Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku

Svetlana Trifunović

POSTUPCI BEZ IZVODA ZA NUMERIČKO REŠAVANJE NELINEARNIH JEDNAČINA

Master rad

Novi Sad 2012.

Svojoj porodici

s ljubavlju

Sadržaj

Predgovor

Matematika, kad je čovek dobro shvati,
sadrži ne samo istinu već i najvišu lepotu

Bertrand Russell

Rešavanje nelinearnih jednačina je jedan od najstarijih i najvažnijih matematičkih problema jer se osim u primenjenoj matematici javlja u matematičkim modelima inžinjerskih disciplina, fizici, astronomiji, ekonomiji pa čak i u društveno-humanističkim naukama. Traženje tačnog rešenja nelinearne jednačine pomoću formule koja se sastoji od elementarnih algebarskih operacija i elementarnih funkcija je moguće samo kod malog broja nelinearnih jednačina (npr.kvadratne). Zato se primenjuju određeni numerički (iterativni) postupci pomoću kojih se uz početne uslove dobija približno rešenje nelinearne jednačine sa zadatom tolerancijom. Konstruisanje numeričkih postupaka je posebno zanimljiva i neiscrpna tema u numeričkoj matematici koja privlači pažnju mnogih autora više od četiri veka. Knjige Ostrovskog, [9], Trauba, [10], Ortege i Rajnbolta, [8], šezdesetih i sedamdesetih godina dvadesetog veka su u dobroj meri sistematizovale znanja iz ove oblasti. Uprkos velikom broju knjiga i velikom broju radova na ovu temu, poslednjih deset godina dolazi do ekspanzije iterativnih postupaka za rešavanje nelinearnih jednačina. Za to postoji više rezloga. Jedan je pojava modernih računara velike preciznosti koji su omogućili razvoj novih, bržih i efikasnijih postupaka. Svaki od razvijenih postupaka ima svoje prednosti ali i mane pa je to dodatna motivacija za pronalaženje novih postupaka koji prevazilaze te mane.

Cilj svakog postupka za rešavanje nelinearnih jednačina je visok red konvergencije i visoka stopa računske efikasnosti. Na ovu temu postoji objavljeno više desetina hiljada radova. Kao dodatni problem se javlja i originalnost tih radova. Često se desi da je objavljeni rad efikasan ali ne originalan i obrnuto.

Najpoznatiji iterativni postupak za rešavanje nelinearnih jednačina je Njutn-Rafsonov postupak

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Možemo primetiti da ovaj postupak u svom izračunavanju koristi izvod funkcije *f*.

Rad će se baviti isključivo analizom iterativnih postupaka koji ne koriste izvode funkcije *f*. Motivacija za ovu temu je mogućnost da funkcija nije zadata eksplicitno. Može se desiti da funkcija nije diferencijabilna ili da su njeni izvodi komplikovani za računanje. Najpoznatiji postupci ovog tipa su postupak polovljenja, postupak sečice i postupak regula-falsi. Postupak sečice je generalno brz ali može biti i ekstremno spor za određene klase funkcija. Dešava se da ne konvergira ako početna aproksimacija nije dovoljno blizu nule funkcije. Postupak polovljenja je siguran što se tiče konvergencije ali je veoma spor. Potrebno je dobiti postupak koji ima visok red konvergencije a garantuje konvergenciju u malom broju računanja vrednosti funkcije. Neki autori su koristili kombinaciju metoda superlinearne konvergencije sa postupkom polovljenja koji zadržava dobre osobine postupka. Uspešne algoritme razvili su Deker, Brent i Bus, [1].

Rad se bavi analizom nekih osnovnih postupaka bez izvoda za rešavanje nelinearnih jednačina kao što su postupak polovljenja i sečice i analizira publikovane i prihvaćene radove u kojima se postupci za rešavanje nelinearnih jednačina unapređuju tako što nastaju kombinacijom nekih poznatih iterativnih postupaka. U radu će biti predstavljen i moj originalan doprinos ovoj temi sa numeričkim eksperimentalnim primerima.

Master rad se sastoji od sledećih poglavlja:

Predgovor

1. Uvodni deo
2. Iterativni postupci bez izvoda
3. Modifikacija nekih iterativnih postupaka
4. Numerički rezultati
5. Zaključak
6. Literatura
7. Biografija

Numerisanje svih definicija, teorema, primera, algoritama i tabela izvršeno je prema redosledu javljanja u radu.

Prvo poglavlje se sastoji od pet odeljaka i u njemu je dat opšti pristup rešavanju nelinearnih jednačina iterativnim putem. Data je definicija i klasifikacija iterativne funkcije, definicije i teoreme vezane za opšti iterativni postupak i red konvergencije. U poslednjem odeljku ovog poglavlja data je definicija efikasnosti iterativnog postupka.

Drugo poglavlje se sastoji od analize publikovanih radova vezanih za postupke bez izvoda za rešavanje nelinearnih jednačina. Sastoji se od šest odeljaka a u svakom od njih dat je opis određenog postupka, algoritam i analiza konvergencije. U prva dva odeljka opisani su dobro poznati postupci koji se često javljaju u udžbenicima. To su postupak polovljenja i postupak sečice za koje je pored gore navedenih stavki data i grafička interpretacija. U trećem odeljku predstavljen je postupak od autora Le-a nazvan LZ4, [6]. On kombinuje postupak polovljenja sa postupcima drugog i trećeg reda dobijenih aproksimacijom Tejlorovog reda. U četvrtom i petom odeljku su predstavljeni originalni postupci nastali kombinovanjem već poznatih postupaka. Nazvala sam ih po postupcima koje kombinuju: Falsi-Stefensonov postupak, [12] i postupak Muller-polovljenje, [11]. Za oba je dat opis postupka i rezultat analize konvergencije. Na kraju ovog poglavlja predstavljen je neiterativni Signum postupak i njegova kombinacija sa postupkom sečice koju sam nazvala postupak Signum-sečice, [13],[14]. Postupak je zasnovan na sigmoidnoj transformaciji koja će biti opisana u radu.

Treće poglavlje se sastoji od četiri odeljka i predstavlja originalni deo ovog rada. Ideja je da određene iterativne postupke možemo napisati kao jednu familiju iterativnih postupaka. U toj familiji se javlja prvi izvod pa će on biti zamenjen centralnim diferencnim količnikom i na taj način je dobijena nova familija iterativnih postupaka bez izvoda. Data je teorema sa dokazom o konvergenciji ove familije. Naveden je i deo iz publikovanog rada da bi u četvrtom delu napravili i uočili razliku između njega i naše familije modifikovanih postupaka.

Četvrto poglavlje predstavlja eksperimentalni deo gde su testirane određene funkcije pomoću modifikovanih postupaka koji se jaljaju u trećem delu rada. Uočena je razlika direktne modifikacije postupka Ostrovskog sa modifikacijom pomoću naše familije postupaka.

Na kraju rada naveden je spisak korišćene literature i kratka biografija autora rada.

*

Ovom prilikom želim da se zahvalim svom mentoru, profesoru dr Dragoslavu Hercegu, na neprocenjivoj pomoći i posvećenosti u izradi master rada. Zahvalila bih se svim profesorima i asistentima sa kojima sam sarađivala u toku osnovnih i master studija.

Svoju veliku zahvalnost na razumevanju i ljubavi dugujem svojoj porodici a posebno svojim roditeljima Ružici i Milenku Trifunoviću na neiscrpnoj podršci.

U Sremskoj Mitrovici, septembra 2012. *Svetlana Trifunović*

1. Uvodni deo

1.1 Uvod

Numeričko rešavanje jednačina je deo numeričke analize koji se bavi pronalaženjem što efikasnijih algoritama za rešavanje jednačina i ispitivnjem njihove konvergencije. U ovom radu, ograničićemo se na rešavanje nelinearnih jednačina sa jednom nepoznatom oblika

$$f(x) = 0$$

gde je f funkcija realne promenljive.

Definicija 1. *Svaki realan broj α za koji važi da je $f(\alpha) = 0$ nazivamo rešenje ili koren jednačine $f(x) = 0$.*

Koren jednačine $f(x) = 0$ nazivamo i nula funkcije f.

Definicija 2. *Nula α je višestrukosti m ako $f(x) = (x - \alpha)^m g(x)$ gde $g(x)$ ograničeno u α i $g(\alpha) \neq 0$.*

Za m se uvek uzima pozitivan ceo broj. Ako je $m = 1$, onda kažemo da je koren prost. Ako je $m > 1$ onda je koren višestruk.

Jednačine možemo podeliti na algebarske i transcedentne. Algebarske jednačine su one kod kojih je funkcija f algebarski polinom oblika

$$f(x) = P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

pri čemu je $n \in \mathbb{N}, a_j \in \mathbb{R}\ (j = 0,1,2,\dots,n), a_n \neq 0$. Prirodni broj n se naziva stepen ili red polinoma $P_n(x)$ ili red algebarske jednačine $P_n(x) = 0$.

Svaka jednačina koja nije algebarska je transcedentna. Na primer: $3x + e^x - 2 = 0$, $x + cosx = 0, x^2 + 2 + lnx = 0$.

Postoji jedan mali broj jednačina kod kojih rešenje možemo pronaći analitički, odnosno rešenje se može zapisati eksplicitno u obliku formule koja se sastoji od elementarnih algebarskih operacija i elementarnih funkcija. To su linearne (algebarske jednačine prvog reda) zatim kvadratne (algebarske jednačine drugog reda) ili jednačine koje se mogu svesti na linearne i kvadratne. Postoje i formule za rešavanje algebarskih jednačina reda 3 i 4 ali su suviše komplikovane.

Za ostale jednačine oblika $f(x) = 0$ rešenja se traže približno pomoću nekog numeričkog postupka. Numerički postupak sadrži iterativno pravilo pomoću kog se, polazeći od početne aproksimacije x_0, generiše niz aproksimacija $\{x_k\}$ koji konvergira ka rešenju α jednačine $f(x) = 0$, odnosno:

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \alpha$$

Pretpostavlja se da se sva računanja izvode bez grešaka tj.da nema grešaka zaokruživanja i grešaka aproksimacija funkcija koje koje učestvuju u računanju. Numerički postupci su najčešće univezalni što znači da se mogu primeniti na bilo koju transcedentnu ili algebarsku jednačinu.

Za određivanje početne aproksimacije x_0 potrebno je lokalizovati rešenja jednačine, odnosno odrediti skup koji sadrži jedno ili više rešenja posmatrane jednačine. Izbor iterativnog pravila se vrši na osnovu brzine konvergencije koja se meri redom konvergencije. Kako se u praksi izračunava samo konačan broj aproksimacija rešenja, potrebno je odrediti i grešku aproksimacije.

1.2 Oznake

- $\mathbb{N}$ - skup prirodnih brojeva
- $\mathbb{R}$ - skup realnih brojeva
- $C^k(D)$ – skup k-puta neprekidno diferencijabilnih funkcija na D
- $\{x_k\}$, $\{x_i\}$ ili $\{x_n\}$- niz brojeva $x_0, x_1, x_2, \ldots$
- γ - Lipšicova konstanta
- $Lip_\gamma(D)$ – skup funkcija u skupu D koje zadovoljavaju Lipšicov uslov sa konstantom γ
- C - asimptotska konstanta postupka
- p - red konvergencije iterativnog postupka
- EFF – računska efikasnost (Traub)

- EFF^* - računska efikasnost (Ostrovski)
- $\{(b_n - a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ - niz dijametralnih razlika
- $\tanh(\beta x)$ - hiperbolična tangens funkcija
- ε – tolerancija
- $f^{[\beta]}(x)$ - sigmoidna transformacija od x
- n_b - broj računanja vrednosti funkcije u postupku polovljenja
- $f^{(l)}(x)$ - l-ti izvod funkcije f u tački x
- IP - iterativni postupak
- α rešenje jednačine $f(x) = 0$ odnosno njoj ekvivalentne jednačine $x = \varphi(x)$

1.2 Definicija i klasifikacija iterativnih funkcija

Definicija 3. *Funkciju φ nazivamo **iterativna funkcija** ako x_{i+1} možemo jedinstveno odrediti iz informacija dobijenih iz $x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-n}$ primenjujući funkciju φ na sledeći način:*

$$x_{i+1} = \varphi(x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-n})$$

gde je $x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-n}$ n+1 aproksimacija do nule α.

Kako iterativna funkcija određuje iterativno pravilo, ova dva termina će se često preklapati.

U različitim iterativnim postupcima vrednosti $x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-n}$ se mogu pojaviti kao argumenti funkcije f ili njenih izvoda, pa možemo pisati:

$$\varphi = \varphi(x_i, f_i, \dots, f_i^{(l_0)}, x_{i-1}, f_{i-1}, \dots, f_{i-1}^{(l_1)}, \dots, x_{i-n}, f_{i-n}, \dots, f_{i-n}^{(l_n)})$$

Najpogodnije je iterativno pravilo zapisivati $\varphi = \varphi(x)$.

Sve iterativne funkcije možemo klasifikovati na osnovu informacija koje one zahtevaju.

Definicija 4. *Ako x_{i+1} određujemo jedino na osnovu nove vrednosti funkcije f u tački x_i i ne koristimo ponovo ranije izračunate vrednosti funkcije, na način*

$$x_{i+1} = \varphi(x_i)$$

takvu funkciju nazivamo jednotačkasta iterativna funkcija, a postupak jednotačkasti iterativni postupak.

Najpoznatiji primer je Njutnov iterativni postupak.

Definicija 5. *Ako x_{i+1} određujemo na osnovu nove vrednosti funkcije u tački x_i a koristimo ponovo ranije izračunate vrednosti funkcije f u tačkama $x_{i-1}, \dots, x_{i-n}$, dobijamo jednotačkasti iterativni postupak sa memorijom:*

$$x_{i+1} = \varphi(x_i; x_{i-1}, \dots, x_{i-n})$$

Najpoznatiji primer je postupak sečice.

Definicija 6. *Ako x_{i+1} određujemo na osnovu novih vrednosti funkcije f u tačkama $x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-k}, k \geq 1$ i ne koristimo ponovo ranije izračunate vrednosti funkcije, na način*

$$x_{i+1} = \varphi(x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-k})$$

takav postupak nazivamo višetačkasti.

Definicija 7. *Ako x_{i+1} određujemo na osnovu novih vrednosti funkcije f u tačkama $x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-k}, k \geq 1$ i koristimo ponovo ranije izračunate informacije $x_{i-k-1}, \dots, x_{i-n}$, na način*

$$x_{i+1} = \varphi(x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-k}; x_{i-k-1}, \dots, x_{i-n}), \qquad n > k$$

takav postupak nazivamo višetačkasti sa memorijom.

Za višetačkasti iterativni postupak ne postoji poznati primer.

1.3 Opšti iterativni postupak

Posmatraćemo jednačine oblika

$$x = \varphi(x) \tag{1}$$

u svetlu teorije o nepokretnoj tački i vezu sa rešavanjem jednačine $f(x) = 0$ pomoću iterativnog postupka $x_{i+1} = \varphi(x_i)$.

Definicija 8. *Neka je* $\varphi: D[a,b] \to \mathbb{R}$. *Tačka* $\alpha \in D$ *je nepokretna (fiksna) tačka funkcije* φ *ako je*

$$\alpha = \varphi(\alpha)$$

Neka je x_0 proizvoljan broj iz intervala $[a,b]$. Formirajmo niz brojeva $x_0, x_1, x_2, \ldots$ prema

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

Ovaj niz je moguće formirati samo ako $\varphi(x_k) \in [a,b]$, $k = 0,1,2,\ldots$ zbog definisanosti funkcije φ na intravalu $[a,b]$. Ako funkcija φ preslikava interval $[a,b]$ u samog sebe, važi $\varphi(x_k) \in [a,b]$, $k = 0,1,2,\ldots$. Ako je niz $x_0, x_1, x_2, \ldots$ dobro definisan i ima graničnu vrednost, tj. za neko $\alpha \in [a,b]$ važi

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \alpha,$$

onda je α rešenje jednačine $\varphi(x) = x$, ako je funkcija φ neprekidna na intervalu $[a,b]$. Iz $\varphi(x) \in [a,b]$, za svako $x \in [a,b]$ sledi, zbog zatvorenosti intervala $[a,b]$, da tačka $\alpha \in [a,b]$, a zbog neprekidnosti funkcije φ sledi

$$\alpha = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} \varphi(x_k) = \varphi\left(\lim_{k\to\infty} x_k\right) = \varphi(\alpha).$$

Dakle, ako niz $x_0, x_1, x_2, \ldots$ konvergira ka α, tada je njegova granična vrednost, α, rešenje jednačine $\varphi(x) = x$, a članovi tog niza aproksimiraju to rešenje.

Ovaj postupak, u kome računamo vrednosti $x_0, x_1, x_2, \ldots$ prema $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, je primer iterativnog postupka (postupak sukcesivnih aproksimacija), gde je $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ iterativno pravilo, funkcija φ funkcija koraka, a niz $x_0, x_1, x_2, \ldots$ je iterativni niz. Prvi član tog niza x_0 je početna aproksimacija (startna vrednost). Kada iterativni niz konvergira za proizvoljnu početnu vrednost iz nekog skupa, kažemo da iterativni postupak konvergira.

Problem nalaženja nepokretne tačke funkcije javlja se u mnogim granama matematike. Da bismo pronašli njenu vezu sa rešavanjem $f(x) = 0$ uvodimo bilo koju funkciju g za koju $g(\alpha) \neq 0$. Definišimo

$$\varphi(x) = x - f(x)g(x)$$

Tada je α rešenje jednačine $f(x) = 0$ ako i samo ako je α nepokretna tačka funkcije φ.

Potrebno je pokazati da pod određenim pretpostavkama problem nepokretne tačke ima jedinstveno rešenje a da iterativni postupak

$$x_{i+1} = \varphi(x_i) \tag{2}$$

konvergira ka tom rešenju. Pretpostavimo da je φ definisano na nekom zatvorenom i ograničenom intervalu $D = [a, b]$ i da se njegove vrednosti nalaze u *D*. Pa ako je x_0 u *D* onda je svako x_i iz *D*. Da bismo garantovali (1) moramo pretpostaviti da je φ neprekidna funkcija.

Teorema 1. [3]. *Neka je* $\varphi: D[a, b] \to D[a, b]$ *neprekidna funkcija. Tada postoji* α, $a \leq \alpha \leq b$ *tako da je* $\varphi(\alpha) = \alpha$.

Dokaz. Kako funkcija φ preslikava D u samog sebe sledi da je $\varphi(a) \geq a$ i $\varphi(b) \leq b$. Neka je $h(x) = \varphi(x) - x$. Tada $h(a) \geq 0$ *i* $h(b) \leq 0$ pa na osnovu Bolcano-Košijeve teoreme postoji α takvo da je $h(\alpha) = 0$. ■

Da bismo izvukli određene zaključke, potrebno je nametnuti dodatne uslove za φ.

Definicija 9. *Neka za svaku proizvoljnu tačku s i t iz D važi*

$$|\varphi(s) - \varphi(t)| \leq \gamma |s - t|$$

Tada je funkcija φ ***Lipšic neprekidna*** *sa konstantom* γ *na intervalu D, što zapisujemo* $\varphi \in Lip_\gamma(D)$.

Definicija 10. *Ako je* $0 \leq \gamma < 1$ *funkcija φ je kontrakcija na D.*

Lipšic neprekidna funkcija na intervalu D je neprekidna na tom intervalu. Obrnuto ne važi.

Sada možemo pokazati da je rešenje od (1) jedinstveno.

