



Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku



Tanja Dukić

Dobra-definisanost sistema od 4 jednačine koji opisuje protok dva fluida u niskom režimu Mach-ovog broja

Master teza

2018, Novi Sad

Sadržaj

Predgovor	3
1 Pregled glavnih definicija i teorema	4
1.1 L^p prostori	4
1.2 Prostori Soboljeva	5
1.3 Preliminarne leme	7
2 Model	10
2.1 4-LMNC Model	12
2.2 Konzervacija mase	15
3 Hodge-ova dekompozicija	18
3.1 Lax-Milgram-ova teorema	20
4 Glavna teorema i struktura dokaza	22
4.1 Opšti pristup	22
4.2 Iterativni sistem	23
4.3 Glavna teorema	24
5 Rad i proračuni jednačina sistema	26
5.1 Postojanje i jedinstvenost jakog rešenja transportne jednačine sa promenljivom funkcijom f	26
5.1.1 Ocena energije nižeg reda za ρ i α	29
5.1.2 Kontrakcija za ρ i α	31
5.2 Rešavanje eliptične jednačine	32
5.3 Rešavanje linearizovane nestišljive Navier-Stokes-ove jednačine	33
6 Zaključak	41

<i>SADRŽAJ</i>	2
Dodatak Dodatak	41
Dodatak A Detalji za transportnu jednačinu	42
Dodatak B Diferencijalni identiteti	47
Literatura	48
Kratka biografija	51

Predgovor

Parcijalne diferencijalne jednačine opisuju mnogih fizičkih procesa. Spisak primena PDJ je veoma dug, ali u ovom master radu bavimo se sa nekoliko tipova PDJ koji opisuju sistem koji modelira protok fluida u nuklearnom reaktoru.

Ova teza je napisana tokom letnjeg semestra koji je bio deo istraživanja mojih master studija u Parizu.

Veliku zahvalnost dugujem mentorima iz Pariza, B'er 'enice Grec i Yohan-u Penel-u na interesantnom problemu za istraživanje i nesebičnom vremenu koje su proveli u radu sa mnom, ali i svim ljudima sa Univerziteta u Novom Sadu i iz laboratorije MAP5, koji su bili deo ovog projekta. Posebno, zahvaljujem prof. Marko Nedeljkovu koji mi je pružio priliku da učestvujem u ovom projektu.

Takođe bih želela da se zahvalim svom mentoru u Srbiji, dr Marko Nedeljkovu, za njegovu podršku u radu i savete koji su mi pomogli tokom studija i zato što je nesebično delio svoje znanje, kako matematičko tako i životno. Zahvaljujem se i dr Nataši Krejić, dr Danijeli Rajter-Ćirić, dr Nataši Krklec-Jerinkić i dr Ivani Vojnović što su uvek bile voljne da mi pomognu kada sam se suočila sa problemima tokom svojih osnovnih i master studija.

* * * * *

Na kraju, ali ne najmanje bitno najveću zahvalnost dugujem roditeljima, sestri Sanji i mom momku Pavlu za njihovu moralnu podršku i bezuslovnu ljubav.

Glava 1

Pregled glavnih definicija i teorema

U ovom Poglavlju date su osnovne definicije i osobine prostora Soboljeva, koji imaju opštu ulogu u ovoj tezi. Ovi prostori su definisani preko L^p , tako da su i oni opisani u prvom delu rada. Svi rezultati ovog poglavlja dati su u literaturi.

1.1 L^p prostori

Označimo sa Ω otvoreni podskup od \mathbb{R}^n . Pod merljivom funkcijom podrazumevamo ekvivalentnu klasu merljivih funkcija na Ω koji se razlikuju samo na podskupu mera nula.

Definicija 1.1.1

Neka je $1 < p < \infty$, $p \in \mathbb{R}$. $L^p(\Omega)$ je prostor svih merljivih funkcija $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, za koje važi $\int_{\Omega} |u|^p ds < \infty$.

$$\|u\|_{L^p} = \|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u|^p ds \right)^{\frac{1}{p}}$$

je norma u $L^p(\Omega)$ za $1 \leq p < \infty$.

Definicija 1.1.2

$L^2(\Omega)$ predstavlja prostor integrabilnih funkcija iz Ω u \mathbb{R} . U L^2 definišemo normu

$$\|u\|_{L^2}^2 = \int_{\Omega} |u|^2 ds.$$

Napomena 1.1.3 Osim kada ne naznačimo drugačije, norma $\|\cdot\|$ predstavljaće L^2 normu.

Definicija 1.1.4

$L^\infty(\Omega)$ predstavlja prostor integrabilnih funkcija $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ takvih da postoji konstanta C takva da

$$|u(x)| \leq C,$$

skoro svuda na Ω . U L^∞ definišemo normu

$$\|u\|_{L^\infty} = \|u\|_\infty = \inf\{C : |u(x)| \leq C, \text{ skoro svuda na } \Omega\}.$$

Teorema 1.1.5 (Osobine L^p prostora, [6])

1. $L^p(\Omega)$ je vektorski prostor za $1 \leq p \leq \infty$.
2. $L^p(\Omega)$ je Banahov prostor za $1 \leq p \leq \infty$.
3. $L^p(\Omega)$ je refleksivan za $1 < p < \infty$.
4. $L^p(\Omega)$ je separabilan za $1 \leq p < \infty$.

Teorema 1.1.6 ([6])

Prostor $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ je gust u $L^p(\mathbb{R}^n)$ za $1 \leq p < \infty$.

Teorema 1.1.7 (Teorema o inkluziji L^p prostora, [6])

Neka je $\int_{\Omega} dx = \mu(\Omega) < \infty$ i $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Ako je $u \in L^q(\Omega)$ onda $u \in L^p(\Omega)$ i

$$\|u\|_p \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|u\|_q,$$

onda možemo da kažemo da važi sledeće

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega).$$

Ako je $u \in L^\infty(\Omega)$, onda

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|u\|_p = \|u\|_\infty.$$

Konačno, ako je $u \in L^p(\Omega)$ za $1 \leq p < \infty$ i ako postoji konstanta K takva da za sve p važi

$$\|u\|_p \leq K,$$

onda je $u \in L^\infty$ i važi

$$\|u\|_\infty \leq K.$$

1.2 Prostori Soboljeva

U ovom Poglavlju definisaćemo prostore Soboleva u Ω . Za više detalja pogledajte Robert A. Adams [6].

Neka je dat otvotvoren skup $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, ograničen ili neograničen, i neka je $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$.

Definicija 1.2.1

Neka je $m \in \mathbb{N}$ i $1 \leq p \leq \infty$. U odnosu na normu $\|\cdot\|_{m,p}$ definišemo

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\|u\|_{m,\infty} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_\infty,$$

gde je D^α parcijalni izvod u distributivnom smislu:

$$D^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

i α predstavlja multi-index $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Definisaćemo prostore Soboljeva na sledeći način

- (a) $H_{m,p}(\Omega)$ je kompletiranje prostora $u \in C^m(\Omega) : \|u\|_{m,p} < \infty$ u odnosu na normu $\|\cdot\|_{m,p}$.
- (b) $W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \text{ za } 0 \leq |\alpha| \leq m\}$.
- (c) $W_0^{m,p}(\Omega)$ je zatvaranje prostora $C_0^\infty(\Omega)$ u prostor $W^{m,p}(\Omega)$.

Za $p = 2$, definišemo prostor

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).$$

Jasno, važi

$$W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega), \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Moguće je pokazati da za svako $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ važi

$$H^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega).$$

Teorema 1.2.2 (Osobine prostora Soboljeva, [6])

1. $H^{m,p}(\Omega)$ je separabilan za $1 \leq p < \infty$.
2. $H^{m,p}(\Omega)$ je refleksivan za $1 < p < \infty$.
3. $H^{m,p}(\Omega)$ je Banahov za $1 \leq p \leq \infty$, $m \in \mathbb{N}_0$.
4. $H^{m,2}(\Omega)$ je Hilbertov prostor, sa skalarnim proizvodom $(u, v)_m^{[1]} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)$.

Teorema 1.2.3 (Teorema o tragu, [11])

Neka je Ω ograničena i neka je rub $\partial\Omega$ klase C^1 . Tada postoji jedinstveni linearan operator

$$T : W^{1,p}(\Omega) \mapsto L^p(\partial\Omega)$$

takav da

^[1] $(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx$, je skalarni proizvod u $L^2(\Omega)$

- (i) $Tu = u|_{\partial\Omega}$ ako je $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$
and

$$(ii) \|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

za svako $u \in W^{1,p}(\Omega)$, postoji konstanta $C > 0$ koja zavisi samo od p i Ω . Operator T zove se operator traga i kažemo da je Tu trag funkcije u na $\partial\Omega$.

1.3 Preliminarne leme

Lema 1.3.1 (Grönwall-ova lema)

- Neka su f, g i h tri neprekidne funkcije sa pozitivnom funkcijom g , takve da:

$$f(t) \leq \int_0^t g(\tau)f(\tau)d\tau + h(t).$$

Tada ove tri funkcije zadovoljavaju sledeću nejednakost

$$f(t) \leq e^{G(t)} \int_0^t e^{-G(\tau)}g(\tau)h(\tau)d\tau + h(t),$$

gde je funkcija G primitivna funkcija od g .

- Neka su f, g i h tri neprekidne funkcije sa diferencijabilnom funkcijom f , takve da:

$$f'(t) \leq f(t)g(t) + h(t).$$

Tada ove tri funkcije zadovoljavaju sledeću nejednakost

$$f(t) \leq e^{G(t)}(f(0) + \int_0^t e^{-G(\tau)}h(\tau)d\tau),$$

gde sa funkcijom G označavamo primitivnu funkciju od g koja nestaje u 0.

Lema 1.3.2 (Moser-ova nejednakost)

Neka su s_1, s_2 dva broja takva da je $s_1 + s_2 \geq s_0$, gde je $s_0 = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1$ i d je dimenzija prostora. Ako su $f \in H^{s_1}$ i $g \in H^{s_2}$, onda je $fg \in H^{s_3}$ gde je $s_3 = \min\{s_1, s_2, s_1 + s_2 - s_0\}$. Štaviše, tada postoji $C_m(s_1, s_2, d) > 0$ takvo da za sve f i g date u definiciji važi

$$\|fg\|_{s_3} \leq C_m\|f\|_{s_1}\|g\|_{s_2}$$

Napomena 1.3.3 $f, g \in H^k \cap H^{s_0}$:

$$\|fg\|_k \leq C_M(\max\{k, s_0\}, k, d)\|f\|_{\max\{k, s_0\}}\|g\|_k.$$

Lema 1.3.4 (Hölder-ova nejednakost)

Neka je $1 \leq p \leq \infty$ i sa q označiti konjugovani eksponent definisan sa $q = \frac{p}{p-1}$ tj. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ i $u \in L^p(\Omega)$ i $v \in L^q(\Omega)$, tada $uv \in L^1(\Omega)$ i može se reći

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_p \|v\|_q.$$

Za $p = q = 2$ gore navedena lema se svodi na **Cauchy-Schwarz-ovu nejednakost**

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_2 \|v\|_2.$$

Lema 1.3.5 (Young-ova nejednakost)

Neka su $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Tada

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q} \quad (\alpha, \beta > 0) \quad (1.1)$$

Lema 1.3.6 (Posledica Korn-ove nejednakosti)

Neka je Ω ograničen i povezan podskup od \mathbb{R}^2 . Štaviše, prepostavimo da vektor brzine $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)$ nestaje na skupu $\Gamma \subset \Omega$ koji je striktno pozitivne mere. Tada postoji jedinstvena konstanta $C_K > 0$ tako da sledeća nejednakost važi,

$$\int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}) \mathbf{D}(\mathbf{u})^{[2]} = \|\mathbf{D}(\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq C_K \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Lema 1.3.7 (Poincaré's inequality)

Neka je Ω ograničen otvoren podskup od \mathbb{R}^n , tada za $1 \leq p < n$ postoji konstanta C (zavisi samo od p i Ω) takva da

$$\|u\|_{p,\Omega} \leq C \|\nabla u\|_{p,\Omega}, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Lema 1.3.8 (Lemma 2.4, [1])

Za $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}^d$ takvo da $|\alpha| = k$ i $\beta \in \mathbb{N}^d$ takvo da $\beta \leq \alpha$, postoji konstanta $C(|\alpha|, |\beta|, d) > 0$ takva da za sve $f \in H^{\max\{k, s_0\}}$ i $g \in H^k$:

$$\|D^\beta f D^{\alpha-\beta} g\| \leq C(|\alpha|, |\beta|, d) \|f\|_{\max\{k, s_0\}} \|g\|_k.$$

Teorema 1.3.9 (Thm. 5.36, [6])

Neka je Ω oblast u \mathbb{R}^n takav da zadovoljava C^m -uslov regularnosti^[3], i prepostavimo da postoji prost (m, p) -operator ekstenzije E za Ω . Takođe prepostavimo da je $mp < n$ i $p \leq q \leq p^* = \frac{(n-1)p}{(n-mp)}$. Tada

$$W^{m,p}(\Omega) \rightarrow L^q(\partial\Omega). \quad (1.2)$$

Ako je $mp = n$, tada utapanje (1.2) važi za $p \leq q < \infty$.

^[2] $\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u})$

^[3] Pogledaj u Geometric Properties of Domains 4.10, [6]

Teorema 1.3.10 (Thm. 6.3, [6])

Neka je Ω oblast u \mathbb{R}^n . Neka su $j > 0$ i $m \geq 1$ brojevi, i neka je $1 \leq p < \infty$.

Ako Ω zadovoljava jak lokalni Lipšicov uslov^[4], onda je sledeće utapanje kompaktno:

$$W^{j+m,p}(\Omega) \rightarrow C^j(\Omega), \quad (1.3)$$

ako je $mp > n$.

Teorema 1.3.11 (Thm. 7.1, [5])

Neka je $f \in (C, \text{Lip})^{[5]}$ u oblasti D za $(n+1)$ -dimenzionalni (t, x) -prostor, i pretpostavimo da je ψ rešenje od

$$x' = f(t, x) \quad (1.4)$$

na $I : a < t < b$. Tada postoji $\delta > 0$ takvo da za bilo koje $(t, x) \in U$, gde je

$$U : \{a < t < b \mid |x - \psi(t)| < \delta\}$$

postoji jedinstveno rešenje φ od (1.4) na I takvo da $\varphi(t, t, x) = x$. Povrh svega, $\varphi \in C$ na $(n+2)$ -dimenzionalnom skupu

$$V : \{a < t < b \mid (t, x) \in U\}.$$

Teorema 1.3.12 (Thm. 7.2, [5])

Neka su zadovoljene pretpostavke teoreme T.1.3.11 i pretpostavimo da f_x postoji i da je $f_x \in C$ na D . Tada $\varphi \in C^1$ na V , i dodatno važi $\det \varphi(\tau, t, x) = e^{\int_t^\tau \operatorname{tr} f_x(s, \phi(s, t, x)) ds}$.

Teorema 1.3.13 (Teorema o Implicitnoj Funkciji)

Neka su $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ Banach-ovi prostori, $f : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$. Neka je $(a, b) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ takvo da je $f(a, b) = 0$. Neka je \mathcal{G} otvoren skup u $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ koji sadrži tačku (a, b) . Neka je $f \in C^1(\mathcal{G})$ i neka je parcijalni Fréchet-ov izvod $f'_2(a, b)$ izomorfizam od \mathcal{Y} na \mathcal{Z} . Tada postoji okolina \mathcal{U} od a i \mathcal{V} od b takva da za bilo koje $x \in \mathcal{U}$ postoji $y \in \mathcal{V}$ za koje je

$$f(x, y) = 0.$$

Označićemo y sa $\varphi(x)$. Tada $\varphi \in C^1(\mathcal{U})$. S druge strane, ako je $f \in C^k(\mathcal{G})$, $k \in \mathbb{N}$, onda $\varphi \in C^k(\mathcal{U})$.

Teorema 1.3.14 (Lemma 2.6, [1])

Neka je G otvoren skup od \mathbb{R}^d , g je aplikacija na G i g je regularnosti $C^s(G, \mathbb{R}^d)$ i v aplikacija od Ω u G_0 otvorenom i ograničenom tako da je $G_0 \subset G$. Pretpostavljamo da je $v \in H_s(\Omega, \mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$. Tada postoji konstanta $C_{comp}(k, d)$ takva da za svako $\zeta \in \mathbb{N}^d$ tako da je $|\zeta| = k \leq s$:

$$\|D^\zeta g(v)\|_0 \leq C_{comp}(1 + |v|_\infty)^{k-1} \|\nabla v\|_{k-1} \max_{0 < |\gamma| \leq k} \left\{ \left| \frac{\partial^\gamma g}{\partial v^\gamma}(v) \right| : v \in \bar{G}_0 \right\}.$$

^[4]Pogledaj u Geometric Properties of Domains 4.9, [6]

^[5] $f(x, y) \in (X, Y)$ znači da $f \in X$ w.r.t x i $f \in Y$ w.r.t y

Glava 2

Model

Low Mach Nuclear Core (LMNC) model je dobijen pomoću filtriranja akustičnih talasa u dobro poznatom sistemu stišljivih Navier-Stokes-ovih jednačina. Uz pretpostavku da je Mach-ov broj veoma mali, možemo asimptotski razviti stišljive Navier Stokes-ove jednačine u odnosu na Mach-ov broj slično kao u [3]. Tada će LMNC odgovarati redu 0 u tom razvoju.

