Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku

Svetlana Vidaković

Višedimenzionalni kredibilitet visoke preciznosti i njegove primene u aktuarstvu

Master rad

Mentor:

Prof. dr Dora Seleši

2019, Novi Sad

Predgovor

Poslovanje osiguravajućih kompanija se zasniva na aktuarskoj matematici, čiji je zadatak da na osnovu matematičkih metoda koje se oslanjaju na teoriju verovatnoće i statistike odredi premiju i nivo garantnih rezervi.

Tema ovog rada je teorija kredibiliteta koja služi za unapređivanje postupka određivanja premije polise osiguranja. Ona predstavlja skup alata koji omogućava osiguravajućoj kući da izvrši procenu budućeg rizika ili grupe rizika. U praksi često u okviru jedne grane osiguranja postoji više rizika, zato aktuari prilikom određivanja premije formiraju tarifne grupe, i za svaku grupu treba posebno odrediti premiju. Premija za određenu grupu koja se dobija na osnovu podataka iz te grupe naziva se individualna premija, dok se premija dobijena na osnovu podataka iz cele grane naziva manuelna premija. Osiguravajuća kompanija često ima na rapolaganju prilično veliki broj statističkih podataka koji se odnose na kolektivni rizik. Međutim, ove informacije su manje ili više ograničene za određivanje pojedinačnih rizika, zbog postojanja velikog broja tarifnih grupa. Osiguravač obično ima malo podataka o pojedinačnim rizicima i zato treba koristiti oba izvora podataka. To je osnovna ideja teorije kredibiliteta, a njen cilj je određivanje faktora kredibiliteta koji govori u kojoj meri premija kredibiliteta zavisi od individualne, a u kojoj od manuelne premije.

U uvodnom delu rada dati su osnovni pojmovi iz teorije verovatnoće, statistike i matrica, neopohodni za praćenje glavnih delova rada. U trećoj glavi izložen je postupak određivanja Bejzove premije kredibiliteta. Kako se Bejzova premija teško računa u praksi jer zahteva podatke o raspodelama, dati su modeli koje je aproksimiraju. Prvi i najjednostavniji model koji aproksimira Bejzovu premiju je Bilmanov model iz 1967. godine. Praktično poboljšanje ovog modela je Bilman-Štraubov model. Njegova glavna uloga je da odredi premiju kredibiliteta, a takođe se može koristiti i za određivanje frekvencije šteta. Pored toga, Bilman-Štraubov model predstavlja osnovu za formiranje višedimenzionalnih modela teorije kredibiliteta.

Cilj ovog rada je da se upoznamo sa višedimenzionalnim kredibilitetom visoke preciznosti. Prednost višedimenzionalnog kredibiliteta je što uzima u obzir više faktora koji utiču na frekvenciju i iznose šteta, zahvaljujući kojima se pojavljuju homogne tarifne ocene koje omogućavaju pravednije određivanje premije.

U četvrtoj glavi izložen je višedimenzionalni Bilmanov model, kao i aproksimacija tog modela, višedimenzionalni neparametarski Bilmanov model. Na primeru predikcija stopa mortaliteta data je praktična primena višedimenzionalnog neparametarskog Bilmanovog modela. Slično, u petoj glavi izloženi su višedimenzionalni Bilman-Štraubov i višedimenzionalni neparametarski Bilman-Štraubov model. Primena pomenutog modela prikazana je na primeru predviđanja iznosa šteta (neto premija) kasko osiguranja vozila, kao i na primeru predviđanja količnika šteta na osnovu sopstvenih podataka kompanije, ali i zajedničkih podataka drugih kompanija.

Veliku zahvalnost dugujem svojoj mentorki, prof.dr Dori Seleši, na ideji za ovaj master rad, kao i na trudu i zalaganju prilikom realizacije rada. Takođe, zahvaljujem se profesorici Sanji Rapajić i profesorici Nataši Krklec Jerinkić na svim korisnim savetima i sugestijama tokom pisanja rada.

Veliko hvala i svim dragim osobama koji su bili uz mene tokom studiranja i koje su učestvovali u stvaranju svih lepih uspomena koje su obeležile ovaj deo mog života.

Na kraju, najveću zahvalnost dugujem svojoj porodici, roditeljima, bratu i sestri koji su uvek verovali u mene i bili najveća podrška u svim mojim izborima i odlukama.

Novi Sad, april 2019. *Svetlana Vidaković*

Sadržaj

Glava 1

Uvod

1.1 Osnovni pojmovi iz verovatnoće

Definicija 1.1.1. *(Prostor verovatnoća) Prostor verovatnoća koji zadovoljava aksiome Kolmogorova označavaćemo sa* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *.*

Definicija 1.1.2. *(Slučajna promeljiva) Preslikavanje* $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *je slučajna promenljiva nad prostorom verovatnoća* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *ako* $X^{-1}(S) \in \mathcal{F}$ *za svako* $S \in \mathcal{B}$*, gde je* $\mathcal{B}$ *Borelovo* $\sigma-$*polje nad* $\mathbb{R}$*.*

Definicija 1.1.3. *Za svako* $S \in \mathcal{B}$*, funkcija:*

$$P_X(S) = P\{X \in S\} = P\{\omega \,|\, X(\omega) \in S\} = P(X^{-1}(S)),$$

zove se raspodela verovatnoća slučajne promenljive X*.*

Dve najpoznatije vrste slučajnih promenljivih su:

- diskretne slučajne promenljive,
- apsolutno neprekidne slučajne promenljive.

Definicija 1.1.4. *Slučajna promenljiva* X *je diskretna ako postoji prebrojiv skup brojeva* R_X *takav da je* $P\{X \in R_X\} = 1$*, odnosno ako je skup slika od* X *najviše prebrojiv skup.*

Zakon raspodele diskretne slučajne promenljive X zapisujemo u sledećem obliku:

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots \\ p(x_1) & p(x_2) & \dots \end{pmatrix},$$

gde su $x_1, x_2, \dots$ moguće vrednosti slučajne promenljive X, a $p(x_i)$ verovatnoća da slučajna promenljiva X primi vrednost x_i, odnosno

$$p(x_i) = P\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = x_i\} = P\{X = x_i\}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Definicija 1.1.5. *Funkcija raspodele slučajne promenljive X je funkcija $F_X(x) : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ definisana sa*

$$F_X(x) = P_X((-\infty, x)) = P\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) < x\} = P\{X < x\}.$$

Definicija 1.1.6. *Slučajna promenljiva X je apsolutno neprekidnog tipa ako postoji nenegativna integrabilna funkcija $\varphi_X(x)$, $-\infty < x < \infty$, takva da za svaki skup $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ važi:*

$$P\{X \in S\} = \int_S \varphi_X(x)\,\mathrm{d}x.$$

Funkcija $\varphi_X(x)$ zove se funkcija gustine slučajne promenljive X.
Lako se može pokazati da važi:

$$F_X'(x) = \varphi_X(x).$$

Koristićemo sledeće oznake za numeričke karakteristike slučajne promenljive X:
$\mathrm{E}(X)$ - očekivanje slučajne promenljive X,
$D(X) = \mathrm{Var}(X)$ - disperzija (varijansa) slučajne promenljive X.

Podsetimo se numeričkih karakteristika koje opisuju zavisnost izmedju slučajnih promenljivih X i Y.

Definicija 1.1.7. *Kovarijansa slučajne promenljive (X,Y) je*

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E[(X - E(X))((Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Definicija 1.1.8. *Koeficijent korelacije slučajne promenljive (X,Y) je:*

$$\rho_{XY} = \mathrm{cov}(X^*, Y^*) = \mathrm{cov}\left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}, \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}\right),$$

gde su X^* i Y^* standardizovane slučajne promenljive.

Napomenimo da važi sledeće:

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)}{\sqrt{D(X)\,D(Y)}} = \frac{\mathrm{Cov}(XY)}{\sqrt{D(X)\,D(Y)}}. \tag{1.1}$$

1.2 Uslovne raspodele

Posmatrajmo dvodimenzionalnu slučajnu promenljivu (X, Y). Ako pretpostavimo da nam je poznata neka informacija o Y, pitamo se da li to utiče na raspodelu slučajne promenljive X.

Definicija 1.2.1. *Uslovna raspodela za X pri uslovu $\{Y \in S\}$ je funkcija:*

$$F_X(x \,|\, \{Y \in S\}) = \frac{P(\{X < x\} \cap \{Y \in S\})}{P\{Y \in S\}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

gde događaj $\{Y \in S\}$, $S \in \mathcal{B}$ ima pozitivnu verovatnoću realizacije.

Neka je (X, Y) diskretna slučajna promenljiva sa raspodelom verovatnoća $p(x_i, y_j)$, $i, j = 1, 2, \dots$ i neka je $P\{Y = y_j\} = q(y_j) > 0$. Tada je uslovna raspodela za X pri uslovu $\{Y = y_j\}$:

$$p(x_i \,|\, y_j) = \frac{P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})}{P\{Y = y_j\}} = \frac{p(x_i, y_j)}{q(y_j)} \quad i = 1, 2, \dots$$

Neka je (X, Y) apsolutno neprekidna slučajna promenljiva sa funkcijom gustine $\varphi_{(X,Y)}(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ i neka je $\varphi_Y(y) > 0$. Tada je uslovna funkcija gustine za X pri uslovu $\{Y = y\}$:

$$\varphi_{(X|Y)}(x|y) = \frac{\varphi_{(X,Y)}(x, y)}{\varphi_Y(y)}, \, x \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Napomena 1.2.1. *Ako su X i Y nezavisne slučajne promenljive tada važi:*

$$\varphi_{(X,Y)}(x, y) = \varphi_X(x)\, \varphi_Y(y).$$

Jednakost (1.2) možemo zapisati i na sledeći način:

$$\varphi_{(X,Y)}(x, y) = \varphi_{(X|Y)}(x|y)\, \varphi_Y(y). \tag{1.3}$$

Napomena 1.2.2. *Neka je (X, Y) dvodimenzionalna apsolutno neprekidna slučajna promenljiva. Tada je marginalna gustina za X, $\varphi_X(x)$ data sa:*

$$\varphi_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{(X,Y)}(x, y)\, \mathrm{d}y. \tag{1.4}$$

Iz (1.3) i (1.4) dobijamo da važi:

$$\varphi_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{(X|Y)}(x|y)\, \varphi_Y(y)\, \mathrm{d}y. \tag{1.5}$$

1.3 Uslovno očekivanje

Neka je (X,Y) diskretna slučajna promenljiva sa raspodelom verovatnoća $p(x_i,y_j)$, $i,j=1,2,\dots$

Uslovno očekivanje slučajne promenljive X pri uslovu $\{Y=y_j\}$ je:

$$\mathrm{E}(X\,|\,Y=y_j)=\sum_i x_i\cdot p(x_i\,|\,y_j)=\frac{1}{q(y_j)}\sum_i x_i\cdot p(x_i,y_j),$$

gde je $q(y_j)=P\{Y=y_j\}>0$.

Sada nas zanima šta je uslovno očekivanje slučajne promenljive X u odnosu na slučajnu promenljivu Y.

Neka je $R_X=\{y_1,y_2,\dots\}$ skup različitih vrednosti diskretne slučajne promenljive Y. Dalje, neka je:

$$A_i=\{\omega\,|\,Y(\omega)=y_i\},\quad i=1,2,\dots$$

Definicija 1.3.1. *Uslovno očekivanje slučajne promenljive X u odnosu na slučajnu promenljivu Y je:*

$$\mathrm{E}(X\,|\,Y):\begin{pmatrix}\mathrm{E}(X\,|\,A_1) & \mathrm{E}(X\,|\,A_2) & \dots\\ P(A_1) & P(A_2) & \dots\end{pmatrix}.$$

Iz definicije vidimo da je uslovno očekivanje slučajne promenljive X u odnosu na slučajnu promenljivu Y diskretna slučajna promenljiva.

Posmatrajmo sada slučaj kada je (X,Y) dvodimenzionalna apsolutno neprekidna slučajna promenljiva sa funkcijom gustine $\varphi_{(X,Y)}(x,y)$ gde $-\infty<x,y<\infty$.

Uslovno očekivanje slučajne promenljive X pri uslovu $\{Y=y\}$ je:

$$\mathrm{E}(X\,|\,Y=y)=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot\varphi_{(X|Y)}(x\,|\,y)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\varphi_Y(y)}\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot\varphi_{(X,Y)}(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

Napomena 1.3.1. *Očekivanje slučajne promenljive X u odnosu na slučajnu promenljivu Y,* $\mathrm{E}(X\,|\,Y)$ *je slučajna promenljiva koja ima realizovane vrednosti* $\mathrm{E}(X\,|\,Y=y)$*, odnosno za $f:\mathbb{R}\longmapsto\mathbb{R}$ važi:*

$$\mathrm{E}(X\,|\,Y)=f(Y).$$

Sada pokazujemo dve teoreme koje ćemo kasnije koristiti.

Teorema 1.3.1. *Neka su X, Y dve proizvoljne slučajne promenljive. Tada važi:*

$$\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(\mathrm{E}(X \mid Y)).$$

Dokaz. Za apsolutno neprekidnu slučajnu promenljivu pokazujemo da je desna strana jednaka levoj. Za diskretnu slučajnu promenljivu se radi slično.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{E}(X \mid Y)) &= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{E}(X \mid Y = y) \cdot \varphi_Y(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \varphi_{(X \mid Y=y)}(x \mid y)\,\mathrm{d}x \right) \cdot \varphi_Y(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{(X \mid Y=y)}(x \mid y) \cdot \varphi_Y(y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{(X,Y)}(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \mathrm{E}(X).
\end{aligned}$$

□

Teorema 1.3.2. *Neka su X, Y dve proizvoljne slučajne promenljive. Tada važi:*

$$D(X) = D\left(\mathrm{E}(X \mid Y)\right) + \mathrm{E}\left(D(X \mid Y)\right).$$

Dokaz. Iz definicije varijanse znamo da važi:

$$D(X \mid Y) = \mathrm{E}(X^2 \mid Y) - (\mathrm{E}(X \mid Y))^2.$$

Primenom očekivanja na obe strane dobija se sledeća jednakost:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(D(X \mid Y)) &= \mathrm{E}(\mathrm{E}(X^2 \mid Y)) - \mathrm{E}\left((\mathrm{E}(X \mid Y))^2\right) \\
&= \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}((\mathrm{E}(X \mid Y))^2),
\end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned}
D(\mathrm{E}(X \mid Y)) &= \mathrm{E}((\mathrm{E}(X \mid Y))^2) - (\mathrm{E}(\mathrm{E}(X \mid Y)))^2 \\
&= \mathrm{E}((\mathrm{E}(X \mid Y))^2) - (\mathrm{E}(X))^2.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Sabiranjem jednakosti (1.6) i (1.7) dobijamo sledeće:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(D(X \mid Y)) + D(\mathrm{E}(X \mid Y)) &= \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}((\mathrm{E}(X \mid Y))^2) + \mathrm{E}((\mathrm{E}(X \mid Y))^2) - (\mathrm{E}(X))^2 \\
&= D(X).
\end{aligned}$$

□

1.4 Neparametarske nepristrasne ocene

Definicija 1.4.1. *Neka je $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ prost slučajan uzorak obima n slučajne promenljive X i neka je θ nepoznati parametar raspodele za X. Statistika $\hat{\theta} = f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ je nepristrasna (centrirana) ocena parametra θ ako je:*

$$\mathrm{E}(\hat{\theta}) = \theta.$$

Sada ćemo pokazati lemu koju ćemo kasnije koristiti.

Lema 1.4.1. *Ako je $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ prost slučajan uzorak, tada za proizvoljnu konstantu μ važi:*

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\mathrm{E}\left(X_i - \mu\right)^2 - \mathrm{E}\left(\overline{X} - \mu\right)^2\right). \tag{1.8}$$

Dokaz. Trivijalno primenom sledeće jednakosti:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 &= \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu + \mu - \overline{X})^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 + 2(\mu - \overline{X})n(\overline{X} - \mu) + n(\mu - \overline{X})^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}((X_i - \mu)^2 - (\mu - \overline{X})^2).
\end{aligned}$$

□

U teoriji kredibiliteta nepristrasne ocene često imaju značajnu ulogu. Sledeća teorema daje nepristrasne ocene za očekivanje i varijansu.

Teorema 1.4.1. *Neka su $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ nezavisne slučajne promenljive, koje ne moraju imati istu raspodelu, sa istim očekivanjem $\mu = \mathrm{E}(X_i)$ i istom varijansom $\upsilon = D(X_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Tada su:*

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

$$\hat{\upsilon} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \tag{1.9}$$

nepristrasne ocene za očekivanje μ i varijansu υ, redom.

Dokaz. Prvo pokazujemo da je $\overline{X}$ nepristrasna ocena za μ

$$\mathrm{E}(\overline{X}) = \mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(X_i) = \mu.$$

Primetimo da zbog nezavisnosti $X_1, \ldots, X_n$ važi:

$$D\left(\overline{X}\right) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{\upsilon}{n}.$$

Primenom Leme 1.4.1 dobija se da je $\hat{\upsilon}$ nepristrasna ocena za varijansu υ.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2\right) &= \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right) - n\,\mathrm{E}\left(\left(\overline{X}-\mu\right)^2\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\left((X_i-\mu)^2\right) - n\,D\left(\overline{X}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} D(X_i) - n\,\frac{\upsilon}{n} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n}\upsilon\right) - \upsilon \\
&= (n-1)\,\upsilon.
\end{aligned}$$

Deljenjem obe strane sa $n-1$ dobijamo:

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2\right) = \mathrm{E}\left(\hat{\upsilon}\right) = \upsilon.$$

□

Glava 2

Matrice

2.1 Definicija i operacije sa matricama

Definicija 2.1.1. *Za prirodne brojeve* $m, n \in \mathbb{N}$*, matrica formata* $m \times n$ *nad poljem* F *je svako preslikavanje* $\{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \longrightarrow F$.

Slike a_{ij} parova (i, j), $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ nazivaju se elementima matrice. Matricu $\mathbf{A}$ formata $m \times n$ uglavnom prikazujemo u obliku pravougaone tablice sa m vrsta i n kolona:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matrica $\mathbf{A}$ se skraćeno označava sa $[a_{ij}]_{m \times n}$ ili samo sa $[a_{ij}]$.
Niz $(a_{i1}, \dots, a_{in})$ je $i-$ta vrsta matrice $\mathbf{A}$, dok je niz $(a_{1j}, \dots, a_{mj})$ $j-$ta kolona matrice $\mathbf{A}$.

Matrica formata $n \times n$ naziva se *kvadratna matrica* reda n.
Kvadratna matrica $\mathbf{A}$ reda n je *dijagonalna matrica* ako je $a_{ij} = 0$ za svako $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, n$.
Dijagonalna matrica reda n čiji su svi dijagonalni elementi jednaki 1 naziva se *jedinična matrica* reda n i označava se sa $\mathbf{E}_n$ ili $\mathbf{E}$.
Matrica formata $m \times n$ čiji su svi elementi jednaki 0 naziva se *nula matrica* i označava se sa $\mathbf{O}_{m \times n}$ ili samo $\mathbf{O}$.

Sa $F^{m,n}$ označavaćemo skup svih matrica formata $m \times n$ nad poljem F.

Definicija 2.1.2. *Neka su* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{B}$ *matrice takve da važi:* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in F^{m,n}$, $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $\mathbf{B} = [b_{ij}]$. *Zbir matrica* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{B}$*, u oznaci* $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ *je matrica* $\mathbf{C}$ *takva da važi:*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Za $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in F^{m,n}$ očigledno važe komutativnost i asocijativnost sabiranja matrica, odnosno važi:

- $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
- $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$

Definicija 2.1.3. *Neka je $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in F^{m,n}, \alpha \in F$. Proizvod skalara α i matrice $\mathbf{A}$, u oznaci $\alpha\mathbf{A}$ je matrica $\mathbf{B}$ takva da važi:*

$$b_{ij} = \alpha a_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Definicija 2.1.4. *Neka su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ matrice takve da važi: $\mathbf{A} \in F^{m,n}$, $\mathbf{B} \in F^{n,p}$, $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $\mathbf{B} = [b_{ij}]$. Proizvod matrica $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$, u oznaci $\mathbf{AB}$ je matrica $\mathbf{C}$ takva da važi:*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Za ovako definisano množenje matrica važe sledeće osobine.

Teorema 2.1.1. *Neka za matrice $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ važi sledeće: $\mathbf{A} \in F^{m,n}, \mathbf{B} \in F^{n,p}$, $\mathbf{C} \in F^{p,q}$. Tada važi:*

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}.$$

Dokaz. Prvo pokažimo da su $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ i $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ istih dimenzija.

Ako $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$, $\mathbf{B} = [b_{np}]_{n\times p}$, $\mathbf{C} = [c_{ij}]_{p\times q}$, tada: $\mathbf{AB} = [d_{ij}]_{m\times p}$, $\mathbf{BC} = [f_{ij}]_{n\times q}$ i $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = [g_{ij}]_{m\times q}$, $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = [h_{ij}]_{m\times q}$.

Sada pokazujemo da je $g_{ij} = h_{ij}$, gde $i = 1, \ldots m$, $j = 1, \ldots q$.

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} f_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \left(\sum_{l=1}^{p} b_{kl} c_{lj} \right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} a_{ik} b_{kl} c_{lj},$$

$$h_{ij} = \sum_{l=1}^{p} d_{il} c_{lj} = \sum_{l=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kl} \right) c_{lj} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} a_{ik} b_{kl} c_{lj}.$$

□

Teorema 2.1.2. *Za svako $\mathbf{A} \in F^{m,n}$, $\mathbf{B}, \mathbf{C} \in F^{n,p}$ važi:*

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}.$$

Analogno, za svako $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in F^{m,n}$, $\mathbf{C} \in F^{n,p}$ važi:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}.$$

Dokaz. Prvo pokažimo da su matrice $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})$ i $\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$ istih dimenzija.

Ako $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$, $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{n\times p}$, $\mathbf{C} = [c_{ij}]_{n\times p}$, tada: $\mathbf{AB} = [d_{ij}]_{m\times p}$, $\mathbf{AC} = [f_{ij}]_{m\times p}$, $\mathbf{B}+\mathbf{C} = [g_{ij}]_{n\times p}$ i $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = [h_{ij}]_{m\times p}$, $\mathbf{AB}+\mathbf{AC} = [s_{ij}]_{m\times p}$.

Sada pokazujemo da je $h_{ij} = s_{ij}$, gde $i = 1, \dots m$, $j = 1, \dots p$.

$$h_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}g_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj}+c_{kj}) = \sum_{k=1}^{n}(a_{ik}b_{kj}+a_{ik}c_{kj}),$$

$$s_{ij} = d_{ij}+f_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(a_{ik}b_{kj}+a_{ik}c_{kj}).$$

Drugi deo se dokazuje analogno. □

Teorema 2.1.3. *Neka* $\mathbf{A} \in F^{n,n}$ *i neka je* $\mathbf{E}$ *jedinična matrica reda* n*. Tada:*

$$\mathbf{AE} = \mathbf{EA} = \mathbf{A}.$$

Definicija 2.1.5. *Matrica* $\mathbf{A} \in F^{n,n}$ *je regularna ako i samo ako postoji matrica* $\mathbf{B} \in F^{n,n}$ *takva da je* $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{E}$.

Ako postoji, matrica $\mathbf{B}$ je jedinstvena, naziva se *inverzna matrica* matrice $\mathbf{A}$ i označava se sa $\mathbf{A}^{-1}$.

Teorema 2.1.4. *Za regularne matrice* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{B}$ *reda* n *važi:*

$$(\mathbf{A}\,\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{A}^{-1}.$$

Teorema 2.1.5. *Za regularne matrice* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{B}$ *reda* n *važi:*

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{B}\,(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}. \tag{2.1}$$

Dokaz.

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1} &= \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A}\,(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}\\
&= \mathbf{A}^{-1}\,(\mathbf{A}+\mathbf{B}-\mathbf{B})\,(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}\\
&= \mathbf{A}^{-1}\,\left((\mathbf{A}+\mathbf{B})\,(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1} - \mathbf{B}\,(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}\right)\\
&= \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{B}\,(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}.
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.1.6. *Za regularne matrice* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{B}$ *reda* n *važi:*

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}\,\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}\Big(\mathbf{B}^{-1}+\mathbf{A}^{-1}\Big)^{-1}. \tag{2.2}$$

Dokaz. Neka je $\mathbf{C} = (\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}$, tada primenom prethodne teoreme sledi:

$$\mathbf{A}\,/\quad \mathbf{C} = (\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}$$

$$\mathbf{A}\,\mathbf{C} = \mathbf{A}\,(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1} = \Big((\mathbf{A}+\mathbf{B})\,\mathbf{A}^{-1}\Big)^{-1} = \Big(\mathbf{E}+\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\Big)^{-1} \quad /\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1}$$

$$\mathbf{A}\,\mathbf{C} = \Big[\Big(\mathbf{E}{+}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\Big)^{-1}\mathbf{B}\Big]\,\mathbf{B}^{-1} = \Big[\mathbf{B}^{-1}\,(\mathbf{E}{+}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1})\Big]^{-1}\mathbf{B}^{-1} = \Big(\mathbf{B}^{-1}{+}\mathbf{A}^{-1}\Big)^{-1}\mathbf{B}^{-1}.$$

Dobili smo:

$$\mathbf{A}^{-1}/\quad \mathbf{A}\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1} = \Big(\mathbf{B}^{-1}+\mathbf{A}^{-1}\Big)^{-1}\mathbf{B}^{-1} \quad /\mathbf{B}$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}\,\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}\Big(\mathbf{B}^{-1}+\mathbf{A}^{-1}\Big)^{-1}.$$

□

Teorema 2.1.7. *Neka za matrice* $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D}$ *važi:* $\mathbf{A} \in F^{n,n}, \mathbf{B} \in F^{n,p}$, $\mathbf{C} \in F^{p,p}, \mathbf{D} \in F^{p,n}$. *Ako su* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{C}$ *regularne matrice, tada važi matrični inverzni identitet:*

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{D})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{C}^{-1}+\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}. \tag{2.3}$$

2.2 Kronekerov proizvod matrica

Definicija 2.2.1. *Neka su* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{B}$ *matrice takve da važi:* $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in F^{m,n}$, $\mathbf{B} = [b_{ij}] \in F^{p,q}$. *Kronekerov proizvod matrica* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{B}$, *u oznaci* $\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}$ *je blok matrica* $\mathbf{C} \in F^{mp\times nq}$*:*

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}\otimes\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

Primer 2.2.1. Neka je $m = p = q = 2$, $n = 3$ i neka je:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Tada je:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} & 4\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} & 3\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \\ 1\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} & 3\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} & 2\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 6 & 10 & 12 & 20 & 9 & 15 \\ 10 & 4 & 20 & 8 & 15 & 6 \\ 3 & 5 & 9 & 15 & 6 & 10 \\ 5 & 2 & 15 & 6 & 10 & 4 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Sledeće teoreme govore o osobinama Kronekerovog proizvoda matrica.

Teorema 2.2.1. *Za svako* $\mathbf{A} \in F^{m,n}$, $\mathbf{B}, \mathbf{C} \in F^{p,q}$ *važi:*

$$\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{C}.$$

Analogno, za svako $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in F^{m,n}$, $\mathbf{C} \in F^{p,q}$ *važi:*

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{C} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{C}.$$

Teorema 2.2.2. *Za proizvoljne matrice* $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ *i* $\alpha \in \mathbb{R}$ *važi:*

- $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C})$,
- $(\alpha\mathbf{A}) \otimes \mathbf{B} = \mathbf{A} \otimes (\alpha\mathbf{B}) = \alpha(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})$.

Napomena 2.2.1. *Kronekerov proizvod matrica nije komutativna operacija, odnosno*

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \otimes \mathbf{A}.$$

Teorema 2.2.3. *(Mešoviti proizvod) Ako su date matrice* $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ *takve da se može formirati proizvod* $\mathbf{AC}$ *i* $\mathbf{BD}$*, tada važi:*

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = A\mathbf{C} \otimes \mathbf{BD}.$$

Teorema 2.2.4. *Kronekerov proizvod matrica* $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ *je regularna matrica ako i samo ako su* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{B}$ *regularne matrice, i važi:*

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1}.$$

Zaista,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{-1} &= (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1}) \\
&= \mathbf{AA}^{-1} \otimes \mathbf{BB}^{-1} \\
&= \mathbf{E}.
\end{aligned}$$

2.3 Hadamardov proizvod matrica

Definicija 2.3.1. *Neka su* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{B}$ *matrice takve da važi:* $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in F^{m,n}$, $\mathbf{B} = [b_{ij}] \in F^{m,n}$. *Hadamardov proizvod matrica* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{B}$, *u oznaci* $\mathbf{A} \circ \mathbf{B}$ *je matrica* $\mathbf{C}$ *takva da važi:*

$$c_{ij} = a_{ij}\, b_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Primer 2.3.1. Neka je $m = 2$, $n = 3$ i neka je:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Tada je:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \circ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 \cdot 3 & 4 \cdot 5 & 3 \cdot 6 \\ 4 \cdot 5 & 3 \cdot 2 & 2 \cdot 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 15 & 20 & 18 \\ 20 & 6 & 4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sledeća teorema govori da je Hadamardov proizvod matrica komutativan, asocijativan i distributivan.