Teorema 2. [3]. *Neka je φ kontrakcija na D. Tada jednačina* $\varphi(x) = x$ *ima najviše jedno rešenje u D.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoje dva različita rešenja, α_1 *i* α_2. Tada je $\alpha_1 = \varphi(\alpha_1)$ i $\alpha_2 = \varphi(\alpha_2)$. Pa je

$$|\alpha_1 - \alpha_2| = |\varphi(\alpha_1) - \varphi(\alpha_2)| \leq \gamma |\alpha_1 - \alpha_2| < |\alpha_1 - \alpha_2|$$

što je kontradikcija. ■

U Teoremi 1. i Teoremi 2. je potvrđena egzistencija i jedinstvenost rešenja α jednačine $\varphi(x) = x$. Sada ćemo pokazati da niz definisan sa $x_{i+1} = \varphi(x_i)$ konvergira ka tom rešenju.

Teorema 3. [3]. *Neka je $\varphi: D \to D$ kontrakcija na zatvorenom i ograničenom intervalu D. Neka je x_0 proizvoljna taćka iz D a neka $x_{i+1} = \varphi(x_i)$. Tada iterativni niz $\{x_i\}$ konvergira ka jedinsvenom rešenju od $\varphi(x) = x$ na D.*

Dokaz. Na osnovu Teoreme 1. i Teoreme 2. postoji jedinstveno rešenje α jednačine $\varphi(x) = x$. Kako je φ kontrakcija i preslikava D u samog sebe važi:

$$|x_{i+1} - \alpha| = |\varphi(x_i) - \varphi(\alpha)| \leq \gamma|x_i - \alpha| \leq \gamma^2|x_{i-1} - \alpha| \leq \cdots \leq \gamma^{i+1}|x_0 - \alpha|$$

pa

$$\lim_{i\to\infty}|x_{i+1} - \alpha| \leq |x_0 - \alpha| \lim_{i\to\infty}\gamma^{i+1} = 0$$

tj. $\lim_{i\to\infty} x_i = 0$ ■

Prethodna teorema je poznata i pod imenom Banahov princip kontrakcije.

1.4 Red konvergencije

Kada nam je zadat iterativni postupak $x_{i+1} = \varphi(x_i)$ koji generiše iterativni niz $x_1, x_2, x_3, \ldots$ sa početnom aproksimacijom x_0, potrebno je utvrditi da li taj postupak konvergira ka rešenju α jednačine $\varphi(x) = x$ i ako konvergira, koliko brzo. Brzina konvergencije iterativnog postupka meri se redom konvergencije. Sada ćemo dati dve definicije koje se javljaju i koje su ekvivalentne.

Definicija 11. *Za niz $\{x_i\}$ definisan iterativnom formulom (2) koji konvergira ka α, kaže se da ima red konvergencije $p \in [1, \infty)$ ako je*

$$|x_{i+1} - \alpha| \leq C|x_i - \alpha|^p, \quad i \geq n_0$$

gde je konstanta $C \neq 0$, a n_0 prirodan broj. Ako je p=1 onda se pretpostavlja da je C<1.

Definicija 12. *Za niz $\{x_i\}$ definisan iterativnom formulom (2) koji konvergiraka α, kaže se da ima red konvergencije $p \in [1, \infty)$ ako je*

$$\lim_{i\to\infty}\frac{|x_{i+1}-\alpha|}{|x_i-\alpha|^p}=C,\quad i\geq n_0$$

gde je konstanta $C\neq 0$, *a* n_0 *prirodan broj. Ako je p=1 onda se pretpostavlja da je C<1.*

Konstantu *C* nazivamo još i asimptotska konstanta postupka(greške).

Ukoliko red konvergencije postoji, on je jedinstven. Red konvergencije iterativnog postupka jednak je redu konvergencije iterativnog niza dobijenog posmatranim iterativnim postupkom. Za iterativni postupak koji ima veći red konvergencije kažemo da je brži.

Definicija 13. *Ako postoji konstanta* $C\in[0,1)$ *i ceo broj* $n_0\geq 0$ *takav da za svako* $i\geq n_0$ *važi*

$$|x_{i+1}-\alpha|\leq C|x_i-\alpha|$$

kaže se da j niz $\{x_i\}$ *q-linearno konvergentan.*

Definicija 14. *Ako za neki niz* $\{C_i\}$ *koji konvergira ka nuli važi*

$$|x_{i+1}-\alpha|\leq C_i|x_i-\alpha|$$

tada je niz $\{x_i\}$ *q-superlinearno konvergentan.*

Definicija 15. *Ako postoje konstante* $p>1, C\geq 0$ *i* $n>0$ *takve da niz* $\{x_i\}$ *konvergira ka* α *i za svako* $i\geq n$ *važi*

$$|x_{i+1}-\alpha|\leq C|x_i-\alpha|^p$$

tada se kaže da niz $\{x_i\}$ *konvergira ka* α *sa q-redom bar p.*

Tako za $p=2$ konvergencija je q-kvadratna a za $p=3$, konvergencija je q-kubna.

Definicija 16. *Neka je* $\alpha\in\mathbb{R}$, $x_i\in\mathbb{R}, i=0,1,2\ldots$ *i neka niz* $\{x_i\}$ *konvergira ka* α. *Ako postoji ceo broj* $n\geq 0$ *takav da za svako* $i\geq n$ *važi*

$$\left|x_{i+j}-\alpha\right|\leq C_i|x_i-\alpha|$$

za neki niz $\{C_i\}$ *koji konvergira ka nuli i za neki fiksni ceo broj j, tada je niz* $\{x_i\}$ *j-koračno q-superlinearno konvergentan.*

Definicija 17. *Ako postoje konstante* $C\in[0,1), p>1$ *i ceo broj* $n\geq 0$ *takav da za* $i\geq n$ *i neki fiksni ceo broj j važi*

$$\left|x_{i+j}-\alpha\right| \leq C|x_i-\alpha|^p$$

tada se kaže da niz$\{x_i\}$ konvergira ka α sa j-koračno q-tim redom konvergencije bar p.

Red konvergencije opšteg iterativnog pistupka može se odrediti na osnovu sledeće teoreme.

Teorema 4. [3] *Neka je φ p puta neprekidno diferencijabilna funkcija na intervalu D. Ako je iterativni niz $x_{i+1}=\varphi(x_i)$, i = 0, 1, 2,... sa $x_0 \in D$ konvergentan i zadovoljava sledeće uslove:*

$$\varphi(\alpha)=\alpha, \qquad \varphi'(\alpha)=\varphi''(\alpha)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(\alpha)=0, \quad \varphi^{(p)} \neq 0$$

tada je iterativni niz (postupak) p-tog reda konvergencije.

Asimptotska konstanta postupka je data sa

$$C=\lim_{i\to\infty}\frac{|x_{i+1}-\alpha|}{|x_i-\alpha|^p}=\left|\frac{\varphi^{(p)}(\alpha)}{p!}\right|, \ \ i \geq n_0$$

1.5 Efikasnost iterativnog postupka

Iterativni postupak je efikasniji ukoliko se postavljeni zadatak izvrši za što kraće vreme. Efikasnost nekog iterativnog metoda definiše se uvođenjem koeficijenta efikasnosti. Efikasnost se može uvesti na više načina, ali tako da je proporcionalna redu konvergencije iterativnog metoda (brzini izvršavanja algoritma do ispunjavanja nekog kriterijuma ili zadate tačnosti) i obrnuto proporcionalna obavljenom radu, recimo broju izračunavanja funkcija ili numeričkih operacija po iteraciji.

Traub je uveo svoj koeficijent efikasnosti:

$$EFF=\frac{p}{d}$$

gde je d broj novih informacija (novih računanja vrednosti funkcije) zahtevanih po iteraciji a p red konvergencije iterativnog postupka. Ostrovski, koristeći iste podatke, uvodi svoj koeficijent efikasnosti

$$EFF^*=p^{1/d}$$

Primer 1. Za Njutnov iterativni postupak dobijeni su sledeći rezultati

$$p = 2, \quad d = 2, \quad EFF = 1, \quad EFF^* = \sqrt{2}$$

dok za postupak sečice imamo sledeće rezultate

$$p = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right) \sim 1.62, \quad d = 1, \quad EFF = EFF^* = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right)$$

2 Iterativni postupci bez izvoda

2.1 Postupak polovljenja

2.1.1 Opis postupka

Postupak polovljenja je jedan od najjednostavnijih postupaka za rešavanje nelinearnih jednačina sa jednom nepoznatom. Posupak polovljenja je relativno spor i zato se često koristi samo za dobijanje približnih rešenja koja će se u nekim efikasnijim postupcima koristiti kao početna aproksimacija. Postupak koristi jedno od globalnih svojstava neprekidnih funkcija dato u Bolcano-Košijevoj teoremi koja glasi:

Teorema 5. [3]. *Neka je* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *neprekidna funkcija i na krajevima intervala ima vrednosti različite po znaku (tj.* $f(a) \cdot f(b) < 0$*). Tada postoji* $c \in (a, b)$ *takvo da* $f(c) = 0$.

Ova teorema nam garantuje postojanje (bar jednog) rešenja jednačine *f(x)=0* ; (teorema ne garantuje jedinstvenost tog rešenja). Ako je

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$$

onda je $\alpha = \frac{a+b}{2}$ rešenje jednačine, a ako

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$$

onda će se rešenje nalaziti u jednom od intervala

$$\left(a, \frac{a+b}{2}\right), \left(\frac{a+b}{2}, b\right) \tag{3}$$

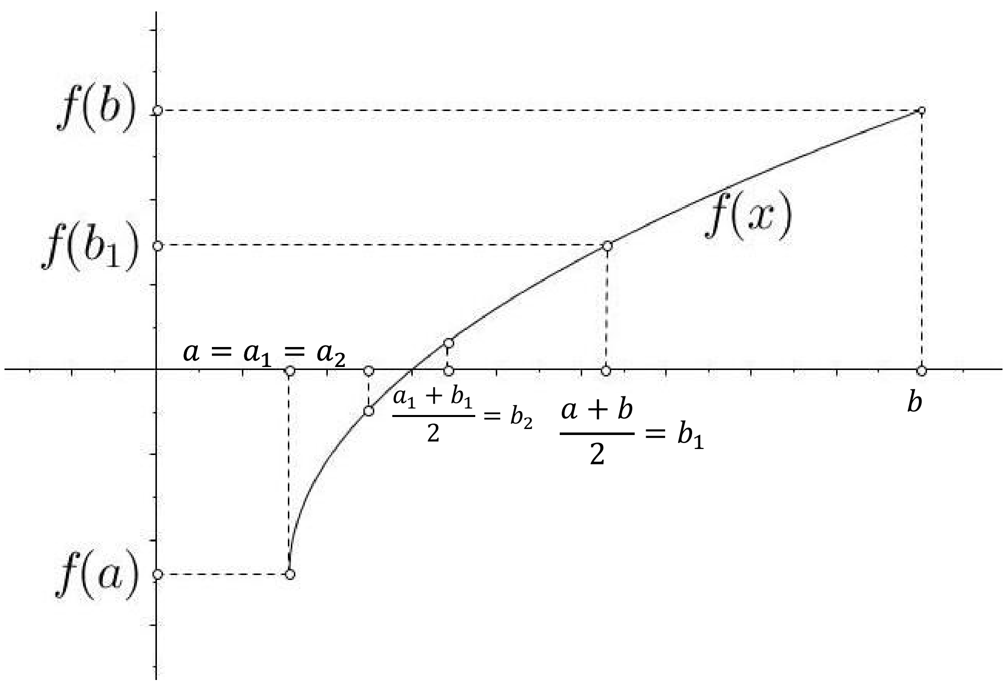
Prvu tačku u novom intervalu obeležićemo sa a_1 a drugu sa b_1.Koji od ova dva intervala u (3) će biti novi interval biramo tako što moramo poštovati uslov Teoreme 5. Neka je početni interval $D = [a, b]$. Svaki sledeći interval $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, $[a_3, b_3]$,… se dobija na opisani način i tada će bar jedna nula funkcije f pripadati svim intervalima. Ako se još dokaže da za proizvoljno $\varepsilon > 0$ moguće dobiti $b_k - a_k < 2\varepsilon$ za neko $k \in N$ može se kao aproksimacija nule α funkcije f uzeti $x_n = 0.5(a_k + b_k)$ i tada važi

$$|\alpha - x_n| < \varepsilon$$

2.1.2 Grafička interpretacija

Na slici 1. je prikazan primer funkcije i kako biramo interval u kom se nalazi rešenje.

Vrednosti funkcije f na krajevima intervala $[a, b]$ su $f(a) < 0$ i $f(b) > 0$ pa važi da je $f(a)f(b) < 0$. Vrednost funkcije f u središnjoj tački intervala $[a, b]$ je $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$ pa će prva tačka drugog intervala postati a $(a_1 = a)$ a druga tačka će biti $\frac{a+b}{2}$ $(b_1 = \frac{a+b}{2})$. Ovaj postupak se nastavlja sve dok zadata tolerancija ε_1 ne bude veća (ili jednaka) od dužine intervala $[a_i, b_i]$ $(i = 0,1,2, \dots n)$ (tj. $|b_i - a_i| \leq \varepsilon_1$). Kao izlazni kriterijum može se postaviti i vrednost funkcije f u središnjij tački c_i intervala $[a_i, b_i]$. Postupak završavamo kada za zadato ε_2, $f(c_i) \leq \varepsilon_2$. Izlazni kriterijum mogu biti oba gore navedena u isto vreme.



Slika 1.

Svakom novom iteracijom mi smanjujemo početni interval $[a, b]$ (možemo ga obeležiti sa $[a_0, b_0]$) do intervala $[a_n, b_n]$. Kako se svakom narednom iteracijom interval polovi važi

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$$

Iz ove jednakosti možemo dobiti (maksimalan) broj iteracija, a time i broj računanja funkcija, kao najmanji prirodan broj za koji važi

$$n \geq \frac{1}{log2} log \frac{b_0 - a_0}{b_n - a_n}$$

2.1.3 Iterativni postupak i konvergencija

Postupak polovljenja možemo zapisati u obliku sledećeg iterativnog pravila:

$$x_0 = a, \quad x_1 = b,$$

$$x_{k+1} = \begin{cases} x_k, & f(x_k) = 0 \\ \frac{1}{2}(x_k + x_s), & f(x_k) \neq 0 \end{cases}$$

gde je $s = s(k) = max\{\ i \in \{0, 1, \dots, k-1\}: \quad f(x_k)f(x_i) < 0\}$.

Sledeća teorema tvrdi da postupak konvergira i daje ocenu greške.

Teorema 6. [3]. *Neka je* $f \in C(D)$, $D = [a, b]$ *i* $f(a)f(b) < 0$. *Tada postupak polovljenja konvergira ka jednom rešenju* $\alpha \in D$ *jednačine* $f(x) = 0$ *i važi*

$$|x_k - \alpha| < \frac{1}{2^{k-1}} |b - a|$$

Dokaz. Koristeći gore navedeno iterativno pravilo vidimo da postoje dva slučaja:

1. $f(x_k) = 0$ za neko k i tada je $\alpha = x_k$ pa teorema važi.
2. $f(x_k) \neq 0$ za $k = 0, 1, 2, \dots$

U drugom slučaju delimo početni interval $[a_0, b_0]$. Neka $a_0 = x_0, b_0 = x_1$ i bez umanjenja opštosti pretpostavimo da je $f(x_0 < 0)$ i $f(x_1) > 0$. Tada je

$$x_2 = \frac{1}{2}(x_0 + x_1).$$

Koje dve tačke će od x_0, x_1, x_2 biti granice novog intervala $[a_1, b_1]$ zavisi od znaka $f(x_2)$.

Ako je $f(x_2) < 0$ onda je $a_1 = x_2 \ i \ b_1 = x_1$.

Ako je $f(x_2) > 0$ onda je $a_1 = x_0 \ \ i \ \ b_1 = x_2$.

U oba slučaja važi

$$a_0 \leq a_1 < b_1 \leq b_0$$

Tražimo x_3 kao središnju tačku intervala $[a_1, b_1]$ tj. $x_3 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$.

Ako je $f(x_2) > 0$ onda je $x_3 = \frac{1}{2}(x_0 + x_2)$.

Ako je $f(x_2) < 0$ onda je $x_3 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$.

Postupak se nastavlja analogno pa se dobijaju dva niza $\{a_k\} \ i \ \{b_k\}$ i za njih važi

$$a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_k < b_k \leq \cdots \leq b_1 \leq b_0$$

i

$$x_k = \frac{1}{2}(a_{k-2} + b_{k-2})$$

Oba niza su monotona. Niz $\{a_k\}$ je monotono neopadajući i ograničen sa gornje strane a niz $\{b_k\}$ je monotono nerastući i ograničen sa donje strane pa su oba niza konvergentna. Označićemo njihove granične vrednosti sa

$$\theta = \lim_{k\to\infty} a_k \qquad i \quad \tau = \lim_{k\to\infty} b_k$$

Važi da je $f(\theta) \leq 0$ i $f(\tau) \geq 0$ jer je f neprekidna funkcija i $f(a_k) < 0$ i $f(b_k) > 0$.

Zbog $b_k - a_k = \frac{1}{2^k}(b - a)$ važi

$$\lim_{k\to\infty}(b_k - a_k) = 0$$

pa važi još

$$0 = \lim_{k\to\infty}(b_k - a_k) = \lim_{k\to\infty} b_k - \lim_{k\to\infty} a_k = \tau - \theta = 0$$

odakle važi

$$\theta = \tau \quad pa\, je \ \ i \ \ f(\theta) = f(\tau) = 0$$

Kako je $x_k = \frac{b_{k-2}+a_{k-2}}{2}$ sledi da je

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \theta = \tau$$

Sada još pokazati ocenu.

$x_k \in [a_{k-1}, b_{k-1}]$ i $\alpha \in (a_{k-1}, b_{k-1})$ pa sledi da je

$$|x_k - \alpha| < b_{k-1} - a_{k-1} = \frac{1}{2^{k-1}}|b-a| \qquad \blacksquare$$

Postupak polovljenja je linearno konvergentan što ima za posledicu veliki broj iteracija u traženju korena. Takođe za jednačine koje imaju više rešenja, postupak polovljenja nalazi samo jedno od njih.

2.2 Postupak sečice

2.2.1 Opis postupka

Jedan od najzastupljenijih postupaka u rešavanju nelinearnih jednačuna sa jednom nepoznatom je Njutnov postupak. Postupak sečice u svojoj osnovi koristi Njutnov iterativni postupak za izračunavanje aproksimacija, s tim da se prvi izvod funkcije f aproksimira izvodom nekog (linearnog) interpolacionog polinoma. Na taj način se izbegava računanje prvog izvoda u svakoj iteraciji.