Sistem LMNC se sastoje od tri veoma povezane jednačine različitog tipa koje zajedno sa graničnim uslovima odgovaraju okviru našeg rada. Upravo tu se javljaju matematičke poteškoće jer se uzimaju u obzir realni granični uslovi za opis jezgra nuklearnog reaktora.

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\beta(h, p_*)}{p_*} \Phi_* \\ \rho(h, p_*)[\partial_t h + \mathbf{u} \cdot \nabla h] = \Phi_* \\ \rho(h, p_*)[\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] + \nabla \mathcal{P} - \nabla \cdot [\mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) + \eta(\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathcal{I}_d] = \rho(h, p_*) \mathbf{g}, \end{cases} \quad (2.1)$$

gde su h , \mathcal{P} entlpija i dinamički pritisak, respektivno. \mathbf{u} je vektor brzine, sa $\rho(h, p_*)$ označavamo gustinu fluida, \mathbf{g} je gravitaciono polje, c je brzina zvuka, β je koeficijent stišljivosti povezan sa ρ preko konstitutivne jednačine, μ i η su koeficijenti viskoznosti.

Osnovna posledica ovog pristupa sa niskim Mach-ovim brojem je da model (2.1) dat sa dva polja pritiska.

Termodynamički pritisak p_* koji je deo konstitutivne jednačine predstavlja prosečan pritisak (konstantan u vremenu i prostoru) unutar jezgra. Dinamičan pritisak \mathcal{P} koji se pojavljuje u momentnoj jednačini se može smatrati perturbacijom oko p_* . Do ove dekompozicije pritiska dolazi usled filtriranje akustičnih talasa koji više nisu uključeni u LMNC sistem.

Spomenuli smo da model (2.1) važi samo pod prepostavkom da pritisak p_* ne zavisi od vremena.

Za zatvaranje sistema potrebna je dodatna jednačina, odnosno konstitutivna jednačina.

čina koja povezuje termodinamičke promenljive. Posmatramo konstitutivnu jednačinu datu sledećim oblikom

$$\rho(\alpha, h, p_*) = \frac{p_*}{\beta(\alpha, p_*)} \frac{1}{h - q(\alpha, p_*)}, \quad (2.2)$$

gde su

$$\begin{aligned} \beta(\alpha, p_*) &= \frac{p_*}{\mathcal{R}(\alpha, p_*) C_p(\alpha, p_*)}, & \mathcal{R}(\alpha, p_*) &= \alpha \frac{p_* + \bar{\pi}_g}{(\bar{\gamma}_g - 1) \bar{c}_{vg}} + (1 - \alpha) \frac{p_* + \bar{\pi}_l}{(\bar{\gamma}_l - 1) \bar{c}_{vl}}, \\ C_p(\alpha, p_*) &= \varphi(\alpha, p_*) \bar{\gamma}_g \bar{c}_{vg} + (1 - \varphi(\alpha, p_*)) \bar{\gamma}_l \bar{c}_{vl}, & \varphi(\alpha, p_*) &= \frac{\alpha \mathcal{R}(1, p_*)}{\mathcal{R}(\alpha, p_*)}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Model (2.1) korišten u prethodnim studijama baziran je na pretpostavci o mehaničkom i termodinamičkom ekvilibrijumu između faza. Ovo znači da se za faze pretpostavlja da se pomeraju istom brzinom i pretpostavlja se da su isparavanje, kondenzacija i transfer toplote trenutni. Fluid može biti u fazi tečnosti, mešavine ili pare. Sa sistem od tri jednačine bismo mogli da opišemo dvo-fazni tok medjutim bilo bi neophodno da koristimo mnogo konstitutivnih jednačina.

Pokušaćemo da se fokusiramo na drugačiji fenomen time što ćemo dozvoliti neekvilibrijum. Jedna od prednosti takvog modela je ta što u model nema efekata termalne provodljivosti i opravdan je za male varijacije pritiska. Neekvilibrijum podrazumeva da u obzir moramo uzeti još jednu jednačinu, kako bismo se suočili sa novim stepenom slobode. U skladu sa tim, posmatraćemo jednačinu zapreminskog udela α . Zapreinski ideo $\alpha \in [0, 1]$ predstavlja način na koji se mešaju dva fluida. U nastavku se bavimo sledećim sistemom jednačina.

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \alpha + \mathbf{u} \cdot \nabla \alpha = \frac{1}{\epsilon} (\bar{\alpha} - \alpha) \\ \partial_t \rho + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = \frac{\beta(\alpha) \Phi_*}{p_*} \\ \rho (\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) + \nabla \mathcal{P} - \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \rho \mathbf{g}, \end{array} \right. \quad (2.4)$$

gde je $\bar{\alpha} \in [0, 1]$, $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^2$, $\Phi_* \geq 0$, $p_* > 0$ i $\epsilon > 0$ su dati i $\mu > 0$ i $\eta > 0$ su viskozni koeficijenti.

Možemo primetiti da na desnoj strani jednačine o zapreminskom udelu imamo relaksacioni član koji modelira transfer od jednog fluida do drugog. Ako je relaksacioni član različit od nule možemo da zaključimo da je moguće modelirati transfer fluida do drugog ili transfer faze od tečnosti do pare. Zaista u protoku dva fluida opisujemo dve faze istog fluida. U ovom slučaju, relaksacioni član $\bar{\alpha}$ podrazumeva fizičku promenu faze. S druge strane, ako je relaksacioni član jednak nuli, samo sa promenom ubrizgavanja fluida promenićemo i prirodu fluida. Ovo znači da očekujemo da ćemo se vratiti u položaj ravnoteže.

Ova master teza je predstavljena kroz nekoliko poglavlja na sledeći način:

U Poglavlju 1 je dat kratak pregled svih definicija i teorema koje su korištene u ovoj tezi.

U prvom delu Poglavlja 2.1 uvodimo 4-LMNC model. Cilj ovog rada je pokazati da je sistem 4-jednačine dobro-definisan, tj. da rešenje postoji i da je ono jedinstveno u kratkom vremenskom periodu. U Poglavlju 3 uvedena je nova dekompozicija sistema zvana Hodge-ova dekompozicija. Ovo je urađeno kako bi se lakše suočili sa specifičnim graničnim uslovima. Ova metoda se često upotrebljava u tretirajući diferencijalnih jednačina. U Poglavlju 4 data je glavna ideja ove master teze. Ova ideja se sastoji u konstruisanju rešenja nelinearnog sistema PDJ (2.4). Zatim, linearizujemo model i posmatramo niz Picard-ovih iteracija koji zadovoljava sledeće

$$\begin{cases} \partial_t \alpha^{k+1} + \mathbf{u}^k \cdot \nabla \alpha^{k+1} = \frac{1}{\epsilon} (\bar{\alpha} - \alpha^{k+1}) \\ \partial_t \rho^{k+1} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho^{k+1} \mathbf{u}^k) = 0 \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}^{k+1} = \frac{\beta(\alpha^k) \Phi_*}{p_*} \\ \rho^k (\partial_t \mathbf{u}^{k+1} + (\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \mathbf{u}^{k+1}) + \nabla \mathcal{P}^{k+1} - \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^{k+1}) = \rho^k \mathbf{g} \end{cases} \quad (2.5)$$

Dokaz se u velikoj meri oslanja na korištenje ocene energije različitih jednačina, uz konstantnu brigu da što bolje odredimo regularnost proizvoda članova, kako bi što preciznije mogli primeniti funkcionalne nejednakosti. Sve ovo radimo da bismo dokazali da je niz ograničen u odgovarajućem funkcionalnom prostoru i konvergentan u većem.

Ovde je neophodno voditi računa ne samo da ispoštujemo matematička ograničenja (i.e regularnost), već i fizičke pretpostavke (pozitivnost termodinamičkih promenljivih, pripadanje zapremskog udela intervalu $[0,1]$, ...). O ovome će biti reči u Poglavlju 5.

2.1 4-LMNC Model

U ovom radu ćemo primeniti nekoliko različitih teorijskih pristupa u cilju tretiranja različitih jednačina sistema (2.5). (transportna jednačina, jednačina eliptičnog ograničenja (brzine) i linearizovana nestišljiva Navier-Stokes-ova jednačina. Rešenja su predstavljena u 2D slučaju.

Model 4-LMNC je definisan na pravougaoniku. Da bi problem bio dobro-definisan moramo nametnuti određene hipoteze na date granične uslove

Domen.

$$\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y] \quad \text{sa} \quad \begin{cases} \Gamma_e = [0, L_x] \times \{0\} \\ \Gamma_{lat} = (\{0\} \times [0, L_y]) \cup (\{L_x\} \times [0, L_y]) \\ \Gamma_s = [0, L_x] \times \{L_y\} \end{cases}$$

Granični uslovi.

- On Γ_e :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_e = (0, v_e), \quad \rho = \rho_e,$$

za neko $v_e > 0$ i $\rho_e > 0$.

- On Γ_{lat} :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0,$$

gde su \mathbf{u} i $\boldsymbol{\tau}$ jedinični normalni vektor i neki jedinični tangentni vektor na granici.

- Na Γ_s :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n} - \mathcal{P} \mathbf{n} = 0.$$

Uvodimo još jedan granični uslov na Γ_s :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n} - \mathcal{P} \mathbf{n} - \frac{1}{2} \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^- = 0, \quad \text{where } z^- = \frac{z - |z|}{2}$$

Napomena 2.1.1 Zbog lakšeg čitanja master teze uvodimo notaciju: Granični uslovi zajedno sa poslednjim graničnim uslovom postavljenim na izlazu biće od sada nazivani "novim", a prve uvedene granične uslove ćemo nazivati "stari".

Kasnije će biti pojašnjeno uvođenje "novog" graničnog uslova.

Napomena 2.1.2 (Divergencija Košijevog naponskog tenzora) Označićemo da $\boldsymbol{\sigma}$ linearizovani Košijev naponski tenzor koji je pod pretpostavkom linearne elastičnosti dat kao:

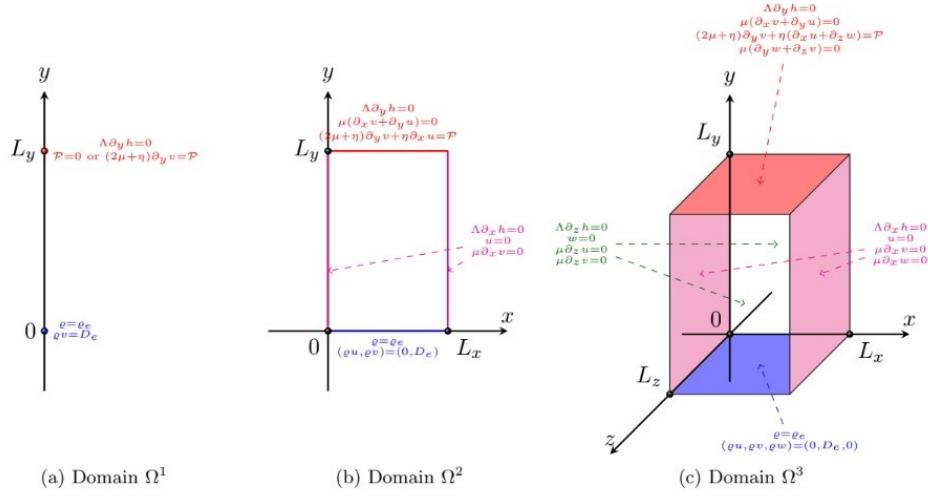
$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) + \eta(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}) \mathcal{I}_d,$$

gde su μ i η Lamé-ovi koeficijenti, respektivno. Primenom operatora divergencije i koristeći $2\mu + 3\eta = 0$ lako se dobije

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) &= \boldsymbol{\nabla} \cdot (\mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)) + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\eta(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}) \mathcal{I}_d) \\ &= \mu \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{3} \mu \nabla(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}) + \nabla \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) - \frac{2}{3} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}) \end{aligned}$$

Možemo primetiti da se jednačina može pojednostaviti biranjem $\mu = const.$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mu \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{3} \mu \nabla(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u})$$

Slika 2.1: Domen Ω^d , $d \in \{1, 2\}$ i granični uslovi primjenjeni na Lmnc model

Prepostavke modela.

S' obzirom da posmatramo jezgro nuklearnog reaktora, moramo osigurati da je problem dobro postavljen i da ima fizičko značenje, pa čemo nametnuti nekoliko prepostavki:

- $\Phi(t, x)$ je nenegativna za sve $(t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times [0, L_x] \times [0, L_y]$. Ova prepostavka podrazumeva da se proučava nuklearno jezgro gde se ohlađena tečnost zagreva;
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}(t, x) > 0$ za sve $(t, x) \in [0, T] \times [0, L_x] \times \{L_y\}$. Ova prepostavka karakteriše da polje brzine ima izlazni tok; Ne postoji Dirichet-ov granični uslov na izlazu Γ_s nuklearnog jezgra. Ovo ukazuje na činjenicu da ne postoji silazni tok na izlazu (fizički, ovo je zaista slučaj, ako posmatramo da je domen dovoljno dug);
- $v_e > 0$, ova prepostavka odgovara nuklearnom reaktoru sa vodom pod pritiskom (PWR-Power Water Reactor) ili nuklearnom reaktoru sa ključalom vodom (BWR-Boiling Water Reactor): gde je tok uzlazni. Tok takođe može biti i silazni kada posmatramo reaktor koji služi za testiranja materijala nuklearnog reaktora;
Fluid se ubrizgava na dnu jezgra pri datoj entlpiji $h_e = h(t, 0)$. $\rho_e > 0$ podrazumeva da je konstitutivna jednačina $\rho(h, p)$ takva da $\rho(h_e, p_*)$ može biti izvedeno. Štaviše, iz fizičkog ugla prepostavljamo da je $\rho(h_e, p_*) > 0$.
- β definisana pomoću racionalne funkcije u dole navedenoj teoremi T.2.2.1 je dovoljno glatka funkcija.

2.2 Konzervacija mase

Iako je konzervativni oblik (2.2.2a),(2.2.2b) više korišten od ne-konzervativnog, sistem (2.2.1a), (2.2.1b) je interesantan jer naglašava činjenicu da filtriranje akustičnih talasa iz sistema pretvara hiperboličku prirodu stišljivog Navier-Stokes-ovog sistema (povezanog sa akustičnim talasima) u eliptično ograničenje (brzine) sličnom u nestišljivom slučaju.

U sledećoj teoremi pokazaćemo ekvivalenciju ove dve forme.

Teorema 2.2.1

Pod pretpostavkama da su funkcije dovoljno glatke, sledeće forme su ekvivalentne:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\beta(\alpha, p_*)}{p_*} \Phi_* & (2.2.1.a) \\ \rho(\alpha, h, p_*) [\partial_t h + \mathbf{u} \cdot \nabla h] = \Phi_* & (2.2.1.b) \end{cases} \quad i \quad \begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 & (2.2.2.a) \\ \partial_t \rho h + \nabla \cdot (\rho h \mathbf{u}) = \Phi_* & (2.2.2.b) \end{cases}$$

Dokaz. Primetimo da je

$$\beta(\alpha, p_*) = \frac{p_*}{\mathcal{R}(\alpha, p_*) C_p(\alpha, p_*)}, \text{ sa (2.3).}$$

(\Rightarrow) Prema definicijama (2.2.1.b) i (2.2.1.a) dobija se

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= \frac{\partial \rho}{\partial h} \underbrace{(\partial_t h + \mathbf{u} \cdot \nabla h)}_{= \frac{\Phi_*}{\rho}} + \underbrace{\rho (\nabla \cdot \mathbf{u})}_{= \frac{\beta}{p_*} \Phi_*} \end{aligned}$$

Na osnovu definicije konstitutivne jednačine (2.2) i (2.3), dobija se sledeće

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = \Phi_* \left[\underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial h} + \frac{\rho}{\mathcal{R}(\alpha, p_*) C_p(\alpha, p_*)}}_{*} \right]$$

Na osnovu konstitutivne jednačine (2.2), izvođenjem $\frac{\partial \rho}{\partial h}$ i koristeći činjenicu da je $*$ jednako nuli, dobija se

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad \text{što nam daje (2.2.2.a).}$$

Da bismo dobili (2.2.2.b) koristićemo definiciju (2.2.1.b) na isti način i rezultat koji je dobijen u (2.2.2.a). Tada imamo

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho h) + \nabla \cdot (\rho h \mathbf{u}) &= \partial_t(\rho h) + \rho \partial_t h + \nabla(\rho \mathbf{u}) h + \nabla(h \mathbf{u}) \rho \\ &= h \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right)}_{=0} + \rho \underbrace{(\partial_t h + \mathbf{u} \cdot \nabla h)}_{= \frac{\Phi_*}{\rho}} \\ &= \Phi_* \end{aligned}$$

Konačno, dobija se

$$\partial_t(\rho h) + \nabla \cdot (\rho h \mathbf{u}) = \Phi_*.$$

(\Leftarrow) Da bismo pokazali drugi deo, potrebno je samo koristiti (2.2.2.b)

$$h\partial_t\rho + \rho\partial_th + \nabla(\rho\mathbf{u})h + (\mathbf{u} \cdot \nabla h)\rho = \Phi_*$$

Uz pomoć (2.2.2.a), dobija se sledeće

$$h(\underbrace{\partial_t\rho + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u})}_{=0}) + \rho(\partial_th + \mathbf{u} \cdot \nabla h) = \Phi_*,$$

Tada dobijamo (2.2.1.b),

$$\partial_th + \mathbf{u} \cdot \nabla h = \frac{\Phi_*}{\rho}.$$

Na osnovu (2.2.1.b) i (2.2.2.a) pokazaćemo da važi (2.2.1.a)

$$\partial_t\rho + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}) = \frac{\partial\rho}{\partial h}(\underbrace{\partial_th + \mathbf{u} \cdot \nabla h}_{=\frac{\Phi_*}{\rho}}) + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) \stackrel{(2.2.2.a)}{=} 0$$

Iz prethodnih proračuna moguće je videti

$$\rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) = -\Phi_* \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial\rho}{\partial h}$$

Na osnovu konstitutivne jednačine (2.3), može se videti

$$-\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial\rho}{\partial h} = \frac{\beta}{p_*}.$$

Konačno, dobija se (2.2.1.a)

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \Phi_* \frac{\beta(\alpha, p_*)}{p_*}.$$

i ovim završavamo dokaz. \square

Jednačina momenta je takođe povezana sa ostale dve jednačine u dve i tri dimenzije, suprotno slučaju u 1D. Stoga je ovde moramo uzeti u obzir bilo u konzervativnoj ili nekonzervativnoj formi.

Teorema 2.2.2

$$\begin{aligned} \rho[\partial_t\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}] + \nabla\mathcal{P} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \rho\mathbf{g} && \text{je ekvivalentna sa} \\ \partial_t(\rho\mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla\mathcal{P} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) &= \rho\mathbf{g}. \end{aligned}$$

Dokaz. Primetimo da je dovoljno pokazati da je

$$\rho[\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] = \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u})$$

Ispisivanjem desne strane prethodne jednakosti u drugačijem obliku i koristeći osnovne diferencijalne identitete date u Appendix-u dobijamo

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \partial_t \rho + \rho \partial_t \mathbf{u} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}^t) &= \mathbf{u} \partial_t \rho + \rho \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u}^t \nabla(\rho \mathbf{u}) + \rho \mathbf{u} \nabla(\mathbf{u}^t) \\ &= \rho(\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) + \mathbf{u} \underbrace{(\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}))}_{=0} \end{aligned}$$

Možemo koristiti jednačinu (2.2.1.a) iz prethodne teoreme kako bismo dobili

$$\mathbf{u} \partial_t \rho + \rho \partial_t \mathbf{u} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}^t) = \rho(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}).$$

□

Glava 3

Hodge-ova dekompozicija

Helmholtz-Hodge-ova dekompozicija(takođe poznata kao Leray-ova dekompozicija) vektorskog polja je jedna od fundamentalnih teorema za tretiranje sistema diferencijalnih jednačina. Ona opisuje metod koji je često korišćen u mehanici fluida kako bi se uradila dekompozicija bilo kog vektora brzine na nestišljivu komponentu i vektorsko polje. Teorijska podloga se može pronaći u [boyer].

Ovde, u cilju suočavanja sa specijalnim graničnim uslovima, uvodimo navedeno dekompoziciju.

Lema 3.0.1

Neka je Ω povezana oblast. Tada imamo sledeću dekompoziciju, zvanu Helmholtz-Hodge-ova dekompozicija

$$(L^2(\Omega))^2 = \mathcal{W} \oplus \mathcal{W}^\perp, \quad (3.1)$$

gde je

$$\mathcal{W} = \left\{ \mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^2 \mid \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ on } \Gamma_e \cup \Gamma_{lat} \right\}$$

i

$$\mathcal{W}^\perp = \left\{ \mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^2 \mid \exists \phi \in H_s^1(\Omega)^{[6]} : \mathbf{u} = \nabla \phi \right\}.$$

Dokaz. Neka je $\mathbf{u}_2 = \nabla \phi$. Ovo znači \mathbf{u}_2 pripada prostoru \mathcal{W}^\perp . Primetimo da je $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$. Tada je

$$\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n} = \nabla \phi \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}.$$

Zatim imamo

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0,$$

nestišljivo na Ω i tangentno na $\partial\Omega$. Posmatramo

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \int_{\Omega} \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 dx = \int_{\Omega} \mathbf{u}_1 \nabla \phi dx$$

^[6] $H_s^1(\Omega) = \{\phi \in H^1(\Omega), \text{t.d. } \phi = 0 \text{ na } \Gamma_s\}$

Koristeći diferencijalne identitete dobija se

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\phi \mathbf{u}_1) dx - \int_{\Omega} \phi \nabla \cdot \mathbf{u}_1$$

Kako je $\nabla \cdot \mathbf{u}_1$ jednako 0, dobija se

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 dx = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\phi \mathbf{u}_1) dx = \int_{\partial\Omega} \phi \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Ovim smo dokazali da su \mathcal{W} i \mathcal{W}^\perp ortogonalni.

□

Dokaz u nastavku važi za $\mathbf{u} \in H^1$. Za dokaz u L^2 pogledati u Boyer.[2]

Identiteti.

Neka je dato $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)$, i neka je $\mathbf{u} = \mathbf{w} + \nabla\phi$ dobijeno iz (3.1), gde je $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ i $\phi \in H_s^1(\Omega)$. ϕ je rešenje od

$$\begin{cases} \Delta\phi = \nabla \cdot \mathbf{u}, & \text{in } \Omega, \\ \nabla\phi \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, & \text{on } \Gamma_e \cup \Gamma_{lat} \\ \phi = 0, & \text{on } \Gamma_s. \end{cases}$$

Tada $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \nabla\phi$. Lako je pokazati da

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}) = \mu(\nabla\mathbf{w} + \nabla\mathbf{w}^T), \quad \boldsymbol{\sigma}(\nabla\phi) = 2\mu \text{Hess}\phi + \eta\Delta\phi\mathcal{I}_d.$$

Možemo reformulisati naš sistem jednačina.

$$\begin{cases} \partial_t\alpha + \mathbf{u} \cdot \nabla\alpha = \frac{1}{\epsilon}(\bar{\alpha} - \alpha) \\ \partial_t\rho + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}) = 0 \\ \Delta\phi = \frac{\beta(\alpha)\Phi_*}{p_*} \\ \nabla \cdot \mathbf{w} = 0 \\ \rho(\partial_t\mathbf{w} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{w}) + \nabla\mathcal{P} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}) = \rho\mathbf{g} - [\rho(\partial_t\nabla\phi + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\nabla\phi) + (2\mu + \eta)\Delta\nabla\phi], \end{cases} \quad (3.2)$$

gde je $\mathbf{u} = \mathbf{w} + \nabla\phi$ dato sa sledećim graničnim uslovima

- Na Γ_e :

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\tau} = -\nabla\phi \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad \nabla\phi \cdot \mathbf{n} = -v_e, \quad \rho = \rho_e, \quad \alpha = \alpha_e;$$

- Na Γ_{lat} :

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \nabla\phi \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w})\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = -2\mu(\text{Hess}\phi)\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau};$$

- Na Γ_s :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w})\mathbf{n} = (\mathcal{P} - \eta\Delta\phi)\mathbf{n} - 2\mu(\text{Hess}\phi)\mathbf{n}, \quad \phi = 0.$$

Ovde ćemo takođe zapisati "novi" granični uslov

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w})\mathbf{n} + \boldsymbol{\sigma}(\nabla\phi)\mathbf{n} - \mathcal{P}\mathbf{n} - \frac{1}{2}\rho((\mathbf{w} + \nabla\phi) \cdot \mathbf{n})^- = 0.$$

3.1 Lax-Milgram-ova teorema

Lax-Milgram-ova teorema je rezultat do kojeg su došli Peter Lax i Arthur Milgram, 1954. godine. Ona predstavlja proširenje Riesz-ove teoreme na bilinearne forme i obezbeđuje egzistenciju i jedinstvenost slabih rešenja određenih parcijalnih diferencijalnih jednačina. Za dodatnu literaturu pogledati [9].

Teorema 3.1.1 (Lax-Milgram)

Neka je V Hilbert-ov prostor sa normom $\|\cdot\|_V$ i neka je skalarni proizvod $(\cdot, \cdot)_V$ i prepostavimo da je a bilinearna forma i da je L linearna funkcionala tako da je

- a je ograničena, tako da $\exists K \geq 0$ takvo da je $|a(u, v)| \leq K\|u\|\|v\|$, $\forall x, y \in H$
- a je koercivna, tako da $\exists \nu \geq 0$ takvo da je $a(v, v) \geq \nu\|x\|^2$, $\forall v \in H$, i
- L je neprekidna, tako da $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ takvo da je $|L(v)| \leq \lambda\|v\|_V$, $\forall v \in V$.

Tada postoji jedinstvena funkcija $u \in V$ takva da je $a(u, v) = L(v)$, $\forall v \in V$.

U nastavku će biti pokazano da su svi uslovi Lax-Milgram-ove teoreme za Poissonovu jednačinu sa navedenim graničnim uslovima zadovoljeni.

$$\begin{cases} \Delta\phi = \nabla \cdot u & \text{in } \Omega \\ \nabla\phi \cdot n = u \cdot n & \text{in } \Gamma_e \cup \Gamma_{lat} \\ \phi = 0 & \text{in } \Gamma_s \end{cases} \quad (3.3)$$

$$V_g = \{v \in H^1, v = g \text{ on } \Gamma_s\}$$

Moramo naglasiti da je V_0 Banach-ov prostor na kome se definiše norma na sledeći način $\|\nabla f\|_{L^2\Omega}$.

Uzmimo funkciju $v \in V_0$. Množenjem prve jednačine u (3.3) sa v i integracijom nad Ω dobija se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \cdot (\nabla\phi) v dx &= \int_{\Omega} \nabla \cdot u \cdot v dx, \text{ for all } v \in V_0(\Omega) \\ \int_{\Gamma_e \cup \Gamma_{lat}} u \cdot n \cdot v ds - \int_{\Omega} \nabla\phi \cdot \nabla v dx &= \int_{\Gamma_e \cup \Gamma_{lat}} u \cdot n \cdot v ds - \int_{\Omega} u \cdot \nabla v dx \end{aligned}$$

Variaciona formulacija za (3.3) je pronaći $\phi \in V_g$ takvo da:

$$\int_{\Omega} \nabla\phi \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} u \cdot \nabla v dx$$

Stoga će Lax-Milgram teorema biti primenjena na sledeću bilinearnu formu i linearnu funkcionalu

$$\begin{aligned} a(\phi, v) &:= \int_{\Omega} \nabla\phi \cdot \nabla v dx, \quad a(\cdot, \cdot): V_0(\Omega) \times V_0(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \\ L(v) &= \int_{\Omega} u \cdot \nabla v dx. \end{aligned}$$

Koristi se Cauchy-Schwarz-ova nejednakost (1.1) i Poincaré-ova nejednakost (1.3.7) da bi se dokazala ograničenost i koercivnost.

$$|a(\phi, v)| = \left| \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla v dx \right| \leqslant \left(\int |\nabla \phi|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |\nabla v|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|\nabla \phi\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$$

(ograničenost)

$$a(v, v) = \int_{\Omega} (\nabla v)^2 dx \geqslant \gamma \|v\|_{L^2(\Omega)}^2, \gamma > 0$$

(koercivnost)

Konačno, funkcionala L je neprekidna, s obzirom da

$$|L(v)| \leqslant \|u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2},$$

što znači da možemo da uzmemo $\lambda = \|u\|_{L^2}$ pod uslovom da prepostavimo da je $u \in L^2(\Omega)$.

Glava 4

Glavna teorema i struktura dokaza

4.1 Opšti pristup

Za dati problem PDJ kažemo da je dobro definisan ako su zadovoljena sledeća tri uslova:

- problem ima rešenje;
- rešenje je jedinstveno;
- rešenje neprekidno zavisi od podataka datih u problemu tj. početnih i graničnih uslova.

Ponekad je teško zadovoljiti neke od ovih uslova, s' obzirom na specifične uslove za dati problem i takođe postoje mnogi sistemi PDJ od kojih se ne može očekivati jedinstvenost ili postojanje rešenja.

Dokazivanje dobre-definisanosti 4-LMNC sistema glavna je tema ovog rada. U ovom poglavlju ćemo dati ideju za postizanje dobre-definisanosti. Ispitivaćemo postojanje u kratkom vremenskom intervalu $[0, T]$. Teorema bi trebalo da nam obezbedi postojanje i jedinstvenost na gore pomenutom intervalu. Neka je s takav da je $s \geq s_0 + 1$, gde je $s_0 = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1$ i d je dimenzija prostora. Kako ćemo se mi usredsrediti na dimenziju 2, od sada važi $s_0 = 2$ i $s \geq 3$. Metod korišten u dokazu sastoji se iz 3 koraka:

- *Nulti korak* je linearizacija 4-LMNC sistema (2.4). Koristi se standardna tehnička : konstruišemo niz Picard-ovih iteracija kao što je navedeno u uvodu. Iteracije bi trebalo da konvergiraju ka rešenju nelinearnog problema. Možemo videti da je naš sistem veoma povezan. Prema tome, posmatraćemo svaku jednačinu zasebno, tj. difuzno-advekcionu, eliptičnu, nestišljivu Navier Stokes-ovu. Pokazaćemo dobru-definisanost svake jednačine pojedinačno. Dati su sledeći koraci:

- *Prvi korak* podrazumeva kombinaciju sredstava za dobijanje odgovarajućih ocena energije. Sa odgovarajućim ocenama pokazujemo postojanje rešenja svake jednačine pojedinačno u odgovarajućem prostoru.
- *Drugi korak* se sastoji od tri koraka:
 - Prvi korak podrazumeva da je niz Picard-ovih iteracija uniformno ograničen u nižem prostoru;
 - Drugi korak je pokazivanje kontrakcije Picard-ovih iteracija u slaboj normi koristeći rezultate iz prvog koraka.
Kako se ovi rezultati oslanjaju na primenu Grönwall-ove leme stoga dobijamo postojanje u konačnom vremenu za regularne podatke;
 - Treći korak je pokazivanje konvergencije niza u nekom smislu ka rešenju sistema LMNC system.
- Konačno, *treći korak* je pokazivanje jedinstvenosti. Gde jedinstvenost pokazujujemo kontradikcijom. Pretpostavimo da postoje dva rešenja i pokazujemo da je njihova razlika jednaka nuli.

4.2 Iterativni sistem

Kao što smo rekli u prethodnom poglavlju ovde konstruišemo rešenje sistema (2.4). Kroz sledeću iterativnu šemu posmatraćemo svaku od ovih jednačina pojedinačno.

Zaista, podrazumevajući ocene energije izvedene iz jednačina sistema, moramo uvesti sledeće prostore:

- $\mathcal{W}_{s,\mathcal{T}}(\Omega) = C^0([0, \mathcal{T}], L^2(\Omega)) \cap L^\infty([0, \mathcal{T}], H_s(\Omega));$
- $\mathcal{X}_{s,\mathcal{T}}(\Omega) = \mathcal{W}_{s,\mathcal{T}}(\Omega) \cap L^2([0, \mathcal{T}], H_{s+1}(\Omega))$

Za svako k obezbedićemo da Picard-ova procedura radi:

Prvo, pretpostavimo da $\mathbf{u}^k \in \mathcal{X}_{3,\mathcal{T}}(\Omega)$. Iz

$$\text{Računanje } \alpha^{k+1}. \quad \partial_t \alpha^{k+1} + \mathbf{u}^k \cdot \nabla \alpha^{k+1} = \frac{1}{\epsilon} (\bar{\alpha} - \alpha^{k+1}),$$

i

$$\text{Računanje } \rho^{k+1}. \quad \partial_t \rho^{k+1} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho^{k+1} \mathbf{u}^k) = 0,$$

imamo

$$\alpha^{k+1} \in \mathcal{W}_{3,\mathcal{T}}(\Omega), \quad \alpha^{k+1} \in \mathcal{X}_{2,\mathcal{T}}(\Omega).$$

or

$$\rho^{k+1} \in \mathcal{W}_{3,\mathcal{T}}(\Omega), \quad \rho^{k+1} \in \mathcal{X}_{2,\mathcal{T}}(\Omega).$$

Then $\beta(\alpha^k) \in \mathcal{W}_{3,\mathcal{T}}(\Omega)$ ili $\beta(\alpha^k) \in \mathcal{X}_{2,\mathcal{T}}(\Omega)$.

