UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Tamara Nonković

Modeli braka i razvoda

-Master rad-

Mentor:
prof. dr Zorana Lužanin

Novi Sad, 2015.

Sadržaj

Predgovor

Tema ovog master rada je iz oblasti matematičkog modeliranja. Matematičko modeliranje predstavlja spoj matematike sa drugim naukama. Matematičko modeliranje podrazumeva opisivanje nekog relanog sistema uz pomoć matematičkog alata s ciljem razvoja modela i njegove upotrebe za kasnije analize, projektovanja i optimizacije sistema za koji je model izrađen. Samo matematičko modeliranje ima izuzetno široku primenu u rešavanju velikog broja problema iz različitih oblasti: medicine, ekonomije, biologije, sociologije, psihologije, fizike, inženjerstva, tehnike...

U ovom radu modelovani su sociološki fenomeni brak i razvod. Predstavljeni modeli sa matematičkog aspekta daju odgovor na pitanja: kako pronaći idealanog partnera, da li sa njim zaključiti brak, da li doneti odluku o razvodu i sl.

***

Ovom prilikom želim da se zahvalim porodici i prijateljima na izuzetnoj podršci koju su mi pružili u toku studiranja. Veliku zahvalnost dugujem i svom mentoru prof. dr Zorani Lužanin, pre svega na strpljenju koje je iskazala u toku izrade rada, a takođe i na predlogu izuzetno zanimljive teme, kao i na izuzetnom znanju prenetom u toku studiranja. Takođe, zahvaljujem se i članovima komisije.

1. Uvod

Brak i razvod se u svojim različitim oblicima mogu pronaći u svim društvima. Institucija braka ima svoju specifičnu istoriju i razvoj, menjala se i prilagođavala društvenim promenama. I u najstarijim zajednicama muškarci i žene su se udruživali radi obezbeđivanja hrane, staništa i potomstva, što bi se moglo smatrati primitivnim brakom. Najraniji oblici braka bili su deo običaja i tradicije i naknado su evoluirali u zajednicu koja je regulisana pravom i zakonom. Za prvobitne ljudske zajednice karakteristični su poligamni brakovi, ali društvene okolnosti i razvoj ljudskog društva nametnule su stvaranje monogamnih zajednica kao najsigurnijeg načina produženja vrste.

Brak kroz istoriju

Antropološka istraživanja pokazuju da su prvi brakovi sklapani 5000 godina pre nove ere u Mesopotamiji.

Za stare Egipćane brak je predstavljao običaj i tradiciju i nije imao zakonsku podlogu. Brak je počinjao onog momenta kada se žena uselila kod muža, dok su ceremonije venčanja postojale uglavnom kod članova faraonske porodice. Neobično za ovaj period jeste to što brakovi, nisu uvek bili unapred dogovoreni već su bili rezultat sopstvenog izbora partnera o čemu svedoče brojni ljubavni zapisi iz tog perioda. Naravno postojao je i veliki broj ugovorenih brakova između ljudi istog staleža radi očuvanja bogatstva. Drevni Egipćani poznavali su i priznavali prekid braka tj. razvod. [10]

U antičkoj Grčkoj, kolevci Evrope, brak je imao socijalni i politički značaj i postojali su zakoni kojima je reglisana institucija braka. Koliko je brak bio značajan za Grke govori i jedan od Platonovih zakona po kome se muškarcu koji do tridesetpete godine ne stupi u brak oduzimaju građanska prava. Brakovi su u najvećem broju slučajeva ugovarani između roditelja neveste i mladoženje, a sklapani su i neugovoreni brakovi. Dopuštani su i brakovi između rođaka ukoliko je to bilo nephodno za produžetak dinastije. Sama ceremonija venčanja je bila velika svečanost i trajala je tri dana. Grci su brakove uglavnom sklapali u zimskom periodu, i to u mesecu januaru koji je posvećen Heri, boginji braka, a za vreme punog meseca jer se smatralo da to donosi sreću. Razvod, kao i sam brak bio je regulisan zakonima. [9]

Za stare Rimljane brak je bio društvena činjenica, a ne civilno-pravni odnos. Dugo nisu postojali civilno-pravni oblici sklapanja i raskida braka i pravo je dugo regulisalo mali broj pitanja vezanih za sklapanje braka. Tek 18. godine pre nove ere car August je doneo zakone koji regulišu brak i razvod sa ciljem podsticanja na sklapanje brakova. Latinska reč za brak *matrimonium* vodi poreklo od reči *mater (*majka), što pokazuje primarnu funkciju žene u starom Rimu, ali i samog braka, rađanje potomaka. Postojalo je nekoliko načina sklapanja braka, a sigurno najzanimljiviji jeste tradicionalna ceremonija koja podrazumeva sklapanje braka uz prisustvo svedoka. [11]

Razvoj hrišćanstva za brak donosi nove religiozne, filozofske i socijalne ideje kakve Rimljani nisu poznavali. Osim pisanih zakona i običaja brak sada reguliše i crkva. Za srednji vek u Evropi karakteristični su ugovoreni brakovi zbog velikog broja ratova i pohoda. Zahvaljujući sklapanju ugovorenih brakova udruživane su moćne evropske dinastije i na taj način sprečavani ratovi između evropskih država. Sa jačanjem hrišćanstva crkva je preuzela glavnu ulogu u regulisanju bračnih odnosa i priznavani su isključivo crkveni brakovi, odnosno oni sklopljeni od strane sveštenog lica. Tek u osamnaestom veku u revolucionarnoj Francuskoj ovo pravo preneto je sa crkve na državu i na taj način stvoren je građanski brak. Ovu praksu kasnije će uvesti sve evropske zemlje, dok je na našem području građanski brak zvanično priznat tek 1946. godine u bivšoj Jugoslaviji. [12]

Zajedničko za sve spomenute perioda jeste položaj žene u braku. Od drevnih civilizacija pa do dvadesetih godina prošlog veka prisutna je neravnopravnost između muškarca i žene. Žena je u braku bila potčinjena mužu, a njena primarna svrha je bila rađanje potomaka. Dobijanjem prava glasa položaj žene se menja, muškarci i žene postaju ravnopravni i stoga je u poslednjih stotinu godina institucija braka doživela više promena nego za hiljade godina pre toga.

Brak u današnje vreme

U današnje vreme brak je definisan i određen zakonom. U porodičnom zakonu Republike Srbije [20] stoji :

1) brak je zakonom uređena zajednica života između muškarca i žene;

2) brak se može sklopiti samo na osnovu slobodnog pristanka budućih supružnika ;

3) supružnici su ravnopravni.

U sociološkoj literaturi [12, 13] sreću se sledeće definicije braka:

- *Brak predstavlja zakonsku, versku i društveno priznatu zajednicu između muškarca i žene.*
- *Brak je emotivno-polna i drštvena veza, po pravilu trajne prirode, između lica suprotnih polova, a po načinu zasnivanja može biti: običajni, crkveni, građanski i faktički.*
- *Brak je vrsta ugovora između supružnika kojim su regulisana njihova prava i obaveze, imovinsko-pravni odnosi i odnosi sa potomcima.*

Razvod je takođe uređen zakonom ali on kao posebna kategorija u literaturi nije zanimljiv jer jednostavno predstavlja razvrgnuće sklopljenog braka.

Sociološki i psihološki aspekti braka

Jedno od najzanimljivijih pitanja vezanih za instituciju braka jeste zašto se ljudi odlučuju na sklapanje istog? Odgovor na ovo pitanje možemo pokušati dati sa sociološkog i psihološkog aspekta. [12]

Preokupacija savremenog čoveka jeste stvaranje materijalnog bogatstva jer je kvalitet života u direktnoj vezi sa njegovim posedovanjem. Sa sociološkog aspekta brak je zajednica koja se primarno ne bavi pitanjem materijalnog bogatstva, ali uspostavljanjem dobrih odnosa, stvaranjem potomstva i optimalnih psihosocijalnih uslova u zajedničkom životu proizvešće i dovoljno materijalno bogatstvo. Sama institucija braka u direktnoj je vezi sa porodicom. Supružnici za cilj imaju stvaranje potomstva i na taj način formiranje porodice kao najznačajnije sociološke forme i osnovne ćelije društva.

Sa psihološkog aspekta partneri se odlučuju za sklapanje braka zbog emocija i privlačnosti koja postoji između njih, kako bi stvorili zajedničko domaćinstvo, brinuli o njemu i formirali porodicu, te na taj način sebi stvorili siguran i ispunjen život koji predstavlja ostvarenje ideala kome svaki čovek teži.

Cilj ovog rada je modelovanje braka i razvoda. U novijoj matematičkoj istoriju dosta pažnje je posvećeno ovim fenomenima i postoji veliki broj radova koji se bavi njihovim modeliranjem. U ovom master radu biće prikazan samo jedan deo postignuth rezultata.

U prvom modelu brak će biti modelovan primenom ekonomske teorije, a ovaj model daje odgovor na pitanje kako pronaći idealnog partnera i da li tada sklopiti brak.

Drugi model posvećen je optimizaciji bračnog tržišta. U ovom modelu pretpostavlja se postojanje bračne agencije koja treba da formira bračne parove koji će imati najmanju šansu za razvod. Takođe, model će biti prezentovan na uzorku parova koji su 2007.godine zaključili brak na teritoriji opštine Šid.

Treći model u radu modeluje razvod i daje odgovor ne pitanje kada se odlučiti na razvod kao i da li će i pod kojim uslovima takav razvod biti efikasan.

U poslednjem modelu dinamičkim sistemom biće modelovano kretanje broja samaca, razvedenih i venčanih unutar jedne populacije. Model će zatim biti primenjen na populaciji Republike Srbije.

2. Pregled korišćenih pojmova i definicija

Ekonomsko-matematički pojmovi i definicije

***Definicija 2.1*:** Neka je dat skup X. Svaki podskup Dekartovog poizvoda $\rho \subseteq X$ x X je binarna relacija na skupu X.

***Definicija 2.2*:** Binarna relacija ρ na skupu X koja ispunjava uslove:

- refleksivnosti: $\forall x \in X \quad x\rho x,$
- kompletnosti : $\forall x, y \in X \quad x\rho y \lor y\rho x,$
- tranzitivnosti: $\forall x, y, z \in X \ x\rho y \land y\rho z \ => x\rho z,$

naziva se relacija preferencije (prednosti). Označavamo je sa $\succcurlyeq$.

$x \succcurlyeq y$: „x preferira y“, „x je izbor dobar bar koliko y“, „x nije lošiji izbor od y“

***Definicija 2.3*:** Ako za binarnu relaciju ρ na skupu X postoji funkcija $u: X \rightarrow \Re$ tako da važi

$$\forall x, y \in X \quad x\rho y <=> u(x) \geq u(y),$$

kažemo da je u funkcija korisnosti.

***Definicija 2.4*:** Ako je $\succcurlyeq$ relacija preferencije na skupu X i ako postoji funkcija $u: X \rightarrow \Re$ tako da važi

$$\forall x, y \in X \quad x \succcurlyeq y <=> u(x) \geq u(y),$$

kažemo da je u funkcija korisnosti relacije preferencije.

***Definicija 2.5*:** Proizvodna funkcije predstavlja tehnički odnos između inputa (tehničkih faktora proizvodnje) i autputa (ostvarenog obima proizvodnje):

$$Q = f(K, L),$$

gde je:
Q −ostvareni autput (ukupan proizvod);
K −uloženi kapital;
L − uloženi rad.

***Definicija 2.6*:** Marginalni (granični) proizvod (Maginal product), u oznaci MP, predstavlja odnos između prirasta proizvoda Q i dodatno angažovane jedinice inputa.

***Definicija 2.7*:** .Marginalni proizvod rada dat je sa $MPL = \frac{\Delta Q}{\Delta L}$ i pokazuje koliko se povećava fizički obim proizvodnje pri zapošljavanju svakog novog radnika.

Definicija 2.8**:** Marginalni proizvod kapitala dat je sa $MPK = \frac{\Delta Q}{\Delta K}$ i pokazuje koliko se fizički povećava obim proizvodnje pri zapošljavnju dodatne jedinice kapitala.

Definicija 2.9**:** Diskrecioni prihod predstavlja razliku između ukupno ostvarenih prhoda i svih mogućih troškova koji se ostvaruju (troškovi ishrane, stanovanja, krediti i sl.).

<u>Pregled korišćenih pojmova i definicija iz teorije verovatnoće</u>

Pojam od koga se polazi je eksperiment (opit) kod koga ishod nije jednoznačno određen. Skup svih mogućih ishoda sprovedenog eksperimenta označavamo sa Ω, a njegove elemente označavamo sa $\omega_1, \omega_2, \ldots$ i nazivamo ih elementarnim događajima.

Slučajan događaj A je podskup skupa Ω, koji se sastoji od onih elementarnih događaja koji imaju svojstvo koje taj događaj definiše.

Definicija 2.10 (σ- algebra): Neka je Ω skup svih mogućih ishoda (skup elementarnih događaja) nekog eksperimenta. σ-algebra (σ-polje) nad skupom Ω je podskup $\mathcal{F}$ partitivnog skupa $P(\Omega)$ ukoliko važe sledeći uslovi:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$;
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$, pri čemu je $\bar{A}$ komplement skupa A;
3. $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq \mathcal{F}$.

Definicija 2.11 (Borelova σ- algebra): Borelova σ-algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ je najmanja σ-algebra koja sadrži sve otvorene podskupove skupa realnih brojeva.

Definicija 2.12 (Funkcija verovatnoće): Neka je $\Omega \neq \emptyset$ skup elementarnih događaja i $\mathcal{F} \subseteq P(\Omega)$ σ-algebra nad Ω. Funkcija $P: \mathcal{F} \to [0,1]$ se zove verovatnoća na prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ ako zadovoljava uslove:

(1) $P(\Omega) = 1$,
(2) $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$; $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j, i, j = 1,2, \ldots \Rightarrow P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Uređena trojka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ naziva se prostor verovatnoća.

***Definicija 2.13 (Slučajna promenljiva*)**: Preslikavanje $X: \Omega \to \mathbb{R}$ je slučajna promenljiva nad prostorom verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ako $X^{-1}(S) \in \mathcal{F}$ za svako $S \in \mathcal{B}$, gde je $\mathcal{B}=\mathcal{B}(\mathbb{R})$ Borelovo σ-polje. Ekvivalentno kažemo da je X $\mathcal{F}$-merljivo.

Definicija 2.14 : Funkcija raspodele slučajne promenljive X je preslikavanje $F_X: \mathbb{R} \to [0,1]$ definisano sa:

$$F_X(x) = P(\omega \in \Omega \mid X < x), x \in \mathbb{R}.$$

Funkcija raspodele jedinstveno određuje slučajnu promenljivu.

Definicija 2.15: Slučajna promenljiva X je apsolutno neprekidnog tipa ako postoji nenegativna integrabilna funkcija $\varphi_X(x), x \in \mathbb{R}$, takva da je za sve $S \in \mathcal{B}$:

$$P(X \in S) = \int_S \varphi_X(x)dx$$

Funkcija $\varphi_X(x)$ zove se gustina raspodele verovatnoća slučajne promenljive X.

Veza između funkcije raspodela verovatnoće i gustine raspodele slučajne promenljive X je:

$$F_X(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x)$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_X(x)dx.$$

Definicija 2.16: Matematičko očekivanje apsolutno neprekidne slučajne promenljive X dato je sa:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi_X(x)dx.$$

Definicija 2.17: Matematičko očekivanje slučajne promenljive X, možemo izraziti i u obliku:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_X(x).$$

Teorema 2.18: Neka je X slučajna promenljiva i neka je data merljiva funkcija $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, takva da je $\int g(x)dF_X(x) < \infty$. Tada slučajna promenljiva $Y = g(x)$ ima matematičko očekivanje dato sa:

$$E(Y) = E\big(g(x)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF_X(x).$$

Teorema 2.18: Ako apsolutno neprekidna slučajna promenljiva X uzima samo nenegativne vrednosti, tada očekivanje te slučajne promenljive možemo računati primenom formule:

$$E(X) = \int_0^{\infty} P(X \geq x)dx.$$

Pojmovi iz teorije igara

Život obiluje situacijama u kojima je potrebno donositi odluke. U nekim slučajevima posledice odluke zavise isključivo od one strane koja donosi odluku. Međutim, često posledice odluke ne zavise samo od jedne strane već i od interakcije sa odlukama koje donose druge strane i na taj način ishod odluke jedne strane zavisi od ishoda odluka druge ili drugih strana. U igri šaha, rezultat igre ne zavisi samo od poteza jednog igrača već zavisi i od poteza drugog igrača [18]. Ovakav slučaj neizvesnosti u odlučivanju nazivamo ***igrom***.

Igrači- strane koje učestvuju u igri.

Kooperativna (koaliciona igra) igra- igra u kojoj igrači nisu suprotstavljene strane nego igrači sarađuju u zajedničkom interesu.

Koalicija- skup igrača koji sarađuju u zajedničkom interesu.

Strategije igrača- skup svih alternativa kojim igrač raspolaže prilikom donošenja odluke.

Plaćanje (rezultat igre) - predstavlja rezultat koji nastaje kada igrači izaberu svoje strategije.

Konačna igra dva igrača- igra u kojoj učestvuju dva lica pri čemu svako ima unapred poznat konačan broj strategija.

Matrica plaćanja za dva igrača- predstavlja sve moguće ishode igre nastalih iz svih mogućih kombinacija strategija dva igrača. Možemo je predstaviti kao:

$$C = \left[C(a_i, b_j)\right]$$

gde je $C\left(a_i, b_j\right),\ i = 1,2,\dots\ ,m, j = 1,\dots,n$ ishod igre ukoliko prvi igrač izabere strategiju $a_i, i = 1,2,\dots\ ,m$, a drugi igrač bira strategiju $b_j,\ j = 1,2,\dots\ ,n$.

Jezgro kooperativne igre – skup svih izvodljivih strategija koje imaju svojstvo jezgra. Pod svojstvom jezgra podrazumevamo sva ona moguća rešenja, odnosno koalicije igrača sa osobinom da sve druge koalicije bar jednog od igrača koalicije dovode u lošiji položaj od onoga koji ima u koaliciji koja se nalazi u jezgru.

Pregled pojmova iz numeričke optimizacije

Opšti problem numeričke optimizacije je sledećeg oblika:

$$\min J(u) \tag{2.1}$$

$$Au \leq b \tag{2.2}$$

$$A_1 u = b_1 \tag{2.3}$$

$$u_i \geq 0, i \in I \subseteq \{1,2,\dots,n\} \tag{2.4}$$

$$x \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{m,n}, b \in \mathbb{R}^m, A_1 \in \mathbb{R}^{s,n}, b_1 \in \mathbb{R}^s \tag{2.5}$$

Funkcija $J(u)$ se naziva funkcija cilja, a skup U koji sadrži ograničenja data sa $(2.2) - (2.5)$ naziva se dopustiv skup problema. Svaki vektor u koji zadovoljava data ograničenja je dopustivo rešenje problema (2.1). Optimalno rešenje problema (2.1) je ono dopustivo rešenje u kojem funkcija cilja dostiže minimalnu vrednost.

Jasno, problem minimizacije možemo posmatrati i kao problem maksimizacije do kojeg se dolazi transformacijom funkcije cilja koju minimiziramo.

Često se na funkciju cilja ili na ograničenja postavljaju dodatni uslovi. Jedan od najčešćih jeste uslov linearnosti funkcije cilja i ograničenja i tada govorimo o problemu linearnog programiranja (LP).

Jedan od specijalnih slučajeva problema linearnog programiranja je problem linearne asignacije (dodeljivanja) koji ima sledeći oblik:

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1\,, (j = 1, \dots, n)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1\,, (i = 1, \dots, n)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, (\, i = 1, \dots n, j = 1, \dots, n)$$

Ovakav problem se javlja u slučajevima kada npr. treba rasporediti n osoba na n poslova pri čemu na svakom poslu može da radi samo jedna osoba, a svaka osoba može da prihvati samo jedan posao.

3. Model braka(model optimalnog sortiranja)

Prvi model koji će biti predstavljen, razvio je poznati američki ekonomista i nobelovac Gary S. Becker u svom delu „Teorija braka " (1973.) [4,5].

Za početak, brak će biti modelovan primenom ekonomske teorije. U osnovi se nalaze sledeći ekonomski principi:

- *Princip korisnosti:* uz pretpostavku da je brak između partnera uvek dobrovoljan, možemo primeniti teoriju preferencija. Svaka osoba će očekivati povećanje svog nivoa korisnosti u braku, u odnosu na nivo korisnost koji je imala pre sklapanja braka.

- *Princip tržišta:* muškarci i žene se na neki način nadmeću i predstavljaju jedni drugima konkurenciju u potrazi za idealnim partnerom. Pretpostavićemo postojanje tržišta braka na kome bi oni pronalazili idealnog partnera za sebe, naravno pod određenim tržišnim uslovima.

Ova dva principa daju odgovor na pitanja zašto je većina osoba u braku, i zašto su brakovi nastali pod različitim uslovima, tj. na različitim tržištima braka, ipak slični u pogledu osobina bračnih partnera.

3.1. Problem maksimizacije korisnosti

Posmatraćemo dve osobe, u oznaci M i F, koje treba da donesu odluku o sklapanju braka. Pod brakom podrazumevamo da partneri dele zajedničko domaćinstvo, a da odluku o sklapanju braka donose ako i samo ako na taj način povećavaju svoju korisnost.

Korisnost partnera merićemo ne robama i uslugama koje članovi domaćinstva mogu da kupe na tržištu, već dobrima proizvedenim unutar jednog domaćinstva. Dobra proizvedena unutar jednog domaćinstva imaju sledeće osobine:

- nastaju kao rezultat vremena koje članovi domaćinstva provode u netržišnom sektoru;

- delom su proizvedena od postojećih tržišnih dobara, a delom su rezultat uloženog vremena od strane svakog člana domaćinstva;

- ne postoji mogućnost razmene ovih dobara između različitih domaćinstava, već se razmena vrši isključivo između članova jednog domaćinstva;

- ne mogu se izmeriti i klasifikovati kao tržišna dobra i usluge jer podrazumevaju širok spektar ljudskih ciljeva i aktivnosti;

- ova vrsta dobara je veoma brojna i u njih ubrajamo: kvalitet ishrane, ljubav, zdravlje, prestiž, poverenje između članova domaćinstva i slično… ;

- sva dobra prozvedena unutar jednog domaćinstva objedinićemo u jedinstven skup autputa, u oznaci Z.

Na osnovu navedenih osobina definisaćemo proizvodnu funkciju za jedno domaćinstvo, sa proizvoljnim brojem članova k, koja odgovara ukupnom autputu Z, za različite inpute:

$$Z = f(x_1, \dots, x_m; t_1, \dots, t_k; E), \tag{3.1}$$

gde je:

$x_i,\ i = 1,2, \dots, m$- inputi u vidu tržišnih roba i usluga (njihova količina) ;

$t_j,\ j = 1, \dots, k$- vremenski inputi za svakog od članova domaćinstva, preciznije vreme koje svaki član provede u netržišnom sektoru;

E- varijable okruženja.

Lako se zaključuje da se maksimizacija korisnosti svakog člana domaćinstva svodi na maksimizaciju njegovog udela u ukupnom autputu Z, odnosno svaki član domaćinstva rešavaće problem

$$\max_j Z \ , j = 1, \dots, k \ .$$

Dalje, definišemo budžetsko ograničenje:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i x_i = \sum_{j=1}^{k} \omega_j l_j + v \ , \tag{3.2}$$

gde je:

$p_i\ ,\ i = 1, \dots, m$ - cena i-te robe ili usluge na tržištu;

$\omega_j,\ j = 1, \dots, k$ - cena sata rada koji član domaćinstva provede radeći u tržišnom sektoru (satnica za j $-$tog člana domaćinstva, $j = 1,2, \dots, k$) ;

$l_j,\ \ j = 1, \dots, k$ - vreme koje j-ti član provede radeći u tržišnom sektoru;

v – prihod od imovine koji ostvaruju članovi domaćinstva, a po osnovu posedovanja nekretnina ili prirodnih resursa (renta), finansijskih instrumenata (dividende, kamate) ili kapitalnih dobara (profit).

Dalje, definišemo vremensko ograničenje

$$l_j + t_j = T_j \ , j = 1, \dots , k \ , \qquad (3.3)$$

gde je:

$T_j, \ j = 1,2, \dots , k$, ukupno vreme za j-tog člana domaćinstva, a predstavlja zbir vremena koje svaki od članova domaćinstva provede u tržišnom i netržišnom sektoru.

Kombinacijom budžetskog ograničenja (3.2) i vremenskog ograničenja (3.3), uz pretpostavku da su $\omega_j, \ j = 1, \dots , k$ konstantne vrednosti za svakog člana domaćinstva dobijamo:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i x_i + \sum_{j=1}^{k} \omega_j t_j = \sum_{j=1}^{k} \omega_j T_j + v. \qquad (3.4)$$

Desna strana jednakosti predstavlja ukupni maksimalni prihod koji jedno domaćinstvo može da ostvari. Leva strana predstavlja ukupnu vrednost autputa jednog domaćinstva, a koji se na osnovu gornje jednakosti može poistovetiti sa ukupnim prihodom. [1]

Sada, problem maksimizacije autputa koji rešava svaki član domaćinstva dobija sledeći oblik:

$$\max Z \ <=> \ \max_{x_i, t_j} \sum_{i=1}^{m} p_i x_i + \sum_{j=1}^{k} \omega_j t_j . \qquad (3.5)$$

Definisaćemo marginalni proizvod vremena koje svaki član domćinstva provede u netržišnom sektoru:

$$MP_{t_j} \equiv \frac{\partial Z}{\partial t_j} = \omega_j, \ j = 1,2, \dots , k, \ za \ sve \ 0 < t_j < T_j.$$

Iz definisanog marginalnog proizvoda vidimo da promena za jednu jedinicu vremena koje j-ti član domaćinstva provede u netržišnom sektoru menja ukupan autput domaćinstva za vrednost satnice koja odgovara tom članu domaćinstva.

Takođe definisaćemo i marginalni proizvod tržišnih roba i usluga kao:

$$MP_{x_i} = \frac{\partial Z}{\partial x_i} = p_i \ , \ i = 1,2, \dots \ , n, \ za \ sve \ x_i > 0.$$

[1] U realnom životu nije nužno da su ove dve vrednosti jednake, ali u daljoj analizi naša pretpostavka će biti da jesu.

Dalje, posmatrćemo odnose marginalnih proizvoda vremena za dva člana domaćinstva:

$$\frac{MP_{t_s} \equiv \dfrac{\partial Z}{\partial t_s}}{MP_{t_j} \equiv \dfrac{\partial Z}{\partial t_j}} = \frac{\omega_s}{\omega_j} \quad , \qquad za\ sve\ 0 < t < T, \qquad s, j = 1,2, \dots, k\ ; \tag{3.6}$$

Posmatranjem odnosa definisanog sa (3.6) možemo da zaključimo na koji način će svaki član izvršiti alokaciju svog vremena na tržišni i netržišni sektor. Svakoj osobi unutar domaćinstva je u cilju da svoje ukupno vreme rasporedi na način koji će dovesti do ostvarivanja najvećeg mogućeg autputa. Analiza će biti pokazana na sledećim jednostavnim primerima:

Primer 3.1

Posmatraćemo najjednostavniji slučaj, osobe M i F u braku i samo oni čine domaćinstvo. Tada:

1. postoje samo dva vremenska inputa t_m i t_f;
2. važi da je $T_m = T_f = 24$ časa na dan, 168 časova u toku nedelje itd;
3. posmatramo jedino vrednost količnika

$$\frac{MP_{t_m}}{MP_{t_f}} = \frac{\omega_m}{\omega_f}$$

i u zavisnosti od ove vrednosti osobe M i F će izvršiti alokaciju na tržišni i netržišni sektor, i to na sledeći način:

- ukoliko je $\omega_m > \omega_f$, kada je $t_m = t_f$ tada osoba M će veći deo svog vremena alocirati ka tržišnom sektoru od osobe F;
- ako je $\omega_m < \omega_f$, kada je $t_m = t_f$, tada će osoba F veći deo svog vremena alocirati ka tržišnom sektoru a M će veći deo alocirati ka netržišnom;
- veoma velike vrednosti posmatranog odnosa mogu da dovedu do toga da se partner F u potpunosti specijalizuje za rad u netržišnom sektoru ($t_f = 0$).

Primer 3.2

Analiza može biti izvršena i za osobu koja nije u braku. U tom slučaju je za osobu F koja nije u braku $T_m = 0$ i obrnuto, za M je $T_f = 0$.

Tada, osoba koja nije u braku alokaciju svog vremena vrši posmatrajući samo odnos marginalnih proizvoda sopstvenih inputa, jer ne postoji partner koji bi doprineo svojim inputima. Na primer, osoba F će tada posmatrati odnos:

$$\frac{MP_{x_f}}{MP_{t_f}} = \frac{p_f}{\omega_f},$$

i u skaldu sa vrednošću gornjeg količnika izvršiti alokaciju svog vremena na tržišni i netržišni sektor.

3.2. Potreban uslov za sklapanje braka

Sada ćemo definisati potreban uslov za sklapanje braka između osoba M i F , u skladu sa pojmovima i oznakama definisanim u prethodnom delu.

Neka su Z_{m0} i Z_{f0} maksimalni autputi, za osobe M i F pre sklapanja braka. Neka su m_{mf} i f_{mf} njihovi maksimalni autputi koje ostvaruju u braku, a koji su dobijeni rešenjem problema maksimizacije korisnosti za svakog od članova domaćinstva.

U skladu sa definisanim autputima možemo definisati potreban uslov za sklapanje braka. Osobe M i F će se odlučiti za sklapanje braka ukoliko je za svakog od njih nivo maskimalnog autputa koji ostvaruju u braku iznad nivoa maksimlnog autputa koji su ostvarivali pre sklapanja braka. Preciznije potreban uslov za sklapanje braka dat je sa:

$$\begin{aligned} m_{mf} &\geq Z_{m0} \\ f_{mf} &\geq Z_{f0} \,. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Spajanjem ova dva uslova u jedan dobijamo:

$$m_{mf} + f_{mf} \;=\; Z_{mf} \geq Z_{m0} + Z_{f0} \,. \tag{3.8}$$

Dakle, osobe M i F će se odlučiti za sklapanje braka ukoliko njihov potencijalni bračni autput premašuje zbir autputa koje ostvaruju pre sklapanja braka.

3.3. Model optimalnog sortiranja

Pretpostavljamo da postoji tržište braka. Na pretpostavljenom bračnom tržištu svaka osoba ima mogućnost da od svih potencijalnih partnera izabere idealnog, a model optimalnog sortiranja daje nam odgovor na pitanje koje bi to osobe bile idealne za brak.

Neka se na tržištu braka nalazi n žena i n muškaraca. Svaka ženska osoba, u oznaci F i svaka muška osoba, u oznaci M treba da donese odluku koja osoba od potencijalnih bi bila idealana za sklapanje braka, a zatim i da odluči da li sa tom osobom sklopiti brak primenom potrebnog uslova za sklapanje braka.

Brak ćemo sada posmatrati kao kooperativnu igru dva igrača. Neka je P matrica plaćanja čiji elementi predstavljaju maksimalni autput ostvaren u svim mogućim brakovima, ali i autpute koji se ostaruju ukoliko ne dođe do sklapanja braka:

$$P = \begin{bmatrix} Z_{11} & \cdots & Z_{1n} & Z_{10} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ Z_{n1} & \cdots & Z_{nn} & Z_{n0} \\ Z_{01} & \dots & Z_{0n} & Z_{00} \end{bmatrix},$$

gde je:

$Z_{ij}, i, j \in \{1, \dots, n\} -$ maksimalni autput braka koji su sklopile osobe i i j;

Z_{i0} , $Z_{0j}, i, j \in \{1, \dots, n\}$ – autput koji ostvaruje pojedinac koji je odličio da ne sklopi brak;

Z_{00}- nemoguć izbor, ali zbog definisanosti matrice P uvodimo ovu oznaku.

Svaka osoba ima $n + 1 -$u mogućnost za izbor: može da izabere nekog od n mogućih partnera ili da ne izabere, odnosno da ostane sama. Ukupan broj mogućnosti izbora za $2n$ osoba koje se po pretpostavci nalaze na tržištu braka iznosi $n^2 + 2n$.

Dalje, pretpostavićemo da svaka osoba ostvaruje neki prihod od braka, pa ćemo isključiti poslednju kolonu i vrstu iz definisane matrice plaćanja, tj. mogućnost da neka od osoba na bračnom tržištu ne izabere potencijalnog partnera. Tada postoji $n!$ kombinacija koje dopuštaju $M_i, i \in \{1, \dots, n\}$ da izabere jednu partnerku $F_j, j \in \{1, \dots, n\}$.

Ukupni autput brakova nastalih svim mogućim sortiranjima će biti:

$$Z^k = \sum_{i,j \in \{1,\dots,n\}} Z_{ij}, \quad k = 1,2, \dots, n!\,.$$

Sada možemo da postavimo model braka zasnovan na optimalnom sortiranju. Optimalno sortiranje će predodrediti bračne partnere tako da je maksimiziran ukupan autput svih brakova. Preciznije optimalno sortiranje modeluje brakove na sledeći način:

$$\max_k Z^k, k = 1,2, \dots, n!\,.$$

Za dalju analizu neka se sortiranje koje maksimizira ukupni bračni nalazi na dijagonali matrice plaćanja:

$$Z^* = \sum_{i=1}^{n} Z_{ii} = \max_k Z^k \geq Z^k, \qquad k = 1,2, \dots, n!\,.$$

Ukupan maksimalni autput koji bi bio ostvaren u potencijalnom braku napisaćemo kao zbir autputa koji partneri ostvaruju pojedinačno u braku:

$$Z_{ij} = m_{ij} + f_{ij}, i, j \in \{1, \dots, n\}\,, \tag{3.9}$$

gde je:

m_{ij} − autput ostvaren od strane M_i, a koji je u braku sa F_j, $i, j \in \{1, \dots, n\}$;

f_{ij} − autput ostvaren od strane F_j, a koji je u braku sa M_i, $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Sada možemo da pristupimo analizi optimalnog sortiranja. Pretpostavimo da svaka osoba bira isključivo onog partnera sa kojim će u braku ostvariti svoj maksimalni autput. Tada optimalno sortiranje mora da ima osobinu da sve osobe koje nisu predodređene kao idealni partneri ne mogu to ni biti, jer bi tada boljitak jedne osobe doveo do toga da drugoj osobi bude lošije. Jezikom teorije kooperativnih igara, ovo jednostavno znači da se rešenje dobijeno optimalnim sortiranjem nalazi u jezgru. Svako rešenje van jezgra dovelo bi do toga da nekim osobama bude bolje i ostvare veći autput, ali uz smanjenje autputa nekih drugih osoba na tržištu braka.

Osobe koje bi sklopile brak koji ne pripada jezgru nikada ne mogu nadmašiti maksimalan autput koji ostvaruju u braku koji je rešenje optimalnog sortiranja, a koji se nalazi u jezgru, jer bi ovo bilo u kontradikciji sa samom definicijom jezgra.

Ukoliko je sortiranje koje uzima dijagonalne elemente optimalno mora da važi:

$$m_{ii} + f_{jj} \geq Z_{ij}, i, j \in \{1, \dots, n\}\,. \tag{3.10}$$

Uslovi (3.9) i (3.10) automatski isključuju sve one brakove koji ne maksimiziraju ukupnu sumu svih bračnih autputa. Pretpostavimo da je brak između M_i i F_j i brak F_i sa M_p , $i, j, p \in \{1, \dots, n\}$ sortiranje koje ne maksimizira ukupnu sumu bračnih autputa. Tada na osnovu (3.10) mora da važi:

$$m_{ij} + f_{pi} \geq Z_{ii}\,.$$

Tada je

$$Z_p = \sum_{ij,pi}^{n} m_{ij} + f_{pi} \geq \sum_{i=1}^{n} Z_{ii} = Z^*\,,$$

što je u kontradikciji sa uslovom (3.9.).

Sve navedeno biće ilustrovano sledećim primerom:

Primer 3.3

Neka je data matrica plaćanja P reda 2:

$$P = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 10 & 8 \end{bmatrix}$$

i neka je $m_{11} = 4, f_{11} = 5, m_{22} = 6$ i $f_{22} = 2$.

Možemo da zaključimo sledeće:

- Iako je maksimalni mogući autput u matrici plaćanja $Z_{21} = 10$ ostvaren u braku M_2 i F_1 ovo sortiranje neće biti optimalno.
- Optimalno će biti sortiranje F_1 sa M_1, a F_2 sa M_2.
- M_2 i F_1 nije u cilju da budu u braku jer je $m_{22}+f_{11} = 11 > m_{21} + f_{21} = 10$.
- Slično $m_{11} + f_{22} = 6 > m_{12} + f_{21} = 5$.
- Takođe možemo uočiti da je ukupan autput brakova u optimalnom sortiranju

$$Z_{11} + Z_{22} = 17 > Z_{21} + Z_{12} = 15.$$

Dati primer ilustruje ono što je predstavljeno u modelu- bračno tržište ne maksimizira autput svakog braka pojedinačno već autput svih brakova zajedno, baš kao što i kompetetivno tržište ne maksimizira autput svake firme pojedinačno već njihov zajednički autput[17].

Svaki brak možemo posmatrati kao firmu gde je jedna osoba vlasnik firme i zapošljava drugu osobu za platu koja iznosi m_{ij} ili f_{ij} i pri tome ostvaruje profit $Z_{ij} - m_{ij}$ ili $Z_{ij} - f_{ij}$.

Nakon što je model optimalnog sortiranja predodredio idealne parove, u skaladu sa definisanim maksimalnim autputima, svaki od potencijalnih partnera će primeniti potreban uslov za donošenje odluke da li sklopiti brak sa partnerom koji mu je predodređen optimalnim sortiranjem.

4. Model braka- optimizacija bračnog tržišta

U ovom modelu biće reči o problemu optimizacije bračnog tržišta i biće predstavljena jedna od mogućnosti za formiranje optimalnih bračnih parova. Svako od nas intuitivno zna da na brak i razvod mogu da utiču brojni faktori, a brojna istraživanja potvrđuju našu intuiciju. Model koji će biti predstavljen uključiće faktore koji bi mogli da utiču na brak i šansu za razvod, a razvili su ga autori N. Cao, E. Fragniere, J. Gauthier, M. Spin i E. Widemer. [3]

U modelu pretpostavićemo postojanje:

- bračnog tržišta - na bračnom tržištu nalaze se muškarci i žene, potencijalni partneri za brak;
- centralne bračne agencije- zadatak bračne agencije je pronalaženje optimalnih i idealnih partnera za brak, a poseduje sve neophodne karakteristike i informacije za svaku individuu prisutnu na bračnom tržištu.

Model koji će biti predstavljen daje odgovor na pitanje na koji način centralna bračna agencija može da odredi idealne partnere za brak, tj. jedan način na koji može da izvrši optimizaciju bračnog tržišta.

Kako bismo postavili model koji će nam dati idealne bračne partnere prvo ćemo reći šta podrazumevamo pod optimalnim brakom. Pod optimalnim brakom u ovom modelu podrazumevaćemo one brakove koji imaju najmanju šansu za razvod. Na sam razvod tj. na verovatnoću da do razvoda dođe mogu da utiču brojne kriterijumi (npr. razlika u godinama, različita nacionalna pripadnost, različit nivo prihoda, nivo obrazovanja, različita interesovanja, prethodni razvodi...).

Neka je:

F- skup svih žena koje se nalaze na bračnom tržištu;

M- skup svih muškaraca koji se nalaze na bračnom tržištu;

Naša pretpostavku da je $|M| = |F| = n$.

Sa C ćemo označiti skup kriterijuma koji mogu značajno da utiču na stabilnost braka. Sve vrednosti koje može da uzme kriterijum $c \in C$ određuju njegov domen, u oznaci D_c.

Svaki kriterijum $c \in C$ podelićemo na skup kategorija K_c, a sve vrednosti koje može da uzme kategoruja $k_c \in K_c$ definišu njen domen D_{k_c}.

Unutar jednog kriterijuma, domeni svih kategorija moraju biti isključivi, odnosno mora da važi:

$$D_{k_c} \cap D_{k_c'} = \emptyset, \;\; \forall k_c, k_c' \in K_c \,.$$

Takođe, važi da je domen kriterijuma definisan domenima svih njegovih kategorija:

$$\bigcup_{k_c} D_{k_c} = D_c\ , \ \ \forall k_c \in K_c.$$

Svakom paru koji čine žena $f \in F$ i muškarac $m \in M$ pridružujemo vrednost kategorije $k_c \in K_c$ i kriterijuma $c \in C$:

1. Svakoj kategoriji $k_c \in K_c$ pridružićemo vrednsot p_{k_c} – trošak kategorije, predstavlja šansu da se parovi koji pripadaju navedenoj kategoriji razvedu ;

2. Svakom kriterijumu $c \in C$ pridružujemo vrednost, u oznaci v_{fm}^c ,:

$$v_{fm}^c = g_c(v_f^c, v_m^c),$$

gde je :

g_c- specifična funkcija za kriterijum $c \in C$;

v_f^c- vrednost za ženu $f \in F$ za kriterijum $c \in C$;

v_m^c-vrednost za muškarca $m \in M$ za kriterijuma $c \in C$.

Dalje, za svaki par koji čine žena $f \in F$ i muškarac $m \in M$ računamo trošak kriterijuma $c \in C$, u oznaci p_{fm}^c tako da je :

$$p_{fm}^c = p_{k_c}\text{, ako } v_{fm}^c \in D_{k_c}.$$

Kako bismo istovremeno uzeli u obzir sve kriterijume, ukupni trošak za svaki par koji čine žena $f \in F$ i muškarac $m \in M$ posmatraćemo kao

$$\sum_c p_{wm}^c\ .$$

Sada možemo da postavimo i model braka zasnovan na optimizaciji bračnog tržišta, a koji je sledećeg oblika:

$$\min \sum_{c} \sum_{f} \sum_{m} p_{fm}^{c} x_{fm}$$

$$s.t. \ \sum_{m} x_{fm} = 1, \quad \forall f \in F$$

$$\sum_{f} x_{fm} = 1, \quad \forall m \in M$$

$$x_{fm} \in \{0,1\}, \forall f \in F, \forall m \in M,$$

gde je:

$$x_{fm} = \begin{cases} 1, ako\ je\ žena\ f \in F\ predodređena\ za\ brak\ sa\ m \in M, \\ 0, inače. \end{cases}$$

Ukoliko zamenimo $\sum_c p_{fm}^c$ sa π_{fm}, gde matrica π_{fm} reflektuje šansu razvoda razvoda za svaki par, problem možemo sada zapisati u obliku:

$$\min \sum_{f} \sum_{m} \pi_{fm} x_{fm}$$

$$\sum_{m} x_{fm} = 1, \quad \forall f \in F$$

$$\sum_{f} x_{fm} = 1, \quad \forall m \in M$$

Kao što vidimo, predstavljeni model optimizacije minimizira ukupnu šansu za razvod svih parova. Sam problem je problem sa n^2 promenljivih. Ovaj model radi sledeće: prolazi kroz sve moguće kombinacije bračnih parova, njih ukupno $n!$, za svaki par računa šansu razvoda, u skladu sa definisanim značajnim kategorijama, i zatim bira ono rešenje, odnosno brakove koje će imati najmanju ukupnu šansu za razvod.

Kako je u postavljenom problemu svakom muškarcu dodeljena tačno jedna žena, a svakoj ženi tačno jedan muškarac, u pitanju je specijalni oblik problema linearnog programiranja, problem linearne asignacije (dodeljivanja). [15]

4.1. Primena modela

Kako bismo ilustrovali model i njegovu primenu posmatraćemo parove koji su tokom 2007. godine sklopili brak na teritoriji opštine Šid.

Na osnovu podataka dobijenih od matičara opštine Šid, te godine zaključeno je 186 brakova. Do kraja 2014. godine od 186 parova razvelo se ukupno 7. Pokušaćemo da izvršimo optimizaciju bračnog tržišta na osnovu karakteristika ovih parova. Uzorak i čitava analiza biće predstavljena u priključenom SPSS File-u, dostupnom na http://jmp.sh/lT1K7Bq.

Optimizaciju bračnog tržišta vršićemo na osnovu podataka koji su dobijeni, a koji podrazumevaju:

- Godine muškarca i žene prilikom sklapanja braka;
- Nivo obrazovanja (stručne spreme) prilikom zaključenja braka;
- Istorija pretodnih razvoda (da li su supružnici imali ranijih razvoda).

Za svaki par posmatraćemo 3 kriterijuma, koji su dati preko svojih kategorija:

- Kriterijum ***razlika u godinama*** sa kategorijama:

    1. Muškarac i žena su istih godina;
    2. Muškarac je stariji 5 ili više godina;
    3. Muškarac je stariji manje od 5 godina;
    4. Žena je starija 5 ili više godina;
    5. Žena je starija manje od 5 godina.

- Kriterijum ***razlika u nivou obrazovanja*** sa kategorijama:

    1. Muškarac i žena imaju isti nivo obrazovanja;
    2. Muškarac ima viši nivo;
    3. Žena ima viši nivo.

- Kriterijum ***istorija ranijih razvoda*** sa kategorijama:

    1. Oboje bez prethodnih razvoda;
    2. Muškarac je imao razvod;
    3. Žena je imala razvod;
    4. Oboje imali raniji razvod.

Pri samom definisanju modela rekli smo da posmatramo kriterijume koji značajno utiču na stabilnost braka, tj. one koji značajno utiču na mogućnost razvoda. Dakle, prvo moramo da ispitamo da li navedeni kriterijumi koji su dati preko svojih kategorija značajno utiču na šansu za razvod.

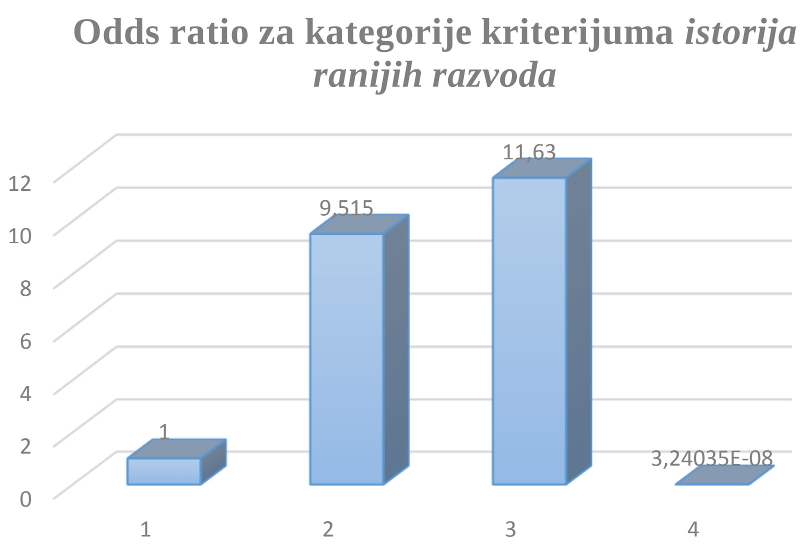
Analizu ćemo izvršiti u statističkom paketu SPSS primenom binarne logističke regresije[16].

Za svaki par definisaćemo zavisnu dihotomnu dummy varijablu koja :

- uzima vrednost 1 ukoliko se par razveo do kraja 2014. godine
- uzima vrednost 0 ukoliko se par nije razveo do kraja 2014. godine.

Ispitujemo da li tri prediktorske kategoričke nezavisne varijable (naša tri kriterijuma koja su data preko svojih kategorija) statistički značajno utiču na razvod.

Analizom izlaznih podataka dolazimo do rezultata da samo jedna prediktorska kategorička vaijabla tj. kriterijum utiče na razvod. U pitanju je kriterijum ***istorija ranijih brakova***. Za procenu značajnosti kriterijuma i njegovih kategorija koristićemo dobijene *odds ratio* iz binarne logističke regresije čije vrednosti su date grafički:



1- Oboje bez ranijih razvoda (REF)

2- M imao raniji razvod

3- F imala raniji razvod

4- Oboje imali razvod

**p<0,05*

Grafik 4.1

Sa grafika zaključujemo da veću šansu za razvod imaju parovi kod kojih su muškarac ili žena imali raniji razvod, u odnosu na referentnu kategoriju (oboje bez ranijih razvoda), dok parovi kod kojih su oba pertnera imali raniji razvod imaju mnogo manju šansu razvoda[2].

[2] Dobijenu vrednost SPSS poisteovećuje sa 0, ali zbog analize ovde će biti posmatrana kao $e^{-17,245} = 3,24035E - 08$

Dakle, optimizaciju bračnog tržišta za uzorak venčanih parova iz 2007.godine na teritoriji opštine Šid, izvršićemo samo u odnosu na jedan statistički značajan kriterijum ***istrorija ranijih razvoda.*** Ovakav rezultat naš problem dosta pojednostavljuje, međutim kako bismo ilustrovali model koji smo postavili definisaćemo sve njegove parametre.

Parametri modela:

- Skup kriterijuma C ima samo jedan elemenat, a to je kriterijum ***istorija ranijih razvoda***, koji ujedno definiše i domen skupa kriterijuma.

- Skup kategorija K koje odgovaraju kriterijumu ***istorija ranijih razvoda*** ima 4 elementa:

  $1 - oboje\ bez\ ranijih\ razvoda,$

  $2 - M\ imao\ razvod,$

  $3 - F\ imala\ raniji\ razvod,$

  $4 - \ oboje\ imali\ raniji\ razvod.$

- Svakoj kategoriji za posmatrani kriterijum pridružujemo trošak, u modelu oznaka p, koji poistovećujemo sa dobijenim odds ratio iz analize binarne logističke regresije,

- v_f^c- vrednost kriterijuma ***istorija ranijih razvoda*** za ženu, odgovor na pitanje da li je $f \in F$ imala raniji razvod,
  $v_m^c -$ vrednost kriterijuma ***istorija ranijih razvoda*** za muškarca, odgovor na pitanje da li je $m \in M$ razveden;

- $g_c(v_f^c, v_m^c)$ definisana specifična funkcija će posmatrati vrednost kriterijuma za muškarca i ženu (da li su imali ranije razvode) i svakom paru dodeliti jednu od 4 kategorije;

- Na kraju šansa razvoda za svaki par u zavisnosti od toga koja kategorija je pridružena tom paru biće poistovećena sa odds ratio.

- Problem minimizacije koji rešavamo ima oblik:

$$\min \sum_f \sum_m p\, x_{fm}$$

$$\sum_m x_{fm} = 1, \quad \forall f \in F$$

$$\sum_f x_{fm} = 1, \quad \forall m \in M$$

$$x_{fm} \in \{0,1\}, \forall f \in F, \forall m \in M$$

U pitanju je problem lienarne asignacije sa 186^2 nepoznatih. Međutim, zbog izuzetno velikog broja nepoznatih, ali i činjenice da optimizaciju bračnog tržišta vršimo samo u odnosu na jedan kriterijum koji ima samo 4 kategorije izvršićemo narednu jednostavnu analizu.

Za početak, predstavićemo strukturu muškaraca i žena u odnosu na istoriju ranijih brakova :

Broj muškaraca	**186**	**Broj žena**	**186**
M nije imao razvod	171	F nije imala razvod	173
M imao razvod	15	F imala razvod	13

Tabela 4.1

U odnosu na kriterijum ***istorija ranijih razvoda*** struktura zaključenih brakova po kategorijama je sledeća:

Kategorija	**Broj brakova (2007.godina)**
1 - oboje bez razvoda	160
2 - M imao razvod	13
3 - F imala razvod	11
4 - oboje imali razvod	2

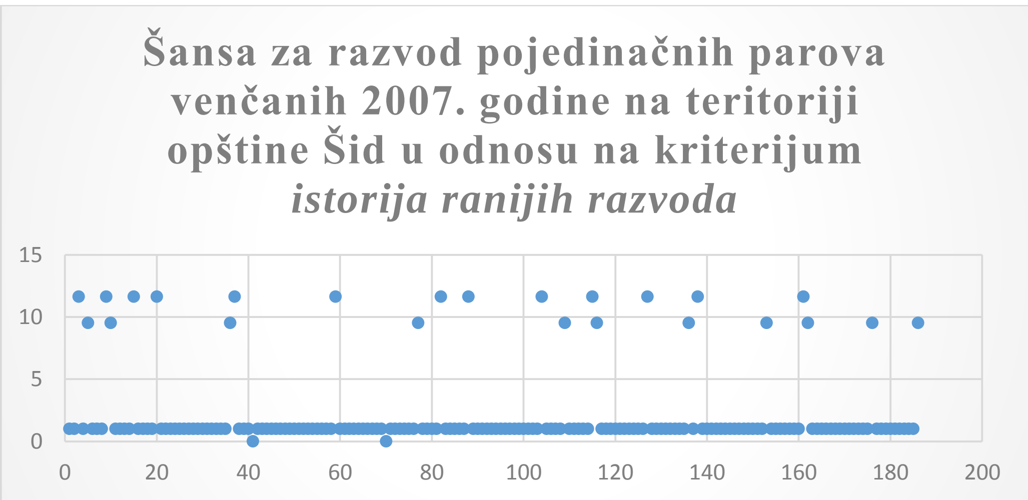
Tabela 4.2

Struktura po kategorijama 7 razvedenih brakova do kraja 2014.godine je sledeća:

Kategorija	**Broj brakova**
1 - oboje bez razvoda	3
2 - M imao razvod	3
3 - F imala razvod	1
4 - oboje imali razvod	-

Tabela 4.3

Sada, grafički ćemo prikazati šansu za razvod svakog braka koji je 2007. godine zaključen na teritoriji opštine Šid :



Grafik 4.2

Ukupna šansa za razvod svih brakova je data kao:

$$160 * 1{,}00 + 13 * 11{,}63 + 11 * 9{,}515 + 2 * e^{-17{,}245} = 415{,}855$$

S obzirom da optimizaciju radimo odnosu na jedan kriterijum koji ima samo četiri kategorije i znamo vrednosti koje smo dodelili kategorijama očigledno da važi sledeće:

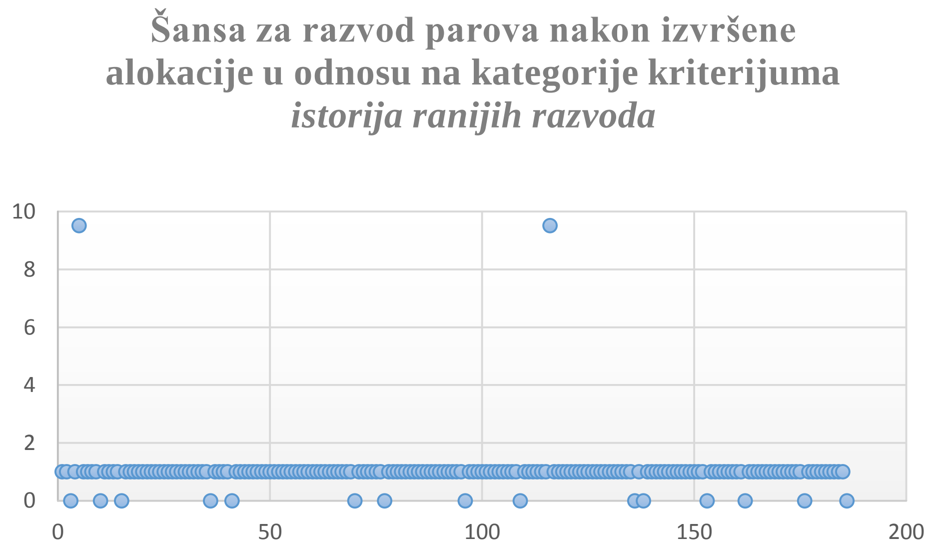
- Kako je verovatnoća razvoda najmanja u slučaju kada su oba partnera imali ranije razvode, to povlači da bismo trebali da imamo najveći mogući broj takvih parova, iz tabele 4.1 vidimo da je najveći mogući broj 13.
- Sada imamo još dva muškarca koji su imali raniji razvod njih stavljamo u par sa ženama koje nisu imale raniji razvod dobijamo još dva para;
- Preostali i to 171 par su parovi kod kojih nijedan partner nije imao raniji razvod.

Ovakav zaključak dovodi do sledeće alokacije brakova:

Kategorija	**Broj brakova (nakon alokacije)**
1 - oboje bez razvoda	171
2 - M imao razvod	-
3 - F imala razvod	2
4 - oboje imali razvod	13

Tabela 4.4

Grafički, alokacija parova posmatrajući njihovu šansu za razvod sada ima sledeći oblik:



Grafik 4.3

Ukupna šansa za razvod sada je data kao:

$$171 * 1{,}00 + 2 * 9{,}515 + 13 * e^{-17{,}245} = 190{,}03$$

Upoređujući grafike 4.2 i 4.3, vidimo da su alocirani parovi koji su se nalazili u kategorijama sa većom šansom za razvod (kategorije 2 i 3) ka kategorijama koje imaju manju šansu za razvod (kategorije 1 i 4). U našem slučaju alocirano je 13 parova iz kategorije 2 i 9 parova iz kategorije 3. Dakle, problem optimizacije bračnog tržišta koji minimizira ukupnu šansu za razvod svih parova koji su 2007. godine sklopili brak na teritoriji opštine Šid bi alocirao 22 para od 186 parova (11,828%).

5. Modeli razvoda

Modeli razvoda o kome će biti reči u ovom radu razvili su R. Bowles i N. Garoupa [2] i u njim brak će biti posmatran kao ugovor između partnera koji je kao i svaki drugi ugovor definisan zakonom, u ovom slučaju zakonom razvoda. Najviše će biti reči o zakonu razvoda zajedničke saglasnosti zasnovanom na očekivanoj šteti koja podrazumeva da oštećena strana dobija određenu nadoknadu koja će kompenzovati njen gubitak, a biće spomenuti i neki drugi zakoni razvoda. Predstavljeni model daće odgovor na pitanje kada su brak i razvod efikasni, kao i odgovor na pitanje da li je moguće postići efikasan razvod i efikasan brak. Pod efikasnim brakom podrazumevamo onaj brak u kome se nijedan partner ne može dovesti u bolji položaj bez toga da se drugi dovede u lošiji položaj. Slično važi i za efikasan razvod.

U osnovi našeg modelovanja i posmatranja nalazi se jedno domaćinstvo. Domaćinstvo čine:

- partneri koji su u braku, u oznaci i i j;
- njihova deca.

Usled delovanja raznih slučajnih spoljnih faktora (npr. dolazak drugih potencijalnih partnera, nezadovoljstvo u braku) partner i donosi odluku o razvodu i napuštanju zajedničkog domaćinstva.

5.1. Model očekivane štete

Za početak, nećemo razmatrati kako bi odluka o razvodu uticala na decu kao članove domaćinstva, a efekte odluke partnera koji napušta domaćinsto utvrdićemo upoređivanjem nivoa prihoda partnera pre i posle razvoda.

Pretpostavljamo sledeće :

- sva imovina unutar domaćinstva je zajednička i podrazumevćemo jednaku podelu između bračnih partnera, pri tome naravno može postojati i neki oblik imovine koji je „izvan“ domaćinstva i pripada samo jednom od partnera;
- partner j je napustio svoje zaposlenje u tržišnom sektoru, nakon dolaska dece, kako bi preuzeo brigu o njima.

Za potrebe modela definisaćemo diskrecione prihode supružnika u braku (*ex ante* prihodi) i prihode koje će ostvariti nakon razvoda (*ex post* prihodi).

Diskrecioni prihodi *ex ante* odlazećeg partnera i, u oznaci S_i, je njegov ukupan prihod umanjen za troškove vođenja zajedničkog domaćinstva. Zbog uvedenih pretpostavki o zajedničkoj imovini i nezaposlenju partnera j važi:

$$S_i = S_j = \frac{y_i - c}{2} \quad , \tag{5.1}$$

gde je:

$S_j -$ nivo diskrecionog prihoda partnera j;

$y_i -$ nivo prihoda partnera i ;

$c -$ ukupni troškovi domaćinstva kojeg čine supružnici i i j i njihova deca.

Usled delovanja spoljnih faktora, partner i donosi odluku o razvodu i napuštanju zajedničkog domaćinstva sa osobom j. Tada njegov *ex post* prihod postaje:

$$D_i = y_i - m_{ij} - c_i \,, \tag{5.2}$$

gde je:

m_{ij} – šteta koju partner i plaća partneru j ;

c_i - troškovi samačkog života osobe i koja je napustila domaćinstvo.

Prihod *ex post* osobe j koja je ostala u domaćinstvu dat je kao

$$D_j = m_{ij} - c_j \,, \tag{5.3}$$

gde je:

c_j –toškovi vođenja domaćinstva koje ima osoba j, bez partnera i.

Model razvoda zasnovan na očekivanoj šteti treba da obezbedi da partner koji ostane u domaćinstvu ima nivo diskrecionog prihoda jednak nivou prihoda koji je imao pre razvoda. Dakle, model razvoda ima zahteva

$$D_j = S_j.$$

5.1.1. Efikasnost razvoda u modelu očekivane štete

Iz postavljenog modela mora da važi :

$$\frac{y_i - c}{2} = m_{ij} - c_j \,,$$

pa dobijamo iznos štete m_{ij} koju u slučaju razvoda partner i plaća partneru j:

$$m_{ij} = \frac{y_i + 2c_j - c}{2} \,. \tag{5.4}$$

Dalje ćemo analizirati šta se dešava sa *ex post* pozicijom partnera koji napušta domaćinstvo pod uslovom da važi pravilo očekivane štete, kao i u kojim slučajevima se on odlučuje na razvod.

Osoba i koja napušta domaćinstvo ostvaruje *ex post* diskrecioni prihod koji dobijamo kombinacijom jednakosti (5.2) i (5.4.) :

$$D_i = \frac{y_i + c - 2c_i - 2c_j}{2} \,.$$

Sada možemo izraziti razliku diskrecionih prihoda za partnera i, u odnosu na njegovu *ex ante* poziciju:

$$\Delta = D_i - S_i = c - c_i - c_j = c - (c_i + c_j). \tag{5.5}$$

Uz pretpostavku rastućih prinosa, ukupni troškovi vođenja zajedničkog domaćinstva su manji od troškova vođenja dva domaćinstva:

$$c < c_i + c_j \leftrightarrow \Delta < 0\,. \tag{5.6}$$

Definisanu razliku diskrecionih prihoda za partnera i koji napušta domaćinstvo možemo tumačiti kao gubitak u diskrecionom prihodu koji partner i ostvaruje nakon razvoda zajedničke saglasnosti koji je zasnovan na očekivanoj šteti.

Za dalju analizu definisaćemo slučajnu promenljivu W [19] za koju važi:

- ova promenljiva oslikava slučajne spoljne faktore koji utiču na osobu i da donese odluku o razvodu i predstavlja neki slučajan prihod koji i ostvaruje nakon razvoda;
- apsolutno neprekidnog je tipa;
- definisana je na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$;
- $F_W(w) = P(W < w), w \in \mathbb{R}$ je funkcija raspodele uvedene slučajne promenljive W.

Osoba koja donosi odluku o razvodu uvek će uporediti gubitak u diskrecionom prihodu u slučaju razvoda sa eventualnim prihodom koji će ostvariti u nekom novom životu, a koji predstavlja definisana slučajna promenljiva W. Možemo da zaključimo da će osoba i odluku o razvodu doneti ukoliko prihod u novom životu kompenzuje gubitak u diskrecionom prihodu koji će biti ostvaren u slučaju razvoda, odnosno ukoliko je eventualna dobit te osobe pozitivna. Dakle, mora da važi:

$$\Delta + W > 0,$$

$$W > -\Delta \iff W \in (-\Delta, \infty)\,. \tag{5.7}$$

Iz (5.7) dobijamo i skup Ω svih mogućih vrednosti definisane slučajne promenljiva W

$$\Omega = (-\Delta, \infty).$$

Uopšteno govoreći, do razvoda dolazi u slučajevima kada su prihodi partnera i i j nakon razvoda veći od prihoda koje su ostvarivali dok su bili u braku, tj. ukoliko je

$$D_i + D_j + W > S_i + S_j \ . \tag{5.8}$$

Sada možemo da odredimo verovatnoću da dođe ili ne dođe do razvoda u odnosu na definisanu funkciju raspodele slučajne promenljive W.

- Do razvoda zajedničke saglasnosti neće doći ukoliko prihod u budućem životu ne kompenzuje gubitak u diskrecionom prihodu za osobu i, odnosno ukoliko je $W < -\Delta$. U skladu s tim verovatnoća da do razvoda ne dođe data je sa

$$P(ne\ dolazi\ do\ razvoda) = P(W < -\Delta) = F_W(-\Delta).$$

- Verovatnoću da do razvoda dođe možemo odrediti kao

$$P(dolazi\ do\ razvoda) = 1 - F_W(-\Delta).$$

Ako se razvod desi na osnovu modela razvoda zajedničke saglasnosti zasnovanom na očekivanoj šteti garantovano je sledeće :

(a) osoba koja ostaje u domaćinstvu zadržava nivo pihoda koji je imala pre braka;
(b) osoba koja je donela odluku o razvodu ostvaruje viši nivo prihoda nakon razvoda.

Dolazimo do zaključka da model razvoda zajedničke saglasnosti zasnovan na očekivanoj šteti osigurava efikasan razvod jer partneri ostaju na istom ili višem nivou prihoda nego u braku.

5.1.2. Efikasnost braka u modelu očekivane štete

Sledeći problem koji ćemo razmatrati odnosi se na efikasnost braka koji se sklapa sa verovatnoćom razvoda koji bi bio modelovan primenom očekivane štete.

U skladu sa pravilom očekivane štete definisaćemo očekivano plaćanje za svakog partnera (igrača) u braku, u oznaci $M_k,\ k = i, j$. Pravilo očekivane štete sa ekonomskog stanovišta podrazumeva da očekivana buduća vrednost postaje sadašnja vrednost.

- Očekivano plaćanje za partnera j dato je tada dato sa :

$$M_j = \mathrm{E}(D_j) = S_j \ ,$$

jer je njemu u svakoj situaciji (i u braku i nakon razvoda) uvek zagarantovan iznos S_j

- Očekivano plaćanje za odlazećeg partnera i određujemo kao:

$$M_i = E(D_i + W) = E(S_i + \Delta + W), \tag{5.9}$$

$$M_i = S_i + E(\Delta + W)\,.$$

Očekivanu vrednost slučajne promenljive $\Delta + W$, koja predstavlja očekivanu slučajnu dobit za partnera i u budućem životu, odredićemo kao:

$$E(\Delta + W) = \int_{-\Delta}^{\infty} (\Delta + w)\,dF_W(w)\,.$$

Kako je podintegralna funkcija nenegativna i rastuća važi

$$M_i = S_i + \int_{-\Delta}^{\infty} (\Delta + w)\,dF_W(w) \geq S_i\,. \tag{5.10}$$

Dakle očekivano plaćanje za osobu i u braku, a sa verovatnoćom razvoda zajedničke saglasnosti je na nivou njenog diskrecionog prihoda pre braka ili višem.

Kako u situaciji koju posmatramo osobe i i j imaju mogućnost izbora: ostati u braku ili se odlučiti za razvod uvešćemo i pojam oportunitetnih troškova braka, u oznaci S. Možemo doći do zaključka kada će odluka o sklapanju braka biti efikasna. U opštem slučaju to bi bilo onda kada su ukupni prihodi u braku veći od mogućih oportunitetnih troškova braka, odnosno kada je :

$$S_i + S_j \geq S.$$

Na osnovu nejednakosti (5.10) važi:

$$S_i + S_j \geq S_i - \int_{-\Delta}^{\infty} (\Delta + w)\,dF_W(w) + S_j \geq\; S - \int_{-\Delta}^{\infty} (\Delta + w)\,dF_W(w),$$

$$S_i + S_j \geq S + \int_{-\Delta}^{\infty} (-\Delta - w)\,dF_W(w) = S + \int_{-\Delta}^{\infty} \big(c_i + c_j - c - w\big)\,dF_W(w)\,. \tag{5.11}$$

Oportunitetni trošak identifikovćemo ne više kao S već kao desnu stranu nejednakosti (5.11) i važi:

$$S \geq S - \int_{-\Delta}^{\infty} (\Delta + w) dF_W(w) \; . \tag{5.12}$$

Primena spomenutog zakona smanjuje oportunitetne troškove braka, a pokazaćemo i sledeće :

Propozicija 5.1

Zakon razvoda zajedničke saglasnosti zasnovan na očekivanoj šteti minimizira oportunitetne troškova braka

$$S - \int_{-\Delta}^{\infty} (\Delta + w) dF_W(w) = \min S \; .$$

Dokaz:

Dokaz je očigledan i proizilazi iz onoga što smo do sada predstavili. Naime pokazali smo da je razvod efikasan, i partner i u budućem životu ostvaruje očekivanu dobit koja pod pretpostavkama očekivane štete najveća moguća veća samim tim leva strana nejednakosti je najmanja moguća.

Brak sa verovtnoćom razvoda zajedničke saglasonsti zasnovan na očekivanoj šteti će dakle biti efikasan jer su oportunitetni troškovi braka najmanji mogući pod datim uslovima.

5.1.3. Efikasnost braka i razvoda zasnovanog na drugim zakoni razvoda u modelu očekivane štete

Model razvoda očekivane štete o kojem je do sada bilo reči, a koji se zasniva na zakonu razvoda zajedničke saglasnosti oba partnera osigurava da u slučaju razvoda partner koji ostane u domaćinstvu bude kompenzovan, i zaključili smo da je ovakav zakon razvoda efikasan. Međutim neki drugi zakoni razvoda mogu drugačije delovati. Svaki drugi pristup razvodu koji se razlikuje od zakona zajedničke saglasnosti može proizvesti drugačije rezlultate u modelu očekivane štete. Do ovakve pojave može doći jer će se promeniti podela resursa domaćinstva između partnera [6], a samim tim model očkivane štete ne mora generisati efikasan brak i razvod.

Uopšteno možemo definisati :

$$\Delta = D_i - S_i = y_i - m_{ij} - c_i - \frac{y_i - c}{2} = \frac{y_i + c - 2c_i}{2} - m_{ij}\,. \qquad (5.13)$$

Ukratko ćemo predstaviti kako će na efikasnost razvoda uticati neki drugi zakoni razvoda [6].

1. *Unilateralni (jednostrani) zakon razvoda*

   Ovaj zakon razvoda podrazumeva da nema kompenzacije za partnera j koji ostaje u domaćinstvu [6,7] i za njega važi:

$$m_{ij} \to 0$$

$$D_j^{unilateral} = \lim_{m_{ij}\to 0} D_j = \lim_{m_{ij}\to 0} (m_{ij} - c_j\,) = -c_j < 0$$

   i tada je

$$D_j^{unilateral} < S_j.$$

   Primenom ovog zakona diskrecioni prihod *ex post* za j je manji od njegovog prihoda koji je ostvarivao u braku i j će se nalaziti u nepovoljnijem položaju nego što je bio, te bi iz tog razloga primena unilateralnog zakona razvoda generisala neefikasan razvod.

2. *Bez zakona razvoda*

   Kada govorimo o razvodu bez zakona razvoda podrazumevamo [6,7]:

$$m_{ij} \to \infty\,.$$

   Tada je:

$$D_i^{unilateral} = \lim_{m_{ij}\to \infty} D_j = \lim_{m_{ij}\to \infty} \left(y_i - m_{ij} - c_i\right) = -\infty$$

   i važi

$$D_i^{unilateral} \ll S_i\,.$$

Ukoliko ne primenjujemo nijedan zakon razvoda osoba koja donosi odluku o razvodu će se naći u mnogo lošijem položaju, pa bi ovo dovelo takođe do neefikasnog razvoda.

Za spomenute zakone razvoda možemo koristiti izvedeno pravilo koje se odnosi na efikasnost odluke o sklapanju braka dato sa (5.11):

$$S_i + S_j \geq S + \int_{-\Delta}^{\infty} (-\Delta - w) dF_W(w) \,.$$

Oportunitetni trošak koji smo definisali kao desnu stranu gornje nejednakosti menja se zajedno sa vrednošću m_{ij}, pa je vrednost oportunitenih troškova direktno pogođena zakonima razvoda. Zakon razvoda zajedničke saglasnosti je minimizirao oportunitetne troškove i na taj način garantovao efikasan brak.

Kako unilateralni zakon razvoda i neprimenjivanje zakona razvoda utiče na efikasnost odluke o sklapanju braka?

Za razvod bez zakona razvoda je

$$m_{ij} \to \infty \,,$$

a iz (5.13) važi:

$$\Delta \to -\infty \,.$$

Tada oportunitetni trošak

$$S + \int_{-\Delta}^{\infty} (-\Delta - w) dF_W(w) \to \infty \,.$$

Očigledno da su oportunitetni trošakovi iznad svog minimuma i odluka o sklapanju braka pod pretpostavkom razvoda bez zakona će biti neefikasna . Slično možemo izvesti i za unilateralni zakon razvoda. Iz ovakve perspektive jedino efikasno pravilo razvoda u modelu očekivane štete je razvod zajedničke saglasnosti.

5.2. Model očekivane štete sa razmatranjem pozicije dece

U prethodnom modelu smo zanemarili ulogu dece u braku, a u model sada uvodimo i decu. Moguće je da oni parovi koji gledaju u dalju budućnost razmišljaju o eventualnim bračnim slomovima i zbog toga na početku budu neodlučni po pitanju dece . Neodređenost uticaja dece na stil i način života na koji su supružnici naviknuti može da dovede do prirodnog otpora prema deci, međutim pretpostavićemo da će većina parova prevazići ovaj otpor. Takođe, gubitak koji nastaje kao posledica razvoda će često biti zakomplikovan osećajima krivice ili žaljenja koji se odnose na saznanje da će deci biti lošije sa jednim roditeljem nego što im je bilo u domaćinstvu sa oba roditelja.

Nezavisno od toga šta se dešava sa roditeljima i deca takođe osete gubitak nastao zbog razvoda. Kao posledica, pravilo očekivane šteta koje se primenjuje na oba roditelja ne mora biti efikasno ukoliko su u bračnu zajednicu uključena i deca.

I dalje posmatramo razvod koji se dešava uz zajedničku saglasnost roditelja (tj. dva igrača) po modelu očekivane štete, ali ćemo sada uključiti i decu. Iskoristićemo sve ono što smo predstavili u modelu razvoda zajedničke saglasnosti zasnovanom na očekivanoj šteti, a takođe osvrnućemo se i na odnose definisanih vrednosti u ova dva modela.

Prvo ćemo redefinisati *ex ante* prihode bračnih partnera:

$$S_i = \frac{y_i - c}{2} + \alpha_i u$$

$$S_j = \frac{y_i - c}{2} + \alpha_j u,$$

gde je:

u - funkcija sreće deteta;

α_i, α_j- mera nivoa altruizma[3] roditelja i, j u odnosu na decu.

Važi sledeće:

- ukoliko su oba roditelja sebična i ne uzimaju u obzir blagostanja dece ($\alpha_i = \alpha_j = 0$), ovaj model se svodi na model očekivne štete kada nismo u razmatranje uzeli poziciju dece.
- mi ćemo pretpostaviti da $\alpha_i > 0, \alpha_j > 0$, tj. da svaki roditelj vodi računa o nivou blagostanja svoje dece;
- moguć je asimetrični altruizam roditelja;
- $\alpha_i + \alpha_j < 1$, jer će u suprotnom, što ćemo videti kasnije, roditelji toliko brinuti o blagostanju dece i zbog toga doneti odluku da se ne razvedu;

[3] Nesebična briga za dobro drugih

Redefinišemo *ex post* prihode partnera i i j:

$$D_i = y_i - m_{ij} - c_i + \alpha_i v,$$
$$D_j = m_{ij} - c_j + \alpha_j v \ , \tag{5.14}$$

gde je v funkcija sreće dece kada su roditelji razvedeni.

Naša pretpostavka je da su deca srećnija ukoliko su roditelji u braku nego kada su razvedeni:

$$u > v \, .$$

Model očekivane štete zahteva da je:

$$S_j = D_j \, .$$

5.2.1. Efikasnost razvoda i braka u modelu očekivane štete sa prisustvom dece

U kontekstu modela dobijamo iznos štete:

$$m_{ij} = \frac{y_i + 2c_j - c}{2} + \alpha_j (u - v) \, . \tag{5.15}$$

Ovako definisana vrednost štete m_{ij}, za $\alpha_j > 0$, veća je od vrednosti koju smo definisali dok nismo uključili prisustvo dece u model:

$$\frac{y_i + 2c_j - c}{2} + \alpha_j (u - v) > \frac{y_i + 2c_j - c}{2},$$

jer sada roditelj j nakon svog odlaska iz domaćinstva mora da snosi i gubitak blagostanja dece koji nastaje nakon razvoda.

Sređivanjem izraza (5.14) i (5.15) dobijamo:

$$D_i = \frac{y_i + c - 2c_i - 2c_j}{2} + (\alpha_i + \alpha_j)v - \alpha_j u \,.$$

Razlika u diskrecionom prihodu za partnera i koji donosi odluku u razvodu sada je data sa:

$$\Delta = D_i - S_i = c - c_i - c_j - \left(\alpha_i + \alpha_j\right)(u - v)\,. \qquad (5.16)$$

Vrednost za Δ (5.16) će biti manja nego u modelu u koji nismo uključili decu:

$$c - c_i - c_j - \left(\alpha_i + \alpha_j\right)(u - v) < c - c_i - c_j < 0\,, \qquad (5.17)$$

a možemo koristiti sledeće argumente kako bismo podržali prethodni zaključak :

(a) za roditelje deca više nisu dobro koje je zanemareno u analizi i roditelj koji napušta domaćinstvo ima dodatni gubitak zbog zbrinjavanja dece;
(b) deca su manje srećna ako su roditelji razvedeni.
(c) ovakvo posmatranje je konzistentno sa intuicijom da su parovi sa decom manje skloni razvodu, *ceteris paribus*, Primetimo da je nevedeni efektat značajniji kako zajednički stepen altruizma $\alpha_i + \alpha_j$ raste.

Slučajna dobit za i koju ostvaruje u novom životu je :

$$c - c_i - c_j - \left(\alpha_i + \alpha_j\right)(u - v) + W\,,$$

i manja je nego u modelu bez prisustva dece:

$$c - c_i - c_j - \left(\alpha_i + \alpha_j\right)(u - v) + W < c - c_i - c_j + W\,.$$

Pravilo očkivano štete koje bi modelovalo razvod sa razmatranjem pozicije dece i dalje osigurava da partner koji ostaje u domaćinstvu ima nivo prihoda kao i pre razvoda, partner i se naravno odlučio na razvod jer njegov slučajni prihod u novom životu prevazilazi nivo prihoda koji je imao u braku. Međutim ovo nije dovoljno da bude postignut efikasan razvod, jer ni u jednom momentu nismo razmotrili poziciju dece koju smo uključili u model. Zbog toga efikasnost razvoda u ovom modelu zavisiće od toga da li je suma stepena altruizma manja ili veća od 1.

Ako je

- $\alpha_i + \alpha_j = 1$, tada očekivana šteta generiše efikasan razvod jer je je gubitak koji deca osete u potpunosti preuzet od strane roditelja.

- $\alpha_i + \alpha_j < 1$ (što i jeste naša pretpostavka) očekivana šteta generiše neefikasan razvod jer tada gubitak koju deca osete nije u potpunosti preuzet od strane roditelja već samo u delu koji odgovara $\alpha_i + \alpha_j$.

- $\alpha_i + \alpha_j > 1$ očekivana šteta takođe generiše neefikasan razvod jer bi tada gubitak koji deca osete na neki način bio precenjen od strane roditelja i u tom slučaju dolazi do manje razvoda, a razvodi koji bi trebalo da se dese neće se desiti zbog visokog nivoa štete koji nose sa sobom.

Prateći pristup iz prethodnog modela analiziraćemo i efikasnost braka. Definisaćemo očekivano plaćanje za i i j u braku kao očekivanu buduću vrednost:

- očekivano plaćanje za j je dato sa

$$M_j = S_j \,,$$

- očekivano plaćanje za i ja dato kao i u prethodnom modelu sa

$$M_i = S_i + \int_{-\Delta}^{\infty} (\Delta + w) dF_W(w) \,.$$

Zamenom definisanog diskrecionog prihoda kada uključimo decu dobijamo

$$M_i = S_i + \int_{-\Delta}^{\infty} \left(c - c_i - c_j - (\alpha_i + \alpha_j)(u - v) + w\right) dF_W(w) \,.$$

M_i je stiktno opadajuća funkcija sa porastom stepena altruizma $\alpha_i + \alpha_j$, što odgovara činjenici da su roditelji sa većim stepenom altruizma manje skloni da imaju decu zbog mogućih posledica u slučaju razvoda.

Na kraju možemo da donesemo i zaključak da li će brak u modelu roditeljskog staranja biti efikasan. Kako smo rekli da se diskrecioni prihod smanjuje u odnosu na diskrecioni prihod u prethodnom modelu, važi:

$$\int_{-\Delta}^{\infty} \left(c - c_i - c_j - (\alpha_i + \alpha_j)(u - v) + w\right) dF_W(w) < \int_{-\Delta}^{\infty} \left(c - c_i - c_j + w\right) dF_W(w)\,,$$

pa je

$$S - \int_{-\Delta}^{\infty} \left(c - c_i - c_j - (\alpha_i + \alpha_j)(u - v) + w\right) dF_W(w) > S - \int_{-\Delta}^{\infty} \left(c - c_i - c_j + w\right) dF_W(w)\,.$$

Oportunitetni troškovi u ovom slučaju rastu iznad nivoa koji je bio pretpostavljen u modela bez prisustva dece, tj svog minimuma, pa razvod zajedničke saglasnosti sa prisustvom dece generiše neefikasan brak.

5.3. Model idealno očekivane štete

Posmatraćemo sada razvod kada su sve tri strane, tj. sva tri igrača (roditelji i deca) saglasni da do razvoda dođe. Tada roditelj i koji odlazi mora da nadoknadi gubitak ne samo partneru j koji ostaje već i gubitak deci izazvan njegovom odlukom da napusti domaćinstvo.

Blagostanja partnera u braku definisaćemo na isti način kao u prethodnom modelu i poistovetiti ih sa diskrecionim prihodom koji ostvaruju u braku:

$$S_i = \frac{y_i - c}{2} + \alpha_i u,$$

$$S_j = \frac{y_i - c}{2} + \alpha_j u\,.$$

Blagostanje dece, u oznaci S_c merićemo nivoom sreće koju deca osećaju kada su im roditelji u braku:

$$S_c = u\,.$$

Ex ante blagostanje roditelja i dece nakon razvoda dato je sa:

$$D_i = y_i - m_{ij} - c_i - m_{ic} + \alpha_i v + \alpha_i m_{ic} = y_i - m_{ij} - c_i + \alpha_i v - (\alpha_i - 1)m_{ic},$$

$$D_j = m_{ij} - c_j + \alpha_j(v + m_{ic}),$$

$$D_c = v + m_{ic} \,,$$

gde je m_{ic} šteta koju deca dobijaju od strane roditelja i koji je odlučio da napusti domaćinstvo.

Bez gubitka opštosti, pretpostavićemo da su deca mnogo manje altruistična pema roditeljima nego obrnuto i pretpostavićemo da na blagostanje dece ne utiče nivo blagostanja njihovih roditelja.

Model očekivane štete razvoda zajedničke saglasnosti sada zahteva:

$$S_j = D_j,$$
$$S_c = D_c \,.$$

5.3.1.Efikasnost braka i razvoda u modelu idelano očekivane štete

Gubitak blagostanja dece izrazićemo kao:

$$D_c - S_c = m_{ic} + v - u \,.$$

Posmatraćemo ukupnu razliku u diskrecionim prihodima za roditelje i decu:

$$\bar{\Delta} = D_i + D_j + D_c - S_i - S_j - S_c.$$

Zamenom definisanih *ex ante* i *ex post* blagostanja roditelja i dece dobijamo:

$$\bar{\Delta} = \Delta - (u - v) + (\alpha_i + \alpha_j)m_{ic},$$

odnosno

$$\bar{\Delta} = c - c_i - c_j - (u - v) + (\alpha_i + \alpha_j)(m_{ic} - u + v). \tag{5.18}$$

Definisano $\bar{\Delta}$ (5.18) daje nam mogućnost da analiziramo na koji način vrednost štete m_{ic} utiče na model:

(a) Pošto govorimo o razvodu zajedničke saglasnosti mora da važi:

$$m_{ic} = u - v\ ,$$

jer je tada nivo blagostanja deteta na nivou na kojem je bilo i pre razvoda :

$$D_c = v + m_{ic} = u = S_c\ .$$

Kritičan nivo je dat sa $c - c_i - c_j - (u - v)$ i one je nezavisan od stepena altruizma.

(b) Rešenje kada je $m_{ic} < u - v$ ne vodi ka razvodu zajedničke saglasnosti jer je tada:

$$D_c < u = S_c,$$

i dečije blagostanje nakon razvoda je na nižem nivou nego pre razvoda. Ovakvo rešenje bi generisalo neefikasan razvod.

(c) Rešenje kada je $m_{ic} > u - v$ je neefikasno jer je tada:

$$D_c > u = S_c,$$

i može da se dogodi da se neki razvodi ne dese jer je kompenzacija deci postavljena na preveliki nivo, tj. ovaki razvodi bi nosili sa sobom preveliku štetu.

Uz pretpostavku da su deca kompenzovana tj, $S_c = D_c$ ukupan gubitak u diskrecionom prihodu za jedno domaćinstvo bi bio:

$$D_i + D_j - S_i - S_j = \Delta - (1 - \alpha_i - \alpha_j)m_{ic}.$$

Ako bi samo roditelji pregovarali o razvodu postavili bi $m_{ic} = 0$, dokle god je $\alpha_i + \alpha_j < 1$ jer će na taj način razliku u diskrecionom prihodu učiniti najvećom mogućom. Naravno ovo se odnosi na roditelja i jer je roditelju j prema postavkama modela u svakom slučaju garantovano blagostanje na nivou S_j.

Prateći pristup koji smo primenili u prvom modelu definisaćemo razliku diskreciong prihoda za odlazećeg partnera kao:

$$\Delta = D_i - S_i = \frac{y_i + c - c_j}{2} - \alpha_i(u - v) - m_{ij} - (1 - \alpha_i)m_{ic}.$$

Zbog kompenzacije dece efikasnost razvoda osigurana je dokle god je je:

$$\Delta = c - c_i - c_j - (u - v),$$

a zbog definisanog Δ mora da važi:

$$m_{ij} + (1 - \alpha_i)m_{ic} = \frac{y_i + 2c_j - c}{2} + (1 - \alpha_i)(u - v), \qquad (5.19)$$

Idealno očekivana šteta zadovoljava navedene uslove i samim tim generiše efikasan razvod. Međutim to nije jedino pravilo štete sa ovim svojstvom. Naime efikasan razvod će biti moguć i u slučaju kada deca nisu kompezovana ukoliko je zadovoljen uslov:

$$m_{ij} = \frac{y_i + 2c_j - c}{2} + (1 - \alpha_i)(u - v)\ ,$$

tj. ukoliko je partner j bio kompenzovan iznad očekivane štete

Obrazloženje ovog rezultata je sledeće: kada roditelj i koji napušta porodicu snosi gubitak roditelja j i dece, bez obira da li u formi idealne očekivane štete ili u formi kompenzovanja iznad očekivane štete za roditelja j, efikasnost razvoda je osigurana.

Preostalo nam je još da dođemo do zaključka da li je brak sa verovatnoćom razvoda zajedničke saglasnosti tri strane u modelu idelano očekivane štete efikasan? Prateći prrincip iz prethodna dva modela ukupno očekivano plaćanje u braku možemo definisati sada kao :

$$S_i + S_j + S_c + \int_{-\Delta}^{\infty} ((c - c_i - c_j - (u - v) + \big(\alpha_i + \alpha_j\big)(m_{ic} - u + v) + w)dF_W(w)\ .$$

Uz pretpostavku $\alpha_i + \alpha_j < 1$, lako možemo da uočimo da nivo idealno očekivane štete za decu $m_{ic} = u - v$ neće maksimizirati očekivano bračno plaćanje jer je podintegralana funkcija nenegativna rastuća i važi:

$$\int_{-\Delta}^{\infty} ((c - c_i - c_j + (\alpha_i + \alpha_j)(m_{ic} - u + v) + w)dF_W(w) >$$

$$\int_{-\Delta}^{\infty} ((c - c_i - c_j + \epsilon)dF(w) .$$

Nivo očekivane štete koji bi maksimizirao bračno plaćanje morao bi da bude iznad nivoa idealno očekivane štete za decu. Postavljanjem štete iznad nivo idealne očekivane dolazi do precenjivanja gubitka koji deca osete. Zbog toga brakovi koji bi trebali da se sklope po ovom modelu neće se sklopiti jer sa sobom nose preveliku štetu.

Dakle, brak sa verovatnoćom razvoda po modelu idealno očekivane štete će biti neefiaksan.

6. Dinamički model predviđanja

Model koji će u ovom delu rada biti predstavljen omogućiće nam predviđanje promena razvedene populacije. Dinamički model koji će biti prezentovan razvili su R. Duato i L. Jodar na primeru Španije [1]. Međutim model može da se primeni na bilo koju svetsku populaciju, a ovde će dati model biti primenjen na populaciju Republiku Srbije, na osnovu podataka koji su dostupni u Republičkom zavodu za satistiku [21].

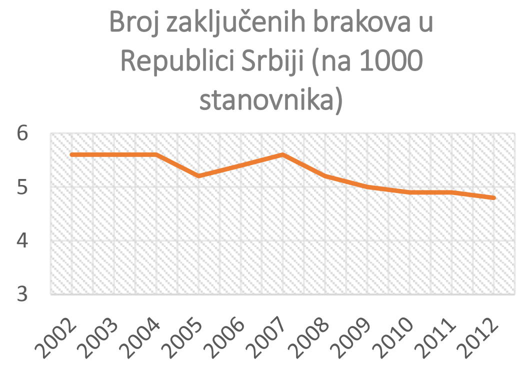
Okruženje pojedinca može da utiče na njegovo poimanje i stav o razvodu i braku, a brojna istraživanja rađena na temu braka i razvoda pokazuju da na brak i razvod značajno mogu da utiču ekonomske i socijalne prilike. U modelu će biti razmatran uticaj i socijalnih i ekonomskih prilika na razvod i brak. [7]

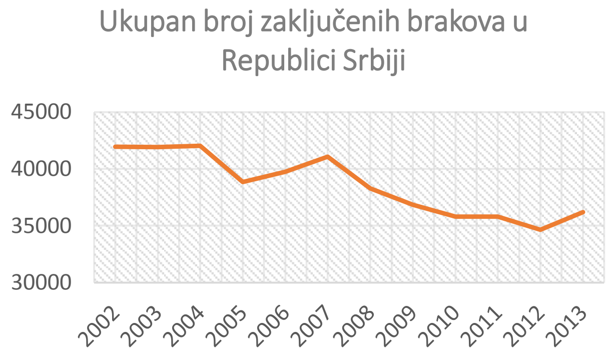
- Socijalne prilike – u model ćemo uključiti takozvanu stopu „zaraze“ koja proizilazi iz kontakta i uticaja razvedenih osoba koje uživaju u životu posla razvoda na osobe koje su u braku i utiče da venčane osobe preispitaju svoj brak i možda pod spomenutim uticajem donesu odluku u razvodu [8];

- Ekonomske prilike – predviđanje promena razvedene populacije izvršićemo u odnosu na različite ekonomske scenarije koje smo identifikovali sa stopom nezaposlenosti. Istraživanja pokazuju da broj brakova i razvoda zavisi i od ekonomske situacije. U okruženju stabilne i povoljne ekonomije dolazi do sklapanja većeg broja brakova i manje razvoda, međutim u situacijama recesije ili nestabilne ekonomije broj razvoda će biti veći a broj sklopljenih brakova manji.

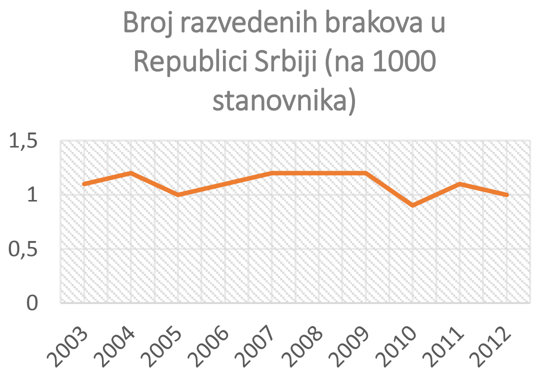
6.1. Brak i razvod u Republici Srbiji

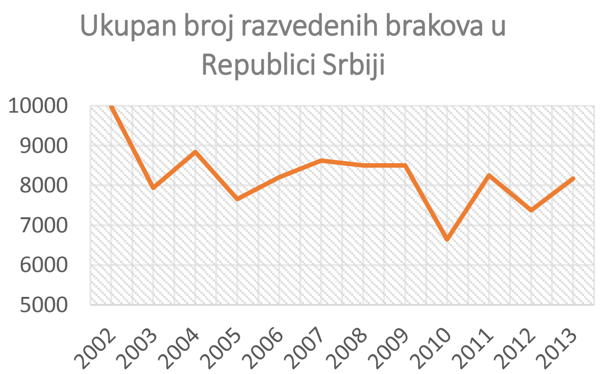
Grafici prikazuju na koji način se menjao broj sklopljenih i razvedenih brakova u Republici Srbiji [21].





Grafici 6.1 i 6.2





Grafici 6.3 i 6.4

6.2. Pretpostavke modela i model

U okviru neke posmatrane populacije obima N izdvajamo tri potpopulacije koje su predmet posmatranja našeg matematičkog modela:

- S - svi pripadnici populacije koji se izjašnjavaju kao samci;
- M- svi pripadnici populacije koji su venčani (u braku);
- D - svi pripadnici populacije koji su razvedeni.

Kako je svaka populacija jedan pokretan, dinamičan sistem njen obim i struktura se menjaju kroz vreme, a samim tim se menja i obim i struktura svake od uvedenih potpopulacija. Dakle, obim svake od uvedenih potpopulacije je vremenski zavisna promenljiva, pa ćemo koristiti oznake:

- $S_n -$ obim potpopulacije S na kraju godine n;
- $M_n -$ obim potpopulacije M na kraju godine n;
- $D_n -$ obim potpopulacije D na kraju godine n.

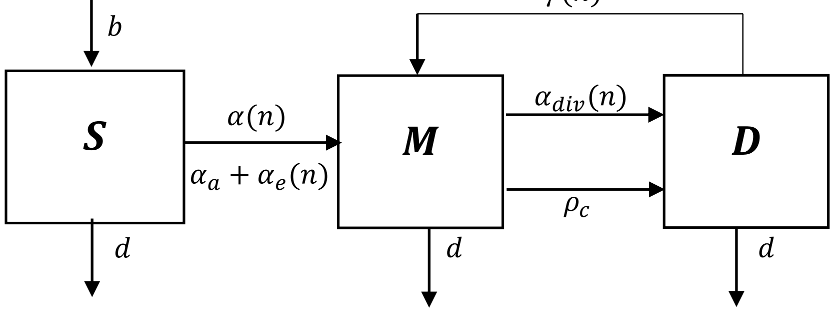
Na obime uvedenih potpopulacija osim nataliteta i mortaliteta (što je tipično kada govorimo o jednoj populaciji kao dinamičkom sistemu) utiču i međusobni stalni transferi između potpopulacija:

- samci iz potpopulacije S će se venčati i na taj način preći u potpopulaciju venčanih M;

- pripadnici potpopulacije M se razvode i na taj način prelaze u potpopulaciju razvedenih D, a zbog pretpostavljene stope zaraze koju ćemo kasnije definisati takođe doalzi do transfera iz potpopulacije M u D;

- postoji i mogućnost da neki od pripadnika potpopulacije razvedenih D ponovo vrate u potpopulaciju venčanih M.

Radi lakšeg postavljanja dinamičkog sistema koji će modelovati navedene pojave iz realnog života posmatraćemo dijagram transfera za spomenute potpopulacije [1]:



Dijagram 6.1

Na osnovu dijagrama postavljamo dinamički sistem. U pitanju je sistem diferencnih jednačina sa promenljivim koeficijentima koji treba da opiše promene obima potpopulacija S, M i D kroz vreme [1]:

$$S_{n+1} - S_n = b(S_n + M_n + D_n) - dS_n - (\alpha_a + \alpha_e(n))S_n$$

$$M_{n+1} - M_n = \big(\alpha_a + \alpha_e(n)\big)S_n - dM_n - \alpha_{div}(n)M_n + \gamma(n)D_n - \rho_c M_n$$

$$D_{n+1} - D_n = \alpha_{div}(n)M_n - dD_n - \gamma(n)D_n + \rho_c M_n$$

Parametri predstavljenog dijagrama i sistema su:

n - godina u kojoj vršimo posmatranje, a posmatramo period od m godina;

b - prosečna stopa rođenih u populaciji N;

d - prosečna stopa umrlih u populaciji N;

$\alpha(n)$ – stopa samaca (iz S) koji su sklopili brak u toku n-te godine;

α_a - prosečna stopa samaca koji su zvanično sklopili brak u posmatranom periodu od m godina;

$\alpha_e(n)$ - stopa samaca koji su sklopili brak usled ekonomskih efekata tokom n-te godine, a ovu stopu procenjujemo kao razliku razliku između realne stope samaca $\alpha(n)$ koji su sklopili brak u n-toj godini i prosečne stope α_a u posmatranom periodu od m godina;

$\alpha_{div}(n)$ - stopa venčanih koji su se razveli tokom n-te godine;

$\gamma(n)$- stopa razvedenih osoba koje su tokom n-te godine ponovo sklopili brak ;

ρ_c – stopa „zaraze“ nastala kao posledica kontakta razvedenih osoba sa venčanim, jer ukoliko je razvedena osoba zadovoljna svojim životom nakon razvoda može da podstakne venčane osobe u svojoj okolini koje sumnjaju u svoj brak da donesu odluku o razvodu.

Postavljeni matematički model daje nam mogućnost da odredimo obime potpopulacije samaca, venčanih i razvedenih unutar jedne populacije (npr. stanovništva jedne države, grada, pokrajine i sl.) za neku proizvoljnu godinu. Za takvu analizu potrebni su nam realni podaci o parametrima sistema za godinu u kojoj želimo da izvršimo procenu.

6.3. Primena modela na primeru Republike Srbije

Matematički model koji smo postavili biće demonstriran na primeru Republike Srbije.

- populacija na kojoj ćemo vršiti posmatranje je stanovništvo Republike Srbije;
- za početnu godinu posmatranja uzećemo 2002. godinu s obzirom da je u pitanju popisna godina i postoje podaci o broju stanovnika koji su se pri popisu 2002. godine izjasnili kao samci, venčani ili razvedeni;
- za krajnju godinu uzećemo 2013. godinu jer podaci koji su nam potrebni, a koji se odnose na 2014. godinu nisu još u potpunosti ažurirani;
- period za koji vršimo posmatranje je interval [2002,2013] , odnosno $m = 12$.

Vrednosti svih navedenih parametara, izuzev stope zaraze, mogu se odrediti na osnovu podatka koji su dostupni u bazi podataka Republičkog zavoda za statistiku Republike Srbije [21], a njihove vrednosti date su u narednim tabelama. Izračunavanja svih potrebnih parametara prikazana su u priključenom Excel File-u, dostupnom na http://jmp.sh/QwSCcxz:

n	$\alpha_e(n)$	$\alpha_{div}(n)$	$\gamma(n)$
2002	0,00059531	0,002662576	0,001321952
2003	0,000547573	0,002122176	0,001297687
2004	0,000531526	0,002370311	0,001349831
2005	-9,07198E-05	0,002059196	0,001182405
2006	0,000146595	0,002213836	0,001236445
2007	0,000510901	0,002336086	0,001272492
2008	-4,10139E-05	0,0023134	0,001134524
2009	-0,000349274	0,002323514	0,001096737
2010	-0,000497691	0,001822412	0,001018181
2011	-0,000357431	0,002296134	0,001038283
2012	-0,000791828	0,002070593	0,001024904
2013	-0,000203946	0,00230007	0,001106117

Tabela 6.1 Vrednosti parametra sistema

b	0,009666667
d	0,014041667
α_a	0,009161691

Tabela 6.2

Za analizu su nam potrebni obimi potpopulacija u početnoj godini posmatranja. Iz popisa 2002. godine imamo:

$$S_{2002} = 1\,540\,743$$

$$M_{2002} = 3\,820\,251$$

$$D_{2002} = 252\,793\ .$$

U odnosu na ukupan broj stanovnika koji je Republika Srbija imala po popisu iz 2002. godine, samci su činili 20,55 % ukupne populacije, venčani 50,95% , a razvedeni 3,37%.

U odnosu na zbirni obim potpopulacija $(S_{2002} + M_{2002} + D_{2002})$ samci su činili 27,45%, venčani 68,05% , a razvedeni 4,5%.
Kako je popis u Republici Srbiji rađen i 2011. godine ove podatke imamo i za tu godinu. Broj stanovnika koji su se izjasnili kao razvedeni je:

$$D_{2011}^{popis} = 303\,970\ .$$

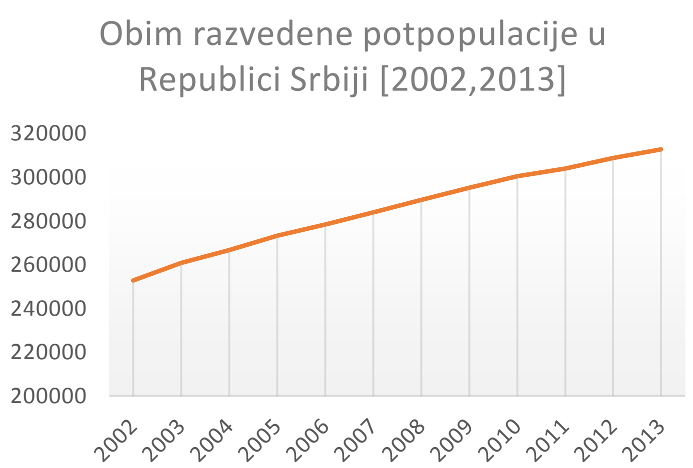
Potrebno je proceniti parametar ρ_c. Za sada, naša pretpostavka je da je ovaj parametar konstantan. Procenu ovog parametra izvršićemo tako što ćemo minimizirati kvadrat greške tj. razlike između stvarnog podatka koji imamo i podatka koji nam daje model:

$$\min_{\rho_c}(D_{2011}^{popis} - D_{2011}(\rho_c))^2.$$

Problem će biti rešen u programskom paketu *Mathematica* primenom Nelder-Mead metode minimizacije, postupak rešavanja dostupan na http://jmp.sh/1qp2bIS . Dobijamo:

$$\rho_c = 0{,}000482\ .$$

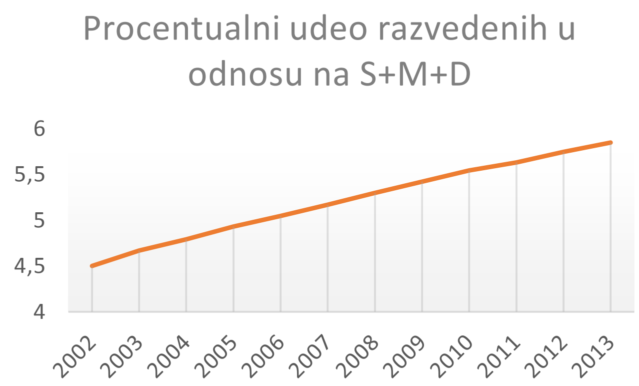
Na osnovu modela i dobijene procenjene stope zaraze možemo da odredimo obime razvedene potpopulacije za [2002,2013]:



Grafik 6.5

Prikazani grafik pokazuje na koji način se obim razvedene potpopulacije menjao od 2002 godine do 2013. godine i vidimo da je taj broj u stalnom porastu. Linija grafika koju smo dobili prolazi kroz dva realna podatka, za 2002. godinu i 2011. godinu, međutim kako Statistički zavod ne vodi podatke o broju razvedenih između dve popisne godine ne postoji mogućnost da izvršimo fitovanje modela realnim podacima.