U postupcima ovog tipa za funkciju f se formira interpolacioni polinom p sa čvorovima u već izračunatim aproksimacijama $x_{k-1}, x_{k-2}, \dots, x_{k-j}$ a f' se aproksimira sa p' pa se dobija j-koračni iterativni postupak

$$x_{k+1} = \varphi(x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-j}) = x_k - \frac{f(x_k)}{p'(x_k)}, \qquad k = j, j+1, ..$$

Postupak sečice za p uzima linearni interpolacioni polinom koji ima oblik

$$p(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0)$$

gde x_0 i x_1 predstavljaju prve dve aproksimacije rešenja $f(x) = 0$ a $f[x_0, x_1]$ je podeljena razlika prvog reda. Dalje,

$$p'(x) = f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

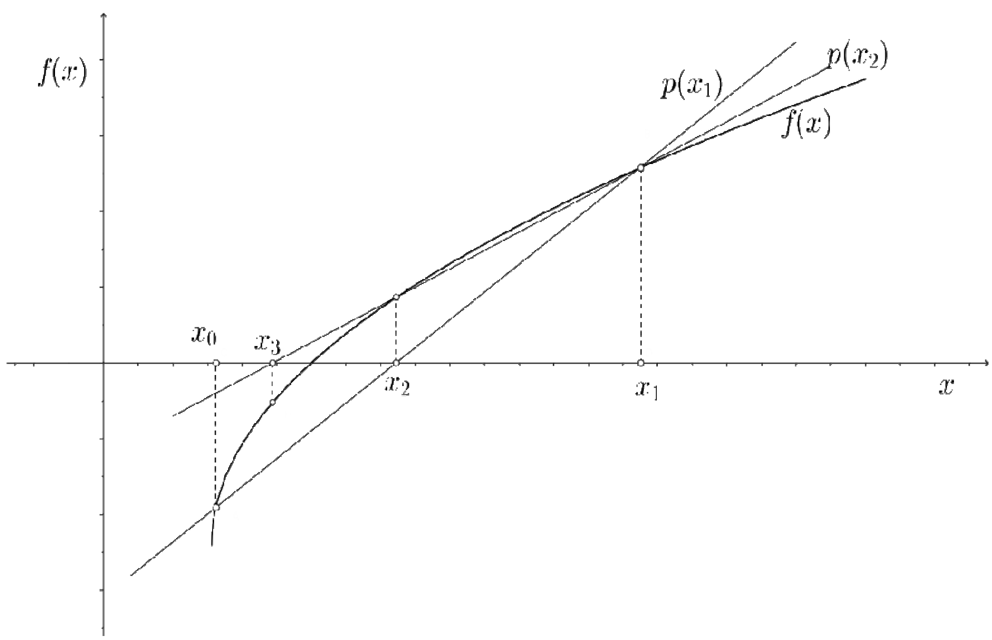
pa kada $p'(x_1)$ zamenimo u Njutnovom postupku umesto $f'(x_1)$ dobijamo sledeću aproksimaciju

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f[x_0, x_1]} = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1)$$

Ako su $\big(x_k, f(x_k)\big)\ i\ (x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ čvorne tačke interpolacionog polinoma i važi $x_k \neq x_{k-1}\ i\ f(x_k) \neq f(x_{k-1})$ dobija se iterativni postupak:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k), \quad k = 1,2, \ldots$$

2.2.2 Grafička interpretacija postupka sečice



Slika 2.

Na slici 2 je prikazana proizvoljna nelinearna funkcija f i nekoliko aproksimacija rešenja jednačine $f(x) = 0$ dobijenih metodom sečice. Imamo zadate prve dve aproksimacije $x_0\ i\ x_1$ pa interpolacioni polinom $p(x_1)$ koji prolazi kroz tačke $(x_0, f(x_0))$ i $(x_1, f(x_1))$ predstavlja sečicu funkcije f u tim tačkama. Sledeća aproksimacija se dobija u preseku sečice sa x-osom.

Analitički, jednačina prave kroz te dve tačke je

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_1)$$

gde je

$$y = f(x), \qquad y_0 = f(x_0), \qquad y_1 = f(x_1)$$

a

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

koeficijent pravca sečice.

Sledeću aproksimaciju dobijamo kada u jednačini zamenimo $y = 0$ i dobijamo

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1)$$

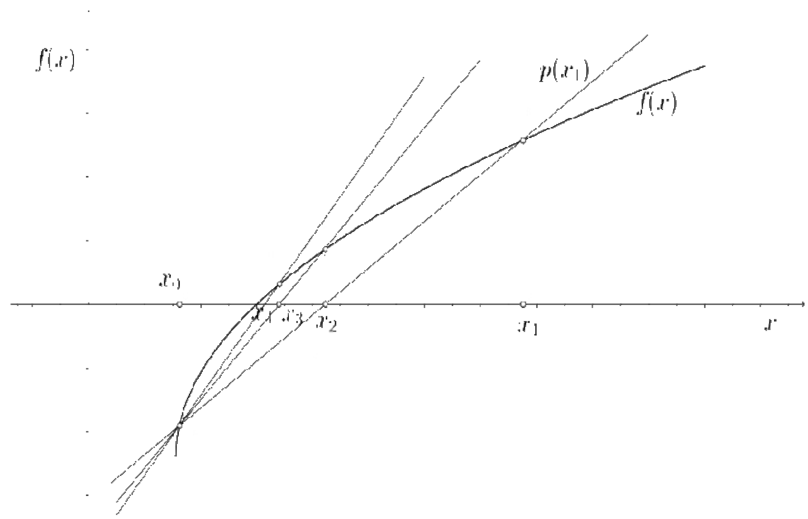
2.2.3 Primitivni postupak sečice

Postoji još jedan oblik postupka sečice koji je jednostavniji. Njega nazivamo primitivni postupak sečice. Razlika je u tome što on za izračunavanje sledeće iteracije ne koristi prethodne dve iteracije, već samo prethodnu, a drugu određujemo vodeći računa da proizvod vrednosti funkcije u te dve iteracije bude negativan

Postupak se sprovodi po sledećoj formuli

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_s}{f(x_k) - f(x_s)} f(x_k), \quad k = 1,2, \dots$$

gde je $s = s(k) = max\{0,1,2, \dots, k-1 | f(x_k) f(x_s < 0)\}$.



Slika 3.

2.2.4 Postupak sečice-konvergencija i ocena

Teorema 7. [3]. *Neka je $f \in C^2(D)$ takva da je*

$$|f'(x)| \geq m > 0, \quad x \in D.$$

Ako jednačina $f(x) = 0$ ima rešenje $\alpha \in D$, onda postoji $\eta > 0$ takvo da za sve $x_0, x_1 \in D_\eta(\alpha)$, $x_0 \neq x_1$, gde je

$$D_\eta(\alpha) = \{x \in D \colon |x - \alpha| \leq \eta\}$$

postupak sečice konvergira ka α i važe ocene

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{2m}{M_2} q^{F_k}, \quad k = 2,3, \ldots$$

i

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{M_2}{2m} |x_{k-1} - x_k||x_{k-2} - x_k|, \quad k = 2,3, \ldots$$

gde je

$$M_2 \geq |f''(x)|, \quad x \in D, \quad q = \frac{M_2}{2m}\eta < 1$$

a F_k su Fibonačijevi brojevi,

$$F_0 = F_1 = 1, \quad F_{k+1} = F_k + F_{k-1}, \quad k = 2,3, \ldots$$

ili se postupak prekida zbog $f(x_k) = 0$.

Dokaz. Pretpostavimo da postoji rešenje α jednačine $f(x) = 0$ i zbog $|f'(x)| \geq m > 0$ funkcija f je monotona pa je rešenje α jedinstveno. Neka je $\tilde{\eta}$ najveći broj za koji je $[\alpha - \tilde{\eta}, \alpha + \tilde{\eta}] \subset D$ i

$$\eta < min\left\{\tilde{\eta}, \frac{2m}{M_2}\right\}.$$

Na osnovu definicije skupa $D_\eta(\alpha)$ za $x_0, x_1 \in D$, gde $x_0 \neq x_1$ važi

$$|x_0 - \alpha| \leq \eta, \quad |x_1 - \alpha| \leq \eta$$

Treba pokazati da za

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1)$$

važi $x_2 \in D_\eta(\alpha)$ i $x_2 \neq x_1$.

$$x_2 - \alpha = x_1 - \alpha - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1)$$

$$= x_1 - \alpha - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} (f(x_1) - f(\alpha))$$

$$= x_1 - \alpha - \frac{f(x_1) - f(\alpha)}{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}} \cdot \frac{x_1 - \alpha}{x_1 - \alpha}$$

$$= (x_1 - \alpha)(1 - \frac{f[\alpha, x_1]}{f[x_0, x_1]})$$

$$= (x_1 - \alpha) \ \frac{f[x_0, x_1] - f[\alpha, x_1]}{f[x_0, x_1]} \cdot \frac{x_0 - \alpha}{x_0 - \alpha}$$

$$= (x_1 - \alpha)(x_0 - \alpha)\frac{f[x_0, x_1, \alpha]}{f[x_0, x_1]}$$

Kako je $f[x_0, x_1, \alpha] = \frac{f''(\beta)}{2}, \beta \in In(x_0, x_1, \alpha)$ i $f[x_0, x_1] = f'(\tau),\ \tau \in In(x_0, x_1)$, sledi

$$|f[x_0, x_1, \alpha]| \leq \frac{M_2}{2}, \qquad |f[x_0, x_1]| \geq m,$$

pa je

$$|x_2 - \alpha| \leq |x_1 - \alpha|\, |x_0 - \alpha|\, \frac{M_2}{2m} \leq |x_1 - \alpha|\, \eta \frac{M_2}{2m} < |x_1 - \alpha| \ \leq \eta$$

Odavde se vidi da $x_2 \neq x_1$.

Analogno se pokazuje da ako $x_k, x_{k-1} \in D_\eta(\alpha),\ \ x_k \neq x_{k-1},\ x_k \neq \alpha,\ \ x_k \neq \alpha$ važi

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq |x_k - \alpha|\, |x_{k-1} - \alpha|\, \frac{M_2}{2m},$$

odnosno $x_{k+1} \in D_\eta(\alpha)\ i\ x_k \neq x_{k+1}$.

Ukoliko je $f(x_{k+1}) = 0$ postupak se prekida, a ako je $f(x_{k+1}) \neq 0$ postupak se nastavlja na opisan način.

Neka je

$$\rho_k = |x_k - \alpha|\, \frac{M_2}{2m},\ \ k = 0,1, \ldots$$

Tada je

$$\rho_0 = |x_0 - \alpha|\, \frac{M_2}{2m} \leq \eta \frac{M_2}{2m} = q$$

$$\rho_1 = |x_1 - \alpha|\, \frac{M_2}{2m} \leq \eta \frac{M_2}{2m} = q$$

i

$$\rho_{k+1} = |x_k - \alpha|\, \frac{M_2}{2m} |x_{k-1} - \alpha|\, \frac{M_2}{2m} = \rho_k \rho_{k-1}, \qquad k = 1,2, \ldots$$

pa je

$$\rho_2 \leq \rho_0\rho_1 \leq qq = q^{1+1}, \quad \rho_3 \leq \rho_2\rho_1 \leq q^2 q = q^{2+1}, \ldots$$

odnosno

$$\rho_k \leq \rho_{k-1}\rho_{k-2} \leq q^{F_{k-1}} q^{F_{k-2}} = q^{F_k}, \;\; k = 0,1, \ldots$$

pa važi

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{2m}{M_2} q^{F_k}.$$

Kako je

$$\lim_{k\to\infty} F_k = \infty, \;\; q \in [0,1),$$

to je

$$\lim_{k\to\infty} q^{F_k} = 0,$$

pa je

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \alpha.$$

Za dokaz aposteriorne ocene koristi se interpolcioni polinom funkcije f u čvorovima x_{k-1}, x_{k-2}, x_k,

$$p(x) = f(x_{k-1}) + f[x_{k-1}, x_{k-2}](x - x_{k-1}) + f[x_{k-1}, x_{k-2}, x_k](x - x_{k-1})(x - x_{k-2}).$$

Kako je $p(x_k) = f(x_k)$ a na osnovu definicije niza $\{x_k\}$ je

$$(x_k - x_{k-1})f[x_{k-1}, x_{k-2}] = -f(x_{k-1}),$$

i važi ocena

$$f[x_{k-1}, x_{k-2}, x_k] \leq \frac{M_2}{2}$$

pa sledi

$$|f(x_k)| \leq \frac{M_2}{2} |x_k - x_{k-1}| \, |x_k - x_{k-2}|.$$

Koristeći ocenu

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{|f(x_k)|}{m}$$

direktno se dobija tvrđenje. ■

Teorema 8. [3]. *Neka je* $D = [a, b]$, $f: D \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(D)$. *Ako su zadovoljeni uslovi*

i) $f(a)f(b) < 0$

ii) $f'(x) \neq 0, \;\; x \in D$

iii) $f''(x) \leq 0, \;\; x \in D$ *ili* $f''(x) \geq 0, \;\; x \in D$

iv) za neko $x_0 \in D \;\; f(x_0)f''(x_0) > 0$

v) za neko $x_1 \in D \;\; f(x_1)f''(x_1) < 0$

onda postupak sečice konvergira ka jedinstvenom rešenju $\alpha \in D$ *jednačine f(x)=0. Ukoliko se postupak ne prekine zbog* $f(x_k) = 0$ *onda važi*

$x \in D$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$
$f''(x) \geq 0$	$x_k < x_{k+1}$	$x_k > x_{k+1}$
$f'(x) \leq 0$	$x_k > x_{k+1}$	$x_k < x_{k+1}$

Tabela 1.

za k=1,2,...,i $f(x_{k+1}) \neq 0$.

2.3 Postupak LZ4

2.3.1 Opis postupka

Brojni autori su dali različite algoritme za traženje aproksimativnih rešenja nelinearnih jednačina sa jednom nepoznatom oblika $f(x) = 0$. Može se desiti da funkcija f nije data u eksplicitnom obliku, da nije diferencijabilna, ili su možda njeni izvodi veoma komplikovani izrazi koje je teško izračunati. Zato su postupci koji koriste samo vrednosti funkcije f mnogo poželjniji. U ovom delu biće opisan postupak LZ4 koji predstavlja kombinaciju postupka polovljenja i postupaka drugog i trećeg reda. Postupak ima visoku stopu konvergencije a zahteva $4n_b$ puta izračunavanja funkcije f, gde je n_b broj računanja vrednosti funkcije u postupku polovljenja.

Algoritam LZ4 koristi postupak visokog reda kao osnovni proces, ali povremeno pribegava postupku polovljenja da bi se zadržala pojačana svojstva ili da bi se ubrzala konvergencija kada je koren višestruki.

2.3.2 Aproksimacija pomoću Tejlorovog reda

Jedan od načina za dobijanje iterativnog postupka visokog reda za rešavanje $f(x) = 0$ je aproksimacijom zasnovanom na Tejlorovom redu. Pretpostavimo da u okolini od α funkcija $y = f(x)$ ima jedinstvenu inverznu funkciju $x = \phi(y)$. Ako je ϕ dovoljno diferencijabilno, razvijamo Tejlorov red u tački y_n:

$$x = \phi(y) = x_n + \sum_{j=1}^{m+1} \frac{(y-y_n)^j}{j!} \phi^{(j)}(y_n) + \frac{(y-y_n)^{m+2}}{(m+2)!} \phi^{(m+2)}(\eta) \tag{4}$$

gde je x_n n-ta iteracija, $\eta \in [y, y_n]$ i $\phi^{(j)}(y_n)$ je j-ti izvod funkcije ϕ u tački y_n. Odbacujući izraz za grešku, sledeću aproksimaciju dobijamo iz $\phi(0)$:

$$x_{n+1} = x_n + \sum_{j=1}^{m+1} \frac{(-1)^j}{j!} {y_n}^j \phi^{(j)}(y_n) \tag{5}$$

Iz dobijene formule, zamenjujući $\phi^{(j)}$ sa izvodom od f za $m = 0$ imamo Njutn-Rafsonovu formulu

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{6}$$

Za $m = 1$ dobija se iterativni metod

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f''(x_n)[f(x_n)]^2}{2[f'(x_n)]^3} \tag{7}$$

koji je najmanje trećeg reda u koliko je $f'(\alpha) \neq 0$.

Možemo konstruisati Tejlorov polinom od funkcije f u tački x_n,

$$p_j(x) = f(x_n) + \frac{(x-x_n)}{1!} f'(x_n) + \cdots + \frac{(x-x_n)^j}{j!} f^{(j)}(x_n). \tag{8}$$

Sada neka je x_{n+1} koren od $p_j(x) = 0$. Za $j = 1$ se slično dobija Njutn-Rafsonova formula a za $j = 2$ se dobija sledeća aproksimativna formula:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{-f'(x_n) \pm \left[f'(x_n)^2 - 2f(x_n)f''(x_n)\right]^{1/2}}{f''(x_n)} \tag{9}$$

gde znak + ili – zavisi od toga da li je $f'(x_n)$ pozitivno ili negativno. Ova formula je najmanje trećeg reda ako $f'(\alpha) \neq 0$ i $f''(\alpha) \neq 0$.

Iterativne formule (7) i (9) su istog reda, trećeg, ali (6) je mnogo teža za računanje jer se u njoj javlja kvadratni koren a i takođe biranje pozitivnog ili negativnog znaka u svakoj iteraciji. Numeričke studije su pokazale da je postupak LZ4, koristeći formulu (9) za svoj osnovni proces, lošiji nego kada koristi formulu (7), (osim za kvadratne funkcije), pa formula (7) ima prvenstvo. Takođe u postupku LZ4, svi izrazi u kojima se javljaju izvodi funkcija su aproksimirani podeljenim razlikama.

2.3.3 Kriterijum zaustavljanja

Neka je f realna neprekidna funkcija jedne realne promenljive, definisana na intervalu $[a, b]$ tako da je $f(a)f(b) \leq 0$. Algoritam LZ4 ima zadatak pronalaženje aproksimacije $\tilde{\alpha}$ nule funkcije f sa traženom preciznošću korišćenjem samo računanja vrednosti funkcije f.

Postoje dva moguća kriterijuma zaustavljanja.

1. Za zadati mali broj $\mu \geq 0$ prvi kriterijum je zadovoljen ako

$$|f(\tilde{\alpha})| \leq \mu$$

2. Drugi kriterijum zaustavljanja je definisan posebnom funkcijom tolerancije

$$\delta(x) = \mu_1|x| + \mu_2$$

gde je μ_1 relativna tolerancija za veliko $|x|$ a μ_2 je apsolutna tolerancija. Algoritam LZ4 se završava kada je za dva različita realna broja $x_1\ i\ x_2$ zadovoljeno:

$$f(x_1)f(x_2) \leq 0 \qquad i \qquad |x_1 - x_2| \leq 2 \cdot \delta(\tilde{\alpha})$$

gde je $\tilde{\alpha}$ izabrano da bude bilo koje od $x_1\ ili\ x_2$ odgovarajući manjoj vrednosti funkcije *f*.

U drugom uslovu, $f(x_1)f(x_2) \leq 0$ nam obezbeđuje postojanje nule funkcije na intervalu $[x_1, x_2]$ a $|x_1 - x_2| \leq 2 \cdot \delta(\tilde{\alpha})$ nam daje $\tilde{\alpha}$ kao trenutnu najbolju aproksimaciju za α. Takođe treba pomenuti da je moguće i dovoljno da bude ispunjen jedan od dva gore navedena kriterijuma za zaustavljanje iterativnog postupka. To znači da možemo postaviti $\mu = 0$ i koristiti samo drugi kriterijum.

U mnogim praktičnim problemima se pokazalo da je prvi uslov mnogo važniji od drugog. Drugi nam daje informaciju o poziciji nule, odnosno dužini intervala koji sadrži nulu. Obično se postupak traženja aproksimacije $\tilde{\alpha}$ prekida kada je $|f(\tilde{\alpha})| \leq \mu$ iako je interval u kome se nalazi nula i dalje velik. Obrnuto, ako je dužina intervala koji sadrži nulu mala, a vrednosti funkcije za argumente iz tog intervala velike, a kao izlazni kriterijum se koristi dužina intervala, mogu se dobiti loše aproksimacije tražene nule.

2.3.4 Izbor početne aproksimacije

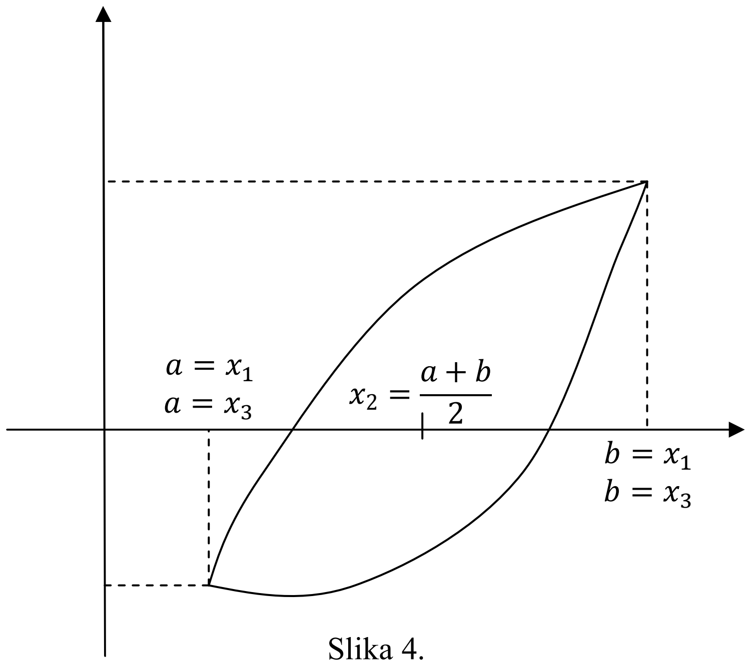
Za početne tri tačke $x_1,\ x_2,\ x_3$ ovog pravila potrebno je da bude zadovoljeno

$$f(x_1)f(x_2) \leq 0, \qquad\qquad f(x_2)f(x_3) \geq 0, \qquad x_2 \in [x_1, x_3]$$

Ovi uslovi obezbeđuju postojanje nule α funkcije *f* na intervalu $[x_1, x_2]$ i da tačke $x_2\ i\ x_3$ leže sa iste strane u odnosu na nulu α.

Primer 2. Neka je dat interval $[a, b]$. Da bi gore navedeni uslovi bili zadovoljeni tačke postavljamo na sledeći način:

1. $x_1 = a,\ \ x_2 = \frac{a+b}{2}$. Ako je $f(x_1)f(x_2) > 0$ onda postavljamo tačke tako da je $x_3 = x_1$ i $x_1 = b$
2. $x_1 = a,\ \ x_2 = \frac{a+b}{2}$. Ako je $f(x_1)f(x_2) \leq 0$ onda postavljamo tačke tako da je $x_3 = b$.



Slika 4.

Još postavljamo:

$int = 1,\ \ d = 2 \cdot |a - b|,\ \ \ d_1 = 2 \cdot d\ \ \ i\ \ \ d_2 = 2 \cdot d_1$

2.3.5 Algoritam LZ4 postupka

Korak 1.

Neka je $z = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{2}$ i $d = |x_1 - x_2|$. Neka je d_1 poslednja vrednost od d, d_2 poslednja vrednost od d_1 i d_3 poslednja vrednost od d_2. i još

$$u = x_1,\ \ ako\ |f(x_1)| < |f(x_2)|$$

$$u = x_2, \qquad\qquad\qquad inače$$

(Ovde je u trenutna aproksimacija za nulu funkcije *f*)

Korak 2. Testiranje konvergencije

Ako $|f(u)| \leq \mu$ ili $d \leq 2\delta(u)$ onda se algoritam završava i $\tilde{\alpha} = u$. Kada je postavljen visok red konvergencije, trenutna najbolja ocena *u* može biti bolja nego tačka polovljenja preostalog intervala $[x_1, x_2]$, tako da je bolje da *u* bude aproksimacija za *α*.

Korak 3. Ocenjivanje izvoda

Neka je

$$c = x_1, \qquad\qquad ako\ int = 1\ (interpolacija)$$

$$c = prethodna\ vrednost\ od\ x_3, \qquad ako\ int = 0\ (ekstrapolacija)$$

Kada je $int = 1$ onda $\alpha \in [x_2, x_3, c]$ i za posledicu ima zahtevanje interpolacije za ocenjivanje α. Ekstrapolacija koristi $x_2, x_3\ i\ c$ kao neophodne kada je $int = 0$. Ove tri tačke se koriste da bi se ocenili prvi i drugi izvod funkcije f u tački u.

Neka je

$$e = x_2 + \frac{c - x_2}{2}$$

i

$$ge = f[x_2, c] = \frac{f(x_2) - f(c)}{x_2 - c}$$

gde je $f[x_2, c]$ podeljena razlika funkcije f na intervalu $[x_2, c]$.

Definišimo

$$h = 2\frac{f[x_2, x_3] - ge}{x_3 - c}$$

koji predstavlja podeljenu razliku od f i aproksimira drugi izvod funkcije u tački $p = \frac{c+2x_2+x_3}{4}$. Ako za h pretpostavimo da je konstanta u okolini od p onda izvod u bilo kojoj tački x u oblasti može biti ocenjen sa

$$g(x) = ge + h(x - e)$$

Napomenućemo da možemo dobiti podeljene razlike višeg reda da bismo dobili i aproksimativne formule višeg reda. To postižemo uključujući više od tri tačke u računanje.

Korak 4. Zadajemo novu tačku, ω za procenu funkcije. Generalmo, u LZ4 metodu dobijamo ω iz formule (7) pa ako $\omega \notin [z, u]$ onda koristimo Njutn-Rafsonov metod za dobijanje nove vrednosti ω a ako ponovo $\omega \notin [z, u]$ onda koristimo postupak polovljenja.

4.1 Ako $d > 0.595 \cdot d_3$ ili $g(x_1)g(x_3) \leq 0 \; i \; int = 1$ onda je korišćen postupak polovljenja tako što je $\omega = z$. Prvi uslov određuje gornju granicu broja izračunavanja funkcije dok drugi ubrzavanje konvergencije kod različitih problema u ponašanju.

4.2 Ako $\left|2f(u)\big(g(u)\big)^2 + h(f(u))^2\right| \geq |d(g(u))^3|$ onda idemo na sledeći korak inače neka je $\omega = u - \frac{f(u)}{g(u)} - h\frac{(f(u))^2}{2(g(u))^3}$ što je izračunato u formuli (7).

Ako $(\omega - u) \cdot sign(\omega - z) \leq 0$ onda idemo na korak 4.4 inače izvršimo 4.3.

4.3 Ako je $|f(u)| \geq \left|d\frac{g(u)}{2}\right|$ onda koristimo postupak polovljenja; inače $\omega = u - \frac{f(u)}{g(u)}$ što je Njutn-Rafsonov korak (formula (6)) i prelazimo na korak 4.4.

4.4 Ako $|\omega - u| < \delta(u)$ onda je $\omega = u + \delta(u)sign(z - u)$. Kada se računa nova tačka ω pomoću formula 6 i 7 vodi se računa da se izbegne deljenje nulom. Već prvi uslov koraka 4.2 isključuje $|\omega - u| < |z - u|$ gde nema garancije da ω mora ležati u intervalu $[z, u]$. Ako je $|g(u)|$ malo, a $|h|$ veliko, onda drugi izvod inverzne funkcije $\left|\phi^{(2)}\right| = \left|\frac{h}{(g(u))^3}\right|$ postaje veoma velik rezultujući izuzetno jak prevoj u tački u što zauzvrat izaziva da ω padna izvan $[z, u]$. Ovo objašnjava potrebu da se uključi test na kraju koraka 4.2. Problem ne postoji za formule 6 i 9 dok $|\omega - u| < |z - u|$ takođe znači $\omega \in [z, u]$ u ovom slučaju.

Korak 5. Smanjiti interval pretragu. Neka je indikator interpolacije $int = 1$.

5.1 Ako $f(\omega)sign(f(x_1)) < 0$ onda idemo na 5.2. a ako $d \leq |x_3 - \omega|$ onda neka je $x_3 = x_1, \; x_1 = x_2 \;\; i \;\; x_2 = \omega$; inače $x_1 = \omega$ i idemo na korak 4.1.

5.2 Ako $d \leq |x_3 - \omega|$ onda neka je $x_3 = x_2, \; x_2 = \omega$; inače $c = x_3, \; x_3 = x_2, \; x_2 = \omega$ i $int = 0$; ići na 4.1

2.4 Falsi-Stefensonov postupak

2.4.1 Kratak opis

Klasični regula-falsi postupak je postupak za pronalaženje korena jednačine

$$f(x) = 0$$

ponavljanjem linearnih interpolacija između dve trenutne ograničene ocene. Ovaj metod ima određene mane. Prva je: jedna krajnja tačka je uvek zadržana nakon svakog koraka, kad god je konkavna ili konveksna oblast funkcije f dostignuta. Druga mana je asimptotska konvergencija iterativnog niza $\{(x_n - \alpha)\}$ koja je veoma niska. Novi unapređeni regula-falsi metod ima za cilj prevazilaženje ovih poteškoća. Ovaj postupak u osnovi koristi klasičan regula-falsi postupak ali uvodi i Stefensonov postupak kojim ubrzavamo konvergenciju. Ovako izvršen postupak obezbeđuje da oba niza; i niz dijametralnih razlika, $\{(b_n - a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ i iterativni niz $\{(x_n - \alpha)\}_{n=1}^{\infty}$; kvadratno konvergiraju ka nuli funkcije f.

2.4.2 Algoritam

Pretpostavimo da je f neprekidna funkcija na intervalu $[a, b]$ i još, bez gubljenja opštosti, pretpostavimo da $f(a) < 0$ a $f(b) > 0$. Iz drugog uslova sledi da je $f(a)f(b) < 0$ pa nam je nula funkcije na intervalu $[a, b]$ zagarantovana. Pretpostavimo još da je tačka $c \in [a, b]$ dobijena postupkom regula-falsi. Sledeći podinterval $[\bar{a}, \bar{b}] \subset [a, b]$ koji sadrži bar jednu nulu funkcije f za n-ti korak konstruišemo na sledeći način:

Podprogram FALSI$(a_n, b_n, c_n, \bar{a}_n, \bar{b}_n)$: (10)

$c_n = \frac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$

Ako je $f(c_n) = 0$ onda je c_n rešenje.

Ako je $f(a_n)f(c_n) < 0$ onda je $\bar{a}_n = a_n$, $\bar{b}_n = c_n$

Ako je $f(b_n)f(c_n) < 0$ onda je $\bar{a}_n = c_n$, $\bar{b}_n = b_n$

Klasičan postupak regula-falsi stalno poziva podprogram FALSI. Kada izvršimo (10) dobijamo novi interval koji sadrži nulu funkcije f tj. važi $f(\bar{a}_n)f(\bar{b}_n) < 0$ i $f(\bar{a}_n) < 0$ i $f(\bar{b}_n) > 0$. Ako su vrednosti f u tačkama a_n i b_n poznate onda svako izvršavanje (10) zahteva jedno ocenjivanje funkcije. Pozivajući (10) ne dobijamo veliku preciznost a i posmatramo samo stopu konvergencije od $\{(c_n - \alpha)\}_{n=1}^{\infty}$ gde je c_n trenutna aproksimacija za α. Zato se, nakon dobijanja $c_n\ i\ [\bar{a}, \bar{b}]$, Stefensonovim postupkom pokušava dobiti bolje zatvranje intervala oko tačke $\bar{c}_n$. Imamo sledeću iterativnu formulu:

$$x_{n+1} = x_n - \mu_n \frac{f^2(x_n)}{f(x_n)-f(c_n)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{11}$$

gde je

$$\begin{cases} \mu_n = \dfrac{b_n - a_n}{f(b_n) - f(a_n)} \\[2ex] c_n = \dfrac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)} \end{cases}$$

Podprogram FA-ST $(a_n, b_n, c_n, \bar{a}_n, \bar{b}_n, x_n, x_{n+1}, a_{n+1}, b_{n+1})$

$$\bar{c}_n = x_n - \frac{b_n - a_n}{f(b_n) - f(a_n)} \frac{f^2(x_n)}{f(x_n) - f(c_n)}$$

Ako $\bar{c}_n \in [\bar{a}_n, \bar{b}_n]$ onda je $x_{n+1} = \bar{c}_n$

Ako $f(\bar{a}_n) f(\bar{c}_n) < 0$ onda $a_{n+1} = \bar{a}_n$, $b_{n+1} = \bar{c}_n$; inače $a_{n+1} = \bar{c}_n$, $b_{n+1} = \bar{b}_n$

Ako $|f(x_{n+1})| < \varepsilon_1$ ili $b_{n+1} - a_{n+1} < \varepsilon_2$ onda je x_{n+1} rešenje i tu je kraj.

Ako $\bar{c}_n \notin [\bar{a}_n, \bar{b}_n]$ onda je $x_{n+1} = \bar{c}_n$, $a_{n+1} = \bar{a}_n$ i $b_{n+1} = \bar{b}_n$.

Posle izvršenja ove dve metode zamenjujući n sa $n+1$ dobijamo niz $\{x_n\}$ i $\{(b_n - a_n)\}$. Ovu proceduru zovemo Falsi-Stefensonov postupak za traženje korena nelinearnih jednačina.

2.4.3 Rezultati konvergencije

Teorema 9. [12]. *Pretpostavimo da je α prosta nula od funkcije f na $[a, b]$ a $u(\alpha)$ je dovoljno mala okolina od α. Neka je f' neprekidno na $u(\alpha)$ i neka je $f''(\alpha) \neq 0$. Tada je iterativna formula (11) najmanje kvadratno konvergira za svako $\mu_n > 0$.*

Dokaz. Neka je $e_n = x_n - \alpha$, gde $x_n \in u(\alpha)$, i iz (11) imamo

$$e_{n+1} = e_n - \frac{\mu_n f^2(x_n)}{f(x_n) - f(x_n - \mu_n f(x_n))} = e_n - \frac{f(x_n)}{\dfrac{f(x_n) - f(x_n - \mu_n f(x_n))}{\mu_n f(x_n)}}$$

$$= e_n^2 \left[\frac{(\mu_n f'(\alpha) - 1) f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} \right] + \mathcal{O}(e_n^3)$$

Tako imamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^2} = \frac{(\mu_n f'(\alpha)-1) f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} = \alpha \tag{12}$$

∎

Teorema 10. [12]. *Neka je* $f \in C^2[a,b]$, α *je prosta nula funkcije* f *na* $[a,b]$ *i* $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. *Tada je bilo koji koren jednačine* $f(x) = 0$ *na* $[a,b]$ *pronađen u konačnom broju koraka ili dijametralni niz* $\{(b_n - a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ *dobijen Falsi-Stefensonovim postupkom je* q-*kvadratno konvergentan.*

Za dokaz ove teoreme biće nam potrebne sledeće dve teoreme. Dajemo ih sa dokazom.

Teorema 11. [12]. *Pretpostavimo da je* f *realna funkcija neprekidna na intervalu* $[a,b]$ *i* $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. $\{q_n\}$ *je realni niz takav da* $0 < q_n < q < 1$. *Tada bilo koji koren jednačine* $f(x) = 0$ *na* $[a,b]$ *je pronađen u konačnom broju koraka ili dijametralni niz* $\{(b_n - a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ *dobijen algoritmom 1. (navedenim ispod) konvergira ka nuli i važi*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha, \qquad f(\alpha) = 0$$

Algoritam 1.

Neka je $v_n = q_n a_n + (1 - q_n) b_n$

Ako $f(v_n) = 0$ $onda\ je\ v_n\ rešenje\ i\ tu\ je\ kraj.$

Ako je $f(a_n)f(v_n) < 0$ onda je $\bar{a}_n = a_n, \bar{b}_n = v_n$; inače $\bar{a}_n = v_n, \bar{b}_n = b_n$

Neka je $z_n = x_n - \frac{q_n(b_n - a_n)|f(x_n)|}{f(x_n) - f(v_n)}$

Ako je $z_n \in [\bar{a}_n, \bar{b}_n]$ onda $x_{n+1} = z_n$

Ako je $f(\bar{a}_n)f(z_n) < 0$ onda je $a_{n+1} = \bar{a}_n, b_{n+1} = z_n$; inače $a_{n+1} = z_n, b_{n+1} = \bar{b}_n$

Ako $|f(z_n)| < \varepsilon_1$ ili $b_{n+1} - a_{n+1} < \varepsilon_2$ onda je z_n rešenje i tu je kraj.

Ako $z_n \notin [\bar{a}_n, \bar{b}_n]$ onda je $x_{n+1} = v_n$, $a_{n+1} = \bar{a}_n$ i $b_{n+1} = \bar{b}_n$

Dokaz Teoreme 11. Iz algoritma 1 i

$$z_n = x_n - \frac{q_n(b_n - a_n)|f(x_n)|}{f(x_n) - f(v_n)}$$

i $v_n = q_n a_n + (1 - q_n) b_n$ (13)

vidimo da algoritam 1 obrazuje niz intervala $\{(b_n - a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ i iterativni niz $\{x_n\}$ tako da imamo

$\alpha \in [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \subset \cdots \subset [a, b],$

$f(a_n)f(b_n) < 0, \qquad n = 1, 2, \ldots$

$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n,$

$b_{n+1} - a_{n+1} \leq q_n(b_n - a_n) < q(b_n - a_n)$

Sve dok $0 < q < 1$ mi dobijamo $b_n - a_n \leq q^n(b - a)$. Ovo znači da

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$$

i

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$$

Tako da

$$lim_{n\to\infty} x_n = \alpha\,, \;\; f(\alpha) = 0 \tag{14}$$

Teorema 12. [12]. *Pod hipotezama Teoreme 11 pretpostavimo da postoji pozitivan ceo broj N_0 tako da $|f(v_n)| < q_n|f(x_n)|$ kad god je $n > N_0$ a algoritam 1 se ne završava posle konačnog broja koraka. Tada niz dijametralnih razlika $\{(b_n - a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergira q-kvadratno ka nuli. Naime, postoji konstanta K tako da*

$$b_{n+1} - a_{n+1} \leq K(b_n - a_n)^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Dokaz Teoreme 12. Iz (12) u Teoremi 9 imamo

$$lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1} - e_n}{(e_n - e_{n-1})^2} = lim_{n\to\infty} \frac{\frac{e_{n+1}}{e_n} - 1}{e_n - 2e_{n-1} + \frac{e_{n-1}^2}{e_n}} = -\alpha \tag{15}$$

Odatle postoji pozitivan ceo broj N_1 tako da

$$\left|\frac{e_{n+1}-e_n}{(e_n-e_{n-1})^2}\right|<|\alpha|+1$$

kad god je $n>N_1$. Iz pretpostavke da kad god je $n>N_0$ imamo da važi

$$|f(v_n)|<q_n|f(x_n)|$$

Iz ove nejednakosti i iz (12) u Teoremi 9 možemo zaključiti da $z_n\in[\bar{a}_n,\bar{b}_n]$ kad god $n>max\{N_0,N_1\}$, pa je $x_{n+1}=z_n$ i gornja jednakost znače da

$$\frac{f(x_n)-f(v_n)}{f(x_n)}>0 \tag{16}$$

Dakle iz (13)

$$b_n-a_n=-\frac{(x_{n+1}-x_n)(f(x_n)-f(v_n))}{q_n|f(x_n)|}$$

Sledi da je

$$\frac{b_{n+1}-a_{n+1}}{(b_n-a_n)^2}=-\frac{q_n^2(x_{n+2}-x_{n+1})(f(x_{n+1})-f(v_{n+1}))|f(x_n)|^2}{q_{n+1}(x_{n+1}-x_n)^2(f(x_n)-f(v_n))^2|f(x_{n+1})|} \tag{17}$$

Kako je

$$1-q\leq 1-q_n<\frac{|f(x_n)|-|f(v_n)|}{|f(x_n)|}\leq\frac{|f(x_n)-f(v_n)|}{|f(x_n)|}\leq\frac{|f(x_n)|+|f(v_n)|}{|f(x_n)|}$$

$$<1+q_n\leq 1+q$$

i iz (16) dobijamo

$$1-q<\frac{f(x_n)-f(v_n)}{f(x_n)}<1+q$$

pa je onda

$$\left|\frac{(f(x_{n+1})-f(v_{n+1}))(f(x_n))^2}{\left(f(x_n)-f(v_n)\right)^2 f(x_{n+1})}\right| = \left|\frac{f(x_{n+1})-f(v_{n+1})}{f(x_{n+1})}\right| \Bigg/ \left|\frac{(f(x_n)-f(v_n))^2}{|f(x_n)|^2}\right|$$

$$< \frac{1+q_{n+1}}{(1-q_n)^2} \leq \frac{1+q}{(1-q)^2} \tag{18}$$

Iz (15) imamo

$$\left|\frac{x_{n+2}-x_{n+1}}{(x_{n+1}-x_n)^2}\right| = \left|\frac{e_{n+2}-e_{n+1}}{(e_{n+1}-e_n)^2}\right| < |\alpha| + 1, \qquad n > N_1 \tag{19}$$

Sada neka je $N = max\{N_0, N_1\}$ i

$$K = max\left\{\frac{1+q}{(1-q)^2}(|\alpha|+1), \frac{q}{(b_{N_0}-a_{N_0})}\right\}$$

Iz (17), (18), (19) imamo

$$b_{n+1} - a_{n+1} \leq K(b_n - a_n)^2, \quad n = 0,1,2 \ldots \qquad \blacksquare$$

Sada možemo dati dokaz Teoreme 10.