Računanje potencijala $\nabla\phi^{k+1}$.

$$\Delta\phi^{k+1} = \frac{\beta(\alpha^k)\Phi_*}{p_*}. \quad (4.1)$$

Tada $\phi^{k+1} \in \mathcal{X}_{4,\mathcal{T}}(\Omega)$.

Računanje nestišljivog vektora brzine i pritiska.

$$\begin{cases} \nabla \cdot w^{k+1} = 0, \\ \rho^k(\partial_t w^{k+1} + (\mathbf{u}^k \cdot \nabla) w^{k+1}) + \nabla \mathcal{P}^{k+1} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(w^{k+1}) = \\ \quad \rho^k \mathbf{g} - [\rho^k(\partial_t \nabla \phi^{k+1} + (\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \nabla \phi^{k+1}) + (2\mu + \eta) \Delta \nabla \phi^{k+1}], \end{cases} \quad (4.2)$$

Tada $w^{k+1} \in \mathcal{X}_{3,\mathcal{T}}(\Omega)$ i $\mathcal{P}^{k+1} \in \mathcal{X}_{2,\mathcal{T}}(\Omega)$.

Stoga smo ovim obezbedili postojanje svakog člana Picard-ove iteracije.

Zatim, je potrebno obezbediti uniformnu ograničenost niza $(\mathbf{u}^k, \alpha^k, \rho^k, \mathcal{P}^k)$ u odnosu na k-tu iteraciju. Iz ovoga dobijamo slabu- \star konvergenciju podniza.

Potom, je potrebno videti kontrakciju niza u nekoj normi koja će nam obezrediti jaku konvergenciju.

Konačno, pokazaćemo da granica zadovoljava 4-LMNC model.

4.3 Glavna teorema

U narednom poglavlju dajemo delimične odgovore za dobru-definisanost svake pojedinačne jednačine sistema. Međutim, pre toga u ovom poglavlju dajemo glavnu teoremu ovog rada koja se zasniva na dobroj-definisanosti 4-LMNC modela za specifične granične uslove.

Teorema 4.3.1

Neka je s takav da $s \geq s_0 + 2$, gde je $s_0 = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1$ i d je dimenzija prostora. Ako prepostavimo da su $\rho_0 \in L_t^\infty(H_x^3)$, $\alpha_0 \in L_t^\infty(H_x^3) \cap L_t^2(H_x^4)$, $\mathbf{u}_0 \in L_t^\infty(H_x^3) \cap L_t^2(H_x^4)$. Tada postoji vreme $\mathcal{T} > 0$ za koje postoji jedinstveno klasično rešenje $(\rho, \alpha, \mathbf{u}, \nabla \mathcal{P})$ 4-LMNC modela takvo da važi

- $\rho \in L_t^\infty(H_x^3)$,
- $\alpha \in L_t^\infty(H_x^3) \cap L_t^2(H_x^4)$,
- $\mathbf{u} \in L_t^\infty(H_x^3) \cap L_t^2(H_x^4)$,
- $\nabla \mathcal{P} \in L_t^\infty(H_x^1)$.

Glava 5

Rad i proračuni jednačina sistema

5.1 Postojanje i jedinstvenost jakog rešenja transportne jednačine sa promenljivom funkcijom f

Model.

Jednačine (2.4a) i (2.4b) date su

$$\begin{cases} \partial_t Y + \mathbf{u} \cdot \nabla Y + cY = f, & \mathbf{x} \in \Omega \\ Y(t, x, 0) = Y_e(t, x), & x \in [0, L_x], \\ Y(0, \mathbf{x}) = Y_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \end{cases} \quad (5.1)$$

za neki vektor brzine \mathbf{u} koji zadovoljava granične uslove date u Poglavlju 4-LMNC Model i pozitivne funkcije c i f .

Primetimo da su tada jednačine date sa:

$$\bullet \quad Y = \alpha \Rightarrow c(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\epsilon}, \quad f(t, \mathbf{x}) = \frac{\bar{\alpha}(t, \mathbf{x})}{\epsilon}$$

$$\bullet \quad Y = \rho \Rightarrow c(t, \mathbf{x}) = \frac{\beta(\alpha)\Phi_*}{p_*}, \quad f(t, \mathbf{x}) = 0.$$

U nastavku rada biće korištena dobro poznata Metoda karakteristika. Ova metoda podrazumeva konstrukciju karakteristične krive duž koje se PDJ može svesti na Običnu diferencijalnu jednačinu (ODJ).

Neka je $\chi(\tau; t, \mathbf{x})$ pozicija u vremenu τ čestice koja se nalazi na poziciji \mathbf{x} u vremenu t , koja deluje brzinom \mathbf{u} i definisacemo karakteristični tok χ kao rešenje Obične diferencijalne jednačine:

$$\begin{cases} \frac{d\chi}{d\tau}(\tau; t, \mathbf{x}) = \mathbf{u}(t, \chi(\tau; t, \mathbf{x})), \\ \chi(t; t, \mathbf{x}) = \mathbf{x}. \end{cases} \quad (5.2)$$

Pod pretpostavkom da je funkcija \mathbf{u} dovoljno glatka, $(\tau, t, \mathbf{x}) \mapsto \chi(\tau; t, \mathbf{x})$ je ne-prekidna funkcija u odnosu na svaku promenljivu.

Neka je data funkcija ψ , i neka je $\tilde{\psi}_{t,x} = \psi(\tau, \chi(\tau; t, \mathbf{x}))$, tako da je jednačina (5.1) data sa:

$$\frac{d\tilde{Y}_{t,x}}{d\tau} + \tilde{c}_{t,x}\tilde{Y}_{t,x} = \tilde{f}_{t,x}. \quad (5.3)$$

Uvodi se particija $\Omega = \Omega_0(t) \cup \Omega_e(t)$ ^[7] na sledeći način

$$\begin{aligned} \Omega_0(t) &= \{\mathbf{x} \in \Omega \mid \forall \tau \in [0, t], \chi(\tau; t, \mathbf{x}) \in \Omega\}, \\ \Omega_e(t) &= \{x \in \Omega \mid \exists t^*(t, \mathbf{x}) : \forall \tau \in [t^*(t, \mathbf{x}), t], \chi(\tau; t, \mathbf{x}) \in \Omega \text{ and } \chi(t^*(t, \mathbf{x}); t, \mathbf{x}) \in \Gamma_e\}. \end{aligned}$$

U opštem slučaju, dokle god $\chi(\tau; t, \mathbf{x}) \in \Omega$, integracijom jednačine (5.2) dobija se

$$Y(t, \mathbf{x}) = \tilde{Y}_{t,x} e^{-\int_{\tau}^t \tilde{c}_{t,x}(s) ds} + \int_{\tau}^t \tilde{f}_{t,x}(s) e^{-\int_s^t \tilde{c}_{t,x}(s') ds'} ds.$$

Sledi

$$Y(t, \mathbf{x}) = \begin{cases} Y_0(\chi(0; t, \mathbf{x}) e^{-\int_0^t \tilde{c}_{t,x}(s) ds} + \int_0^t \tilde{f}_{t,x}(s) e^{-\int_s^t \tilde{c}_{t,x}(s') ds'} ds), & \text{if } \mathbf{x} \in \Omega_0(t) \\ Y_e(t^*, \chi(t^*; t, \mathbf{x}) e^{-\int_{t^*}^t \tilde{c}_{t,x}(s) ds} + \int_{t^*}^t \tilde{f}_{t,x}(s) e^{-\int_s^t \tilde{c}_{t,x}(s') ds'} ds), & \text{if } \mathbf{x} \in \Omega_e(t) \end{cases} \quad (5.4)$$

Lema 5.1.1

Posledice rešavanja ODJ (5.4) su:

- ako $\bar{\alpha}(t, \mathbf{x}) \in [0, 1]$, $\alpha_0(\mathbf{x}) \in [0, 1]$ i $\alpha_e(t, x) \in [0, 1]$, onda α zadovoljava princip maksimuma, i.e $\alpha(t, \mathbf{x}) \in [0, 1]$;
- ako $\rho_0(\mathbf{x}) > 0$ i $\rho_e(t, x) \in [0, 1] > 0$, onda $\rho(t, \mathbf{x}) > 0$. Štaviše, ρ je opadajuća duž karakteristične krive.

S obzirom na izvedeni eksplicitni izraz (5.4) dalje je od interesa provera regularnosti rešenja.

Teorema 5.1.2

Dato je $\mathbf{u} \in C_{t,x}^0 \cap L_t^\infty(C_x^1)$. Karakteristična kriva χ je C^1 funkcija u odnosu na sve tri promenljive (τ, t, x). Štaviše, funkcija t^* je takođe C^1 funkcija i

$$\nabla t^* = -(\partial_x \chi_2(t^*; t, x)) / (\partial_s \chi_2(t^*; t, x)).$$

Dokaz. Poznato je da je karakteristična kriva χ rešenje ODJ (5.2). Iz T. 1.3.11 i T. 1.3.12 sledi da $\chi \in C_{\tau,t,x}^1$ i $t^* \in C^1$. S druge strane, iz činjenice da je $\chi_2(t^*; t, x) = 0$ i pomoću Teoreme o Implicitnoj Funkciji 1.3.13 postoji ODJ čije je t^* rešenje:

$$\nabla t^* = -(\partial_x \chi_2(t^*; t, x)) / (\partial_s \chi_2(t^*; t, x)).$$

^[7]Particija je napravljena usled graničnih uslova datih u Poglavlju 2.1

Primetimo da je $\partial_s \chi_2(t^*; t, x) = v_e(t^*, \chi_1(t^*; t, x))$. Tada se v_e može smatrati konstantnim zarad jednostavnosti. Stoga je $\partial_x t^*$ iste regularnosti kao i desna strana jednačine $\partial_x \chi_2(t^*; t, x)$. \square

Važno je naznačiti da se na osnovu prethodnog rezultata može reći da na oba domena Ω_0 i Ω_e postoji eksplicitno rešenje koje je klase C^1 . Iz [10] :

Teorema 5.1.3

Neka se ograničeni skup Ω sastoji od dva otvorena skupa Ω_1 i Ω_2 takva da je $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$. Moguće je pokazati da za svaki deo Ω_1 i Ω_2 postoji slab izvod u $L^2(\Omega)$ vektorse funkcije klase C^1 ako i samo ako je normalna komponenta neprekidna duž površi Γ .

U nastavku pretpostavimo neprekidnost Y i pretpostavimo da su $\partial_x Y$ i $\partial_y Y$ takođe neprekidne funkcije. Ovo obezbeđuje da rezultat takođe bude C^1 funkcija na granici. Ali prvo se mora proveriti pod kojim sve uslovima.

Particija Ω_i će biti posmatrana kao prosto-povezana oblast. Iz teorije Metode karakteristika [10], t^* je vreme za koje karakteristična kriva doseže granicu $x = 0$.

Tada

$$\Gamma(t) = \partial\Omega_0(t) \cap \partial\Omega_e(t) = \{x \in \Omega : t^*(t, x) = 0\}.$$

U Appendix-u Detalji za transportnu jednačinu je objašnjen isti problem na granici uz dodatne pretpostavke na funkcije i vektor brzine. Kao i uslovi neophodni za neprekidnost i diferencijabilnost (klasa C^1).

U perspektivi dokazivanja postojanja jakog rešenja preko konstruisanja Picard-ovih iteracija, neophodno je dokazati sledeću teoremu.

Pre toga, potrebne su nam naredne tri leme. Primetimo da se ovde susrećemo sa dodatnim poteškoćama usled činjenice da karakteristična kriva ne može ući niti napustiti domen. Stoga će naredne leme biti date bez dokaza.

Lema 5.1.4

Ako je $\chi \in L_t^\infty(H_x^3)$, onda je $t^* \in L_t^\infty(H_x^3)$.

Lema 5.1.5

Ako $\chi \in L_t^\infty(H_x^3)$, onda $\alpha_e(t^*; \chi(t^*; t, x)) \in L_t^\infty(H_x^3)$ i $\rho_e(t^*; \chi(t^*; t, x)) \in L_t^\infty(H_x^3)$.

Lema 5.1.6

Ako $\chi \in L_t^\infty(H_x^3)$, onda $\beta(\alpha) \in L_t^\infty(H_x^3)$.

Teorema 5.1.7

Neke je $\mathbf{u} \in L_t^\infty(H_x^3) \cap L_t^2(H_x^4)$, $c \in L_t^\infty(H_x^3)$ i neka je funkcija f dovoljno glatka, tada postoji jedinstveno jako rešenje jednačine (5.1) tako da je $Y \in L_t^\infty(H_x^3)$.

Dokaz. Neka je $\mathbf{u} \in L_t^\infty(H_x^3) \cap L_t^2(H_x^4)$ i $\frac{1}{\epsilon} \in L_t^\infty(H_x^3)$ i neka je $\frac{\bar{\alpha}(t, x)}{\epsilon}$ iste regularnosti kao i funkcija ρ . Kako bismo odredili regularnost funkcije $\alpha_e(t^*; \chi(t^*; t, x))$, neophodno je prvo odrediti regularnost funkcije ∇t^* . Ovo je moguće uraditi pomoću

sledećih lema: L.5.1.4 i L.5.1.5.

Koristeći rezultat dobijen Metodom karakteristika (5.4) i lemu L.5.1.5 imamo

$$\alpha(t, x) = \alpha_e(t^*, \chi(t^*; t, x)) e^{-\int_{t^*}^t \frac{1}{\epsilon} ds} + \int_{t^*}^t \frac{\bar{\alpha}(s, \chi(s; t, x))}{\epsilon} e^{-\int_s^t \frac{1}{\epsilon} ds'} ds$$

To implicira

$$\alpha(t, x) \in L_t^\infty(H_x^3)$$

Ponavljanjem postupka za izvod drugog i trećeg reda dobijamo $D^2\alpha(t, x) \in L_t^\infty(H_x^1)$ i $D^3\alpha(t, x) \in L_t^\infty(L_x^2)$.

Istim postupkom dobija se i regularnost funkcije ρ korištenjem prethodnih rezultata i leme L.5.1.6,

$$\rho(t, x) = \rho_e(t^*, \chi_1(t^*; t, x)) e^{-\int_{t^*}^t \frac{\beta(\alpha(s, \chi(s; t, x)))}{p_*} \Phi_* ds}$$

To implicira

$$\rho(t, x) \in L_t^\infty(H_x^3)$$

Za izvode drugog i trećeg reda slično dobijamo $D^2\rho(t, x) \in L_t^\infty(H_x^1)$ i $D^3\rho(t, x) \in L_t^\infty(L_x^2)$. Ovim je završen dokaz teoreme. \square

Napomena 5.1.8 Primetimo da su svi rezultati dati uz pretpostavku da je funkcija χ dovoljno glatka. Kako je pokazano samo da je $\chi \in C^1$ jedina stvar koju je dalje moguće pokazati pomoću teoreme T.1.3.14 je da su funkcije $\rho, \alpha, \alpha_e, \rho_e, \beta(\alpha)$ klase C^1 .

5.1.1 Ocena energije nižeg reda za ρ i α

Posmatramo jednačinu (5.1)

$$\partial_t \alpha + \mathbf{u} \cdot \nabla \alpha = \frac{1}{\epsilon} (\bar{\alpha} - \alpha)$$

Množenjem ove jednačine sa α i integracijom nad Ω dobija se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\alpha\|^2 &= - \int_{\Omega} \alpha (\mathbf{u} \cdot \nabla \alpha) dx + \int_{\Omega} \alpha \frac{1}{\epsilon} (\bar{\alpha} - \alpha) = \\ &= - \int_{\Gamma_e} \mathbf{u}_e \cdot n \frac{\alpha_e^2}{2} ds - \int_{\Gamma_s} \mathbf{u} \cdot n \frac{\alpha^2}{2} ds - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \alpha^2 \nabla \cdot \mathbf{u} dx + \int_{\Omega} \alpha \frac{1}{\epsilon} (\bar{\alpha} - \alpha) dx \end{aligned} \quad (5.5)$$

Na osnovu nejednakosti Cauchy-Schwarz-a (1.1), Young-ove nejednakosti (1.3.5) i pretpostavke date u 4-LMNC Model dobija se

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\alpha\|^2 &\leq - \int_{\Gamma_e} \mathbf{u}_e \cdot n \frac{\alpha_e^2}{2} ds + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|_\infty \|\alpha\|^2 + \frac{1}{\epsilon} \|\alpha\| \|\bar{\alpha} - \alpha\| \\ &\leq - \int_{\Gamma_e} \mathbf{u}_e \cdot n \frac{\alpha_e^2}{2} ds + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|_\infty \|\alpha\|^2 + \frac{1}{\epsilon} \|\alpha\|^2 + \frac{1}{\epsilon} \|\alpha\| \|\bar{\alpha}\| \\ &\leq - \int_{\Gamma_e} \mathbf{u}_e \cdot n \frac{\alpha_e^2}{2} ds + \left(\frac{\|\nabla \cdot \mathbf{u}\|_\infty}{2} + \frac{1}{2\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon} \right) \|\alpha\|_0^2 + \frac{1}{2} \|\bar{\alpha}\|^2 \quad (5.6) \end{aligned}$$

Zatim imamo:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\alpha\|^2 \leq \underbrace{- \int_{\Gamma_e} \mathbf{u}_e \cdot n \frac{\alpha_e^2}{2} ds}_{f_\alpha} + \underbrace{\left(\frac{\|\nabla \cdot \mathbf{u}\|_\infty}{2} + \frac{1}{2\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon} \right)}_{g_\alpha(t)} \|\alpha\|_0^2 + \underbrace{\frac{1}{2} \|\bar{\alpha}\|^2}_{f_\alpha}$$

Koristićemo Grönwall-ovu lemu (1.3.1) kako bismo dobili odgovarajuću ocenu za α .

$$\|\alpha\|^2 \leq e^{g_\alpha(t)} (\|\alpha_0\|^2 + \int_0^t e^{-g_\alpha(\tau)} \|f_\alpha\| d\tau).$$

Na isti način posmatraćemo jednačinu (5.1)

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

$$\partial_t \rho + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u}$$

Množeći prethodnu jednačinu sa ρ i integraljenjem nad Ω , dobija se:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\rho\|^2 + \langle \mathbf{u} \cdot \nabla \rho, \rho \rangle = \langle -\rho \nabla \cdot \mathbf{u}, \rho \rangle$$

Na osnovu nejednakosti Cauchy-Schwartz-a

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\rho\|^2 = - \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \nabla \rho dx - \int_{\Omega} \rho^2 \nabla \cdot \mathbf{u} dx = - \int_{\Gamma_e} \mathbf{u}_e \cdot n \frac{\rho_e^2}{2} ds - \int_{\Gamma_s} \mathbf{u} \cdot n \frac{\rho^2}{2} ds - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho^2 \nabla \cdot \mathbf{u} dx$$

na osnovu pretpostavki datih u Poglavlju 4-LMNC Model dobija se

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\rho\|^2 \leq - \int_{\Gamma_e} \mathbf{u}_e \cdot n \frac{\rho_e^2}{2} ds + \frac{1}{2} \|\rho\|^2 \|\nabla \cdot \mathbf{u}\|_\infty \quad (5.7)$$

Imamo:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\rho\|^2 \leq \underbrace{- \int_{\Gamma_e} \mathbf{u}_e \cdot n \frac{\rho_e^2}{2} ds}_{f_\rho} + \underbrace{\frac{1}{2} \|\nabla \cdot \mathbf{u}\|_\infty \|\rho\|_0^2}_{g'_\rho(t)}$$

Na osnovu Grönwall-ove leme dobijamo odgovarajuću ocenu za ρ .

$$\|\rho\|_0^2 \leq e^{g_\rho(t)} (\|\rho_0\|^2 + \int_0^t e^{-g_\rho(\tau)} \|f_\rho\| d\tau)$$

Kako je eksplisitno rešenje (5.4) dobijeno Metodom karakteristika izvodi se ocena energije H^3 za α i ρ . Za α se dobija:

$$\|\alpha\| \leq \|\alpha_e(t^*, \chi(t^*; t, x))\| \|e^{\frac{1}{\epsilon}(t-t^*)}\| + \|F(t) - F(t^*)\|,$$

gde funkcija F zadovoljava $F(t) - F(t^*) = \int_{t^*}^t \frac{\bar{\alpha}(s, \chi(s; t, x))}{\epsilon} e^{-\frac{1}{\epsilon}(t-s)} ds$. Tada za ρ na sličan način dobijamo:

$$\|\rho\| \leq \|\rho_e(t^*, \chi(t^*; t, x))\| \|e^{G(t^*) - G(t)}\|,$$

gde funkcija G zadovoljava $G(t^*) - G(t) = - \int_{t^*}^t \frac{\beta(\alpha(s, \chi(s; t, x)))}{p_*} \Phi_* ds$.

5.1.2 Kontrakcija za ρ i α

Posmatraćemo jaku konvergenciju niza α^k u slaboj normi. Ovo ćemo uraditi pomoću nejednakosti kontrakcije.

$$\partial_t(\alpha^{k+1} - \alpha^k) + \mathbf{u}^k \nabla(\alpha^{k+1} - \alpha^k) + (\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}) \nabla \alpha^k = \frac{1}{\epsilon}(\alpha^{k+1} - \alpha^k)$$

Ponavljamo isti metod. Množeći prethodnu jednačinu sa $\alpha^{k+1} - \alpha^k$ i integracijom nad Ω dobijamo sledeće

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\alpha^{k+1} - \alpha^k\|^2 &\leq - \int_{\Gamma_e} \mathbf{u}_e^k \cdot \mathbf{n} \frac{(\alpha_e^{k+1} - \alpha_e^k)^2}{2} + \frac{1}{\epsilon} \|\alpha^{k+1} - \alpha^k\|^2 \\ &\quad + \frac{\|\nabla \mathbf{u}^k\|_\infty}{2} \|\alpha^{k+1} - \alpha^k\|^2 + \|\nabla \alpha^k (\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1})\| \|\alpha^{k+1} - \alpha^k\| \end{aligned} \quad (5.8)$$

Na osnovu Grönwall-ove leme dobija se

$$\begin{aligned} e^{-g(t)} \|\alpha^{k+1} - \alpha^k\| &\leq \int_0^t e^{-g(\tau)} \|\nabla \alpha^k (\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1})\| d\tau \\ &\leq C_M \|\alpha^k\| \int_0^t e^{-g(\tau)} \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}\| d\tau, \end{aligned}$$

gde je $g'(t) = \frac{1}{\epsilon} + \frac{\|\nabla \mathbf{u}^k\|_\infty}{2}$. Na isti način pokazujemo konvergenciju niza ρ^k . Imamo

$$\partial_t(\rho^{k+1} - \rho^k) + \mathbf{u}^k (\nabla \rho^{k+1} - \nabla \rho^k) + \nabla \rho^k (\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}) = (\rho^{k+1} - \rho^k) \nabla \cdot \mathbf{u}^k - \rho^k (\nabla \cdot \mathbf{u}^k - \nabla \cdot \mathbf{u}^{k-1})$$

Množeći prethodnu jednačinu sa $\rho^{k+1} - \rho^k$ i integracijom nad Ω dobija se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\rho^{k+1} - \rho^k\|^2 &\leq - \int_{\Gamma_e} \mathbf{u}_e^k \cdot \mathbf{n} \frac{(\rho_e^{k+1} - \rho_e^k)^2}{2} + \frac{\|\nabla \cdot \mathbf{u}^k\|_\infty}{2} \|\rho^{k+1} - \rho^k\|^2 + \|\nabla \cdot \mathbf{u}^k\|_\infty \|\rho^{k+1} - \rho^k\|^2 \\ &\quad - \|\nabla \rho^k (\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1})\| \|\rho^{k+1} - \rho^k\| + \|\rho^{k+1} - \rho^k\| \|\rho^k (\nabla \cdot \mathbf{u}^k - \nabla \cdot \mathbf{u}^{k-1})\| \end{aligned} \quad (5.9)$$

Preuređivanjem jednačine i deljenjem iste sa $\|\rho^{k+1} - \rho^k\|$ dobija se

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\rho^{k+1} - \rho^k\| \leq \frac{3}{2} \|\nabla \cdot \mathbf{u}^k\|_\infty \|\rho^{k+1} - \rho^k\| - \|\nabla \rho^k (\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1})\| + \|\rho^k (\nabla \cdot \mathbf{u}^k - \nabla \cdot \mathbf{u}^{k-1})\|$$

Na osnovu Grönwall-ove leme (1.3.1) dobija se sledeće

$$\begin{aligned} e^{-g(t)} \|\rho^{k+1} - \rho^k\| &\leq \int_0^t e^{-g(\tau)} \left(\|\rho^k (\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1})\| - \|\nabla \rho^k (\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1})\| \right) d\tau \\ &\leq C_M \|\rho^k\| \int_0^t e^{-g(\tau)} \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}\| d\tau, \end{aligned}$$

gde je $g'(t) = \frac{3\|\nabla \cdot \mathbf{u}^k\|_\infty}{2}$

5.2 Rešavanje eliptične jednačine

Lema 5.2.1

Kao što smo ranije videli \mathbf{u} se dekompozicijom rastavlja na nestišljivu komponentu i vektorsko polje, $\mathbf{u} = w + \nabla \phi$. Stoga, ako nam je poznato da je $\mathbf{u} \in L_t^\infty(H_x^3) \cap L_t^2(H_x^4)$, može se pokazati da je $\phi \in L_t^\infty(H_x^4) \cap L_t^2(H_x^5)$.

Napomena 5.2.2 Primetimo da ako imamo potencijalno vektorsko polje, tj. $\mathbf{u} = \nabla \phi$, znamo da rešenje sigurno postoji.

Neka je data funkcija $\Phi \in C^\infty([0, +\infty])$ i $\beta \in C^\infty(0, 1)$, tada za eliptičnu jednačinu

$$\begin{cases} \Delta \phi = \frac{\beta(\alpha)\Phi_*}{p_*}, \\ \nabla \phi \cdot \mathbf{n} = -v_e \quad \text{on} \quad \Gamma_e, \\ \nabla \phi \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_{lat}, \\ \phi = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_s. \end{cases} \quad (5.10)$$

postoji jedinstveno rešenje. Množeći jednačinu (5.10) sa ϕ i integracijom nad Ω dobijamo sledeće:

$$\int_\Omega \Delta \phi \cdot \phi \, dx = \int_\Omega \phi \cdot \frac{\beta(\alpha)}{p_*} \Phi_* \, dx$$

Parcijalna integracija, nejednakost Cauchy-Schwarz-a i granični uslovi nam daju :

$$\int_{\Gamma_e} \phi \nabla \phi \cdot \mathbf{n} \, ds - \int_\Omega \nabla \phi^2 \, dx = \int_\Omega \phi \cdot \frac{\beta(\alpha)}{p_*} \Phi \, dx$$

$$\|\nabla \phi\|^2 \leq - \int_{\Gamma_e} \phi v_e \, ds + |\Phi| \|\phi\| \left\| \frac{\beta(\alpha)}{p_*} \right\|$$

Na osnovu nejednakosti Poincaré-Writinger-a $\|\phi\| \leq \underbrace{C(s, \Omega)}_{C_{PW}} \|\nabla \phi\|$ dobija se

$$\|\nabla \phi\|^2 \leq - \int_{\Gamma_e} \phi v_e \, ds + C_{PW} |\Phi| \|\phi\| \left\| \frac{\beta(\alpha)}{p_*} \right\|$$

Koristeći Young-ovu nejednakost i preuređivanjem članova u jednačini dobija se

$$\begin{aligned} \|\nabla\phi\|^2 &\stackrel{(1.3.5)}{\leqslant} -\int_{\Gamma_e} \phi v_e \, ds + C_{PW} \left(\frac{|\Phi|^2}{2} + \frac{\|\nabla\phi\|^2}{2} \right) \left\| \frac{\beta(\alpha)}{p_*} \right\| \\ &\leqslant \frac{C_{PW}}{C_\beta} \left(-\int_{\Gamma_e} \phi v_e \, ds + \frac{|\Phi|^2}{2} C_\beta \right) \end{aligned}$$

Primenom teoreme o tragu T.1.2.3 dobijamo

$$\|\nabla\phi\|^2 \leqslant \frac{C_{PW}}{C_\beta} \left(-v_e \|\phi\|_{H^1} + \frac{|\Phi|^2}{2} C_\beta \right)$$

Kako bismo pokazali da $\phi \in L_t^\infty(H_x^4) \cap L_t^2(H_x^5)$ biće nam potrebne ocene višeg reda.

Lema 5.2.3

$$D^k(\Delta\phi) = \Delta(D^k\phi). \quad (5.11)$$

Na osnovu leme L.5.2.3

$$\Delta(D^k\phi) = D^k \left(\frac{\beta(\alpha)\Phi_*}{p_*} \right)$$

Ponovo, množenjem jednačine (5.11) sa $D^k\phi$ i integracijom nad Ω dobija se

$$\|\nabla D^k\phi\|_0^2 \leqslant \|D^k\phi\| \left\| D^k \left(\frac{\beta(\alpha)\Phi_*}{p_*} \right) \right\|,$$

korištenjem parcijalne integracije i nejednakosti Cauchy-Schwarz-a (1.1). Primenom graničnih uslova višeg reda iz (5.10) u nastavku izvođenja dokaza nemamo problema sa parcijalnom integracijom na granici.

Sumiranjem nejednakosti po multi indexu k, gde je dužina $|k| = n$ dobijamo

$$\|\nabla\phi\|_n^2 \leqslant \|\phi\|_n \left\| \frac{\beta(\alpha)\Phi_*}{p_*} \right\|_n$$

Kako nam je regularnost funkcije $\beta(\alpha)$ poznata samo iz leme L.5.1.6 jedino što možemo zaključiti iz ovog dela je da je i regularnost funkcije ϕ takođe $\phi \in L_t^\infty(H_x^4)$.

Napomena 5.2.4 Kako smo već napomenuli da kada je $\alpha \in L_t^\infty(H_x^4)$ tada znamo da je funkcija ϕ u istom funkcionalnom prostoru. Stoga moramo pretpostaviti da je funkcija α dovoljno glatka kako bismo dobili $\phi \in L_t^\infty(H_x^4) \cap L_t^2(H_x^5)$.

5.3 Rešavanje linearizovane nestišljive Navier-Stokes-ove jednačine

Primetimo da jednačinu (3.2) možemo preformulisati na sledeći način

$$\rho(\partial_t \mathbf{w} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w}) + \nabla \mathcal{P} - \mu \Delta \mathbf{w} = \rho \mathbf{g} - [\rho(\partial_t \nabla \phi + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \nabla \phi) - (2\mu + \eta) \Delta \nabla \phi]$$

i

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = 0.$$

Takođe jednačinu momenta možemo zapisati

$$\partial_t \mathbf{w} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w} + \frac{\nabla \mathcal{P}}{\rho} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}) = \mathbf{g} - (\partial_t \nabla \phi + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \nabla \phi) + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla \phi) \quad (5.12)$$

Neka su $\langle \cdot, \cdot \rangle$ and $* :: *$ skalarni proizvodi vektora na \mathbb{R}^2 i $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, respektivno. Množeći jednačinu momenta (5.12) sa w i integracijom nad Ω dobijamo sledeće

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{w}\|^2 - \int_{\Omega} \left[\frac{|\mathbf{w}|^2}{2} \nabla \cdot \mathbf{u} - \frac{\mathcal{P}}{\rho} \langle \nabla \cdot \mathbf{w}, \rho \rangle - \frac{\mathcal{P}}{\rho^2} \langle \mathbf{w}, \nabla \rho \rangle - \frac{1}{\rho} |\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w})|^{2[8]} + \frac{1}{\rho^2} \langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}) \nabla \rho, \mathbf{w} \rangle \right] dx \\ & - \int_{\Omega} \left[\langle \mathbf{g}, \mathbf{w} \rangle - \langle \partial_t \nabla \phi, \mathbf{w} \rangle - \langle (\text{Hess} \phi) \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle - \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma}(\nabla \phi) :: \nabla \mathbf{w} + \frac{1}{\rho^2} \langle \boldsymbol{\sigma}(\nabla \phi) \nabla \rho, \mathbf{w} \rangle \right] dx \\ & = \int_{\partial \Omega} \left[- \frac{|\mathbf{w}|^2}{2} \langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle - \frac{\mathcal{P}}{\rho} \langle \mathbf{w}, \mathbf{n} \rangle + \frac{1}{\rho} \langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}) \mathbf{n}, \mathbf{w} \rangle + \frac{1}{\rho} \langle \boldsymbol{\sigma}(\nabla \phi) \mathbf{n}, \mathbf{w} \rangle \right] ds \\ & = \int_{\Gamma_e} \left[- \frac{|\langle \nabla \phi, \boldsymbol{\tau} \rangle|^2}{2} \langle \mathbf{u}_e, \mathbf{n} \rangle + \frac{1}{\rho_e} \langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}) \mathbf{n}, \mathbf{w} \rangle + \frac{1}{\rho_e} \langle \boldsymbol{\sigma}(\nabla \phi) \mathbf{n}, \mathbf{w} \rangle \right] ds - \int_{\Gamma_s} \frac{|\mathbf{w}|^2}{2} \langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle ds \end{aligned} \quad (5.13)$$

gde smo koristili dekompoziciju na sledeći način $\mathbf{w} = \langle \mathbf{w}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n} + \langle \mathbf{w}, \boldsymbol{\tau} \rangle \boldsymbol{\tau}$ i gde su korišteni granični uslovi iz Poglavlja Hodge-ova dekompozicija [3]. Tokom proračuna susreli smo se sa poteškoćom da kontrolišemo član na granici Γ_e

$$\langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}) \mathbf{n}, \mathbf{w} \rangle = \mu \partial_1 \phi \partial_2 w_1.$$

Problem proizilazi iz činjenice da ovaj član nije dat kao ulazni parametar niti je nula. Stoga, bi jedini način kontrole bio primena teoreme o tragu T.1.2.3, što bi dalje vodilo do sledeće ocene $\|\mathbf{w}\|_{H^2}$. Ovo nije dovoljno da zatvorimo ocenu i imamo potpunu kontrolu.

Vratićemo se na početak i pokušaćemo da pristupimo ovom problemu iz drugog ugla. Umesto posmatranja jednačine po funkciji w koju smo dobili pomoću gore pomenuće Hodge-ove dekompozicije, posmatra se sledeće

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla \mathcal{P} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{g}. \quad (5.14)$$

Množenjem (5.14) sa \mathbf{u} i integracijom nad Ω zaključujemo da sa štarnim "graničnim

[8] Ovde koristimo činjenicu da je $\nabla w \sim \boldsymbol{\sigma}(w)$

uslovima i dalje postoji problem kontrolisanja pojedinih članova na granici Γ_s :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\boldsymbol{u}\|^2 + \int_{\Gamma} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} \frac{|\boldsymbol{u}|^2}{2} ds - \int_{\Omega} \frac{|\boldsymbol{u}|^2}{2} \nabla \cdot \boldsymbol{u} dx \\ + \int_{\Gamma} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} \frac{1}{\rho} \mathcal{P} ds - \int_{\Omega} \mathcal{P} \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \boldsymbol{u} \right) dx \\ - \int_{\Gamma} \boldsymbol{u} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{n} ds + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) :: \nabla \boldsymbol{u} dx = \int_{\Omega} \boldsymbol{u} g dx \quad (5.15) \end{aligned}$$

Tada koristeći osobinu simetričnosti vektora $\nabla \boldsymbol{u}$ može se pokazati da je $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) :: \nabla(\boldsymbol{u})$ jednako sa $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) :: \mathbf{D}(\boldsymbol{u})^{[2]}$.

Što je dalje jednako $\mu |\mathbf{D}(\boldsymbol{u})|^2 + \eta (\nabla \cdot \boldsymbol{u})^2$, gde je $\eta < 0$. Primetimo da su sada oba člana pod kontrolom gde je kontrola prvog član Posledica Korn-ove nejednakosti 1.3.6.

Na granici $\Gamma_i, i \in \{e, lat, s\}$ dobijamo sledeće članove

$$= - \int_{\Gamma_e} \left[\frac{v_e^3}{2} + \frac{1}{\rho} v_e \mathcal{P} \right] ds - \int_{\Gamma_s} \left[u_2 \frac{u_1^2}{2} + u_2 \frac{u_2^2}{2} + u_2 \frac{1}{\rho} \mathcal{P} - \frac{1}{\rho} [u_1 \sigma_{12} + u_2 (\sigma_{22} - \frac{3}{2} (\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2))] \right] ds \quad (5.16)$$

Sve članove na granici Γ_e moguće je kontolisati pomoću teoreme o tragu T.1.2.3. Kao što smo već napomenuli problem je zapravo kontrola članova na granici Γ_s .

Jednačinu (5.16) na granici Γ_s ćemo napisati u vektorskem obliku. Ovo smo uradili kako bismo pomogli čitaocu da lakše uoči primenu "novog" uslova.

$$- \int_{\Gamma_s} \left[(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}) \frac{|\boldsymbol{u}|^2}{2} + \frac{1}{\rho} \boldsymbol{u} \mathcal{P} \cdot \boldsymbol{n} + \frac{1}{\rho} \boldsymbol{u} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{n} \right] ds$$

Sada primenjujemo "novi" granični uslov dat na Γ_s sledećim izrazom

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) \boldsymbol{n} - \mathcal{P} \boldsymbol{n} - \frac{1}{2} \rho (\bar{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{n})^- = 0.$$

Na osnovu novog uslova i činjenice da je $(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}^+ + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}^-) = (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n})$ i $z^- = \frac{z-|z|}{2} \leq 0$, Cauchy-Schwarz-ovu nejednakost (1.1) i Young-ovu nejednakost (1.3.5) uspevamo da kontrolišemo svaki član

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 + \frac{1}{\rho^*} \|\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u})\|^2 \leq f + c \|u\|^2, \quad (5.17)$$

gde je funkcija f data sa $\int_{\Gamma_e} \frac{v_e^3}{2} + \frac{1}{\rho_e} v_e \|\mathcal{P}\|_1^2 + \frac{1}{\rho^*} \|\nabla \cdot u\|_\infty \|\mathcal{P}\| + \frac{1}{2} \|g\|^2$ i c je data sa $\frac{\|\nabla \cdot u\|_\infty}{2} + \frac{1}{2}$.

U cilju dobijanja ocena energije višeg reda posmata se slučaj $0 < |\alpha| = k$, i primenjuje se operator D^α na jednačinu (5.14). Tada se dobija jednačina istog oblika

$$\partial_t D^\alpha \boldsymbol{u} + (\bar{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla) D^\alpha \boldsymbol{u} + \frac{1}{\rho} \nabla D^\alpha \mathcal{P} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(D^\alpha \boldsymbol{u}) = D^\alpha G, \quad (5.18)$$

gde je

$$D^\alpha G = D^\alpha \mathbf{g} + [D^\alpha, \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla] \mathbf{u} - [D^\alpha, \frac{1}{\rho} \nabla \cdot] \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + [D^\alpha, \frac{1}{\rho} \nabla] \mathcal{P}.$$

Primenjujući prethodno dobijenu nejednakost (5.17) na jednačinu (5.18) sa sledećim graničnim uslovima.

Primetimo da se ovde javljaju dve vrste graničnih uslova. Oni koji se prirodno postavljaju iz graničnih uslova u redu 0 i one koje moramo sami nametnuti kako bismo našli ocenu.

- Na Γ_e imamo

$$D^\alpha \mathbf{u} = D^\alpha \mathbf{u}_{\alpha_e}, \text{ gde nam je } D^\alpha \mathbf{u}_{\alpha_e} \text{ poznato.}$$

- Na Γ_{lat} imamo

$$D^\alpha \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \boldsymbol{\sigma}(D^\alpha \mathbf{u}) \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0,$$

gde su \mathbf{n} i $\boldsymbol{\tau}$ dati jedinični vektor normale i isti tangentni vektor na granici.

- Na Γ_s imamo

$$\boldsymbol{\sigma}(D^\alpha \mathbf{u}) \mathbf{n} - \mathcal{P} \mathbf{n} - \frac{1}{2} \rho (\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n})^- = 0.$$

Dalje vidimo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|D^\alpha \mathbf{u}\|^2 + \|\boldsymbol{\sigma}(D^\alpha \mathbf{u})\|^2 &\leq C_1 \|D^\alpha \mathbf{u}\|^2 + \\ f_{BC} + \frac{1}{\rho^*} \|D^\alpha \mathcal{P}\| \|D^\alpha (\nabla \cdot \mathbf{u})\| + |\langle D^\alpha G, D^\alpha \mathbf{u} \rangle|, \end{aligned} \quad (5.19)$$

gde je C_1 dato sa $\frac{\|\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}\|_\infty}{2}$.

Dalje smo zainteresovani za ocenu poslednjeg člana u desnoj strani jednačine (5.19). Prvo koristićemo izvod složene funkcije kako bismo proširili drugi član sledećeg izraza

$$\begin{aligned} [D^\alpha, \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla] \mathbf{u} &= (D^\alpha((\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \mathbf{u}) - \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla(D^\alpha \mathbf{u}))_i \\ &= \sum_j \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} D^\beta \bar{\mathbf{u}}_j \partial_j D^{\alpha-\beta} \mathbf{u}_i - (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) D^\alpha \mathbf{u}_i \\ &= \sum_{\substack{k,j \\ \beta \leq \alpha - e_k}} \binom{\alpha}{\beta + e_k} D^\beta (\partial_k \bar{\mathbf{u}}_j) D^{\alpha-\beta-e_k} (\partial_j \mathbf{u}_i) \end{aligned}$$

Množenjem prethodno dobijenog izraza sa $D^\alpha \mathbf{u}$ i na osnovu Cauchy-Schwarz-ove nejednakosti (1.3.4) i leme L.1.3.8 sa $|\beta| = k - 1$ dobija se

$$\langle [D^\alpha, \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla] \mathbf{u}, D^\alpha \mathbf{u} \rangle \leq \|D^\alpha \mathbf{u}\| C_2 \|D \bar{\mathbf{u}}\|_{max\{k-1, s_0\}} \|D \mathbf{u}\|_{k-1}. \quad (5.20)$$

Za drugi član $D^\alpha G$ koristimo iste osobine kako bismo dobili

$$\langle [D^\alpha, \frac{1}{\rho} \nabla] \mathcal{P}, D^\alpha \mathbf{u} \rangle \leq \|D^\alpha \mathbf{u}\| C_3 \left\| D \frac{1}{\rho} \right\|_{max\{k-1, s_0\}} \|D \mathcal{P}\|_{k-1}. \quad (5.21)$$

Ponavljamo isti postupak i za poslednji član

$$\langle [D^\alpha, \frac{1}{\rho} \nabla \cdot] \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}), D^\alpha \mathbf{u} \rangle \leq \|D^\alpha \mathbf{u}\| C_4 \left\| D \frac{1}{\rho} \right\|_{max\{k-1, s_0\}} \|\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\|_{k-1}. \quad (5.22)$$

Ubacujemo nejednakosti (5.20), (5.21) i (5.22) u jednačinu (5.19) i time dobijamo sledeće

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|D^\alpha \mathbf{u}\|^2 + \frac{1}{\rho^*} \|\boldsymbol{\sigma}(D^\alpha \mathbf{u})\|^2 &\leq C_1 \|D^\alpha \mathbf{u}\|^2 + f_{BC} + \frac{1}{\rho^*} \|D^\alpha \mathcal{P}\| \|D^\alpha (\nabla \cdot \mathbf{u})\| \\ &+ \|D^\alpha \mathbf{u}\| \left[C_2 \|D \bar{\mathbf{u}}\|_{max\{k-1, s_0\}} \|D \mathbf{u}\|_{k-1} + C_3 \left\| D \frac{1}{\rho} \right\|_{max\{k-1, s_0\}} \|D \mathcal{P}\|_{k-1} \right. \\ &\quad \left. + C_4 \left\| D \frac{1}{\rho} \right\|_{max\{k-1, s_0\}} \|\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\|_{k-1} \right] \end{aligned}$$

Sumiraćemo sada nejednakost za sve multi-index-e $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $|\alpha| = k$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}\|_k^2 + \frac{1}{\rho^*} \|\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\|_k^2 &\leq C_1 \|\mathbf{u}\|_k^2 + f_{BC} + \frac{1}{\rho^*} \|\mathcal{P}\|_k \|\nabla \cdot \mathbf{u}\|_\infty \\ &+ \|\mathbf{u}\|_k \left[C_2 \|D \bar{\mathbf{u}}\|_{max\{k-1, s_0\}} \|D \mathbf{u}\|_{k-1} + C_3 \left\| D \frac{1}{\rho} \right\|_{max\{k-1, s_0\}} \|D \mathcal{P}\|_{k-1} \right. \\ &\quad \left. + C_4 \left\| D \frac{1}{\rho} \right\|_{max\{k-1, s_0\}} \|\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\|_{k-1} \right] \end{aligned}$$

Tada možemo primeniti Young-ovu nejednakost (1.3.5) na svaki član pojedinačno. Tada dobijamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}\|_k^2 + \frac{1}{\rho^*} \|\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\|_k^2 &\leq f_{BC} + \frac{1}{\rho^*} \|\mathcal{P}\|_k \|\nabla \cdot \mathbf{u}\|_\infty \\ &+ \|\mathbf{u}\|_k^2 \left[C_1 + C_2 \|D \bar{\mathbf{u}}\|_{max\{k-1, s_0\}} + \left(\frac{1}{2\epsilon_1} C_3^2 + \frac{1}{2\epsilon_2} C_4^2 \right) \left\| D \frac{1}{\rho} \right\|_{max\{k-1, s_0\}}^2 \right] + \\ &\quad \frac{\epsilon_1}{2} \|\mathcal{P}\|_k^2 + \frac{\epsilon_2}{2} \|\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\|_{k-1}^2 \end{aligned}$$

Biramo sada $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{1}{2\rho^*}$ tako da $\epsilon_1 + \epsilon_2 = \frac{1}{\rho^*}$. Pojednostavićemo prethodnu jednačinu množenjem sa $\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho^*} \left(\frac{d}{dt} \|\mathbf{u}\|_k^2 + \|\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\|_k^2 \right) &\leq f_{BC} + \frac{1}{\rho^*} \|\mathcal{P}\|_k \|\nabla \cdot \mathbf{u}\|_\infty \\ &+ \|\mathbf{u}\|_k^2 \left[C_1 + C_2 \|D \bar{\mathbf{u}}\|_{max\{k-1, s_0\}} + \rho^* (C_3^2 + C_4^2) \left\| D \frac{1}{\rho} \right\|_{max\{k-1, s_0\}}^2 \right] + \frac{1}{4\rho^*} \|\mathcal{P}\|_k^2 \end{aligned}$$

I sada konačno primenom Grönwall-ove leme 1.3.1 dobija se

$$\|\mathbf{u}\|_k^2 + e^{g(t)} \int_0^T e^{-g(\tau)} \|\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\|_k^2 d\tau \leq e^{g(t)} \left(\|\mathbf{u}_0\|_k^2 + \int_0^T e^{-g(\tau)} \|F\| d\tau \right)$$

gde je $g(t) = C_1 + C_2 \|D\bar{\mathbf{u}}\|_{\max\{k-1, s_0\}} + \rho^*(C_3^2 + C_4^2) \|D\frac{1}{\rho}\|_{\max\{k-1, s_0\}}^2$ i $F = f_{BC} + \frac{1}{\rho^*} \|\mathcal{P}\|_k \|\nabla \cdot \mathbf{u}\|_\infty + \frac{1}{4\rho^*} \|\mathcal{P}\|_k^2$.

Kao što je moguće videti u Poglavlju Iterativni sistem s obzirom da je sistem veoma povezan moramo istovremeno posmatrati i jednačinu za solenoidno vektorsko polje i jednačinu za pritisak. Stoga je potrebno i za jednačinu za pritisak pronaći ocenu i pokazati kontrakciju.

Sledeća teorema pokazuje jedinstvenost rešenja, ali je u navedenoj literaturi dokazana samo na torusu. Ovde ćemo dati teoremu bez dokaza s obzirom na složenost graničnih uslova.

Lema 5.3.1 (Pretpostavka 2.3, [1])

Neka su $w_0 \in H^s$, $f \in H^{s-2}$, $u \in H^{s-1}$, $\rho \in H^{s-1}$, $\rho_* \in [0, 1]$ i $\mu > 0$. Pretpostavka $s \geq s_0 + 2$, $\nabla \cdot w_0 = 0$ i $\rho_* \leq \rho(t, x) \leq \frac{1}{\rho_*}$. Tada postoji klasično rešenje $(w, \pi) \in H^s \times H^{s-2}$ za

$$\begin{cases} \rho(\partial_t \mathbf{w} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w}) - \mu \Delta \mathbf{w} + \nabla \pi + f = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{w} = 0 \\ w(0, \cdot) = w_0 \end{cases} \quad (5.23)$$

Sledeća lema će biti korisna u nalaženju gornje granice za \mathcal{P}^{k+1} .

Lema 5.3.2 (Lema 2.16, [1])

Neka je $\rho \in H^s$ ($\rho_* \leq \rho(x) \leq \rho_*^{-1}$, $\rho_* \in [0, 1]$) i $f \in H^{s-1}$ ($\int f(x) dx = 0$). Tada postoji jedinstveno rešenje za $\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla \mathcal{P}\right) = f \in H^{s+1}$ i za $s \geq 1$ važi

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{\rho} \nabla \mathcal{P} \right\|_s &\leq C_{ell,1}(s, d) \|f\|_{s-1} \\ \|\nabla \mathcal{P}\|_s &\leq C_{ell,2}(s, d, \rho, \rho_1) \|\rho f\|_{s-1} \end{aligned}$$

Ocena za $\nabla \mathcal{P}^{k+1}$:

Koristimo jednačinu $\partial_t \mathbf{u}^{k+1} - (\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \mathbf{u}^{k+1} - \frac{1}{\rho^k} \mu \Delta \mathbf{u}^{k+1} = -\frac{1}{\rho^k} \nabla \mathcal{P}^{k+1} + \mathbf{g} - \frac{1}{\rho^k} \mu \nabla \left(\frac{\beta}{p^*} \Phi\right)$ i primenićemo divergenciju. Koristimo pomoć iz dokaza koju smo pronašli u literaturi [1]. (Lemma 2.17)

$$\begin{cases} \nabla \cdot ((\mathbf{u} \cdot \nabla) P^{[9]} \mathbf{w}) = \nabla^t \mathbf{u} : \nabla P \mathbf{w} + \mathbf{u} \cdot \nabla \cdot (\nabla P \mathbf{w}) = \nabla^t \mathbf{u} : \nabla P \mathbf{w} + \mathbf{u} \cdot \nabla (\nabla \cdot P \mathbf{w}) \\ \quad = \nabla^t \mathbf{u} : \nabla P \mathbf{w} \\ \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \mu \Delta P \mathbf{w}\right) = \mu \nabla \left(\frac{1}{\rho}\right) \Delta P \mathbf{w} + \frac{\mu}{\rho} \nabla \cdot (\Delta P \mathbf{w}) = \mu \nabla \left(\frac{1}{\rho}\right) \Delta P \mathbf{w} \end{cases} \quad (5.24)$$

I dobijamo sledeću jednačinu

$$\nabla \left(\frac{1}{\rho^k} \nabla \mathcal{P}^{k+1}\right) = -\nabla^t \mathbf{u}^k : \underbrace{\nabla \mathbf{u}^{k+1} + \mu \nabla \frac{1}{\rho^k} \Delta \mathbf{u}^{k+1} - \mu \nabla \frac{1}{\rho^k} \nabla \left(\frac{\beta}{p^*} \Phi\right) + \frac{1}{\rho^k} \mu \Delta \left(\frac{\beta}{p^*} \Phi\right)}_{f_P} \quad (5.25)$$

[9] Uz Hodge-ovu dekompoziciju $\mathbf{u} = \mathbf{w} + \nabla \phi$ definišemo i ortogonalne projekcije P i Q na sledeći način $P\mathbf{u} = \mathbf{w}$ i $Q\mathbf{u} = \nabla \phi$

Znamo da je $\nabla \mathcal{P}^{k+1}$ rešenje jednačine (5.25).

Želimo da pronađemo gornju granicu za rešenje jednačine (5.25). Na osnovu leme L.5.3.2 dobija se

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{1}{\rho^k} \nabla \mathcal{P}^{k+1} \right\|_{s-2}^2 \leq C_{ell,1} \| f_{\mathcal{P}} \|_{s-3}^2 \\
& \left\| \frac{1}{\rho^k} \nabla \mathcal{P}^{k+1} \right\|_{s-2}^2 \leq C_{ell,1} \left\| -\nabla^t \mathbf{u}^k : \nabla \mathbf{u}^{k+1} + \mu \nabla \frac{1}{\rho^k} \Delta \mathbf{u}^{k+1} - \mu \nabla \frac{1}{\rho^k} \nabla \left(\frac{\beta}{p^*} \Phi \right) + \frac{1}{\rho^k} \mu \Delta \left(\frac{\beta}{p^*} \Phi \right) \right\|_{s-3}^2 \\
& \leq C_{ell,1} C_M \left(\left\| \nabla \mathbf{u}^k \right\|_{s-2}^2 \left\| \nabla \mathbf{u}^{k+1} \right\|_{s-2}^2 + \frac{\mu}{\rho^*} \left\| \nabla \rho^k \right\|_{s-1}^2 \left\| \nabla \frac{\beta}{p^*} \Phi \right\|_{s-1}^2 + \frac{\mu}{\rho^*} \left\| \nabla \rho^k \right\|_{s-1}^2 \left\| \Delta \frac{\beta}{p^*} \Phi \right\|_{s-2}^2 \right) \\
& \leq C_{ell,1} C_M \left(\left\| \mathbf{u}^k \right\|_{s-1}^2 \left\| \mathbf{u}^{k+1} \right\|_{s-1}^2 + \frac{\mu}{\rho^*} \left\| \rho^k \right\|_s^2 \left\| \frac{\beta}{p^*} \Phi \right\|_s^2 + \frac{\mu}{\rho^*} \left\| \rho^k \right\|_s^2 \left\| \frac{\beta}{p^*} \Phi \right\|_s^2 \right) \\
& \leq C_{ell,1} C_M \left(\left\| \mathbf{u}^{k+1} \right\|_{s-1}^2 \left(\left\| \mathbf{u}^k \right\|_{s-1}^2 + \frac{\mu}{\rho^*} \left\| \rho^k \right\|_s^2 \left\| \frac{\beta}{p^*} \Phi \right\|_s^2 \right) + \frac{\mu}{\rho^*} \left\| \rho^k \right\|_s^2 \left\| \frac{\beta}{p^*} \Phi \right\|_s^2 \right)
\end{aligned} \tag{5.26}$$

U nastavku će nam biti potrebna ocena $\left\| \mathbf{u}^{k+1} \right\|_{s-1}$. Pretpostavka je da je $s \geq s_0 + 3$. Postoji $R_1 > 0$ dovoljno veliko tako da za sve $k \in \mathbb{N}$ imamo sledeću ocenu

$$\bullet \quad \left\| \mathbf{u}^k \right\|_{s-1,T} \leq R_1$$

Pokazaćemo ovo pomoću rekurzije. Biramo R_1 tako da

$$\left\| \mathbf{u}_0 \right\|_{s-1} < R_1$$

Stroga će nejednakost biti ključna u dokazivanju. Pretpostavimo da je ocena tačna za k -tu iteraciju na intervalu $[0, T]$, gde rešenje postoji.

Znamo da je u^{k+1} rešenje sledeće jednačine

$$\rho^k (\partial_t \mathbf{u}^{k+1} + (\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \mathbf{u}^{k+1}) - \mu \Delta \mathbf{u}^{k+1} = -\nabla \mathcal{P}^{k+1} + \rho^k \mathbf{g} + \mu \nabla \left(\frac{\beta(\alpha^k) \Phi_*}{p_*} \right)$$

Tada u^{k+1} zadovoljava sledeću ocenu energije

$$\left\| \mathbf{u}^{k+1} \right\|_k^2 + e^{g(t)} \int_0^T e^{-g(\tau)} \left\| \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^{k+1}) \right\|_k^2 d\tau \leq e^{g(t)} \left(\left\| \mathbf{u}_0 \right\|_k^2 + \int_0^T e^{-g(\tau)} \| F \| d\tau \right)$$

Zatim biramo T dovoljno malo tako da je $\left\| \mathbf{u}^{k+1} \right\| < R_1$. Kombinovanjem rezultata dobijenih za pritisak (5.26) i primenom Grönwall-ove leme 1.3.1 dobijamo željenu ocenu za $\left\| \mathbf{u}^{k+1} \right\|_k$.

Primenom leme L.5.3.2 na sledeću jednačinu

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho^k} \nabla (\mathcal{P}^{k+1} - \mathcal{P}^k) \right) = -\nabla^t u^k :: \nabla P(\mathbf{w}^k - \mathbf{w}^{k-1}) + \mu \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho^k} \right) \Delta P(\mathbf{w}^k - \mathbf{w}^{k-1})$$

Dobija se

$$\begin{aligned} \|\nabla(\mathcal{P}^{k+1} - \mathcal{P}^k)\|_{s-2} &\leq C_{ell,2} \left\| \rho^k (-\nabla^t \mathbf{u}^k :: \nabla P(\mathbf{w}^k - \mathbf{w}^{k-1})) + \mu \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho^k} \right) \Delta P(\mathbf{w}^k - \mathbf{w}^{k-1}) \right\|_{s-3} \\ &\leq C_{ell,2} \left\| -\rho^k (\nabla^t \mathbf{u}^k :: \nabla P(\mathbf{w}^k - \mathbf{w}^{k-1})) + \rho^k \mu \frac{1}{\rho^k} \nabla(\ln \rho^k) \Delta P(\mathbf{w}^k - \mathbf{w}^{k-1}) \right\|_{s-3} \\ &\leq C_{ell,2} \left(C_M^2 \|\rho^k\|_{s-1} \|\nabla \mathbf{u}^k\|_{s-2} \|\nabla P(\mathbf{w}^k - \mathbf{w}^{k-1})\|_{s-2} + C_M \mu \|\nabla(\ln \rho^k)\|_{s-2} \|\Delta P(\mathbf{w}^k - \mathbf{w}^{k-1})\|_{s-2} \right) \\ &\leq C_{ell,2} \left(C_M^2 \|\rho^k\|_{s-1} \|\mathbf{u}^k\|_{s-1} \|P(\mathbf{w}^k - \mathbf{w}^{k-1})\|_{s-1} + C_M \mu \|\ln \rho^k\|_{s-1} \|P(\mathbf{w}^k - \mathbf{w}^{k-1})\|_{s-1} \right) \\ &\leq C_{ell,*} \left(\|\rho^k\|_{s-1} \|\mathbf{u}^k\|_{s-1} + \mu \|\ln \rho^k\|_{s-1} \right) \|\mathbf{w}^k - \mathbf{w}^{k-1}\|_{s-1} \\ &\leq C_{ell,**}(s, \rho, d, \mu, u) \|\mathbf{w}^k - \mathbf{w}^{k-1}\|_{s-1} \end{aligned}$$

Kako bi se dobila ocena kontrakcije za pritisak, potrebno je primeniti trik koji je dat u doktorskoj tezi Penel Y.,[1]. Glavna ideja je konstrukcija funkcije koja se sastoji od svih prethodnih ocena kontrakcija funkcija α , ρ i \mathbf{u} .

Dalje je potrebno dobiti rekurzivni niz sledećeg oblika

$$\mathcal{N}^k = v_1 \mathcal{N}^{k-1} + v_2 \mathcal{N}^{k-2}, \text{ gde je } v_1 + v_2 < 1.$$

Glava 6

Zaključak

Ova teza nastala je u saradnji Prirodno-matematičkog fakulteta, Univerziteta u Novom Sadu i Laboratorije MAP5, Univerziteta Paris Descartes, u Parizu.

Model LMNC je predložen u [3]. Tamo je predstavljen model 3-LMNC za jednofazni protok. U [15] je u obzir uzeta i promena faza. Osim toga, mnogo stvari je odrđeno i u numeričkom pogledu ovog modela.

Cilj ovog rada bio je pokazati da je ovaj veoma povezan sistem koji opisuje protok fluida dobro postavljen, tj. da ima rešenje i da je rešenje jedinstveno. Ovaj rad se sastoji od pet poglavlja. U prvom poglavlju dali smo kratak pregled nekih dobro poznatih rezultata iz funkcionalne analize, kao što su prostori L^p , prostori Soboljeva i pomoćne leme koje se koriste u ovoj tezi.

Drugo poglavlje je posvećeno malom uvodu o izvođenju modela, gde smo objasnili izvođenje sistema i dali specifične granične uslove koji su prikladni za ovaj model.

U trećem poglavlju dali smo osnovno sredstvo za bavljenje diferencijalnim sistemima zvano Hodge-ova dekompozicija. I pokazali smo da su uslovi Lax-Milgram-ove teoreme zadovoljeni.

Počeli smo četvrto poglavlje sa objašnjenjem i poznatim koracima koji su neophodni za pokazivanje postojanja i jedinstvenosti. Uspostavili smo glavnu teoremu ovog rada.

Peto poglavlje se sastoji od izračunavanja svake od jednačina sistema. Ovo poglavlje nam je dalo važne karakteristike i procene i samim tim predstavlja dokaz ove teze.

Mnogi problemi javili su se u ovom radu usled složenosti domena na kome radimo, i.e. nuklearni reaktor. Za rešavanje problema dali smo različite pristupe: uvodili smo novu dekompoziciju sistema koji se zove Hodge dekompozicija, uvodili smo nove granične uslove itd. Zbog toga je ovaj rad postao interesantniji, dao mi je iskustvo i jaču matematičku pozadinu. Kako je pet meseci bilo kratko vreme za dublje istraživanje o ovoj temi, nadam se da ćemo nastaviti saradnju.

Dodatak A

Detalji za transportnu jednačinu

U Poglavlju Postojanje i jedinstvenost jakog rešenja transportne jednačine sa promenljivom funkcijom f uveli smo particiju oblasti Ω . Cilj ovog dodatka je pro-nalazak uslova koji će biti dovoljni za neprekidnost i diferencijabilnost povezanih oblasti $\Omega_0(t)$ i $\Omega_e(t)$ sa granicom $\Gamma(t)$. Posmatraćemo dva slučaja u zavisnosti od brzine

1. Vektorsko polje \mathbf{u} dato je sa $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_e \end{pmatrix}$. Primetimo da tada jednačina (5.2) može lako biti rešena. Rešavanjem se dobija linearna funkcija χ takva da

$$\chi(\tau; t, \mathbf{x}) = C_u(\tau - t) + \mathbf{x},$$

gde je C_u konstanta koja karakteriše vrednosti vektora brzine. Posebno,

$$\chi_1(\tau; t, x) = x_1$$

i

$$\chi_2(\tau; t, x) = x_2 - v_e(t - \tau).$$

Posmatramo particiju Ω_i kao prosto-povezanu oblast. Kao što smo i ranije napomenuli t^* je vreme za koje karakteristična kriva doseže granicu $x = 0$. Za dodatno objašnjenje pogladati u [13].

Tada znamo da važi

$$\Gamma(t) = \partial\Omega_0(t) \cap \partial\Omega_e(t) = \{x \in \Omega : t^*(t, x) = 0\}.$$

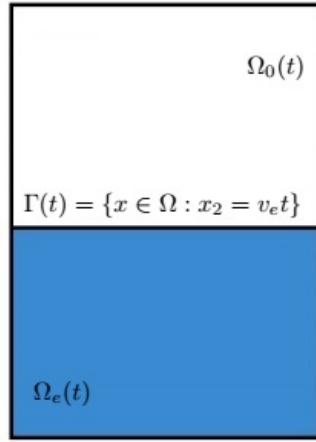
Štaviš

$$\chi_2(t^*; t, x) = 0 = x_2 - v_e(t - t^*) \Rightarrow t^*(t, x) = t - \frac{x_2}{v_e},$$

možemo eksplisitno definisati $\Gamma(t)$, $\Omega_e(t)$, $\Omega_0(t)$, cf. Fig. A.1 na sledeći način

$$\Gamma(t) = \{x \in \Omega : x_2 = v_e t\},$$

$$\Omega_e(t) = \{x \in \Omega : t^*(t, x) > 0\} = \{x_2 < v_e t\}$$



Slika A.1: Slika domena $\Omega(t)$ sastavljenog od dva subdomena $\Omega_e(t)$ i $\Omega_0(t)$. Ovi subdomeni razdvojeni su granicom $\Gamma(t)$.

and

$$\Omega_0(t) = \{x \in \Omega : t^*(t, x) < 0\} = \{x_2 > v_e t\}.$$

U nastavku ćemo tražiti uslove potrebne za neprekidnost i diferencijabilnost.
1) U slučaju kada su Y_0, Y_e, c, f konstantne dobija se

$$Y|_{\Omega_0(s)} = Y_0 e^{-ct} + \int_0^t f e^{-c(t-s)} ds = e^{-ct} \left[Y_0 - \frac{1}{c} f \right] + \frac{1}{c} f,$$

$$Y|_{\Omega_e(s)} = Y_e e^{-c \frac{x_2}{v_e}} + \int_{t - \frac{x_2}{v_e}}^t f e^{-c(t-s)} ds = e^{-c \frac{x_2}{v_e}} \left[Y_e - \frac{1}{c} f \right] + \frac{1}{c} f.$$

Dobija se sledeći uslov neprekidnosti

$$Y_e = Y_0.$$

I dalje posmatramo slučaj kada su sve funkcije konstantne

$$\partial_2 Y|_{\Omega_0} = 0,$$

i

$$\partial_2 Y|_{\Omega_e} = \frac{1}{v_e} [-c Y_e + f] e^{-c \frac{x_2}{v_e}}.$$

U ovom slučaju uslov C^1 dat je sa

$$Y_e = \frac{1}{c} f.$$

2) Za drugi slučaj kada imamo da su Y_0, Y_e konstantne i da c, f nisu konstantne dobija se

$$Y|_{\Omega_0(s)} = Y_0 e^{-\int_0^t c(s, x_2 - tv_e) ds} + \int_0^t f(s, x_2 - tv_e) e^{-\int_s^t c(s', x_2 - tv_e) ds'} ds,$$

$$Y|_{\Omega_e(s)} = Y_e e^{-\int_{t^*}^t c(s, x_2 - tv_e) ds} + \int_{t^*}^t f(s, x_2 - tv_e) e^{-\int_s^t c(s', x_2 - tv_e) ds'} ds.$$

Uslov neprekidnosti u ovom slučaju dat je sa

$$Y_e = Y_0 .$$

Dakle, imamo

$$\begin{aligned} \partial_2 Y|_{\Omega_0} &= Y_0 e^{-\int_0^t c(s, x_2 - tv_e) ds} \left(- \int_0^t \partial_2 c(s, x_2 - tv_e) ds \right) \\ &\quad + \int_0^t \left[\partial_2 f(s, x_2 - tv_e) e^{-\int_s^t c(s', x_2 - tv_e) ds'} ds \right. \\ &\quad \left. + f(s, x_2 - tv_e) e^{-\int_s^t c(s', x_2 - tv_e) ds'} \left(- \int_s^t \partial_2 c(s', x_2 - tv_e) \right) \right], \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} \partial_2 Y|_{\Omega_e} &= Y_e e^{-\int_{t-\frac{x_2}{v_e}}^t c(s, x_1) ds} \left(- \int_{t-\frac{x_2}{v_e}}^t \partial_2 c(s, x_1) + \frac{1}{v_e} c(t - \frac{x_2}{v_e}, x_1) \right) \\ &\quad + \left(- f(t - \frac{x_2}{v_e}, x_1) e^{-\int_{t-\frac{x_2}{v_e}}^t c(s', x_1) ds'} + \int_{t-\frac{x_2}{v_e}}^t \left[\partial_2 f(s, x_1) e^{-\int_s^t c(s', x_1) ds'} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + f e^{-\int_s^t c(s', x_1) ds'} \left(- \int_s^t \partial_2 c(s', x_1) \right) \right] \right). \end{aligned}$$

Uslov C^1 dat je sa

$$-Y_e \int_0^t \partial_2 c(s, x_1) ds + -Y_0 \int_0^t \partial_2 c(s, 0) ds = \frac{1}{v_e} f(0, x_1) e^{\int_0^t c(s, x_1) ds} - \frac{1}{v_e} c(0, x_1) Y_e .$$

3) Za treći slučaj kada Y_0, Y_e nisu konstantni i kada su c, f konstantni dobija se

$$Y|_{\Omega_0(s)} = Y_0(x_1, x_2 - tv_e) e^{-ct} + f \int_0^t e^{-c(t-s)} ds = Y_0(x_1, x_2 - tv_e) e^{-ct} - \frac{1}{c} f e^{-ct} + \frac{1}{c} f,$$

$$Y|_{\Omega_e(s)} = Y_e(t - \frac{x_2}{v_e}, x_1) e^{-c \frac{x_2}{v_e}} + f \int_{t - \frac{x_2}{v_e}}^t e^{-c(t-s)} ds = Y_e(t - \frac{x_2}{v_e}, x_1) e^{-c \frac{x_2}{v_e}} - \frac{1}{c} f e^{-c \frac{x_2}{v_e}} + \frac{1}{c} f.$$

Tada je uslov neprekidnosti dat sa

$$Y_0(x_1, 0) = Y_e(0, x_1) ,$$

Dalje, imamo

$$\partial_2 Y|_{\Omega_0} = e^{-ct} \partial_2 Y_0(x_1, x_2 - tv_e)$$

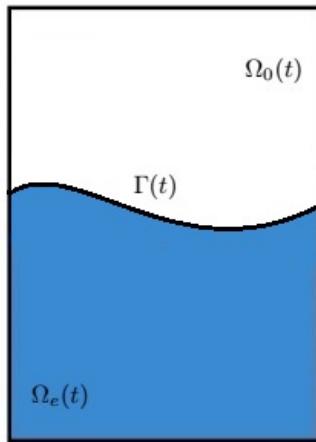
i

$$\partial_2 Y \Big|_{\Omega_e} = e^{-c \frac{x_2}{v_e}} \left[- \frac{1}{v_e} \partial_s Y_e(t - \frac{x_2}{v_e}, x_1) - \frac{c}{v_e} Y_e(t - \frac{x_2}{v_e}, x_1) + \frac{f}{v_e} \right]$$

A uslov diferencijabilnosti sa

$$\partial_2 Y_e(x_1, 0) = -\frac{1}{v_e} \partial_t Y_e(0, x_1) - \frac{c}{v_e} Y_e(0, x_1) + \frac{f}{v_e}.$$

2. Sada ćemo posmatrati slučaj kada vektor brzine \mathbf{u} nije konstantan. Primetimo da u tom slučaju ne znamo eksplicitno particiju oblasti $\Omega_e(t)$, $\Omega_0(t)$ i $\Gamma(t)$, cf. Fig. A.2.



Slika A.2: Slika domena $\Omega(t)$ sastavljenog od dva subdomena $\Omega_e(t)$ i $\Omega_0(t)$. Ovi subdomeni razdvojeni su granicom $\Gamma(t)$.

Pod pretpostavkom da su Y_0, Y_e, c, f konstantne, možemo primetiti da se dobija isti rezultat kao i u prvom slučaju za uslov neprekidnosti

$$Y_e = \frac{1}{c} f + e^{-ct^*} \left(Y_0 - \frac{1}{c} f \right).$$

Primenjujući dobijene rezultate na naš slučaj dobijamo sledeće.
Kada je vektor brzine konstantan i $Y = \rho$ dobija se

$$\rho_0 = \rho_e \text{ za prva dva slučaja,}$$

i

$$\rho_0(\chi(0; t, \mathbf{x})) = \rho_e(t, \chi(t^*; t, \mathbf{x})) \text{ u trećem slučaju.}$$

i $Y = \alpha$ dobija se

$$\alpha_0 = \alpha_e \text{ za prvi slučaj,}$$

$$\alpha_e = e^{\frac{1}{\epsilon}(t-t^*)} \left(\alpha_0 e^{-\frac{1}{\epsilon}t} + \int_0^{t^*} \frac{\bar{\alpha}(s, x)}{\epsilon} e^{-\frac{1}{\epsilon}(t-s)} ds \right) \text{ za drugi slučaj}$$

i

u trećem slučaju $\alpha_0(\chi(0; t, \mathbf{x})) = \alpha_e(t, \chi(t^*; t, \mathbf{x})).$

Dodatak B

Diferencijalni identiteti

U ovom delu daćemo pregled korisnih formula i diferencijalnih identiteta.

Gradijent, Divergencija, Rotor, Laplasijan.

Neka je dato glatko vektorsko polje \mathbf{F} i neka je f glatka realna funkcija, u \mathbb{R}^3 .

1. Gradijent:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j + \frac{\partial f}{\partial z}k$$

2. Divergencija: ($\mathbf{F} = F_1i + F_2j + F_3k$):

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}F_1 + \frac{\partial}{\partial y}F_2 + \frac{\partial}{\partial z}F_3$$

3. Laplasijan:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

4. Rotor:

$$\operatorname{curl} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

Gauss-ove formule.

U \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, neka je:

- Ω ograničen glatak domen i ν jedinični spoljašnji vektor normale na $\partial\Omega$;
- \mathbf{u}, \mathbf{v} su dva vektorska polja klase $C^1(\bar{\Omega})$;
- φ, ψ su dve realne funkcije klase $C^1(\bar{\Omega})$;

- ds je element površine na $\partial\Omega$.

1. $\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \nu ds;$ (Teorema o divergenciji)
2. $\int_{\Omega} \nabla \varphi dx = \int_{\partial\Omega} \varphi \nu ds$
3. $\int_{\Omega} \Delta \varphi dx = \int_{\partial\Omega} \nabla \varphi \cdot \nu ds = \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu} \varphi ds$
4. $\int_{\Omega} \psi \nabla \cdot \mathbf{F} dx = \int_{\partial\Omega} \psi \mathbf{F} \cdot \nu ds - \int_{\Omega} \nabla \psi \cdot \mathbf{F} dx$ (Parcijalna integracija)
5. $\int_{\Omega} \psi \Delta \varphi dx = \int_{\partial\Omega} \psi \partial_{\nu} \varphi ds - \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \psi dx$ (Green-ov identitet I)
6. $\int_{\Omega} (\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi) dx = \int_{\partial\Omega} (\psi \partial_{\nu} \varphi - \varphi \partial_{\nu} \psi) ds$ (Green-ov identitet II)
7. $\int_{\Omega} \operatorname{curl} \mathbf{u} dx = - \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \times \nu ds$
8. $\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \operatorname{curl} \mathbf{v} dx = \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \operatorname{curl} \mathbf{u} dx - \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \nu ds.$

Identiteti.

1. $\nabla \cdot \sigma(u) = \frac{\Delta u + \nabla(\nabla \cdot u)}{2}$
2. $\sigma(u)u \cdot f = \frac{1}{2} \left[u \cdot \nabla(u \cdot f) + f \cdot \nabla\left(\frac{|u|^2}{2}\right) \right]$
3. $\nabla \cdot [(u \cdot \nabla)v] = \nabla^T u :: \nabla v + u \cdot \nabla(\nabla \cdot v)$
4. $\nabla u \times u = (u \cdot \nabla)u$
5. $\nabla \cdot (fA) = A(\nabla f) + f(\nabla \cdot A), \quad \text{obično} \quad \nabla \cdot (f\mathcal{I}_d) = \nabla f$
6. $\nabla \cdot (Au) = A^T :: \nabla u + (\nabla \cdot A^T) \cdot u$
7. $\nabla \cdot \operatorname{Hess}(f) = \nabla \Delta f$
8. $\nabla \wedge (\nabla \wedge u) = -\Delta u + \nabla(\nabla \cdot u)$
9. $\nabla \wedge [(u \cdot \nabla)u] = (u \cdot \nabla)(\nabla \wedge u) - [(\nabla \wedge u) \cdot \nabla]u$
10. $(\nabla \wedge u) \wedge u = (u \cdot \nabla)u - \frac{1}{2} \frac{\nabla|u|}{2}$
11. $\nabla \cdot (u \circ v) = [(\nabla u) \circ v]^T :: \nabla v$

Literatura

- [1] Penel Y. *Étude théorique et numérique de la déformation d'une interface séparant deux fluides non-miscibles à bas nombre de Mach.* Université Paris 13 Laboratoire d'Analyse, Géométrie et Applications , 2010.
- [2] Boyer F., Fabrice P. *Eléments d'analyse pour l'étude de quelques modèles d'écoulements de fluides visqueux incompressibles.* Springer-Verlag, 2005.
- [3] Dellacherie S. *On a low Mach nuclear core model.* ESAIM Proc., 35:79–106, 2012
- [4] Embid P. *Well-Posedness of the nonlinear Equations for zero Mach Number Combustion.* Communications in Partial Differential Equations, 12(11):1227–1283, 1987.
- [5] Coddington E., Levinson N. *Theory of ordinary differential equations.* McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London,1955.
- [6] Adams Robert A. , Fournier John J. F. *Sobolev spaces, 2nd ed..* Pure and Applied Mathematics (Amsterdam), vol. 140, Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2003.
- [7] Horgan C.O. *Korn's inequalities and their applications in continuum mechanics.* SIAM Review 37 No.4, pp 491-511,1995.
- [8] Salsa S. *Partial Differential Equations in Action From Modelling to Theory.* Springer-Verlag Italia, Milano, 2008.
- [9] Grossmann C., Roos Hans-G., Stynes M. *Numerical Treatment of Partial Differential Equations.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.
- [10] Centre de mathématiques appliquées ecole polytechnique,
<http://cmap.polytechnique.fr/allaire/map431/correction-complete.pdf>
- [11] Evans L. *Partial Differential Equations.* AMS, Providence, Rhode Island, 2010.
- [12] Penel Y., Dellacherie S., Lafitte O. *Theoretical Study of an Abstract Bubble Vibration Model.* Soumis, 2010.
- [13] Penel, Y. *An explicit stable numerical scheme for the 1D transport equation.* Soumis, 2010.

- [14] Bernard M., Dellacherie S., Faccanoni G., Grec B., Lafitte O., Nguyen T.-T., Penel Y. *Study of low Mach nuclear core model for single-phase flow.* ESAIM Proc., 2012.
- [15] Bernard M., Dellacherie S., Faccanoni G., Grec B., Penel Y. *Study of a low Mach nuclear core model for two-phase flows with phase transition I: stiffened gas law.* ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, EDP Sciences, 48, pp.1639-1679, 2014.
- [16] Pilipović S., Seleši D. *Mera i integral: fundamenti teorije verovatnoće*. Beograd: Zavod za udžbenike, 2012.

Kratka biografija



Tanja Dukić, rođena 28. jula 1994. u Novom Sadu. Završila je Osnovnu školu Đositej Obradoviću u Zrenjaninu 2009. godine kao nosilac certifikata za nadarene učenike - "Vukova diploma". Srednju školu Žrenjaninska gimnazija, opšti smer, završila je u Zrenjaninu 2013. Nakon toga je započela studije na Prirodno-matematičkom fakultetu, na Departmanu za matematiku i informatiku, smer Primjenjena matematika - matematika finansija. Završila je Osnovne studije u septembru 2016. godine. Iste godine nastavila je Master studije na Departmanu za matematiku i informatiku. Položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom master studija u februaru 2018. čime je stekla pravo na odbranu Master rada. Tokom osnovnih i master studija bavila se volonterskim radom, bila je član Parlamenta i Saveta Prirodno-matematičkog fakulteta. Učestvovala je na brojnim seminarima, od kojih se ističe "ECMI Modeling Week" u Finskoj. Njen drugi semestar pete godine provela je kao student na razmeni u Parizu, u Francuskoj. U septembru očekuje da počinje doktorske studije na SJTU-u, u Šangaju, u Kini.

Novi Sad, august 2018.

Tanja Dukić

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Tanja Dukić
AU

Mentor: dr Marko Nedeljkov
MN

Naslov rada: Dobra-definisanost sistema od 4 jednačine koji opisuje protok dva fluida u niskom režimu Mach-ovog broja
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: srpski/engleski
JI

Zemlja publikovanja: Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2018
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (6/50/16/0/3/0/2)
(broj poglavlja/strana/lit. citata/tabela/slika/grafika/priloga)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Parcijalne diferencijalne jednačine
ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: Parcijalne diferencijalne jednačine, Mali Mahov broj, Navije-Stoksove jednačine, Dobra definisanost
PO

UDK

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod:

LMNC (Low Mach Nuclear Core) je model dobijen pomocu filtriranja akustičnih talasa u dobro poznatom sistemu kompresibilnih Navier-Stokes-ovih jednacina. Asimptotski razvoj reda 0 vodi do LMNC modela uz pretpostavku da je Mahov broj mali ($M \ll 1$). Sistem se sastoji od tri veoma povezane jednacine razlicitog tipa elipticne, transportne i jednacine momenta (impulsa).

Trudeći se da poboljšamo naš model dopustićemo neekvilibrijum. Jedna od prednosti će biti i to što će naš model biti bez varijacija pritiska i topotne provodljivosti. Suočavanje sa neekvilibrijumom podrazumeva i suočavanje sa novim stepenom slobode a to znači da moramo dodati transportnu jednacinu. Jednacinu zapreminskog udela α , gde $\alpha \in [0, 1]$ karakteriše način mešanja dva fluida.

U ovoj Master tezi biće predstavljena teorijska studija modela 4-LMNC (Low Mach Nuclear Core), gde je termohidrauličkom sistemu (o brzini protoka, pritiska i entalpije) pridružena još jedna gore navedena transportna jednacina (jednacina o zapremskom udelu). Cilj ovog rada je pokazati da je sistem 4-jednacine dobro-definisan, tj. da rešenje postoji i da je ono jedinstveno.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 07.08.2018.

DP

Datum odbrane: avgust 2018.

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: dr Nataša Krklec-Jerinkić, docent,
Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Marko Nedeljkov, docent,

Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Milana Čolić, docent,

Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Bérénice Grec , docent,

Univerzitet Pariz Dekart, Univerzitet u Parizu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORD DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Content Code: Master's thesis

CC

Author: Tanja Dukić

AU

Mentor: Marko Nedeljkov, Ph.D.

MN

Title: Well-posedness of a 4-equations system describing a two-fluid flow in the low Mach number regime

TI

Language of text: English

LT

Language of abstract: English

LA

Country of publication: Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2018

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publication place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4

PP

Physical description: (6/50/16/0/3/0/2)

(number of sections/pages/references/tables/pictures/graphs/appendices)

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific Discipline: Partial Differential Equations

SD

Subject/Key words: Partial Differential Equations, Low Mach Number, Navier-Stokes equations, Well-posedness

SKW

UC

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

HD

Note:

N

Abstract:

LMNC (Low Mach Nuclear Core) is a model obtained by filtering acoustic waves in a well-known system of Compatible Navier-Stokes equations. The asymptotic development of order 0 leads to the LMNC model assuming that the Mach number is small ($M \ll 1$). The system consists of three very related equations of different types of elliptic, transitive and equilibrium momenta (pulses). The LMNC model used in previous studies is based on the assumption of mechanical and thermodynamic equilibrium between the phases. This means that it is assumed that the phases move at the same speed and it is assumed that the vaporization, condensation and heat transfer are instantaneous. The three equation systems provide a description of the flow of two fluids, but we must note that it is necessary to have many constituent equations here. By trying to improve our model we will allow non-evolution. One of the advantages will be that our model will be without pressure variation and thermal conductivity. Dealing with non-violet involves confronting a new degree of freedom, which means that we have to add a transport equation. The volume-volume equation α , where $\alpha \in [0, 1]$ is characterized by the method of mixing two

fluids.

In this Master thesis, the theoretical study of the 4-LMNC model (Low Mach Nuclear Core) will be presented, whereby another one of the above transport equation (volume equation) is added to the thermohydraulic system (on the flow rate, pressure and enthalpy velocity). The aim of this paper is to show that the 4-equation system is well-defined, i.e. that the solution exists and that it is unique.

AB

Accepted by the Scientific Board on: 07.08.2018.

ASB

Defended: august 2018.

DE

Thesis defend board:

DB

President: Nataša Krklec-Jerinkić Ph.D., docent,
Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
Member: Marko Nedeljkov Ph.D., full professor,
Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
Member: Milana Čolić Ph.D., docent,
Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
Member: Bérénice Grec Ph.D., docent,
University Paris Descartes, University of Paris