Teorema 2.3.1. *Za proizvoljne matrice* $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ *istih dimenzija važi:*

- $\mathbf{A} \circ \mathbf{B} = \mathbf{B} \circ \mathbf{A}$,
- $(\mathbf{A} \circ \mathbf{B}) \circ \mathbf{C} = \mathbf{A} \circ (\mathbf{B} \circ \mathbf{C})$,
- $\mathbf{A} \circ (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \circ \mathbf{B} + \mathbf{A} \circ \mathbf{C}$.

Navedimo dve osobine po kojima se Hadamardov proizvod razlikuje od običnog proizvoda matrica:

- Jedinična matrica u okviru Hadamardovog proizvoda je matrica čiji su svi elementi jednaki 1,
- Matrica ima inverznu matricu u okviru Hadamardovog proizvoda ako i samo ako su joj svi elementi različiti od nule.

Glava 3

Kredibilitet visoke preciznosti

3.1 Uvod

Osnove ovom pristupu dao je Bilman 1967. godine u svom radu "*Expirience Rating And Credibility*". Praktično poboljšanje ovog modela dali su Bilman i Štraub u svom modelu 1970. koje je najvažniji model teorije kredibiliteta.

Teorija kredibiliteta služi za unapređivanje postupka određivanja premije polise osiguranja. Ona predstavlja skup alata koji omogućava osiguravajućoj kući da izvrši procenu budućeg rizika ili grupe rizika.

Problem se može predstaviti na sledeći način: Posmatramo individualnog osiguranika i imamo podatke o njegovim zahtevima, odnosno iznosima šteta u prethodnih n godina $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ i želimo da izračunamo premiju za narednu $(n+1)$-vu godinu, odnosno želimo da izračunamo **neto premiju** $\mathrm{E}(X_{n+1}) = \xi$. Na osnovu podataka i iskustva sličnih, ali ne i istih osiguranika dobijena je **manuelna (kolektivna) premija** μ.
Možemo zanemariti prethodne podatke i jednostavno reći da je neto premija jednaka manuelnoj premiji, to jeste $\xi = \mu$. Međutim, ako je posmatrani osiguranik konstantno bolji (ima manje istorijske štete) od pretpostavljene manuelne premije, onda osiguranik može da traži umanjenje svoje premije. Druga mogućnost je da se zanemari μ i naplati **individualna premija** $\overline{X}$. Često osiguravajuće kompanije nemaju dovoljno podataka o individualnim osiguranicima, pa u većini slučajeva ovo nije prihvatljivo rešenje. Treća mogućnost je da ξ ocenimo linearnom kombinacijom μ i $\overline{X}$, odnosno da za neki faktor kredibiliteta $Z \in (0, 1)$ stavimo:

$$\xi = Z\overline{X} + (1 - Z)\mu.$$

Sada je cilj odrediti faktor kredibiliteta Z. Odnosno, osiguravajuća kuća treba da odgovori na pitanje: Koliko je varijacija u iskustvu datog osiguranika objašnjena slučajnom varijacijom zahteva za štetama, a koliko činjenicom da je osiguranik zaista bolji ili lošiji od proseka? Drugim rečima, koliki je kredibilitet osiguranikovog iskustva? Dok tražimo odgovor na ovo pitanje moramo obratiti pažnju na sledeće činjenice:

- Ako se količina individualnih podataka koje poseduje osiguravajuća kompanija poveća, oni su verodostojniji, pa je veći kredibilitet osiguranikovog iskustva, odnosno raste faktor kredibiliteta Z,
- Ako varijacija u individualnim štetama raste, smanjuje se nivo poverenja u njih, odnosno smanjuje se faktor kredibiliteta Z,
- Ako se poveća nesigurnost u manuelnu premiju, povećava se kredibilitet osiguranikovog iskustva, odnosno raste faktor kredibiliteta Z.

Osiguravajuća kompanija bi trebala svakog osiguranika da svrsta u riziko klasu kojoj on pripada. Jedna klasa treba da sadrži rizike sa sličnim karakteristikama, odnosno rizici bi trebali biti homogeni. Ipak, koliko god procedura bila detaljna uvek će postojati određeni nivo heterogenosti među karakteristikama rizika unutar riziko klase.
Iz gore navedenog razloga može se desiti da se posmatrani osiguranik razlikuje od onoga što se pretpostavlja i to nas dovodi do pitanja kako odrediti odgovarajuću premiju za osiguranika.

Kako bismo odgovorili na ovo pitanje, uvodimo sledeće pretpostavke:

- Nivo rizika za svakog osiguranika u riziko klasi se može okarakterisati pomoću parametra rizika Θ,
- Za svakog osiguranika vrednost Θ varira,
- Θ postoji, ali ne znamo i ne možemo opaziti njegovu pravu vrednost.

Napomenimo da vrednost Θ možemo posmatrati kao predstavnika reziduala, nezapaženih faktora koji utiču na nivo rizika. Kao što je navedeno Θ varira po osiguranicima, to znači da Θ predstavlja slučajnu promenljivu i da postoji raspodela verovatnoća (zakon raposedele za diskretnu, odnosno funkcija gustine za apsolutno neprekidnu slučajnu promeljivu) $\pi(\theta)$. Za dati skalar θ, funkcija raspodele $\Pi(\theta) = P\{\Theta \leq \theta\}$ predstavlja verovatnoću da slučajno izabrani osiguranik iz klase ima parametar rizika manji ili jednak od θ.
Iako je nivo rizika, to jeste vrednost parametra Θ nepoznata za svakog osiguranika u klasi, pretpostavićemo da je $\pi(\theta)$ poznato, odnosno da je struktura karakteristika rizika unutar populacije poznata.

Raspodela za Θ, odnosno raspodela karakteristika rizika u populaciji naziva se **priorna raspodela** i može se predstaviti sa $\pi(\theta)$. Iskustvo, odnosno iznos štete X pojedinačnog osiguranika potiče iz uslovne raspodele za X, $f_{X\,|\,\Theta}(x\,|\,\theta)$, za dato θ.

3.2 Bejzova metodologija

Podsetimo se, za individualnog osiguranika sa nepoznatim parametrom rizika θ posmatramo istorijske gubitke $\mathbf{X} = \mathbf{x}$, gde su $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ i $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$. Želimo da odredimo premiju koja će pokriti narednu štetu X_{n+1}. Pretpostavimo da su istorijski podaci osiguranika $X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}$, koji odgovaraju različitim periodima izloženosti riziku, uslovno po Θ, međusobno nezavisni i da ne moraju imati istu raspodelu.

Neka šteta X_i ima uslovnu funkciju gustine:

$$f_{X_i\,|\,\Theta}(x_i\,|\,\theta), \quad i = 1, \ldots, n, n+1.$$

Primetimo da funkcija gustine $f_{X_i\,|\,\Theta}(x_i\,|\,\theta)$ ne zavisi od i pod uslovom da su svi $X_i\,|\,\Theta = \theta$ jednako raspodeljeni.
Ako bismo znali parametar rizika θ mogli bismo koristiti $f_{X_{n+1}\,|\,\Theta}(x_{n+1}\,|\,\theta)$ za procenu X_{n+1}. Kao što smo već napomenuli ne možemo odrediti vrednost θ, ali zato možemo iskoristiti $\mathbf{x}$ datog osiguranika. Možemo izračunati raspodelu slučajne promenljive $X_{n+1}\,|\,\mathbf{X} = \mathbf{x}$ koja se naziva **prediktivna raspodela**.

Sada izvodimo izraz za računanje prediktivne raspodele koristeći jednakosti (1.2) i (1.5) sa 8. strane, kao i nezavisnost $X_i\,|\,\Theta = \theta$, $i = 1, \ldots, n+1$, redom.

$$
\begin{aligned}
&f_{X_{n+1}\,|\,(X_1,\ldots,X_n)}(x_{n+1}\,|\,x_1, \ldots, x_n) = \\
&\quad = \frac{f_{(X_1,\ldots,X_n,X_{n+1})}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})}{f_{(X_1,\ldots,X_n)}(x_1, \ldots, x_n)} \\
&\quad = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f_{(X_1,\ldots,X_n,X_{n+1})\,|\,\Theta}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\,|\,\theta)\,\pi(\theta)\mathrm{d}\theta}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{(X_1,\ldots,X_n)\,|\,\Theta}(x_1, \ldots, x_n\,|\,\theta)\,\pi(\theta)\mathrm{d}\theta} \\
&\quad = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left[\prod_{i=1}^{n+1} f_{(X_i|\,\Theta)}(x_i\,|\,\theta)\right] \pi(\theta)\mathrm{d}\theta}{\int_{-\infty}^{\infty} \left[\prod_{i=1}^{n} f_{(X_i\,|\,\Theta)}(x_i\,|\,\theta)\right] \pi(\theta)\mathrm{d}\theta}. \qquad (3.1)
\end{aligned}
$$

Posteriorna raspodela je raspodela slučajne promenljive $\Theta\,|\,(X_1, \ldots, X_n)$.

Izvedimo izraz za računanje posteriorne raspodele koristeći jednakosti (1.2), (1.3) i (1.5) sa 8. strane, kao i nezavisnost $X_i \,|\, \Theta = \theta$, $i = 1, \ldots, n+1$.

$$\begin{aligned}
\pi_{\Theta\,|\,(X_1,\ldots,X_n)}(\theta\,|\,(x_1,\ldots,x_n)) &= \frac{f_{(X_1,\ldots,X_n,\Theta)}(x_1,\ldots,x_n,\theta)}{f_{(X_1,\ldots,X_n)}(x_1,\ldots,x_n)} \\
&= \frac{f_{(X_1,\ldots,X_n)\,|\,\Theta}(x_1,\ldots,x_n\,|\,\theta)\,\pi(\theta)}{f_{(X_1,\ldots,X_n)}(x_1,\ldots,x_n)} \qquad (3.2) \\
&= \frac{\left[\prod\limits_{i=1}^{n} f_{(X_i\,|\,\Theta)}(x_i\,|\,\theta)\right]\pi(\theta)}{f_{(X_1,\ldots,X_n)}(x_1,\ldots,x_n)} \\
&= \frac{\left[\prod\limits_{i=1}^{n} f_{(X_i|\,\Theta)}(x_i\,|\,\theta)\right]\pi(\theta)}{\int_{-\infty}^{\infty}\left[\prod\limits_{i=1}^{n} f_{(X_i\,|\,\Theta)}(x_i\,|\,\theta)\right]\pi(\theta)\,\mathrm{d}\theta}.
\end{aligned}$$

Primetimo da jednakost (3.1) možemo zapisati i na sledeći način:

$$f_{X_{n+1}\,|\,\mathbf{X}}(x_{n+1}\,|\,\mathbf{x}) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{X}\,|\,\Theta}(\mathbf{x}\,|\,\theta)\, f_{X_{n+1}|\,\Theta}(x_{n+1}\,|\,\theta)\,\pi(\theta)\,\mathrm{d}\theta}{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}.$$

Primenom prethodnog izraza i jednakosti (3.2) dobijamo da se prediktivna raspodela može zapisati i na sledeći način:

$$f_{X_{n+1}\,|\,\mathbf{X}}(x_{n+1}\,|\,\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_{n+1}|\,\Theta}(x_{n+1}\,|\,\theta)\,\pi_{\Theta\,|\,\mathbf{X}}(\theta\,|\,\mathbf{x})\,\mathrm{d}\theta. \qquad (3.3)$$

Na osnovu formule (3.3) zaključujemo da uslovnu raspodelu za X_{n+1} kada je $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ možemo posmatrati kao mešovitu raspodelu.
Intuitivno, na osnovu istorijskih podataka $\mathbf{X}$ dobijamo informacije o Θ, a zatim na osnovu informacija o Θ zaključujemo nešto o X_{n+1}.

Primer 3.2.1. *Iznos zahteva za odštetu ima eksponencijalnu raspodelu sa očekivanjem* $1/\Theta$. *Parametar* Θ *varira u klasi osiguranika i potencijalnih osiguranika saglasno Gama raspodeli sa parametrima* $\alpha = 4$ *i* $\beta = 0.001$. *Pretposatvimo da je osiguranik imao štete u iznosima* $100, 950$ *i* 450 *novčanih jedinica. Odrediti prediktivnu raspodelu za četvrtu štetu i posteriornu raspodelu za* Θ.

Rešenje: Iznosi zahteva imaju uslovnu raspodelu, sledi da važi:

$$f_{X\,|\,\Theta}(x\,|\,\theta) = \theta\, e^{-\theta\, x}, \quad \theta > 0$$

dok iz činjenice da Θ ima Gama raspodelu važi sledeće:

$$\pi_\Theta(\theta) = \frac{\theta^3\, e^{-1000\theta}\, 1000^4}{6}.$$

Marginalna gustina za posmatrane vrednosti je:

$$\begin{aligned} f(100, 950, 450) &= \int\limits_0^\infty \theta\, e^{-100\theta}\, \theta\, e^{-950\theta}\, \theta\, e^{-450\theta}\, \frac{1000^4}{6}\, \theta^3\, e^{-450\theta}\, \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1000^4}{6} \int\limits_0^\infty \theta^6\, e^{-2500\theta}\, \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1000^4}{6}\, \frac{720}{2500^7}. \end{aligned}$$

Slično:

$$\begin{aligned} f(100, 950, 450, x_4) &= \int\limits_0^\infty \theta\, e^{-100\theta}\, \theta\, e^{-950\theta}\, \theta\, e^{-450\theta}\, \theta\, e^{-x_4\theta}\, \frac{1000^4}{6}\, \theta^3\, e^{-450\theta}\, \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1000^4}{6} \int\limits_0^\infty \theta^7\, e^{-(2500+x_4)\,\theta}\, \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1000^4}{6}\, \frac{5040}{(2500+x_4)^8}. \end{aligned}$$

Dobijamo da je prediktivna gustina:

$$f(x_4\,|\,100, 950, 450) = \frac{f(100, 950, 450, x_4)}{f(100, 950, 450)} = \frac{7 \cdot 2500^7}{(2500+x_4)^8}.$$

Primetimo da je prediktivna raspodela Paretova raspodela sa parametrima 7 i 2500.

Razmotrimo sada posteriornu raspodelu:

$$\pi(\theta\,|\,100, 950, 450) = \frac{f(100, 950, 450, \theta)}{f(100, 950, 450)}.$$

Vidimo da se u imeniocu nalazi integral, koji kada se reši daje broj i u ovom momentu ćemo ga zanemariti. Takođe ćemo zanemariti konstante iz brojioca. Dobijamo:

$$
\begin{aligned}
\pi(\theta \,|\, 100, 950, 450) &\approx \theta\, e^{-100\theta}\, \theta\, e^{-950\theta}\, \theta\, e^{-450\theta}\, \theta\, e^{-x_4\theta}\, \frac{1000^4}{6}\, \theta^3\, e^{-450\theta} \\
&\approx \theta^6\, e^{-2500\theta}. \qquad (3.4)
\end{aligned}
$$

Da bi ovaj izraz predstavljao funkciju gustine, potrebno je integraliti izraz (3.4) i odrediti normirajuću konstantu (izjednačavanjem integrala sa 1). Međutim, prepoznajemo da ovo predstavlja Gama raspodelu sa parametrima 7 i 1/2500. Zaključujemo da važi:

$$
\pi(\theta \,|\, 100, 950, 450) = \frac{\theta^6\, e^{-2500\,\theta}\, 2500^7}{\Gamma(7)}.
$$

Primetimo da je posteriorna raspodela istog tipa (Gama) kao i priorna raspoela.

Sada možemo i na drugi način odrediti prediktivnu raspodelu i videti da se dobijeni rezultat poklapa sa prethodnim:

$$
\begin{aligned}
f(x_4 \,|\, 100, 950, 450) &= \int_0^\infty \theta\, e^{-x^4\,\theta}\, \frac{\theta^6\, e^{-2500\,\theta}\, 2500^7}{\Gamma(7)}\, \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{2500^7}{6!} \int_0^\infty \theta^7\, e^{-(2500+x^4)\,\theta}\, \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{2500^7}{6!}\, \frac{7!}{(2500+x_4)^8}.
\end{aligned}
$$

□

Vratimo se na početni problem i pitanje kako odrediti premiju za individualnog osiguranika. Posmatramo istorijske gubitke posmatranog osiguranika $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ i želimo da predvidimo vrednost X_{n+1}. Ako bismo znali θ, očigledan izbor bi bila **individualna premija (hipotetička premija unutar fiksne riziko klase θ)**:

$$
\mu_{n+1}(\theta) = \mathrm{E}(X_{n+1} \,|\, \Theta = \theta) = \int x_{n+1}\, f_{X_{n+1}\,|\,\Theta}(x_{n+1} \,|\, \theta)\, dx_{n+1}. \qquad (3.5)
$$

Ako u izrazu (3.5) zamenimo θ sa Θ i primenimo očekivanje dobijamo **kolektivnu (čistu) premiju** koja predstavlja očekivanje hipotetičkih sredina:

$$
\mu_{n+1} = \mathrm{E}(X_{n+1}) = \mathrm{E}\left[\mathrm{E}(X_{n+1} \,|\, \Theta)\right] = \mathrm{E}\left[\mu_{n+1}(\Theta)\right].
$$

Prethodna premija se koristi ako je nepoznat parametar θ i ako nemamo istorijske podatke $\mathbf{x}$ o posmatranom osiguraniku. Međutim, mi imamo prethodno iskustvo $\mathbf{x}$ i zato je najbolje koristiti **Bejzovu premiju** koja predstavlja očekivanje prediktivne raspodele:

$$\mathrm{E}(X_{n+1}\,|\,\mathbf{X}=\mathbf{x}) = \int x_{n+1}\, f_{X_{n+1}\,|\,\mathbf{X}}(x_{n+1}\,|\,\mathbf{x})\, dx_{n+1}. \tag{3.6}$$

Primetimo da jednakost (3.6) možemo zapisati na drugi način koristeći izraze (3.3) i (3.5):

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_{n+1}\,|\,\mathbf{X}=\mathbf{x}) &= \int x_{n+1}\, f_{X_{n+1}\,|\,\mathbf{X}}(x_{n+1}\,|\,\mathbf{x})\, dx_{n+1} \\
&= \int x_{n+1} \left[\int f_{X_{n+1}|\Theta}(x_{n+1}\,|\,\theta)\, \pi_{\Theta\,|\,\mathbf{X}}(\theta\,|\,\mathbf{x})\, d\theta\right] dx_{n+1} \\
&= \int \left[\int x_{n+1}\, f_{X_{n+1}|\Theta}(x_{n+1}\,|\,\theta)\, dx_{n+1}\right] \pi_{\Theta\,|\,\mathbf{X}}(\theta\,|\,\mathbf{x})\, d\theta \\
&= \int \mu_{n+1}(\theta)\, \pi_{\Theta\,|\,\mathbf{X}}(\theta\,|\,\mathbf{x})\, d\theta.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Primer 3.2.2. *(Nastvak Primera 3.2.1) Odrediti Bejzovu premiju.*

Rešenje: Iz prethodnog primera važi: $\mu_4(\theta) = \mathrm{E}(X_4\,|\,\Theta=\theta) = \theta^{-1}$.

Sada, koristeći prethodno i izraz (3.7) dobijamo Bejzovu premiju:

$$\mathrm{E}(X_4\,|\,100, 950, 450) = \int_0^\infty \theta^{-1}\, \frac{\theta^6\, e^{-2500\,\theta}\, 2500^7}{720}\, d\theta = \frac{2500^7}{6!}\,\frac{120}{2500^6} = 416,67.$$

Iz činjenice da Θ ima priornu Gama raspodelu možemo izračunati kolektivnu (čistu) premiju:

$$\mu = \mathrm{E}(X_{n+1}) = \mathrm{E}\left[\mathrm{E}(X_{n+1}\,|\,\Theta)\right] = \mathrm{E}(\Theta^{-1}) = \frac{1000}{3} = 333,33.$$

Primetimo da je ocena Bejzove premije između priorne ocene i one zasnovane samo na istorijskim podacima (uzoračka sredina je 500).

Podsetimo se da smo u prethodnom primeru dobili da je prediktivna raspodela jednaka Paretovoj raspodeli sa parametrima $\alpha = 7$ i $\beta = 2500$, zato Bejzovu premiju možemo izračunati i na drugi način:

$$\mathrm{E}(X_4\,|\,100, 950, 450) = \frac{\beta}{\alpha - 1} = \frac{2500}{6} = 416,67.$$

□

3.3 Kredibilitetna premija

U prethodnom delu videli smo da je za individulanog osiguranika za koga imamo istorijske podatke $\mathbf{x}$ najbolje da računamo Bejzovu premiju $\mathrm{E}(X_{n+1} \,|\, \mathbf{X} = \mathbf{x})$.

Međutim, problem kod ovog pristupa može izazvati računanje Bejzove premije. Kod jednostavnijih primera Bejzova premija se može oceniti numerički, ali u praksi ovakvi primeri teško mogu da prikažu glavne osobine stvarnosti. Realističniji modeli mogu uneti analitičke poteškoće, s obzirom da zahtevaju numeričku integraciju.

Sada ćemo predstaviti alternativni pristup koji je Bilman predložio 1967. godine. Kako bismo ocenili zahteve za odštetu za narednu godinu, potrebna nam je uslovna raspodela $f_{X_{n+1}\,|\,\Theta}(x_{n+1} \,|\, \theta)$ ili hipotetičko očekivanje $\mu_{n+1}(\theta)$. Jedna od opcija je da $\mu_{n+1}(\theta)$ aproksimiramo pomoću linearne funkcije istorijskih podataka $\mathbf{x}$. Dakle, posmatraćemo ocene oblika $\alpha_0 + \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j \, X_j$, a naš cilj će biti da odredimo vrednosti $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$., odnosno:

$$\mathrm{E}(X_{n+1} \,|\, \mathbf{X} = x) \approx \hat{X}_{n+1} = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, X_j, \quad \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n = ?$$

Biraćemo α tako da minimiziramo srednju kvadratnu grešku gubitka:

$$Q = \mathrm{E}\left[\left(\alpha_0 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, X_j - \mu_{n+1}(\Theta)\right)^2\right], \tag{3.8}$$

gde posmatramo očekivanje nad zajedničkom raspodelom za $X_1, \ldots, X_n$ i Θ. Lokalni minimum funkcije Q tražimo diferenciranjem:

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_0} = \mathrm{E}\left[2\left(\alpha_0 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, X_j - \mu_{n+1}(\Theta)\right)\right].$$

Napomenimo da izvod sme da uđe pod očekivanje na osnovu Lebegove teoreme o dominantnoj konvergenciji, odnosno prvo izračunamo izvod ispod očekivanja, pa ako je to ograničeno i ima konačno očekivanje, onda je razmena izvoda i očekivanja dozvoljena.

Označimo vrednosti $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, koje minimiziraju (3.8) sa $\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_n$. Sada, izjednačavamo $\partial Q \,/\, \partial \alpha_0 = 0$ i dobijamo:

$$\mathrm{E}\left[\mu_{n+1}(\Theta)\right] = \tilde{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_j \, \mathrm{E}(X_j).$$

Znamo, $\mathrm{E}\left[\mu_{n+1}(\Theta)\right] = \mathrm{E}\left[\mathrm{E}(X_{n+1}\,|\,\Theta)\right] = \mathrm{E}(X_{n+1})$, pa iz $\partial Q\,/\,\partial\alpha_0 = 0$ sledi:

$$\mathrm{E}(X_{n+1}) = \tilde{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_j\, \mathrm{E}(X_j). \tag{3.9}$$

Jednačina (3.9) naziva se **jednačina centriranosti**, jer zahteva da ocena $\tilde{\alpha}_0 + \sum\limits_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_j\, X_j$ bude centrirana (nepristrasna) za $\mathrm{E}(X_{n+1})$. Međutim, ocena kredibiliteta može biti pristrasna za $\mu_{n+1}(\theta) = \mathrm{E}(X_{n+1}\,|\,\Theta = \theta)$, gde prihvatajući pristrasnost možemo smanjiti ukupnu srednjekvadratnu grešku.

Diferenciranjem Q po α_i, dobijamo:

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_i} = \mathrm{E}\left[2\left(\alpha_0 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, X_j - \mu_{n+1}(\Theta)\right)\cdot X_i\right],$$

gde $i = 1,\ldots,n$. Izjednačavanjem sa nulom dobijamo sledeće:

$$\mathrm{E}\left[\mu_{n+1}(\Theta)\cdot X_i\right] = \tilde{\alpha}_0\, \mathrm{E}(X_i) + \sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_j\, \mathrm{E}(X_i\cdot X_j).$$

Zanima nas čemu je jednako $\mathrm{E}\left[\mu_{n+1}(\Theta)\cdot X_i\right]$ ako pretpostavimo da su X_i i X_{n+1} nezavisne, uslovno po Θ.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[\mu_{n+1}(\Theta)\cdot X_i\right] &= \mathrm{E}\left[\mathrm{E}\left(X_{n+1}\,|\,\Theta\right)\; X_i\right]\\ &= \mathrm{E}\left[\mathrm{E}\left(X_i\cdot X_{n+1}\,|\,\Theta\right)\right]\\ &= \mathrm{E}\left(X_i\cdot X_{n+1}\right).\end{aligned}$$

Dakle, $\partial Q\,/\,\partial\alpha_i = 0$ implicira da je:

$$\mathrm{E}\left(X_i\cdot X_{n+1}\right) = \tilde{\alpha}_0\, \mathrm{E}(X_i) + \sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_j\, \mathrm{E}(X_i\cdot X_j). \tag{3.10}$$

Ako pomnožimo izraz (3.9) sa $\mathrm{E}(X_i)$ i dobijenu vrednost oduzmemo od izraza (3.10) dobijamo:

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_{n+1}) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_j\, \mathrm{Cov}(X_i, X_j), \quad i = 1,\ldots,n. \tag{3.11}$$

Primetimo da jedan sabirak sa desne strane jednačine (3.11) predstavlja varijansu jer je $\mathrm{Cov}(X_i, X_i) = D(X_i)$, dok preostalih $n-1$ sabiraka predstavlja kovarijanse.

Jednačinu (3.9) i n jednačina iz formule (3.11) zajedno nazivamo **sistem normalnih jednačina** i njihovim rešavanjem po $\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_n$ dobijamo premiju kredibiliteta:

$$\tilde{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_j \, X_j. \tag{3.12}$$

Napomenimo da vrednosti $\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_n$ takođe minimiziraju:

$$Q_2 = \mathrm{E}\left[\left(\alpha_0 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, X_j - \mathrm{E}(X_{n+1} \,|\, \mathbf{X})\right)^2\right], \tag{3.13}$$

i

$$Q_3 = \mathrm{E}\left[\left(\alpha_0 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, X_j - X_{n+1}\right)^2\right], \tag{3.14}$$

što se može pokazati diferenciranjem izraza (3.13) i (3.14) po $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Takođe možemo pokazati da rešenja zadovoljavaju sistem normalnih jednačina (3.9) i (3.11), pa zaključujemo da je kredibilitetna premija najbolji linearni ocenjivač za individualnu premiju $\mathrm{E}(X_{n+1} \,|\, \Theta)$, Bejzovu premiju $\mathrm{E}(X_{n+1} \,|\, \mathbf{X})$ i X_{n+1}.

Primer 3.3.1. *Neka je* $\mathrm{E}(X_j) = \mu$, $D(X_j) = \sigma^2$ *i neka je za* $i \neq j$ $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \rho\,\sigma^2$, *gde za koeficijent korelacije* ρ *važi* $-1 < \rho < 1$ *i* $i, j = 1, \ldots, n$. *Odrediti kredibilitetnu premiju* $\tilde{\alpha}_0 + \sum\limits_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_j \, X_j$.

Rešenje: Ako ubacimo podatke u jednačinu (3.9) dobijamo:

$$\mu = \tilde{\alpha}_0 + \mu \sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_j, \quad \text{odnosno} \quad \sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_j = 1 - \frac{\tilde{\alpha}_0}{\mu}. \tag{3.15}$$

Jednačine date sa (3.11) postaju:

$$\rho = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \tilde{\alpha}_j \, \rho + \tilde{\alpha}_i = \sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_j \, \rho + \tilde{\alpha}_i (1 - \rho), \quad \text{za} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Nakon malo sređivanja prethodnog izraza dobije se:

$$\tilde{\alpha}_i = \frac{\rho \left(1 - \sum\limits_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_j\right)}{1 - \rho} = \frac{\rho \, \tilde{\alpha}_0}{\mu \, (1 - \rho)}. \tag{3.16}$$

Ako saberemo jednačine (3.16), za $i = 1, \dots, n$ dobije se:

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_i = \sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_j = \frac{n\,\rho\,\tilde{\alpha}_0}{\mu\,(1-\rho)}.$$

Narednu jednakost dobijamo kombinujući prethodni izraz i jednakost (3.15):

$$1 - \frac{\tilde{\alpha}_0}{\mu} = \frac{n\,\rho\,\tilde{\alpha}_0}{\mu\,(1-\rho)}.$$

Rešavanjem prethodnog izraza po $\tilde{\alpha}_0$ dobijamo:

$$\tilde{\alpha}_0 = \frac{(1-\rho)\,\mu}{1+(n-1)\,\rho}.$$

Iz (3.16) i prethodne jednakosti dobijamo izraz za $\tilde{\alpha}_i$, $i = 1, \dots, n$:

$$\tilde{\alpha}_j = \frac{\rho\,\tilde{\alpha}_0}{\mu\,(1-\rho)} = \frac{\rho}{1+(n-1)\,\rho}.$$

Dakle, kredibilitetna premija je:

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_j\,X_j &= \frac{(1-\rho)\,\mu}{1+(n-1)\,\rho} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\rho\,X_j}{1+(n-1)\,\rho} \\
&= \underbrace{\left(1 - \frac{n\,\rho}{1+(n-1)\,\rho}\right)}_{1-Z}\,\mu + \underbrace{\frac{n\,\rho}{1+(n-1)\,\rho}}_{Z}\,\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \\
&= (1-Z)\,\mu + Z\,\overline{X}.
\end{aligned}$$

Ako $\rho \in (0,1)$, onda $Z \in (0,1)$ i kredibilitetna premija predstavlja težinsku sredinu od $\mu = \mathrm{E}(X_j)$ i $\overline{X}$.
Ako je $\rho = 0$, onda je $Z = 0$, odnosno $\hat{X}_{n+1} = \mu$.
Ako je $\rho = 1$, onda je $Z = 1$, odnosno $\hat{X}_{n+1} = \overline{X}$.
Ako $\rho \in [-1,0)$, onda veštački stavljamo da je $Z = 0$.

