, Slobodan K. Simić , Odabrana poglavlja iz diskretne matematike, Akademska misao, Beograd, 2012.

[5] Endre Pap, Fazi mere i njihova primena, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, 1999.

[6] Hu, X., Shapley, L.S., 2003a. On authority distributions in organizations: equilibrium. Games and Economic Behaviour 45, 132-152

[7] Hu, X., Shapley, L.S., 2003b. On authority distributions in organizations: controls. Games and Economic Behaviour 45, 153-170

[8] Jackson, M.O., 2008. Social and Economic Networks. Princeton University Press.

[9] Krackhardt, D., 1987. Cognitive social structures. Social Networks 9, 109-134

[10] Marcin Detyniecki, Fundamentals on Aggregation Operators, University of California, Berkeley, United Sates of America, 2001.

[11] Michael Grabisch, Agnieszka Rusinowska , Influence functions, followers and command games, Games and Economic Behaviour (2011.) 123-138

[12] Michel Grabisch, Agnieszka Rusinowska. A Model of Influence Based on Aggregation Function. Mathematical Social Sciences, Elsevier, 2013, pp.316-330.

[13] Michael Grabisch, Agnieszka Rusinowska, A model of influence in a social network. Theory Dec. 69, 69-96, 2010.

[14] Michael Grabisch, Marichal, J.-L., Mesiar, R., Pap, E., Aggregation Functions, In: Encyclopedia od Mathematics and its Applications, vol. 127. Cambridge University Press, 2009.

[15] Pauše, Ž., Vjerojatnost, informacija-stohastički procesi, Školska knjiga , Zagreb, 1985.

[16] http://en.wikipedia.org/wiki/Hypergraph

Biografija

Tanja Simeunović je rođena 17.07.1989. godine u Tuzli, Bosna i Hercegovina. 2004. godine je završila Osnovnu školu “Jovan Dučić” u Bijeljini kao nosilac “Vukove diplome”. Paralelno sa osnovnom školom je pohađala i školu engleskog jezika. Učenje engleskog je nastvavila i tokom srednjoškolskog obrazovanja, gde je dobila zvanične certificate koje dodeljuje Cambridge University. Upisuje Gimnaziju “Filip Višnjić”, opšti smer, koju završava sa odličnim uspehom 2008. godine. Nakon završene srednje škole, odlučuje se za Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu. Na departmanu za matematiku i informatiku se opredelila za smer primenjena matematika- matematika finansija. Na prvoj godini fakulteta dobija nagradu fakulteta i univerziteta za postignut uspeh. Školovanje usavršava na istom smeru upisujući master. 2014. godine je položila sve ispite predviđene nastavnim planom i programom, čime je stekla uslov za odbranu master rada.

Ključna dokumentacija

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: *Monografska dokumentacija*
TD

Tip zapisa: *Tekstualni štampani materijal*
TZ

Vrsta rada: *Master rad*
VR

Autor: *Tanja Simeunović*
AU

Mentor: *dr Ivana Štajner-Papuga*
MN

Naslov rada*: Agregacione funkcije kao funkcije uticaja*
NR

Jezik publikacije: *srpski (latinica)*
JP

Jezik izvoda: *s /en*
JI

Zemlja publikovanja: *Republika Srbija*
ZP

Uže geografsko područje: *Vojvodina*
UGP

Godina: *2015.*
GO

Izdavač: *Autorski reprint*
IZ

Mesto i adresa: *Prirodno- matematički fakultet, Novi Sad, Trg D. Obradovića 4*
MA

Fizički opis rada: (6/62/1/7/9/0/0)
FO (broj poglavlja, strana, lit.citata, tabela, slika, grafika, priloga)

Naučna oblast: *Matematika*
NO

Naučna disciplina: *Primenjena matematika*
ND

Predmetne odrednice, ključne reči*: funkcije uticaja, funkcije sledbenika, donji i gornji inverz, komandna igra, komandna funkcija, minimalan skup koji opisuje komandnu igru*
UDK

Čuva se: *U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku*
ČU

Važna napomena: *Nema*
VN

Izvod: *Ovaj rad poredi dva pojma: model uticaja i komandnih igara. U modelu uticaja odluka igrača može biti drugačija od prvobitne sklonosti. Takođe se proučava i veza između funkcije uticaja i funkcije sledbenika. Daje se potreban i dovoljan uslov da bi funkcija bila funkcija sledbenika i opisana je struktura skupa funkcija uticaja koji vodi do date funkcije sledbenika. Jedan od centralnih pojmova je i pojam komandne igre. Drugi deo rada se bavi dinamičnim modelom uticaja u kome predstavnici donose da-ne odluku. Svaki predstavnik ima inicijalno mišljenje koje može promeniti tokom različitih faza interakcije. Proučava se model uticaja baziran na agregacionim funkcijama.*

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: *11. 02. 2014.*
DP

Datum odbrane: 2015.
DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik: *Dr Arpad Takači, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu*
Član: *Dr Nataša Spahić, docent Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu*
Mentor: *Dr Ivana Štajner-Papuga, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu*

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF NATURAL SCIENCES & MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: *Monograph documentation*
DT

Type of record: *Textual printed material*
TR

Contents code: *Master thesis*
CC

Author: *Tanja Simeunović*
AU

Mentor: *Dr Ivana Štajner-Papuga*
MN

Title: *Aggregation functions as influence functions*
TI
Language of text: *Serbian (Latin)*
LT

Language of abstract: *en/s*
LT

Country of publication: *R Serbia*
CP

Locality of publication: *Vojvodin*a
LP

Publication year: *2015*.
PY

Publisher: *Author's reprint*
PU

Publ. place: Faculty of Natural Sciences and *Mathematics, Novi Sad, Trg D. Obradovića 4*
PP

Physical description: (6/62/1/7/9/0/0)
PD

Scientific field: *Mathematics*
SF

Scientific discipline: *Applied Mathematics*
SD

Subject Key words: influence function, follower function, lower and upper inverses, kernel, command game, command function, minimal sets generating a command game
SKW
UC

Holding data: *Library of the Department of Mathematics and Computer Sciences*
HD

Note: *None*
N

Abstract: *This paper compare two frameworks: a model of influence, and command games. In the influence model the decision of a player may be different from his inclination. The relation between influence function and follower function is also studied. Sufficient and necessary conditions are delivered for a function to be a follower function and the structure of the sets of all influence functions that lead to a given follower function is described. One of the central concepts of this model is the concept of command function. The second part of the paper concerns a dynamic model of influence in which agents make a yes-no decision. Each agent has an initial opinion which he may change during different phases of interaction. The model of influence based on aggregation function is investigated.*
AB

Accepted on Scientific board on: *11. 02. 2014.*
AS

Defended: *2015.*
DE

Thesis Defend board:
D
President: *Dr Arpad Takači, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad*
Member: *Dr Nataša Spahić, docent, Faculty of Sciences, University of Novi Sad*
Mentor: *Dr Ivana Štajner-Papuga, associate professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad*