UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Tamara Raičević

Vrednovanje unit-linked polisa u životnom osiguranju

-master rad-

Novi Sad, 2017.

Predgovor

Polisa životnog osiguranja je, pravno gledano, ugovor između osiguravajuće kuće i osiguranika, kojim se osiguravajuća kuća obavezuje da će preuzeti rizik finansijskog gubitka, nastalog usled osiguranog događaja. S druge strane, osiguranik se obavezuje da će plaćati ugovorom definisane premije. Osigurani događaj kod životnog osiguranja je vezan za zdravlje osiguranika. Odnosno, odnosi si se na događaje doživljenja, preuranjenje smrti, invaliditeta osiguranog lica.

Plaćene premije osiguravajuća kuća dalje ulaže na finansijskom tržištu. Time osiguravač, pored rizika o nastanku osiguranog događaja, snosi i određeni rizik od investiranja. Sam osiguranik nije upoznat sa daljim investiranjem osiguravajuće kuće. Unit-linked proizvodi životnog osiguranja omogućavaju osiguranom licu da odluči u koji fond će njegova premija biti uložena. Ali, tada upravo on i snosi rizik od investiranja, ali i nagradu. U zavisnosti od odnosa ka riziku, osiguravajuća lica su u mogućnosti da investiraju u manje ili više rizične fondove. Rizik, koji se u slučaju unit-linked osiguranja prebacuje sa osiguravajuće kuće na osiguranika, oslikava se u tome što isplatu u slučaju osiguranog događaja čine jedinice fonda u koji je uloženo, a ne unapred definisana beneficija.

Prednost ovih proizvoda je što su oni potpuno transparentni. Osiguranom licu je tačno poznato kako je njegova premija raspoređena između investiranje i pokrića od osiguranog događaja, kao i koliki deo odlazi na administrativne troškove.

Tema ovog master rada je aparat za vrednovanje unit-linked polisa u životnom osiguranju. U uvodnom delu predstavljeni su osnovni pojmovi životnog osiguranja, kao i teorija opcija, potrebna za dalje vrednovanje unit-linked polisa. Zatim je u drugom poglavlju predstavljena stohastička teorija potrebna za postavku Blek-Šolcovog modela za određivanje cene opcije, koji je detaljnije obrađen u trećem poglavlju.

Formula za određivanje cene polise zahteva računanje verovatnoće preživljavanja osiguranog lica. Ovim verovatnoćama pristupamo na dva načina, na deterministčki i stohastički način. Stohastički modeli mortaliteta su detaljno opisani u četvrtom poglavlju, kao primeri uopštenih linearnih i nelinearnih modela. Na kraju, uz pomoć programskog jezika R, izračunate su cene unit-linked osiguranja na osnovu ova dva pristupa i rezultati su upoređeni.

Ovom prilikom bih želela da se zahvalim svim profesorima i asistentima na saradnji i ukazanom znanju tokom studiranja. Posebno se zahvaljujem svom mentoru, dr Dori Seleši, na celokupnom strpljenju koje je pokazala prema meni tokom izrade ovog rada, na savetima i uputstvima koje mi je davala. Zahvaljujem se i dr Nataši Krejić i dr Danijeli Rajter-Ćirić, članovima komisije za odbranu ovog rada.

Sadržaj

Predgovor **3**

1 Tradicionalno i unit-linked osiguranje **7**

1.1 Životno osiguranje 7

1.1.1 Osnovni pojmovi unit-linked životnog osiguranja 10

1.2 Teorija opcija 13

1.2.1 Binomni model vrednovanja opcija 14

1.2.2 Blek-Šolcov model vrednovanja opcija . . . 20

2 Pojmovi stohastičke analize **22**

2.1 Rizik-neutralna mera 31

3 Ekonomski model **39**

4 Stohastički modeli mortaliteta **47**

4.1 Motivacija 47

4.2 Oznake 48

4.3 Modeli mortaliteta 50

4.3.1 Kriterijumi za poređenje fitovanih modela mortaliteta 52

4.3.2 Ocene parametara 54

4.4 Uopšteni linearni i nelinearni modeli 55

4.5 Gompercov zakon za $\mu_{x,t}$ i $q_{x,t}$ 59

5 Vrednovanje unit-linked polisa **64**
5.1 Pretpostavke modela 64
5.2 Neto jednokratna premija 66
5.3 Određivanje ${}_Tp_x$ 66

6 Vrednosti polise **68**
6.1 Određivanje verovatnoće ${}_{20}p_{55}$ 69
6.1.1 Deterministički pristup za određivanje ${}_{20}p_{55}$. 69
6.1.2 Stohastički pristup za određivanje ${}_{20}p_{55}$ . . . 69
6.1.3 Odabir modela za kohort parametar 81
6.1.4 Odabir modela za period parametre 86
6.2 Buduće vrednosti stopa mortaliteta 87
6.3 Određivanje volatilnosti procesa cene akcije S_t . . . 89
6.4 Jednokratna neto premija 90

Zaključak **93**

Literatura **94**

Poglavlje 1

Tradicionalno i unit-linked osiguranje

1.1 Životno osiguranje

Životno osiguranje je ono osiguranje kod koga je osigurani događaj u uskoj vezi sa zdravljem osiguranika. Shodno tome, razlikujemo:

- osiguranje za slučaj preživljavanja ili smrti,
- osiguranje od trajnog invaliditeta i
- zdravstveno osiguranje.

Gledano sa pravne strane, životno osiguranje predstavlja ugovor između vlasnika polise i osiguravajuće kuće. Kao i svaki ugovor, u polisi životnog osiguranja se definišu svi parametri, kao na primer, beneficija koju osiguravač mora da isplati osiguraniku za slučaj da dođe do osiguranog događaja. Za uzvrat, vlasnik polise je dužan da plati premiju, za to što osiguravajuća kuća preuzima rizik na sebe. Visina premije je takođe određena u ugovoru. Rok dospeća T je vremenski period, na koji je zaključeno životno osiguranje.

Tržište životnog osiguranja nudi veliki izbor, ali tip osiguranja koji ćemo posmatrati u našem radu je osiguranje za slučaj preživljavanja (eng. pure endowment). U ovom slučaju je osigurani događaj preživljavanje osigurane osobe do isteka polise, kada on prima isplatu. U suprotnom, neće doći do novčane nadoknade.

Uvedimo sledeće oznake

- p_x – stopa preživljavanja osobe starosti x godina narednih godinu dana, odnosno jednogodišnja verovatnoća preživljavanja,
- $p(x,t)$ ili $p_{x,t}$ – stopa preživljavanja narednih godinu dana, osobe koja u godini t ima x godina,
- ${}_tp_x$ – stopa preživljavanja osobe starosti x godina narednih t godina.
- $q_x = 1 - p_x$ – stopa mortaliteta da osoba starosti x premine u narednih godinu dana,
- $q_{x,t}$ – stopa mortaliteta, koja predstavlja verovatnoću da osoba starosti tačno x u godini t, premine u narednoj godini, odnosno u periodu $[t, t+1]$,
- ${}_tq_x$ – verovatnoća da osoba sada starosti x godina premine u naradnih t godina,
- $\mu_{x,t}$ – neprekidna stopa mortaliteta (eng. force of mortality), predstavlja trenutačnu stopu mortaliteta u vremenskom trenutku t za osobu starosti tačno x. Verovatnoća da osoba sa neprekidnom stopom mortaliteta $\mu(x,t)$ premine u intervalu $(t, t+dt)$ je približno jednaka $\mu(x,t)dt$, gde je dt malo.

Za određivanje visine premije potrebno je odrediti verovatnoću da dođe do osiguranog događaja. Obzirom na tip osiguranja koji posmatramo, potrebno je odrediti verovatnoću preživljavanja vlasnika polise do isteka polise. Za osiguranika, starosti x u trenutku kupovine, to je ${}_Tp_x$. U radu ćemo detaljno prikazati dva pristupa za određivanje ovih stopa, deterministički i stohastički pristup.

Deterministički pristup verovatnoćama smrtnosti

U determinističkom pristupu, za određivanje verovatnoća preživljavanja se koriste tablice mortaliteta (eng. life tables). Ove tablice prikazuju verovatnoću da će osoba određene starosti x preminuti u narednih godinu dana, odnosno pre svog sledećeg rođendana, kada bi napunila $(x+1)$-u godinu, q_x. Tablice mortaliteta se baziraju na istorijskim podacima o mortalitetu jedne populacije tokom relativno kratkog vremenskog perioda. Dalje, uz pomoć statističkih metoda, dolazi se do traženih verovatnoća mortaliteta.

Pošto muškarci i žene imaju različite stope mortaliteta, tablice se za svaki pol posebno izrađuju.

Osiguravajuće kuće koriste ove tablice pri vrednovanju proizvoda životnog osiguranja, kao i za predviđanje budućih osiguranih događaja.

Stohastički pristup verovatnoćama smrtnosti

U prošlosti je zabeležen stalni pad mortaliteta. Takođe, buduća dinamika mortaliteta je veoma neizvesna, i da bi mogle bolje da predvide to ponašanje, osiguravajuće kuće se sve češće okreću od tablica mortaliteta ka stohastičkim modelima mortaliteta.

Dodatno, osoba starosti x u 2017. godini nema istu stopu mortaliteta, kao i osoba takođe starosti x, ali u, na primer, 1990. godini. Jasno, javlja se motivacija da posmatramo $q_{x,t}$, stope mortaliteta koje zavise i od starosti osiguranika x i od kalendarske godine t.

Prednost stohastičkih modela mortaliteta je što prikazuju ne samo efekat starosti osiguranika na njegov mortalitet, već i efekat kalendarske godine, a nekad čak i godine rođenja osiguranika.

U poslednjih 25-30 godina se razvio veliki broj ovakvih modela. Međutim, u radu ćemo posmatrati sedam modela, u literaturi poznatih kao M1-M3 i M5-M8 modeli, koji su dati u radu [5]. Bitno je napomenuti da su ovi modeli primeri uopštenih linearnih i nelinearnih modela, pa ih kao takve možemo veoma lako uz pomoć statističkog softvera R, fitovati stvarnim podacima. Ocenjeni parametri modela se dalje tretiraju kao vremenske serije, koje se uz pomoć tehnika za analizu i predikciju vremenskih serija projektuju u budućnost. Kada te buduće vrednosti vratimo u model mortaliteta, dobijamo buduće stope mortaliteta za određenu starost x i određenu kalendarsku godinu t.

1.1.1 Osnovni pojmovi unit-linked životnog osiguranja

Do sada smo predstavili klasične ugovore životnog osiguranja, koji podrazumevaju determinističke isplate beneficija osiguraniku, unapred definisanih u ugovoru. U ovom master radu ćemo, pak, razmatrati proizvode osiguranja, čija je isplata unapred nepoznata, odnosno slučajna je vrednost, zato što zavisi od, na primer, prinosa neke investicije, tržišnih kamatnih stopa ili od nekih finansijskih indeksa.

Proizvodi osiguranja, poput unit-linked polisa, predstavljaju grupu kompleksnijih proizvoda životnog osiguranja, koji ne sadrže u sebi samo komponentu zaštite, već i investiranja. Samim tim su ovi proizvodi smatrani za dobru priliku sigurnog investiranja novca. Nastali su 1960-tih godina u Velikoj Britaniji. Unit-linked polise su prvo počele da stiču popularnost u zapadnoj Evropi, gde su finansijska tržišta, kao i mogućnosti investiranja, dobro razvijeni.

Karakteristika za unit-linked osiguranje je što se deo premije ulaže u pokrivanje osiguranog događaja, a ostatak premije se koristi za kupovinu jedinica fonda. Unit-linked fondovi su izdeljeni u jedinice (eng. units) jednake vrednosti koja zavisi od podloge, odnosno od aktiva koje sačinjavaju fond, [13].

Fond u koji će se investirati, bira sam vlasnik polise. Izbor se vrši iz korpe, koju osiguravajuća kuća dizajnira. U zavisnosti od udela akcija i obveznica u fondovima, oni se mogu okarakterisati kao manje ili više rizični. Samim tim, ovaj tip proizvoda je privlačan širokom spektru investitora, od konzervativnih, do onih koji su spremni da prihvate veći rizik, zarad većeg očekivanog prinosa. Isplata unit-linked osiguranja se sastoji od jedinica fonda u koji je uloženo, i zavisi od performansi fonda.

Fond polise (eng. policy fund), ili **račun polise** (eng. policy account) je akumulirani fond u koji je investirana premija. Za životno osiguranje za slučaj preživljavanja, beneficija preživljavanja jednaka je vrednosti fonda polise u trenutku isteka polise.

Kako možemo videti, na iznos beneficije direktno utiče vrednost fonda u koji je uloženo. To znači da visina isplate nije poznata unapred. Samim tim, finansijski rizik koji se javlja, je u potpunosti na strani osiguranika, što je glavna karakteristika unit-linked osiguranja.

Kod unit-linked modelu postoje dva izvora rizika, koji su nezavisni jedan od drugog. Jedan rizik se odnosi na finansijsko tržište, a drugi je povezan sa mortalitetom, odnosno zdravstvenim stanjem osiguranika.

Rizik koji snosi osiguranik se može delimično prebaciti na osiguravajuću kompaniju, time što će unit-linked ugovori sadržati i finansijsku garanciju u sebi. U nekim zemljama je čak i zakonom propisanao da je postojanje najmanje zagarantovane beneficije obavezno. Najmanja zagarantovana beneficija garantuje osiguraniku da će mu se barem uplaćena premija refundirati.

Iznos te grancije, $G(t)$, se može odrediti na različite načine. U našem radu, radi jednostavnosti, minimalna zagarantovana beneficija će biti $G = const$.

Za unit-linked osiguranje sa minimalnom zagarantovanom beneficijom, funkcija isplate polise je data sa

$$C(t) = max\{S(t), G(t)\},$$

gde je $S(t)$ vrednost fonda u trenutku t.

Pretpostavimo dalje da je vrednost fonda data stohastičkim procesom u raspodeli P. Dobijamo da je tada očekivana isplata

$$\pi(C(t)) = E^P[max(S(t), G(t))].$$

Međutim, pokazalo se, da sa ovakvom vrednošću beneficije može doći do arbitraže, odnosno postoji pozitivna verovatnoća da se može ostvariti profit bez rizika. Da bi se to izbeglo, oslonićemo se na finansijsku matematiku, koja je dokazala da postoji ekvivalentna martingalna mera Q, kojom možemo zameniti meru P, pri čemu onemogućavamo postojanje arbitraže. Tako, na „fer" tržištu imamo:

$$\pi_0(C(t)) = E^Q[max(S(t), G(t))],$$

gde je Q ekvivalentna mera meri P, takva da je diskontovana vrednost polise u njoj martingal.

Primetimo još, da ukoliko izvučmo $S(t)$ ispred funkcije maksimuma $C(t)$

$$C(t) = S(t) + max\{G(t) - S(t), 0\},$$

drugi sabirak se ponaša kao novčani tok evropske prodajne opcije sa strajk cenom $K = G(t)$.

Dalje, da bismo izračunali premiju, interesuje nas diskontovana vrednost buduće isplate, pomnožena sa verovatnoćom da će doći do isplate.

1.2 Teorija opcija

Koristeći teoriju finansijske matematike, primenićemo modele za vrednovanje evropske prodajne opcije da bismo došli do formule za premiju unit-linked osiguranja sa zagarantovanom minimalnom beneficijom. Uvešćemo sada potrebnu teoriju opcija.

Opcije su izvedene hartije od vrednosti, odnosno finansijski derivati, čije cene se utvrđuju na osnovu (izvode se iz) cena drugih finansijskih instrumenata. Opcijski ugovori se ispisuju na obične akcije, indekse akcija, stranu valutu, poljoprivredne robe itd. Vlasnik opcije ima pravo, ali ne i obavezu, da kupi, odnosno proda neku podlogu po unapred određenoj ceni izvršenja - strajk ceni K, na utvrđeni datum dospeća ili pre tog datuma. Kupovna cena opcije se naziva opciona premija. Premija predstavlja nadoknadu koju kupac opcije mora da isplati da bi stekao gore navedeno pravo da realizuje opciju.

Evropska prodajna opcija, put-opcija, daje pravo njenom vlasniku da proda podlogu po unapred ugovorenoj ceni K, samo na datum dospeća opcije. Put-opcija će biti izvršena ukoliko je cena izvršenja viša od tržišne cene osnovne aktive. To znači da profit od ulaganja u put-opcije raste kada vrednost aktive pada. Tada je zarada vlasnika, odnosno vrednost opcije zapravo razlika između cene izvršenja i tržišne cene. *Neto profit* na put-opciju jednak je vrednosti opcije umanjenoj za cenu po kojoj je opcija na početku kupljena P_0.

Vrednost put-opcije na datum dospeća možemo prikazati na sledeći način:

$$\text{Isplata vlasniku put-opcije} = \begin{cases} 0, \text{ ako je } S_T \geq K\ , \\ \\ K - S_T, \text{ ako je } S_T < K. \end{cases}$$

U prvom slučaju, kada je cena akcije na datum dospeća opcije viša od cene izvršenja, $S_T \geq K$, put-opcija je bezvredna, pošto pravo na prodaju akcije po ceni K neće biti iskorišćeno. Prihod vlasnika opcije je 0. Ali, kako je on već platio opciju, a neće je izvršiti, biće u gubitku za cenu opcije, odnosno za P_0, dok će eminent (eng. writer) opcije zaraditi baš tih P_0.

Međutim, kada je cena akcije manja od strajk cene, $S_T < K$, vlasnik će izvršiti opciju i ostvariće prihod od $K - S_T$, odnosno profit od $K - S_T - P_0$. U ovom slučaju će eminent opcije ostvariti gubitak od $P_0 - K + S_T$.

Profit vlasnika prodajne opcije možemo predstaviti na sledeći način:

$$\pi(K, S_T) = max\{0, K - S_T\} - P_0.$$

Za vrednovanje opcija možemo koristiti diskretne ili neprekidne modele. Ukratko ćemo ih predstaviti u naredna dva odeljka.

1.2.1 Binomni model vrednovanja opcija

Predstavićemo jednostavan kvantitativan model za vrednovanje opcija sa „dva stanja" (dva ishoda). Po tome je model i dobio ime binomni model. Iako jednostavan, model može biti veoma koristan i precizan alat za vrednovanje. Između ostalog, transakcije u finansijskom svetu se dešavaju u diskretnim vremenskim trenucima, pa i nije toliko neobično što krećemo upravo od ovog modela.

Pretpostavka binomnog modela je da cena akcije može imati samo dve vrednosti u narednom vremenskom periodu:

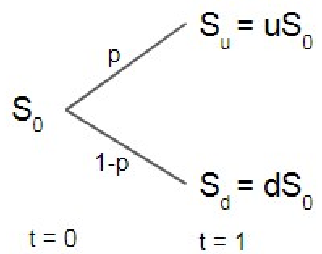
1) akcija se može prodavati po višoj ceni, sa faktorom rasta u, ili

2) se može prodavati po određenoj nižoj ceni, sa faktorom pada d.

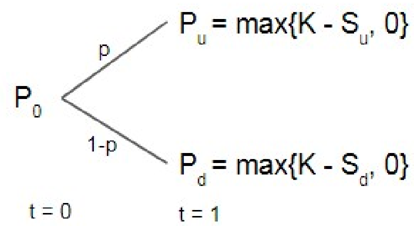
Može se još i reći da se cena akcije kreće po binomnom stablu.

Posmatrajmo prvo binomni model za jedan vremenski interval. Obeležimo sa S_0 početnu vrednost akcije. Tada cena akcije u trenutku $t = 1$ može uzeti samo dve vrednosti:

1. sa verovatnoćom p, $S_1 = S_u = S_0 \cdot u$, odnosno cena je porasla,
2. sa verovatnoćom $1 - p$, $S_1 = S_d = S_0 \cdot d$, odnosno cena je opala.



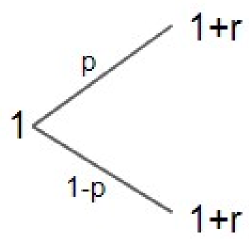
Cena prodajne opcije, P_0, zavisi od cene podloge u trenutku $t = 1$. Vrednost opcije se kreće po sledećem binomnom stablu:



Kako nama P_0 nije poznato, za njeno određivanje ćemo koristi metod vrednovanja koji se zasniva na konceptu repliciranja (kopiranja). Prvo je potrebno pronaći replikantni portfolio. To je portfolio koji ima isti novčani tok kao i finansijski instrument koga replicira. U našem slučaju, taj instrument je evropska prodajna opcija. Kako replikantni portfolio tačno replicira vrednost opcije, pronalaženjem njegove vrednosti u početnom trenutku doći ćemo do cene prodajne opcije.

Sada ćemo da napravimo navedeni portfolio. Neka se on sastoji od dve aktive. Jedna je akcija, koja čini podlogu, a druga je obveznica koja predstavlja nerizičnu aktivu, pri čemu je r konstantna nerizična kamatna stopa.