Dokaz Teoreme 10. Neka je $q_n = \frac{|f(x_n)|}{f(b_n)-f(a_n)}$ u algoritmu 1, onda $0 < q_n < 1$. Iz Teoreme 11. za dovoljno veliko n imamo $|f(x_n)| \simeq |f(a_n)| \simeq |f(b_n)|$ i $\frac{|f(x_n)|}{f(b_n)-f(a_n)} \simeq {}^1/_2$. Dalje postoji $q, 0 < q < 1$, tako da $0 < q_n < q < 1$ i to vodi do našeg Falsi-Stefensonovog postupka koji sadrzi podpostupak FA-ST. Pa tako iz Teoreme 11. i Teoreme 12. sledi dokaz. ■

2.5 Postupak Muller-polovljenje

2.5.1 Opis postupka

Ovo je novi i unapređeni postupak za rešavanje nelinearnih jednačina *f(x)=0* sa jednom nepoznatom. Postupak kombinuje Muller-ov postupak i postupak polovljenja i istovremeno generiše dva niza. Prvi je $\{x_n\}$ koji konvergira ka nuli α funkcije f i $\{[a_n, b_n]\}$ koji zatvara α.

Oba niza imaju globalnu i superlinearnu konvergenciju. Koeficijent asimptotske efikasnosti (po Ostrovskom) ovog postupka je aproksimativno 1.84 pod određenim uslovima. Postupak je konstruisan tako da zadržava sve dobre karakteristike i svojstva a uklanja loša.

2.5.2 Muller-ov postupak

Muller-ov postupak je generalizacija postupka sečice koji za početne aproksimacije uzima dve tačke, $x_0 \; i \; x_1$ a sledeću aproksimaciju dobija u preseku prave koja prolazi kroz tačke $\big(x_0, f(x_0)\big) \; i \; (x_1, f(x_1))$ sa x-osom. Muller-ov postupak za početne aproksimacije uzima tri tačke, x_0, x_1, x_2 a sledeću aproksimaciju dobija u preseku parabole koja prolazi kroz tačke $\big(x_i, f(x_i)\big), i = 0, 1, 2$ sa x-osom.

Za izvođenje Muller-ovog postupka nam je potreban kvadratni polinom

$$P(x) = A(x - x_2)^2 + B(x - x_2) + C$$

Ovaj polinom prolazi kroz tačke $\big(x_i, f(x_i)\big), i = 0, 1, 2$ a konstante A, B i C su određene iz sledećih uslova

$$\begin{cases} f(x_0) = A(x_0 - x_2)^2 + B(x_0 - x_2) + C \\ f(x_1) = A(x_1 - x_2)^2 + B(x_1 - x_2) + C \\ f(x_2) = C \end{cases}$$

pa se dobija

$$\begin{cases} A = \dfrac{(x_1 - x_2)[f(x_0) - f(x_2)] - (x_0 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)]}{(x_0 - x_2)(x_1 - x_2)(x_0 - x_1)} \\ B = \dfrac{(x_0 - x_2)^2[f(x_1) - f(x_2)] - (x_1 - x_2)^2[f(x_1) - f(x_2)]}{(x_0 - x_2)(x_1 - x_2)(x_0 - x_1)} \\ C = f(x_2) \end{cases} \tag{20}$$

x_3 određujemo kao nulu polinoma $P(x)$, dobija se formula

$$x_3 - x_2 = \frac{-2C}{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}$$

Ova formula nam daje dve mogućnosti za x_3. U Muller-ovom postupku, znak se bira tako da se slaže sa znakom od B. Na ovaj način postižemo da imenilac bude najveći a x_3 bliže nuli polinoma $P(x)$.

Tako imamo

$$x_3 = x_2 - \frac{2C}{B + sign(B)\sqrt{B^2 - 4AC}} \tag{21}$$

gde je A, B i C određeno sa (20). Kada se odredi x_3, za novu aproksimaciju na isti način koristimo tri tačke i to su x_1, x_2, x_3. Procedura se nastavlja sve dok kriterijum zaustavljanja ne bude zadovoljen.

Muller-ov postupak je lokalno konvergentan i ima red konvergencije 1.84 aproksimativno i ne poseduje bilo kakve rezultate o konvergenciji intervala. Postupak polovljenja je globalno konvergentan i ima asimptotsku konvergenciju niza dijametralnih razlika $\{(b_n - a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ što znači da postupak ima dobro svojstvo da će uvek konvergirati ka realnom rešenju, ali postupak je veoma spor i konvergira samo linearno. Ovo je motivacija za konstruisanje novog unapredjenog Muller-ovog postupka i postupka polovljenja.

2.5.3 Novi postupak Muller-polovljenje

Pretpostavimo da je f neprekidna funkcija na intervalu $[a, b]$ i još, bez gubljenja opštosti, pretpostavimo da $f(a) < 0$ a $f(b) > 0$ odnosno, $f(a)f(b) < 0$. Ovi uslovi nam garantuju postojanje nule funkcije na intervalu $[a, b]$. Pretpostavimo još da je tačka $c \in (a, b)$ dobijena numeričkim postupkom. Sledeći podinterval $[\bar{a}, \bar{b}] \subset [a, b]$ koji sadrži bar jednu nulu funkcije f konstruišemo na sledeći način:

Podprogram1$(a, b, c, \bar{a}, \bar{b})$

korak 1. Ako je $f(c) = 0$ onda je c rešenje.

korak 2. Ako je $f(a)f(c) < 0$ onda je $\bar{a} = a$, $\bar{b} = c$

korak 3. Ako je $f(b)f(c) < 0$ onda je $\bar{a} = c$,, $\bar{b} = b$

Očigledno je da se klasičan postupak polovljenja sastoji u ponavljanju podprograma 1 sa $c = a + \frac{b-a}{2}$.

Pretpostavimo da imamo podinterval $[a_n, b_n]$ sa $f(a_n) < 0$ i $f(b_n) > 0$ u n-tom koraku i aproksimaciju c_n dobijenu nekim numeričkim postupkom. Sada ako pozovemo podprogram 1 sa

$a = a_n$, $b = b_n$ i c_n dobiće se novi interval $[\bar{a}_n, \bar{b}_n] \subset [a_n, b_n]$ sa osobinom $f(\bar{a}_n)f(\bar{b}_n) < 0$ i $f(\bar{a}_n) < 0$ i $f(\bar{b}_n) > 0$ i tri tačke $(a_n, f(a_n))$, $(b_n, f(b_n))$ i $(c_n, f(c_n))$.

Ovo znači da možemo koristiti Muller-ov postupak u ovom slučaju. Da bismo koristili Muller-ov postupak postavljamo na početku $x_0 \equiv a_n$, $x_1 \equiv b_n$ i $x_2 \equiv c_n$ i menjamo u (21) x_0, x_1, x_2 sa a_n, b_n, c_n respektivno i dobijamo novu aproksimaciju $\bar{c}_n$.

Ako je $\bar{c}_n \in (\bar{a}_n, \bar{b}_n)$, onda novi interval $[\bar{a}_{n+1}, \bar{b}_{n+1}] \subset [\bar{a}_n, \bar{b}_n] \subset [a_n, b_n]$ sa $f(\bar{a}_{n+1})f(\bar{b}_{n+1}) < 0$ i $f(\bar{a}_{n+1}) < 0$ a $f(\bar{b}_{n+1}) > 0$ i tri tačke $(a_{n+1}, f(a_{n+1}))$, $(b_{n+1}, f(b_{n+1}))$ i $(c_{n+1}, f(c_{n+1}))$ određujemo pozivanjem podprograma 1 sa $a_{n+1} \equiv \bar{a}_n$, $b_{n+1} \equiv \bar{b}_n$, $c_{n+1} \equiv \bar{c}_n$.

Inače ako $\bar{c}_n \notin (\bar{a}_n, \bar{b}_n)$ onda to odbacujemo pa koristimo da je $c_{n+1} = \bar{a}_n + \frac{\bar{b}_n - \bar{a}_n}{2}$ i onda pozivamo podprogram1 sa $a_{n+1} \equiv \bar{a}_n$, $b_{n+1} \equiv \bar{b}_n$ da bismo dobili interval $[\bar{a}_{n+1}, \bar{b}_{n+1}]$ što je u stvari isti rezultat kao u postupku polovljenja.

Iz ovog vidimo da se obrazuju dva niza sa sledećim osobinama

- $\bar{c}_n \in [\bar{a}_n, \bar{b}_n]$
- $[\bar{a}_{n+1}, \bar{b}_{n+1}] \subset [\bar{a}_n, \bar{b}_n]$

Izričito, podprogram 1 zahteva izračunavanje vrednosti funkcije f u svakom koraku bilo da $\bar{c}_n \in (\bar{a}_n, \bar{b}_n)$ ili $\bar{c}_n \notin (\bar{a}_n, \bar{b}_n)$. Posle poziva podprograma 1 u više navrata zamenjujući n sa $n + 1$ dobijamo nizove $\{\bar{c}_n\}$ i $\{(\bar{b}_n - \bar{a}_n)\}$.

2.5.4 Procedura postupka Muller-polovljenje

Ulazne vrednosti u postupku su:

- krajnje vrednosti intervala, a i b
- tolerancija $\varepsilon_1, \varepsilon_2$
- maksimalan broj iteracija N

Odgovor na ovako zadate vrednosti će biti aproksimativno rešenje za α ili poruka o neuspehu.

korak 1. Postavimo $a_1 = a$ i $b_1 = b$

korak 2. $c_1 = a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2}$; ako je $f(c_1) = 0$ onda je c_1 rešenje; kraj

korak 3. Uraditi korak 2 i korak 3 podprograma 1 sa $a = a_1, b = b_1, c = c_1,\ \bar{a} = \bar{a}_1,\ \bar{b} = \bar{b}_1$ da bi se odredio $[\bar{a}_1, \bar{b}_1]$

korak 4. Za $i = 2, \dots N$ uraditi od koraka 5 do koraka 7

korak 5. Koristiti Muller-ov postupak sa tačkama $(a_1, f(a_1))$, $(b_1, f(b_1))$, $(c_1, f(c_1))$ za dobijanje nove aproksimacije c_2

korak 6. Ako $c_2 \in (\bar{a}_1, \bar{b}_1)$ onda je novi interval $[a_2, b_2]$ dobijen pozivom podprograma 1 i imaćemo tri tačke, $(a_2, f(a_2))$, $(b_2, f(b_2))$, $(c_2, f(c_2))$, pa ako je $f(c_2) = 0$ onda je c_2 rešenje.

Inače, ako je $c_2 \notin (\bar{a}_1, \bar{b}_1)$ onda neka je $c_2 = a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2}$ pa koristiti Muller-ov postupak da bi se odredio interval $[a_2, b_2]$ pa takođe imamo tri tačke $(a_2, f(a_2)), (b_2, f(b_2)), (c_2, f(c_2))$.

korak 7. Ako $|f(c_2)| < \varepsilon_1$ i/ili $b_2 - a_2 < \varepsilon_2$ onda je rešenje c_2. Inače, menjemo a_1, b_1, c_1 sa a_2, b_2, c_2 respektivno.

korak 8. Postupak se završava posle N koraka.

2.5.5 Analiza konvergencije postupka Muller-polovljenje

U daljem tekstu niz $\{c_n\}$ ćemo obeležavati sa $\{x_n\}$.

Teorema 13. [11]. *Neka je $f \in C[a, b]$, α je prosta nula funkcije f na $[a, b]$ i $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. $u(\alpha)$ je dovoljno mala okolina od α. Pretpostavimo da $f \in C^3(u(\alpha))$, tada je svaki koren α jednačine $f(x) = 0$ na $[a, b]$ pronađen u konačno mnogo koraka ili iterativni niz $\{x_n\}$ dobijen postupkom Muller-polovljenje je konvergentan i njegov red konvergencije blizu nule α od funkcije f na $[a, b]$ je aproksimativno $p = 1.84$.*

Dokaz. Rezultat da je svaki koren α jednačine $f(x) = 0$ na $[a, b]$ pronađen u konačno mnogo koraka ili iterativni niz $\{x_n\}$ dobijen postupkom Muller-polovljenje je konvergentan dokazujemo na osnovu činjenice da imamo bar rezultat postupka polovljenja, koji je već dokazan. Između ostalog, kada je n dovoljno veliko, to je $x_n \in u(\alpha)$ pa je Muller-ov iterativni postupak obavljen dok se procedura postupka Muller-polovljenje nije završila. Tako red konvergencije blizu nule α funkcije f na $[a, b]$ aproksimativno p=1.84 iz rezultata konvergencije Muller-ovog postupka:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^{\mu}} = K_c$$

gde je $e_n = x_n - \alpha$, $\mu \approx 1.84$ a K_c je konstanta. ■

Teorema 14. [11]. *Neka je* $f \in C[a,b]$, α *je prosta nula funkcije* f *na* $[a,b]$ *i* $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. *Dalje pretpostavimo da* $f \in C^3(u(\alpha))$, $f'''(x) > 0$ *(ili* $f'''(x) < 0$*),* $x \in u(\alpha)$. *Tada je svaki koren* α *jednačine* $f(x) = 0$ *na* $[a,b]$ *pronađen u konačno mnogo koraka ili niz dijametralnih razlika intervala* $[a_n, b_n]$ *generisan postupkom Muller-polovljenje konvergira ka nuli i njegov red konvergencije je aproksimativno p=1.84 pod uslovom da postoje uzastopno* x_n *i* x_{n+1}, *dobijeni Muller-ovim postupkom, koji su smešteni sa suprotnih strana od* α *kada je* n *dovoljno veliko.*

Dokaz. Dovoljno je da razmatramo slučaj $f'''(x) > 0$.

Ptretpostavimo da su u n-tom koraku dostupne tri tačke $(x_{n-2}, f(x_{n-2}))$, $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$, $(x_n, f(x_n))$, pa parabola kroz te tri tačke izgleda

$$P_n(x) = f(x_n) + f[x_{n-1}, x_n](x - x_n) + f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n](x - x_n)(x - x_{n-1})$$

Ako je n dovoljno veliko da bi Muller-ova iteracija mogla biti dobro izvršena, onda x_{n+1} zadovoljava

$$P_n(x_{n+1}) = f(x_n) + f[x_{n-1}, x_n](x_{n+1} - x_n)$$

$$+f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n](x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} - x_{n-1}) = 0 \tag{22}$$

Sa druge strane, mi imamo interpolacioni polinom sa ostatkom

$$f(x) = f(x_n) + f[x_{n-1}, x_n](x - x_n) + f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n](x - x_n)(x - x_{n-1})$$

$$+\frac{f'''(\xi)}{6}(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) \tag{23}$$

Zamenjujući (22) u (23) dobijamo

$$f(x_{n+1}) = \frac{f'''(\xi_{n+1})}{6}(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} - x_{n-1})(x_{n+1} - x_{n-2}) \tag{24}$$

Razumno je pretpostaviti da $|x_{n+1} - \alpha| < |x_n - \alpha|$, $n \geq N_0$ kad god je N_0 dovoljno veliko tako da oba i postupak polovljenja i Muller-ov postupak konvergiraju. Sada dalju analizu delimo na dva dela.

Prvi deo analize: Pretpostavimo da se x_n *i* x_{n+1} nalazi sa iste strane od nule α u n-tom koraku, odnosno $f(x_n)f(x_{n+1}) > 0$ i sledeći interval je $[x_i, x_{n+1}]$ (slično ćemo razmatrati interval $[x_{n+1}, x_i]$) gde je $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. To znači da za Muller-ov postupak imamo tri tačke $x_i, x_n\ i\ x_{n+1}$. Sa ove tri tačke, iz (24) imamo

$$f(x_{n+2}) = \frac{f'''(\xi_{n+2})}{6}(x_{n+2} - x_n)(x_{n+2} - x_{n+1})(x_{n+2} - x_i)$$

Kad se x_n i x_{n+1} nalazi sa iste strane nule α onda važi

$$(x_{n+2} - x_n)(x_{n+2} - x_{n+1})(x_{n+2} - x_i) > 0$$

$$|x_{n+2} - \alpha| < |x_{n+1} - \alpha|$$

pa opet razmatramo dva slučja.

(i) x_{n+2} se nalazi sa iste strane od x_{n+1}. Ovo znači da sledeći iterativni interval trebalo da bude $[x_i, x_{n+2}]$ i Muller-ov metod je korišćen sa tri tačke, $x_i, x_{n+2}\ i\ x_{n+1}$ pa

$$f(x_{n+3}) = \frac{f'''(\xi_{n+3})}{6}(x_{n+3} - x_n)(x_{n+3} - x_{n+2})(x_{n+3} - x_i)$$

pa

$$(x_{n+3} - x_{n+1})(x_{n+3} - x_{n+2})(x_{n+3} - x_i) > 0$$

Tako imamo $f(x_{n+2})f(x_{n+3}) > 0$ pa bi sledeći iterativni interval trebao da bude

$[x_i, x_{n+3}]$... Proces rezultuje nizom $[x_i, x_{n+i}], j = 1, 2, \dots$ Ali to je nemoguće iz pretpostavke da postoje dve uzastopne tačke tačke x_n, x_{n+1} dobijene Muller-ovim postupkom locirane sa iste strane nule α kada je n dovoljno veliko.

(ii) $x_{n+2}\ i\ x_{n+1}$ se nalazi sa suprotne strane od α. Onda bi sledeći iterativni interval trebalo da bude $[x_{n+2}, x_{n+1}]$ i Muller-ov metod koristimo na tri tačke $x_i, x_{n+2}\ i\ x_{n+1}$ pa opet imamo

$$f(x_{n+3}) = \frac{f'''(\xi_{n+3})}{6}(x_{n+3} - x_n)(x_{n+3} - x_{n+2})(x_{n+3} - x_i)$$

Ali

$$(x_{n+3} - x_{n+1})(x_{n+3} - x_{n+2})(x_{n+3} - x_i) < 0$$

i onda

$$f(x_{n+2})f(x_{n+3}) < 0.$$

Pa je sledeći iterativni interval $[x_{n+2}, x_{n+3}]$. Ponovo korišćenjem Muller-ovog postupka za tri tačke $x_{n+2}, x_{n+3}\ i\ x_{n+1}$ imamo

$$f(x_{n+4}) = \frac{f'''(\xi_{n+4})}{6}(x_{n+4} - x_{n+3})(x_{n+4} - x_{n+2})(x_{n+4} - x_{n+1})$$

i sledeći iterativni interval $[x_{n+4}, x_{n+3}]$. Ova procedura se ponavlja pa uopšteno imamo $[x_{i+1}, x_i]$ (ili $[x_i, x_{i+1}]$) pa onda $[x_{i+2}, x_{i+1}]$ (ili $[x_{i+1}, x_{i+2}]$) itd. $i \geq N_0$.

Drugi deo analize

Pretpostavimo da se $x_n\ i\ x_{n+1}$ nalaze sa suprotne strane od nule α u n-tom koraku, odnosno $f(x_n)f(x_{n+1}) < 0$. Tada ćemo dobiti sledeće iterativne intervale $[x_{n+1}, x_{n+2}]$ (ili $[x_{n+2}, x_{n+1}]$) zatim $[x_{n+2}, x_{n+3}]$ (ili $[x_{n+3}, x_{n+2}]$) itd... Uopšteno imamo $[x_{i+1}, x_i]$ (ili $[x_i, x_{i+1}]$), zatim $[x_{i+2}, x_{i+1}]$ (ili $[x_{i+1}, x_{i+2}]$), i tako dalje, $i \geq N_0$, korišćenjem sličnog postupka kao pod *(ii)* u prvom delu analize.

Iz prvog dela analize pod *(ii)* i drugog dela analize imamo $[a_n, b_n] = [x_n, x_{n+1}]$ ili $[a_n, b_n] = [x_{n+1}, x_n]$ kad god je n dovoljno veliko. Pa sledi

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$$

iz

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$$

iz Teoreme 13. Šta više imamo

$$\frac{|a_{n+1} - b_{n+1}|}{|a_n - b_n|^\mu} = \frac{|x_{n+2} - x_{n+1}|}{|x_{n+1} - x_n|^\mu} = \frac{|e_{n+2} - e_{n+1}|}{|e_{n+1} - e_n|^\mu}$$

$$= \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|}\frac{\left|\frac{e_{n+2}}{e_{n+1}} - 1\right|}{\left|\frac{e_{n+1}}{e_n} - 1\right|^\mu} \to K_c, \quad n \to \infty$$

iz Teoreme 13. gde je $e_n = x_n - \alpha$ a $\mu = 1.84$. ■

2.6 Signum postupak

2.6.1 Kratak opis

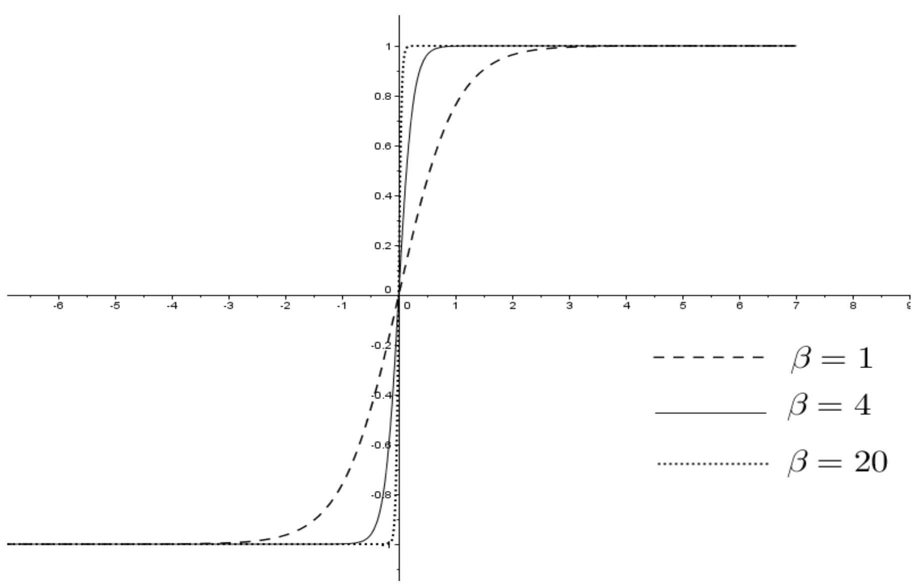
Još jedan od postupaka za rešavanje nelinearnih jednačina sa jednom nepoznatom je neiterativni postupak koji koristi hiperboličnu tangens funkciju *tanh(βx),* $\beta > 0$. Problem pronalaženja korena je sveden na izračunavanje integrala transformisane funkcije, recimo, $\tilde{f}$ od f. Integral od $\tilde{f}$ implicitno sadrži informaciju o lokaciji korena α pa ne moramo voditi računa o izboru početne pretpostavke. Veća vrednost od β znači bolju aproksimaciju korena. Kao alternativu možemo koristiti signum funkciju *sgn(x)* umesto hiperbolične tangens funkcije, što ima za rezultat tačnu formulu za koren. Generalno, postupak ne zahteva izračunavanje prvog izvoda f', niti iterativni proces.

2.6.2 Aproksimativno rešenje bazirano na sigmoidnoj transformaciji

Hiperbolična tangens funkcija izgleda ovako:

$$\tanh(\beta x) = \frac{e^{2\beta x}-1}{e^{2\beta x}+1}, \quad -\infty < x < \infty, \quad \beta > 0 \tag{25}$$

Ova funkcija je strogo rastuća od -1 do +1 i postaje sve stmija oko njene nule kako β raste.



Slika 5.

Korišćenjem hiperbolične tangens funkcije možemo usavršiti postupak za rešavanje nelinearnih jednačina sa jednom nepoznatom $f(x) = 0$ po predpostavkom da je funkcija f neprekidna na intervalu $[a, b]$ i još $f(a)f(b) < 0$.

Transformaciju funkcije f pomoću hiperbolične tangens funkcije vršimo na sledeći način:

$$f^{[\beta]}(x) := \tanh\big(\beta\, f(x)\big), \quad a \le x \le b \tag{26}$$

pa novu funkciju $f^{[\beta]}$ zovemo sigmoidna transformacija od f.

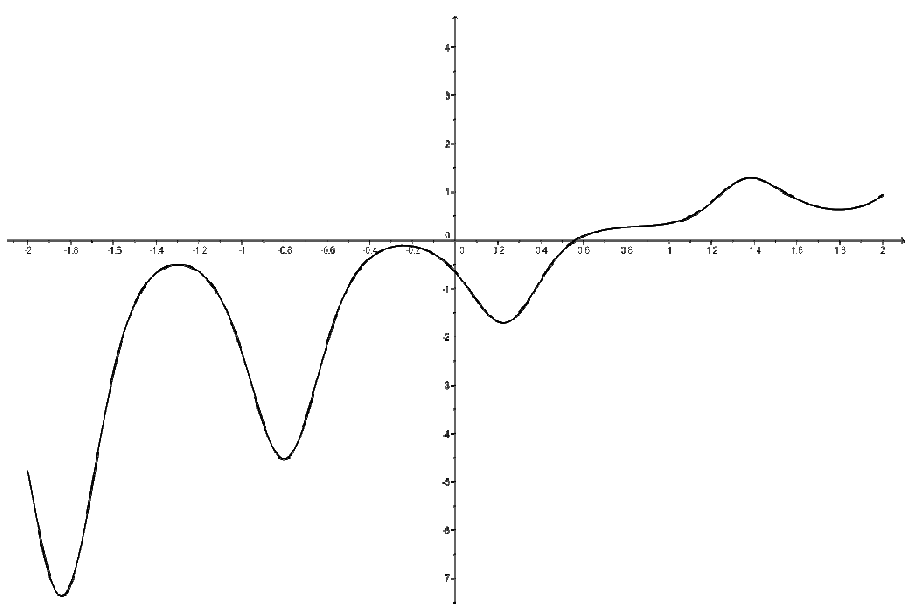
Za dalje će važiti :

(i) *Nula originalne funkcije f je invarijata pod sigmoidnom transformacijom* $f^{[\beta]}$

(ii) *Grafik funkcije* $f^{[\beta]}$ *konvergira ka funkciji sgn(x) kako* β *ide u beskonačno gde je sgn(x) definisana*

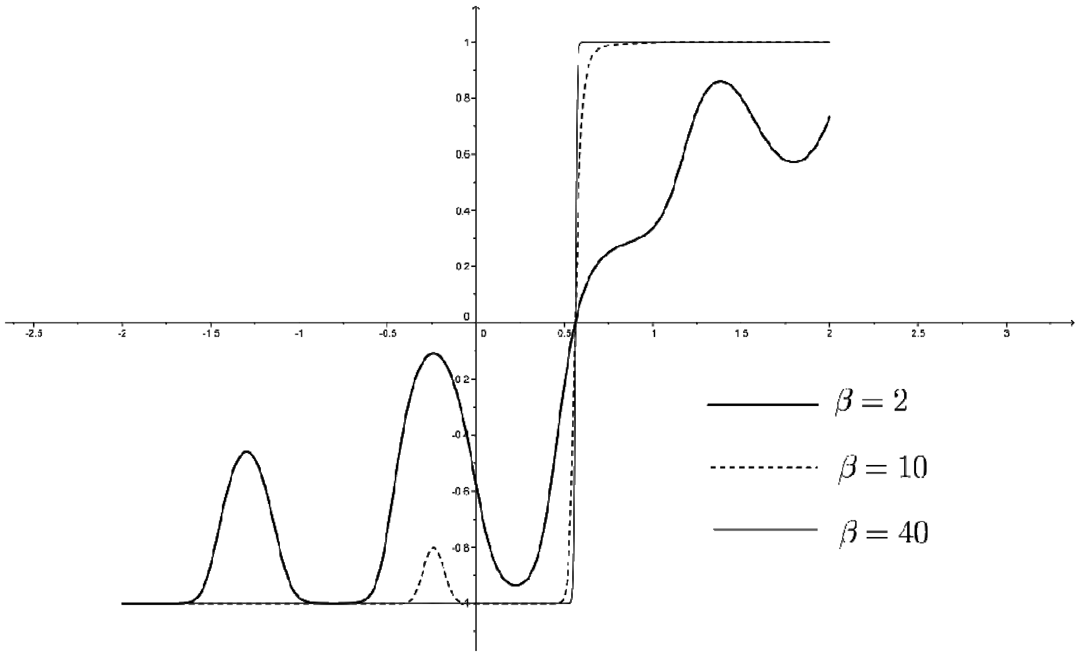
$$sgn(x) := \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \tag{27}$$

Sa slike 5. vidimo da se grafik funcije kreće u grancama intervala $[-1,1]$ a njen nagib blizu nule je veoma veliki.



Slika 6.

$$f(x) = (x-1)e^{\sin(6x)} + 0.35$$



Slika 7.

$$f^{[\beta]}(x) = \frac{e^{2\beta((x-1)e^{\sin(6x)}+0.35)} - 1}{e^{2\beta((x-1)e^{\sin(6x)}+0.35)} + 1}$$

Na slikama 6 i 7 dati su grafici funkcije f i grafik njene sigmoidne transformacije respektivno. Ovi grafici su dati radi lakšeg razumevanja sledeće aproksimativne formule:

$$\int_a^b f^{[\beta]}(x)dx \approx sgn(f(a))\{(\alpha - a) - (b - \alpha)\} \tag{28}$$

za dovoljno veliko β. Postavljamo da je

$$I\left(f^{[\beta]}(x)\right) := \int_a^b f^{[\beta]}(x)dx$$

pa dobijamo iz (28)

$$\alpha \approx \frac{1}{2}\left\{a + b + sgn\big(f(a)\big) \cdot I\left(f^{[\beta]}(x)\right)\right\} \tag{29}$$

Integral $I\left(f^{[\beta]}(x)\right)$ u (29) implicitno sadrži informaciju o korenu α koji je invarijanta pod sigmoidnom transformacijom. Zamenjujući $I\left(f^{[\beta]}(x)\right)$ sa njegovom numeričkom ocenom $\tilde{I}\left(f^{[\beta]}(x)\right)$ i označavanjem srodnih aproksimacija od α sa $q(\beta)$, dobijamo formulu:

$$q(\beta) = \frac{1}{2}\left\{a + b + sgn\big(f(a)\big) \cdot \tilde{I}\left(f^{[\beta]}(x)\right)\right\} \tag{30}$$

Kako transformisana funkcija $f^{[\beta]}$ ima jednostavan oblik za veliko β, možemo dobiti dobru aproksimaciju od $\tilde{I}\left(f^{[\beta]}(x)\right)$ bilo kojim standardnim numeričkim postupkom. Prema tome možemo očekivati odličnu aproksimaciju $\tilde{q}$ za $q(\beta)$ za bilo koju funkciju koja ima nepoželjno ponašanje kao što je loše oscilatorno svojstvo ili zaravljenost. Ocena $\tilde{q}$ je korisna čak i kad funkcija nije diferencijabilna.

Može se upotrebiti i Njutnov postupak u slučaju da aproksimacija dobijena pomoću (30) nije dovoljna. Za početnu aproksimaciju uzimamo $q_0 = q(\beta)$, pa je

$$q_{n+1} = q_n - \frac{f^{[\beta]}(q_n)}{f^{[\beta]\prime}(q_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{31}$$

sve dok je prvi izvod od funkcije f u blizini korena dostupan. Ako je $\beta f(q_0)$ dovoljno malo za neko β iteracija (31) može biti zamenjena sa

$$q_{n+1} = q_n - \frac{f(q_n)}{f'(q_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

jer

$$\frac{f^{[\beta]}(q_0)}{f^{[\beta]\prime}(q_0)} = \frac{\tanh(\beta f(q_0))}{\beta f'(q_0) sech^2(\beta f q_0)} \approx \frac{f(q_0)}{f'(q_0)}$$

2.6.3 Rešavanje jednačina korišćenjem signum funkcije

Kako sigmoidna transformacija $f^{[\beta]}$ konvergira ka funkciji $sgn(f), \beta \to \infty$, imamo jednačinu:

$$\int_a^b sgn\big(f(x)\big)dx = sgn(f(a))\{(\alpha - a) - (b - \alpha)\}$$

Dalje, imamo oznaku:

$$I\big(sgn(f)\big) := \int_a^b sgn(f(x))dx$$

pa je

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\big\{a + b + sgn\big(f(a)\big) \cdot I(sgn(f))\big\} \tag{32}$$

Menjajući integral $I(sgn(f))$ sa nekom numeričkom ocenom $\tilde{I}(sgn(f))$ i obeležavanjem sa p srodne aproksimacije od α, imamo:

$$p = \frac{1}{2}\big\{a + b + sgn\big(f(a)\big) \cdot \tilde{I}(sgn(f))\big\}$$

Kako je funkcija $sgn(x)$ prekidna funkcija, određena kvadraturna pravila ne rezultuju najboljim ocenama. Ipak, dobra ocena $\tilde{I}(sgn(f))$ za $I(sgn(f))$ daje mogućnost za dobijanje precizne aproksimacije za koren α.

Sa druge strane, pretpostavimo da je funkcija g neprekidna funkcija koja ima dve proste nule $\alpha_1\ i\ \alpha_2$ na (a, b) i neka je $\alpha_1 < \alpha_2$. Za $c = \frac{a+b}{2}$ i bilo koji ceo broj $m \geq 0$, postavimo :

$$I_m\big(sgn(g)\big) := \int_a^b (x - c)^m\, sgn(g(x))dx$$

Za $m = 0$ i $m = 2$ da bi odredili korene $\alpha_1\ i\ \alpha_2$ imamo:

$$I_0\big(sgn(g)\big) = sgn(g(a))\{2(\alpha_1 - \alpha_2) - (a - b)\}$$

$$I_2\big(sgn(g)\big) = \frac{sgn(g(a))}{3}\left\{2[(\alpha_1 - c)^3 - (\alpha_2 - c)^3] - \frac{1}{4}(a - b)^3\right\}$$

Odatle sledi da je:

$$\alpha_1 = c + \tfrac{A}{2} + \tfrac{\sqrt{-A^4 - 4AB}}{2\sqrt{3}A}, \qquad \alpha_2 = \alpha_1 - A \tag{33}$$

gde

$$A = \frac{1}{2}\{a - b + sgn(g(a)) \cdot I_0(sgn(g))\},$$

$$B = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{4}(a-b)^3 + 3sgn(g(a)) \cdot I_2(sgn(g))\right\} \tag{34}$$

Menjajući $I_0(sgn(g))$ i $I_2(sgn(g))$ u (33) sa numeričkim ocenama $\tilde{I}_0(sgn(g))$ i $\tilde{I}_2(sgn(g))$ respektivno, dobijamo približne korene $\tilde{\alpha}_1$ i $\tilde{\alpha}_2$. Zato u (34) imamo da izračunamo samo dva integrala, $I_0(sgn(g))$ i $I_2(sgn(g))$ za nalaženje korena α_1 i α_2 istovremeno.

2.6.4 Analiza greške

Teorema 15. [14]. *Pretpostavimo da neprekidna funkcija f ima jedinstvenu nulu na intervalu (a,b), $f(a)f(b) < 0$ i da postoji njen prvi izvod na (a,b). Tada za neko $\delta > 0$, $q(\beta)$ definisano u (30) zadovoljava*

$$|\alpha - q(\beta)| \leq \frac{\delta^2}{2}\{\tau_{max}(\beta) - \tau_{min}(\beta)\} + Ce^{-2\beta_\epsilon} + \left|I\left(f^{[\beta]}\right) - \tilde{I}\left(f^{[\beta]}\right)\right| \tag{35}$$

gde je $C > 0$ konstanta, $\epsilon = inf_{|x-\alpha|>\delta}|f(x)|$ i

$$\tau_{max}(\beta) = \max_{0<|\eta-\alpha|<\delta} F(\beta,\eta) \quad , \quad \tau_{min}(\beta) = \min_{0<|\eta-\alpha|<\delta} F(\beta,\eta)$$

za funkciju $F(\beta,\eta) \coloneqq f^{[\beta]'}(\eta) = \beta f'(\eta) sech^2(\beta f(\eta))$.

Dokaz. Iz (30) i (32) imamo

$$|\alpha - q(\beta)| = \left|I\left(sgn(f)\right) - \tilde{I}\left(f^{[\beta]}\right)\right| \leq \left|I\left(sgn(f)\right) - f^{[\beta]}\right| + \left|I\left(f^{[\beta]}\right) - \tilde{I}\left(f^{[\beta]}\right)\right|$$

Možemo pretpostaviti da postoji neko $\delta > 0$ tako da prvi izvod zadovoljava $f'(x) \geq 0$ (ili $f'(x) \leq 0$) za svako x na intervalu $|x - \alpha| < \delta$.

Kako je $f^{[\beta]}(\alpha) = 0$, imamo

$$f^{[\beta]}(x) = F(\beta,\eta)(x-\alpha)$$

za svako x za koje važi $|x-\alpha| < \delta$ i neko $\eta = \eta(x)$ između x i α.

Iz pretpostavke imamo da $F(\beta,\eta) = \beta f'(\eta) sech^2(\beta f(\eta)) \geq 0$ (ili ≤ 0) na intervalu $|x-\alpha| < \delta$. Pa sledi:

$$\left|\int_{|x-\alpha|<\delta} (sgn\left(f(x)\right) - f^{[\beta]}(x))dx\right| = \left|-\int_{\alpha-\delta}^{\alpha+\delta} f^{[\beta]}(x)dx\right|$$

$$\leq \left|\tau_{min}(\beta)\int_{\alpha-\delta}^{\alpha}(x-\alpha)dx + \tau_{max}(\beta)\int_{\alpha}^{\alpha+\delta}(x-\alpha)dx\right|$$

$$= \{\tau_{max}(\beta) - \tau_{min}(\beta)\}\int_{\alpha}^{\alpha+\delta}(x-\alpha)dx = \frac{\delta^2}{2}\{\tau_{max}(\beta) - \tau_{min}(\beta)\}$$

S druge strane, $x > \alpha + \delta,\ f(x) > \epsilon$, pa tako imamo

$$\left|sgn\big(f(x)\big) - f^{[\beta]}(x)\right| = |1 - \tanh(\beta f(x))| = \frac{2}{e^{2\beta f(x)} + 1} \leq 2e^{-2\beta\epsilon}$$

Slično, za $x < \alpha - \delta,\ f(x) < -\epsilon$ imamo

$$\left|sgn\big(f(x)\big) - f^{[\beta]}(x)\right| = |-1 - \tanh(\beta f(x))| = \frac{2e^{2\beta f(x)}}{e^{2\beta f(x)} + 1} \leq 2e^{-2\beta\epsilon}$$

Dakle,

$$\left|\int_{|x-\alpha|>\delta}(sgn\big(f(x)\big) - f^{[\beta]}(x))dx\right| \leq Ce^{-2\beta\epsilon}$$

za neku konstantu $C > 0$. ∎

Teorema podrazumeva da za dovoljno veliko β greška od $q(\beta)$ zavisi od greške numeričke integracije $\tilde{I}\big(f^{[\beta]}\big)$ sigmoidne transformacije $f^{[\beta]}$. U slučaju da β nije dovoljno veliko, gornja granica greške (35) zavisi uglavnom od odstupanja funkcije $F(\beta,\eta) = f^{[\beta]'}(x)$ izvan intervala $0 < |x-\alpha| < \delta$.

2.6.5 Algoritam signum postupka

Da bi opisali algoritam signum postupka, navešćemo teoremu i deo iterativnog metoda koji koristi trapezoidno pravilo, koje ćemo koristiti u samom algoritmu.

Teorema 16. [13]. *Neka je tačka $\tilde{\alpha}$ tačka iz intervala (a,b) tako da za neko $\delta > 0$ važi*

$$a \leq \tilde{\alpha} - \delta \leq \alpha \leq \tilde{\alpha} + \delta \leq b$$

Tada koren α jednačine $f(x) = 0$ zadovoljava

$$\alpha = \tilde{\alpha} + \frac{sgn(f(a))}{2} \int_{\tilde{\alpha}-\delta}^{\tilde{\alpha}+\delta} sgn(f(x))dx \qquad \blacksquare$$

Koristeći trapezoidno pravilo, pomoću kog aproksimiramo integral, dobija se sledeći rezultat.

Za bilo koji ceo broj ≥ 1, za $\delta_{k-1} = \frac{b-a}{2N^{k-1}}$ i za $h_{k-1} = \frac{2\delta_{k-1}}{N}$ (gde je h_{k-1} veličina koraka u $k-1$ iteraciji)

$$\alpha_k = \alpha_{k-1} + \frac{sgn(f(a))}{2} J_N^{(k-1)} \tag{36}$$

gde je

$$J_N^{(k-1)} = h_{k-1} \sum_{j=1}^{N-1} sgn\left(f\left(x_j^{(k-1)}\right)\right) = \frac{2\delta_{k-1}}{N} \sum_{j=1}^{N-1} sgn\left(f\left(x_j^{(k-1)}\right)\right)$$

sa čvorovima trapezoidnog pravila

$$x_j^{(k-1)} = \alpha_{k-1} - \delta_{k-1} + j \cdot h_{k-1}$$

$$= \alpha_{k-1} + (2j - N)\frac{\delta_{k-1}}{N}$$

Greška aproksimacije α_k je ograničena sa:

$$|\alpha - \alpha_k| < \frac{1}{2} h_{k-1} = \frac{b-a}{2N^k}$$

Konvergencija je linearna sa stopom $1/N$. $\blacksquare$

ProgramSIGNUM

Korak 1. Definisanje transformacije pomoću signum funkcije i postavljanje početnih vrednosti:

$$F(x) \coloneqq sgn\big(f(x)\big), \qquad F_a \coloneqq F(a)$$

$$\alpha \coloneqq \frac{a+b}{2}, \qquad \delta \coloneqq \frac{b-a}{2}$$

Korak 2. Za ceo broj $N \geq 2$ i za zadatu toleranciju > 0, izvršava se:

$k \coloneqq 0$

$Dok\ (k \coloneqq k+1) < K = K_{\varepsilon}(N)$

$$\delta \coloneqq \frac{\delta}{N}$$

$$\alpha := \alpha + (\delta F_a) \sum_{j=1}^{N-1} F(\alpha + (2j - N)\delta)$$

Ako je $|f(\alpha)| < \tau$ kraj. ($\tau > 0$ je dovoljno malo)

Možemo primetiti da za $N = 1$ prethodni postupak je ekvivalentan postupku polovljenja.

2.6.6 Mešoviti postupak signum-sečice

Ovaj postupak kombinuje dva postupka, a to su signum postupak opisan napred i već dobro poznati postupak sečice. Cilj kombinacije je poboljšanje reda konvergencije signum postupka bez obzira na napoželjna ponašanja funkcije f ili f'. Postupak sečice nam služi kao „korektor“, odnosno popravljač u svakom iterativnom koraku.

Neka je $F(x) \coloneqq sgn(f(x))$ i za aproksimaciju α_k dobijenu u k-toj iteraciji u (36) definišemo tačku r_k kao

$$r_k = \begin{cases} \alpha_k - \delta_k\,, & kada\ je\ F(a)F(\alpha_k) < 0 \\ \alpha_k + \delta_k\,, & kada\ je\ F(a)F(\alpha_k) > 0 \end{cases} \tag{37}$$

gde je $\delta_k = \frac{b-a}{2N^k}$ granica greške aproksimacije α_k.

Sve dok se tačka koren α nalazi između $r_k\ i\ \alpha_k$ mi predstavljamo još jednu aproksimaciju q_k korišćenjem postupka sečice za tačke $\big(\alpha_k, f(\alpha_k)\big)\ i\ \ (r_k, f(r_k))$:

$$q_k = \alpha_k - \frac{\alpha_k - r_k}{f(\alpha_k) - f(r_k)} f(\alpha_k) \tag{38}$$

Iz analize greške za postupak sečice sledi:

$$|\alpha - q_k| \leq M_k |(\alpha - q_k)(\alpha - r_k)|$$

gde je $M_k = \frac{max_{I_k}|f''(x)|}{2min_{I_k}|f'(x)|}$ za interval $I_k = [\alpha_k - \delta_k, \alpha_k + \delta_k]$. Sve dok $|\alpha - \alpha_k| < \delta_k$ iz (37) imamo sledeću teoremu.

Teorema 17. [13]. *Neka je* $f \in C^2[a,b]$ *i neka je* $f(a)f(b) < 0$ *sa* $f(\alpha) = 0$. *Tada aproksimacija u (38) zadovoljava*

$$|\alpha - q_k| < M_k[\delta_k]^2 \tag{39}$$

Primetimo da $|\alpha - \alpha_k| < \delta_k = \frac{b-a}{2N^k}$. Pa možemo videti da (38) povećava stopu konvergencije osnovne iteracije (36). Za toleranciju $\varepsilon > 0$ iz (39) sledi da $|\alpha - q_k| < \varepsilon$ za svako

$$k > \widetilde{K}_\varepsilon(N) := log_N\left[\frac{b-a}{2}\left(\frac{M_k}{\varepsilon}\right)^{1/2}\right]$$

Odnoseći se na kritičnu vrednost $K_\varepsilon(N)$ imamo da je

$$\widetilde{K}_\varepsilon(N) := K_\varepsilon(N) + \frac{1}{2}log_N(\varepsilon M_k)$$

pa sledi da je $\widetilde{K}_\varepsilon(N) < K_\varepsilon(N)$ kada je $M_k < \frac{1}{\varepsilon}$ i šta više, razlika $K_\varepsilon(N) - \widetilde{K}_\varepsilon(N)$ kritičnih brojeva postaje bolja kako se ε približava nuli.

ProgramSignumSečica

Korak 1. Definisanje transformacije pomoću signum funkcije i postavljanje početnih vrednosti:

$$F(x) := sgn\big(f(x)\big), \qquad F_a := F(a)$$

$$\alpha := \frac{a+b}{2}\,, \qquad \delta := \frac{b-a}{2}$$

Korak 2. Za ceo broj $N \geq 2$ i za zadatu toleranciju > 0, izvršava se:

$k := 0$

$Dok\ (k := k+1) < K = K_\varepsilon(N)$

$\delta := \frac{\delta}{N}$

$$\alpha := \alpha + (\delta F_a) \sum_{j=1}^{N-1} F(\alpha + (2j - N)\delta)$$

Ako je $F_a \cdot F(\alpha) < 0$ onda $r \coloneqq \alpha - \delta$, inače $r \coloneqq \alpha + \delta$

$$\alpha := \alpha - \frac{\alpha - r}{f(\alpha) - f(r)} f(\alpha)$$

Ako je $|f(\alpha)| < \tau$ kraj. ($\tau > 0$ je dovoljno malo)

Napomena. U koraku 2 umesto $\widetilde{K}_\varepsilon(N)$ se koristi $K_\varepsilon(N)$ zato što je izračunavanje M_k nemoguće u praksi.

3 Modifikacija nekih iterativnih postupaka

3.1 Opis

U ovom delu rada posmatraćemo familiju iterativnih postupaka

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \left(1 + r\frac{t}{2} + p\frac{t^2}{2}\right) \tag{40}$$

$$t = 2\frac{f\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right)}{f(x)}$$

gde ćemo prvi izvod funkcije aproksimirati centralnim diferencnim količnikom

$$f'(x) \simeq \frac{f\big(x + f(x)\big) - f(x - f(x))}{2f(x)}$$

i dobiti modifikacije nekih postupaka. Možemo primetiti da za određene vrednosti parametara r i p, ovoj familiji postupaka pripadaju Njutnov postupak, postupak Potra&Ptak i postupak Ostrovskog.

Njutnov postupak: $= 0$, $p = 0$

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Postupak Potra&Ptak: $= 1$, $p = 0$

$$F(x) = x - \frac{f(x) + f\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right)}{f'(x)}$$

Postupak Ostrovskog: $= 1$, $p = 1$

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \frac{f\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right) - f(x)}{2f\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right) - f(x)}$$

Zamenom prvog izvoda, izbegavamo definisanje nove funkcije i iteraciju računamo korišćenjem jedino funkcije opisane u problemu, pokušavajući da očuvamo red konvergencije. Uklanjanjem izvoda uvećavamo broj računanja funkcija po iteraciji. Mera efikasnosti data je u odeljku 1.5 mada se može koristiti i kompjuterska mera efikasnosti data sa

$$CI = p^{\frac{1}{(d+op)}}$$

gde je p red konvergencije postupka, d je broj računanja funkcija po iteraciji a op je broj množenja i deljenja po iteraciji.

Postoje brojne modifikacije Njutnovog postupka. Ako u Njutnovom postupku zamenimo prvi izvod sa

$$f'(x) \simeq \frac{f\big(x+f(x)\big)-f(x)}{f(x)}$$

dobija se Stefensonov postupak. U ovom delu rada posvetićemo se modifikaciji familije iterativnih postupka (40) i na taj način dobiti modifikovani postupak Potra&Ptak i modifikovani postupak Ostrovskog. Napravićemo poređenje modifikovanog postupka Ostrovskog sa direktnom modifikacijom koja je data u radu [2] i dati teoremu sa dokazom o konvergenciji modifikovane familije iterativnih postupaka.

3.2 Modifikovana familija iterativnih postupaka

Kada u familiju iterativnih postupaka (40) prvi izvod zamenimo centralnim diferencnim količnikom dobijamo sledeću familiju:

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{\frac{f\left(x+f(x)\right)-f\left(x-f(x)\right)}{2f(x)}}\left(1 + r\frac{t}{2} + p\frac{t^2}{2}\right) \tag{41}$$

$$t = 2\frac{f\left(x - \frac{f(x)}{\frac{f\left(x+f(x)\right)-f\left(x-f(x)\right)}{2f(x)}}\right)}{f(x)}$$

U ovoj familiji za različite vrednosti parametara dobijaju se različite modifikacije. Za $r = 0$ i $p = 0$ imamo modifikovani Njutnov postupak. Za $r = 1$ i $p = 0$ dobijamo modifikovani postupak Potra&Ptak. Za $r = 1$ i $p = 1$ dobijamo modifikovani postupak Ostrovskog.

Modifikovani postupak Potra&Ptak

$$F(x) = x - \frac{f(x)+f\left(x-\frac{f(x)}{\frac{f(x+f(x))-f(x-f(x))}{2f(x)}}\right)}{\frac{f(x+f(x))-f(x-f(x))}{2f(x)}} \tag{42}$$

Modifikovani postupak Ostrovskog

$$F(x) = x - \frac{2f(x)^2\left(1+\frac{f\left((x-\frac{2f(x)^2}{f(x+f(x))-f(x-f(x))})\right)}{f(x)}+\frac{2f\left(x-\frac{2f(x)^2}{f(x+f(x))-f(x-f(x))}\right)^2}{f(x)^2}\right)}{f(x+f(x))-f(x-f(x))} \tag{43}$$

3.3 Direktna modifikacija postupka Ostrovskog

U radu [2] grupa autora je u postupku Ostrovskog zamenila prvi izvod takođe centralnim diferencnim količnikom ali direktno u formulu za postupak Ostrovskog. Na taj način se dobije

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{\frac{f(x+f(x))-f(x-f(x))}{2f(x)}}\,\frac{f\left(x-\frac{f(x)}{\frac{f(x+f(x))-f(x-f(x))}{2f(x)}}\right)-f(x)}{2f\left(x-\frac{f(x)}{\frac{f(x+f(x))-f(x-f(x))}{2f(x)}}\right)-f(x)} \tag{44}$$

što je formula za direktnu modifikaciju postupka Ostrovskog. Za ovaj postupak dokazali su teoremu o njegovoj konvergenciji.

Teorema 18. [2]. *Neka je $\alpha \in I$ prosta nula od dovoljno diferencijabilne funkcije $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ na otvorenom intervalu I. Ako je x_0 dovoljno blizu α onda direktna modifikacija postupka Ostrovskog konvergira sa redom konvergencije 4 i zadovoljava jednačinu greške datu sa*

$$e_{n+1} = -c_2\left(-\frac{c_2^2}{c_1^3} + c_3 + \frac{c_3}{c_1^2}\right)e_n^4 + \mathcal{O}(e_n^5)$$

gde je $e_n = x_n - \alpha$ a $c_k = \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}$.

Lako je videti da ovaj postupak ima četiri puta računanje funkcije *f* po iteraciji a kako je postupak četvrtog reda a ukupan broj množenja i deljenja je 4 njegova kompjuterska efikasnost je $CI = 4^{\frac{1}{4+4}}$.

3.4 Analiza konvergencije modifikovane familije postupaka

Teorema 19. *Neka je $f \in C^4(D)$takva da je*

$$|f'(x)| \geq m > 0, \qquad x \in D$$

Ako jednačina $f(x) = 0$ ima rešenje $\alpha \in D$, onda postoji $\eta > 0$ takvo da za svako

$$x_0 \in D_\eta(\alpha) = \{x \in D: |x - \alpha| \leq \eta\}$$

modifikovana familija postupaka (41) konvergira ka α

(i) sa trećim redom za $r = 1$, $p = 0$. Asimptotska konstanta greške je $2{c_2}^2$

(ii) sa četvrtim redom za $r = 1$, $p = 1$. Asimptotska konstanta greške je $c_2(5c_2^2 - c_3(1 + f'(\alpha)^2))$

Dokaz. Iz uslova Teoreme 19. sledi da jednačina $f(x) = 0$ ima u intervalu *D* jedno i samo jedno rešenje. Kako je $f(x) = 0$, postoji μ takvo da $D_\mu(\alpha) \subset D$. Funkcija $x + \lambda f(x)$ (za bilo koji fiksni realan broj λ) je neprekidna u α, pa za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\omega > 0$ takvo da

$$|x + \lambda f(x) - \alpha - \lambda f(\alpha)| = |x + \lambda f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

važi za svako $x \in D_\omega(\alpha)$. Neka je $\varepsilon = min\{b - \alpha, \alpha - a\}$. Tada postoji $\rho > 0$ takvo da je za svako $x \in D_\rho(\alpha)$. i $\lambda \in \{-1,1\}$

$$a < \alpha - \varepsilon < x + \lambda f(x) < \alpha + \varepsilon < b$$

To znači da je za svako $\in D_\rho(\alpha)$, $x + \lambda f(x) \in D$ i $x - \lambda f(x) \in D$.

Neka je $q \in (0,1)$. Označimo sa M konstantu za koju važi $|F'''(x)| \leq \frac{M}{6}$, $x \in D$. Zbog $f \in C^4(D)$ sledi da ovakva konstanta M postoji. Neka je $\eta = min\left\{\mu, \rho, \sqrt{\frac{6q}{M}}\right\}$. Tada je za $x \in D_\eta(\alpha) \subset D$ i funkcija koraka posmatranog iterativnog postupka dobro definisana. Na osnovu Tejlorovog razvoja i osobina funkcije F sledi da postoji $\tau \in D_\eta(\alpha)$ takvo da za $x_0 \in D_\eta(\alpha)$ važi

$$x_1 - \alpha = F(x_0) - F(\alpha) = \frac{F'''(\tau)}{3!}(x_0 - \alpha)^3$$

Odatle sledi

$$|x_1 - \alpha| = \frac{F'''(\tau)}{3!}|x_0 - \alpha|^3 \leq \frac{M_3}{6}\eta^2|x_0 - \alpha| \leq q|x_0 - \alpha| \leq |x_0 - \alpha| \leq \eta$$

što znači da $x_1 \in D_\eta(\alpha)$. Postupajući na isti način dobijamo da sa $x_0 \in D_\eta(\alpha)$ važi $x_k \in D_\eta(\alpha), k = 0,1$ ... Konvergencija niza sledi iz

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq q|x_k - \alpha| \leq q^2|x_{k-1} - \alpha| \leq \cdots \leq q^{k+1}|x_0 - \alpha|$$

jer je $q \in (0,1)$.

Sada još treba dokazati red konvergencije. U programskom paketu Mathematica izvršili smo razvijanje centralnog diferencnog količnika u Tejlorov red i tražili vrednosti prvog, drugog , trećeg i četvrtog izvoda funkcije F u tački α. Ovu smo uradili prvo za $r = 1$ i $p = 1$, odnosno za modifikovani postupak Ostrovskog. Dobijamo

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{g(x)}\left(1 + r\frac{t}{2} + p\frac{t^2}{2}\right), \qquad t \to 2w(x)$$

gde je

$$g(\mathrm{x}) = \frac{1}{12}(6 + 6f'(x) + 3f(x)f''(x) + f(x)^2 f^{(3)}(x)) + \frac{1}{48}f(x)^3 f^{(4)}(\tau_+(x)) + \frac{1}{12}(-6 + 6f'(x) - 3f(x)f''(x) + f(x)^2 f^{(3)}(x)) - \frac{1}{48}f(x)^3 f^{(4)}(\tau_-(x))$$

i

$$w(\mathrm{x}) = \frac{24g(x)^4 - 24g(x)^3 f'(x) + 12f(x)f''(x) - 4f(x)^2 g(x) f^{(3)}(x) + f(x)^3 f^{(4)}(\delta(x))}{24g(x)^4}$$

za neko

$$\tau_+(x) \in (min\{x, x + f(x)\}, max\{x, x + f(x)\}), \tau_-(x) \in (min\{x, x - f(x)\}, max\{x, x - f(x)\})$$

i

$$\tau(x) \in (min\{x - f(x), x + f(x)\}, max\{x - f(x), x + f(x)\}).$$

Zbog $f(\alpha) = 0$ je $\sigma(\alpha) = \alpha$, $\tau(\alpha) = \alpha$. Neposredno se proverava

$$F'(\alpha) = 0\,,\ \frac{F''(\alpha)}{2} = 0\,,\ \frac{F'''(\alpha)}{6} = 0\,, \frac{F^{(IV)}(\alpha)}{24} \neq 0$$

pa na osnovu Teoreme 4 modifikovani postupak Ostrovskog je četvrtog reda. Analogno se pokazuje da je modifikovani postupak Potra&Ptak trećeg reda.