□

3.4 Bilmanov model

Prvi i najjednostavniji model koji aproksimira Bejzovu premiju je Bilmanov model, gde se pretpostavlja da za svakog osiguranika prošli gubici $X_1, \ldots, X_n$ (uslovno po $\Theta = \theta$) imaju isto očekivanje i varijansu, međusobno su nezavisni i imaju istu raspodelu.

Za $j = 1, \ldots, n$ definišemo sledeće veličine:

- $\mu(\theta) = \mathrm{E}(X_j \,|\, \Theta = \theta)$ - hipotetička sredina,
- $\upsilon(\theta) = D(X_j \,|\, \Theta = \theta)$ - varijansa procesa,
- $\mu = \mathrm{E}\left[\mu(\Theta)\right]$ - očekivana vrednost hipotetičkih sredina,
- $a = D\left[\mu(\Theta)\right]$ - varijansa hipotetičkih sredina,
- $\upsilon = \mathrm{E}\left[\upsilon(\Theta)\right]$ - očekivana vrednost varijanse procesa.

Napomenimo da $\mu(\theta)$ predstavlja hipotetičku (individualnu) premija unutar riziko klase θ, $\upsilon(\theta)$ predstavlja varijansu (rizik) unutar riziko klase θ, dok se μ, a, υ odnose redom na kolektivnu premiju (premiju za sve riziko klase zajedno), varijansa (rizik) između različitih riziko klasa, očekivani (srednji) rizik. Primetimo i da se μ koristi kada nemamo informacije o θ.

Odredimo sada očekivanje, varijansu i kovarijansu za X_j.
Prvo određujemo očekivanje:

$$\mathrm{E}(X_j) = \mathrm{E}\left[\mathrm{E}(X_j \,|\, \Theta)\right] = \mathrm{E}\left[\mu(\Theta)\right] = \mu. \tag{3.17}$$

Zatim varijansu:

$$\begin{aligned} D(X_j) &= \mathrm{E}\left[D(X_j \,|\, \Theta)\right] + D\left[\mathrm{E}(X_j \,|\, \Theta)\right] \\ &= \mathrm{E}\left[\upsilon(\Theta)\right] + D\left[\mu(\Theta)\right] \\ &= \upsilon + a. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Na kraju određujemo kovarijansu, za $i \neq j$ važi:

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) &= \mathrm{E}(X_i\, X_j) - \mathrm{E}(X_i)\,\mathrm{E}(X_j) \\ &= \mathrm{E}\left[\mathrm{E}(X_i\, X_j \,|\, \Theta)\right] - \mu^2 \\ &= \mathrm{E}\left[\mathrm{E}(X_i \,|\, \Theta)\,\mathrm{E}(X_j \,|\, \Theta)\right] - \mu^2 \\ &= \mathrm{E}\left[\mu(\Theta)^2\right] - \mathrm{E}\left[\upsilon(\Theta)\right]^2 \\ &= D\left[\mu(\Theta)\right] \\ &= a. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Primetimo da ovaj rezultat ima isti oblik kao Primer 3.3.1 sa strane 28. gde za parametre važi: $\mu = \mu$, $\sigma = \upsilon + a$, $\rho = a/(\upsilon + a)$. Dakle, dobijamo da je kredibilitetna premija:

$$\tilde{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_j = Z\,\overline{X} + (1 - Z)\,\mu, \tag{3.20}$$

gde je:

$$Z = \frac{n}{n+k} \tag{3.21}$$

i

$$k = \frac{\upsilon}{a} = \frac{\mathrm{E}\,[D(X_j\,|\,\Theta)]}{D\,[\mathrm{E}(X_j\,|\,\Theta)]}. \tag{3.22}$$

Faktor kredibiliteta Z iz formule (3.21) sa k datim u (3.22) naziva se **Bilmanov faktor kredibiliteta**.

Primetimo nekoliko činjenica vezanih za model:

- Kredibilitetna premija definisana kao u (3.20) je težinska sredina uzoračke sredine $\overline{X}$ i kolektivne premije μ.
- $n \nearrow \implies Z \nearrow$ - ako obim istorijskih podataka raste, raste i nivo poverenja u njih, odnosno Z se približava jedinici.
- $\lim\limits_{n\to\infty} Z = 1$ - ako obim istorijskih podataka ide u beskonačnost, premija kredibiliteta je jednaka individualnoj premiji.
- $a \gg \upsilon \implies k \approx 0 \implies Z \approx 1$ - odnosno ako je populacija heterogena u odnosu na parametar rizika Θ hipotetičke sredine $\mathrm{E}(X_j\,|\,\Theta = \theta)$ više variraju, tj. a je veliko, a k malo, pa je Z blizu 1. Zaključujemo da manuelna premija nije merodavna, tj. u heterogenoj populaciji iskustvo drugih osiguranika je manje značajno.
- $\upsilon \gg a \implies k \to \infty \implies Z \approx 0$ - odnosno ako je populacija homogena hipotetičke sredine $\mathrm{E}(X_j\,|\,\Theta = \theta)$ ne variraju značajno u odnosu na Θ, tj. a je mnogo manje u odnosu na υ, k je veliko, pa je Z blizu 0. U homogenoj populaciji manuelna premija je značajnija za predviđanje budućih šteta za određenog osiguranika.

Primer 3.4.1. *Posmatraju se dve grupe osiguranika: grupa A i grupa B. Od ukupnog broja osiguranika $2/3$ osiguranika pripada grupi A, a $1/3$ osiguranika grupi B. Za svaku grupu, podaci o broju i iznosu šteta na godišnjem nivou dati su u tabeli 3.1.*

Ukupan iznos šteta za poslednje četiri godine posmatranog osiguranika je 500. Odrediti faktor kredibiliteta Z, kao i kredibilitetnu premiju posmatranog osiguranika za sledeću godinu.

	Broj šteta		Iznos šteta	
Tip	Očekivanje	Varijansa	Očekivanje	Varijansa
A	0.2	0.2	200	4000
B	0.7	0.3	100	1500

Tabela 3.1: Broj i iznos šteta

Rešenje:

Prvo, primetimo da je priorna raspodela za Θ data sa:

$$\Theta : \begin{pmatrix} A & B \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Uvedimo oznake:
X_i - iznos i-te štete,
N - broj šteta,
$S = X_1 + \ldots X_N$ - ukupan iznos šteta.

Sada nas zanimaju očekivane vrednosti ukupnih iznosa šteta $S \mid \Theta = A$ i $S \mid \Theta = B$ i te vrednosti će predstavljati hipotetičke sredine za grupu A i za grupu B:

$$\mu(A) = \mathrm{E}(S \mid \Theta = A) = \mathrm{E}(N \mid \Theta = A)\, \mathrm{E}(X \mid \Theta = A) = 0.2 \cdot 200 = 40,$$

$$\mu(B) = \mathrm{E}(S \mid \Theta = B) = \mathrm{E}(N \mid \Theta = B)\, \mathrm{E}(X \mid \Theta = B) = 0.7 \cdot 100 = 70.$$

Sledi:

$$\mu(\Theta) : \begin{pmatrix} 40 & 70 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \upsilon(A) = D(S \mid \Theta = A) &= \mathrm{E}(N \mid \Theta = A) D(X \mid \Theta = A) + D(N \mid \Theta = A) \left[\mathrm{E}(X \mid \Theta = A)^2\right] \\ &= 0,2 \cdot 4000 + 0.2 \cdot 400^2 \\ &= 8800, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \upsilon(B) = D(S \mid \Theta = B) &= 0.7 \cdot 1500 + 0.3 \cdot 100^2 \\ &= 4050. \end{aligned}$$

Sledi:

$$\upsilon(\Theta) : \begin{pmatrix} 8800 & 4050 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Sada možemo izračunati μ, a i υ:

$$\mu = \mathrm{E}\left[\mu(\Theta)\right] = \frac{2}{3}40 + \frac{1}{3}70 = 50,$$

$$a = D\left[\mu(\Theta)\right] = \frac{2}{3} \cdot 40^2 + \frac{1}{3} \cdot 70^2 - 50^2 = 200,$$

$$\upsilon = \mathrm{E}\left[\upsilon(\Theta)\right] = \frac{2}{3}8800 + \frac{1}{3}4050 = 7.216,67.$$

Dalje,

$$k = \frac{\upsilon}{a} = 36,083.$$

Kako je $n = 4$, Bilmanov faktor kredibiliteta je:

$$Z = \frac{4}{4 + 36,083} = 0,1.$$

$$\overline{X} = \frac{500}{4} = 125.$$

Kredibilitetna premija posmatranog osiguranika za sledeću godinu je:

$$Z\,\overline{X} + (1 - Z)\,\mu = 0,1 \cdot 125 + 0,9 \cdot 50 = 57,5.$$

3.5 Bilman-Štraubov model

Bilmanov model je najjednostavniji model kredibiliteta, zato što zahteva da istorijske štete osiguranika, odnosno slučajne promenljive $X_1, \dots, X_n$, uslovno po Θ budu međusobno nezavisne i jednako raspodeljene. Međutim, ovakva pretpostavka ne dozvoljava promene u izloženosti riziku ili veličini, što se lako može narušiti u praksi. Na primer, često se broj vozila u vlasništvu velikih klijenata sa automobilskim osiguranjem može menjati tokom vremena.

Da bismo rešili problem, posmatramo uopštenje Bilmanovog modela. Pretpostavimo da za slučajne promenljive $X_1, \dots, X_n$, uslovno po Θ važi:

- nezavisne su,

- raspodela može biti različita, ali takva da važi:
  - $\mathrm{E}(X_j \,|\, \Theta = \theta) = \mu(\theta), \qquad j = 1, \ldots, n,$
  - $D(X_j \,|\, \Theta = \theta) = \dfrac{\upsilon(\theta)}{m_j}, \qquad j = 1, \ldots, n.$

gde je m_j poznata konstanta koja predstavlja meru izloženosti riziku za X_j. Primetimo da m_j treba da bude proporcionalno veličini rizika, kao i da varijansa procesa opada sa porastom izloženosti rizika. Mera izloženosti riziku m_j, na primer, može da predstavlja broj meseci u j-toj godini u kojima je polisa bila aktivna ili broj osiguranika u grupi u j-toj godini.

Kao i u Bilmanovom modelu, neka su:

$$\mu = \mathrm{E}\left[\mu(\Theta)\right], \quad a = D\left[\mu(\Theta)\right], \quad \upsilon = \mathrm{E}\left[\upsilon(\Theta)\right].$$

Sada određujemo očekivanje, varijansu i kovarijansu za X_j.
Na isti način kao u izrazima (3.17) i (3.19) sa strane 30. važi:
$\mathrm{E}(X_j) = \mu$, $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = a$, dok je:

$$\begin{aligned} D(X_j) &= \mathrm{E}\left[D(X_j \,|\, \Theta)\right] + D\left[\mathrm{E}(X_j \,|\, \Theta)\right] \\ &= \mathrm{E}\left[\frac{\upsilon(\Theta)}{m_j}\right] + D\left[\mu(\Theta)\right] \\ &= \frac{\upsilon}{m_j} + a. \end{aligned}$$

Sada, definišimo **ukupnu izloženost riziku**:

$$m = m_1 + m_2 + \ldots m_n.$$

Da bismo odredili kredibilitetnu premiju datu sa (3.12) i odredili $\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_n$, rešićemo sistem normalnih jednačina (3.9) i (3.11).
Sada, koristeći jednakost (3.17), jednačina (3.9) postaje:

$$\mu = \tilde{\alpha}_0 + \mu \sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_j.$$

Odnosno,

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_j = 1 - \frac{\tilde{\alpha}_0}{\mu}. \tag{3.23}$$

Za $i = 1, \ldots, n$ formula (3.11) postaje:

$$a = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \tilde{\alpha}_j \, a + \tilde{\alpha}_i \left(a + \frac{\upsilon}{m_i} \right) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_j \, a + \frac{\upsilon \, \tilde{\alpha}_i}{m_i}.$$

Izrazimo iz prethodne jednakosti $\tilde{\alpha}_i$:

$$\tilde{\alpha}_i = \frac{a \, m_i}{\upsilon} \left(1 - \sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_j \right) = \frac{a \, m_i}{\upsilon} \frac{\tilde{\alpha}_0}{\mu}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.24}$$

Iz formula (3.23) i (3.24) dobijamo:

$$1 - \frac{\tilde{\alpha}_0}{\mu} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_j = \sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_i = \frac{a}{\upsilon} \frac{\tilde{\alpha}_0}{\mu} \sum_{j=1}^{n} m_i = \frac{a \, \tilde{\alpha}_0 \, m}{\mu \, \upsilon}.$$

Dobijamo:

$$\tilde{\alpha}_0 = \frac{\mu}{1 + am/\upsilon} = \frac{\upsilon/a}{1 + \upsilon/a} \, \mu,$$

i

$$\tilde{\alpha}_j = \frac{a \, \tilde{\alpha}_0}{\mu \, \upsilon} \, m_j = \frac{m_j}{m + \upsilon/a}.$$

Dakle, kredibilitetna premija je:

$$\tilde{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_j \, X_j = Z \, \overline{X} + (1 - Z)\mu, \tag{3.25}$$

gde su:

$$Z = \frac{m}{m + k}, \quad \overline{X} = \sum_{j=1}^{n} \frac{m_j}{m} \, X_j,$$

dok je $k = \dfrac{\upsilon}{a}$ kao u formuli (3.22).

Primetimo da važi:

$$Z = \frac{m}{m + k} = \frac{a}{a + \frac{\upsilon}{m}}. \tag{3.26}$$

Z je Bilman-Štraubov faktor kredibiliteta koji zavisi od m, gde m predstavlja ukupnu izloženost riziku koja je pridružena osiguraniku. Dalje, $\overline{X}$ je težinska aritmetička sredina za $X_1, \ldots, X_n$ sa težinskim koeficijentima koji

su proporcionalni sa $m_1, \ldots, m_n$.
Ako posmatramo grupu, X_j je prosečan gubitak m_j članova grupe u j-toj godini, sledi da $m_j\, X_j$ predstavlja ukupan gubitak grupe u j-toj godini. U ovom slučaju, $\overline{X}$ je ukupan prosečan gubitak po članu grupe tokom n godina. Premija data formulom (3.25) predstavlja kredibilitetnu premiju za jednog člana grupe u $(n+1)$. - oj godini, a kredibilitetna premija za m_{n+1} članova grupe u $(n+1)$. - oj godini je $m_{n+1} \cdot \left[Z\, \overline{X} + (1-Z)\mu\right]$.

Primer 3.5.1. *Pretpostavimo da u godini j imamo N_j zahteva za odštetu od m_j polisa, za $j = 1, \ldots, n$. Takođe pretpostavimo da individualna polisa ima Poasonovu raspodelu sa parametrom Θ, gde parametar Θ ima Gama raspodelu sa parametrima α i β. Ako će u godini $(n+1)$ biti m_{n+1} polisa, odrediti Bilman – Štraubovu ocenu za broj zahteva u godini $(n+1)$.*

Rešenje:

Neka je $S_{i,j}$ slučajna promenljiva koja predstavlja broj zahteva i - te polise u j - toj godini, gde $i = 1, \ldots m_j$. Znamo $S_{i,j} : P(\Theta)$, kao i da važi:

$$N_j = S_{1,j} + S_{2,j} + \ldots + S_{m_j,j},$$

iz čega zaključujemo da $N_j : P(m_j \cdot \Theta)$.

Kako bismo zadovoljili uslove modela, neka je $X_j = N_j/m_j$, $j = 1, \ldots, n$ prosečan broj zahteva od m_j polisa tokom j- te godine.

Tada:

$$\mu(\Theta) = \mathrm{E}(X_j \,|\, \Theta) = \mathrm{E}\left(\frac{N_j}{m_j} \,\middle|\, \Theta\right) = \frac{1}{m_j} \cdot m_j \cdot \Theta = \Theta,$$

$$\frac{\upsilon(\theta)}{m_j} = D(X_j \,|\, \Theta) = D\left(\frac{N_j}{m_j} \,\middle|\, \Theta\right) = \frac{1}{m_j^2} \cdot m_j \cdot \Theta = \frac{\Theta}{m_j}.$$

Sada računamo μ, a i υ:

$$\mu = \mathrm{E}(\mu(\Theta)) = \mathrm{E}(\Theta) = \alpha \cdot \beta,$$

$$a = D(\mu(\Theta)) = D(\Theta) = \alpha \cdot \beta^2,$$

$$\upsilon = \mathrm{E}(\upsilon(\Theta)) = \mathrm{E}(\Theta) = \alpha \cdot \beta.$$

Dobijamo:

$$k = \frac{1}{\beta}, \quad Z = \frac{m}{m + 1/\beta} = \frac{m\,\beta}{m\,\beta + 1}.$$

Za $\overline{X} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{n} m_j\, X_j$, ocena za broj zahteva tokom (n+1) - ve godine za jednog osiguranika iznosi:

$$P = \frac{m\,\beta}{m\,\beta + 1}\,\overline{X} + \frac{1}{m\,\beta + 1}\,\alpha\,\beta.$$

Konačno, ocena za ukupan broj zahteva u (n+1) - oj godini je $m_{n+1} \cdot P$.

3.6 Statističke ocene parametara u modelima

U prethodnim razmatranjima bili smo u prilici da odredimo numeričke vrednosti posmatranih veličina, jer smo pretpostavljali da su nam poznate raspodele $f_{X_i\,|\,\Theta}(x_i\,|\,\theta)$ i $\pi(\theta)$. Ovi primeri su pogodni za ilustraciju metodologije, ali u praksi često nemamo informacije o tim raspodelama. Zato, modeli u praksi zahtevaju da se nepoznati parametri ocene na osnovu podataka, tako da se obezbedi dobro slaganje modela i realnosti.

U ovom delu se objašnjava *neparametarsko ocenjivanje parametara*, odnosno slučaj kada su $f_{X_i\,|\,\Theta}(x_i\,|\,\theta)$ i $\pi(\theta)$ nepoznate raspodele.

Podsetimo se, da bismo odredili kredibilitetnu premiju u Bilmanovom i Bilman - Štraubovom modelu potrebno je da odredimo veličine:

$$\mu = \mathrm{E}(\mu(\Theta)), \quad a = D(\mu(\Theta)), \quad \upsilon = \mathrm{E}(\upsilon(\Theta)).$$

Tada je kredibilitetna premija:

$$Z\,\overline{X} + (1 - Z)\,\mu,$$

gde je:

$$Z = \frac{n}{n + k}, \quad \text{odnosno} \quad Z = \frac{m}{m + k} \quad \text{i} \quad k = \frac{\upsilon}{a}.$$

Kako su $f_{X_i\,|\,\Theta}(x_i\,|\,\theta)$ i $\pi(\theta)$ nepoznate raspodele, ovo nije moguće. Pa je cilj da se na osnovu uzorka pronađu nepristrasne ocene $\hat{\mu}, \hat{a}, \hat{\upsilon}$ za μ, a, υ, redom.

Nažalost, $\hat{k} = \frac{\hat{\upsilon}}{\hat{a}}$ neće biti nepristrasna ocena za k.

Takođe,

$$\hat{Z} = \frac{n}{n + \hat{k}}, \quad \text{odnosno} \quad \hat{Z} = \frac{m}{m + \hat{k}}$$

neće biti centrirana ocena za faktor kredibiliteta Z, ali to ne predstavlja veliki problem.

Razmotrimo sada sledeći problem, imamo r osiguranika i za svakog osiguranika i posmatramo istorijske podatke o štetama u prethodnih n_i godina. Neka X_{ij} predstavlja gubitak i - tog osiguranika u j - toj godini, za $i = 1, \dots, r$ i $j = 1, \dots, n_i$. Pretpostavimo da su iskustva različitih osiguranika nezavisna, odnosno da su slučajni vektori $\{\mathbf{X}_i,\ i = 1, \dots, r\}$ nezavisni, za $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, \dots, X_{in_i})^T$.
Neka su $\Theta_1, \dots, \Theta_r$ nezavisne i identično raspodeljene slučajne promenljive sa gustinom $\pi(\theta_i)$, gde θ_i predstavlja nepoznati parametar rizika za i - tog osiguranika, $i = 1, \dots, r$. Za fiksirano i, neka su slučajne promeljive $X_{ij} \,|\, \Theta$ nezavisne sa funkcijama gustine $f_{X_{ij}\,|\,\Theta}(x_{ij} \,|\, \theta)$, za $j = 1, \dots n_i$. Moguće je da znamo vektor izloženosti riziku i - tog osiguranika $m_i = (m_{i1}, \dots, m_{in_i})^T$, za $i = 1, \dots, r$.

Definišimo sledeće oznake:

- $m_i = \sum_{j=1}^{n_i} m_{ij}$ - ukupna izloženost riziku i - tog osiguranika tokom svih n_i godina posmatranja za $i = 1, \dots, r$,
- $\overline{X}_i = \sum_{j=1}^{n_i} \frac{m_{ij}}{m_i} X_{ij}$ - prosečan iznos gubitaka i - tog osiguranika tokom svih n_i godina posmatranja za $i = 1, \dots, r$,
- $m = \sum_{i=1}^{r} m_i = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i} m_{ij}$ - ukupna izloženost riziku za sve osiguranike,
- $\overline{X} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{r} m_i \cdot \overline{X}_i$ - ukupan prosečan gubitak svih osiguranika.

Kao što smo rekli, $f_{X_i\,|\,\Theta}(x_i \,|\, \theta)$ i $\pi(\theta)$ su nepoznate raspodele, pa za Bilmanov i Bilman - Štraubov model treba oceniti parametre μ, a, υ.

3.6.1 Statističke ocene parametara u Bilmanovom modelu

U ovom delu će biti izložene nepristrasne ocene parametara μ, a, υ iz Bilmanovog modela.
Posmatrajmo prethodni problem pod sledećim pretpostavkama:

- $n_i = n \geq 1$ za $\;i = 1, \dots r,$
- $m_{ij} = 1$ za $\;i = 1, \dots n,\; j = 1, \dots, n_i,$

i odredimo nepristrasne ocene iz Bilmanovog modela.

Nepristrasna ocena za μ je:

$$\hat{\mu} = \overline{X} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} \overline{X}_i,$$

gde je $\overline{X}_i = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} X_{ij}$, za $i = 1, \dots r$.

Dokaz.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\hat{\mu}) &= \frac{1}{r\,n} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{E}(X_{ij}) \\
&= \frac{1}{r\,n} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{E}\left[\mathrm{E}(X_{ij} \,|\, \Theta_i)\right] \\
&= \frac{1}{r\,n} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{E}\left[\mu(\Theta_i)\right] \\
&= \frac{1}{r\,n} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} \mu \\
&= \mu.
\end{aligned}$$

□

Nepristrasna ocena za υ je:

$$\hat{\upsilon} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} \hat{\upsilon}_i, \tag{3.27}$$

gde je $\hat{\upsilon}_i = \dfrac{1}{n-1} \sum\limits_{j=1}^{n} (X_{ij} - \overline{X}_i)^2$, za $i = 1, \dots r$.

Dokaz. Podsetimo se, za fiksirano i slučajne promenljive $X_{i1}, \dots X_{in}$, uslovno po $\Theta_i = \theta_i$ su nezavisne, sledi da je $\hat{\upsilon}_i = \dfrac{1}{n-1} \sum\limits_{j=1}^{n} (X_{ij} - \overline{X}_i)^2$, centrirana ocena za $\upsilon(\theta_i) = D(X_{ij} \,|\, \Theta_i = \theta_i)$.

Iz

$$\mathrm{E}(\hat{\upsilon}_i) = \mathrm{E}\left[\mathrm{E}(\hat{\upsilon}_i \,|\, \Theta_i)\right] = \mathrm{E}\left[\mathrm{E}(\upsilon(\Theta_i)\right] = \upsilon$$

zaključujemo da je $\hat{\upsilon}_i$ nepristrasna ocena i za υ.
Iz

$$\mathrm{E}(\hat{\upsilon}) = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} \underbrace{\mathrm{E}(\hat{\upsilon}_i)}_{\upsilon} = \upsilon$$

sledi da $\hat{\upsilon}$ jeste nepristrasna ocena za υ. □

Odredimo sada nepristrasnu ocenu za a.

Primetimo da važi:

$$\mathrm{E}(\overline{X}_i) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \underbrace{\mathrm{E}(X_{ij})}_{\mu} = \mu, \qquad i = 1, \ldots, r.$$

i

$$\begin{aligned} D(\overline{X}_i) &= \mathrm{E}\left[D(\overline{X}_i \mid \Theta_i)\right] + D\left[\mathrm{E}(\overline{X}_i \mid \Theta_i)\right] \\ &= \mathrm{E}\left[\frac{\upsilon(\Theta_i)}{n}\right] + D\left[\mu(\Theta_i)\right] \\ &= a + \frac{\upsilon}{n}. \end{aligned}$$

Sledi da su $(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots, \overline{X}_r)$ nezavisne slučajne promenljive koje imaju isto očekivanje μ i varijansu $a + \dfrac{\upsilon}{n}$. Njihova aritmetička sredina je $\overline{X} = \dfrac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\overline{X}_i$. Iz jednakosti (1.9) sa strane 11. sledi da je $\dfrac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r}(\overline{X}_i - \overline{X})^2$ nepristrasna ocena za varijansu $a + \dfrac{\upsilon}{n}$, odnosno da važi:

$$\mathrm{E}\left(\widehat{a + \frac{\upsilon}{n}}\right) = a + \frac{\upsilon}{n}.$$

Iz formule (3.27) i prethodnog zaključujemo da je nepristrasna ocena za a:

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \widehat{a + \frac{\upsilon}{n}} - \frac{\hat{\upsilon}}{n} \\ &= \frac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r}(\overline{X}_i - \overline{X})^2 - \frac{1}{r\,n\,(n-1)}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n}(\overline{X}_i - \overline{X})^2. \end{aligned}$$

Primer 3.6.1. *Pretpostavimo da osiguravajuća kompanija ima 3 vrste polisa. Podaci o iznosu šteta u prethodne tri godine za sve grupe dati su u tabeli 3.2. Koristeći Bilmanov model odrediti ukupne gubitke za sledeću godinu za sve tri grupe.*

	2015.	**2016.**	**2017.**
1. grupa	260	300	250
2. grupa	330	310	350
3. grupa	180	230	220

Tabela 3.2: Iznosi šteta

Rešenje:

Primetimo da imamo 3 osiguranika i tri godine posmatranja, pa sledi da je $r = 3$ i $n = 3$. Imamo:

$$\overline{X}_1 = \frac{1}{3}(260 + 300 + 250) = 270,$$

$$\overline{X}_2 = \frac{1}{3}(330 + 310 + 350) = 330,$$

$$\overline{X}_3 = \frac{1}{3}(180 + 230 + 220) = 210.$$

Sledi da je ocena ukupnog očekivanja $\hat{\mu} = \overline{X} = \frac{1}{3}(270 + 330 + 210) = 270$. Računamo dalje:

$$\hat{v}_1 = \frac{1}{2}((260 - 270)^2 + (300 - 270)^2 + (250 - 270)^2) = 700,$$

$$\hat{v}_2 = \frac{1}{2}((330 - 330)^2 + (310 - 330)^2 + (350 - 330)^2) = 400,$$

$$\hat{v}_3 = \frac{1}{2}((180 - 210)^2 + (230 - 210)^2 + (220 - 210)^2) = 700.$$

Sledi:

$$\hat{v} = \frac{1}{3}(700 + 400 + 700) = 600,$$

$$\hat{a} = \frac{1}{3-1}((270 - 270)^2 + (330 - 270)^2 + (210 - 270)^2) = 3400.$$

Sada su:

$$\hat{k} = \frac{\hat{v}}{\hat{a}} = \frac{600}{3400} = 0.176, \qquad Z = \frac{n}{n+k} = 0.94.$$

Primetimo da je ovo slučaj kada je $a \gg v$, odnosno kada je populacija heterogena i kada manuelna premija nije merodavna.

Dakle, ocena zahteva za prvu grupu polisa je:

$$\hat{Z}\,\overline{X}_1 + (1 - \hat{Z})\hat{\mu} = 0.94 \cdot 270 + 0.06 \cdot 270 = 270.$$

Dok je za drugu:

$$\hat{Z}\,\overline{X}_2 + (1-\hat{Z})\hat{\mu} = 0.94 \cdot 330 + 0.06 \cdot 270 = 326,4.$$

Konačno, za treću grupu polisa ocena zahteva je:

$$\hat{Z}\,\overline{X}_3 + (1-\hat{Z})\hat{\mu} = 0.94 \cdot 210 + 0.06 \cdot 270 = 213,6.$$

3.6.2 Statističke ocene parametara u Bilman-Štraubovom modelu

U ovom delu će biti izložene nepristrasne ocene parametara μ, a, υ u Bilman - Štraubovom modelu.

Nepristrasna ocena za μ je:

$$\hat{\mu} = \overline{X} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{r} m_i\,\overline{X}_i,$$

gde je $\overline{X}_i = \dfrac{1}{m_i}\displaystyle\sum_{j=1}^{n_i} m_{ij}\,X_{ij}$, za $i = 1, \ldots r$.

Dokaz.

$$\mathrm{E}(\overline{X}_i) = \mathrm{E}\left[\frac{1}{m_i}\sum_{j=1}^{n_i} m_{ij}\,X_{ij}\right] = \frac{1}{m_i}\sum_{j=1}^{n_i} m_{ij}\,\overbrace{\mathrm{E}(X_{ij})}^{\mu} = \frac{\mu}{m_i}\overbrace{\sum_{j=1}^{n_i} m_{ij}}^{m_i} = \mu.$$

$$\mathrm{E}(\hat{\mu}) = \mathrm{E}(\overline{X}) = \mathrm{E}\left[\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{r} m_i\,\overline{X}_i\right] = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{r} m_i\,\overbrace{\mathrm{E}(\overline{X}_i)}^{\mu} = \frac{\mu}{m}\overbrace{\sum_{i=1}^{r} m_i}^{m} = \mu.$$

□

Nepristrasna ocena za υ je:

$$\hat{\upsilon} = \sum_{i=1}^{r} \frac{n_i - 1}{\sum_{i=1}^{r}(n_i - 1)}\,\hat{\upsilon}_i, \tag{3.28}$$

gde je $\hat{\upsilon}_i = \dfrac{1}{n_i - 1}\displaystyle\sum_{j=1}^{n_i} m_{ij}\,(X_{ij} - \overline{X}_i)^2$, za $i = 1, \ldots r$.

Dokaz. Za fiksirano i važi:

$$\begin{aligned} D(\overline{X}_i \,|\, \Theta_i) &= \sum_{j=1}^{n_i} \left(\frac{m_{ij}}{m_i}\right)^2 D(X_{ij} \,|\, \Theta_i) = \sum_{j=1}^{n_i} \left(\frac{m_{ij}}{m_i}\right)^2 \frac{\upsilon(\Theta_i)}{m_{ij}} \\ &= \frac{\upsilon(\Theta_i)}{m_i^2} \sum_{j=1}^{n_i} m_{ij} = \frac{\upsilon(\Theta_i)}{m_i}. \end{aligned}$$

Primenom prethodne jednakosti dobijamo:

$$\begin{aligned} D(\overline{X}_i) &= \mathrm{E}\left[D(\overline{X}_i \,|\, \Theta_i)\right] + D\left[\mathrm{E}(\overline{X}_i \,|\, \Theta_i)\right] \\ &= \mathrm{E}\left[\frac{\upsilon(\Theta_i)}{m_i}\right] + D\left[\mu(\Theta_i)\right] \\ &= \frac{\upsilon}{m_i} + a. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Dakle, $\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_r$ su nezavisne sa istim očekivanjem μ i varijansom $a + \dfrac{\upsilon}{m_i}$, sledi da primenom jednakosti (1.8) sa strane 11. i izraza (3.29) važi:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\hat{\upsilon}_i) &= \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} m_{ij}\, \mathrm{E}(X_{ij} - \overline{X}_i)^2 \\ &= \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} m_{ij} \left(\mathrm{E}\left[(X_{ij} - \mu)^2\right] - \mathrm{E}\left[(\overline{X}_i - \mu)^2\right]\right) \\ &= \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} m_{ij} \left(D(X_{ij}) - D(\overline{X}_i)\right) \\ &= \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} m_{ij} \left(a + \frac{\upsilon}{m_{ij}} - a - \frac{\upsilon}{m_i}\right) \\ &= \frac{1}{n_i - 1} \left[\upsilon\, n_i - \frac{\upsilon}{m_i} \sum_{j=1}^{n_i} m_{ij}\right] \\ &= \frac{\upsilon}{n_i - 1} (n_i - 1) \\ &= \upsilon. \end{aligned}$$

Zaključujemo da je $\hat{\upsilon}_i$ nepristrasna ocena za υ, $i = 1, \ldots, r$. Primenom prethodnog rezultat dobijamo da je $\hat{\upsilon}$ nepristrasna ocena za υ.

$$\mathrm{E}(\hat{\upsilon}) = \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{r} \frac{n_i - 1}{\sum_{i=1}^{r}(n_i - 1)}\, \hat{\upsilon}_i\right] = \sum_{i=1}^{r} \frac{n_i - 1}{\sum_{i=1}^{r}(n_i - 1)}\, \overbrace{\mathrm{E}(\hat{\upsilon}_i)}^{\upsilon} = \upsilon.$$

□

Nepristrasna ocena za a je:

$$\hat{a} = \left(m - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{r} m_i^2\right)^{-1} \left[\sum_{i=1}^{r} m_i(\overline{X}_i - \overline{X})^2 - \hat{\upsilon}\,(r-1)\right], \tag{3.30}$$

gde je $\hat{\upsilon}$ dato sa (3.28).

Dokaz. Prvo računamo:

$$\begin{aligned} D(\mu) = D(\overline{X}) &= D\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{r} m_i\,\overline{X}_i\right) \\ &= \frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{r} m_i^2\, D(\overline{X}_i) \\ &= \frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{r} m_i^2\left(\frac{\upsilon}{m_i} + a\right). \end{aligned}$$

Sada na osnovu prethodnog računamo:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{r} m_i\,(\overline{X}_i - \overline{X})^2\right] &= \sum_{i=1}^{r} m_i\left(\mathrm{E}\Big[(\overline{X}_i - \overbrace{\mu}^{\mathrm{E}(\overline{X}_i)})^2\Big] - \mathrm{E}\Big[(\overline{X} - \overbrace{\mu}^{\mathrm{E}(\overline{X})})^2\Big]\right) \\ &= \sum_{i=1}^{r} m_i\left(D(\overline{X}_i) - D(\overline{X})\right) \\ &= \sum_{i=1}^{r} m_i\left(\frac{\upsilon}{m_i} + a\right) - m\,D(\overline{X}) \\ &= \sum_{i=1}^{r} m_i\left(\frac{\upsilon}{m_i} + a\right) - m\,\frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{r} m_i^2\left(\frac{\upsilon}{m_i} + a\right) \\ &= \upsilon\cdot r + a\cdot m - \frac{a}{m}\cdot\sum_{i=1}^{r} m_i^2 - \frac{\upsilon}{m}\cdot\sum_{i=1}^{r} m_i \\ &= (r-1)\cdot\upsilon + a\cdot\left(m - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{r} m_i^2\right). \end{aligned}$$

Primenom prethodne jednakosti pokazujemo da je $\hat{a}$ nepristrasna ocena za a.

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\hat{a}) &= \left(m - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{r} m_i^2\right)^{-1}\cdot\left[\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{r} m_i\,(\overline{X}_i - \overline{X})^2\right] - (r-1)\cdot\mathrm{E}(\hat{\upsilon})\right] \\ &= \left(m - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{r} m_i^2\right)^{-1}\cdot\left[(r-1)\cdot\upsilon + a\cdot\left(m - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{r} m_i^2\right) - (r-1)\cdot\upsilon\right] \\ &= a. \end{aligned}$$

□

Kada se primenjuje ovaj model, mora se obratiti pažnja na dve stavke:

- Ako se desi $\hat{a} < 0$, onda uzimamo $\hat{a} = 0$ i $\hat{Z} = 0$,
- Svakog osiguranika moramo posmatrati bar dve godine, odnosno za svako i mora važiti $n_i > 1$.

Primer 3.6.2. *Odrediti vrednosti ukupnih šteta tokom četvrte godine za dve grupe osiguranika, ako su podaci za prethodne tri godine dati u tabeli 3.3.*

	grupa	**2015.**	**2016.**	**2017.**	**2018.**
Broj osiguranika	**1. grupa**	–	100	115	125
Ukupne štete		–	20.000	24.000	?
Broj osiguranika	**2. grupa**	140	160	175	190
Ukupne štete		25.000	28.000	33.000	?

Tabela 3.3: Broj osiguranika i ukupni iznosi šteta

Rešenje:

Imamo dve grupe osiguranika, sledi $r = 2$. Za prvu grupu posmatramo prethodne dve godine, dok za drugu grupu imamo podatke od poslednje tri godine, pa je $n_1 = 2$, $n_2 = 3$. Tada je:

$$m_{11} = 100 \quad \text{i} \quad X_{11} = \frac{20000}{100} = 200,$$

$$m_{12} = 115 \quad \text{i} \quad X_{12} = \frac{24000}{115} = 208,69.$$

Sada je:

$$m_1 = m_{11} + m_{12} = 100 + 115 = 215,$$

$$\overline{X}_1 = \frac{20000 + 24000}{215} = 204,65.$$

Za 2. grupu:

$$m_{21} = 140 \quad \text{i} \quad X_{21} = \frac{25000}{140} = 178,57,$$

$$m_{22} = 160 \quad \text{i} \quad X_{22} = \frac{28000}{160} = 175,$$

$$m_{23} = 175 \quad \text{i} \quad X_{23} = \frac{33000}{175} = 188,57.$$

Tada je:

$$m_2 = m_{21} + m_{22} + m_{32} = 140 + 160 + 175 = 475,$$

$$\overline{X}_2 = \frac{25000 + 28000 + 33000}{475} = 181,05.$$

Ukupna izloženost riziku za obe grupe je:

$$m = m_1 + m_2 = 690,$$

dok je ocena ukupnog očekivanja:

$$\mu = \overline{X} = \frac{m_1\,\overline{X}_1 + m_2\,\overline{X}_2}{m} = 188,4.$$

Sada računamo ocenu za $\hat{\upsilon}$:

$$\hat{\upsilon}_1 = \frac{1}{2-1}\left(100\,(200 - 204.65)^2 + 115\,(208.69 - 204.65)\right) = 4039,234,$$

$$\hat{\upsilon}_2 = \frac{1}{3-1}\left(140\,(178.57-181.05)^2+160\,(175-181.05)^2+175\,(188.57-181.05)^2\right)$$
$$= 8306,888.$$

Konačno:

$$\hat{\upsilon} = \frac{1}{3}\,\hat{\upsilon}_1 + \frac{2}{3}\,\hat{\upsilon}_2 = 6884,335.$$

Primenom formule (3.30) imamo da je:

$$\hat{a} = \left(m - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{r} m_i^2\right)^{-1}\left[\sum_{i=1}^{r} m_i(\overline{X}_i - \overline{X})^2 - \hat{\upsilon}\,(r-1)\right] = 255,2233.$$

Zatim računamo $\hat{k}$:

$$\hat{k} = \frac{\hat{\upsilon}}{\hat{a}} = 26,974.$$

Ocenjeni faktori kredibiliteta za ove dve grupe su:

$$\hat{Z}_1 = \frac{m_1}{m_1 + \hat{k}} = \frac{215}{215 + 26,974} = 0,8885,$$

$$\hat{Z}_2 = \frac{m_2}{m_2 + \hat{k}} = \frac{475}{475 + 26,974} = 0,9463.$$

Kredibilitetne premije po jedinici izloženosti riziku su:

$$P_1 = Z_1\,\overline{X}_1 + (1 - Z_1)\,\mu = 202,8385,$$

$$P_2 = Z_2\,\overline{X}_2 + (1 - Z_2)\,\mu = 181,445.$$

Konačno, ocene ukupnih vrednosti šteta tokom četvrte godine prema Bilman-Štraubovom modelu su:

$$P_1^{ukupno} = m_{14}\,P_1 = 125 \cdot 202,8385 = 25354,81,$$

$$P_2^{ukupno} = m_{24}\,P_2 = 190 \cdot 181,445 = 34474,55.$$

Glava 4

Višedimenzionalni Bilmanov model

4.1 Uvod

U prethodnim delovima rada upoznali smo se sa teorijom kredibiliteta visoke preciznosti u jednoj dimenziji. Videli smo kako se računa Bejzova premija, kao i njene aproksimacije dobijene primenom Bilmanovog i Bilman - Štraubovog modela. Napomenimo da se navedeni modeli uz određene modifikacije mogu koristiti za određivanje procene frekvencija potraživanja, kao i za procene prosečnog iznosa potraživanja.

Novi trendovi u obezbeđivanju finansijske stabilnosti, kao i nove vrste rizika, zahtevaju razvoj aktuarske nauke i njenu primenu u osiguranju. U cilju poboljšanja kvaliteta procene solventnosti osiguravajućih kompanija, projekat Solvency 2 stavlja akcenat na modeliranje rizika i interne modele za upravljanje rizikom osiguranja. Poboljšanje kvaliteta metoda izračunavanja premije je efikasan faktor u smanjenju rizika osiguranja. Tu do izražaja dolazi višedimenzionalni kredibilitet visoke preciznosti jer uzima u obzir više faktora koji utiču na frekvenciju i iznose šteta, zahvaljujući kojima se pojavljuju homogene tarifne ocene koje omogućavaju pravednije određivanje premije. Odnosno, suštinska razlika višedimenzionalnog kredibiliteta je istovremeno posmatranje različitih kategorija i primena ovih informacija na metodološki konzistentan način.

U ovom delu rada upoznaćemo se sa višedimenzionalnim Bilmanovim modelom. Radi lakšeg razumevanja model će biti objašnjen na primeru modelovanja stopa mortaliteta za više populacija. To znači da stope mortaliteta jedne populacije projektujemo na osnovu istorijskih podataka o toj populaciji, ali i na osnovu podataka o drugim populacijama.

4.2 Procena kredibiliteta

Posmatrajmo sledeći problem. Neka je $Y_{x,t,i}$ verovatnoća da je osoba starosti x iz i - te populacije umrla tokom godine t. Pretpostavimo da imamo podatke o stopama smrtnosti osoba starosti x u prethodnih n godina, za svaku od r posmatranih populacija, odnosno da su nam poznate vrednosti n vektora $\mathbf{Y}_{x,t_D}, \ldots, \mathbf{Y}_{x,t_G}$, za $x \in [x_D, x_G]$, gde je:

$$\mathbf{Y}_{x,t} = (Y_{x,t,1}, \ldots, Y_{x,t,r})'.$$

Sada je naš cilj je da odredimo ocenu kredibilteta $\hat{\mathbf{Y}}_{x,t_G+1}$, za $x = x_D, \ldots, x_G$ i sledeću godinu $t_G + 1$. Slično kao u jednodimenzionalnom slučaju pretpostavlja se da za svakog osiguranika starosti x iz i - te populacije nivo rizika može okarakterisati pomoću parametra rizika $\Theta_{x,i}$, za $x = x_D, \ldots, x_G$ i $i = 1, \ldots, r$. Odnosno, kako bismo uveli Bilmanov pristup, pretpostavićemo da za svako $\mathbf{Y}_{x,t}$, gde $t = t_D, \ldots, t_G$ postoji nivo rizika $\boldsymbol{\Theta}_x$ koji ga karakteriše.

Kao što je rečeno cilj je da se proceni $\mathbf{Y}_{x,t_G+1}$, pa je jedna od opcija da $\mathbf{Y}_{x,t_G+1}$ aproksimiramo pomoću linearne funkcije istorijskih podataka $\mathbf{Y}_x(1), \ldots, \mathbf{Y}_x(r)$, gde je $Y_x(i) = (Y_{x,t_D,i}, \ldots, Y_{x,t_G,i})'$. Dakle, posmatramo ocene oblika $c_{x,0} + \sum_{i=1}^{r} \mathbf{C}'_{x,i}\mathbf{Y}_x(i)$, gde je $c_{x,0} = [c_{x,0,1} \ldots, c_{x,0,r}]'$ vektor sa elementima iz skupa $\mathbb{R}$, dok je $\mathbf{C}_{x,i} \in \mathbb{R}^{n,r}$ matrica dimenzija $n \times r$.
Sada je naš zadatak da odredimo $c_{x,0}, \mathbf{C}_{x,1}, \ldots \mathbf{C}_{x,r}$ tako da minimiziramo srednju kvadratnu grešku gubitka:

$$Q = \mathrm{E}\left[\left(\mathbf{Y}_{x,t_G+1} - c_{x,0} - \sum_{i=1}^{r} \mathbf{C}'_{x,i}\mathbf{Y}_x(i)\right)^2\right]. \tag{4.1}$$

Može se pokazati da je linearna ocena kredibiliteta koja minimizira srednju kvadratnu grešku (4.1) data sa:

$$\hat{\mathbf{Y}}_{x,t_G+1} = \mathrm{E}(\mathbf{Y}_{x,t_G+1}) + \mathrm{Cov}(\mathbf{Y}_{x,t_G+1}, \mathbf{Y}_x)(\mathrm{Cov}(\mathbf{Y}_x, \mathbf{Y}'_x))^{-1}(\mathbf{Y}_x - \mathrm{E}(\mathbf{Y}_x)), \tag{4.2}$$

gde je: $\mathbf{Y}_x = (\mathbf{Y}_{x,t_D}, \ldots, \mathbf{Y}_{x,t_G})'$.
Napomenimo da su matrice kovarijansi regularne. Za dokaz prethodnog pogledati [6].

4.3 Višedimenzionalni Bilmanov model

Kako bismo konstruisali višedimenzionalni Bilmanov model prvo navodimo pretpostavke o uslovnoj raspodeli $\mathbf{Y}_{x,t} \,|\, \mathbf{\Theta}_x$, kao i o raspodeli nivoa rizika $\mathbf{\Theta}_x$.

Pretpostavka 4.3.1 *Slučajne promenljive* $\mathbf{Y}_{x,t} \,|\, \mathbf{\Theta}_x$ *gde* $t = t_D, \ldots, t_G$ *su međusobno nezavisne sa istom raspodelom sa očekivanjem i matricom kovarijansi, redom:*

- $\mathrm{E}\left[\mathbf{Y}_{x,t} \,|\, \mathbf{\Theta}_x\right] = \mu(\mathbf{\Theta_x}) = (\mu(\Theta_{x,1}), \ldots, \mu(\Theta_{x,r}))'$,
- $\mathrm{Cov}\left[\mathbf{Y}_{x,t}, \mathbf{Y}'_{x,t} \,|\, \mathbf{\Theta}_x\right] = \Sigma(\mathbf{\Theta_x}) = \left[\sigma^2(\Theta_{x,i}, \Theta_{x,j})\right]_{i,j=1,\ldots,r}$,

gde je $\mathbf{Y}_{x,t} = (Y_{x,t,1}, \ldots, Y_{x,t,r})'$, $\mathbf{\Theta}_x = (\Theta_{x,1}, \ldots, \Theta_{x,r})$.

Pretpostavka 4.3.2 *Slučajne promenljive nivoa rizika* $\mathbf{\Theta}_x = (\Theta_{x,1}, \ldots, \Theta_{x,r})$ *za* $x = x_D, \ldots, x_G$ *su nezavisne sa istom raspodelom kao i* $\mathbf{\Theta} = (\Theta_1, \ldots, \Theta_r)$ *sa očekivanjem i matricom kovarijansi,*

- $\mathrm{E}\left(\mathbf{\Theta}_x\right) = \mu(\mathbf{\Theta_x}) = \mu(\mathbf{\Theta}) = (\mu(\Theta_1), \ldots, \mu(\Theta_r))'$,
- $\mathrm{Cov}\left[\mathbf{\Theta}_x, \mathbf{\Theta}'_x\right] = \Sigma(\mathbf{\Theta_x}) = \Sigma(\mathbf{\Theta}) = \left[\sigma^2(\Theta_i, \Theta_j)\right]_{i,j=1,\ldots,r}$.

Pretpostavka 4.3.3 *Raspodela slučajne promenljive* $\mathbf{\Theta}$ *je takva da važi:*

- $\mu = \mathrm{E}\left[\mu(\mathbf{\Theta})\right] = (\mu(1), \ldots, \mu(r))'$,
- $\mathbf{V} = \mathrm{E}\left[\mathbf{\Sigma}(\mathbf{\Theta})\right] = \left[v(i,j)\right]_{i,j=1,\ldots,r}$,
- $\mathbf{A} = \mathrm{Cov}\left[\mu(\mathbf{\Theta})\right] = \left[a(i,j)\right]_{i,j=1,\ldots,r}$.

Sada, slično kao u jednodimenzionalnom slučaju uvodimo sledeće oznake:

- $\mu(\mathbf{\Theta}_x) = \mathrm{E}\left[\mathbf{Y}_{x,t} \,|\, \mathbf{\Theta}_x\right]$ - hipotetička sredina;
- $\mathbf{\Sigma}(\mathbf{\Theta}_x) = \mathrm{Cov}\left[\mathbf{Y}_{x,t}, \mathbf{Y}'_{x,t} \,|\, \mathbf{\Theta}_x\right]$ - matrica kovarijansi procesa;
- $\mu = \mathrm{E}\left[\mu(\mathbf{\Theta_x})\right] = \mathrm{E}\left[\mu(\mathbf{\Theta})\right] = (\mu(\mathbf{1}), \ldots, \mu(\mathbf{r}))'$ - očekivana vrednost hipotetičkih sredina;
- $\mathbf{A} = \mathrm{Cov}\left[\mu(\mathbf{\Theta_x}), \mu(\mathbf{\Theta_x})'\right] = \mathrm{Cov}\left[\mu(\mathbf{\Theta}), \mu(\mathbf{\Theta})'\right] = \left[a(i,j)\right]_{i,j=1,\ldots,r}$ - matrica kovarijansi hipotetičkih sredina;
- $\mathbf{V} = \mathrm{E}\left[\mathbf{\Sigma}(\mathbf{\Theta}_x)\right] = \mathrm{E}\left[\mathbf{\Sigma}(\mathbf{\Theta})\right] = \left[v(i,j)\right]_{i,j=1,\ldots,r}$ - očekivana vrednost matrice kovarijansi procesa.

Kako bismo rešili zadatak, odnosno procenili $\mathbf{Y}_{x,t_G+1}$ dokazaćemo sledeće leme pod uslovom da važe gore navedene oznake i pretpostavke.

Lema 4.3.1. *Očekivane vrednosti slučajnih promenljivih* $\mathbf{Y}_x$ *i* $\mathbf{Y}_{x,t_G+1}$ *su date sa:*

$$\mu_{\mathbf{Y}x} = \mathrm{E}(\mathbf{Y}_x) = \mu \otimes \mathbf{1}_n \quad i \quad \mu_{\mathbf{Y}x,t_G+1} = \mathrm{E}(\mathbf{Y}_{x,t_G+1}) = \mu,$$

gde je $\otimes$ *Kronekerov proizvod matrica, a* $\mathbf{1}_n = (1, \ldots, 1)'$ *vektor kolona dužine* n.

Dokaz. Iz uslova da važe Pretpostavka 4.3.1, Pretpostavka 4.3.2 i Pretpostavka 4.3.3 dobijamo:

$$\mathrm{E}(\mathbf{Y}_{x,t}) = \mathrm{E}\left[\mathrm{E}\left(\mathbf{Y}_{x,t} \mid \mathbf{\Theta}_x\right)\right] = \mathrm{E}\left[\mu(\mathbf{\Theta}_x)\right] = \mu. \tag{4.3}$$

Sada, iz 4.3 i $\mathbf{Y}_x = (\mathbf{Y}_{x,t_D}, \ldots, \mathbf{Y}_{x,t_G})'$ sledi:

$$\mu_{\mathbf{Y}x} = \mathrm{E}(\mathbf{Y}_x) = \mu \otimes \mathbf{1}_n \quad \text{i} \quad \mu_{\mathbf{Y}x,t_G+1} = \mathrm{E}(\mathbf{Y}_{x,t_G+1}) = \mu.$$

□

Lema 4.3.2. *Matrica kovarijansi slučajne promenljive* $\mathbf{Y}_x$ *je matrica dimenzija* $rn \times rn$ *data sa:*

$$\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{Y}_x,\mathbf{Y}_x} = \mathbf{V} \otimes \mathbf{E}_n + \mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}', \tag{4.4}$$

gde je $\mathbf{E}_n$ *jedinična matrica reda* n *i*

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_n & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_n & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \mathbf{1}_n \end{bmatrix}_{\mathbf{rn \times r}}.$$

Dokaz. Iz uslova da važe Pretpostavka 4.3.1, Pretpostavka 4.3.2 i Pretpostavka 4.3.3 sledi:

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{Cov}\left(\mathbf{Y}_{x,t}, \mathbf{Y}'_{x,t} \mid \mathbf{\Theta}_x\right)\right] = \begin{cases} \mathrm{E}\left[\mathbf{\Sigma}(\mathbf{\Theta}_x)\right] = \mathbf{V}, & t_1 = t_2, \\ \mathbf{0}, & t_1 \neq t_2 \end{cases} \tag{4.5}$$

i

$$\mathrm{Cov}\left[\mathrm{E}\left(\mathbf{Y}_{x,t_1} \mid \mathbf{\Theta}_x\right), \mathrm{E}\left(\mathbf{Y}'_{x,t_2} \mid \mathbf{\Theta}_x\right)\right] = \mathrm{Cov}\left[\mu\left(\mathbf{\Theta}_x\right), \mu\left(\mathbf{\Theta}_x\right)'\right] = \mathbf{A}. \tag{4.6}$$

Sada, primenom (4.5) i (4.6), kao i dekompozicije matrice kovarijansi dobijamo:

$$\begin{aligned}\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{Y}_x,\mathbf{Y}_x} &= \mathrm{Cov}\left[\mathbf{Y}_x, \mathbf{Y}'_x\right] \\ &= \mathrm{E}\left[\mathrm{Cov}\left(\mathbf{Y}_{x,t}, \mathbf{Y}'_{x,t} \,|\, \mathbf{\Theta}_x\right)\right] + \mathrm{Cov}\left[\mathrm{E}\left(\mathbf{Y}_{x,t_1} \,|\, \mathbf{\Theta}_x\right), \mathrm{E}\left(\mathbf{Y}'_{x,t_2} \,|\, \mathbf{\Theta}_x\right)\right] \\ &= \mathbf{V} \otimes \mathbf{E}_n + \mathbf{A} \otimes (\mathbf{1}_n\, \mathbf{1}'_n) \\ &= \mathbf{V} \otimes \mathbf{E}_n + \mathbf{U}\,\mathbf{A}\,\mathbf{U}'.\end{aligned}$$

□

Lema 4.3.3. *Matrica kovarijansi slučajnih promenljivih* $\mathbf{Y}_{x,t_G+1}$ *i* $\mathbf{Y}_x$ *je matrica dimenzija* $r \times rn$ *data sa:*

$$\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{Y}_x,\mathbf{Y}_{x,t_G+1}} = \mathbf{A}\mathbf{U}'.$$

Dokaz. Ova lema se dokazuje analogno prethodnoj:

$$\begin{aligned}\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{Y}_{x,t_G+1},\mathbf{Y}_x} &= \mathrm{Cov}\left[\mathbf{Y}_{x,t_G+1}, \mathbf{Y}_x\right] \\ &= \mathrm{E}\left[\mathrm{Cov}\left(\mathbf{Y}_{x,t_G+1}, \mathbf{Y}_x \,|\, \mathbf{\Theta}_x\right)\right] + \mathrm{Cov}\left[\mathrm{E}\left(\mathbf{Y}_{x,t_G+1} \,|\, \mathbf{\Theta}_x\right), \mathrm{E}\left(\mathbf{Y}_x \,|\, \mathbf{\Theta}_x\right)\right] \\ &= \mathbf{0} + \mathbf{A}\,\mathbf{U}' \\ &= \mathbf{A}\,\mathbf{U}'.\end{aligned}$$

□

Lema 4.3.4. *Inverzna matrica matrice kovarijansi slučajne promenljive* $\mathbf{Y}_x$ *je matrica dimenzija* $rn \times rn$ *data sa:*

$$(\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{Y}_x,\mathbf{Y}_x})^{-1} = (\mathbf{V}^{-1} \otimes\, \mathbf{E}_n) - (\mathbf{V}^{-1} \otimes\, \mathbf{1}_n)\left[\mathbf{A}^{-1} + n\,\mathbf{V}^{-1}\right]^{-1}(\mathbf{V}^{-1} \otimes \mathbf{1}'_{\mathbf{n}}).$$

Dokaz. Podsetimo se jednakosti (2.3) sa strane 16.:

$$(G + BCD)^{-1} = G^{-1} - G^{-1}B(C^{-1} + DG^{-1}B)^{-1}DG^{-1}.$$

Primenom prethodne jednakosti za: $G = \mathbf{V} \otimes \mathbf{E}_n$, $B = \mathbf{U}$, $C = \mathbf{A}$ i $D = \mathbf{U}'$ dobijamo:

$$\begin{aligned}(\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{Y}_x,\mathbf{Y}_x})^{-1} &= (\mathbf{V} \otimes \mathbf{E}_n + \mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}')^{-1} \\ &= (\mathbf{V} \otimes \mathbf{E}_n)^{-1} - \underbrace{(\mathbf{V} \otimes \mathbf{E}_n)^{-1}\,\mathbf{U}}_{?}\left[\mathbf{A}^{-1} + \underbrace{\mathbf{U}'\,(\mathbf{V} \otimes \mathbf{E}_n)^{-1}\,\mathbf{U}}_{?}\right]^{-1}\underbrace{\mathbf{U}'\,(\mathbf{V} \otimes \mathbf{E}_n)^{-1}}_{?}.\end{aligned}$$

Iz $(\mathbf{V} \otimes\, \mathbf{E}_n)^{-1} = (\mathbf{V}^{-1} \otimes\, \mathbf{E}_n^{-1}) = \mathbf{V}^{-1} \otimes\, \mathbf{E}_n$ imamo:

- $\left(\mathbf{V}\otimes\mathbf{E}_n\right)^{-1}\mathbf{U}=\left(\mathbf{V}^{-1}\otimes\mathbf{E}_n\right)\mathbf{U}=\left[v_{i,j}^{-1}\,\mathbf{E}_n\right]_{i,j}\mathbf{U}=\mathbf{V}^{-1}\otimes\mathbf{1}_n$,
- $\mathbf{U}'\left(\mathbf{V}\otimes\mathbf{E}_n\right)^{-1}=\mathbf{U}'\left(\mathbf{V}^{-1}\otimes\mathbf{E}_n\right)=\mathbf{U}'\left[v_{i,j}^{-1}\,\mathbf{E}_n\right]_{i,j}=\mathbf{V}^{-1}\otimes\mathbf{1}_n'$,
- $\mathbf{U}'\left(\mathbf{V}\otimes\mathbf{E}_n\right)^{-1}\mathbf{U}=\mathbf{U}'\left(\mathbf{V}^{-1}\otimes\mathbf{E}_n\right)\mathbf{U}=\left(\mathbf{V}^{-1}\otimes\mathbf{1}_n'\right)\mathbf{U}=\left[v_{i,j}^{-1}\,\mathbf{1}_n'\right]_{i,j}\mathbf{U}=n\,\mathbf{V}^{-1}$,

gde je $v_{i,j}^{-1}$ element matrice $\mathbf{V}^{-1}$ koji se nalazi u i-toj vrsti i j-toj koloni.

Konačno, na osnovu prethodnih jednakosti sledi:

$$\left(\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{Y}_x,\mathbf{Y}_x}\right)^{-1}=\left(\mathbf{V}^{-1}\otimes\mathbf{E}_n\right)-\left(\mathbf{V}^{-1}\otimes\mathbf{1}_n\right)\left[\mathbf{A}^{-1}+n\,\mathbf{V}^{-1}\right]^{-1}\left(\mathbf{V}^{-1}\otimes\mathbf{1}_n'\right).$$

□

Teorema 4.3.1. *Neka važe Pretpostavka 4.3.1, Pretpostavka 4.3.2 i Pretpostavka 4.3.3 . Tada je Bilmanova ocena kredibiliteta za* $\mathbf{Y}_{x,t_G+1}$, $\hat{\mathbf{Y}}_{x,t_G+1}=(\hat{Y}_{x,t_G+1,1},\ldots,\hat{Y}_{x,t_G+1,r})'$, *koja minimizira srednju kvadratnu grešku gubitka (4.1) data sa:*

$$\hat{\mathbf{Y}}_{x,t_G+1}=\mathbf{Z}\,\overline{\mathbf{Y}}_{x,\bullet}+\left(\mathbf{E}_r-\mathbf{Z}\right)\mu,$$

gde su:

- $\mathbf{Z}=\mathbf{A}\left(\frac{1}{n}\mathbf{V}+\mathbf{A}\right)^{-1}$,
- $\overline{\mathbf{Y}}_{x,\bullet}=(\overline{Y}_{x,\bullet,1},\ldots\overline{Y}_{x,\bullet,r})'=\frac{1}{n}\left(\sum_{t=t_D}^{t_G}Y_{x,t,1},\ \ldots,\ \sum_{t=t_D}^{t_G}Y_{x,t,r}\right)'$.

Dokaz. Prvo navodimo 3 jednakosti koje ćemo koristiti u samom dokazu:

1. $\mathbf{U}'\left(\mathbf{V}^{-1}\otimes\mathbf{E}_n\right)=\mathbf{U}'\left[v_{i,j}^{-1}\,\mathbf{E}_n\right]_{i,j}=\mathbf{V}^{-1}\otimes\mathbf{1}_n'$,
2. $\mathbf{U}'\left(\mathbf{V}^{-1}\otimes\mathbf{1}_n\right)=\mathbf{U}'\left[v_{i,j}^{-1}\,\mathbf{1}_n\right]_{i,j}=n\,\mathbf{V}^{-1}$,
3. $\mathbf{U}'\left(\mathbf{V}^{-1}\otimes\mathbf{1}_n'\right)\left(\mathbf{Y}_x-\mu_{\mathbf{Y}_x}\right)=\left[v_{i,j}^{-1}\,\mathbf{1}_n'\right]_{i,j}\left(\mathbf{Y}_x-\mu_{\mathbf{Y}_x}\right)=n\,\mathbf{V}^{-1}(\overline{\mathbf{Y}}_{x,\bullet}-\mu)$.

Iz Lema i prethodnih jednakosti sledi:

$$\begin{aligned}
&\left(\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{Y}_x,\mathbf{Y}_{x,t_G+1}}\right)\left(\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{Y}_x,\mathbf{Y}_x}\right)^{-1}\left(\mathbf{Y}_x-\mu_{\mathbf{Y}_x}\right)=\\
&=\mathbf{A}\mathbf{U}'\left[\left(\mathbf{V}^{-1}\otimes\mathbf{E}_n\right)-\left(\mathbf{V}^{-1}\otimes\mathbf{1}_n\right)\left[\mathbf{A}^{-1}+n\,\mathbf{V}^{-1}\right]^{-1}\left(\mathbf{V}^{-1}\otimes\mathbf{1}_{\mathbf{n}}'\right)\right]\left(\mathbf{Y}_x-\mu_{\mathbf{Y}_x}\right)\\
&\overset{1)}{=}\left[\mathbf{A}(\mathbf{V}^{-1}\otimes\mathbf{1}_n')-\mathbf{A}\mathbf{U}'\left(\mathbf{V}^{-1}\otimes\mathbf{1}_n\right)\left[\mathbf{A}^{-1}+n\,\mathbf{V}^{-1}\right]^{-1}\left(\mathbf{V}^{-1}\otimes\mathbf{1}_{\mathbf{n}}'\right)\right]\left(\mathbf{Y}_x-\mu_{\mathbf{Y}_x}\right)
\end{aligned}$$

$$\overset{2)}{=} \left[\mathbf{A}(\mathbf{V}^{-1} \otimes \mathbf{1}'_n) - \mathbf{A}\, n\, \mathbf{V}^{-1} \left[\mathbf{A}^{-1} + n\, \mathbf{V}^{-1}\right]^{-1} (\mathbf{V^{-1}} \otimes \mathbf{1'_n})\right] (\mathbf{Y}_x - \mu_{\mathbf{Y}_x})$$

$$= \left[\mathbf{A} - \mathbf{A}\, n\, \mathbf{V}^{-1} \left[\mathbf{A}^{-1} + n\, \mathbf{V}^{-1}\right]^{-1}\right] (\mathbf{V}^{-1} \otimes \mathbf{1}'_n)\, (\mathbf{Y}_x - \mu_{\mathbf{Y}_x})$$

$$\overset{3)}{=} \left[\mathbf{A} - \mathbf{A}\, n\, \mathbf{V}^{-1} \left[\mathbf{A}^{-1} + n\, \mathbf{V}^{-1}\right]^{-1}\right] n\, \mathbf{V}^{-1}\, (\overline{\mathbf{Y}}_{x,\bullet} - \mu).$$

Primenom jednakosti (2.1) sa strane 15. za matrice $\mathbf{A}^{-1}$ i $n\,\mathbf{V}^{-1}$ dobijamo:

$$(\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{Y}_x,\mathbf{Y}_{x,t_G+1}})\, (\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{Y}_x,\mathbf{Y}_x})^{-1}\, (\mathbf{Y}_x - \mu_{\mathbf{Y}_x}) = \left(\mathbf{A}^{-1} + n\, \mathbf{V}^{-1}\right)^{-1} n\, \mathbf{V}^{-1}\, (\overline{\mathbf{Y}}_{x,\bullet} - \mu).$$

Sada, koristeći jednakosti (2.2) sa strane 16. za matrice $\mathbf{A}^{-1}$ i $n\,\mathbf{V}^{-1}$ sledi:

$$(\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{Y}_x,\mathbf{Y}_{x,t_G+1}})\, (\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{Y}_x,\mathbf{Y}_x})^{-1}\, (\mathbf{Y}_x - \mu_{\mathbf{Y}_x}) = \mathbf{A} \left(\frac{1}{n}\mathbf{V} + \mathbf{A}\right)^{-1} (\overline{\mathbf{Y}}_{x,\bullet} - \mu) = \mathbf{Z}\, (\overline{\mathbf{Y}}_{x,\bullet} - \mu).$$

Ako ubacimo gornju jednačinu u izraz (4.2) sa strane 48. dobijamo kredibilitetnu ocenu za $\mathbf{Y}_{x,t_G+1}$:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{Y}}_{x,t_G+1} &= \mu + (\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{Y}_x,\mathbf{Y}_{x,t_G+1}})\, (\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{Y}_x,\mathbf{Y}_x})^{-1}\, (\mathbf{Y}_x - \mu_{\mathbf{Y}_x}) \\
&= \mu + \mathbf{Z}\, (\overline{\mathbf{Y}}_{x,\bullet} - \mu) \\
&= \mathbf{Z}\, \overline{\mathbf{Y}}_{x,\bullet} + (\mathbf{E}_r - \mathbf{Z})\, \mu.
\end{aligned}$$

□

4.4 Neparametarski višedimenzionalni Bilmanov model

U Bilmanovom modelu, kao i u jednodimenzionalnom slučaju bili smo u prilici da odredimo numeričke vrednosti posmatranih veličina, jer smo pretpostavljali da su nam poznate raspodele slučajnih promenljivih $\mathbf{Y}_{x,t} \,|\, \mathbf{\Theta}_x$ i $\mathbf{\Theta}_x$. U praksi često nemamo informacije o tim raspodelama i zato modeli zahtevaju da se nepoznati parametri ocene na osnovu podataka, tako da se obezbedi dobro slaganje modela i realnosti.

Podsetimo se, pretpostavljamo da su nam poznate vrednosti n vektora $\mathbf{Y}_{x,t_D}, \ldots, \mathbf{Y}_{x,t_G}$, a naš cilj je da odredimo ocenu kredibilteta $\hat{\mathbf{Y}}_{x,t_G+1}$, za $x = x_D, \ldots, x_G$ i sledeću godinu $t_G + 1$, gde je $\mathbf{Y}_{x,t} = (Y_{x,t,1}, \ldots, Y_{x,t,r})'$ vektor kolona dužine r. Kako bismo odredili ocenu kredibiliteta za $\mathbf{Y}_{x,t_G+1}$, moramo pronaći nepristrasne ocene za očekivanu vrednost hipotetičkih sredina

μ, matricu kovarijansi hipotetičkih sredina $\mathbf{A}$ i očekivanu vrednost matrice kovarijansi procesa $\mathbf{V}$.

Da bismo odredili nepristrasne ocene za $\mu, \mathbf{V}$ i $\mathbf{A}$ uvodimo sledeću pretpostavku:

Pretpostavka 4.4.1 *Slučajne promenljive* $\{(\mathbf{Y}_x, \mathbf{\Theta}_x),\ x = x_D, \ldots, x_G\}$ *gde je* $\mathbf{Y}_x = (\mathbf{Y}_{x,t_D}, \ldots, \mathbf{Y}_{x,t_G})'$ *su nezavisne.*

Nepristrasne ocene za $\mu(i), v(i,j)$ i $a(i,j)$ su:

$$\hat{\mu}(i) = \overline{Y}_{\bullet,\bullet,i} = \frac{1}{m}\sum_{x=x_D}^{x_G} \overline{Y}_{x,\bullet,i}, \quad i = 1, \ldots, r,$$

$$\hat{v}(i,j) = \frac{1}{m}\sum_{x=x_D}^{x_G} \hat{v}_x(i,j), \quad i,j = 1, \ldots, r,$$

$$\hat{a}(i,j) = \frac{1}{m-1}\sum_{x=x_D}^{x_G} [\overline{Y}_{x,\bullet,i} - \overline{Y}_{\bullet,\bullet,i}]\,[\overline{Y}_{x,\bullet,j} - \overline{Y}_{\bullet,\bullet,j}] - \frac{\hat{v}(i,j)}{n},$$

redom, gde za $i,j = 1, \ldots, r$ i $x = x_D, \ldots x_G$ važi:

- $\hat{\mu}_x(i) = \overline{Y}_{x,\bullet,i} = \frac{1}{n}\sum_{t=t_D}^{t_G} \overline{Y}_{x,t,i}$,
- $\hat{v}_x(i,j) = \frac{1}{n-1}\sum_{t=t_D}^{t_G} [Y_{x,t,i} - \overline{Y}_{x,\bullet,i}]\,[Y_{x,t,j} - \overline{Y}_{x,\bullet,j}]$,
- $m = x_G - x_D + 1$.

Nepristrasne ocene za $\mu, \mathbf{V}$ i $\mathbf{A}$ su:

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= (\hat{\mu}(1), \ldots, \hat{\mu}(r))' = \frac{1}{m}\sum_{x=x_D}^{x_G} \hat{\mu}_x, \\ \hat{\mathbf{V}} &= [\hat{v}(i,j)]_{i,j=1,\ldots,r} = \frac{1}{m}\sum_{x=x_D}^{x_G} \hat{\mathbf{V}}_x, \\ \hat{\mathbf{A}} &= [\hat{a}(i,j)]_{i,j=1,\ldots,r}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

redom, gde za $x = x_D, \ldots x_G$ važi:

- $\hat{\mu}_x = \overline{\mathbf{Y}}_{x,\bullet} = (\overline{Y}_{x,\bullet,i}, \ldots, \overline{Y}_{x,\bullet,r})'$,
- $\hat{\mathbf{V}}_x = [\hat{v}_x(i,j)]_{i,j=1,\ldots,r}$.

Kao što znamo $\hat{\mathbf{A}} = [\hat{a}(i,j)]_{i,j=1,\ldots,r}$ je ocenjivač matrice kovarijansi hipotetičkih sredina, odnosno dijagonalni elementi $\hat{a}(i,i)$ su ocene varijansi hipotetičkih sredina, dok su vandijagonalni elementi $\hat{a}(i,j)$, za $i \neq j$ ocene kovarijansi svih parova hipotetičkih sredina. Primetimo da se može desiti da je $\hat{a}(i,i) < 0$ ili $\hat{a}(i,j) > \sqrt{\hat{a}(i,i) \cdot \hat{a}(j,j)}$. Zato je uobičajeno da se prate sledeći koraci (pogledati [7]):

- Staviti $\hat{a}(i,i) = 0$ ako je $\hat{a}(i,i) < 0$ za $i = 1, \ldots r$,
- Staviti $\hat{a}(i,j) = \text{sign}\,[\hat{a}(i,j)] \cdot \min\left\{|\hat{a}(i,j)|, \sqrt{\hat{a}(i,i) \cdot \hat{a}(j,j)}\right\}$ za $i,j = 1, \ldots, r$ i $i \neq j$.

Dakle, neparametarski Bilmanov ocenjivač $\hat{\mathbf{Y}}_{x,t_G+1} = (\hat{Y}_{x,t_G+1,1}, \ldots, \hat{Y}_{x,t_G+1,r})'$, gde x predstavlja broj godina u godini t_G+1, dobijen minimiziranjem srednje kvadratne greške u jednačini (4.1) sa strane 48. dat je sa:

$$\hat{\mathbf{Y}}_{x,t_G+1} = \hat{\mathbf{Z}}\,\overline{\mathbf{Y}}_{x,\bullet} + (\mathbf{E}_r - \hat{\mathbf{Z}})\,\hat{\mu}, \tag{4.8}$$

gde je:

- $\hat{\mathbf{Z}} = \hat{\mathbf{A}} \left(\frac{1}{n}\hat{\mathbf{V}} + \hat{\mathbf{A}}\right)^{-1}$,
- $\overline{\mathbf{Y}}_{x,\bullet} = (\overline{Y}_{x,\bullet,1}, \ldots \overline{Y}_{x,\bullet,r})' = \frac{1}{n}\left(\sum_{t=t_D}^{t_G} Y_{x,t,1}, \ldots, \sum_{t=t_D}^{t_G} Y_{x,t,r}\right)'$,
- $\hat{\mu} = (\hat{\mu}(1), \ldots, \hat{\mu}(r))' = (\overline{Y}_{\bullet,\bullet,1}, \ldots, \overline{Y}_{\bullet,\bullet,r})' = \overline{\mathbf{Y}}_{\bullet,\bullet}$.

Primetimo, da za razliku od jednodimenzionalnog modela, elementi matrice $\hat{\mathbf{Z}}$ mogu biti negativni.

Napomena 4.4.1. *Neparametarski Bilmanov ocenjivač $\hat{\mathbf{Y}}_{x,t_G+1}$ je težinska sredina $\overline{\mathbf{Y}}_{x,\bullet}$ i $\overline{\mathbf{Y}}_{\bullet,\bullet}$, gde je:*

- $\overline{\mathbf{Y}}_{x,\bullet} = \frac{1}{n}\sum_{t=t_D}^{t_G} \mathbf{Y}_{x,t} = \frac{1}{n}\sum_{t=t_D}^{t_G} (Y_{x,t,1}, \ldots, Y_{x,t,r})'$,
- $\overline{\mathbf{Y}}_{\bullet,\bullet} = \frac{1}{n}\sum_{t=t_D}^{t_G} \overline{\mathbf{Y}}_{\bullet,t} = \frac{1}{n}\sum_{t=t_D}^{t_G} (\overline{Y}_{\bullet,t,1}, \ldots, \overline{Y}_{\bullet,t,r})$ *gde je:*

$$\overline{Y}_{\bullet,t,i} = \frac{1}{m}\sum_{x=x_D}^{x_G} Y_{x,t,i}.$$

Sada se pitamo kako da predvidimo šta će biti za k godina, gde $k \geq 2$. Neparametarski Bilmanov ocenjivač $\hat{Y}_{x,t_G+k}$ za godinu $t_G + k$ dat je sa:

$$\hat{\mathbf{Y}}_{x,t_G+k} = \hat{\mathbf{Z}}(t_G + k)\,\overline{\mathbf{Y}}_{x,\bullet}(t_G + k) + (\mathbf{E}_r - \hat{\mathbf{Z}}(t_G + k))\,\overline{\mathbf{Y}}_{\bullet,\bullet}(t_G + k),$$

gde je (t_G+k) pridruženo svakoj od veličina $\mathbf{Z}$, $\overline{\mathbf{Y}}_{x,\bullet}$ i $\overline{\mathbf{Y}}_{\bullet,\bullet}$ kako bi ukazalo da se ove veličine odnose na godinu $(t_G + k)$. U nastavku se navode dva načina, odnosno dve strategije da se odrede $\mathbf{Z}(t_G+k)$, $\overline{\mathbf{Y}}_{x,\bullet}(t_G+k)$ i $\overline{\mathbf{Y}}_{\bullet,\bullet}(t_G+k)$. To su "prošireni prozor" (*expanding window*) EW i "pokretni prozor" (*moving window*) MW. Za više informacija pogledati [13] i [14].

Prošireni prozor, EW

Da bismo dobili Bilmanovu ocenu za $\mathbf{Y}_{x,t_G+k}$, $k \geq 0$ u okviru strategije proširenog prozora pratimo sledeće korake:

- Prvo, ocene kredibiliteta $\{\hat{\mathbf{Y}}_{x,t_G+1}, \ldots, \hat{\mathbf{Y}}_{x,t_G+k-1}\}$ dodamo nizu $\{\mathbf{Y}_{x,t_D}, \ldots, \mathbf{Y}_{x,t_G}\}$. Na taj način povećavamo posmatrani broj godina na osnovu kojih ocenjujemo $\mathbf{Y}_{x,t_G+k}$ za $k-1$, odnosno tada je posmatrani raspon godina $[t_D, t_{G+k-1}]$.
- Dalje, koristeći podatke iz vremenskog raspona $[t_D, t_{G+k-1}]$ dobijamo:

$$\overline{\mathbf{Y}}_{x,\bullet}\,(t_G + k) = \frac{1}{n+k-1}\left[\sum_{t=t_D}^{t_G} \mathbf{Y}_{x,t} + \sum_{t=t_G+1}^{t_G+k-1} \hat{\mathbf{Y}}_{x,t}\right],$$

$$\mu\,(t_G + k) = \overline{\mathbf{Y}}_{\bullet,\bullet}\,(t_G + k) = \frac{1}{m}\sum_{x=x_D}^{x_G} \overline{\mathbf{Y}}_{x,\bullet}\,(t_G + k)$$

  i

$$\hat{\mathbf{Z}}\,(t_G + k) = \hat{\mathbf{A}}\left(\frac{1}{n+k-1}\,\hat{\mathbf{V}} + \hat{\mathbf{A}}\right)^{-1}, \tag{4.9}$$

  gde su $\hat{\mathbf{A}}$ i $\hat{\mathbf{V}}$ u izrazu za $\hat{\mathbf{Z}}\,(t_G + k)$ isti kao i za $\hat{\mathbf{Z}}\,(t_G + 1)$.
- Konačno, Bilmanova ocena kredibiliteta za $\hat{\mathbf{Y}}_{x,t_G+k}$ data je sa:

$$\hat{\mathbf{Y}}_{x,t_G+k} = \hat{\mathbf{Z}}(t_G + k)\,\overline{\mathbf{Y}}_{x,\bullet}(t_G + k) + (\mathbf{E}_r - \hat{\mathbf{Z}}(t_G + k))\,\overline{\mathbf{Y}}_{\bullet,\bullet}(t_G + k).$$

Primetimo da je $\hat{\mathbf{Z}}\,(t_G + k)$ u jednakosti (4.9) rastuće po k u okviru strategije "proširenog prozora".

Pokretni prozor, MW

Da bismo dobili Bilmanovu ocenu za $\mathbf{Y}_{x,t_G+k}$, $k \geq 0$ u okviru strategije pokretnog prozora pratimo sledeće korake:

- Prvo, Bilmanove ocene kredibiliteta $\{\hat{\mathbf{Y}}_{x,t_G+1}, \ldots, \hat{\mathbf{Y}}_{x,t_G+k-1}\}$ dodamo nizu $\{\mathbf{Y}_{x,t_D}, \ldots, \mathbf{Y}_{x,t_G}\}$, dok kolone $\{\hat{\mathbf{Y}}_{x,t_D}, \ldots, \hat{\mathbf{Y}}_{x,t_D+k-1}\}$ brišemo iz istog niza, tako da posmatrani raspon pomeramo u svakoj iteraciji za po jednu godinu. Prethodni proces se završava kada posmatrani raspon godina postane $[t_{D+k-1}, t_{G+k-1}]$.
- Dalje, koristeći podatke iz vremenskog raspona $[t_{D+k-1}, t_{G+k-1}]$ dobijamo:
$$\overline{\mathbf{Y}}_{x,\bullet}(t_G+k) = \frac{1}{n}\left[\sum_{t=t_D+k-1}^{t_G} \mathbf{Y}_{x,t} + \sum_{t=t_G+1}^{t_G+k-1} \hat{\mathbf{Y}}_{x,t}\right],$$
$$\mu(t_G+k) = \overline{\mathbf{Y}}_{\bullet,\bullet}(t_G+k) = \frac{1}{m}\sum_{x=x_D}^{x_G} \overline{\mathbf{Y}}_{x,\bullet}(t_G+k)$$
i
$$\hat{\mathbf{Z}}(t_G+k) = \hat{\mathbf{A}}\left(\frac{1}{n}\hat{\mathbf{V}} + \hat{\mathbf{A}}\right)^{-1}, \tag{4.10}$$
gde su $\hat{\mathbf{A}}$ i $\hat{\mathbf{V}}$ u izrazu za $\hat{\mathbf{Z}}(t_G+k)$ isti kao i za $\hat{\mathbf{Z}}(t_G+1)$.
- Konačno, Bilmanova ocena kredibiliteta za $\hat{\mathbf{Y}}_{x,t_G+k}$ data je sa:
$$\hat{\mathbf{Y}}_{x,t_G+k} = \hat{\mathbf{Z}}(t_G+k)\,\overline{\mathbf{Y}}_{x,\bullet}(t_G+k) + (\mathbf{E}_r - \hat{\mathbf{Z}}(t_G+k))\,\overline{\mathbf{Y}}_{\bullet,\bullet}(t_G+k).$$

Primetimo da je $\hat{\mathbf{Z}}(t_G+k)$ u jednačini (4.10) u okviru strategije "pokretnog prozora" konstantno, odnosno da važi: $\hat{\mathbf{Z}}(t_G+k) = \hat{\mathbf{Z}}(t_G+1)$.

4.5 Primena višedimenzionalnog Bilmanovog modela u aktuarstvu

Tržište životnog osiguranja kod nas sve više raste, odnosno ljudi postaju svesni značajnosti životnog osiguranja. Napomenimo da je tržiste životnog osiguranja u svetu veoma rasprostranjeno, kao i da postoje razne vrste osiguranja života kao što su riziko osiguranje, mešovito osiguranje, osiguranje za doživljenje, penzijsko osiguranje i druga.

Jedan od glavnih zadataka aktuara je da za ova osiguranja odrede premiju polise, ako se zna vrednost osigurane sume i pristupna starost osiguranika. Prilikom određivanja premije aktuari se vode sledećim principom: vrednost ukupno naplaćenih premija od polise i vrednost ukupno isplaćenih naknada koje garantuje polisa moraju biti jednake u trenutku izdavanja polise. Kako aktuari ne znaju šta će se dešavati u budućnosti, njihov cilj je da procene verovatnoće preživljavanja, odnosno smrti osiguranika za svaku godinu trajanja osiguranja. Zato se u ovom odeljku bavimo procenom verovatnoća smrtnosti za osobe određene starosne dobi i pola na osnovu realnih istorijskih podataka.

Sa sajtova [16] i [17] preuzeti su podaci o procenjenom broju stanovnika i broju umrlih osoba prema polu i starosnoj dobi za svaku godinu u periodu od 2011. do 2016. godine. Prostom metodom:

$$Y_{x,t,i} = \frac{\text{broj umrlih osoba u godini } t \text{ iz starosne grupe } x \text{ i populacije } i \cdot 100}{\text{broj stanovnika u godini } t \text{ iz starosne grupe } x \text{ i populacije } i},$$

dobijene su stope mortaliteta osoba iz starosne grupe x i populacije i u godini t, gde:

- $t = 2011, \ldots, 2016$,
- $i = 1, \ldots 4$,
- $x = 1, \ldots, 12$.

Pretpostavimo da se mogu osigurati osobe čija je pristupna starost veća od 14, a manja od 75 godina. U tabeli 4.1 nalazi se opis svake populacije, dok su u tabeli 4.2 date starosne granice za starosne grupe.

i	Opis populacije
1	Muško stanovništvo Republike Srbije
2	Žensko stanovništvo Republike Srbije
3	Muško stanovništvo Republike Hrvatske
4	Žensko stanovništvo Republike Hrvatske

Tabela 4.1: Populacije u modelu

Starosna grupa x	Starost osiguranika
1	15 - 19
2	20 - 24
3	25 - 29
4	30 - 34
5	35 - 39
6	40 - 44
7	45 - 49
8	50 - 54
9	55 - 59
10	60 - 64
11	65 - 69
12	70 - 74

Tabela 4.2: Starosne grupe u modelu

Sada je naš cilj da odredimo stope mortaliteta u 2017. godini za osobe iz starosne grupe x i populacije i, za sve starosne grupe i populacije, odnosno da predvidimo vrednosti vektora $\mathbf{Y}_{x,2017}$, za $x = 1, \ldots, 12$.

U tabeli 4.3 izložene su individualne stope mortaliteta za svaku starosnu grupu x, kao i kolektivne stope mortaliteta dobijene primenom sledećih jednakosti:

- $\mu_x = \overline{\mathbf{Y}}_{x,\bullet} = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{t=t_D}^{t_G} \overline{\mathbf{Y}}_{x,t}$, za $x = 1, \ldots, 12$,
- $\mu = \overline{\mathbf{Y}}_{\bullet,\bullet} = \dfrac{1}{m} \sum\limits_{x=x_D}^{x_G} \overline{\mathbf{Y}}_{x,\bullet}$.

Ocena očekivane vrednosti matrice kovarijansi procesa $\hat{\mathbf{V}}$ računa se primenom formule (4.7) sa strane 54. i ima sledeći oblik:

$$\hat{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} 0,0029 & 0,0023 & 0,0017 & 0,0013 \\ 0,0023 & 0,0025 & 0,0018 & 0,0014 \\ 0,0017 & 0,0018 & 0,0026 & 0,0013 \\ 0,0013 & 0,0014 & 0,0013 & 0,0013 \end{bmatrix}.$$

Populacija	**1**	**2**	**3**	**4**
$\overline{\mathbf{Y}}_{1,\bullet}$	0,0443	0,0202	0,0466	0,0155
$\overline{\mathbf{Y}}_{2,\bullet}$	0,0701	0,0255	0,0707	0,0198
$\overline{\mathbf{Y}}_{3,\bullet}$	0,0844	0,0371	0,0734	0,0272
$\overline{\mathbf{Y}}_{4,\bullet}$	0,1158	0,0530	0,0932	0,0367
$\overline{\mathbf{Y}}_{5,\bullet}$	0,1583	0,0818	0,1343	0,0583
$\overline{\mathbf{Y}}_{6,\bullet}$	0,2538	0,1404	0,2063	0,0979
$\overline{\mathbf{Y}}_{7,\bullet}$	0,4713	0,2523	0,3909	0,1769
$\overline{\mathbf{Y}}_{8,\bullet}$	0,8349	0,4178	0,6941	0,2883
$\overline{\mathbf{Y}}_{9,\bullet}$	1,3853	0,6559	1,1514	0,4668
$\overline{\mathbf{Y}}_{10,\bullet}$	2,1121	1,0138	1,8085	0,7018
$\overline{\mathbf{Y}}_{11,\bullet}$	3,0426	1,6204	2,6383	1,1386
$\overline{\mathbf{Y}}_{12,\bullet}$	4,6921	2,9480	3,9928	2,0244
μ	1,1054	0,6055	0,9417	0,4210

Tabela 4.3: Individualne i kolektivne stope mortaliteta

Ocena matrice kovarijansi hipotetičkih sredina $\hat{\mathbf{A}}$ je sledećeg oblika:

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2,1837 & 1,3004 & 1,8676 & 0,8974 \\ 1,3004 & 0,7855 & 1,1116 & 0,5415 \\ 1,8676 & 1,1116 & 1,5972 & 0,7671 \\ 0,8974 & 0,5415 & 0,7671 & 0,3732 \end{bmatrix}.$$

Element matrice $\hat{\mathbf{A}}$ koji se nalazi u i-toj vrsti i j-toj koloni dobijen je primenom sledeće formule:

$$\hat{a}(i,j) = \frac{1}{m-1} \sum_{x=x_D}^{x_G} [\overline{Y}_{x,\bullet,i} - \overline{Y}_{\bullet,\bullet,i}]\,[\overline{Y}_{x,\bullet,j} - \overline{Y}_{\bullet,\bullet,j}] - \frac{\hat{v}(i,j)}{n}.$$

Primenom formule:

$$\hat{\mathbf{Z}} = \hat{\mathbf{A}} \left(\frac{1}{n} \hat{\mathbf{V}} + \hat{\mathbf{A}} \right)^{-1},$$

određena je ocena matrice kredibiliteta:

$$\hat{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} 0,6873 & -0,2897 & 0,3428 & 0,4668 \\ -0,0210 & 0,4967 & 0,0059 & 0,7677 \\ 0,5809 & -0,0224 & 0,3486 & -0,0259 \\ 0,0504 & 0,6290 & -0,0137 & -0,0057 \end{bmatrix}.$$

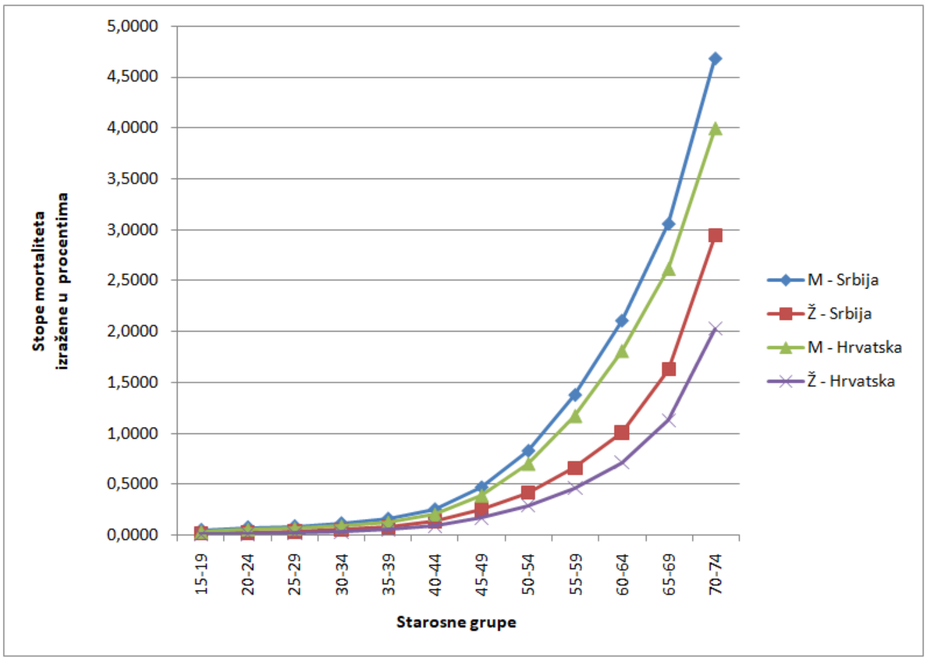
Ocene kredibilitetnih stopa mortaliteta predstavljene vektorima stopa mortaliteta za svaku starosnu grupu dobijene su kao kombinacija individualne i kolektivne stope mortaliteta, odnosno primenom formule (4.8). Ove ocene prikazane su u tabeli 4.4.

Populacija	**1**	**2**	**3**	**4**
$\hat{\mathbf{Y}}_{1,2017}$	0,0496	0,0204	0,0369	0,0140
$\hat{\mathbf{Y}}_{2,2017}$	0,0760	0,0260	0,0600	0,0183
$\hat{\mathbf{Y}}_{3,2017}$	0,0869	0,0372	0,0688	0,0262
$\hat{\mathbf{Y}}_{4,2017}$	0,1150	0,0518	0,0934	0,0375
$\hat{\mathbf{Y}}_{5,2017}$	0,1601	0,0820	0,1311	0,0570
$\hat{\mathbf{Y}}_{6,2017}$	0,2519	0,1400	0,2094	0,0975
$\hat{\mathbf{Y}}_{7,2017}$	0,4691	0,2527	0,3955	0,1759
$\hat{\mathbf{Y}}_{8,2017}$	0,8270	0,4146	0,7059	0,2935
$\hat{\mathbf{Y}}_{9,2017}$	1,3764	0,6610	1,1751	0,4636
$\hat{\mathbf{Y}}_{10,2017}$	2,1073	1,0078	1,8123	0,7150
$\hat{\mathbf{Y}}_{11,2017}$	3,0594	1,6299	2,6171	1,1295
$\hat{\mathbf{Y}}_{12,2017}$	4,6863	2,9427	3,9949	2,0240

Tabela 4.4: Kredibilitetne stope mortaliteta

Podsetimo se, naš cilj je bio da procenimo stope mortaliteta za svaku starosnu grupu u okviru svake posmatrane populacije. Ako osiguravajuća kompanija posluje na teritoriji Republike Srbije, aktuari za obračun premije osobe muškog pola koja pripada starosnoj grupi i koriste prvu komponentu vektora $\hat{\mathbf{Y}}_{i,2017}$, dok drugu komponentu navedenog vektora koriste za obračun premije ženske osobe iz iste starosne grupe. Analogno, ako osiguravajuća kompanija posluje na teritoriji Republike Hrvatske, aktuari za obračun premije osobe muškog pola koja pripada starosnoj grupi i koriste treću komponentu vektora $\hat{\mathbf{Y}}_{i,2017}$, dok četvrtu komponentu navedenog vektora koriste za obračun premije ženske osobe iz iste starosne grupe.

Na slici 4.1 grafički su predstavljene ocene stopa mortaliteta za svaku populaciju, za 2017. godinu.



Slika 4.1: Kredibilitetne stope mortaliteta

Posmatrajući sliku 4.1 primećujemo da su stope mortaliteta veće za mušku nego za žensku populaciju. To nam govori da osiguravajuće kompanije veći rizik prihvataju za muškarce nego za žene, pa će zbog toga muškarci plaćati veću premiju od žena. Takođe vidimo da su stope mortaliteta stanovništva Republike Srbije veće od stopa mortaliteta stanovništva Republike Hrvatske. Analogno zaključujemo da osiguravajuće kompanije Srbije prihvataju veći rizik od kompanija koje posluju na teritoriji Hrvatske, odnosno da će stanovništvo Republike Srbije plaćati veću premiju nego stanovništvo Republike Hrvatske. Sa slike 4.1 možemo da primetimo i jedno logično zapažanje. Stope mortaliteta osoba čija je starost između 15 i 50 godina su jako male, dok za osobe starosti veće od 50 godina stope mortaliteta polako rastu. Zaključujemo da osiguravajuće kuće veći rizik prihvataju za starije nego za mlađje osobe, odnosno mlađe osobe će plaćati manju premiju od starijih osoba.

Predikcije za 2018. godinu

Kao što smo rekli, cilj aktuara je da procene verovatnoće preživljavanja, odnosno smrti osiguranika za svaku godinu trajanja osiguranja, zbog toga nam nisu potrebne samo predikcije za 2017. godinu, već i za naredne godine.

Predikcije za stope mortaliteta za 2018. godinu izračunaćemo primenom metoda "proširenog prozora" i "pokretnog prozora" sa kojima smo se upoznali u prethodnom delu rada.

Prošireni prozor

Stope mortaliteta za 2018. godinu ocenjene primenom metode "proširenog prozora" nalaze se u tabeli 4.5. Navedene ocene računaju se na osnovu realnih podataka za svaku godinu u periodu od 2011. do 2016. godine, kao i na osnovu predviđenih podataka za 2017. godinu.

Populacija	**1**	**2**	**3**	**4**
$\hat{\mathbf{Y}}_{1,2018}$	0,0496	0,0205	0,0369	0,0140
$\hat{\mathbf{Y}}_{2,2018}$	0,0760	0,0261	0,0601	0,0183
$\hat{\mathbf{Y}}_{3,2018}$	0,0869	0,0372	0,0689	0,0263
$\hat{\mathbf{Y}}_{4,2018}$	0,1150	0,0517	0,0934	0,0376
$\hat{\mathbf{Y}}_{5,2018}$	0,1601	0,0821	0,1311	0,0570
$\hat{\mathbf{Y}}_{6,2018}$	0,2520	0,1401	0,2094	0,0976
$\hat{\mathbf{Y}}_{7,2018}$	0,4692	0,2529	0,3955	0,1757
$\hat{\mathbf{Y}}_{8,2018}$	0,8268	0,4142	0,7059	0,2938
$\hat{\mathbf{Y}}_{9,2018}$	1,3768	0,6614	1,1747	0,4627
$\hat{\mathbf{Y}}_{10,2018}$	2,1063	1,0065	1,8124	0,7159
$\hat{\mathbf{Y}}_{11,2018}$	3,0597	1,6303	2,6169	1,1284
$\hat{\mathbf{Y}}_{12,2018}$	4,6866	2,9430	3,9952	2,0246

Tabela 4.5: Kredibilitetne stope mortaliteta za 2018. godinu dobijene metodom proširenog prozora

Pokretni prozor

Prilikom ocena stopa mortaliteta za 2017. godinu koristili smo realne podatke iz prethodnih 6 godina. Za ocene stopa mortaliteta za 2018. godinu primenom metode "pokretnog prozora" posmatrani opseg godina ostaje 6, ali stope mortaliteta iz 2011. godine zamenjujemo predviđenim stopama mortaliteta za 2017. godinu. Navedene stope mortaliteta nalaze se u tabeli 4.6.

Populacija	**1**	**2**	**3**	**4**
$\hat{\mathbf{Y}}_{1,2018}$	0,0453	0,0162	0,0335	0,0102
$\hat{\mathbf{Y}}_{2,2018}$	0,0713	0,0214	0,0557	0,0139
$\hat{\mathbf{Y}}_{3,2018}$	0,0833	0,0349	0,0656	0,0238
$\hat{\mathbf{Y}}_{4,2018}$	0,1133	0,0517	0,0918	0,0365
$\hat{\mathbf{Y}}_{5,2018}$	0,1584	0,0805	0,1296	0,0551
$\hat{\mathbf{Y}}_{6,2018}$	0,2510	0,1423	0,2087	0,0988
$\hat{\mathbf{Y}}_{7,2018}$	0,4587	0,2505	0,3890	0,1749
$\hat{\mathbf{Y}}_{8,2018}$	0,8172	0,4163	0,6963	0,2931
$\hat{\mathbf{Y}}_{9,2018}$	1,3773	0,6670	1,1718	0,4695
$\hat{\mathbf{Y}}_{10,2018}$	2,1113	1,0116	1,8055	0,7118
$\hat{\mathbf{Y}}_{11,2018}$	3,0273	1,5933	2,5918	1,1074
$\hat{\mathbf{Y}}_{12,2018}$	4,6507	2,9057	3,9839	2,0048

Tabela 4.6: Kredibilitetne stope mortaliteta za 2018. godinu dobijene metodom pokretnog prozora

Glava 5

Višedimenzionalni Bilman-Štraubov model

5.1 Uvod

U prethodnom delu upoznali smo se sa višedimenzionalnim Bilmanovim modelom. Videli smo kako se na osnovu gore navedenog modela računaju stope mortaliteta za više populacija. Sada ćemo se upoznati sa višedimenzionalnim Bilman-Štraubovim modelom.

U osiguranju automobila, kao i u drugim granama osiguranja uspostavljen je tarifni sistem. To znači da se prilikom određivanja premije u obzir uzima više faktora koji utiču na iznos i frekvenciju šteta. Za izračunavanje takvih tarifa standardno je koristiti multivarijantne statističke tehnike kao što je generalizovano linerarno modeliranje. Ove metode dobro funkcionišu, odnosno dobro su se pokazale za 'normalne', prosečne štete. Međutim, pitamo se šta je sa retkim, ali izuzetno bitnim 'velikim' štetama, koje čine više od polovine ukupnih potraživanja. Savremeni autori smatraju da je višedimenzionalni kredibilitet prikladno rešenje u takvoj situaciji jer posmatra podatke iz različitih kategorija istovremeno, a zatim nam govori šta možemo da zaključimo o jednoj kategoriji uzimajući u obzir i podatke o drugim kategorijama.

Pored osiguranja automobila, višedimenzionalni Bilman-Štraubov model se može primeniti i za osiguranje zaposlenih u nekoj kompaniji. U takvoj situaciji razlikujemo dve kategorije, a to su povrede nastale na poslu i van njega, a u okviru ovih kategorije razlikujemo kratkoročne i dugoročne povrede.

5.2 Procena kredibiliteta

Podsetimo se, u jednodimenzionalnom Bilman-Štraubovom modelu posmatrali smo veličinu X_{ij} koja je predstavljala prosečan iznos šteta za rizik i (i-tu grupu) u godini j sa težinama m_{ij} (broj osiguranika u i-toj grupi tokom j-te godine). Sada, u višedimenzionalnom Bilman-Štraubovom modelu posmatramo vektor prosečnih iznosa šteta za i-tu grupu u godini j:

$$\mathbf{X}_{i,j} = (X_{i,j,1}, X_{i,j,2}, \ldots, X_{i,j,p})'$$

i vektor izloženosti riziku i-te grupe u godini j:

$$\mathbf{m}_{i,j} = (m_{i,j,1}, m_{i,j,2}, \ldots, m_{i,j,p})',$$

gde $i = 1 \ldots, I$ i $j = 1, \ldots n$.

Takođe, pretpostavimo da za svaku grupu i postoji nivo rizika koje je karakteriše: $\mathbf{\Theta}_i = (\Theta_{i,1}, \Theta_{i,2}, \ldots, \Theta_{i,p})'$. Odnosno, pretpostavljamo da se za svaku grupu osiguranika i iz k - te kategorije nivo rizika može okarakterisati pomoću parametra rizika $\Theta_{i,k}$, za $i = 1, \ldots, I$ i $k = 1, \ldots, p$.

U jednodimenzionalnom Bilman-Štraubovom modelu cilj je bio odrediti premiju za narednu godinu $\hat{X}_{i,n+1}$ za svaku grupu (nivo rizika) i, dok je cilj u višedimenzionalnom Bilman-Štraubovom modelu odrediti vektor premija za narednu godinu za svaku grupu i:

$$\hat{\mathbf{X}}_{i,n+1} = \left(\hat{X}_{i,n+1,1}, \hat{X}_{i,n+1,2}, \ldots, \hat{X}_{i,n+1,p}\right)'.$$

Kao što smo rekli cilj je da se proceni $\mathbf{X}_{i,n+1}$, pa je jedna od opcija da $\mathbf{X}_{i,n+1}$ aproksimiramo pomoću linearne funkcije istorijskih podataka $\mathbf{X}_i(1), \ldots, \mathbf{X}_i(p)$, gde je $\mathbf{X}_i(k) = (X_{i,1,k}, \ldots, X_{i,n,k})'$. Dakle, posmatramo ocene oblika $a_{i,0} + \sum_{k=1}^{p} \mathbf{A}'_{i,k} \mathbf{X}_i(k)$, gde je $a_{i,0} = [a_{i,0,1} \ldots, a_{i,0,p}]'$ vektor sa elementima iz skupa $\mathbb{R}$, dok je $\mathbf{A}_{i,k} \in \mathbb{R}^{n,p}$ matrica dimenzija $n \times p$.
Sada je naš zadatak da odredimo $a_{i,0}, \mathbf{A}_{i,1}, \ldots \mathbf{A}_{i,p}$ tako da minimiziramo srednju kvadratnu grešku gubitka:

$$Q = \mathrm{E}\left[\left(\mathbf{X}_{i,n+1} - a_{x,0} - \sum_{k=1}^{p} \mathbf{A}'_{i,k}\mathbf{X}_i(k)\right)^2\right]. \tag{5.1}$$

Može se pokazati da je linearna ocena kredibiliteta koja minimizira srednju kvadratnu grešku 5.1 data sa:

$$\hat{\mathbf{X}}_{i,n+1} = \mathrm{E}(\mathbf{X}_{i,n+1}) + \mathrm{Cov}(\mathbf{X}_{i,n+1}, \mathbf{X}_i)(\mathrm{Cov}(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_i'))^{-1}(\mathbf{X}_i - \mathrm{E}(\mathbf{X}_i)), \quad (5.2)$$

gde je: $\mathbf{X}_i = (\mathbf{X}_{i,1}, \ldots, \mathbf{X}_{i,n})'$.
Napomenimo da su matrice kovarijansi regularne, kao i da se dokaz prethodnog izraza može pronaći u [6].

5.3 Višedimenzionalni Bilman-Štraubov model

U ovom delu koristićemo sledeće oznake:

- $\mu(\mathbf{\Theta}_i) = \mathrm{E}\left[\mathbf{X}_{i,j} \,|\, \mathbf{\Theta}_i\right]$ - hipotetička sredina;
- $\mathbf{\Sigma}(\mathbf{\Theta}_i) = \mathrm{Cov}\left[\mathbf{X}_{i,j}, \mathbf{X}'_{i,j} \,|\, \mathbf{\Theta}_i\right]$ - matrica kovarijansi procesa;
- $\mu = \mathrm{E}\left[\mu(\mathbf{\Theta}_i)\right] = \mathrm{E}\left[\mu(\mathbf{\Theta})\right] = (\mu(1), \ldots, \mu(p))'$ - očekivana vrednost hipotetičkih sredina (kolektivna premija);
- $\mathbf{T} = \mathrm{Cov}\left[\mu(\mathbf{\Theta}_i), \mu(\mathbf{\Theta}_i)'\right] = \mathrm{Cov}\left[\mu(\mathbf{\Theta}), \mu(\mathbf{\Theta})'\right]$ - matrica kovarijansi hipotetičkih sredina;
- $\mathbf{S} = \mathrm{E}\left[\mathbf{\Sigma}(\mathbf{\Theta}_i)\right] = \mathrm{E}\left[\mathbf{\Sigma}(\mathbf{\Theta})\right]$ - očekivana vrednost matrice kovarijansi procesa.

U višedimenzionalnom Bilman-Štraubovom modelu važe sledeće pretpostavke o uslovnoj raspodeli $\mathbf{X}_{i,j} \,|\, \mathbf{\Theta}_i$, kao i o raspodeli nivoa rizika $\mathbf{\Theta}_i$.

Pretpostavka 5.3.1 *Slučajne promenljive $\mathbf{X}_{i,j} \,|\, \mathbf{\Theta}_i$ gde $j = 1, \ldots, n$ su međusobno nezavisne sa istom raspodelom sa očekivanjem i matricom kovarijansi, redom:*

$$\mathrm{E}\left[\mathbf{X}_{i,j} \,|\, \mathbf{\Theta}_i\right] = \mu(\mathbf{\Theta}_i) = (\mu(\Theta_{i,1}), \ldots, \mu(\Theta_{i,p}))',$$

$$\mathrm{Cov}\left[\mathbf{X}_{i,j}, \mathbf{X}'_{i,j} \,|\, \mathbf{\Theta}_i\right] = \Sigma(\mathbf{\Theta}_i) = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1^2(\mathbf{\Theta}_i)}{m_{i,j,1}} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_2^2(\mathbf{\Theta}_i)}{m_{i,j,2}} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{\sigma_p^2(\mathbf{\Theta}_i)}{m_{i,j,p}} \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

Pretpostavka 5.3.2 *Parovi* $\{(\boldsymbol{\Theta}_i, \mathbf{X}_i) : i = 1, 2, \ldots, I\}$ *su nezavisni, gde je* $\mathbf{X}_i = (\mathbf{X}'_{i,1}, \mathbf{X}'_{i,2}, \ldots, \mathbf{X}'_{i,n})$. *Takođe, slučajne promenljive nivoa rizika* $\boldsymbol{\Theta}_i = (\Theta_{i,1}, \ldots, \Theta_{i,p})$ *su nezasvisne sa istom raspodelom kao i* $\boldsymbol{\Theta} = (\Theta_1, \ldots, \Theta_p)$ *sa očekivanjem i matricom kovarijansi:*

$$\mathrm{E}\left(\boldsymbol{\Theta}_i\right) = \mu(\boldsymbol{\Theta}_i) = \mu(\boldsymbol{\Theta}) = (\mu(\Theta_1), \ldots, \mu(\Theta_p))',$$

$$\mathrm{Cov}\left[\boldsymbol{\Theta}_i, \boldsymbol{\Theta}'_i\right] = \Sigma(\boldsymbol{\Theta}_i) = \Sigma(\boldsymbol{\Theta}) = \left[\sigma^2(\Theta_i, \Theta_j)\right]_{i,j=1,\ldots,p}.$$

Primetimo da je matrica kovarijansi (5.3) dijagonalna, pa pretpostavljamo da su komponente vektora $\mathbf{X}_{i,j} \mid \boldsymbol{\Theta}_i$ nezavisne. Međutim, u nekim situacijama ne možemo tvrditi nezavisnost. Na primer, ako želimo da procenimo frekvencije 'velikih' šteta i frekvencije 'normalnih' šteta na osnovu višedimenzionalnog Bilman-Štraubovog modela, pretpostavka o nezavisnosti nije ispunjena. Kada ocenjujemo frekvencije 'velikih' i 'normalnih' šteta mere izloženosti riziku $m_{i,j,1}$ i $m_{i,j,2}$ se odnose na isti broj ugovora, odnosno važi $m_{i,j,1} = m_{i,j,2}$. U slučaju kada su mere izloženosti riziku jednake: $m_{i,j,1} = \ldots = m_{i,j,p} = m_{i,j}$ možemo *standardnu pretpostavku* zameniti *alternativnom pretpostavkom.*

Alternativna pretpostavka se razlikuje od standardne pretpostavke na mestu matrice kovarijansi u **Pretpostavci 5.3.1.**, gde matricu kovarijansi (5.3) možemo zameniti sledećom matricom kovarijansi:

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{X}_{i,j}, \mathbf{X}'_{i,j} \mid \boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{i}}) = \frac{1}{m_{i,j}} \boldsymbol{\Sigma}\left(\boldsymbol{\Theta}_i\right), \tag{5.4}$$

gde su težine svih komponenti vektora $\mathbf{X}_{i,j}$ jednake, odnosno važi:
$m_{i,j,1} = \ldots = m_{i,j,p} = m_{i,j}$.

Ako su ispunjene **Pretpostavka 5.3.1** i **Pretpostavka 5.3.2**, tada je Bilman-Štraubova ocena kredibiliteta za vektor premija i-te grupe za narednu godinu $\hat{\mathbf{X}}_{i,n+1} = \left(\hat{X}_{i,n+1,1}, \hat{X}_{i,n+1,2}, \ldots, \hat{X}_{i,n+1,p}\right)'$ koja minimizira srednju kvadratnu grešku gubitka (5.1) data sa:

$$\hat{\mathbf{X}}_{i,n+1} = \mathbf{Z}_i \cdot \mathbf{B}_i + (\mathbf{E} - \mathbf{Z}_i) \cdot \mu, \tag{5.5}$$

gde su:

- $\mathbf{B}_i$ individualna ocena premije za i-tu grupu (vektora $\mathbf{X}_{i,n+1}$),
- μ kolektivna ocena vektora $\mathbf{X}_{i,n+1}$,

- $\mathbf{Z}_i$ matrica kredibiliteta koja se dobija uopštenjem jednakosti (3.26) sa strane 35. i ima sledeći oblik:

$$\mathbf{Z}_i = \mathbf{T} \cdot (\mathbf{T} + \mathbf{M}_{i,\bullet}^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{M}_{i,\bullet}^{-\frac{1}{2}})^{-1}. \tag{5.6}$$

Primetimo da je ocena kredibiliteta $\hat{\mathbf{X}}_{i,n+1}$ linearna kombinacija individualne i kolektivne ocene vektora $\mathbf{X}_{i,n+1}$.

Individualna ocena $\mathbf{B}_i$ predstavlja vektor prosečnih godišnjih šteta za i-tu grupu (i-ti rizik), odnosno imamo:

$$\mathbf{B}_i = (B_{i,1}, B_{i,2}, \dots, B_{i,p})',$$

gde za $k = 1, \dots, p$ i $m_{i,\bullet,k} = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j,k}$ važi:

$$B_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{m_{i,j,k}}{m_{i,\bullet,k}} \cdot X_{i,j,k}.$$

Ako je ispunjena standardna pretpostavka, tj. ako važi jednakost (5.3). i ako je matrica izloženosti riziku $\mathbf{M}_{i,j}$ oblika:

$$\mathbf{M}_{i,j} = \begin{bmatrix} m_{i,j,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_{i,j,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_{i,j,p} \end{bmatrix},$$

tada matrica $\mathbf{M}_{i,\bullet}^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{M}_{i,\bullet}^{-\frac{1}{2}}$ ima sledeće elemente:

$$\mathbf{M}_{i,\bullet}^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{M}_{i,\bullet}^{-\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1^2}{m_{i,\bullet,1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_2^2}{m_{i,\bullet,2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\sigma_p^2}{m_{i,\bullet,p}} \end{bmatrix}.$$

Napomenimo da Bilman-Štraubova premija kredibiliteta $\hat{\mathbf{X}}_{i,n+1}$ data formulom (5.5) predstavlja vektor kredibilitetnih premija za i-tu grupu ako pretpostavimo da se u svakoj kategoriji k, $k = 1, \dots, p$ nalazi po jedan osiguranik i-te grupe. Ako je vektor izloženosti i-te grupe za narednu godinu $\mathbf{m}_{i,n+1}$, tada je premija kredibiliteta data sa:

$$\mathbf{m}_{i,n+1} \circ \mathbf{X}_{i,n+1}.$$

Razmotrimo sada šta se dešava sa ocenom kredibiliteta $\hat{\mathbf{X}}_{i,n+1}$ kada umesto standardne pretpostavke važi alternativna pretpostavka.

Kao što smo rekli, alternativna pretpostavka važi ako su mere izloženosti riziku jednake, odnosno ako važi: $m_{i,j,1} = \ldots = m_{i,j,p} = m_{i,j}$.

Teorema 5.3.1. *Neka važe alternativne pretpostavke, tada je Bilman-Štraubova ocena kredibiliteta za vektor premija i-te grupe za narednu godinu* $\hat{\mathbf{X}}_{i,n+1}$ *koja minimizira srednju kvadratnu grešku gubitka (5.1) data sa:*

$$\hat{\mathbf{X}}_{i,n+1} = \mathbf{Z}_i \cdot \mathbf{B}_i + (\mathbf{E} - \mathbf{Z}_i) \cdot \mu,$$

gde su:

- $\mathbf{B}_i$ *vektor individualne ocene premije za i-tu grupu dimenzije p sa sledećim elementima:*

$$B_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{m_{i,j}}{m_{i,\bullet}} \cdot X_{i,j,k} \quad \textit{za} \quad k = 1, \ldots, p,$$

- μ *kolektivna ocena vektora* $\mathbf{X}_{i,n+1}$,
- $\mathbf{Z}_i$ *matrica kredibiliteta sledećeg oblika:*

$$\mathbf{Z}_i = \mathbf{T} \cdot \left(\mathbf{T} + \frac{\mathbf{S}}{\mathbf{m}_{i,\bullet}} \right)^{-1}.$$

Dokaz prethodne teoreme se može naći u [4]. Primetimo, da za razliku od jednodimenzionalnog modela, elementi matrica Z_i mogu biti negativni.

5.4 Neparametarski višedimenzionalni Bilman-Štraubov model

U prethodnom delu smo pretpostavili da su poznate raspodele slučajnih promenljivih $\mathbf{X}_{i,j} \mid \mathbf{\Theta}_i$ i $\mathbf{\Theta}_i$, pa smo bili u prilici da odredimo numeričke vrednosti posmatranih parametara $\mu, \mathbf{T}$ i $\mathbf{S}$. Kao što smo napomenuli u prethodnim modelima, u praksi često nemamo informacije o tim raspodelama i zato modeli zahtevaju da se nepoznati parametri ocene na osnovu podataka, tako da se obezbedi dobro slaganje modela i realnosti.

Prisetimo se, pretpostavili smo da za svaku grupu i gde $i = 1, \ldots, r$ imamo istoriju podataka o štetama i vektore izloženosti u prethodnih n godina: $\mathbf{X}_{i,1}, \mathbf{X}_{i,2}, \ldots, \mathbf{X}_{i,n}$ i $\mathbf{m}_{i,1}, \mathbf{m}_{i,2}, \ldots, \mathbf{m}_{i,n}$, a cilj je da odredimo ocenu kredibiliteta za sledeću godinu $\hat{\mathbf{X}}_{i,n+1}$. Kako bismo odredili ocenu kredibiliteta za $\mathbf{X}_{i,n+1}$, moramo pronaći nepristrasne ocene za očekivanu vrednost hipotetičkih sredina μ, matricu kovarijansi hipotetičkih sredina $\mathbf{T}$ i očekivanu vrednost matrice kovarijansi procesa $\mathbf{S}$.

Definišimo sledeće oznake:

- $\mathbf{m}_{i,\bullet} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{m}_{ij}$ - vektor ukupne izloženosti riziku i - te grupe osiguranika tokom svih n_i godina posmatranja za $i = 1, \ldots, r$,
- $\overline{\mathbf{X}}_{i,\bullet} = \mathbf{B}_i = (B_{i,1}, B_{i,2}, \ldots, B_{i,p})'$ - vektor prosečnih gubitaka i - te grupe osiguranika tokom svih n_i godina posmatranja za $i = 1, \ldots, r$, gde je:

$$B_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{m_{i,j,k}}{m_{i,\bullet,k}} \cdot X_{i,j,k},$$

- $\mathbf{m}_{\bullet,\bullet} = \sum_{i=1}^{r} \mathbf{m}_{i,\bullet} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{m}_{i,j}$ - vektor ukupne izloženosti riziku za sve grupe osiguranika tokom svih godina posmatranja,
- $\overline{\mathbf{X}}_{\bullet,\bullet} = \overline{\mathbf{B}} = \left(\overline{B}_1, \overline{B}_2, \ldots, \overline{B}_p\right)'$ - vektor prosečnih gubitaka osiguranika iz svih grupa tokom svih godina posmatranja, gde je:

$$\overline{B}_k = \sum_{i=1}^{I} \frac{m_{i,\bullet,k}}{m_{\bullet,\bullet,k}} \cdot B_{i,k}.$$

U nastavku navodimo nepristrasne ocene za μ, $\mathbf{S}$ i $\mathbf{T}$.

Nepristrasna ocena za μ je:

$$\widehat{\mu} = (\widehat{\mu}(1), \widehat{\mu}(2), \ldots, \widehat{\mu}(p))' = \overline{\mathbf{X}}_{\bullet,\bullet} = \overline{\mathbf{B}},$$

odnosno nepristrasna ocena k-te komponente vektora μ je:

$$\widehat{\mu}(k) = \overline{B}_k = \sum_{i=1}^{I} \frac{m_{i,\bullet,k}}{m_{\bullet,\bullet,k}} \cdot B_{i,k},$$

gde je:

- $B_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{m_{i,j,k}}{m_{i,\bullet,k}} \cdot X_{i,j,k}$ - prosečna šteta i-te grupe u kategoriji k.

Sada nas zanima nepristrasna ocena za $\mathbf{S} = \mathrm{E}\left[\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\Theta}_i)\right]$. Iz **Pretpostavka 5.3.1** znamo da je $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\Theta}_i)$ dijagonalna matrica jer su komponente vektora $\mathbf{X}_{i,j} \mid \boldsymbol{\Theta}_i$ nezavisne, pa je potrebno oceniti samo dijagonalne elemente matrice $\mathbf{S}$.

Nepristrasna ocena k-tog dijagonalnog elementa matrice $\mathbf{S}$ je:

$$\widehat{\sigma_k^2} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{I} \widehat{\sigma_{i,k}^2},$$

gde je:

- $\widehat{\sigma_{i,k}^2} = \dfrac{1}{n-1} \sum\limits_{j=1}^{n} m_{i,j,k} \cdot (X_{i,j,k} - B_{i,k})^2$ - nepristrasna ocena varijanse slučajne promenljive $X_{i,k}$ koja predstavlja iznos štete i-te grupe u okviru kategorije k, sa težinskim koeficijentima $m_{i,j,k}$.

Za razliku od matrice $\mathbf{S}$, matrica kovarijansi hipotetičkih sredina $\mathbf{T} = \mathrm{Cov}\left[\mu(\boldsymbol{\Theta}_\mathbf{i}), \mu(\boldsymbol{\Theta}_\mathbf{i})'\right]$ ima vandijagonalne elemente različite od nule, zato je potrebno oceniti i dijagonalne i vandijagonalne elemente matrice $\mathbf{T}$.

Dijagonalne elemente matrice $\mathbf{T}$ možemo oceniti na sličan način kao parametar a u jednodimenzionalnom Bilman-Štraubovom modelu, odnosno k-ti dijagonalni element matrice $\mathbf{T}$ ocenjujemo sa:

$$\widehat{\tau_k^2} = c_k \cdot \left[\frac{I}{m_{\bullet,\bullet,k}} \cdot s^2_{B_k, m_{i,\bullet,k}} - \frac{I \cdot \widehat{\sigma_k^2}}{m_{\bullet,\bullet,k}} \right] = I \cdot \frac{c_k}{m_{\bullet,\bullet,k}} \cdot \left(s^2_{B_k, m_{i,\bullet,k}} - \widehat{\sigma_k^2} \right), \quad (5.7)$$

gde je:

- $s^2_{B_k, m_{i,\bullet,k}}$ nepristrasna ocena varijanse slučajne promenljive B_k koja predstavlja iznos štete u okviru kategorije k, sa težinskim koeficijentima $m_{i,\bullet,k}$ data sa:

$$s^2_{B_k, m_{i,\bullet,k}} = \frac{1}{I-1} \cdot \sum_{i=1}^{I} m_{i,\bullet,k} \cdot \left(B_{i,k} - \overline{B}_k \right)^2, \quad (5.8)$$

- $$c_k = \frac{I-1}{I} \cdot \left[\sum_{i=1}^{I} \left(1 - \frac{m_{i,\bullet,k}}{m_{\bullet,\bullet,k}} \right) \frac{m_{i,\bullet,k}}{m_{\bullet,\bullet,k}} \right]^{-1}.$$

Vandijagonalni element matrice $\mathbf{T}$ koji se nalazi u k-toj vrsti i l-toj koloni označimo sa $\tau_{k,l}$. Element $\tau_{k,l}$ matrice T možemo oceniti na dva načina.
U prvom načinu koristimo težinske koeficijente $m_{i,\bullet,k}$:

$$\widehat{\tau_{k,l}}^{*} = I \cdot \frac{c_k}{m_{\bullet,\bullet,k}} \cdot \mathrm{cov}_{m_{i,\bullet,k}}\left(B_k, B_l\right), \tag{5.9}$$

gde je:

- $\mathrm{cov}_{m_{i,\bullet,k}}(B_k, B_l)$ kovarijansa slučajnih promenljivih B_k, B_l sa težinskim koeficijentima $m_{i,\bullet,k}$ data sa:

$$\mathrm{cov}_{m_{i,\bullet,k}}(B_k, B_l) = \frac{1}{I-1} \cdot \sum_{i=1}^{I} m_{i,\bullet,k} \cdot \left(B_{i,k} - \overline{B}_k\right) \cdot \left(B_{i,l} - \overline{B}_l\right). \tag{5.10}$$

Ocenu za $\tau_{k,l}$ možemo dobiti koristeći i težinske koeficijente $m_{i,\bullet,l}$:

$$\widehat{\tau_{k,l}}^{**} = I \cdot \frac{c_l}{m_{\bullet,\bullet,l}} \cdot \mathrm{cov}_{m_{i,\bullet,l}}\left(B_k, B_l\right), \tag{5.11}$$

gde je:

- $\mathrm{cov}_{m_{i,\bullet,l}}(B_k, B_l)$ kovarijansa slučajnih promenljivih B_k, B_l sa težinskim koeficijentima $m_{i,\bullet,l}$ data sa:

$$\mathrm{cov}_{m_{i,\bullet,l}}(B_k, B_l) = \frac{1}{I-1} \cdot \sum_{i=1}^{I} m_{i,\bullet,l} \cdot \left(B_{i,k} - \overline{B}_k\right) \cdot \left(B_{i,l} - \overline{B}_l\right).$$

Podsetimo se da je matrica $\mathbf{T}$ matrica kovarijansi hipotetičkih sredina, to znači da dijagonalni elementi predstavljaju varijanse τ_k^2, dok vandijagonalni elementi predstavljaju kovarijanse $\tau_{k,l}$. Znamo da varijansa bilo koje slučajne promenljive nikad nije negativna, zato u situacijama u kojima se dobije da je $\tau_k^2 < 0$ uzimamo $\tau_k^2 = 0$. Iz formule za koeficijent korelacije date izrazom (1.1) sa strane 7. i teoreme date u [8] koja govori da za koeficijent korelacije važi: $|\rho_{X,Y}| \leq 1$ zaključujemo da mora biti ispunjen uslov: $|\tau_{k,l}| \leq \tau_k \cdot \tau_l$. Ako je prethodni uslov ispunjen $\tau_{k,l}$ ocenjujemo aritmetičkom sredinom ocena datih izrazima (5.7) i (5.8).
U opštem slučaju, ocena za vandijagonalni element matrice $\mathbf{T}$ u Bilman-Štraubovom modelu je data sa (pogledati [7]):

$$\widehat{\tau_{k,l}} = \mathrm{sgn}\left(\frac{\widehat{\tau_{k,l}}^{*} + \widehat{\tau_{k,l}}^{**}}{2}\right) \cdot \min\left\{\frac{|\widehat{\tau_{k,l}}^{*} + \widehat{\tau_{k,l}}^{**}|}{2}; \sqrt{\widehat{\tau_k^2} \cdot \widehat{\tau_l^2}}\right\}. \tag{5.12}$$

Posmatrajmo sada matricu kovarijansi slučajnih promenljivih $B_1, B_2, \ldots, B_p$, gde B_k predstavlja iznos štete u kategoriji k. Primetimo da se k-ti dijagonalni element te matrice (varijansa) računa iz formule (5.8), dok se vandijagonalni elementi (kovarijanse) k-te vrste računaju primenom formule (5.10) sa težinskim koeficijentima $m_{i,\bullet,k}$, za $k = 1, \ldots, p$. Na osnovu prethodnog zapažanja formiramo matricu kovarijansi $\mathbf{S}_B$ slučajnih promenljivih $B_1, B_2, \ldots, B_p$ sa težinskim koeficijentima $m_{i,\bullet,k}$ na sledeći način:

$$\mathbf{S}_B = \begin{bmatrix} s^2_{B_1,\, m_{i,\bullet,1}} & \mathrm{cov}_{m_{i,\bullet,1}}(B_1, B_2) & \ldots & \mathrm{cov}_{m_{i,\bullet,1}}(B_1, B_p) \\ \mathrm{cov}_{m_{i,\bullet,2}}(B_2, B_1) & s^2_{B_2,\, m_{i,\bullet,2}} & \ldots & \mathrm{cov}_{m_{i,\bullet,2}}(B_2, B_p) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{cov}_{m_{i,\bullet,p}}(B_p, B_1) & \mathrm{cov}_{m_{i,\bullet,p}}(B_p, B_2) & \ldots & s^2_{B_p,\, m_{i,\bullet,p}} \end{bmatrix}.$$

Iz formule (5.7) možemo primetiti da se ocena za k-ti dijagonalni element matrice $\mathbf{T}$ dobija kao proizvod konstante $I \cdot \frac{c_k}{m_{\bullet,\bullet,k}}$ i razlike k-tog dijagonalnog elementa matrice $\mathbf{S}_B$ i k-tog dijagonalnog elementa matrice $\hat{\mathbf{S}}$. Slično, iz formula (5.9) i (5.11) vidimo da se ocene vandijagonalnih elemenata koji se nalaze u k-toj vrsti matrice $\mathbf{T}$ dobijaju množenjem vandijagonalnih elemenata k-te vrste matrice $\mathbf{S}_B$ konstantom $I \cdot \frac{c_k}{m_{\bullet,\bullet,k}}$.

Dakle, možemo definisati matricu $\mathbf{R}$ sledećeg oblika:

$$\mathbf{R} = \left(\mathbf{S}_B - \hat{\mathbf{S}}\right) \circ \mathbf{C},$$

gde je:

- $\hat{\mathbf{S}}$ dijagonalna matrica sa elementima $\widehat{\sigma^2_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, p$,
- $\circ$ oznaka za Hadamardov proizvod matrica [pogledati 18. stranu],
- $\mathbf{C}$ kvadratna matrica reda p:

$$\mathbf{C} = I \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{c_1}{m_{\bullet,\bullet,1}} \\ \vdots \\ \dfrac{c_p}{m_{\bullet,\bullet,p}} \end{bmatrix} \cdot [1, \ldots, 1] = I \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{c_1}{m_{\bullet,\bullet,1}} & \ldots & \dfrac{c_1}{m_{\bullet,\bullet,1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{c_p}{m_{\bullet,\bullet,p}} & \ldots & \dfrac{c_p}{m_{\bullet,\bullet,p}} \end{bmatrix}. \tag{5.13}$$

Konačno, ocena matrice kovarijansi hipotetičkih sredina $\mathbf{T}$ je matrica sledećeg oblika:

$$\hat{\mathbf{T}} = \frac{1}{2} \cdot (\,\mathbf{R} + \mathbf{R}'\,)\,.$$

Kao što smo rekli, ako za dijagonalni element matrice $\hat{\mathbf{T}}$ dobijemo negativnu vrednost, onda koristimo pravilo po kome taj element uzima vrednost 0. Takođe smo spomenuli da u slučaju u kome za vandijagonalne elemente matrice $\hat{\mathbf{T}}$ nije ispunjen uslov $|\tau_{k,l}| \leq \tau_k \cdot \tau_l$ koristimo sledeću formulu:

$$\widehat{\tau_{k,l}} = \operatorname{sgn}\left(\frac{\widehat{\tau_{k,l}}^{*} + \widehat{\tau_{k,l}}^{**}}{2}\right) \cdot \sqrt{\widehat{\tau_k^2} \cdot \widehat{\tau_l^2}}.$$

Dakle, neparametarski Bilman-Štraubov ocenjivač $\hat{\mathbf{X}}_{i,n+1} = (\hat{X}_{i,n+1,1}, \ldots, \hat{X}_{i,n+1,p})'$, koja minimizira srednju kvadratnu grešku gubitka 5.1 sa strane 66. dat je sa:

$$\hat{\mathbf{X}}_{i,n+1} = \hat{\mathbf{Z}}_i \cdot \mathbf{B}_i + (\mathbf{E}_p - \hat{\mathbf{Z}}_i) \cdot \hat{\mu}, \tag{5.14}$$

gde je:

- $\hat{\mathbf{Z}}_i = \hat{\mathbf{T}} \cdot \left(\hat{\mathbf{T}} + \mathbf{M}_{i,\bullet}^{-\frac{1}{2}} \cdot \hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{M}_{i,\bullet}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}$,
- $\mathbf{B}_i = \overline{\mathbf{X}}_{i,\bullet} = (\overline{X}_{i,\bullet,1}, \ldots \overline{X}_{i,\bullet,p})'$,
- $\hat{\mu} = (\hat{\mu}(1), \ldots, \hat{\mu}(p))' = (\overline{X}_{\bullet,\bullet,1}, \ldots, \overline{X}_{\bullet,\bullet,p})' = \overline{\mathbf{X}}_{\bullet,\bullet}$.

5.5 Primena višedimenzionalnog Bilman-Štraubovog modela u aktuarstvu

U ovom delu videćemo kako se višedimenzionalni Bilman-Štraubov model može primeniti u praksi.

Posmatrajmo kasko osiguranje vozila na realnim podacima osiguravajuće kompanije koja svoju delatnost vrši na teritoriji Republike Srbije. Pretpostavimo da u portfoliju postoji pet tarifnih grupa. Kojoj tarifnoj grupi će pripadati određeni automobil zavisi od njegove vrednosti, odnosno od visine osigurane sume. U prvoj tarifnoj grupi nalaze se vozila čija je vrednost najmanja (manja od 10 000 evra), dok se u petoj tarifnoj grupi nalaze vozila najveće vrednosti (vozila čija je vrednost veća od 50 000 evra).

Takođe pretpostavimo da je portfolio podeljen u tri kategorije, u zavisnosti od regije kojoj automobil pripada. Posmatrane kategorije su Vojvodina, Beograd i istočna i zapadna Srbija.

Za svaku tarifnu grupu u okviru svake kategorije dati su podaci o izloženosti i prosečnom iznosu šteta u evrima tokom 2014., 2015., 2016. i 2017. godine, odnosno dati su vektori $\mathbf{m}_{i,j}$ i $\mathbf{X}_{i,j}$ (u radu nisu navedeni zbog obimnosti podataka), gde $i = 1, \ldots, 5, \quad j = 1, \ldots, 4$. Naš cilj je da odredimo neto premiju (prosečan iznos štete) za 2018. godinu za svaku tarifnu grupu u okviru svake kategorije.

U okviru svake regije za svaku tarifnu grupu u tabeli 5.1. navedene su sledeće veličine:

- prosečan gubitak i - te grupe osiguranika u regiji k tokom svih godina posmatranja $B_{i,k}$,
- ukupna izloženost riziku i - te grupe osiguranika u regiji k tokom svih godina posmatranja $m_{i,\bullet,k}$,
- standardna devijacija i - te grupe osiguranika u regiji k tokom svih godina posmatranja:

$$\widehat{\sigma_{i,k}} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j,k} \cdot (X_{i,j,k} - B_{i,k})^2}.$$

Tarifna grupa i	**Vojvodina**			**Beograd**			**Ist. i zap. Srbija**		
	$B_{i,1}$	$\widehat{\sigma_{i,1}}$	$m_{i,\bullet,1}$	$B_{i,2}$	$\widehat{\sigma_{i,2}}$	$m_{i,\bullet,2}$	$B_{i,3}$	$\widehat{\sigma_{i,3}}$	$m_{i,\bullet,3}$
1	81,99	1.117	33.899	147,16	833	23.350	129,33	448	5.968
2	163,13	951	14.508	265,66	1.487	13.367	242,04	1.543	3.709
3	249,94	1.671	7.091	401,30	706	3.312	273	1.746	1.842
4	422,10	1.310	3.722	574,82	3.889	1.769	483,14	1.027	945
5	518,51	5.786	3.820	873,10	5.369	2.128	928,55	5.042	899

Tabela 5.1: Prosečan gubitak, izloženost i standardna devijacija

Podsetimo se, prosečan iznos šteta za i-tu grupu osiguranika se računa primenom izraza (5.14), odnosno naš zadatak je da procenimo vektore $\mathbf{B}_i$ i μ, kao i matrice $\mathbf{Z}_i$, gde $i = 1, \ldots, 5$.

Vrednosti vektora $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4$ i $\mathbf{B}_5$ možemo pročitati iz tabele 5.1, dok se k-ta komponente vektora $\hat{\mu} = \overline{\mathbf{B}}$ računa na sledeći način:

$$\overline{B}_k = \sum_{i=1}^{I} \frac{m_{i,\bullet,k}}{m_{\bullet,\bullet,k}} \cdot B_{i,k}.$$

U tabeli 5.2 nalaze se vrednosti vektora $\hat{\mu}$ i $\mathbf{B}_i$ za $i = 1, \ldots 5$, odnosno date su individualne premije za svaku tarifnu grupu, kao i kolektivna premija.

Regija k	$\mathbf{B}_1$	$\mathbf{B}_2$	$\mathbf{B}_3$	$\mathbf{B}_4$	$\mathbf{B}_5$	$\hat{\mu}$
Vojvodina	81,99	163,13	249,94	422,10	518,51	166,09
Beograd	147,16	265,66	401,30	574,82	873,10	254,77
Ist. i zap. Srbija	129,33	242,04	273,00	483,14	928,55	259,21

Tabela 5.2: Individualne i kolektivna neto premija

Da bismo odredili ocene matrica kredibiliteta $\hat{\mathbf{Z}}_i$ moramo najpre oceniti očekivanu vrednost matrice kovarijansi procesa $\mathbf{S}$ i matricu kovarijansi hipotetičkih sredina $\mathbf{T}$.

Primenom formule za računanje ocene k-tog dijagonalnog elemenata matrice $\mathbf{S}$:

$$\widehat{\sigma_k^2} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{I} \widehat{\sigma_{i,k}^2},$$

dobijamo da je matrica $\hat{\mathbf{S}}$ sledećeg oblika:

$$\hat{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} 8.027.424 & 0 & 0 \\ 0 & 9.470.907 & 0 \\ 0 & 0 & 6.421.039 \end{bmatrix}.$$

Ocenu matrice $\hat{\mathbf{T}}$ računamo na način opisan u prethodnom poglavlju, odnosno primenom formule:

$$\hat{\mathbf{T}} = \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{R} + \mathbf{R}')\,.$$

Dijagonalni i vandijagonalni elementi matrice kovarijansi $\mathbf{S}_B$ slučajnih promenljivih $B_1, B_2, \ldots, B_p$ sa težinskim koeficijentima $m_{i,\bullet,k}$ se računaju primenom jednakosti (5.8) i (5.10), redom.

Primenom prethodnog dobija se matrica $\mathbf{S}_B$:

$$\mathbf{S}_B = \begin{bmatrix} 252.034.260 & 382.707.317 & 373.417.209 \\ 215.059.605 & 334.469.275 & 334.507.763 \\ 83.436.073 & 131.558.559 & 138.065.816 \end{bmatrix}.$$

Vektor ukupne izloženosti, odnosno ukupan broj osiguranih automobila u svakoj regiji je:

$$\mathbf{m}_{\bullet,\bullet} = \begin{bmatrix} 63.040 & 43.926 & 13.363 \end{bmatrix}'.$$

Primenom formule (5.13) dobija se matrica konstanti $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0,000099 & 0,000099 & 0,000099 \\ 0,000148 & 0,000148 & 0,000148 \\ 0,000431 & 0,000431 & 0,000431 \end{bmatrix}.$$

Sada možemo da odredimo matricu $\mathbf{R}$ primenom formule:

$$\mathbf{R} = \left(\mathbf{S}_B - \hat{\mathbf{S}}\right) \circ \mathbf{C}.$$

Dobija se matrica $\mathbf{R}$ sledećeg oblika:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 24.265 & 38.058 & 37.134 \\ 31.835 & 48.109 & 49.516 \\ 35.937 & 56.664 & 56.701 \end{bmatrix}.$$

Za ocenu matrice kovarijansi hipotetičkih sredina $\mathbf{T}$ dobijamo sledeću matricu:

$$\hat{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 24.265 & 34.946 & 36.536 \\ 34.946 & 48.109 & 53.090 \\ 36.536 & 53.090 & 56.701 \end{bmatrix}.$$

Primetimo da za neke vandijagonalne elemente matrice $\hat{\mathbf{T}}$ nije ispunjen uslov $|\tau_{k,l}| \leq \tau_k \cdot \tau_l$, stoga koristimo formulu:

$$\widehat{\tau_{k,l}} = \operatorname{sgn}\left(\frac{\widehat{\tau_{k,l}}^{*} + \widehat{\tau_{k,l}}^{**}}{2}\right) \cdot \sqrt{\widehat{\tau_k^2} \cdot \widehat{\tau_l^2}}, \quad \text{za} \quad k \neq l.$$

Konačno, ocena matrice kovarijansi hipotetičkih sredina $\mathbf{T}$ je:

$$\hat{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 24.265 & 34.167 & 36.536 \\ 34.167 & 48.109 & 52.228 \\ 36.536 & 52.228 & 56.701 \end{bmatrix}.$$

Sada koristimo matrice $\hat{\mathbf{S}}$ i $\hat{\mathbf{T}}$ kako bismo odredili ocene matrica kredibiliteta. U tabeli 5.3 date su ocene matrica kredibiliteta za svaku tarifnu grupu dobijene primenom formule:

$$\hat{\mathbf{Z}}_i = \hat{\mathbf{T}} \cdot \left(\hat{\mathbf{T}} + \mathbf{M}_{i,\bullet}^{-\frac{1}{2}} \cdot \hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{M}_{i,\bullet}^{-\frac{1}{2}} \right)^{-1}.$$

i	**Matrice kredibiliteta $\hat{\mathbf{Z}}_\mathbf{i}$**	**Vektori neto premija**		
		Individualna premija $\mathbf{B}_i$	**Kolektivna premija $\hat{\mu}$**	**Premija kred. $\hat{\mathbf{X}}_{i,n+1}$**
1	$\begin{bmatrix} 0,4085 & 0,5180 & -0,094 \\ 0,8872 & -0,088 & 0,423 \\ -0,428 & 1,1221 & 0,2377 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 81,99 \\ 147,16 \\ 129,33 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 166,09 \\ 254,77 \\ 259,21 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 88,23 \\ 134,76 \\ 143,58 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} 0,3888 & 0,4325 & -0,0044 \\ 0,5538 & 0,276 & 0,3008 \\ -0,014 & 0,735 & 0,3221 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 163,13 \\ 265,66 \\ 242,04 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 166,09 \\ 254,77 \\ 259,21 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 169,72 \\ 250,97 \\ 261,72 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} 0,4722 & 0,2302 & 0,1206 \\ 0,5814 & 0,2400 & 0,3066 \\ 0,3715 & 0,3738 & 0,3922 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 249,94 \\ 401,30 \\ 273,00 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 166,09 \\ 254,77 \\ 259,21 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 241,07 \\ 342,92 \\ 350,54 \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} 0,4305 & 0,2231 & 0,1442 \\ 0,5538 & 0,2732 & 0,2791 \\ 0,4542 & 0,3543 & 0,3403 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 422,10 \\ 574,82 \\ 483,14 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 166,09 \\ 254,77 \\ 259,21 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 379,99 \\ 546,51 \\ 565,06 \end{bmatrix}$
5	$\begin{bmatrix} 0,4158 & 0,2542 & 0,1264 \\ 0,5383 & 0,3132 & 0,2538 \\ 0,4296 & 0,4073 & 0,3091 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 518,51 \\ 873,10 \\ 928,55 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 166,09 \\ 254,77 \\ 259,21 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 554,38 \\ 808,02 \\ 869,33 \end{bmatrix}$

Tabela 5.3: Matrice kredibiliteta i vektori neto premija

Matrica kredibiliteta koja se odnosi na i-tu tarifnu grupu predstavlja težinu vektora individualne premije $\mathbf{B}_i$, dok matrica $\mathbf{E} - \hat{\mathbf{Z}}_i$ predstavlja težinu vektora kolektivne premije μ.

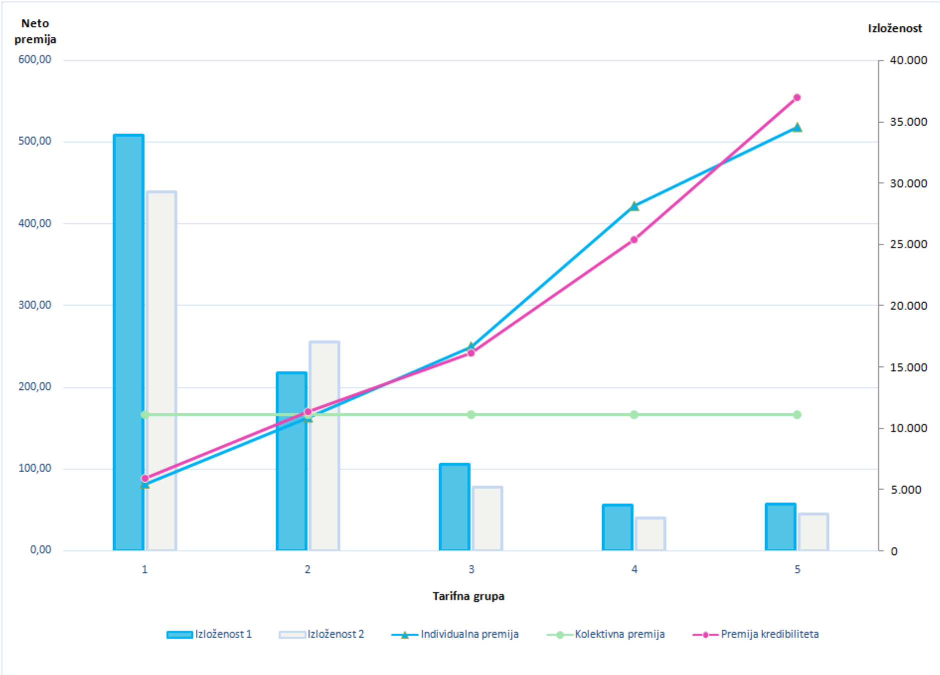
Ocene kredibiliteta neto premija predstavljene vektorima neto premija za svaku tarifnu grupu dobijene su kao kombinacija individualne i kolektivne premije sa navedenim ponderima, odnosno primenom formule (5.14). Ove ocene prikazane su u poslednjoj koloni tabele 5.3.

Podsetimo se, naš cilj je bio da odredimo neto premiju za 2018. godinu za svaku tarifnu grupu u okviru svake kategorije. Neto premije kredibiliteta za vozila koja pripadaju kategoriji Vojvodine su prve komponente vektora $\hat{\mathbf{X}}_{i,n+1}$, dok druge komponente navedenih vektora predstavljaju neto premije kredibiliteta za vozila koja su registrovana na teritoriji Beograda. Analogno, neto premije kredibiliteta za vozila koja su registrovana na teritoriji istočne i zapadne Srbije su treće komponente vektora $\hat{\mathbf{X}}_{i,n+1}$. Napomenimo da matrice kredibiliteta ne možemo interpretirati na jednostavan način kao u jednodimenzionalnom slučaju. Prethodno važi jer za proračun neto premije za određenu tarifnu grupu u okviru određene kategorije koriste se ne samo istorijski podaci o datoj tarifnoj grupi u okviru navedene kategorije, nego i podaci o drugim tarifnim grupama u okviru date kategorije, kao i podaci o sličnim tarifnim grupama koje pripadaju drugim kategorijama.

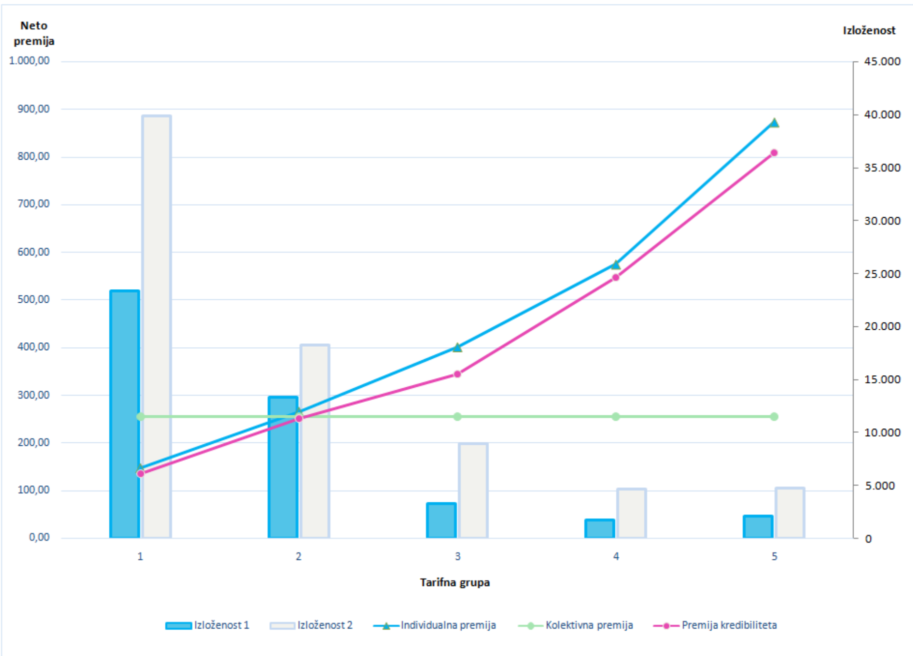
Poređenje individualne, kolektivne i premije kredibiliteta za svaku regiju grafički je predstavljeno na slici 5.1, slici 5.2 i slici 5.3. Plavi stubići predstavljaju izloženost (ukupan broj vozila) posmatrane regije, dok sivi stubići predstavljaju izloženost preostale dve kategorije.

Posmatrajmo sliku 5.1. Primetimo da je za regiju Vojvodine premija kredibiliteta veoma slična individualnoj premiji za prve tri tarifne grupe. To objašnjavamo velikom izloženošću Vojvodine za te tarifne grupe. Malo odstupanje kod četvrte tarifne grupe se desilo zbog uticaja drugih tarifnih grupa. Primetimo da za petu tarifnu grupu dobijamo "čudan" rezultat, odnosno da je neto premija kredibiliteta veća i od individualne i od kolektivne neto premije. To objašnjavamo činjenicom da na premiju kredibiliteta utiču i podaci iz sličnih tarifnih grupa drugih regija. U tabeli 5.3 možemo videti da su individualne premije za drugu i treću regiju znatno veće od individualne premije prve regije.

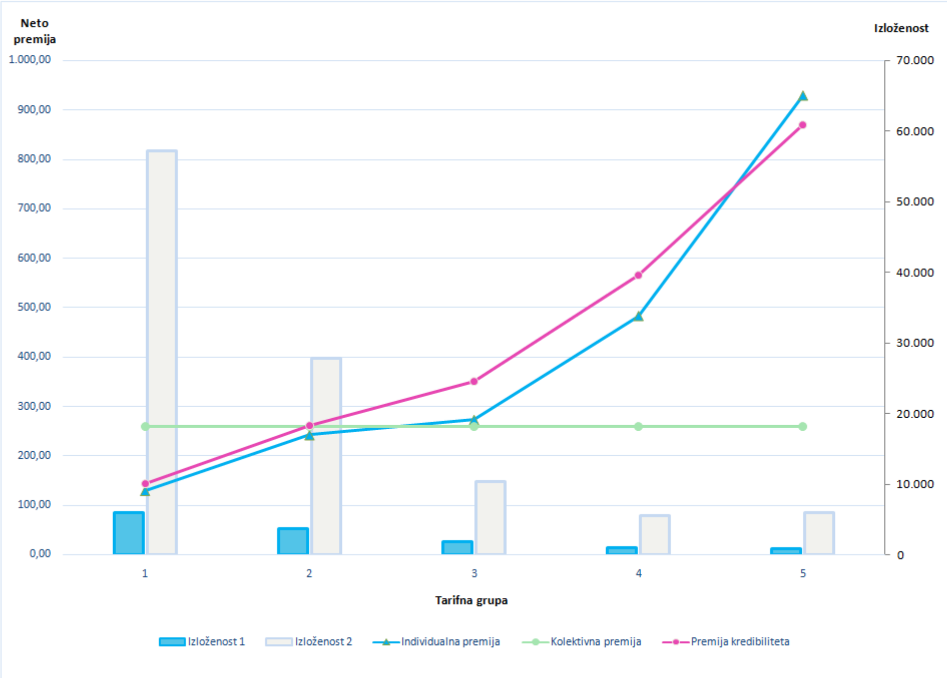
Na slici 5.2 primetimo da za vozila registrovana na teritoriji Beograda premija kredibiliteta ne odstupa značajno od individualne premije, ali da je konstantno manja. Ako pogledamo individualne premije u tabeli 5.3. primetimo da je premija za vozila iz Beograda skoro uvek veća od premije za vozila iz preostale dve regije. Zbog kombinacije prethodnog i činjenice da preostale dve regije zajedno imaju veću izloženost od posmatrane regije se dobija da je premija kredibiliteta konstantno manja od individualne premije.



Slika 5.1: Individualna, kolektivna i premija kredibiliteta za vozila registrovana na teritoriji Vojvodine



Slika 5.2: Individualna, kolektivna i premija kredibiliteta za vozila registrovana na teritoriji Beograda



Slika 5.3: Individualna, kolektivna i premija kredibiliteta za vozila registrovana na teritoriji istočne i zapadne Srbije

Posmatrajmo sada sliku 5.3. Primetimo da za drugu, treću i četvrtu tarifnu grupu opet dobijamo "čudan" rezultat, odnosno da je neto premija kredibiliteta veća i od individualne i od kolektivne neto premije. Sa slike vidimo da je izloženost posmatrane regije znatno manja od izloženosti druge dve regije zajedno. Mala izloženost i činjenica da se za proračun neto premije za određenu tarifnu grupu u okviru određene kategorije koriste ne samo istorijski podaci o datoj tarifnoj grupi u okviru navedene kategorije, nego i podaci o sličnim tarifnim grupama koje pripadaju drugim kategorijama objašnjavaju "čudan" rezultat.

Razmotrimo još jednu situaciju u kojoj se koristi višedimenzionalni Bilman-Štraubov model. Osiguravajuća kompanija želi da izračuna očekivanu vrednost količnika šteta za različite tarifne grupe u okviru određene grane osiguranja. Posmatrani količnik (racio) šteta predstavlja odnos ukupnog iznosa šteta i ukupne premije osiguranja. Kompanija poseduje vlastite podatke, ali i sumirane podatke drugih kompanija za prethodnih n godina.

Na osnovu ličnih podataka i podataka drugih kompanija za svaku tarifnu grupu u tabeli 5.4. navedene su sledeće veličine:

- prosečan racio šteta i - te grupe osiguranika $B_{i,k}$,
- ukupna izloženost riziku i - te grupe osiguranika $m_{i,\bullet,k}$,
- standardna devijacija i - te grupe osiguranika:

$$\widehat{\sigma_{i,k}} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j,k}\cdot (X_{i,j,k} - B_{i,k})^2}.$$

Tarifna grupa i	**Sopstvena kompanija**			**Druge kompanije**		
	$B_{i,1}$	$\widehat{\sigma^2_{i,1}}$	$m_{i,\bullet,1}$	$B_{i,2}$	$\widehat{\sigma^2_{i,2}}$	$m_{i,\bullet,2}$
1	0,81	42,30	3.847	0,75	43,60	14.608
2	0,94	31,60	1.150	0,86	27,10	3.081
3	0,93	27,20	2.843	1,06	49,30	4.644
4	1,14	49,25	1.123	0,89	17,30	3.487
5	0,73	16,40	532	1,01	23,90	9.004
6	1,04	37,65	1.309	0,86	27,45	4.467
7	1,48	39,60	1.332	1,19	46,60	4.536
8	1,10	21,60	923	0,79	23,35	2.718

Tabela 5.4: Prosečan racio šteta, izloženost i standardna devijacija

Ocene kolektivne premije μ, očekivane vrednosti matrice kovarijansi procesa $\mathbf{S}$ i matrice kovarijansi hipotetičkih sredina $\mathbf{T}$ su:

$$\hat{\mu} = \begin{bmatrix} 0,9846 \\ 0,9048 \end{bmatrix}; \quad \hat{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} 33,2 & 0 \\ 0 & 32,3 \end{bmatrix}; \quad \hat{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 0,0279 & 0,0203 \\ 0,0203 & 0,0198 \end{bmatrix}.$$

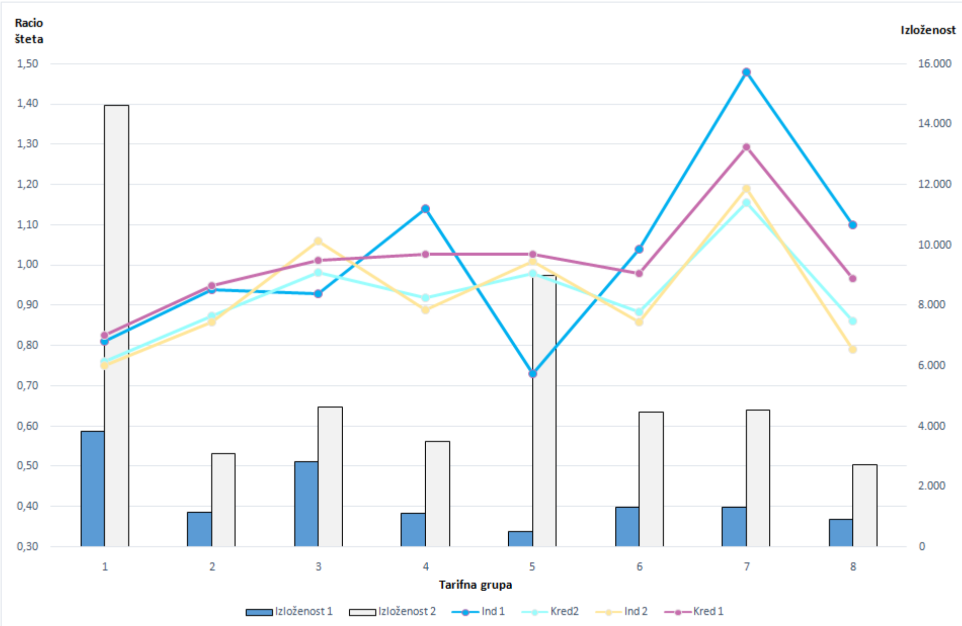
U tabeli 5.5 za svaku tarifnu grupu date su ocene matrica kredibiliteta, vektora individualnih i kolektivnih količnika šteta, kao i ocene kredibilitetnih količnika šteta.

i	Matrice kredibiliteta $\hat{\mathbf{Z}}_i$	Vektori količnika šteta		
		Individualni racio $\mathbf{B}_i$	Kolektivni racio $\hat{\mu}$	Racio kred. $\hat{\mathbf{X}}_{i,n+1}$
1	$\begin{bmatrix} 0,516 & 0,447 \\ 0,115 & 0,794 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,810 \\ 0,750 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,985 \\ 0,905 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,825 \\ 0,762 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} 0,332 & 0,449 \\ 0,163 & 0,544 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,940 \\ 0,860 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,985 \\ 0,905 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,950 \\ 0,873 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} 0,517 & 0,367 \\ 0,219 & 0,574 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,930 \\ 0,060 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,985 \\ 0,905 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,013 \\ 0,982 \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} 0,317 & 0,477 \\ 0,150 & 0,576 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,140 \\ 0,890 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,985 \\ 0,905 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,027 \\ 0,920 \end{bmatrix}$
5	$\begin{bmatrix} 0,142 & 0,746 \\ 0,043 & 0,809 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,730 \\ 1,010 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,985 \\ 0,905 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,027 \\ 0,979 \end{bmatrix}$
6	$\begin{bmatrix} 0,333 & 0,501 \\ 0,143 & 0,625 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,040 \\ 0,860 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,985 \\ 0,905 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,981 \\ 0,885 \end{bmatrix}$
7	$\begin{bmatrix} 0,336 & 0,501 \\ 0,143 & 0,627 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,480 \\ 1,190 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,985 \\ 0,905 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,294 \\ 1,155 \end{bmatrix}$
8	$\begin{bmatrix} 0,293 & 0,453 \\ 0,150 & 0,528 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,100 \\ 0,790 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,985 \\ 0,905 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,966 \\ 0,861 \end{bmatrix}$

Tabela 5.5: Matrice kredibiliteta i vektori količnika šteta

Podsetimo se, naš cilj je bio da predvidimo racio šteta za $n+1$-vu godinu na osnovu podataka naše kompanije, ali i podataka drugih kompanija iz prethodnih n godina. Nas zanimaju količnici šteta kredibiliteta za našu kompaniju. Navedeni količnici predstavljaju prve komponente vektora $\hat{\mathbf{X}}_{i,n+1}$. Ako želimo da uporedimo naše količnike sa količnicima drugih kompanija pogledaćemo druge komponente vektora $\hat{\mathbf{X}}_{i,n+1}$.

Poređenje izloženosti, individualnih količnika šteta i količnika šteta kredibiliteta u okviru naše kompanije, ali i drugih kompanija grafički je predstavljeno na slici 5.4. Plavi stubići predstavljaju izloženost naše kompanije, dok sivi stubići predstavljaju izloženost ostalih kompanija zajedno.



Slika 5.4: Izloženosti, individualna racija šteta i racija šteta kredibiliteta

Prvo što primetimo na slici 5.4 je da individualni količnici šteta naše kompanije variraju u zavisnosti od tarifne grupe, dok individualni količnici šteta drugih kompanija ne variraju u tolikoj meri. Takođe primećujemo da za našu kompaniju individualni količnici šteta značajno odstupaju od količnika šteta kredibiliteta, dok su individualni količnici i količnici kredibiliteta drugih kompanija veoma slični. Prethodna zapažanja objašnjavamo činjenicom da je izloženost naše kompanije mnogo manja od izloženosti drugih kompanija zajedno, što takođe možemo videti sa slike 5.4. Zbog razlike u izloženosti dolazimo do zaključka da podaci drugih kompanija imaju veći uticaj na naše količnike, nego naši podaci na količnike drugih kompanija zbirno.

Analizirajmo sada količnike šteta određenih tarifnih grupa. Primetimo da je individualni racio šteta naše kompanije za petu tarifnu grupu značajno manji od drugih količnika šteta. Takođe primećujemo da je izloženost naše kompanije za petu tarifnu grupu jako mala u odnosu na izloženost drugih kompanija za istu tarifnu grupu. Zbog toga je uticaj podataka drugih kompanija na naš racio šteta kredibiliteta pete tarifne grupe mnogo veći od uticaja podataka naše kompanije. Prethodno objašnjava činjenicu da je naš racio šteta kredibiliteta pete tarifne grupe približniji individualnom pokazatelju šteta drugih kompanija nego individualnom pokazatelju šteta naše kompanije. Takođe možemo da primetimo da je racio šteta najveći za sedmu tarifnu grupu. Zbog uticaja drugih tarifnih grupa naše kompanije, ali i tarifnih grupa drugih kompanija naš racio šteta kredibiliteta za sedmu tarifnu grupu je manji od našeg individualnog količnika šteta sedme tarifne grupe.

Zaključak

Teorija kredibiliteta je metoda koji se koristi u aktuarskoj matematici, služi za unapređivanje postupka određivanja premije polise osiguranja. Ona predstavlja skup alata koji omogućava osiguravajućoj kući da izvrši procenu budućeg rizika ili grupe rizika. Prilikom određivanja neto premije za određenu tarifnu grupu, teorija kredibiliteta posmatra istorijske podatke o toj tarifnoj grupi, ali i podatke o sličnim tarifnim grupama, odnosno premija kredibiliteta predstavlja linearnu kombinaciju individualne i kolektivne premije. To je osnovna ideja teorije kredibiliteta, a njen cilj je određivanje faktora kredibiliteta koji govori u kojoj meri premija kredibiliteta zavisi od individualne, a u kojoj od kolektivne premije.

Višedimenzionalna teorija kredibiliteta posmatra više faktora koji utiču na frekvenciju i iznose šteta, zahvaljujući kojima se pojavljuju homogene tarifne ocene koje omogućavaju pravednije određivanje premije, odnosno za proračun neto premije za određenu tarifnu grupu u okviru određene kategorije koriste se ne samo istorijski podaci o datoj tarifnoj grupi u okviru navedene kategorije, nego i podaci o drugim tarifnim grupama u okviru date kategorije, kao i podaci o sličnim tarifnim grupama koje pripadaju drugim kategorijama.

U ovom radu bavili smo se jednodimenzionalom i višedimenzionalnom teorijom kredibiliteta visoke preciznosti. Najpre smo se upoznali sa Bejzovom metodologijom u jednodimenzionalnom slučaju. Kako se Bejzova premija teško računa u praksi jer zahteva podatke o raspodelama, dati su modeli koje je aproksimiraju: Bilmanov model iz 1967. godine i njegovo uopštenje Bilman-Štraubov model iz 1970. godine. Bilman-Štraubov model se koristi za izračunavanje premije kredibiliteta i frekvencije šteta, a takođe predstavlja osnovu za formiranje višedimenzionalnih modela teorije kredibiliteta. U okviru višedimenzionalne teorije kredibiliteta predstavljeni su višedimenzionalni Bilmanov i Bilman-Štraubov model. Za navedene modele, u jednodimenzionalnom i višedimenzionalnom slučaju, izložene su njihove aproksimacije neparametarskim modelima u kojima su date statističke ocene parametara u modelima.

Cilj ovog rada pored upoznavanja višedimenzionalne teorije kredibiliteta visoke preciznosti je i primena navedene teorije u aktuarstvu. U radu je data primena višedimenzionalnog Bilmanovog modela u životnom osiguranju u okviru koje su izračunate ocene stopa mortaliteta za mušku i žensku populaciju Republike Srbije i Republike Hrvatske. Primena višedimenzionalnog Bilman-Štraubovog modela u neživotnom osiguranju prikazana je na primeru predviđanja iznosa šteta (neto premija) kasko osiguranja vozila, kao i na primeru predviđanja količnika šteta na osnovu sopstvenih podataka kompanije, ali i podataka drugih kompanija. Na osnovu datih primera došli smo do zaključka da zaista na predviđenu neto premiju za određenu tarifnu grupu u okviru određene kategorije utiču ne samo istorijski podaci o datoj tarifnoj grupi u okviru navedene kategorije, nego i podaci o drugim tarifnim grupama u okviru date kategorije, kao i podaci o sličnim tarifnim grupama koje pripadaju drugim kategorijama. To je upravo glavna razlika između jednodimenzionalnog i višedimenzionalnog kredibiliteta.

Literatura

[1] S.A. Klugman, H.H. Panjer, G.E.Willmot, *Loss Models: From Data to Decisions,* Second Edition, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2004.

[2] Y. Zhang., *A Multi-Dimensional Bühlmann Credibility Approach to Modeling Multi-Population Mortality Rates,* Simon Fraser University, 2017.

[3] V. Pacáková, E. Šoltés, L. Bohdan, *Multidimensional Credibility Model and Its Application,* Liberec, 2004.

[4] H. Bühlmann, A. Gisler, D. Kollöffel, *Multidimensional Credibility applied to estimating the frequency of big claims,* ETH Zürich and Winterthur Insurance Company, 2003.

[5] S. Happ, R. Maier, M. Merz, *Multivariate Bühlmann-Straub Credibility Model Applied to Claims Reserving for Correlated Run-off Triangles,* Variance, 2014.

[6] Wen, Limin, Wu, Xianyi, Zhou, *The credibility premiums for models with dependence induced by common effects,* Insurance: Mathematics and Economics 44(1), pp. 19–25. Xian, 2009.

[7] H. Bühlmann, A. Gisler, *A Course in Credibility Theory and its Applications,* Berlin: Springer, 2005. ISBN 3540257535.

[8] D. Rajter-Ćirić, *Verovatnoća,* Treće izdanje, PMF Novi Sad, 2013.

[9] Z. Lozanov-Crvenković Z, *Statistika,* PMF Novi Sad, 2012.

[10] Z. Stojaković, I. Bošnjak, *Elementi linearne algebre,* Novi Sad, 2010.

[11] H. Bühlmann, *Mathematical Methods in Risk Theory,* Second Edition, Springer, 2005.

[12] R.H. Greig, *Random Effects Linear Statistical Models and Buhlman-Straub Credibility,* Casualty Actuarial Society Forum, Winter 1999, 387-404

[13] Tsai, Cary Chi-Liang and Lin, Tzuling, *Incorporating the Bühlmann credibility into mortality models to improve forecasting performances,* Scandinavian Actuarial Journal 2017., pp. 419–440.

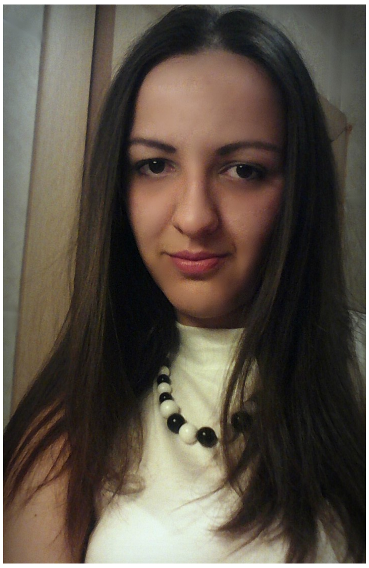
[14] Tsai, Cary Chi-Liang and Lin, Tzuling, *A Bühlmann credibility approach to modeling mortality rates,* North American Actuarial Journal 2017., pp. 204–227

[15] Wen, Limin and Wu, Xianyi, *The credibility estimator with general dependence structure over risks,* Communications in Statistics-Theory and Methods 2011., pp. 1893–1910

[16] *http://www.stat.gov.rs*

[17] *https://www.dzs.hr*

Biografija



Svetlana Vidaković je rođena 17.09.1994. godine u Milićima, Republika Srpska. Osnovnu školu „Branko Radičević" u Malom Zvorniku završava 2009. godine kao nosilac Vukove diplome. Potom u Malom Zvorniku upisuje opšti smer gimnazije, koju završava 2013. godine kao nosilac Vukove diplome i učenik generacije.
Studije Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, smer Primenjena matematika, modul matematika finansija, upisuje iste godine, i uspešno ih završava septembra 2016., prosekom 9,52. Iste godine upisuje master akademske studije smer Primenjena matematika. Zaključno sa junskim rokom 2018. godine položila je sve ispite sa prosekom 9,4 i stekla uslov za odbranu master rada.
Tokom studija bila je stipendista Univerziteta u Novom Sadu. Od septembra 2018. zaposlena je u kompaniji DDOR Novi Sad u Direkciji za aktuarske poslove.

Novi Sad, april 2019.

Svetlana Vidaković

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: *monografska dokumentacija*
TD
Tip zapisa: *tekstualni štampani materijal*
TZ
Vrsta rada: *master rad*
VR
Autor: *Svetlana Vidaković*
AU
Mentor: *prof. dr Dora Seleši*
MN
Naslov rada: *Višedimenzionalni kredibilitet visoke preciznosti i njegove primene u aktuarstvu*
NR
Jezik publikacije: *srpski (latinica)*
JP
Jezik izvoda: *s/e*
JI
Zemlja publikovanja: *Republika Srbija*
ZP
Uže geografsko područje: *Vojvodina*
UGP
Godina: *2019.*
GO
Izdavač: *autorski reprint*
IZ
Mesto i adresa: *Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4*
MA
Fizički opis rada: *(5/91/17/14/5/0/0) (broj poglavlja, strana, literalnih citata, tabela, slika, grafika, priloga)*
FO
Naučna oblast: *matematika*
NO

Naučna disciplina: *aktuarska matematika*
ND
Ključne reči: *teorija kredibiliteta, Bilmanov model, Bilman-Štraubov model, osiguranje, premija, štete*
PO
UDK
Čuva se: *u biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematičkog fakulteta, u Novom Sadu*
ČU
Važna napomena:
VN
Izvod: *Tema master rada je teorija kredibiliteta visoke preciznosti koja služi za unapređivanje postupka određivanja premije polise osiguranja. U prvom delu rada predstavljena je Bejzova metodologija u jednodimenzionalnom slučaju. Kako se Bejzova premija teško računa u praksi jer zahteva podatke o raspodelama, dati su modeli koje je aproksimiraju: Blimanov i Bilman-Štraubov model. U nastavku rada predstavljeni su višedimenzionalni Bilmanov i Bilman-Štraubov model. Na kraju, prikazana je primena navedenih modela u aktuarstvu u okviru koje su izračunate ocene stopa mortaliteta za stanovništvo Republike Srbije i Republike Hrvatske, kao i neto premije za kasko osiguranje vozila u zavisnosti od kategorije kojoj vozilo pripada.*
IZ
Datum prihvatanja teme od strane NN veća: *03. septembar 2018.*
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:
KO
Predsednik: *dr Sanja Rapajić, vanredni profesor*
Mentor: *dr Dora Seleši, redovni profesor*
Član: *dr Nataša Krklec-Jerinkić, docent*

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: *monograph type*
DT
Type of record: *printed text*
TR
Contents code: *Master thesis*
CC
Author: *Svetlana Vidaković*
AU
Mentor: *Prof. Dora Seleši, PhD*
MN
Title: *Multidimensional high accuracy credibility theory and its application in actuarial science*
XI
Language of text: *Serbian (latin)*
LT
Language of abstract: *s/e*
LA
Country of publication: *Republic of Serbia*
CP
Locality of publication: *Vojvodina*
LP
Publication year: *2019.*
PY
Publisher: *author's reprint*
PU
Publ. place: *Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4*
PP
Physical description: *(5/91/17/14/5/0/0)*
(chapters/pages/quotations/tables/pictures/graphics/enclosures)
PD
Scientific field: *mathematics*
SF

Scientific discipline: *actuarial mathematics*
SD
Key words: *Credibility theory, Buhlmann model, Buhlmann-Straub model insuranse, premium, claims*
UC
Holding data: *Department of Mathematics and Informatics' Library, Faculty of Sciences, Novi Sad*
HD
Note:
N
Abstract: *The main topic of this Master's Thesis is high accuracy credibility theory, used for improving procedure of calculating premiums of the insurance policy. The first part of the paper presents the Bayesian methodology in a one-dimensional case. As Bayesian premium is hardly accounted for in practice because it requires data on distributions, Buhlmann and Buhlmann-Straub models which approximate Bayesian premium are presented. After that, the multidimensional Buhlmann and Buhlmann-Straub models are demonstrated. Lastly, the application of these models in the actuarial science is shown, where the estimates of the rate of mortality for the population of the Republic of Serbia and the Republic of Croatia are calculated, as well as the net premiums for casco insurance of vehicles in dependence on the category to which the vehicle belongs.*
AB
Accepted by the Scientific Board on: *03 September 2018*
ASB
Defended:
DE
Thesis defend board:
DB
President: *Dr Sanja Rapajić, Associate Professor*
Mentor: *Dr Dora Seleši, Full Professor*
Member: *Dr Nataša Krklec-Jerinkić, Assistant Professor*