Uređeni par (x, y) čine jedan takav portfolio, gde je x iznos uložen u akciju, a y iznos uložen u obveznicu. Ukoliko uložimo jednu novčanu jedinicu u nerizičnu aktivu, $y = 1$, binomno stablo obveznice će izgledati ovako:



Obeležimo sa $R = 1 + r$.
U trenutku $t = 0$, vrednost portfolija je

$$x \cdot S_0 + y = P_0 \tag{1.1}$$

Mi želimo da repliciramo opciju i u krajnjem trenutku, kada će vrednost portfolija takođe biti jednaka vrednosti opcije, pa za $t = 1$ dobijamo sistem:

$$\begin{aligned} x \cdot S_u + R \cdot y &= P_u := max\{K - u \cdot S_0, 0\}, \\ x \cdot S_d + R \cdot y &= P_d := max\{K - d \cdot S_0, 0\}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Rešavanjem sistema dobijamo koeficijente (x, y) koje, kada vratimo u formulu (1.1), dobijamo **cenu prodajne opcije:**

$$P = \frac{1}{R} \cdot \left[P_u \cdot \frac{R-d}{u-d} + P_d \cdot \frac{u-R}{u-d} \right]. \tag{1.3}$$

Obeležimo sa q faktor uz P_u, odnosno $q = \frac{R-d}{u-d}$. Odatle sledi da je faktor koji stoji uz P_d zapravo $1-q$, pa formulu (1.1) zapisujemo

$$P = \frac{1}{R} \cdot [P_u \cdot q + P_d \cdot (1-q)]. \tag{1.4}$$

Dobijena vrednost q se naziva još i rizik-neutralna verovatnoća. Pojam rizik-neutralne verovatnoće će detaljnije biti objašnjen u odeljku 2.1, ali možemo je razumeti kao verovatnoću da cena akcije poraste na S_u, pri čemu su svi učesnici na tržištu rizik-neutralni.

Veoma bitna pretpostavka u teoriji određivanja cena je odsustvo arbitraže, odnosno, odsustvo mogućnosti ostvarivanja profita bez početnog bogatstva. U praksi to označava da dva portfolija koja imaju istu krajnju vrednost, moraju imati i istu početnu.

Teorema 1.2.1 *Ako na tržištu ne postoji mogućnost arbitraže, onda je zadovoljena sledeća nejednakost*

$$d < R < u,$$

odnosno postoji rizik neutralna verovatnoća $q = \frac{R-d}{u-d}$.

Iz teoreme sledi da je cena naše prodajne opcije dobijena pod pretpostavkom da ne postoji arbitraža. Takođe, posledica teoreme je da se cena P_0 može posmatrati i kao diskontovana očekivana vrednost opcije u odnosu na veštačku verovatnoću q, odnosno:

$$P_0 = \frac{1}{R} \cdot E^q(P_1). \tag{1.5}$$

Bezarbitražno tržište ima više ekvivalentnih mera verovatnoće. Da bismo postigli jedinstvenost rizik-neutralne mere, uvodimo pojam kompletnosti tržišta.

Definicija 1.2.2 *Tržište na kome za svaki finansijski derivat postoji replikantni portfolio* (x, y)*, sačinjen od jedne rizične i jedne nerizične aktive, naziva se* **kompletno tržište**.

Sledeća teorema navodi uslove za jedinstvenost veštačke verovatnoće q.

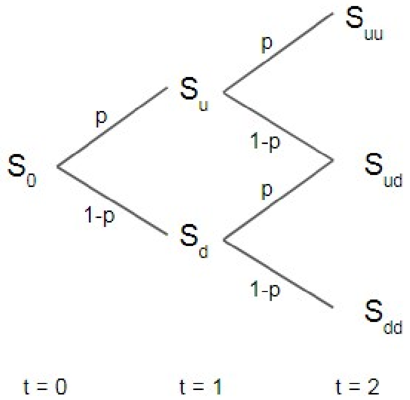
Teorema 1.2.3 *Pretpostavimo da nema arbitraže na tržištu. Ako za svaki derivat na tržištu postoji replikantni portfolio* (x, y)*, odnosno ako je tržište kompletno, onda postoji jedinstvena rizik-neutralna mera verovatnoće* Q*. Važi i obrnuto, ako postoji jedinstvena rizik-neutralna mera verovatnoće* Q*, onda je tržište kompletno.*

Konkretno, u našem binomnom modelu, teorema zahteva da je sistem (1.2) jedinstveno rešiv. Odatle sledi da je $d \neq u$, inače bismo dobili neodređen sistem koji ima beskonačno mnogo rešenja.

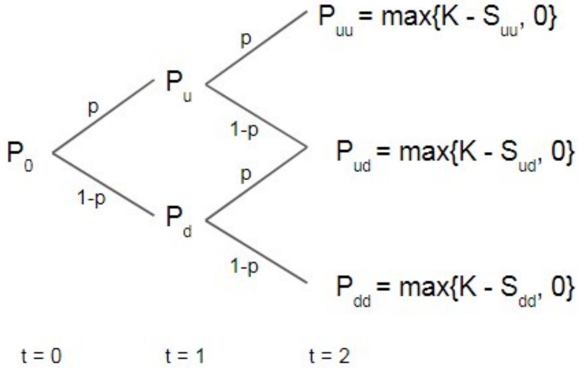
Zaključujemo, uslov koji treba da važi da bismo zadovoljili postojanje kompletnog, bezarbitražnog tržišta je da postoji barem jedan znak stroge nejednakosti u sledećoj nejednakosti $d \leq (1 + r) \leq u$.

Uopštavanje modela sa dva ishoda

Binomni model za jedan vremenski period se veoma lako može uopštiti na više perioda, ponavljajući isti algoritam, gde cena podloge u narednom periodu ili poraste sa faktorom u ili se smanji sa faktorom d.



Kako postoje tri moguće vrednosti akcije na kraju drugog intervala, odnosno u trenutku $t = 2$, postoje i tri moguće vrednosti prodajne opcije:



Rešavanjem sistema kao i kod modela za jedan vremenski period, čiji metod nalaženja replikantog portfolija i rešavanja sistema jednačina, sada primenjujemo na segmente navedenog stabla. Ponavljanjem metoda dolazimo do formule za cenu prodajne evropske opcije za n vremenskih perioda:

$$P_0 = \frac{1}{(1+r)^n} \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} max\{K - u^k d^{n-k} S_0\}. \quad (1.6)$$

Pretpostavke o kompletnosti tržišta i nepostojanje arbitraže moraju i ovde biti zadovoljeni, kako bismo osigurali postojanje jedinstvene rizik-neutralne verovatnoće q.

1.2.2 Blek-Šolcov model vrednovanja opcija

Ukoliko bismo nastavili da delimo intervale tokom kojih cene akcija mogu ići gore ili dole, na kraju bi svaki čvor na stablu odgovarao beskonačno malom vremenskom intervalu, $\Delta t \to 0$. Dakle, model sa dva ishoda se može uopštiti tako što će se svaki period podeliti na veliki broj intervala, $n \to \infty$. Ovim postupkom dolazimo do neprekidne formule vrednovanja opcija, poznatije kao Blek-Šolcova formula. Za izvođenje Blek-Šolcove formule moraju se uvesti dodatne dve pretpostavke. Nerizična kamatna stopa, r_f, i volatilnost cene akcije, σ, moraju biti konstantne tokom životnog veka opcije.

Kako se rok dospeća deli na sve veći broj intervala, raspodela cena akcije prilikom dospeća sve više se bliži log-normalnoj raspodeli. Kada je raspodela cena akcije zaista log-normalna, možemo izvesti tačnu formulu za vrednovanje opcija.

Kažemo da cena akcije (podloge), S_t, prati geometrijsko Braunovo kretenje sa driftom μ i volatilnošću σ, ukoliko je za sve nenegativne vrednosti x i t, količnik $\frac{S_{t+x}}{S_x}$ slučajna promenljiva, koja je nezavisna od cena podloge do trenutka x i ako sledeća slučajna promenljiva ima normalnu raspodelu:

$$\ln \frac{S_{t+x}}{S_x} \ : \mathcal{N}(\mu t,\, \sigma^2 t)\ .$$

U našoj postavci modela, parametri geometrijskog Braunovog kretanja imaju sledeća značenja, μ je očekivani prinos akcije i zavisi od rizičnosti akcije i visine kamatne stope, dok je parametar σ mera investitorove nesigurnosti u prinosima koje akcija donosi i obično je između 20% i 50%.

Predstavimo sada Blek-Šolcovu formulu. To je formula koja za vrednovanje opcija upotrebljava cenu akcije, nerizičnu kamatnu stopu, rok dospeća i standardnu devijaciju prinosa na akciju. Izaberimo sada za fakore rasta i pada cene akcije sledeće:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \text{ i } d = \frac{1}{u} = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}.$$

Dalje, neka je $1 + r = e^{r\Delta t}$. Kada ove vrednosti zamenimo u formuli za određivanje cene prodajne opcije u binomnom modelu (1.3), i pustimo da vremenski intervali Δt idu u nulu, dolazimo do čuvene Blek-Šolcove formule za put-opcije:

$$P(S_t, t) = Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - S_t\Phi(-d_1), \tag{1.7}$$

gde su:

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln\frac{S_t}{K} + (r + \frac{1}{2}\cdot\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\ d_2 &= \frac{\ln\frac{S_t}{K} + (r - \frac{1}{2}\cdot\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \end{aligned}$$

a Φ funkcija raspodele normalne (0,1) raspodele.

Poglavlje 2

Pojmovi stohastičke analize

Pre nego što proširimo priču iz uvodnog dela, moramo se podsetiti relevantnih definicija i teorema iz teorije mere i stohastičke analize koje ćemo predstaviti u ovom poglavlju. Zatim ćemo matematički objasniti i pojam rizik-neutralne verovatnoće, kao i Girsanovu teoremu, centralnu teoremu za transformaciju mere verovatnoće u ekvivalentnu martingalnu meru.

Definicija 2.0.1 *σ-algebra na $X \neq \emptyset$ je familija skupova $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ sa osobinama:*

1. $X \in \mathcal{M}$,
2. $A \in \mathcal{M} \Longrightarrow X \backslash A \in \mathcal{M}$,
3. $A_n \in \mathcal{M}$, $n \in N \Longrightarrow \bigcup\limits_{n \in N} A_n \in \mathcal{M}$.

Skup X sa σ-algebrom $\mathcal{M}$ nazivamo prostor sa σ-algebrom, u oznaci $(X, \mathcal{M})$. Elemente σ-algebre nazivamo merljivim skupovima.

Definicija 2.0.2 *Funkcija $f : (X, \mathcal{M}) \to (Y, \mathcal{N})$, gde je $(Y, \mathcal{N})$ prostor sa σ-algebrom $\mathcal{N}$ je merljiva ako $f^{-1}(O) \in \mathcal{M}$ za svako $O \in \mathcal{N}$.*

Definicija 2.0.3 *Neka je $(X, \mathcal{M})$ prostor sa σ-algebrom. Mera μ na $\mathcal{M}$ je funkcija $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ za koju važi:*

Ako je $A_i \in \mathcal{M}$, $i \in N$, disjunktna familija skupova, tada je

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Prostor $(X, \mathcal{M}, \mu)$ se naziva **prostor sa merom**.

U terminologiji teorije verovatnoće, osnovni neprazni skup X obeležavamo sa Ω, i nazivamo ga skupom svih mogućih ishoda. σ-algebru $\mathcal{M}$ označavamo sa $\mathcal{F}$. Elemente σ-algebre, merljive skupove, u teoriji verovatnoće nazivamo događajima, i oni predstavljaju skup ishoda nekog eksperimenta.

Definicija 2.0.4 *Merljive funkcije $f : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$, gde je $\mathcal{B}$ Borelova σ-algebra generisana uobičajenom topologijom, nazivaju se slučajne promenljive.*

Teorema 2.0.5 *Neka je X slučajna promenljiva nad $(\Omega, \mathcal{F})$. Tada je familija skupova*

$$\mathcal{F}_X = \{F \in \mathcal{F} | F = X^{-1}(B) \text{ za neko } B \in \mathcal{B}\}$$

σ-algebra, koja se naziva σ-algebra generisana slučajnom promenljivom X i pri tome je $\mathcal{F}_X \subseteq \mathcal{F}$.

Tako generisana σ-algebra $\mathcal{F}_X$ u praksi predstavlja količinu informacija koju nam daje slučajna promenljiva X.

Definicija 2.0.6 *Mera μ na $(\Omega, \mathcal{F})$ koja ima osobinu da je $\mu(\Omega) = 1$ se naziva mera verovatnoće.*

Mera verovatnoće se najčešće obeležava sa P i tada prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ nazivamo prostor verovatnoće.

Definisaćemo sada jedan od najvažnijih pojmova u teoriji stohastičke analize, stohastički (slučajni) proces. Posmatrajmo parametarski skup T, koji ćemo interpretirati kao vreme. Stoga je $T = [0, T^*]$, gde je moguće i da je $T^* = \infty$.

Definicija 2.0.7 **Realan stohastički proces**, $\{S_t(\omega)\}_{t \in T}$, *je familija slučajnih promenljivih na istom prostoru verovatnoća* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *gde* $\omega \in \Omega$.

Intuitivno, ω možemo shvatiti kao individualni eksperiment. Prema tome, $S_t(\omega)$ bi bio rezultat eksperimenta ω u trenutku t. Vidimo da proces možemo da posmatramo kao funkciju dve promenljive, $(t, \omega) \mapsto S(t, \omega)$.

- Za svako fiksirano $t_0 \in T$ dobijamo merljivo preslikavanje, odnosno jednu slučajnu promenljivu
$$S_{t_0} : \Omega \to \mathbb{R}.$$

- Za svako fiksirano $\omega \in \Omega$, S_t je realna funkcija na T, koja se još naziva i trajektorija (putanja) stohastičkog procesa. Stohastički procesi čija trajektorija je neprekidna funkcija su neprekidni stohastički procesi.

U našem radu, vreme koje posmatramo je životni vek prodajne opcije, odnosno, vreme od njenog izdavanja do datuma dospeća. Stoga je logično što ćemo ograničiti parametarski skup na $T = [0, T^*]$, gde je $T^* < \infty$.

Dalje, označimo sa $\mathcal{F}_t$ σ-algebru generisanu familijom slučajnih promenljivih $\{X_s : s \leq t\}$. Tada je $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$.

Definicija 2.0.8 **Filtracija** *stohastičkog procesa je familija* σ*-algebri nad* Ω, $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T^*]}$, *takva da za sve* $s \leq t$ *važi* $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$.

$\mathcal{F}_t$ za neko t, interpretiramo kao količinu informacija sadržanih u σ-algebri do trenutka t, odnosno, možemo je posmatrati i kao istoriju stohastičkog procesa do trenutka t, uključujući i taj trenutak.

Definicija 2.0.9 *Za slučajan proces $\{S_t\}_{t\in T}$ kažemo da je* ***adaptiran filtraciji*** *$\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$, ako i samo ako je za svako fiksirano $t \in [0, T^*]$ slučajna promenljiva S_t, $\mathcal{F}_t$-merljiva, odnosno, σ-algebra generisana tom slučajnom promenljivom je podskup σ-algebre $\mathcal{F}_t$,*

$$\sigma(S_t) \subseteq \mathcal{F}_t.$$

Definicija 2.0.10 *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{G}_t\}_t, P)$ prostor verovatnoće sa filtracijom $\{\mathcal{G}_t\}_t$. Za stohastički proces, $X_t, t \in T$, kažemo da je* **martingal** *ako važe sledeći uslovi:*

(1) X_t je adaptiran filtraciji $\{\mathcal{G}_t\}_t$,

(2) $X_t \in L^1(\Omega)$ za svako $t \in T$,

(3) $E(X_t|\mathcal{G}_s) = X_s$ s.s., za sve $0 \leq s \leq t < \infty$.

Drugim rečima, uslov (1) iz definicije 2.0.10 kaže da, ukoliko imamo informacije o $\mathcal{G}_t$, onda nam je i vrednost X_t poznata, a (2) da je X_t integrabilna funkcija za svako t. Osobina (3) martingala tvrdi da je očekivana buduća vrednost procesa uvek jednaka sadašnjoj vrednosti. U finansijskom kontekstu to bi značilo da, ukoliko je proces cena nekog instrumenta $\{S_t\}_{t\in T}$ martingal, tada je očekivana buduća cena jednaka trenutnoj ceni.

Veoma važan primer stohastičkog procesa je Braunovo kretanje, jer se on nalazi u osnovi mnogih finansijskih modela. Sledi njegova definicija.

Definicija 2.0.11 *Stohastički proces $\{W_t\}_{t\in[0,T^*]}$ se naziva Braunovo kretanje ili Vinerov proces ako važi:*

1. $W_0 = 0$*, za s.s.* $\omega \in \Omega$*,*

2. proces ima nezavisne priraštaje, odnosno za svako $n \geq 2$ *i* $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$ *sledeće slučajne promenljive*

$$W_{t_n} - W_{t_{n-1}}, W_{t_{n-1}} - W_{t_{n-2}}, ..., W_{t_1} - W_{t_0}, W_0$$

su nezavisne.

3. za $s < t$*,* $W_t - W_s$ *ima normalnu raspodelu,*

$$W_t - W_s : \mathcal{N}(0, t - s),$$

Može se pokazati da za skoro svako fiksirano $\omega_0 \in \Omega$, trajektorije Braunovog kretanja $W_t(\omega_0)$ su realne neprekidne funkcije $\Omega \to \mathbb{R}$, svuda nediferencijabilne i neograničene varijacije.

Teorema 2.0.12 *Ako je* $\{W_t\}_{t \in T}$ $\mathcal{F}_t$*-Braunovo kretanje, tada važi:*

1. W_t *je* $\mathcal{F}_t$*-martingal,*

2. ${W_t}^2 - t$ *je* $\mathcal{F}_t$*-martingal i*

3. ${M_t}^\lambda = e^{\lambda W_t - \frac{\lambda^2}{2}\, t}$ *je takođe martingal, za svako* $\lambda \in \mathbb{R}$*,* $t \in T$*.*

Dokaz:

Primetimo da za $s > t$, $W_s - W_t$ je nezavisno od σ-algebre $\mathcal{F}_t$, pa važi:

$$E(W_s - W_t | \mathcal{F}_t) = E(W_s - W_t).$$

Kako je W_t, $t \in T$ Braunovo kretanje, sledi i

$$\begin{aligned} E(W_s - W_t) &= 0, \\ D(W_s - W_t) &= s - t. \end{aligned}$$

1. $\forall s > t$ važi

$$\begin{aligned}
E(W_s|\mathcal{F}_t) &= E(W_s - W_t + W_t|\mathcal{F}_t)\\
&= E(W_s - W_t|\mathcal{F}_t) + E(W_t|\mathcal{F}_t)\\
&= E(W_s - W_t) + W_t\\
&= \cancelto{0}{E(W_s)} - \cancelto{0}{E(W_t)} + W_t\\
&= W_t,
\end{aligned}$$

2. $\forall s > t$ važi

$$\begin{aligned}
E(W_s^2 - s|\mathcal{F}_t) &= E((W_s - W_t + W_t)^2|\mathcal{F}_t) - s\\
&= E((W_s - W_t)^2|\mathcal{F}_t) + E(2W_t(W_s - W_t)|\mathcal{F}_t) +\\
&+ E(W_t^2|\mathcal{F}_t) - s\\
&= E((W_s - W_t)^2) + 2W_t E(W_s - W_t) + W_t^2 - s\\
&= D(W_s - W_t) + (E(W_s - W_t))^2 + 0 + W_t^2 - s\\
&= s - t + 0 + W_t^2 - s\\
&= W_t^2 - t,
\end{aligned}$$

3. $\forall s > t$ važi

$$\begin{aligned}
E({M_s}^\lambda|\mathcal{F}_t) &= E(e^{\lambda W_s - \frac{\lambda^2}{2}\, s}|\mathcal{F}_t)\\
&= e^{-\frac{\lambda^2}{2}\, s} E(e^{\lambda W_s}|\mathcal{F}_t)\\
&= e^{-\frac{\lambda^2}{2}\, s} E(e^{\lambda(W_s - W_t + W_t)}|\mathcal{F}_t)\\
&= e^{-\frac{\lambda^2}{2}\, s} e^{\lambda W_t} E(e^{\lambda(W_s - W_t)}|\mathcal{F}_t)\\
&= e^{\lambda W_t - \frac{\lambda^2}{2}\, s} E(e^{\lambda(W_s - W_t)})\\
&= e^{\lambda W_t - \frac{\lambda^2}{2}\, s} e^{\frac{\lambda^2}{2}\, (s-t)}\\
&= e^{e^{\lambda W_t - \frac{\lambda^2}{2}\, t}}\\
&= M_t^\lambda.
\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 2.0.13 *Neka je W_t neprekidan stohastički proces na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Tada su sledeća dva tvrđenja ekvivalentna:*

1. *W_t je Braunovo kretanje u meri verovatnoće P,*
2. *W_t i $W_t^2 - t$ su martingali u meri verovatnoće P.*

Definicija 2.0.14 *Stohastički proces $\{\tilde{W}_t\}_{t\in[0,T]}$ je Braunovo kretanje sa driftom μ i volatilnošću σ ako važi:*

1. *$\tilde{W}_t$ je neprekidan proces s.s.,*
2. *$\tilde{W}_0 = 0$ s.s.,*
3. *proces ima nezavisne priraštaje, odnosno za svako $n \geq 2$ i $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$ sledeće slučajne promenljive:*

$$\tilde{W}_{t_n} - \tilde{W}_{t_{n-1}}, \tilde{W}_{t_{n-1}} - \tilde{W}_{t_{n-2}}, ..., \tilde{W}_{t_1} - \tilde{W}_{t_0}, \tilde{W}_0$$

   su nezavisne.

4. *za $s < t$, $\tilde{W}_t - \tilde{W}_s$ ima normalnu raspodelu:*

$$\tilde{W}_t - \tilde{W}_s : \mathcal{N}(\mu(t-s), \sigma^2(t-s)).$$

Iz osobina normalnosti lako možemo pokazati da Braunovo kretanje sa driftom μ i volatilnošću σ možemo predstaviti preko "običnog" Braunovog kretanja:

$$\tilde{W}_t = \mu t + \sigma W_t. \tag{2.1}$$

Uvodimo sada novi pojam, Itov integral, integral po trajektorijama Braunovog kretanja koji se još naziva i stohastički integral.

Definicija 2.0.15 *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}, P)$ prostor verovatnoće sa filtracijom, i neka je $\{W_t\}_{t\in T}$ $\mathcal{F}_t$-Braunovo kretanje. $\{X_t\}_{t\in T}$*

je realan Itov proces (stohastički integral) ako može biti zapisan u obliku skoro sigurno za svako $t \in T$ kao:

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s,$$

gde je:

- X_0 $\mathcal{F}_0$*-merljivo,*
- $\{K_t\}_{t\in T}$ *i* $\{H_t\}_{t\in T}$ *su* $\mathcal{F}_t$*- adaptirani procesi,*
- $\int_0^T |K_s| ds < \infty$ *s.s.,*
- $\int_0^T |H_s|^2 ds < \infty$ *s.s.*

Itov proces često pišemo i u kraćem, diferencijalnom obliku:

$$\begin{aligned} dX_t &= K_t dt + H_t dW_t, \\ X_0 &= x. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Jedan od najvažnijih rezultata stohastičeke integracije je pravilo za smenu promenljivih, poznatije i kao Itova formula. Bez nje, izračunavanje stohastičkih integrala bio bi nemoguć posao.

Teorema 2.0.16 ***Itova formula***
Neka je $u = u(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ neprekidna funkcija definisana na $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ i neka su svi njeni parcijalni izvodi:

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}, u_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$$

za $i, j = 1, 2, \ldots, n$ neprekidni na $[0,T] \times \mathbb{R}^n$. Neka je n stohastičkih procesa $\{S_i(t)\}_{t\in T}$ zadato svojim diferencijalima:

$$dS_i(t) = K_i dt + H_i dW_t, i = 1, 2, \ldots, n$$

u odnosu na isto Braunovo kretanje W_t. Tada stohastički Itov proces $Y_t = u(t, S_1(t), S_2(t), \dots, S_n(t))$ ima sledeći stohastički diferencijal:

$$dY_t = \left(u_t + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} K_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_{x_i x_j} H_i H_j \right) dt + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} H_i dW_t. \tag{2.3}$$

Specijalno, za $n = 1$, dobijamo jednodimenzionalnu Itovu formulu:

$$dY_t = \left(u_t + u_x K + \frac{1}{2} u_{xx} H^2 \right) dt + u_x H dW_t. \tag{2.4}$$

U uvodnom delu smo rekli da proces cena akcije prati geometrijsko Braunovo kretanje sa driftom μ i volatilnošću σ. Da bismo to pokazali matematički, koristićemo Itovu formulu. Pre toga ćemo navesti potrebne definicije.

Definicija 2.0.17 *Geometrijsko Braunovo kretanje sa driftom μ i volatilnošću σ je stohastički proces, $\{S_t\}_{t \in [0, T^*]}$, koji zadovoljava stohastičku diferencijalnu jednačinu:*

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \tag{2.5}$$

gde je W_t Braunovo kretanje.

Definišimo stohastički proces sa

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2)t + \sigma W_t}, \tag{2.6}$$

gde je S_0 neka poznata početna vrednost. Dokažimo da ovako definisan stohastički proces prati geometrijsko Braunovo kretanje sa driftom μ i volatilnošću σ.

Dokaz: Obeležimo $Y_t = (\mu - \frac{1}{2} \sigma^2)t + \sigma W_t$. To je jedan proces za $t \in T = [0, T^*]$. Pošto su μ i σ konstante, sledi da je

$$dY_t = (\mu - \frac{1}{2} \sigma^2)dt + \sigma dW_t.$$

Iskoristićemo dalje jednodimenzionalnu Itovu formulu (2.4) za funkciju $u(t,x) = S_0 e^x$:

$$u_t = 0, u_x = u_{xx} = S_0 e^x, K = \mu - \frac{1}{2}\,\sigma^2 i H = \sigma.$$

Dalje sledi:

$$\begin{aligned} du(t, Y_t) &= d(S_0 e^{Y_t}) = \\ &= \left(0 + S_0 e^{Y_t}(\mu - \frac{1}{2}\,\sigma^2) + \frac{1}{2}\,S_0 e^{Y_t}\sigma^2\right) dt + S_0 e^{Y_t}\sigma dW_t \\ &= S_0 e^{Y_t}\mu dt + S_0 e^{Y_t}\sigma dW_t. \end{aligned}$$

Jasno je da je $S_t = S_0 e^{Y_t}$, pa iz gornje jednakosti sledi

$$\begin{aligned} dS_t &= d(S_0 e^{Y_t}) \\ &= S_0 e^{Y_t}\mu dt + S_0 e^{Y_t}\sigma dW_t \\ &= \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t. \end{aligned}$$

□

Na osnovu definicije 2.0.17, proces cena akcije (2.6) zaista prati geometrijsko Braunovo kretanje sa driftom μ i volatilonošću σ. U literaturi se taj proces često navodi i u obliku stohastičke diferencijalne jednačine (2.5).

2.1 Rizik-neutralna mera

U uvodnom poglavlju smo uveli prvi put pojam rizik-neutralne mere. To je mera koju treba da koristimo prilikom vrednovanja finansijskih derivata. Jedna od njenih glavnih karakteristika je da su svi diskontovani procesi cena u ovoj meri martingali. Finansijskim rečnikom, to znači da je trenutna vrednost svih aktiva jednaka očekivanoj budućoj vrednosti tih aktiva diskontovanih nerizičnom kamatnom stopom, a to ne važi u pravoj, fizičkoj meri verovatnoće P. Stoga, da bismo izvršili vrednovanje prodajne opcije, moramo zameniti meru P sa rizik-neutralnom merom Q, koja se još naziva i ekvivalentna martingalna mera i Q-mera.

Teorijska mera verovatnoće Q se izvodi na osnovu pretpostavke da je sadašnja vrednost nekog finansijskog instrumenta jednaka njegovom očekivanom novčanom toku u budućnosti, diskontovanim za nerizičnu kamatnu stopu. Druga pretpostavka je da nema arbitraže. Pod rizik-neutralnom merom, sve aktive imaju istu očekivanu stopu prinosa, odnosno nerizičnu kamatnu stopu. Samim tim su investitori neutralni pri odabiru aktiva.

Ukoliko važi uslov odsustva arbitraže, moguće je izvršiti transformaciju iz mere verovatnoće P u njenu ekvivalentnu rizik-neutralnu meru Q.

Sponu između dve mere čini **Radon-Nikodimov izvod** Z.

Definicija 2.1.1 *Neka je $(X, \mathcal{M})$ σ-algebra i neka su λ i μ mere na $\mathcal{M}$. Mera λ je **apsolutno neprekidna** u odnosu na meru μ ako $E \in \mathcal{M}$ i $\mu(E) = 0$ implicira $\lambda(E) = 0$. To zapisujemo:*

$$\lambda << \mu.$$

Teorema 2.1.2 ***Teorema Radon-Nikodima***
Neka su λ i μ σ-konačne mere na $(X, \mathcal{M})$ i neka je $\lambda << \mu$. Tada postoji nenegativna merljiva funkcija (slučajna promenljiva) f takva da važi:

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu, \; E \in \mathcal{M}.$$

Funkcija f je jedinstveno određena do na skup mere nula u odnosu na λ.

Definicija 2.1.3 *Nenegativna funkcija f definisana u prethodnoj teoremi se naziva **Radon-Nikodimov izvod mere** λ u odnosu na meru μ i označava se $\frac{d\lambda}{d\mu}$.*

Definicija 2.1.4 *Za dve mere verovatnoće P i Q definisane na prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ kažemo da su **ekvivalentne** i zapisujemo $P \sim Q$, ako važi $P << Q$ i $Q << P$.*

Prethodnu definiciju možemo zapisati i na sledeći način:

Definicija 2.1.5 *Dve mere verovatnoće P i Q su ekvivalentne ako važi: $P(E) = 0 \iff Q(E) = 0$, za svako $E \in \mathcal{F}$.*

Za ekvivalentne mere verovatnoće P i Q, na osnovu teoreme 2.1.2, možemo definisati Radon-Nikodimov izvod od Q u odnosu na P sa:

$$Z := \frac{dQ}{dP}(E), E \in \mathcal{F}. \tag{2.7}$$

Označimo sa E_P i E_Q matematičko očekivanje računato u odnosu na meru verovatnoće P ili Q. Dalje, na osnovu teoreme 2.1.2, sledi sledeći, jači uslov:

$$E_Q(X) = E_P(ZX) = E_P\left(\frac{dQ}{dP}X\right).$$

Zamenu mera verovatnoća možemo izvršiti promenom koeficijenta drifta u Braunovom kretanju, što nam govori sledeća teorema.

Teorema 2.1.6 ***Girsanova teorema***
Neka je $W_t \in [0, T]$, Braunovo kretanje na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i neka je $\mathcal{F}_t$, filtracija generisana ovim procesom. Neka je $\theta(t)$ proces adaptiran ovoj filtraciji takav da je zadovoljen uslov:

$$E\left\{exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \theta^2(u)du\right)\right\} < \infty. \tag{2.8}$$

Za $t \in [0, T]$*, definišimo procese:*

$$\begin{aligned} \tilde{W}_t &= \int_0^t \theta(u)du + W_t, \\ Z_t &= exp\left\{ -\int_0^t \theta(u)dW_u - \frac{1}{2}\int_0^t \theta^2(u)du \right\}, \end{aligned}$$

i definišimo novu meru verovatnoće Q *sa:*

$$Q(A) = \int_A Z_T dP, zaA \in \mathcal{F}. \tag{2.9}$$

Tada je $Q \sim P$*, proces* $\tilde{W}_t$ *je martingal u odnosu na meru* Q*, i* $\tilde{W}_t$ *je standardno Braunovo kretanje u odnosu na* Q*.*

Uslov (2.8), je poznat i kao Novikovov uslov. On garantuje da je $\{Z_t\}_{t \le T}$ martingal u odnosu na meru P i filtraciju $\mathcal{F}_t$.

Navešćemo teoremu, koja nam je potrebna za dokaz teoreme 2.1.6.

Teorema 2.1.7 *Neka su* P *i* Q *ekvivalentne mere verovatnoće na prostoru* $(\Omega, \mathcal{F})$ *i neka je sa* Z *označen Radon-Nikodimov izvod* Q *u odnosu na* P*. Neka je, dalje,* X *slučajna promenljiva iz prostora* $(\Omega, \mathcal{F})$ *takva da je*

$$E_Q(|X|) = \int_\Omega |X| Z dP < \infty.$$

Neka je $\mathcal{H}$ σ*-algebra takva da je* $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$*. Tada važi:*

$$E_Q(X|\mathcal{H}) E_P(Z|\mathcal{H}) = E_P(ZX|\mathcal{H}).$$

Sledi dokaz Girsanove teoreme 2.1.6.

Dokaz:

Pokažimo prvo, na osnovu definicije 2.1.5, da su P i Q ekvivalentne mere.

$$\begin{aligned} P(A) &= 0 \overset{Z_T>0}{\Longrightarrow} Q(A) = \int_A Z_T dP = 0, \\ Q(A) &= 0 \Longrightarrow \int_A Z_T dP = 0 \overset{Z_T>0}{\Longrightarrow} P(A) = 0. \end{aligned}$$

Dalje, pretpostavimo zbog jednostavnosti, da je $\theta(t)$ ograničen proces na $t \in [0, T]$.

Da bismo pokazali da je $\tilde{W}_t$ Braunovo kretanje u odnosu na meru Q, na osnovu teoreme 2.0.13, sledi da je dovoljno pokazati da su procesi

1. $\tilde{W}_t$ i
2. $\tilde{W}_t^2 - t$ martingali u meri Q.

Pokažimo 1:
Definišimo $M_t = Z_t \tilde{W}_t$ i iskoristimo Itovu formulu (2.3). Tada dobijamo:

$$\begin{aligned} dM_t &= Z_t d\tilde{W}_t + \tilde{W}_t dZ_t + dZ_t d\tilde{W}_t = \\ &= Z_t(\theta(t)dt + dW_t) + \tilde{W}_t Z_t(-\theta(t)dW_t) + d\tilde{W}_t(-Z_t\theta(t)dW_t) \\ &= Z_t(\cancel{\theta(t)dt} + dW_t - \theta(t)\tilde{W}_t dW_t - \cancelto{0}{\theta(t)^2 dt dW_t} \\ &\quad -\cancel{\theta(t)(dW_t)^2}) \\ &= Z_t(dW_t - \theta(t)\tilde{W}_t dW_t) \\ &= Z_t \underbrace{(1 - \theta(t)\tilde{W}_t)}_{\gamma(t)} dW_t \end{aligned}$$

Podsetimo se da važe jednakosti $(dW_t)^2 = dt$ i $dW_t \cdot dt = 0$. Kako smo dobili da je $dM_t = d(Z_t\tilde{W}_t) = Z_t\gamma(t)dW_t$, sledi da je M_t martingal u meri verovatnoće P. Dalje, prema teoremi 2.1.7, za

$t < s$ dobijamo:

$$E_Q(\tilde{W}_s|\mathcal{F}_t) = \frac{E_P(Z_s\tilde{W}_s|\mathcal{F}_s)}{E_P(Z_s|\mathcal{F}_t)} = \frac{E_P(M_s|\mathcal{F}_t)}{Z_t} = \frac{M_t}{Z_t} = \tilde{W}_t,$$

čime smo dokazali da je $\tilde{W}_t$ martingal u meri Q.

Da bismo dokazali 2., definisaćemo $N_t = Z_t(\tilde{W}_t^2 - t)$ i ovog puta iskoristiti Itove formule (2.3) i (2.4) da bismo dobili:

$$\begin{aligned} d(\tilde{W}_t^2 - t) &= \left(-1 + 2\tilde{W}_t\theta(t) + \frac{1}{2}2\right)dt + 2\tilde{W}_t dW_t = \\ &= 2\tilde{W}_t\theta(t)dt + 2\tilde{W}_t dW_t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dN_t &= Z_t d(\tilde{W}_t^2 - t) + dZ_t(\tilde{W}_t^2 - t) + dZ_t d(\tilde{W}_t^2 - t) \\ &= Z_t(2\tilde{W}_t\theta(t)dt + 2\tilde{W}_t dW_t) + (-Z_t\theta(t)dW_t)(\tilde{W}_t^2 - t) \\ &\quad +(-Z_t\theta(t)dW_t)(2\tilde{W}_t\theta(t)dt + 2\tilde{W}_t dW_t) \\ &= 2\theta(t)Z_t\tilde{W}_t dt + 2Z_t\tilde{W}_t W_t - \theta(t)Z_t dW_t(\tilde{W}_t^2 - t) - \\ &\quad -2\theta(t)Z_t\tilde{W}_t dt \\ &= Z_t\underbrace{(2\tilde{W}_t - \theta(t)(\tilde{W}_t^2 - t))}_{\delta t}dW_t \\ &= Z_t\delta(t)dW_t. \end{aligned}$$

Sledi da je N_t martingal u meri verovatnoće P. Prema teoremi 2.1.7, za $t < s$ dobijamo:

$$\begin{aligned} E_Q(\tilde{W}_s^2 - s|\mathcal{F}_t) &= \frac{E_P(Z_s(\tilde{W}_s^2 - s)|\mathcal{F}_s)}{E_P(Z_s|\mathcal{F}_t)} = \\ &= \frac{E_P(N_s|\mathcal{F}_t)}{Z_t} = \frac{N_t}{Z_t} = \tilde{W}_t^2 - t, \end{aligned}$$

što dokazuje da je $\tilde{W}_t^2 - t$ martingal u meri verovatnoće Q.

Dakle, na osnovu teoreme 2.0.13 sledi da je $\tilde{W}_t$ Braunovo kretanje u meri Q.

$\square$

Iz teoreme sledi da je $P(A) = \int_A \frac{1}{Z_t}\, dQ$, $A \in \mathcal{F}$, kao i da je za proizvoljnu $\mathcal{F}_t$-merljivu slučajnu promenljivu X i $0 \leq s \leq t \leq T$

$$E_Q(X|\mathcal{F}_s) = \frac{1}{Z_s}\, E_P(XZ_t|\mathcal{F}_s). \tag{2.10}$$

Zamena mera verovatnoće data u (2.9) se naziva **Girsanova transformacija mera**. Ona se u primeni često koristi, jer tada, pod novom merom Q, neki stohastički proces dobija lepe osobine, pa se dalje lako računaju njegove karakteristike. U našem primeru, proces diskontovanih cena postaje martingal u meri Q.

Sada ćemo to i pokazati.

Definicija 2.1.8 *Rizik-neutralna mera je ona mera Q, za koju su diskontovane cene aktive martingali.*

Mi sada želimo da odredimo tu meru Q, pri čemu je proces diskontovanih cena dat sa:

$$\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t,$$

a r je konstantna kamatna stopa.

Kako proces cena akcije prati geometrijsko Braunovo kretanje sa driftom μ i volatilnošću σ:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

raspisivanjem ove stohastičke diferencijalne jednačine dobijamo:

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{S_t} &= rdt + (\mu - r)dt + \sigma dW_t \\ &= rdt + \sigma \left(\frac{\mu - r}{\sigma} dt + dW_t \right). \end{aligned}$$

Označimo proces $\theta(t) = \frac{\mu - r}{\sigma}$[1]. Možemo ga primeniti u Girsanovoj teoremi, jer je proces $\mathcal{F}_t$-merljiv, a i zadovoljava Novikovov uslov (2.8), jer su paramentri μ, r i σ kontanstni u odnosu na vreme t. Tada, na osnovu Girsanove teoreme, sledi da se Braunovo kretanje u prostoru P, W_t, može transformisati u Braunovo kretanje u prostoru Q:

$$\tilde{W}_t = \frac{\mu - r}{\sigma} t + W_t.$$

Diferenciranjem dobijamo:

$$d\tilde{W}_t = \frac{\mu - r}{\sigma} dt + dW_t.$$

Dokažimo sada da je proces diskontovanih cena akcije zaista martingal u meri Q:

$$\begin{aligned}
d\tilde{S}_t = d(e^{-rt}S_t) &= -re^{-rt}S_t dt + e^{-rt} dS_t \\
&= e^{-rt}(-rS_t dt + dS_t) \\
&= e^{-rt}(-rS_t dt + \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) \\
&= e^{-rt}((\mu - r)S_t dt + \sigma S_t dW_t) \\
&= e^{-rt}\sigma S_t \left(\frac{\mu - r}{\sigma} dt + dW_t \right) \\
&= e^{-rt}\sigma S_t \quad \underbrace{(\theta(t)dt + dW_t)}_{\text{Braunovo kretanje u } Q\text{-meri}} \\
&= e^{-rt}\sigma S_t d\tilde{W}_t,
\end{aligned}$$

□

Q je, dakle, rizik-neutralna mera koju smo tražili, i čije postojanje nam garantuje Girsanova teorema.

[1]Proces $\theta(t) = \frac{\mu - r}{\sigma}$ se još naziva i tržišna cena rizika.

Poglavlje 3

Ekonomski model

U ovom poglavlju ćemo predstaviti ekonomski model u čijim okvirima ćemo odrediti cenu opcije. Iako postoji više ekonomskih modela, mi ćemo posmatrati Blek-Šolcov model tržišta.

Pretpostavke Blek-Šolcovog modela su sledeće:

- posmatramo konačni vremenski interval $[0, T]$,
- prostor verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$,
- T_x je slučajna promenljiva koja predstavlja preostali životni vek osobe starosti x,
- $\mathcal{H}_t = \sigma(\{T > s\}, 0 \leq s \leq t)$, σ-algebre generisane sa T_x.
- Pretpostavljamo da tržišnu vrednost akcije možemo modelovati uz pomoć standardnog Braunovog kretanja, W_t,
- $\mathcal{G}_t$ predstavlja σ-algebre, generisane Braunovim kretanjem i kompletirane u osnosu na P-nula skupove.
- Dalje, pretpostavljamo da su $\mathcal{G}_t$ i $\mathcal{H}_t$ stohastički nezavisne. Ovaj uslov nam zapravo označava da vrednost akcije ne zavisi od zdravstvenog stanja osiguranika, niti zdravstveno stanje zavisi od vrednosti akcije.

- $\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{G}_t, \mathcal{H}_t)$ predstavlja σ-algebru generisanu sa $\mathcal{G}_t$ i $\mathcal{H}_t$.
- Ne isplaćuju se dividende na akciju koja je podloga opcije,
- nema troškova transakcija,
- tržište je kompletno i nearbitražno,
- nerizična kamatna stopa, r, je konstantna.

σ-algebru $\mathcal{F}_t$ možemo interpretirati kao sve informacije dostupne u ekonomiji do trenutka t. To su informacije koje su dobijene beleženjem vrednosti portfolija i zdravstvenog stanja osiguranika u vremenskom intervalu $[0, t]$, [1].

Blek-Šolcov model tržišta je primer binarnog tržišta, jer se sastoji od jedne obveznice i jedne akcije. Označimo sa B_t vrednost nerizične obveznice i sa S_t vrednost akcije u trenutku $t \in [0, T]$.

Biramo sledeći cenovni sistem. Cena obveznice u trenutku t je

$$B_t = e^{rt}, \tag{3.1}$$

gde je r konstantna nerizična kamatna stopa. Stoga obveznicu B_t možemo posmatrati kao nerizičnu investiciju.

Proces cena akcije je dat sa:

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\ \sigma^2)t + \sigma W_t}, \tag{3.2}$$

gde su μ i σ, drift i volatilnost procesa cena akcije. Dalje, pretpostavljamo da je S_0 konstantna vrednost i ona predstavlja cenu jedne jedinice (eng. unit) referentnog portfolija (fonda) u vremenskom trenutku $t = 0$. Pošto ćemo, radi jednostavnosti, pretpostaviti da se jedna jedinica fonda sastoji od jedne akcije, S_0 je cena akcije u $t = 0$. Proces S_t je još poznat kao geometrijsko Braunovo kretanje.

Procesi cena zadovoljavaju sledeće diferencijalne jednačine:

1. Proces obveznice B_t:

$$\begin{aligned} dB_t &= rB_t dt, \\ B_0 &= 1. \end{aligned} \tag{3.3}$$

2. Proces akcije S_t:

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \\ S_0 &> 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Primetimo da je proces S_t jedinstveno određen Braunovim kretanjem W_t. Prema Itovoj formuli, proces cena akcije 3.2 je rešenje stohastičke diferencijalne jednačine 3.4.

Diskontovane procese cena dobijamo kada B_t i S_t podelimo sa e^{rt}, odnosno dobijamo sledeće procese:

$$\tilde{B}_t = e^{-rt} B_t = 1 \tag{3.5}$$

$$\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t = S_0 e^{(\mu - r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}. \tag{3.6}$$

Ovim smo odredili mogućnosti za investiranje. Naime, može se napraviti portfolio koji se sastoji od određenog broja nerizičnih obveznica i od određenog broja akcija fonda.

Posmatrajmo sada portfolio koji se u trenutku $t \in [0, T]$ sastoji od α_t obveznica B_t i β_t akcija S_t.

Definicija 3.0.1 *Tržišna strategija je par* (α, β) *adaptiranih, merljivih procesa za koje važi:*

- $\int_0^T |\alpha_t| dt < \infty$ *skoro sigurno,*
- $E[\int_0^T \beta_t^2 dt] < \infty$*,*

- $\int_0^T \beta_t^2 S_t^2 dt < \infty$ *skoro sigurno.*

Tržišnu strategiju možemo takođe da shvatimo kao jedno dinamičko pravilo investiranja koje opisuje koliko akcija fonda, a koliko obveznica, treba da sačinjavaju portfolio u svakom vremenskom trenutku.

Ukoliko je, na primer, (α, β) jedna strategija, tada je vrednost portfolija sačinjenog od α obveznica i β akcija

$$V_t^{(\alpha,\beta)} = \alpha_t B_t + \beta_t S_t.$$

Definicija 3.0.2 *Samofinansirajuća tržišna strategija (α, β) je ona tržišna strategija za koju važi:*

$$dV_t^{(\alpha,\beta)} = \alpha_t dB_t + \beta_t dS_t.$$

Samofinansirajuće strategije su zapravo one strategije koje niti stvaraju kapital, niti zahtevaju dodatni priliv kapitala u portfolio tokom perioda investiranja. To znači da, do promene vrednosti portfolija može doći samo promenom cene aktiva koje on sadrži.

Definicija 3.0.3 *Na tržištu postoji mogućnost arbitraže, ako postoji samofinansirajuća strategija (α, β), takva da je:*

1. $V_0^{(\alpha,\beta)} = 0$ *i*
2. $V_T^{(\alpha,\beta)} \geq 0$ *skoro sigurno i* $E[V_T^{(\alpha,\beta)}] > 0$.

Definicija 3.0.4 *Za tržišnu strategiju (α, β), kažemo da je dopustiva, ako je samofinansirajuća i ako je njena diskontovana vrednost:*

$$\tilde{V}_t^{(\alpha,\beta)} = \frac{V_t^{(\alpha,\beta)}}{B_t} = \alpha_t + \beta_t \tilde{S}_t$$

zadovoljava sledeće uslove:

1. $\tilde{V}_t^{(\alpha,\beta)} \geq 0$*, za sve* $t \in [0, T]$ *i*

2. $E\left(\left(\tilde{V}_t^{(\alpha,\beta)}\right)^2\right) < \infty$*, za sve* $t \in [0, T]$.

Označimo sa Φ, skup dopustivih tržišnih strategija.

Ideja dopustivih tržišnih strategija proističe iz toga što želimo da posmatramo samo portfolije koji neće dovesti do bankrota, ali ujedno ni ne dozvoljavaju dodatni priliv ili odliv novca. Iz toga sledi da vrednost tržišne strategije ostaje konstantna i kada se udeo akcija i obveznica u portfoliju preraspodeli. Stoga se tržišna strategija koja ostvaruje isti novčani tok kao i opcija, može koristiti za određivanje vrednosti opcije, [6].

Definicija 3.0.5 *Uslovno potraživanje (eng. contingent claim) je pozitivna slučajna promenljiva* X*. Skup svih uslovnih potraživanja se označava sa* χ*.*

Definicija 3.0.6 *Slučajna promenljiv* X *se može hedžirati, ako postoji dopustiva tržišna strategija* $(\alpha, \beta) = \phi \in \Phi$*, koja je replicira, odnosno:*

$$V_T(\phi) = X.$$

Definicija 3.0.7 *Cena uslovnog potraživanja, koji se može hedžirati, a koji je repliciran tržišnom strategijom* ϕ *je:*

$$\pi = V_0(\phi). \tag{3.7}$$

Pojam uslovnog potraživanja je drugi izraz za finansijske derivate, uglavnom su to opcije čija isplata zavisi od realizacije nekog budućeg nesigurnog događaja. Na osnovu definicije 3.0.7, cenu opcije možemo odrediti uz pomoć vrednosti replikantnog portfolija u trenutku $t = 0$.

Označimo sada isplatu osiguranja sa $C(T^*)$, gde je $T^* \in [0, T]$. U životnom osiguranju, interpretiramo T^* kao vreme isteka polise, što je zapravo baš T kada je osiguranje koje posmatramo za slučaj preživljavanja. Ukoliko je osiguranje za slučaj smrti i ukoliko važi i $T^* < T$ onda je baš $T^* = T_x$.

U daljem radu ćemo posmatrati osiguranje u slučaju preživljavanja. Neka je tada $C(T)$ pozitivna ili nenegativna slučajna promenljiva konačne varijanse koja predstavlja isplaćenu beneficiju u trenutku T. U našem radu, $C(T)$ je merljiva funkcija od S_t, a kako je S_t adaptiran proces, njenu vrednost možemo odrediti na osnovu $\mathcal{F}_t$.

Teorema 3.0.8 *U Blek-Šolcovom modelu, datim sa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, filtracijom $\mathcal{F}_t$, aktivama B_t i S_t i skupom dopustivih tržišnih strategija Φ, tržišna cena beneficije koja se isplaćuje u trenutku T, u vremenskom trenutku t je data sa:*

$$\pi_t(T) = E^Q[e^{-r(T-t)}C(T)|\mathcal{F}_t], s.s. \tag{3.8}$$

Glavna razlika između ovog modela i modela klasičnog životnog osiguranja je što u ovom modelu računamo očekivanje u odnosu na Q, a ne u odnosu na P. Postojanje ekvivalentne martingalne mere Q se može ekonomski interpretirati kao postojanje barem jednog, konzistentnog cenovnog sistema, [6].

Do sada nismo posmatrali osiguranje sa garancijom, pa su samim tim formule bile dosta jednostavne. Pretpostavimo da je zagarantovana beneficija, G_t, uključena u ugovor unit-linked model. Ukoliko se realizuje trajektorija S_t takva da je u momentu dospeća cena $S_T < G_T$, onda će se prodajna opcija izvršiti. Funkcija prihoda u trenutku t za evropsku prodajnu opciju je:

$$P(S_t, t) = max\{0, G_t - S_t\}.$$

Sledi da je vrednost opcije u trenutku t definisana sa:

$$\pi_t(T) = E^Q[e^{-r(T-t)}max\{G_T - S_T, 0\}|\mathcal{F}_t]. \tag{3.9}$$

Definicija 3.0.9 *Ukoliko pretpostavimo da je zagarantovana beneficija konstantna, G, cena prodajne opcije u Blek-Šolcovom modelu je data sledećim izrazom:*

$$P(S_t, t) = Ge^{-r(T-t)}\Phi(-d_2^0(T)) + S_t\Phi(d_1^0(T)), \tag{3.10}$$

gde su:

$$d_1^t(T) = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{G}\right) + (r + \frac{1}{2}\cdot\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \tag{3.11}$$

$$d_2^t(T) = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{G}\right) + (r - \frac{1}{2}\cdot\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \tag{3.12}$$

a Φ funkcija raspodele normalne (0,1) raspodele i $T > t$.

Do isplate za unit-linked osiguranje u slučaju preživljavanja će doći ukoliko osiguranik, koji je kupio polisu, preživi do datuma isteka polise. Verovatnoća preživljavanja od barem T godina se označava sa ${}_Tp_x$. To implicira da je cena polise jednaka ceni prodajne opcije pomnožene sa verovatnoćom preživljavanja.

Teorema 3.0.10 *Neka je dat Blek-Šolcov model. Tada je* **neto jednokratna premija** *za osiguranje za slučaj preživljavanja, čija je isplata:*

$$P(T) = max\{S_T, G_T\},$$

data sa:

$${}_TG_x = {}_Tp_x[G(T)e^{-rT}\Phi(-d_2^0(T)) + S(0)\Phi(d_1^0(T))], \tag{3.13}$$

gde su $d_2^0(T)$ i $d_1^0(T)$ dati jednačinama (3.11) *i* (3.12).

Vidimo da neto premija zavisi od verovatnoće preživljavanja. U radu ćemo razmatrati dva pristupa za dobijanje ovih vrednosti, deterministički i stohastički. U narednom poglavlju ćemo predstaviti stohastiče modele mortaliteta koji se koriste za određivanje ovih verovatnoća.

Poglavlje 4

Stohastički modeli mortaliteta

4.1 Motivacija

Ljudska očekivana životna dob (eng. life expectancy) pokazuje trend stalnog rasta. Ova činjenica je jedno veliko dostignuće za čovečanstvo, jer ukazuje na to da je sam životni standard porastao, kao i da je ostvaren napredak u medicini i farmaciji. Ali, kako je buduće ponašanje mortaliteta neizvesno, to izlaže osiguravajuće kuće, penzione fondove, vlade država, riziku dugovečnosti (eng. longevity risk). To je rizik da su stvarne stope preživljavanja veće od očekivanih, i on je sistematski rizik.

Da bi se objasnio ovaj pad stope mortaliteta, u upotrebi su sve češće stohastiči modeli mortaliteta. Razlog za to je činjenica da je ovaj pad mortaliteta vođen procesom koji je stohastički, [3]. Dalje, aktuari ih, takođe, koriste i za bolje upravljanje rizicima, određivanje rezervi, kao i za vrednovanje proizvoda osiguranja povezanih sa mortalitetom.

Početkom 1990. godine, ovi modeli počinju da se razvijaju, kako bi preciznije mogla da se analizira i predvidi buduća dinamika mortaliteta. Od tada, nastao je veliki broj njih. Međutim, mi ćemo se u našem radu ipak ograničiti na neke od najpoznatijih modela u literaturi. To je sedam modela, koji su predstavljeni u radu [5], i poznati su po svojim skraćenicama M1-M3 i M5-M8. Osmi model, M4, nećemo posmatrati zato što on nije primer ni uopštenog lineranog ni uopštenog nelinearnog modela.

Bitno je napomenuti i nedostatke stohastičkih modela mortaliteta. Posledica postojanja velikog broja modela je što je odabir odgovarajućeg modela za određene podatke veoma težak. To dovodi do rizika izbora modela. Osim toga, pouzdani istorijski demografski podaci koji su dostupni su ograničeni, što dalje dovodi do rizika od loše ocene parametara.

4.2 Oznake

Pre nego što navedemo stohastičke modele mortaliteta, upoznaćemo se sa oznakama koje su potrebne za njihovo bolje razumevanje:

- kalendarska godina t - vremenski period $[t, t+1]$,
- $d_{x,t}$ – broj preminulih osoba starosti x, u kalendarskoj godini t. Podaci o broju preminulih osoba su objedinjeni u matrici $\mathbf{D} = [d_{x,t}]$,
- $e_{x,t}$ – centralna izloženost riziku, odnosno mera prosečne veličine populacije starosti x, u kalendarskoj godini t. Podaci o izloženosti su takođe objedinjeni u matrici, $\mathbf{E}^c = [e_{x,t}]$.

Pretpostavimo da podaci koje posmatramo pokrivaju starosne godine $x_1, x_2, \ldots, x_{n_a}$ i kalendarske godine $t_1, t_2, \ldots, t_{n_y}$, gde je n_a broj starosnih godina, a n_y broj kalendarskih godina. Sledi da su matrice $\mathbf{D}$ i $\mathbf{E}^c$ dimenzija $n_a \times n_y$, a ukupan broj obzervacija iznosi $n = n_a n_y$.

Ukoliko osoba premine u x-oj godini života tokom godine t, koristimo oznaku $c = t - x$ za godinu rođenja te osobe. U statistici se grupa osoba koji dele iste definišuće karakteristike naziva kohort. U našem slučaju, sve osobe rođene iste godine čine jedan kohort. Neka je dalje sa $n_c = n_a + n_y - 1$ označen broj kohorta u našim podacima.

Neprekidna stopa mortaliteta $\mu(x, t)$ za ljudsku populaciju se menja veoma sporo i pretpostavlja se da je glatka i po x i po t. Na osnovu [5] uvodimo i jednu tehničku pretpostavku, a to je da je $\mu(x, t)$ kontstantna vrednost tokom svake starosne godine, odnosno od $(x, x + 1)$, i tokom svake kalendarske godine, odnosno od $(t, t + 1)$. Sledi,

$$\mu(x + u, t + v) \approx \mu(x, t), 0 \leq u, v < 1. \tag{4.1}$$

Stoga, $\mu(x, t)$ zapravo aproksimira neprekidnu stopu mortaliteta za tačnu starost $x + \frac{1}{2}$ i vremenski trenutak $t + \frac{1}{2}$. Pretpostavka (4.1) ima dve važne posledice:

- veoma jednostavno je izraziti vezu između neprekidne stope mortaliteta i stope mortaliteta:

$$q(x, t) \approx 1 - e^{-\mu(x,t)}. \tag{4.2}$$

- Broj preminulih osoba može da se posmatra kao realizacija slučajne promeljive na dva načina:

  1. Za svako x i t, broj $d_{x,t}$ je realizacija Poasonove slučajne promenljive $D_{x,t}$, tako da je:

  $$D_{x,t} : \mathcal{P}(e_{x,t} \cdot \mu(x, t)) \tag{4.3}$$

  2. Aproksimirajmo inicijalnu izloženost riziku sa $E_{x,t} \approx e_{x,t} + \frac{1}{2} d_{x,t}$, i označimo sa $\mathbf{E} = [E_{x,t}]$ matricu inicijalnih izloženosti. Inicijalna izloženost je, ništa drugo do broj osoba starosti x koji su živi na početku kalendarske godine t.

Tada je $d_{x,t}$ realizacija binomne slučajne promenljive $D_{x,t}$, tako da je:

$$D_{x,t} : \mathcal{B}(E_{x,t}, q(x,t)). \tag{4.4}$$

Na osnovu ovih pretpostavki, odnosno jednačina (4.3) i (4.4), dolazimo do sledećih ocena maksimalne verodostojnosti za $\mu(x,t)$ i $q(x,t)$, na osnovu početnih podataka **D** i $\mathbf{E}^c$:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{x,t} &= \frac{d_{x,t}}{e_{x,t}} \\ \hat{q}_{x,t} &= \frac{d_{x,t}}{E_{x,t}} \end{aligned} \tag{4.5}$$

Napomena: Primenom Tejlorove teoreme, dobijamo

$$-log(1-\hat{q}_{x,t}) - \hat{\mu}_{x,t} \approx \frac{1}{12} \cdot \hat{\mu}^3_{x,t},$$

gde je $\frac{1}{12} \cdot \hat{\mu}^3_{x,t}$ veoma mala veličina. Zbog veoma dobre aproksimacije sledi da ocene maksimalne verodostojnosti, $\hat{\mu}_{x,t}$ i $\hat{q}_{x,t}$ pod (4.5), zadovoljavaju relaciju (4.2), koja je veoma česta u upotrebi. Ta formula za konverziju je veoma korisna pri analizi parametarskih modela mortaliteta, koji su formulisani u odnosu na $q(x,t)$.

Sada, kada smo naveli osnovne oznake i definisali osnovne relacije, možemo da pređemo na uvođenje modela mortaliteta.

4.3 Modeli mortaliteta

Većina stohastičkih modela mortaliteta se mogu zapisati na jedan od sledeća dva načina:

$$log\mu(x,t) = \beta_x^{(1)}\kappa_t^{(1)}\gamma_{t-x}^{(1)} + \cdots + \beta_x^{(N)}\kappa_t^{(N)}\gamma_{t-x}^{(N)} \tag{4.6}$$

ili

$$logitq(x,t) = \beta_x^{(1)}\kappa_t^{(1)}\gamma_{t-x}^{(1)} + \cdots + \beta_x^{(N)}\kappa_t^{(N)}\gamma_{t-x}^{(N)}, \tag{4.7}$$

pri čemu su za $i = 1, 2, \ldots, N$:

- $\beta_x^{(i)}$ funkcije koje prikazuju uticaj starosti x,
- $\kappa_t^{(i)}$ funkcije koje prikazuju uticaj perioda, odnosno kalendarske godine t i
- $\gamma_{t-x}^{(i)}$ funkcije koje prikazuju uticaj kohorta, godine rođenja

na mortalitet.

Jedan od prvih radova u ovoj oblasti je rad Lija i Kartera (eng. Lee & Carter) [12] iz 1992. godine. Oni su predložili sledeći model:

$$log\mu(x,t) = \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)}\kappa_t^{(2)}. \tag{4.8}$$

On je dobra početna tačka za analizu i razumevanje stohastičkih modela mortaliteta, zato što je dosta jednostavan, a postupak koji se primenjuje za određivanje budućih vrednosti mortaliteta se koristi i kod ostalih, komplikovanijih modela.

Li i Karter su koristili podatke koje su klasifikovali prema starosti i godini kada je došlo do smrti. Zatim su modelovali neprekidnu stopu mortaliteta u odnosu na ove dve promenljive. Parametar perioda, odnosno parametar koji se odnosi na godinu umiranja, $\kappa_t^{(2)}$ su posmatrali kao vremensku seriju dužine n_y. Ocene ovog parametra su zatim projektovali u budućnost, što im je omogućilo da dobiju buduće vrednosti za $\mu(x,t)$.

Strukture modela koje ćemo posmatrati u radu su date u sledećoj tabeli, odakle možemo primetiti da svi modeli zadovoljavaju jednačine (4.6) ili (4.7).

Model	Strukura
M1: Lee-Carter(LC)	$\beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)}\kappa_t^{(2)}$
M2: Renšo-Haberman (RH)	$\beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)}\kappa_t^{(2)} + \beta_x^{(3)}\gamma_{t-x}^{(3)}$
M3: Age-period-cohort (APC)	$\beta_x^{(1)} + \kappa_t^{(2)} + \gamma_{t-x}^{(3)}$
M5: Cairns-Blake-Dowd (CBD)	$\kappa_t^{(1)} + \kappa_t^{(2)}(x-\bar{x})$
M6: M5 + C (CBD(C))	$\kappa_t^{(1)} + \kappa_t^{(2)}(x-\bar{x}) + \gamma_{t-x}^{(3)}$
M7: M5 + Q + C (CBD(QC))	$\kappa_t^{(1)} + \kappa_t^{(2)}(x-\bar{x}) + \kappa_t^{(3)}[(x-\bar{x})^2 - \hat{\sigma}_x^2] + \gamma_{t-x}^{(4)}$
M8: M5 + C_δ	$\kappa_t^{(1)} + \kappa_t^{(2)}(x-\bar{x}) + \gamma_{t-x}^{(3)}(\delta - x)$

Tabela 4.1: Modeli M1-M3 i M5-M8 i njihova struktura. $\bar{x}$ je srednja vrednost starosnih godina uključenih u analizu, a $\hat{\sigma}_x^2$ je srednja vrednost od $(x-\bar{x})^2$.

Modeli M1-M3 i M5-M8 koriste isti pristup za određivanje budućih vrednosti $\mu(x,t)$ ili $q(x,t)$, kao i Li-Karterov model. Važno je primetiti da neki modeli sadrže proširenje u vidu kohort parametra. Pokazalo se da se uvođenjem kohort komponente u modele znatno poboljšao fit podataka modelima, [3]. Kohort parametar, odnosno parametar koji se odnosi na godinu rođenja, takođe se posmatra kao vremenska serija, dužine n_c. Na isti način kao i za period komponentu, dolazimo do projekcija ocene parametara, i samim tim, do projekcija za $\mu(x,t)$ ili $q(x,t)$.

Napomena: Poboljšani fit podataka ne mora da znači i bolje projekcije mortaliteta [3].

4.3.1 Kriterijumi za poređenje fitovanih modela mortaliteta

Bejzov informacioni kriterijum

Ukoliko bismo koristili maksimalnu verodostojnost za poređenje modela, prirodno je da modeli sa više parametara imaju bolji "fit". To posebno važi za ugnježdene modele. Kako bismo izbegli da dodatni parametar nužno znači i bolji "fit", koristićemo Bejzov informacioni kriterijum (BIC), zato što on umanjuje rizik od prevelikog broja parametara u modelu (eng. overparametrization). To se postiže time što ovaj kriterijum prilagođava logaritam maksimalne verodostojnosti za broj parametara N_p.

Definicija 4.3.1 *Bejzov informacioni kriterijum (BIC) je alat koji se koristi pri odabiru modela. BIC je dat sledećom formulom:*

$$BIC = -2L(\tilde{\theta}) + N_p \cdot ln(n), \tag{4.9}$$

gde je $L(\tilde{\theta})$ maksimum logaritma funkcije verodostojnosti, $\tilde{\theta}$ je vektor ocenjenih parametara, N_p broj parametara u modelu, a n veličina uzorka (broj observacija).

Prednost BIC-a je što nam omogućava poređenje modela koji ne moraju biti ugnježdeni. Još jedna bitna karakteristika BIC-a je što nema pretpostavke o rangu modela, svi modeli su na startu istog statusa, dok, na primer, kod testiranja hipoteza, nulta hipoteza stavlja određeni model u bolju poziciju u odnosu na model iz alternativne hipoteze.

Reziduali fitovanih modela

Prisetimo se, pretpostavili smo da je broj preminulih osoba nezavisna Poasonova slučajna promenljiva za svako x i t. Odatle sledi da su standardizovani reziduali fitovanih modela približno nezavisne i identički raspoređene standardne normalne slučajne promenljive. Jednostavan način da to proverimo je da posmatramo mustru pozitivnih i negativnih reziduala, kada se oni predstave na grafiku. Ta mustra, tada, mora biti slučajna, bez ikakvih primetnih grupisanja.

Poređenje ugnježdenih modela

Ukoliko je model specijalan slučaj nekog drugog modela, tada za njih kažemo da su ugnježdeni. Da bismo testirali koji od ta dva modela je ispravan za određeni skup podataka, koristi se test količnika verodostojnosti. On testira hipoteze:
H_0: ugnježdeni model je dovoljno dobar kao i uopšteni model,
H_a: uopšteni model je značajno bolji.

Robusnost ocena parametara

Važna osobina modela je robusnost ocena parametara u odnosu na promene perioda koji je uključen u podatke. Ocene parametara nekog modela su robustne ukoliko imaju približne vrednosti kada su fitovane sa podacima koji sadrže različite opsege godina uključenih u analizu.

4.3.2 Ocene parametara

Ocene za parametre modela mortaliteta dobijaju se putem metode maksimalne verodostojnosti.

Pretpostavimo da imamo podatke koji pokrivaju starosne godine $x_1, x_2, \ldots, x_{n_a}$ i kalendarske godine $t_1, t_2, \ldots, t_{n_y}$. Za svaku starosnu godinu x i kalendarsku godinu t imamo izloženost riziku $e_{x,t}$ i broj preminulih osoba $d_{x,t}$. Ukoliko sa ϕ predstavimo skup svih parametara modela, tada je logaritam funkcije maksimalne verodostojnosti za modele mortaliteta dat sa

$$l(\phi; d, e) = \sum_{x,t} d_{x,t} log[e_{x,t}\mu(x,t;\phi)] - e_{x,t}\mu(x,t;\phi) - log[d_{x,t}!]. \tag{4.10}$$

4.4 Uopšteni linearni i nelinearni modeli

Spomenuli smo da se većina stohastičkih modela mortaliteta može prikazati na jedan od dva načina datih jednačinama (4.6) ili (4.7). Date jednačine su primeri uopštenih linearnih modela (eng. Generalized Linear Models) ili uopštenih nelinearnih modela (eng. Generalized Nonlinear Models). Zbog toga ćemo sada ukratko predstaviti te modele i njihove karakteristike.

Pod pojmom uopštenih linearnih modela - ULM, podrazumevamo široku klasu modela koji u statistici predstavljaju fleksibilnu generalizaciju obične linearne regresije. Model linearne regresije, uz pomoć linearnosti, opisuje vezu između očekivane vrednosti zavisne promenljive i skupa nezavisnih promenljivih, i još zahteva da zavisna promenljiva ima normalnu raspodelu. Dok uopštenje linearne regresije leži u tome što je dozvoljeno da je linearni model povezan sa zavisnom promenljivom preko funkcije veze (eng. link function) i što zavisna promenljiva sada može da ima raspodelu iz familije eksponencijalnih raspodela.

Definicija 4.4.1 *Za svaku raspodelu verovatnoća slučajne promenljive koja se može napisati u obliku:*

$$f(y) = c(y, \phi) exp \left\{ \frac{y\theta - a(\theta)}{\phi} \right\}, \tag{4.11}$$

kažemo da pripada eksponencijalnoj familiji. [1]*Parametar ϕ se naziva disperzioni, a θ kanonički parametar.*

Svaki uopšteni linearni model se sastoji od tri komponente:

1) **Komponenta slučajnosti** (eng. random component) se odnosi na zavisnu promenljivu Y i na njenu raspodelu koja spada u

[1]Familija eksponencijalnih raspodela obuhvata veliki broj raspodela verovatnoće, među kojima su normalna, binomna, Poasonova, gama i druge raspodele.

familiju eksponencijalnih raspodela. Ova komponenta se još naziva i model šuma (eng. noise model) ili model greške (eng. error model). Na primer, za Y u linearnoj regresiji, to je normalna raspodela.

2) **Komponenta sistematičnosti** (eng. systematic component) određuje linearnu kombinaciju nezavisnih promenljivih u modelu $(X_1, X_2, \cdots X_n)$. Ona se naziva linearno predviđanje (eng. linear predictor). U primeru linearne regresije, to je

$$\beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n.$$

3) **Funkcija veze** (eng. link function) povezuje linerno predviđanje sa funkcijom $\mu = E(Y)$, odnosno povezuje komponentu slučajnosti sa komponentom sistematičnosti. Funkcija veze je funkcija $\eta = g(\cdot)$, koja je monotona, diferencijabilna, i takva da važi:

$$\eta = g(\mu) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n.$$

Za svaku raspodelu iz familije eksponencijalnih raspodela, postoji parametar za koji je gustina verovatnoće za datu raspodelu, konačna. Taj parametar se naziva prirodan parametar.
Za normalnu raspodelu to je očekivanje, za binomnu raspodelu to je logaritam verovatnoća, dok je za Poasonovu to logaritam očekivanja. Funkcija veze η koja transformiše $\mu = E(Y)$ u prirodni parametar, odnosno izjednačava prirodni parametar sa linearnim predviđanjem, naziva se kanonička veza.

Najčešće korišćeni uopšteni linearni modeli su oni koji koriste svoju kanoničku funkciju veze, jer tada dolazi do određenih pojednostavljenja. Na primer, logaritam funkcije verodostojnosti za model je konkavna funkcija, a i funkcija verodostojnosti je jednostavnija, [2].

Neki od veoma poznatih modela u statistici, a koji imaju strukturu uopštenih linearnih modela su, kao što je već spomenuta linearna regresija, ANOVA, Poasonova regresija, logistička regresija, log-linearni modeli i dr. U sledećoj tabeli ćemo predstaviti tri najvažnija ULM i njihove komponente:

Model	**Komponenta slučajnosti**	**Funkcija veze**	**Komponenta sistematičnosti**
linearna regresija	normalna	identička	neprekidna
logistička regresija	binomna	logit	mešovita
Poasonova regresija	Poason	log	mešovita

Tabela 4.2: Najvažniji uopšteni linearni modeli i njihove komponente

Mnoge zavisne promenljive su binarne, odnosno imaju dva ishoda koje možemo još da predstavimo i kao „uspeh” i „neuspeh”. U našem primeru stohastičkih modela mortaliteta, „uspeh” bismo mogli da označimo sa „osiguranik starosti x je preživeo godinu dana od današnjeg dana”, dok bi „neuspeh” bio da je „osiguranih starosti x preminuo u narednih godinu dana”. Verovatnoće ovih ishoda su:

$$P(\text{Osiguranik je preminuo}) = q_{x,t},$$

i

$$P(\text{Osiguranik je preživeo}) = 1 - q_{x,t},$$

Prirodni parametar za binomnu raspodelu je onda $log\left(\frac{q_{x,t}}{1-q_{x,t}}\right)$, [2], a naziva se još i logit od $q_{x,t}$. Logit je kanonička funkcija veze za binarnu ili binomnu komponentu slučajnosti. Sledi da je uopšteni linearni model tada zadat na sledeći način:

$$log\left(\frac{q_{x,t}}{1-q_{x,t}}\right) = logitq_{x,t} = \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_j, \tag{4.12}$$

i naziva se još i logistička regresija.

Neke zavisne promenljive, pak, modeliraju broj događaja od interesa u određenom vremenskom intervalu. To bi u našem primeru mogao da bude broj preminulih osoba starosti x, u toku jedne godine, $d_{x,t}$. Najjednostavnija raspodela za takve zavisne promenljive je Poasonova. Njen prirodni parametar je $log\mu$, odakle sledi da je kanonička funkcija veze logaritam. ULM koji koristi ovu funkciju veze se zapisuje u formi:

$$log\left(\mu_{x,t}\right) = \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_j. \tag{4.13}$$

Ovaj model se još zove i Poasonov regresioni model.

Sumiraćemo sada pretpostavke i karakteristike uopštenih linearnih modela:

- Realizacije zavisne promenljive Y, $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ su nezavisno raspoređene.
- Zavisna promenljiva ima raspodelu iz familije eksponencijalnih raspodela.
- Transformacija očekivane vrednosti zavisne promenljive linearno je povezana sa nezavisnim promenljivim.
- Kod Poasonove i binomne raspodele, varijansa je funkcija očekivane vrednosti, a ne kao kod normalne raspodele, gde imamo poseban parametar, koji opisuje disperziju. Zbog toga je moguća pojava prevelike disperzije (eng. overdispersion)[2], [2].
- Pretpostavlja se da su greške nezavisne, ali ne moraju biti normalno raspoređene.
- Za ocenjivanje parametara modela koriste se ocene maksimalne verodostojnosti, a ne ocene najmanjih kvadrata.

[2]Overdisperzion označava pojavu da je stvarna disperzija uzorka veća od one koju model pretpostavlja.

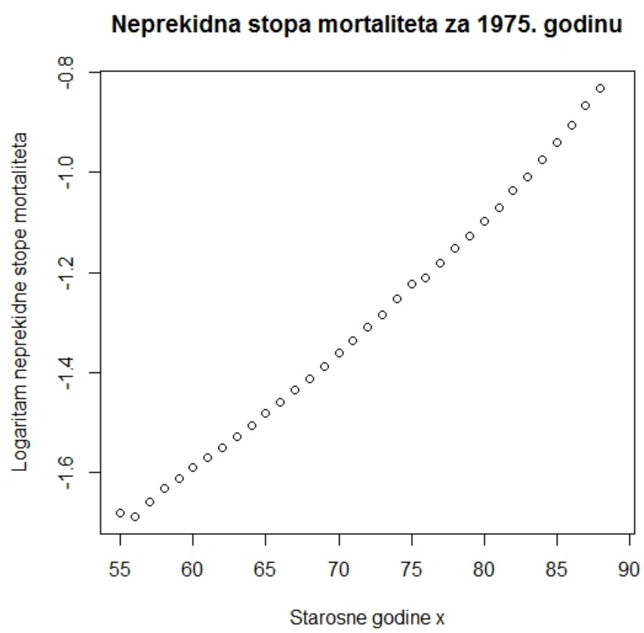
- Mere za adekvatnost fitovanja (goodness-of-fit) zavise od dovoljno velikog uzorka.

4.5 Gompercov zakon za $\mu_{x,t}$ i $q_{x,t}$

Pošto smo definisali osnovne pojmove uopštenih linearnih modela, vratićemo se na modele mortaliteta za neprekidnu stopu mortaliteta $\mu_{x,t}$ i stopu mortaliteta $q_{x,t}$. Na primeru jednog jednostavnijeg modela, prikazaćemo kako se ULM mogu fitovati podacima, i kako taj isti princip mi možemo primeniti i na stohastičke modele mortaliteta date u tabeli 4.1.

Gomperc (1825) je primetio da je neprekidna stopa mortaliteta približno linearna u odnosu na starost, ako se prikaže na logaritamskoj skali, grafik 4.5. Tako dolazimo do jednog veoma elegantanog modela koji je u aktuarstvu poznat kao Gompercov zakon:

$$\mu_x = e^{\theta_0+\theta_1 x}. \tag{4.14}$$



Pojednostavili smo zapis i izbacili smo oznaku za vreme, t.

Linearna priroda modela (4.14) se lako uočava ukoliko ga zapišemo na sledeći način

$$log\mu_x = \theta_0 + \theta_1 x.$$

Ukoliko dalje pretpostavimo da slučajna promenljiva $D_{x,t}$ prati Poasonovu raspodelu, odnosno važi (4.3), dolazimo do sledeće jednakosti:

$$\eta_x = logE(D_x) = log(e_x \cdot \mu_x) = loge_x + log\mu_x = loge_x + \theta_0 + \theta_1 x. \tag{4.15}$$

Ovim smo definisali uopšteni linearni model, gde zavisna promenljiva D_x ima Poasonovu raspodelu (komponenta slučajnosti). Funkcija veze je logaritam, a linearno predviđanje je

$$\eta_x = loge_x + \theta_0 + \theta_1 x.$$

Sabirak $loge_x$ je poznat kao pomak (eng. offset) modela.

Razlozi zašto je log dobro rešenje za funkciju veze su sledeći, [5]:

1. Najvažniji razlog je to što podaci podržavaju logaritamsku funkciju, što se može i videti na grafiku 4.5.

2. Logaritamska funkcija preslikava $\mu \in (0, \infty)$ u $log\mu \in (-\infty, \infty)$, što je prirodna skala za regresiju.

3. Logaritamska funkcija je poznata kao kanonička veza za ULM sa Poasonovom greškom, što pojednostavljuje rešenje funkcije maksimalne verodostojnosti za takve modele.

Neka su sada $\boldsymbol{\eta} = [\eta_1, \ldots, \eta_{n_a}]'$, $\boldsymbol{e} = [e_1, \ldots, e_{n_a}]'$, $\boldsymbol{x} = [x_1, \ldots, x_{n_a}]'$ i $\boldsymbol{\theta} = [\theta_0, \theta_1]'$. Tada jednačinu (4.15) možemo zapisati u matričnom obliku kao

$$\boldsymbol{\eta} = log\boldsymbol{e} + \boldsymbol{X\theta}, \boldsymbol{X} = [\mathbf{1}_{n_a} : \boldsymbol{x}], \tag{4.16}$$

gde je sa $\mathbf{1}_{n_a}$ označen vektor jedinica dužine n_a. Matricu $\boldsymbol{X}$ nazivamo **matrica modela**, i u njoj se oslikava linearnost modela.

Za aktuare je često interesantnija stopa mortaliteta $q_{x,t}$ od neprekidne stope mortaliteta $\mu_{x,t}$. Zbog toga je veoma zgodno što Gompercov zakon možemo izraziti i preko $q_{x,t}$. Pokažimo to.
Na osnovu jednakosti (4.2) i (4.14) imamo:

$$\begin{aligned} q_x &\approx 1 - e^{-\mu(x,t)} \\ &= 1 - e^{\theta_0 + \theta_1 x} \\ \Longrightarrow log(-log(1-q_x)) &\approx \theta_0 + \theta_1 x. \end{aligned}$$

Funkcija $cloglogq_x = log(-log(1-q_x))$, $0 < q_x < 1$ se naziva komplementarna $log - log$ funkcija.

Neka je $D_x : \mathcal{B}(E_x, q_x)$, kao u jednakosti (4.4) i neka $Q_x = D_x/E_x$ slučajna promenljiva, čije realizacije su vrednosti q_x. Dalje sledi da je

$$\eta_x = cloglogE(Q_x) = cloglogE\left(\frac{D_x}{E_x}\right) = cloglogq_x = \theta_0 + \theta_1 x. \tag{4.17}$$

Ovim smo definisali ULM čija zavisna promenljiva prati binomnu raspodelu, funkcija veze je komplementarna $log - log$, dok je linerno predviđanje $\eta_x = \theta_0 + \theta_1 x$. Zapisano u matričnom obliku, model možemo predstaviti kao:

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{X\theta}, \boldsymbol{X} = [\mathbf{1}_{n_a} : \boldsymbol{x}]. \tag{4.18}$$

Ali $cloglog$ nije kanonička funkcija za binomnu raspodelu u uopštenim linearnim modelima, već $logit$ funkcija data putem jednačine (4.7). Kako su za ULM različite funkcije veze moguće, jednačina Gompertzovog modela sa $logit$ vezom je:

$$q_x = \frac{e^{\theta_0+\theta_1 x}}{1+e^{\theta_0+\theta_1 x}}. \tag{4.19}$$

Primetimo da su matrice modela, $\boldsymbol{X}$, iste za obe reprezentacije Gompercovog modela, (4.16) i (4.18). Na osnovu primera Gompercovog zakona, zaključujemo da se svaki ulm, pa samim tim i modeli mortaliteta iz tabele 4.1, mogu definisati uz pomoć svojih matrica modela $\boldsymbol{X}$, funkcije veze η i raspodele šuma. Ove tri komponente se definišu nezavisno jedna od druge, [5].

Stohastički modeli mortaliteta, M1-M3 i M5-M8, na sličan način se mogu zapisati u matričnom obliku, kao i Gompercov model.

Fitovanje modela mortaliteta

Struktura uopštenih linearnih modela se može veoma lako predstaviti u programskom jeziku R. Ukoliko unesemo sledeće podatke u R:

- vektor broja preminulih osoba, $\boldsymbol{d}$,
- vektor logaritama centralnih izloženosti, $log\boldsymbol{e}$ i
- matricu modela, $\boldsymbol{X}$

veoma jednostavno, u jednoj liniji koda, možemo da fitujemo podatke Gompercovom modelu sa Poasonovom greškom, (4.16), koristeći R-ovu funkciju *glm*. Ova funkcija zahteva od korisnika da definiše i raspodelu verovatnoće i funkciju veze, kao ulazne parametre. Vidimo da je R jezik koji pruža opis uopštenih linearnih modela koji odgovara njegovoj algebarskoj definiciji.

Isti princip se primenjuje na stohastičke modele mortaliteta, za čije fitovanje nam je potrebno samo poznavanje matrice modela, funkcije veze i raspodele verovatnoće.

Uopšteni nelinearni modeli

Li-Karterov model M1 i Renšo-Habermanov model M2, čije strukture su date u tabeli 4.1, zapravo su primeri uopštenih nelinearnih modela (UNM), zato što sadrže nelinearne elemente, kao na primer, $\beta_x^{(2)}\kappa_t^{(2)}$. Ali R opet pruža jedno veoma elegantno rešenje. R-va funkcija *gnm* nam omogućava direktno fitovanje uopštenih nelinearnih modela, pri čemu je specifikacija modela veoma slična kao i u slučaju uopštenih linearnih modela, pa nećemo ulaziti u detaljnije objašnjenje.

U Poglavlju 6 ćemo predstaviti navedenu teoriju na praktičnom primeru, sa podacima populacije iz Engleske i Velsa.

Poglavlje 5

Vrednovanje unit-linked polisa

5.1 Pretpostavke modela

Kako bismo odredili cenu unit-linked ugovora, u prethodnim poglavljima smo objasnili i definisali sve činioce potrebne za vrednovanje ovih polisa. Sumiraćemo ih u ovom poglavlju.

Posmatrajmo osiguranje za slučaj preživljavanja kada dolazi do isplate osiguraniku, samo ukoliko on preživi do isteka polise. Neka ovi ugovori imaju još i zagarantovanu beneficiju G koja je konstantna tokom trajanja ugovora. To znači da isplatu sačinjavaju ili jedinice fonda u koji je uloženo ili zagarantovana beneficija, šta god je veće. Neka je dalje, trajanje ugovora T godina i polisa se finansira jednokratnom neto premijom osiguranja. Tada je osigurana suma na datum isteka polise, odnosno nakon T godina od zaključivanja polise jednaka:

$$max\{G, S_T\} = S_T + max\{G - S_T, 0\},$$

pri čemu je drugi sabirak zapravo riziko suma osiguranja, koja se ponaša kao novčani tok evropske prodajne opcije sa strajk cenom $G = K$ i dospećem T.

Samim tim, za određivanje cene ovih ugovora možemo koristiti poznatu Blek-Šolcovu formulu za određivanje cene opcija. Da bismo mogli da upotrebimo model, moraju da važe sledeće pretpostavke:

1) **Tržište na kojem se trguje**

   - je kompletno,
   - nema mogućnosti arbitraže,
   - nema troškova transakcije,
   - dozvoljava kratku prodaju,
   - omogućava neprekidno trgovanje aktivama,
   - sastoji se od dve aktive, nerizične obveznice sa procesom cena B_t i akcije, čiji je proces cena S_t.

2) **Bezrizična aktiva**

   - je obveznica čija cena zavisi od nerizične kamatne stope, r_f, koja je konstantna i poznata tokom celog trajanja polise.

3) **Akcija na koju se odnosi opcija**

   - ne plaća dividende,
   - njen proces cena S_t prati geometrijsko Braunovo kretanje sa drift parametrom μ i volatilnošću σ,
   - paramteri μ i σ su konstantni.

Videli smo da Girsanova teorema 2.1.6 garantuje postojanje rizikneutralne mere Q koja je ekvivalentna prvobitnoj meri P, i diskontovani proces cena akcije, $\tilde{S}_t$, je martingal u odnosu na novu meru Q. Kako važe pretpostavke da je tržište kompletno i nearbitražno, ekvivalentna mera Q je i jedinstvena.

Diferencijalni oblik procesa cena akcije u odnosu na meru P:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

se u rizik-neutralnoj meri Q, transformiše u proces

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\tilde{W}_t,$$

gde je W_t Braunovo kretanje u meri verovatnoće P, a $\tilde{W}_t$ je Braunovo kretanje u meri Q.

5.2 Neto jednokratna premija

Pretpostavimo dakle da osiguranik starosti x kupuje polisu unit-linked životnog osiguranja sa zagarantovanom beneficijom G na T godina.

Jednokratnu neto premiju (eng. Single Pure Premium) dobijamo na osnovu sledeće formule:

$$_TG_x =_T p_x[G(T)e^{-rT}\Phi(-d_2^0(T)) + S(0)N(T)\Phi(d_1^0(T))],$$

gde su $d_2^0(T)$ i $d_1^0(T)$ dati jednačinama (3.11) i (3.12), a Φ funkcija raspodele normalne (0,1) raspodele i $T > t$.

5.3 Određivanje $_Tp_x$

U determinističkom pristupu koriste se tablice mortaliteta za određenu populaciju. Tada se verovatnoća preživljavanja od barem T godina, računa kao:

$$_Tp_x = p_x \cdot p_{x+1} \dots p_{x+T-1} = \prod_{i=0}^{T-1} p_{(x+i)}, \tag{5.1}$$

gde je p_x verovatnoća da će osoba starosti x doživeti barem starost $x + 1$. Ove jednogodišnje verovatnoće preživljavanja se mogu dobiti preko jednogodišnjih stopa mortaliteta q_x, koje čitamo iz tablica mortaliteta:

$$p_x = 1 - q_x.$$

S druge strane, pri stohastičkom pristupu, jednogodišnje stope mortaliteta dobijamo uz pomoć stohastičkih modela mortaliteta M1-M3 i M5-M8 iz tabele 4.1 i tada je

$$p_{x,t} = 1 - q_{x,t}.$$

Na osnovu toga, verovatnoća preživljavanja barem T godina, osobe stare x godina je:

$$_Tp_x = p(x,t) \cdot p(x+1,t+1) \cdots p(x+T-1,t+T-1) = \prod_{i=0}^{T-1} p(x+i,t+i). \tag{5.2}$$

U sledećem poglavlju ćemo odrediti odgovarajući stohastički model za podatke populacije iz Engleske i Velsa. Uz pomoć tog modela ćemo, zatim, odrediti projekcije stopa mortaliteta. Krajnje rezultate oba pristupa ćemo uporediti kroz jednokratnu neto premiju.

Poglavlje 6

Vrednosti polise

U ovom poglavlju ćemo izračunati vrednost unit-linked ugovora koji sadrži osiguranje za slučaj preživljavanja sa zagarantovanom minimalnom beneficijom, G. Osiguranik kojeg posmatramo, ima 55 godina, u trenutku kupovine polise, početkom 2017, i to je osoba muškog pola iz Engleske i Velsa. Dalje pretpostavke su da je polisa zaključena na 20 godina, G je konstantno i iznosi $10.000\$$. Fond u koji se investira se sastoji od akcija kompanije Apple, i jedna jedinica fonda se sastoji od jedne akcije. Nerizična kamatna stopa iznosi $r_f = 5\%$.

Tada je jednokratna neto premija koju naš osiguranik plaća, na osnovu jednačine (3.13), jednaka:

$$_{20}G_{55} =_{20} p_{55}[10.000 \cdot e^{-0.05 \cdot 20}\Phi(-d_2^0(20)) + S(0)\Phi(d_1^0(20))],$$

pri čemu je $S(0)$ cena akcije u trenutku kupovine polise, $t = 0$. Da bismo izračunali premiju, treba pre toga da odredimo verovatnoću preživljavanja od barem 20 godina i volatilnost, σ, procesa cene akcije S_t.

6.1 Određivanje verovatnoće ${}_{20}p_{55}$

6.1.1 Deterministički pristup za određivanje ${}_{20}p_{55}$

Deterministički pristup određivanja verovatnoće podrazumeva upotrebu tablice mortaliteta, relacije $p_x = 1 - q_x$ i jednačine (5.1). Za potrebe našeg rada, koristimo nacionalnu tablicu mortaliteta, muške populacije za Englesku i Vels.

Tablica je preuzeta sa sajta zavoda za nacionalnu statistiku Velike Britanije (eng. Office for National Statistics - ONS) [1]. Svaka nacionalna tabela mortaliteta se bazira na ocenama populacije, broju rođenih i preminulih osoba za period od tri uzastopne godine, $2013 - 2015$, u našem slučaju. Jednogodišnje stope mortaliteta, q_x, date su za različite starosne godine $x \in \{0, 1, \ldots, 100\}$, i dele se još i na mušku, žensku i celokupnu populaciju.

Iz tablice ćemo uzeti jednogodišnje stope mortaliteta, q_x za $x \in \{55, 56, \ldots, 74\}$, koje su date u tabeli 6.1. Dalje, dobijamo verovatnoću da osoba starosti 55 godina preživi narednih 20 godina:

$$ {}_{20}p_{55} = p_{55} \cdot p_{56} \ldots p_{74} = \prod_{i=0}^{19} p_{(55+i)} = 0,763 = 76,3\%. \qquad (6.1)$$

6.1.2 Stohastički pristup za određivanje ${}_{20}p_{55}$

Kod ovog pristupa ćemo koristiti programski jezik R koji nam omogućava prilično jednostavnu analizu demografskih podataka i dalje određivanje budućih stopa preživljavanja. Najviše se oslanjamo na R paket *StMoMo*, koji implementira uopštene stohastičke

[1] ONS (www.ons.gov.uk) je najveći nezavisni zavod u Velikoj Britaniji, čije zaduženje je sakupljanje, analiza i objavljivanje statistika o ekonomiji, društvu i populaciji Velike Britanije. Takođe, ONS je nacionalno priznat statistički institut u Velikoj Britaniji.

x	q_x	$p_x = 1 - q_x$
55	0.004748	0.995252
56	0.005207	0.994793
57	0.005844	0.994156
58	0.006409	0.993591
59	0.007105	0.992895
60	0.007899	0.992101
61	0.008528	0.991472
62	0.009431	0.990569
63	0.010271	0.989729
64	0.011262	0.988738
65	0.012012	0.987988
66	0.012765	0.987235
67	0.014047	0.985953
68	0.015423	0.984577
69	0.017314	0.982686
70	0.019042	0.980958
71	0.021014	0.978986
72	0.024072	0.975928
73	0.026300	0.973700
74	0.029694	0.970306

Tabela 6.1: Jednogodišnje stope mortaliteta i preživljavanja za starost x.

modele mortaliteta koji sadrže efekte starosne godine, kalendarske godine i godine rođenja osiguranika. Paket sadrži funkcije za fitovanje modela, analizu mere adekvatnosti fitovanja, zatim za projektovanje stopa mortaliteta u budućnost, kao i određivanje njihovih simulacija.

Podaci koje ćemo koristiti za fitovanje stohastičkih modela mortaliteta su matrica broja preminulih osoba starosti x u kalendarskoj godini t, $D(x,t)$, kao i matrica centralnih izloženosti riziku, $E(x,t)$. Njih možemo preuzeti sa sajta baze podataka o ljudskom mortalitetu (eng. Human Mortality Database - HMDB)[2].

Napomena što se tiče podataka koje koristimo, [3]:

- Broj preminulih osoba se uzima kao prilično tačan, mada je zabeležena starost pri smrti manje tačna kod veoma starih osoba.
- Izloženosti, $E(x,t)$ predstavljaju prosečan broj osoba starosti x, živih u godini t. Ove vrednosti nisu velike preciznosti i zbog toga moraju da budu ocenjene od strane zavoda za nacionalnu statistiku Velike Britanije (ONS), pri čemu se uzimaju u obzir broj zabeleženih rođenih i umrlih osoba, kao i neto migracija ljudi.
- Iz analize ćemo isključiti podatke (x,t) koji nisu pouzdani:
    - $t - x = 1886$ kohort,
    - kalendarske godine pre 1960., da bismo izbegli efekte Drugog svetskog rata na rezultate.

[2] HMDB (www.mortality.org) je kreirana kako bi pružala detaljne podatke o određenoj populaciji, kao i o njenom mortalitetu. Ova baza podataka je zajednički projekat istraživačkih timova sa Departmana za demografiju na Berkli univerzitetu u SAD (University of California, Berkley) i timova sa Maks Plank instituta za demografski razvoj (MPIDR) u Nemačkoj. Francuski institut za demografske studije (INED) je takođe podržao dalji razvoj ove baze podataka.

- U analizu uključujemo starosne godine $x \in \{55, 56, \ldots, 89\}$, jer zapravo ni nismo zainteresovani za modelovanje mortaliteta za mlađe osobe, i kalendarske godine $t \in \{1961, \ldots, 2011\}$.

StMoMo paket je dovoljno fleksibilan, tako da pri fitovanju modela, kao argumente funkcije, možemo da izabereno model mortaliteta, zatim, komponentu sistematičnosti, Poasonova ili binomna raspodela, i funkciju veze "log" ili "logit". Za modele M1-M3, broj preminulih osoba ima Poasonovu raspodelu i "log" funkciju veze, dok za modele M5-M8 biramo binomnu raspodelu i "logit" vezu.

Da bismo dalje odredili koji od fitovanih modela najbolje objašnjava dinamiku mortaliteta za mušku populaciju Engleske i Velsa, primenićemo kriterijume za poređenje modela koji su navedeni u odeljku 4.3.1 na stranici 52.

Bejzov informacioni kriterijum

Model sa manjom BIC vrednošću se smatra boljim modelom. U narednoj tabeli su dati rezultati za naše modele mortaliteta:

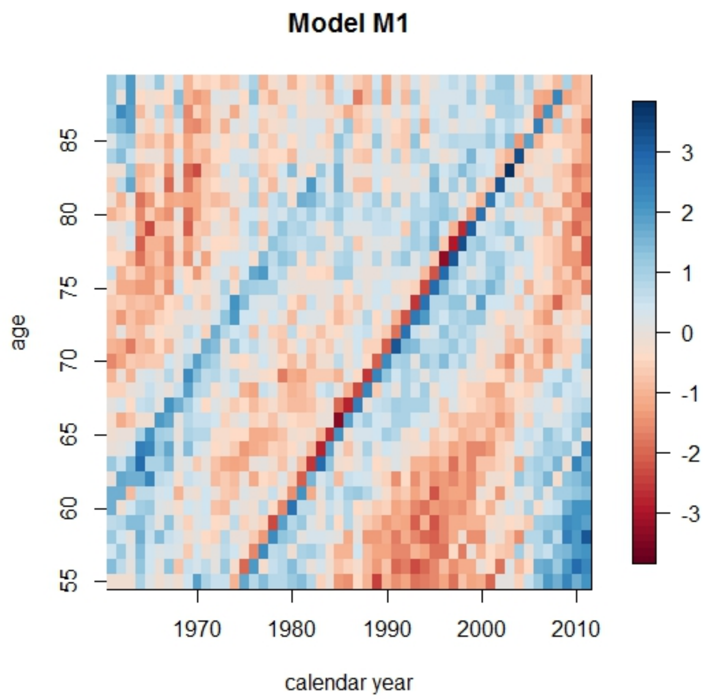
Model	$L(\tilde{\theta})$	N_p	BIC
M1	-15163.78	119	31218.53
M2	-10490.08	229	22691.24
M3	-12335.18	161	25873.34
M5	-17458.62	102	35680.93
M6	-11007.7	178	23345.41
M7	-10381.69	228	22466.97
M8	-11174.59	179	23686.66

Tabela 6.2: U tabeli su dati logaritam maksimalne verodostojnosti, broj parametara i Bejzov informacioni kriterijum za modele M1-M3 i M5-M8.

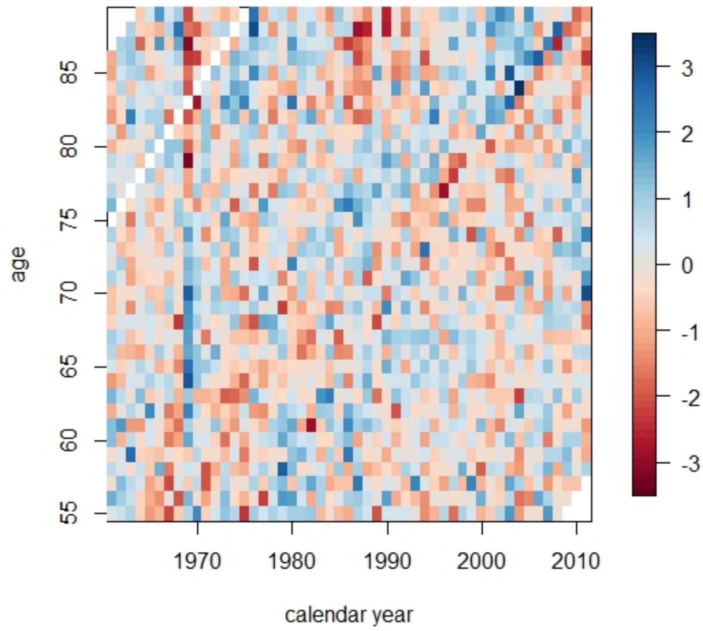
Na osnovu Bejzovog informacionog kriterijuma zaključujemo da su najbolji modeli su redom M7, M2, M6 i zatim M8.

Reziduali fitovanih modela

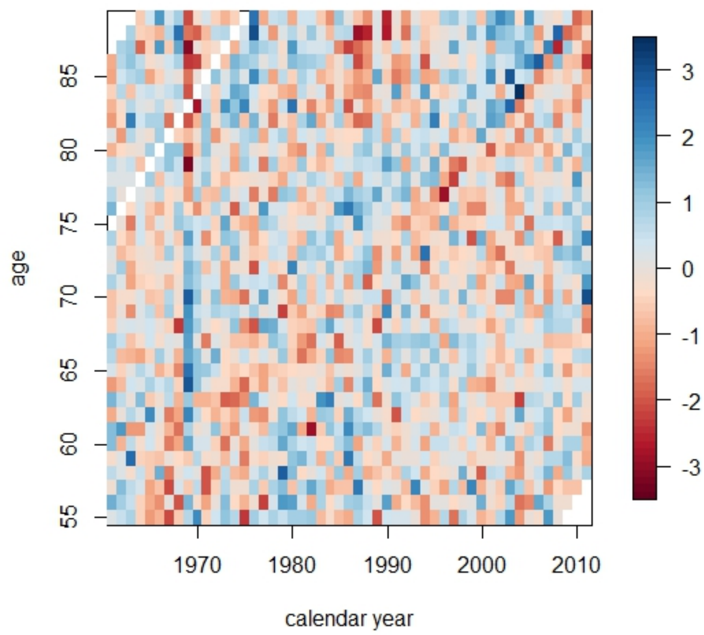
Očekivano je da su reziduali fitovanih modela približno nezavisne i identički raspoređene normalne slučajne promenljive. Radi vizuelnog utvrđivanja ove karakteristike predstavićemo sada grafike reziduala za fitovane M1-M3, M5-M8 modele.

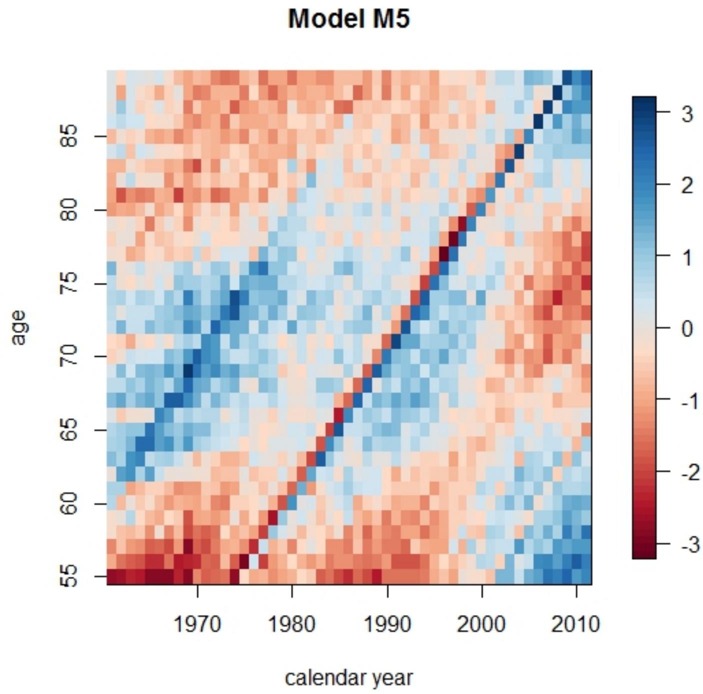


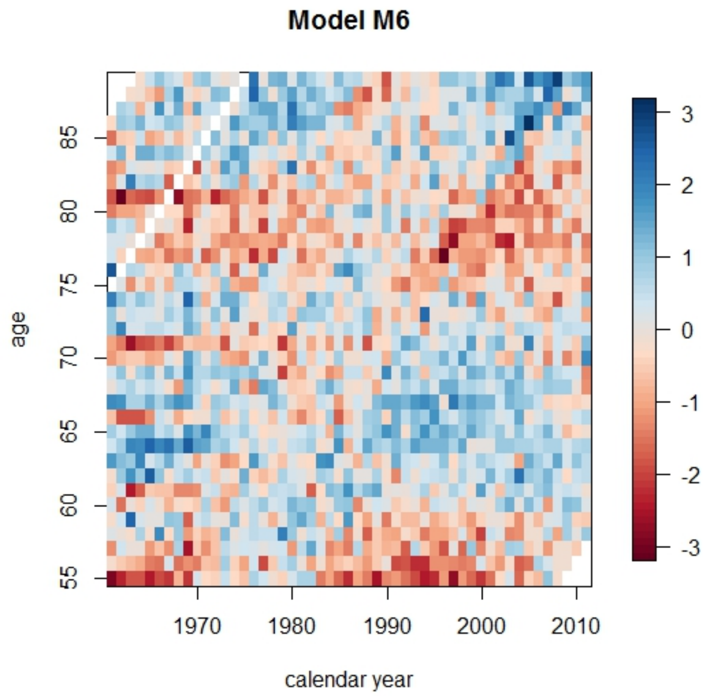
Model M2

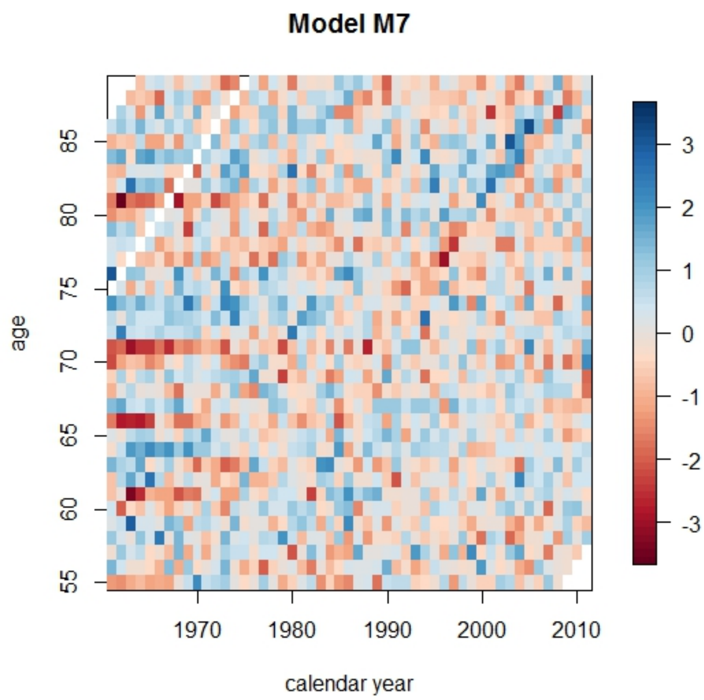


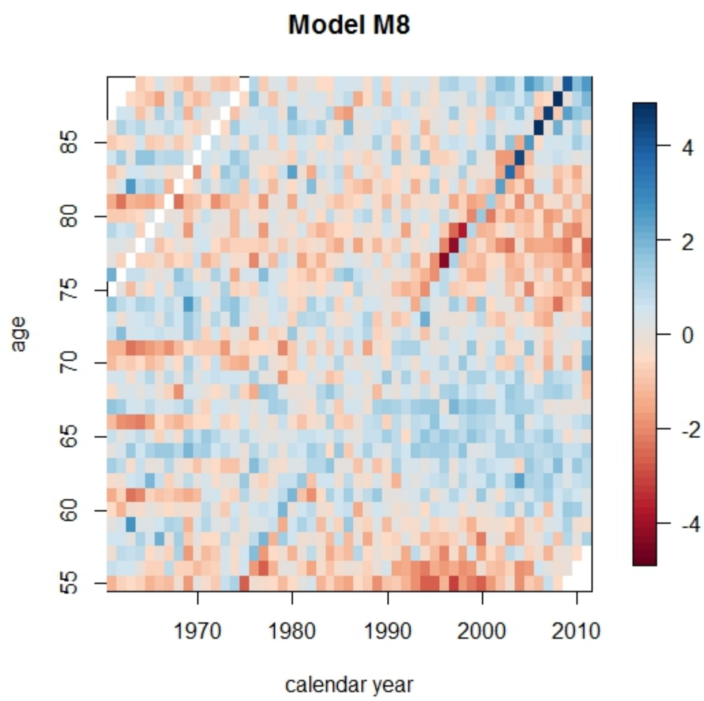
Model M2




Model M5
age
85
80
75
70
65
60
55
1970
1980
1990
2000
2010
calendar year
3
2
1
0
-1
-2
-3


Model M6
age
85
80
75
70
65
60
55
1970
1980
1990
2000
2010
calendar year
3
2
1
0
-1
-2
-3


Model M7
age
85
80
75
70
65
60
55
1970
1980
1990
2000
2010
calendar year
3
2
1
0
-1
-2
-3


Model M8
age
85
80
75
70
65
60
55
1970
1980
1990
2000
2010
calendar year
4
2
0
-2
-4

Na osnovu grafika, za modele M1, M3 i M5 je primetno grupisanje pozitivnih i negativnih reziduala. Štaviše, kod modela M1 i M5 je to grupisanje po dijagonali, što na grafiku gde je x-osa kalendarska godina, a y-osa starost, predstavlja kohort. Kako M1 i M5 nemaju u sebi uključenu komponentu koja odgovara kohortu, γ_{t-x}, to je dovoljan pokazatelj da je u populaciji Engleske i Velsa zaista izražen efekat kohorta i modeli za modelovanje mortaliteta moraju da sadrže tu komponentu. Model M6 takođe prikazuje određenu dozu grupisanja, ali znatno manje. Na osnovu vizuelne ocene, reziduali modela M2, M7 i M8 deluju prilično slučajno.

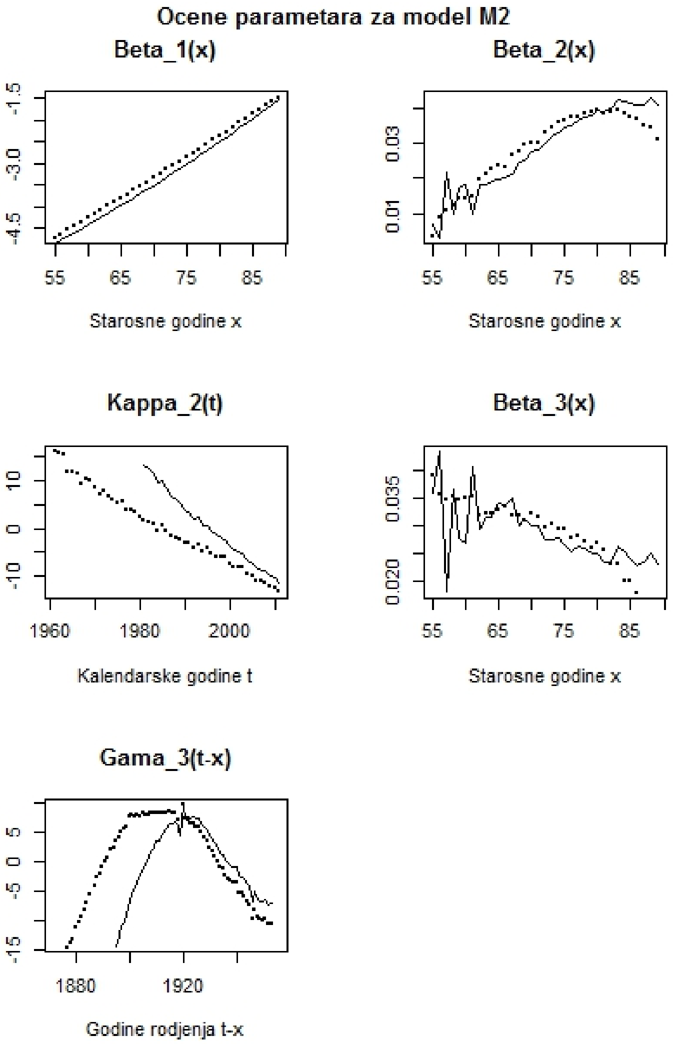
Poređenje ugnježdenih modela

Posmatrajući naše modele mortaliteta, uviđamo 7 parova ugnježdenih modela. Na primer, M1 je specijalan slučaj modela M2, kada je $\beta_x^{(3)} = 0$ za svako x i $\gamma_c^{(3)}$ za svako $c = t - x$.

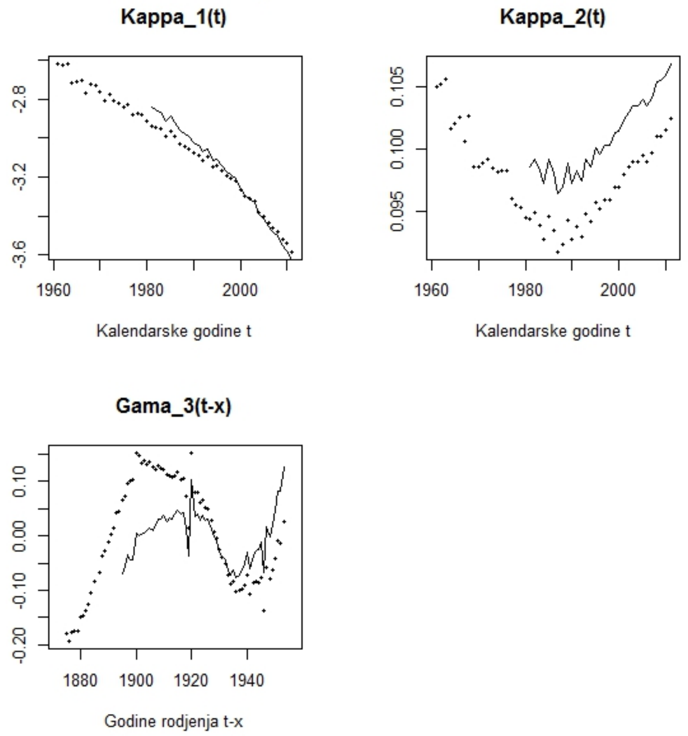
Na osnovu analize date u [3], kod svih 7 parova ugnježdenih modela, nulta hipoteza je odbačena, odnosno pokazano je da je uvek bolji uopšteniji model za mušku populaciju Engleske i Velsa. Rezultati se poklapaju i sa rezultatima koje dobijamo računanjem BIC vrednosti za modele.

Robusnost ocena parametara

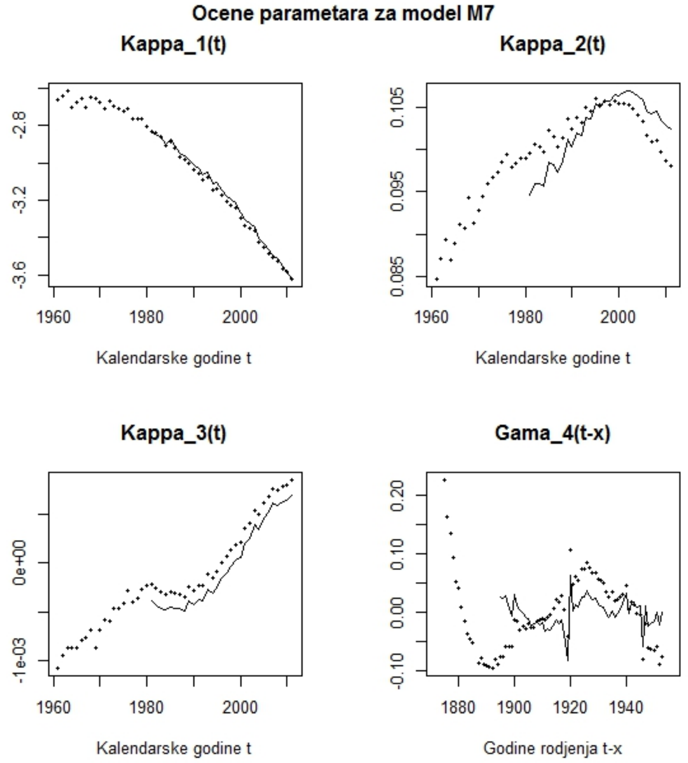
Za četiri modela sa najvećom BIC vrednostima M2, M6, M7 i M8, prikazali smo na graficima ocene maksimalne verodostojnosti za parametre modela za period od $1961 - 2011$. godine, prikazano tačkicama, i za period od $1981 - 2011$. godine, prikazano linijom. Model je dobar, ukoliko su ocene parametara slične, bez obzira na promenu opsega godina. Prikažimo sada grafike.

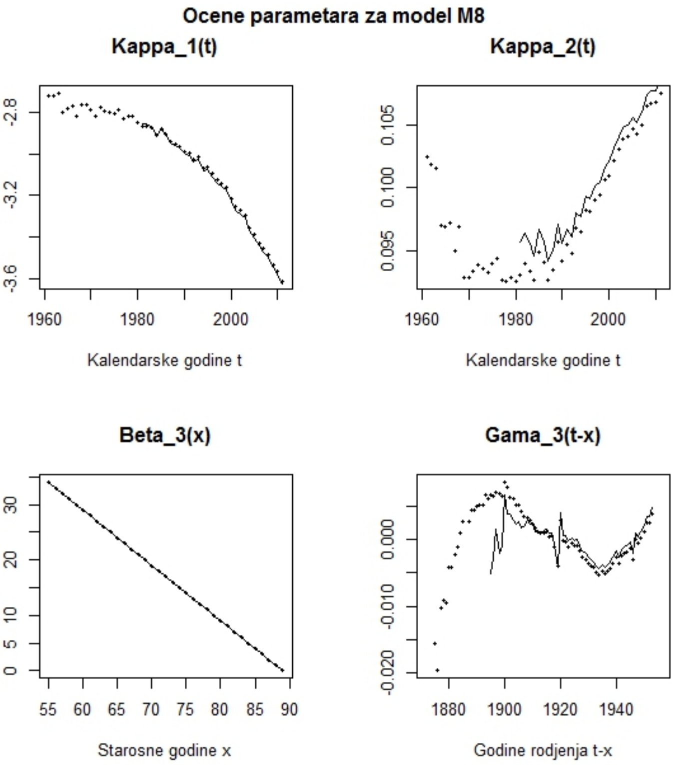

Ocene parametara za model M2
Beta_1(x)
Beta_2(x)
Kappa_2(t)
Beta_3(x)
Gama_3(t-x)
Starosne godine x
Kalendarske godine t
Godine rodjenja t-x

Ocene parametara za model M6



Ocene parametara za model M7





Analiziranjem grafika primećujemo da model M2 ima najmanje robustne ocene parametara. Naime, ukoliko posmatramo grafik za Gamma_3(t-x), kohort komponenta ima značajno drugačije rešenje kada koristimo manje podataka. Za, na primer $c = 1900$, kada koristimo podatke za $1961 - 2011$. godine, $\gamma_c > 0$, dok je za podatke od $1981 - 2011$. godine, $\gamma_c < 0$. Samim tim se dovodi u pitanje upotreba modela M2 za predikcije stopa mortaliteta.

S druge strane, grafici modela M7 i M8 prikazuju visok nivo robusnosti ocena parametara. Zbog toga ćemo za dalju analizu uzimati u obzir samo njih.

Sada, kada smo suzili odabir modela na samo dva, da bismo došli do projekcija za $\mu(x,t)$ ili $q(x,t)$, moramo prvo da odredimo projekcije ocena period i kohort parametara. Kako smo objasnili, njih ćemo posmatrati kao vremenske serije, i kao takve ćemo ih analizirati i fitovati odgovarajućim modelima iz teorije vremenskih serija.

6.1.3 Odabir modela za kohort parametar

Kohort komponenta modela mortaliteta, γ_c je nezavisna od period komponenti $\kappa_t^{(i)}$, pa ćemo je samim tim i odvojeno analizirati. Za modelovanje vremenskih serija se najčešće koriste $ARIMA(p, d, q)$ modeli, pri čemu:

- "AR" predstavlja autoregresivni proces reda p,
- "I" predstavlja integrisan proces reda d, ako se može biti transformisan u stacionaran stohastički proces diferenciranjem d puta, a
- "MA" predstavlja proces pokretnih sredina reda q.

Definicija 6.1.1 *Neka je $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ autoregresivni proces reda p, i proces pokretnih sredina reda q, odnosno prati model ARMA(p, q), tada se on može predstaviti u obliku:*

$$X_t = \mu + \sum_{i=1}^{p} \varphi_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^{q} \theta_j \epsilon_{t-j}, \tag{6.2}$$

gde su:

- *μ konstanta,*
- *$\{\epsilon_t\}_{t\in[0,T]}$ proces belog šuma, a*
- *φ_i, $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ i θ_j, $j \in \{1, 2, \ldots, q\}$ nepoznati parametri koji treba da se ocene.*

Diferenciranje je ništa drugo do $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$, dok se ne postigne stacionaran proces.

Najteži deo je odrediti ARIMA parametre p, d i q za određenu vremensku seriju. Ali, u literaturi se preporučuju sledeći modeli za modelovanje kohort komponente stohastičkih modela mortaliteta:

1. ARIMA(1, 0, 0) - predložen u [4],
2. ARIMA(1, 1, 0) - predložen u [10],
3. ARIMA(2, 0, 0) - predložen u [11].

Za fitovanje vremenskih serija ovim modelima koristili smo R paket *forecast* i njegovu funkciju *Arima()*. Nakon što smo fitovali ova tri modela, na osnovu sledećih kriterijuma možemo odlučiti koji je odgovarajući za kohort parametar za modele M7 i M8.

Poželjne osobine modela:

- Korigovani Akaike informacioni kriterijum (AICc)[3] treba da je što manja vrednost,
- ocenjena σ^2 modela da je što manja,
- reziduali treba da se ponašaju kao beli šum, odnosno da su nezavisno i identički raspoređeni, sa očekivanom vrednošću nula. Da bismo to proverili, predstavićemo reziduale na grafiku, kao i što ćemo odrediti njihovu srednju vrednost.
- Za nas je veoma bitno i kako će projekcije vremenske serije izgledati, zbog daljih projekcija M7 i M8 modela.

Kohort vremenska serija modela M7

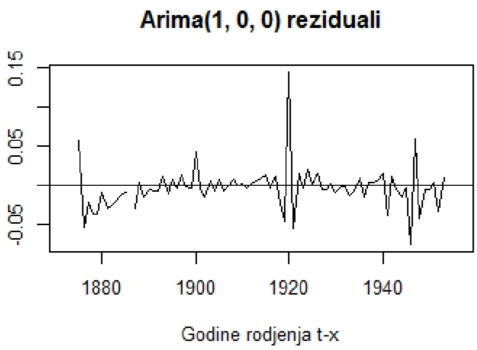
Nakon fitovanja vremenske serije predloženim ARIMA modelima, dobijamo sledeće vrednosti:

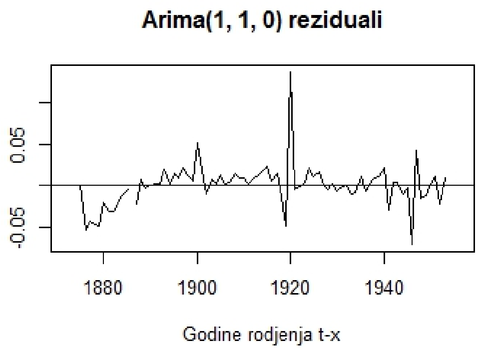
[3] AICc (eng. corrected Akaike Information Criterion) je AIC prilagođen za uzorak sa malim brojem obzervacija. To je statistika koja se koristi za meru adekvatnosti fitovanja, i koristi se za poređenje i selekciju fitovanih modela.

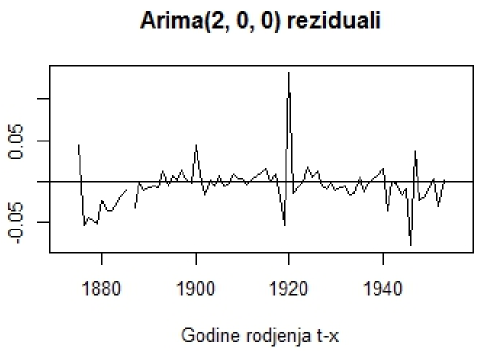
Arima model	AICc	Ocenjena σ^2	Srednja vrednost reziduala
ARIMA(1, 0, 0)	-328.5176	0.00076883	-0.004080258
ARIMA(1, 1, 0)	-336.2106	0.0006800495	-9.372147e-05
ARIMA(2, 0, 0)	-333.0759	0.0007024931	-0.005178512

Tabela 6.3: Analiza kohort vremenske serije za M7

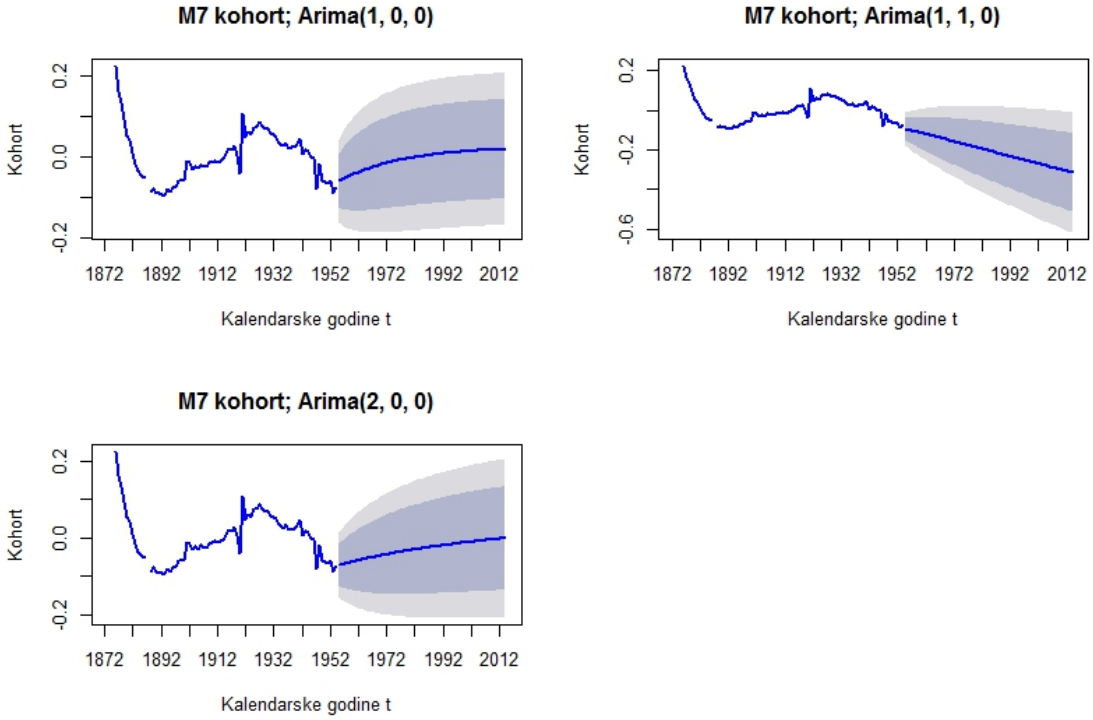
Reziduali su dati na sledećim graficima:







Zarad predviđanja budućih vrednosti modela M7 i M8, posmatramo pre toga ponašanje budućih vrednosti kohort komponente.



Zaključak:
Na osnovu tabele 6.3, ARIMA(1, 1, 0) se nameće kao izbor za modelovanje kohort vremenske serije za M7, kao model sa najnižom AICc vrednošću. Međutim, na osnovu projekcija vremenske serije γ_c u budućnost za sva tri ARIMA modela, primećujemo da za model ARIMA(1, 1, 0), projekcije imaju trend, što se ne uklapa sa očekivanim ponašanjem kohort komponente, a to je da oscilira oko nule. Zbog toga zanemarujemo ovaj model. Naime, taj trend se najverovatnije javlja zbog diferenciranja reda $d = 1$, koje je uključeno u ARIMA$(1, 1, 0)$. Dalje, svi reziduali deluju prilično slučajno, zbog toga ne možemo da otpišemo ni jedan model kao neodgovarajući na osnovu ovog kriterijuma. Na kraju, biramo ARIMA(2, 0, 0), koji sledeći po redu, na osnovu AICc vrednosti.

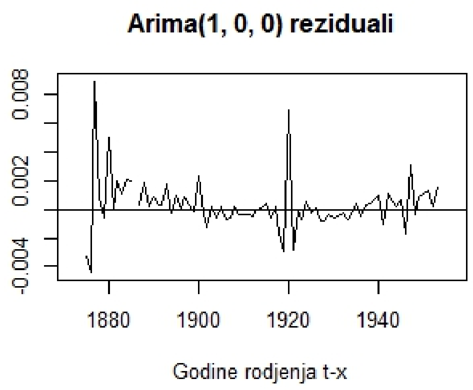
Kohort vremenska serija modela M8

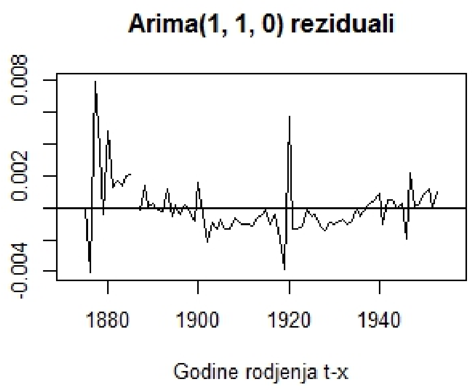
Istu analizu ćemo ponoviti i za kohort vremensku seriju M8 modela.

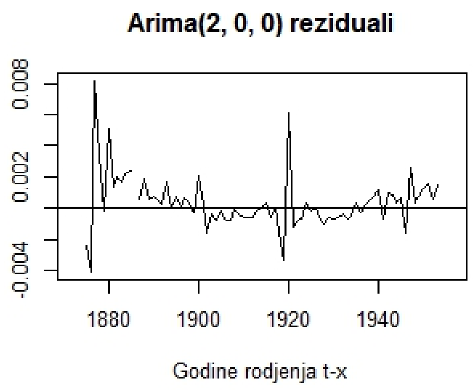
Arima model	AICc	Ocenjena σ^2	Srednja vrednost reziduala
ARIMA(1, 0, 0)	-751.9189	3.363982e-06	0.0002884378
ARIMA(1, 1, 0)	-752.3046	3.060159e-06	-1.411064e-05
ARIMA(2, 0, 0)	-754.3373	3.159989e-06	0.0003465408

Tabela 6.4: Analiza kohort vremenske serije za M8

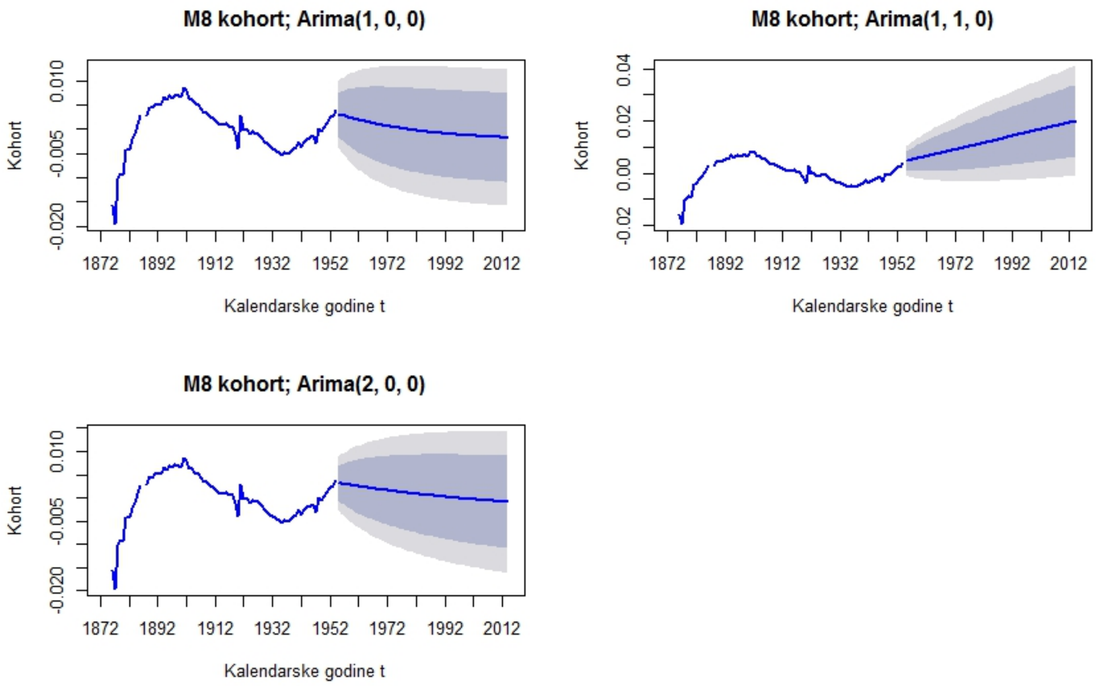
Reziduali su dati na sledećim graficima:







Zarad predviđanja budućih vrednosti modela M7 i M8, posmatramo pre toga ponašanje budućih vrednosti kohort komponente.



Zaključak:
Na osnovu svih napomenutih kriterijuma koji nam pomažu u izboru ARIMA modela, biramo ARIMA(2, 0, 0) i za M8. Taj model ima najnižu AICc vrednost, reziduali deluju slučajno sa srednjom vrednosti oko nule, i grafik projekcija deluje očekivano.

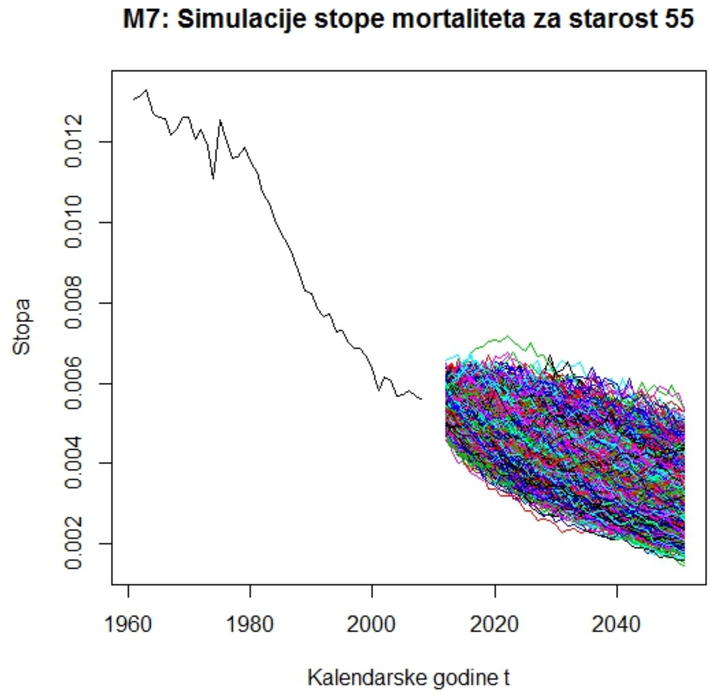
6.1.4 Odabir modela za period parametre

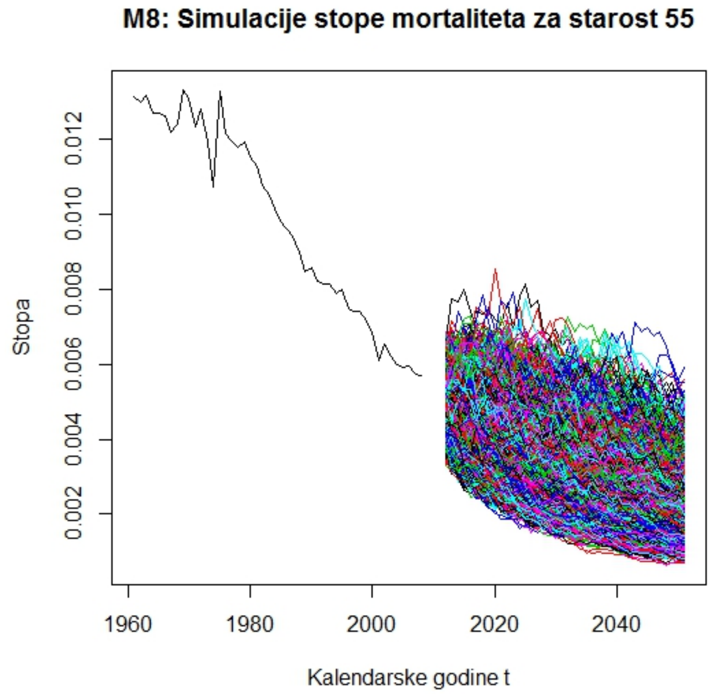
Što se tiče modeliranja period komponente, u oba modela, M7 i M8, imamo više od jedne vremenske serije, $\kappa_t^{(i)}$. Kako one nisu nezavisne jedna od druge, moramo ih modelovati kao višedimenzionalnu vremensku seriju. R paket *StMoMo* predlaže višedimenzionalan slučajan hod sa driftom (eng. Multivariate Random Walk with Drift) u te svrhe, što ćemo i mi primeniti u našoj analizi.

6.2 Buduće vrednosti stopa mortaliteta

Pošto smo odredili modele za projekciju vremenskih serija, sadržanih u modelima mortaliteta M7 i M8, u mogućnosti smo da odredimo projekcije stopa mortaliteta. Kako nas zanima stohastička priroda mortaliteta, interesantnije su nam različite simulacije budućih trajektorija stopa mortaliteta, $q(x,t)$, od određivanja srednje vrednosti.

Koristeći *StMoMo*-ovu funkciju *simulate()*, odredićemo 10.000 različitih budućih trajektorija, za period od 40 godina, odnosno za kalendarske godine $2012 - 2051$. Kao rezultat funkcije dobija se trodimenzionalni niz sa budućim simuliranim stopama mortaliteta. Jedna dimenzija predstavlja starost x, druga predstavlja godinu t, a treća simulaciju $nsim \in \{1, 2, \dots 10.000\}$. Na sledećim graficima su predstavljene fitovane i simulirane vrednosti za M7 i M8.





Od svih simulacija, aktuar ima zadatak da odabere koje buduće vrednosti će da koristi za vrednovanje polisa osiguranja. Naša ideja je da za svaki par (x, t) izvučemo niz od 10.000 vrednosti iz izračunatih simulacija. Za svaki takav niz ćemo da odredimo određeni kvantil. U radu ćemo predstaviti 50%-ni kvantil. Mada, aktuar na osnovu svojih ekspertiza, poznavanja tržišta i konkurencije, može odlučiti da koristi bilo koji drugi kvantil.

Za određivanje 50% tablice stopa mortaliteta $q(x, t)$, gde su $x \in \{55, 56, \ldots, 89\}$ i $t \in \{2012, 2013, \ldots, 2051\}$ napisali smo funkciju u R-u. Funkcija uzima trodimenzionalni niz simulacija, i kao rezultat daje tablicu željenog kvantila stopa mortaliteta za (x, t).

Sada, kada smo dobili tablicu, izvući ćemo one vrednosti, $q(x, t)$, koje su nam potrebne za računanje stope preživljavanja od barem 20 godina.

$$\begin{aligned} {}_{20}p_{55} &= p(55,2017)\cdot p(56,2018)\cdots p(74,2036) = \\ &= \prod_{i=0}^{T-1} p(55+i, 2017+i), \end{aligned}$$

gde je $p(x,t) = 1 - q(x,t)$.

Računicom u R-u dolazimo do sledećih verovatnoća preživljavanja:

M7: ${}_{20}p_{55} = 83,63\%$,
M8: ${}_{20}p_{55} = 80,41\%$.

6.3 Određivanje volatilnosti procesa cene akcije S_t

Osiguranik ulaže deo svoje premije u fond sastavljen od Apple akcija. Da bi smo odredili premiju za ovaj tip unit-linked osiguranja potrebni su nam parametar volatilnosti, σ, za proces cena koji prati Apple akcija, kao i cena akcije u trenutku kupovine polise, odnosno S_0.

Cena akcije u trenutku $t = 0$

Pretpostavimo da naš osiguranik kupuje polisu unit-linked osiguranja na početku 2017. godine. Prvi radni dan je 3.1.2017, i cena jedne akcije Apple kompanije na otvaranju tog dana je iznosila $S_0 = 115,80$\$ [4].

Parametar volatilnosti

Da bismo odredili $d_1^0(20)$ i $d_2^0(20)$, a samim tim i premiju osiguranja datu jednačinom (3.13), moramo odrediti volatilnost cene akcije.

[4] Podatak preuzet sa sajta www.finance.yahoo.com

σ-u ćemo aproksimirati uz pomoć istorijske volatilnosti Apple akcije.

Istorijska volatilnost je realizovana volatilnost određenog finansijskog instrumenta tokom nekog određenog vremenskog perioda. Najčešći pristup za računanje ove vrednosti je određivanje standardne devijacije dnevnih prinosa akcije, dobijenih na osnovu cena pri zatvaranju. Zatim se dnevna standardna devijacija transformiše u godišnju time što se ona pomnoži sa korenom broja poslovnih dana u godini, što je 252.

Cene koje smo koristili za aproksimaciju odgovaraju periodu od jedne godine, od 31.12.2015. do 30.12.2016., i preuzete su sa veb sajta www.finance.yahoo.com. Dnevni prinosi akcije se dobijaju na sledeći način

$$r_n = \frac{C_n}{C_{n-1}} - 1,$$

gde je C_n cena akcije pri zatvaranju na dan n. Dalje, dnevnu standardnu devijacu ovih prinosa možemo veoma lako odrediti uz pomoć EXCEL funkcije STDEV.S(). Rezultat koji dobijamo je:

$$\begin{aligned} \text{Dnevna volatilnost} &: \ \sigma_d = 1,474\% \\ \textbf{Godišnja volatilnost} &: \ \sigma_a = \sqrt{252} \cdot \sigma_d = 23,404\%. \end{aligned}$$

6.4 Jednokratna neto premija

Podsetimo se da računamo premiju za unit-linked osiguranje za slučaj preživljavanja sa zagarantovanom minimalnom beneficijom. Osoba koja kupuje polisu je muškarac iz Engleske i Velsa, starosti 55 godina u trenutku kupovine polise, što je početak 2017. godine. Potrebne vrednosti za izračunjavanje jednokratne neto premije:

- Cena Apple akcije na datum kupovine polise: $S_0 = 115,8\$$,

- minimalna zagarantovana beneficija: $G = 10.000\$$,
- nerizična kamatna stopa: $r_f = 5\%$,
- volatilnost: $\sigma = 23,404\%$,
- rok dospeća polise: $T = 20$ godina i
- verovatnoća preživljavanja osobe starosti 55 godina, od 20 godina je
  - deterministički određena ${}_{20}p_{55} = 76,3\%$,
  - na osnovu M7 modela: ${}_{20}p_{55} = 83,63\%$ i
  - na osnovu modela M8: ${}_{20}p_{55} = 80,41\%$.

Jednokratna neto premija

$$
\begin{aligned}
{}_{20}G_{55}(det) &= 2806,98\$, && (6.3)\\
{}_{20}G_{55}(M7) &= 3076,64\$, && (6.4)\\
{}_{20}G_{55}(M8) &= 2958,18\$. && (6.5)
\end{aligned}
$$

Iznos koji bi osiguranik trebalo da oroči na 20 godina po nerizičnoj kamatnoj stopi, pa da na kraju ima $G = 10.000\$$ je

$$PV = G \cdot (1 + r_r)^{-20} = 3768,89\$.$$

S obzirom da je taj iznos veći od svih izračunatih premija, sledi da je osiguraniku isplativije da kupi polisu osiguranja i to za deterministički izračunatu premiju, nego da oroči svoj novac.

Osiguravajuće kuće, s druge strane, očigledno preferiraju da naplate premiju izračunatu na osnovu modela M7, jer je najviša. Dalje, kako stohastički modeli objašnjavaju efekat starosti, kalendarske godine i godine rođenja na mortalitet osiguranika, i samim tim bolje predviđaju njegovu dinamiku, osiguravajućim kućama je u interesu da se okrenu ovim modelima za vrednovanje polisa. Zato što, što bolje modelovano ponašanje mortaliteta vodi ka smanjenju rizika dugovečnosti kojem su osiguravači izloženi.

Koju premiju će na kraju da naplati za unit-linked osiguranje odlučuje sam aktuar na osnovu svoje ekspertize, poznavanja konkurencije i u skladu sa pravilima kompanije u kojoj radi.

Zaključak

Ovaj master rad je posvećen izračunavanju premije unit-linked životnog osiguranja, koje sadrži u sebi minimalnu zagarantovanu beneficiju. Tome pristupamo na dva načina, u zavisnosti od toga kako izračunavamo verovatnoće osiguranog događaja, i na kraju upoređujemo dobijene rezultate. Tip životnog osiguranja koje posmatramo je osiguranje za slučaj preživljavanja.

Primetili smo da se unit-linked model ponaša kao novčani tok evropske prodajne opcije, pa smo zarad njegovog vrednovanja objasnili modele za vrednovanje opcija. Prvo smo predstavili diskretan, binomni model, a zatim smo ga uopštili na neprekidan, čuveni, Blek-Šolcov model.

Da bi Blek-Šolcov model važio, mora da važi uslov odsustva arbitraže sa tržišta. To ostvarajuemo prelaskom na rizik-neutralnu meru Q sa fizičke mere P. Girsanova teorema garantuje, pod određenim uslovima, postojanje te ekvivalentne, martingalne mere Q. Zarad lakšeg razumevanja transformacije sa jedne mere na drugu, podsetili smo se nekih pojmova stohastičke analize i teorije mere, koji čine njenu pozadinu.

Verovatnoća osiguranog događaja je u našem radu verovatnoća preživljavanja osiguranika do isteka polise. Nju određujemo na deteministički način upotrebom tablica mortaliteta populacije Engleske i Velsa. Na stohastički način, do ove verovanoće dolazimo upotrebom stohastičkih modela mortaliteta. Ovi modeli su primeri uopštenih linearnih i nelinearnih modela, pa smo iz tog razloga predstavili i njihovu teoriju.

Upoređivanje ova dva pristupa smo izvršili upoređivanjem izračunatih premija ovog tipa osiguranja. Premija dobijena korišćenjem stohastičkih modela je veća nego premija dobijena na osnovu determinističkog pristupa, ali je i dalje niža od diskontovane minimalne zagarantovane beneficije za nerizičnu kamatnu stopu.

Na kraju zaključujemo da je osiguraniku isplativije da kupi polisu ovog osiguranja, nego da oročiti svoj novac. S druge strane, osiguravajuća kompanija će pre koristiti stohastičke modele, jer oni bolje objašnjavaju mortalitet određene populacije i njegovo buduće kretanje. Samim tim se kompanija bolje štiti od rizika dugovečnosti koji se javlja kod proizvoda osiguranja povezanih sa preživljavanjem.

Literatura

[1] Knut K. Aase, Svein-Arne Persson, *Pricing of Unit-linked Life Insurance Policies*, Scandinavian Actuarial Journal, 1994:1, 26-52, 1994.

[2] Alan Agresti, *Foundation of Linear and Generalized Linear Models*, Wiley Series in Probability and Statistics, 2015.

[3] Andrew J. G. Cairns, David Blake, Kevin Dowd, Guy D. Coughlan, David Epstein, Alen Ong & Igor Balevich, *A Quantitative Comparison of Stochastic Mortality Models Usind Data From England and Wales and the United States,* North American Acturarial Journal, 13:1, 1–35, 2009.

[4] Andrew J. G. Cairns, David Blake, Kevin Dowd, Guy D. Coughlan, David Epstein & Marwa Khalaf-Allah, *Mortality density forecasts: An analysis of six stochastic mortality models,* Insurance: Mathematics and Economics, 48:3, 355–367, 2011.

[5] Iain D. Currie, *On fitting generalized linear and non-linear models of mortality,* Scandinavian Actuarial Journal, 356–383, 2014.

[6] Michael Koller, *Stochastic Models in Life Insurance*, Springer, 2010.

[7] Munich Re Group, *Unit-linked Insurance: A general report*, Munich Re, 2000.

[8] Munich Re Group, *Pricing and profitability of Unit-linked Insurance*, Munich Re, 2000.

[9] Peter McCullagh, J.A. Nelder, *Generalized Linear Models*, European Journal of Operational Research 16.3, Chapman and Hall, London and New York, 1984.

[10] Pietro Millossovich, Andrés M. Villegas & Vladimir K. Kaishev, *Package "StMoMo", Stochastic Mortality Modelling*, (https://cran.r-project.org/web/packages/StMoMo/StMoMo.pdf), 2017.

[11] Pietro Millossovich, Andrés M. Villegas & Vladimir K. Kaishev, *StMoMo: An R Package for Stochastic Mortality Modelling*, SSRN, 2015.

[12] Ronald D. Lee, Lawrence R. Carter, *Modeling and forcasting U.S. mortality*, Journal of the American Statistical Association, 659-675, 2012.

[13] Standard Life, *Understanding unit-linked funds*, 2015.

[14] Stevan Pilipović, Dora Seleši, *Mera i integral*, Zavod za udžbenike, Beograd, 2012.

Biografija

Tamara Raičević rođena je 06.07.1991. godine u Beranama. Osnovnu školu „Jovan Popović" završila je u Novom Sadu, 2006. godine. Iste godine je upisala Gimnaziju „Isidora Sekulić" u Novom Sadu, koju završava 2010. godine kao nosilac Vukove diplome. Po završetku gimnazije, 2010. godine, upisala je osnovne studije na Prirodno - matematičkom faklutetu u Novom Sadu, smer primenjena matematika, matematika finansija, koje je završila u septembru 2014. godine, sa prosečnom ocenom $9,18$. Treću godinu osnovnih studija je završila na Amerikan Univerzitetu u Vašingtonu, kao stipendista Stejt Departmenta. Po povratku iz SAD obavljala je praksu u timu za finansijsku kontrolu u kompaniji Japan Tobacco International u Senti. Potom je upisala master studije na Prirodno - matematičkom fakultetu u Novom Sadu. Položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom master studija u oktobarskom roku 2016. godine. Dva puta je bila stipendista Nemačke službe za internacionalnu razmenu DAAD. Kao stipendista nemačke vlade obavljala je praksu u sedištu Hanover RE-a u Hanoveru. Od januara 2017. zaposlena je kao biznis analitičar u Synechronu.

Novi Sad, septembar, 2017. Tamara Raičević

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Tamara Raičević
AU

Mentor: dr Dora Seleši
MN

Naslov rada: Vrednovanje unit-linked polisa u životnom osiguranju
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: s / e
JI

Zemlja publikovanja: Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2017
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno–matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (6, 95, 14, 6, 5, 38, 0)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Aktuarska i finansijska matematika, Stohastička analiza
ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: Unit-linked modeli, Girsanova teorema, uopšteni linearni modeli, stohastički modeli mortaliteta
PO

UDK:

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno–matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod:
IZ

U ovom master radu se bavimo vrednovanjem unit-linked polisa životnog osiguranja.
U uvodnom delu naveli smo osnovne pojmove klasičnih ugovora životnog osiguranja, kao i razliku u odnosu na unit-linked ugovore.
Rad je podeljen na četiri tematske celine:
Prvo su razmatrani pojmovi stohastičke analize kako bismo mogli da predstavimo neprekidan model za određivanje cene opcije, i samim tim i model za unit-linked ugovore.
U drugom delu rada smo se posvetili detaljnom opisu unit-linked modela u životnom osiguranju, zatim, koje su pretpostavke modela i kako se računa premija za ovaj tip ugovora. Pri tome koristimo dva pristupa, deterministički i stohastički.
Treći deo rada je posvećen stohastičkim modelima mortaliteta koji nam služe za određivanje verovatnoće preživljavanja. Kako su ovi modeli primeri uopštenih linearnih modela, data je i njihova definicija.
U četvrtom delu se obrađena teorija koristi za određivanje cene unit-linked ugovora za slučaj preživljavanja, uz pomoć programskog jezika R.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 08.06.2017.
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik:	dr Nataša Krejić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član:	dr Dora Seleši, vandredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor
Član:	dr Danijela Rajter-Ćirić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Tamara Raičević
AU

Mentor: Dora Seleši, Ph.D.
MN

Title: Pricing Unit-linked Policies in Life Insurance
TI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract: English
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2017
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: (6, 95, 14, 6, 5, 38, 0)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Actuarial and Financial Mathematics, Stochastic Analysis
SD

Subject/Key words: Unit-linked models, Girsanov's Theorem, Generalized Linear Models, Stochastic Mortality Models
SKW

UC:

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract:
AB
The subject of this thesis is pricing of unit-linked policies in life insurance.
In the introductory part we have stated some basic concepts of traditional life insurance, as well as the difference between it and unit-linked contracts.
Thesis has been divided into four topics.
In the first one, we have discussed fundamental concepts of stochastic analysis, in order to be able to present continuous model for pricing options, and thus for pricing unit-linked policies.
The second topic, we have dedicated to detailed description of unit-linked models in life insurance. We have also presented the assumptions of a model and how to calculate a premium of this type of contracts. We are using two approaches for it, deterministic and stochastic approach.
The third part explains stochastic mortality models, which are used for determining survival probabilities. Since these models are examples of generalized linear models, we have provided GLM's definition as well.
The fourth part links the theory and determines a premium for a pure endowment unit-linked policy. The program R is used for the calculation.

Accepted by the Scientific Board on: 08.06.2017.
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President:	Nataša Krejić, Ph.D., full professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
Member:	Dora Seleši, Ph.D., associate professor, Faculty of Science, University of Novi Sad, mentor,
Member:	Danijela Rajter-Ćirić, Ph.D., full professor, Faculty of Science, University of Novi Sad