Grafički ćemo prikazati i procentulani udeo broja razvedenih u odnosu na posmatrane potpopulacije, odnosno promenu od 4,5% do 5,85% učešća u posomatranim potpopulacijama:



Grafik 6.6

6.3.1. Predviđanje kretanja obima razvedene potpopulacije u Republici Srbiji

Obim razvedene potpopulacije D predvidećemo za interval [2014,2019]. Prvo, moramo predvideti vrednosti parametara koji figurišu u sistemu $\alpha_e(n), \alpha_{div}(n)\ i\ \gamma(n)$. Navedene parametre predvidećemo tako što ćemo posmatrati tri ekonomska scenarija koje smo identifikovali sa stopom nezaposlenosti.

Scenariji koje posmatramo su:

- L- blaži oblik recesija tokom čitavog intervala [2014,2018] koja dovodi do povećanja stope nezaposlenosti;
- V- blaži oblik recesije do polovine intervala nakon čega dolazi do progresivnog ekonomskog oporavka;
- PCS – veliki ekonomoski oporavak koji je praćen smanjenjem stope nezaposlenosti.

Procenjene vrednosti potrebnih parametara za svaki od scenarija date su u narednim tabelama:

	Scenario L			Scenario V		
Godina	$\alpha_e(n)$	$\alpha_{div}(n)$	$\gamma(n)$	$\alpha_e(n)$	$\alpha_{div}(n)$	$\gamma(n)$
2014	-0,000346109	0,00205783	0,00108566	-0,000346109	0,00205783	0,00108566
2015	-0,000322084	0,00209799	0,00109062	-0,000263694	0,002284488	0,00110999
2016	-0,000263694	0,00228448	0,00110999	-0,000322084	0,002097996	0,00109062
2017	-0,000410216	0,00232721	0,00110211	-0,000563952	0,001846735	0,00105524
2018	-0,000410216	0,00232721	0,00110211	-0,000595438	0,001918408	0,00106264
2019	-0,000346109	0,00205783	0,00108566	-0,000346109	0,00205783	0,00108566

Tabela 6.3

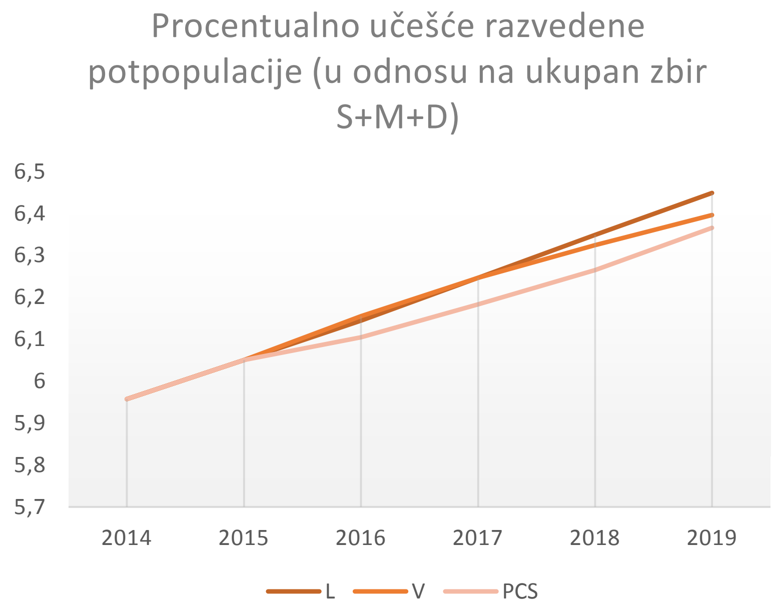
	Scenario PSC		
Godina	$\alpha_e(n)$	$\alpha_{div}(n)$	$\gamma(n)$
2014	-0,000346109	0,00205783	0,00108566
2015	-0,000595438	0,001918408	0,001062645
2016	-0,00037803	0,002377248	0,001128632
2017	-8,4686E-05	0,002497608	0,001174818
2018	0,000738309	0,0029	0,00122
2019	-0,000346109	0,00205783	0,00108566

Tabela 6.4

Sa procenjenim parametrima, uz pretpostavku konstantne stope zaraze možemo da procenimo obim razvedene potpopulacije za interval [2014,2019], ali i procenat koji razvedene potpopulacija čini u odnosu na ukupan zbir obima sve tri posmatrane potpopulacije:

Godina	L(%)	V(%)	PSC(%)
2014	5,958	5,958	5,958
2015	6,051	6,051	6,051
2016	6,144	6,13	6,1
2017	6,246	6,246	6,18
2018	6,349	6,32	6,26
2019	6,449	6,396	6,36

Tabela 6.5



Grafik 6.7

Kao zaključak možemo da iznesemo sledeće- predviđena procentulana zastupljenost razvedene potpopulacije u Republici Srbiji za period 2014-2019 godine kretala bi se od 5, 98% do 6,36%-6,45% u zavisnosti od toga koji ekonomski scenario bi se realizovao.

6.3.2. Osetljivost modela na promenu nivoa stope zaraze ρ_c

U dosadašnjoj analizi naša pretpostavka je bila da je stopa zaraze ρ_c konstantna. Sada ćemo videti na koji način bi promena stope zaraze uticala na rezultate našeg modela, odnosno koliko je model osetljiv na nivo stope zaraze.

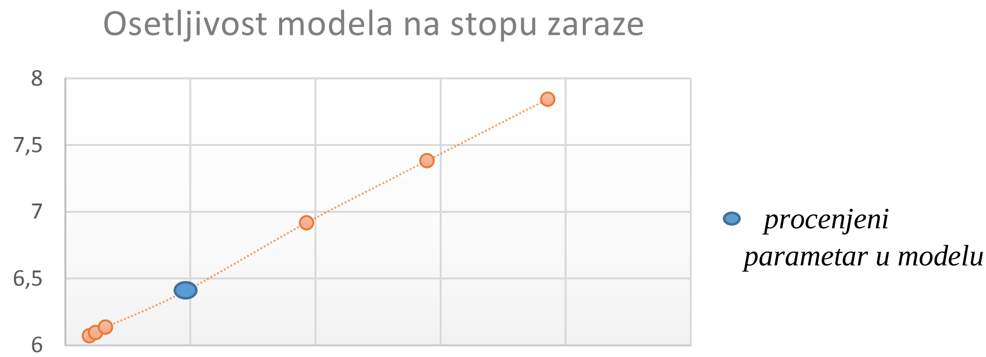
Posmatraćemo 2019. godinu i scenario blage recesije V. Pretpostavićemo da se stopa zaraze menja od $\frac{\rho_c}{5}$ do $4\rho_c$ i odredićemo procenat razvedenih u zavisnosti od parametra zaraze.

Tabelarno i grafički ćemo prikazati rezulatate uz oznaku one vrednosti parametra koju smo odredili za naš model:

ρ_c	$\% \, D_{2019}$
0,0000964	6,07
0,0001205	6,09
0,000160667	6,13
0,000482	**6,41**
0,000964	6,92
0,001446	7,38
0,001928	7,84

Tabela 6.6

Na ovaj način dobijamo odgovor na pitanje kako bi povećanje ili smanjenje stope zaraze uticalo na kretanje rezvedene potpopulacije u posmatranom scenariju V. Grafički:



Grafik 6.8

Možemo da zaključimo da se procenat razvedenih menja direktno proporcionalno sa promenom nivoa stope zaraze, što je bilo i očekivati na osnovu postavke modela. Vidimo da bi povećanje stope zaraze od čak 4 puta dovelo do povećanja procenta razvedene potpopulacije od 1,41 %, dok bi smanjene ovog parametra 5 puta dovelo do smanjenja smanjene procentulanog učešća razvedene potpopulacije od 0,33%.

Zaključak

U ovom master radu predstavljeni su modeli braka i razvoda. Matematičkim alatima modelovani su sociološki fenomeni. Korišćeni su različiti pristupi i pretpostavke, prvo za postavljenje problema braka ili razvoda a zatim i za njihovo tumačenje ili rešavanje. Na taj način dobijeni su mogući odgovori na sledeća pitanja:

- kako od svih potencijalnih partnera odabrati idealnog?
- da li sklopiti brak sa predodređenim idealnim partenrom?
- kako smanjiti šansu za razvod?
- pod kojim uslovima se odlučiti za razvod?
- kada je razvod efikasan?
- kada je brak efikasan?

Prvi predstavljeni model je pružio jednu od mogućnosti za izbor idealnog partnera od svih potencijalnih partnera. Po ovom modelu moguće je formirati idealne parove za brak tako da je maksimiziran ukupan bračni autput svih parova. Takođe postavljen je i uslov zahvaljujući kome će svaka osoba prisutna na bračnom tržištu odlučiti da li da sa predodređenim partnerom sklopi brak.

U sledećem modelu takođe je pretpostavljeno postojanje bračnog tržišta i izvršena je optimizacija tržišta tako da šansa za razvod parova bude minimalna. Ovaj model je široko primenljiv i optimizacija može da se vrši u odnosu na brojne kriterijume koji se na neki način mogu kvantifikovati i kategorički klasifikovati. Model je donekle ilustrovan na primeru, i zahvaljujući modelu došli smo do zaključka o optimalnoj alokaciji bračnih partnera u posmatranom primeru.

Model razvoda koji je predstavljen u radu bavio se pitanjem efikasnosti braka i razvoda pod različitim uslovima. Kao najznačajniji rezultat ovog modela mogao bi se istaći zaključak da je u većini slučajeva nemoguće istovremeno postići efikasan razvod i efikasan brak, te da postoji stalna trampa između efikasnog razvoda i efikasnog braka.

Dinamički model predviđanja je takođe široko primenljiv, jer bi se uz određene modifikacije mogao primeniti na bilo koju populaciju. Ovaj model omogućio nam je da izvršimo predviđanje i zaključimo na koji način će se menjati broj razvedenih na teritoriji Republike Srbije.

Literatura

[1] Duato R. ,Jodar L. , *Mathematical Modelling of spread divorce in Spain,* Mathematical and Computer Modelling, Volume 57, Issues 7-8, 2013, 1732-1737

[2] Bowles Roger, Garoupa Nuno, *Household dissolution, child care and divorce law,* International Review of Law and Economics, Volume 202, 2013, pages 495-510.

[3] Nguyen Vi Cao, Emmanuel Fragniere, Jaques-Antoine Gauthier, Marlene Spin, Eric D. Widemer, *Optimizing the marriage market: An application of the linear assigment model,* European Journal of Operational Research 202, 2010, pp. 547-543.

[4] Becker Gary, *A theory of marriage: Part I,* Journal of Political Economy 81, 1973, 813-846.

[5] Becker Gary., *A theory of marriage: Part II,* Journal of Political Economy 82, 1974, 511-526

[6] Bolin K., *The marriage Contract and efficient rule for spousal support,* International Review of Law and Economics 14, 1994, 493-502.

[7] Becker G. , Landes E., Michaels R., *An economic analisis of marriage of marriage instability,* Journal of Political Economy 85, 1977, 1141-1187.

[8] C.S. Lewis, *The Letters,* Harper Collins, New York,2001

[9] Garland Robert, *The Greek way of life,* New York: Cornel University Press, 1990, pp. 119-120.

[10] Douglas J. Brewer, Emily Teeter, *Egypt and the Egyptians,* Cambrige University Press, 2001, Issue 7.

[11] Treggiari Susan, *Roman marriage,* New York, Oxford University Press, 1991

[12] Milić Anđelka, *Sociologija porodice (kritika i izazovi)* , Čigoja štampa, Beograd, 2001.

[13] Kuljić Rajko, *Sociologija,* Beograd, M.B. Press, 1999

[14] Urošević Branko, *Finansijska ekonomija,* Centar za izdavačku delatnost Ekonomskog Fakulteta u Beogradu, 2008, 7-30.

[15] Bronson R., *Theory and Problems of Operations Research,* Schaums outline series, McGraw-Hill Book, 1982.

[16] Wuensch Karl, Binary *Logistic Regression with SPSS*, East Carolina University, 2014.

[17] Šuvakov T., Šagi A., Mikroekonomija, sedmo izdanje, Eknomski fakultet, Subotica, 2004.

[18] Pavličić D., Teorija odlučivanja, Ekonomski fakultet, Beograd, 2004.

[19] D. Rajter Ćirić, *Verovatnoća,* Drugo dopunjeno izdanje, PMF, Novi Sad, 2009.

[20] *Porodični zakon*, Službeni glasnik RS, broj 18/2005.

[21] http://webrzs.stat.gov.rs/WebSite/

Kratka biografija

Tamara Nonković rođena je 30. aprila 1989. godine u Novom Sadu. Gimnaziju „Sava Šumanović“ u Šidu upisuje 2004. godine i završava je 2008. godine.

Iste godine upisuje osnovne sudije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer primenjena matematika (modul- Matematika finansija). Osnovne studije završava u junu 2011. godine sa prosečnom ocenom 9,64 i stiče zvanje Matematičar primenjene matematike.

2011. godine upisuje master studije primenjene matematike na istom fakultetu. Sve predviđene ispite položila je zaključno sa januarskim ispitnim rokom 2013. godine čime je stekla uslov za odbranu master rada.

Više puta je nagrađivana za uspeh u toku studiranja od strane Prirodno- matmatičkom fakulteta, kao i Univerziteta u Novom Sadu. Takođe je bila stipendista Fonda za mlade talente.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije:Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Tamara Nonković
AU

Mentor: prof. dr Zorana Lužanin
MN

Naslov rada: Modeli braka i razvoda
NR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: s/e
JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2015.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Prirodno-matematički fakultete, Departman za matematiku i informatiku, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
MA

Fizički opis rada: (6, 62, 21, 10, 0, 11, 0)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Matematičko modeliranje
ND

Ključne reči: brak, razvod, bračno tržište, efikasnost braka, efikasnost razvoda
PO
UDK

Čuva se : Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod:
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 11.06.2013.
DP

Datum odbrane: septembar 2015.
DO

Članovi komisije:
KO
Predsednik: prof. dr Nataša Krejić
Član: prof. dr Zorana Lužanin
Član: prof. dr Danijela Rajter Ćirić

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Idenification number:
INO

Document type:Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master’s thesis
CC

Author: Tamara Nonković
AU

Mentor: Zorana Lužanin, Ph. D.
MN

Title: Models of marriage and divorce
TI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract: English
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2015.
PY

Publisher: Autor’s reprint
PU

Publ.place: Novi Sad, Deartment of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovica 4
PP

Physical description: (6, 61, 21, 10, 0, 11, 0)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Mathematical Modelling
SD

Subject/Key word: Marriage, Divorce, Marriage Market, Efficiency of marriage, Efficiency of divorce
SKW

UC:

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi
HD

Note:
N

Abstract:
AB

Accepted by the Scientific Board: 11.06.2013.
ASB

Defended: September, 2015
DF

Thesis defend board:
DB
President: prof. dr Nataša Krejić
Member: prof. dr Zorana Lužanin
Memeber: prof. dr Danijela Rajter Ćirić