Asimptotske konstante greške dobijene su u Matematici kao $\frac{F^{(p)}(\alpha)}{p!}$, za $p = 3$, odnosno za $p = 4$ za postupke modifikovani Potra&Ptak i modifikovani postupak Ostrovskog. ■

4 Numerički rezultati

U ovom delu prikazaćmo numeričke rezultate sa postupcima opisanim u trećem poglavlju. Sva računanja su urađena u programskom paketu *Mathematica 8*. Preciznost je povećana na 10000 cifara sa *SetPrecision* funkcijom. Koristili smo sledeći izlazni kriterijum: $|x_k - \alpha| < \varepsilon$ i $|f(x_k)| < \varepsilon$ gde je α tačno rešenje posmatrane jednačine. U slučajevima kada tačno rešenje nije dostupno, koristili smo njegovu aproksimaciju koja je računata sa 10000 cifara, ali smo prikazali samo 20 cifara. Numerički red konveregencije ord je računat prema

$$ord_k = \frac{\ln\left(|x_{k+1} - \alpha|/|x_k - \alpha|\right)}{\ln\left(|x_k - \alpha|/|x_{k-1} - \alpha|\right)}, k = 1,2, \ldots$$

i predstavlja aproksimaciju reda konvergencije p, a aproksimacije C_k asimptotske konstante greške C računate su prema

$$C_k = \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^p}, k = 1,2, \ldots$$

Rešavali smo jednačine $f_k(x) = 0, k = 1, \ldots 5$ gde je:

$$f_1(x) = x^3 - 10, [5], \alpha_1^* \approx 2.1544346900318837218, x_0 = 2,$$

$$f_2(x) = x^3 + 4x^2 - 10, [5], \alpha_2^* \approx 1.365230013414096845, x_0 = 2,$$

$$f_3(x) = (x-1)^3 - 2, [5], \alpha_3^* \approx 2.259921049894873, x_0 = 2,$$

$$f_4(x) = \frac{x}{2} - Sin(x), [5], \alpha_4^* \approx 0.5235987755982988731, x_0 = 0.7,$$

$$f_5(x) = x - cos(x), [5], \alpha_5^* \approx 1.895494267, x_0 = 1.5.$$

U tabelama 2, 3 i 4 prikazujemo rezultate za prvu jednačinu dobijene modifikovanim postupkom Potra&Ptak, modifikovanim postupkom Ostrovskog (naša modifikovana familija (41)) i direktnom modifikacijom postupka Ostrovskog (44).

U tabelama 5 i 6 dajemo rezultate koji služe za upoređivanje dve modifikacije postupka Ostrovskog za jednačinu $f(x) = 0$, gde je

$$f(x) = \frac{1}{2} - \sin x\ , [4], \alpha_1^* \approx 0.5235987755982988731, x_0 = 0.7.$$

Razliku između posmatranih postupaka posmatramo i grafički, što je prikazano na slici 8.

Rezultate koji se odnose na jednačine $f_k(x) = 0, k = 2,3, \dots 5$ prikazani su u tabelama 7, 8, 9 i 10. Poslednja, 11. tabela sadrži podatke za drugu jednačinu sa

$$f_2(x) = x^3 + 4x^2 - 10, [5], \alpha_2^* \approx 1.365230013414096845, x_0 = 1.5$$

tj. sa novom početnom vrednošću$x_0 = 1.5$. Time smo pokazali da modifikovani postupak Ostrovskog konvergira sa ovom početnom vrednošću, dok sa $x_0 = 2$ ne konvergira.

4.1 Modifikovani postupak Potra&Ptak

$f_1(x) = x^3 - 10$, $\alpha_1 * \approx 2.1544346900318837218$, $x_0 = 2$, $C = 0.4308869380...$				
k	x_k	$\lvert\alpha - x_k\rvert$	ord_k	C_k
0	2.0000000000000000000	1.5(-1)	-	-
1	2.1502685546875000000	4.2(-3)	-	1.131094244
2	2.1544346643064116256	2.6(-8)	3.3201605	0.3557650075
3	2.1544346900318837218	7.3(-24)	2.9840289	0.4308864563
4	2.1544346900318837218	1.7(-70)	3.0000000	0.4308869380
5	2.1544346900318837218	2.1(-210)	3.0000000	0.4308869380
6	2.1544346900318837218	4.1(-630)	3.0000000	0.4308869380

Tabela 2. Modifikovani postupak Potra&Ptak

4.2 Naš modifikovani postupak Ostrovskog

$f_1(x) = x^3 - 10$, $\alpha_1^* \approx 2.1544346900318837218$, $x_0 = 2$, $C = -5.9966374034...$				
k	x_k	$\lvert\alpha - x_k\rvert$	ord_k	C_k
0	2.0000000000000000000	1.5(-1)	-	-
1	2.1604845523834228516	6.0(-3)	-	10.63569931
2	2.1544346807802015186	9.3(-9)	4.1332817	6.906193336
3	2.1544346900318837218	4.4(-32)	4.0105461	5.996635959
4	2.1544346900318837218	2.2(-125)	4.0000000	5.996637403
5	2.1544346900318837218	1.5(-498)	4.0000000	5.996637403
6	2.1544346900318837218	3.0(-1991)	4.0000000	5.996637403

Tabela 3. Naša modifikacija postupka Ostrovskog

4.3 Modifikovani postupak Ostrovskog

$f_1(x) = x^3 - 10$, $\alpha_1^* \approx 2.1544346900318837218$, $x_0 = 2$, $C = -6.3966374034...$				
k	x_k	$\lvert\alpha - x_k\rvert$	ord_k	C_k
0	2.0000000000000000000	1.5(-1)	-	-
1	2.1674180327868852459	1.3(-2)	-	22.82480519
2	2.1544344373716263275	2.5(-7)	4.3807254	8.891823724
3	2.1544346900318837218	2.6(-26)	4.0303645	6.396589153
4	2.1544346900318837218	3.0(-102)	3.9999998	6.396637403
5	2.1544346900318837218	4.9(-406)	4.0000000	6.396637403
6	2.1544346900318837218	3.6(-1621)	4.0000000	6.396637403

Tabela 4. Modifikovan postupak Ostrovskog, [2]

4.4 Upoređenje dve modifikacije postupka Ostrovskog

Posmatraćemo naš modifikovani postupak Ostrovskog pomoću familije iterativnih postupaka (41) dat u (43) i direktnu modifikaciju postupka Ostrovskog datu u (44). Navešćemo rezultate rešavanja jednačine $f(x) = 0$, sa

$$f(x) = \frac{1}{2} - \sin x \text{ , [4], } \alpha_1^* \approx 0.52359877559829887 31 \text{ , } x_0 = 0.7.$$

Ovi rezultati su prikazani u tabelama 5 i 6. Zajedno sa rezultatima dobijenim istim postupcima, a prikazanim u tabelama 3 i 4, rezultati iz tabela 5 i 6 pokazuju da se ne može reći da je naša modifikacija bolja od modifikacije postupka Ostrovskog, iz rada [2]. Asimptotske konstante greške nisu jednake za ova dva postupka, ali su u saglasnosti sa teorijskim rezultatima. Apsolutna vrednost razlike tačnog i približnog rešenja u svim iteracijama kod ovih postupaka je približno ista. Red konvergencije ovih postupaka je isti.

$f(x) = \frac{1}{2} - \sin x$, [5], $\alpha_1^* \approx 0.5235987755982988731$, $x_0 = 0.7$ $\quad C = -0.1082531754...$				
k	x_k	$\lvert\alpha - x_k\rvert$	ord_k	C_k
0	0.69999999999999995559	1.8(-1)	-	-
1	0.52344287624242133509	1.6(-4)	-	0.1610044723
2	0.52359877559829880915	6.4(-17)	4.0565090	0.1082128517
3	0.52359877559829887308	1.8(-66)	3.9999869	0.1082531755
4	0.52359877559829887308	1.2(-264)	4.0000000	0.1082531755
5	0.52359877559829887308	1.9(-1057)	4.0000000	0.1082531755
6	0.52359877559829887308	1.5(-4228)	4.0000000	0.1082531755

Tabela 5. Modifikovan postupak Ostrovskog, [2]

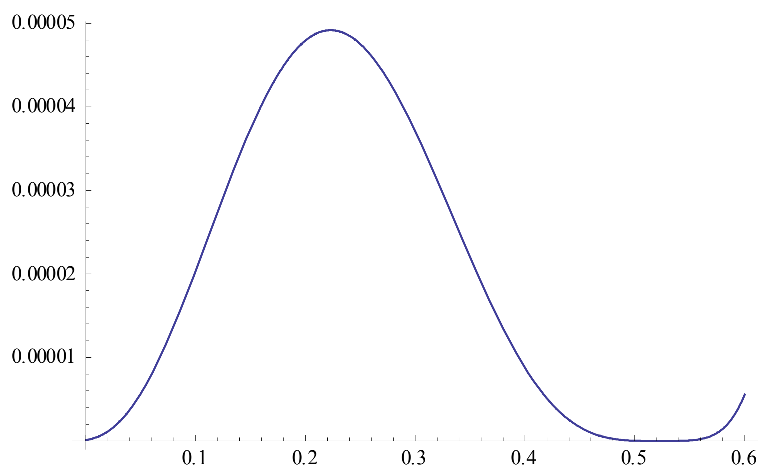
$f(x)=\frac{1}{2}-\sin x$, [4], $\alpha_1^* \approx 0.5235987755982988731$, $x_0=0.7$ $\quad C=-0.2044782203...$				
k	x_k	$\lvert\alpha - x_k\rvert$	ord_k	C_k
0	0.69999999999999995559	1.8(-1)	-	-
1	0.52314096643254622756	4.6(-4)	-	0.4728006908
2	0.52359877559828990970	9.0(-15)	4.1411331	0.2040487017
3	0.52359877559829887308	1.3(-57)	3.9999147	0.2044782203
4	0.52359877559829887308	6.2(-229)	4.0000000	0.2044782203
5	0.52359877559829887308	3.0(-914)	4.0000000	0.2044782203
6	0.52359877559829887308	1.7(-3655)	4.0000000	0.2044782203

Tabela 6. Naša modifikacija postupka Ostrovskog

Razliku između postupaka možemo u konkretnom slučaju posmatrati i grafički. Funkcija razlike funkcija koraka ta dva postupka je

$$\varphi(x)=\frac{8f\left(x+\frac{2f(x)^2}{f\left(x-f(x)\right)-f\left(x+f(x)\right)}\right)^3}{\left(f(x-f(x))-f(x+f(x))\right)\left(f(x)-2f\left(x+\frac{2f(x)^2}{f\left(x-f(x)\right)-f\left(x+f(x)\right)}\right)\right)}$$

i njen grafik na intervalu $[0,0.6]$, koji sadrži nulu posmatrane funkcije, prikazan je na slici 8.



Slika 8.

Time smo i grafički potvrdili da se ova dva postupka, u opštem slučaju, razlikuju.

4.5 Ostali primeri

Navešćemo rezultate rešavanja jednačine$f(x) = 0$, sa sledećim funkcijama

$$f_2(x) = x^3 + 4x^2 - 10, [5], \alpha_2^* \approx 1.365230013414096845, x_0 = 2,$$

$$f_3(x) = (x-1)^3 - 2, [5], \alpha_3^* \approx 2.259921049894873, x_0 = 2,$$

$$f_4(x) = \frac{x}{2} - Sin(x), [5], \alpha_4^* \approx 0.5235987755982988731, x_0 = 0.7,$$

$$f_5(x) = x - cos(x)\,, [5], \alpha_5^* \approx 1.895494267, x_0 = 1.5.$$

Koristili smo izlazni kriterijum: $|x_k - \alpha| < \varepsilon$ i $|f(x_k)| < \varepsilon$ gde je α_2^* aproksimacija tačnog rešenja dobijena sa 20000 cifara i $\varepsilon = 10^{-5000}$. Sa *it* označavamo broj iteracija za koji je zadovoljen izlazni kriterijum, x_{it} je odgovarajuća aproksimacija, $|\alpha - x_{it}|$ je odgovarajuća greška, ord_{it} je odgovarajući numerički red konvergencije i C_{it} odgovarajuća aproksimacija asimptotske konstante greške. Sa T označavamo vreme potrebno da se sa zadatom početnom vrednošću x_0 zadovolji izlazni kriterijum, tj. da se izračuna approksimacija x_{it}.

$f_2(x) = x^3 + 4x^2 - 10$, [5], $\alpha_2^* \approx 1.365230013414096845$ $x_0 = 2$			
Modifikovani postupak	Potra&Ptak	Ostrovskog (naš)	Ostrovskog (iz [2])
T	0.078	0.078	
it	11	8	
x_{it}	1.3652300134140968458		
$\lvert\alpha - x_{it}\rvert$	5.5×10^{-2616}	1.1×10^{-2574}	
ord_{it}	3.000000000	4.000000000	
C_{it}	0.4806896670	−7.536233046	

Tabela 7.

$f_3(x)=(x-1)^3-2$, [5], $\alpha_3^* \approx 2.259921049894873$, $x_0=2.0$			
Modifikovani postupak	Potra&Ptak	Ostrovskog (naš)	Ostrovskog (iz [3])
T	0.046	0.031	0.047
it	8	6	6
x_{it}	2.2599210498948731647		
$\lvert\alpha-x_{it}\rvert$	2.2×10^{-5891}	1.5×10^{-2546}	1.8×10^{-2397}
ord_{it}	3.000000000	4.000000000	4.000000000
C_{it}	1.259921049	1.446429816	−3.446429816

Tabela 8.

$f_4(x)=\frac{x}{2}-\sin x$, [5], $\alpha_4{}^* \approx 0.5235987755982988731$, $x_0=0.7$			
Modifikovani postupak	Potra&Ptak	Ostrovskog (naš)	Ostrovskog (iz [3])
T	3.12	2.621	3.479
it	9	7	6
x_{it}	1.8954942670339809471		
$\lvert\alpha-x_{it}\rvert$	1.6×10^{-4535}	1.3×10^{-2681}	7.6×10^{-2026}
ord_{it}	3.000000000	4.000000000	4.000000000
C_{it}	0.6695195645	1.031191137	0.256444132

Tabela 9.

$f_5(x)=x-\cos x$, [5], $\alpha_5^* \approx 1.895494267$, $x_0=1.5$			
Modifikovani postupak	Potra&Ptak	Ostrovskog (naš)	Ostrovskog (iz [3])
T	2.824	2.98	4.134
it	8	8	7
x_{it}	0.73908513321516064166		
$\lvert\alpha-x_{it}\rvert$	5.7×10^{-3678}	7.9×10^{-7733}	1.3×10^{-3980}
ord_{it}	3.000000000	4.000000000	4.000000000
C_{it}	0.09751004568	0.1101269059	0.06706541743

Tabela 10.

4.6 Bolji izbor početne aproksimacije

U tabeli 7 smo u koloni za modifikovani postupak Ostrovskog ostavili prazna polja. To je značilo da taj postupak sa izabranom početnom vrednošću $x_0 = 2$ ne konvergira. Rezultate za isti primer, ali sa novom startnom vrednošću $x_0 = 1.5$, pokazuju da i taj postupak konvergira. U sledećoj tabeli, kao i u prethodnim, prikazujemo rezultate sva tri modifikovana postupka.

$f_2(x) = x^3 + 4x^2 - 10$, [5], $\alpha_2^* \approx 1.365230013414096845$ $x_0 = 1.5$			
Modifikovani postupak	Potra&Ptak	Ostrovskog (naš)	Ostrovskog (iz [3])
T	0.046	0.047	0.078
it	6	6	6
x_{it}	1.3652300134140968458		
$\lvert\alpha - x_{it}\rvert$	2.6×10^{-492}	1.8×10^{-2462}	1.3×10^{-1589}
ord_{it}	3.000000000	4.000000000	4.000000000
C_{it}	0.480689667	−7.536233046	−8.00754904

Tabela 11.

5 Zaključak

U master radu se posmatraju neki iterativni postupci bez izvoda za rešavanje nelinearne jednačine sa jednom nepoznatom. Prikazano je više postupaka: postupak sečice, postupak LZ4, Falsi-Stefensonov postupak, postupak Muller-polovljenje, signum postupak. Opisani su ovi postupci i odgovarajući algoritmi i date teoreme o njihovoj konvergenciji. U trećem delu je posmatrana dvoparametarska familija postupaka, koja kao specijalne slučajeve sadrži modifikaciju postupka Potra&Ptak i modifikaciju postupka Ostrovskog. Za ovu familiju dokazana je teorema o lokalnoj konvergenciji. Formiranje dvoparametarske familije i dokaz njene lokalne konvergencije su originalni doprinosi ovom master radu. U četvrtom delu prikazano je više rezultata izvedenih eksperimenata koji su urađeni u programskom paketu *Mathematica*. Primeri su uzeti iz relevantnih radova, [3], [4], [5]. Numerički rezultati su u skladu sa teorijskim razmatranjima.

6 Literatura

[1] Bus, J.C.P., Numerical Solution of Systems of Nonlinear Equations, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1980.

[2] Cordero, A., Hueso, J.L., Martínez, E., Torregrosa, J.R., Steffensen type methods for solving nonlinear equations, Journal of Computational and Applied Mathematics 236 (2012) 3058–3064.

[3] Herceg D., Krejić N., Numerička analiza, Univerzitet u Novom Sadu, Stylos, Novi Sad, 1997.

[4] Herceg, Đ., Herceg, D., On a third order family of methods for solving nonlinear equations, International Journal of Computer Mathematics, 2010, 1-9.

[5] Homeier, H.H.H., On Newton-type methods with cubic convergence, J. Comput. Appl. Math. 176 (2005), 425–432.

[6] Le, D., An Efficient Derivative-Free Method for Solving Nonlinear Equations, Journal ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS), Vol 11,3(1985), 250-262.

[7] Mathews, J.H., Numerical Methods for Mathematics, Science, and Engineering, Publisher, Prentice Hall, 1992.

[8] Ortega, J.M., Rheinboldt, W.C., Iterative Solution of Nonlinear Equations of Several Variables, Academic Press, New York, 1970.

[9] Ostrowski, A., Solution of Equations and Systems of Equations, Academic Press, New York, 1966.

[10] Traub J.F., *Itarative Methods for the Solution if Equations*, Prentice–Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., United States of America, 1964.

[11] Wu, X., Improved Muller-method and Bisection method with global and asymptotic superlinear convergence of both point and interval for solving nonlinear equations, Applied Mathematics and Computation 166 (2005) 299–311.

[12] Wu, X., Shen, Z., Xia, J., An improved regula falsi method with quadratic convergence of both diameter and point for enclosing simple zeros of nonlinear equations, Appl. Math. Comput.144 (2–3) (2003) 381–388.

[13] Yun, B. I., Petković, M., Iterative methods based on the signum function approach for solving nonlinear equations, Vol. 52,4(2009), 649-662.

[14] Yun, B.I., A non-iterative method for solving non-linear equations. Appl.Math. Comput. 198(2008), 691–699.

7 Biografija

Rođena sam 8. aprila 1987. godine u Sremskoj Mitrovici. Završila sam Osnovnu školu „Jovan Popović“ i Osnovnu muzičku školu „Petar Krančević“ u Sremskoj Mitrovici, 2002. godine. Veliku ljubav prema prirodnim naukama sam stekla još u osnovnoj školi, pa sam upisala prirodno-matematički smer u Gimnaziji „Ivo Lola Ribar“ i maturirala 2006. godine sa odličnim uspehom.

Iste godine sam upisala Prirodno – matematički fakultet, odsek matematika, smer matematika finansija gde sam diplomirala 2010. godine i stekla stručni naziv diplomirani matematičar. U novembru 2010. sam upisala master studije primenjene matematike i sve ispite predviđene planom i programom sam položila do jula 2012. godine.

Od 1.9.2011. sam zaposlena u Ekonomskoj školi u Sremskoj Mitrovici kao profesor matematike.

Sremska Mitrovica, septembar 2012. *Svetlana Trifunović*

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Master rad
VR
Autor: Svetlana Trifunović
AU
Mentor: dr Dragoslav Herceg
MN
Naslov rada: Postupci bez izvoda za numeričko rešavanje jednačina
MR
Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: srpski i engleski
JI
Zemlja publikovanja: Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2012.
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku
Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 3
MA
Fizički opis rada:7 poglavlja/72 strane/1 fotografija/8 grafikona/14 literature
FO
Naučna oblast: Matematika
NO
Naučna disciplina: Numerička analiza
ND
Ključne reči: Postupci, iteracija, red konvergencije, efikasnost postupka
KR
Predmetna odrednica: Numeričko rešavanje nelinearnih jednačina

PO

Čuva se: u Biblioteci Departmana za matematiku i informatiku

ČU

Važna napomena: /

VN

Izvod: Ovaj rad se bavi analizom nekih osnovnih postupaka bez izvoda za rešavanje nelinearnih jednačina kao što su postupak polovljenja i sečice i analizira publikovane i prihvaćene radove u kojima se postupci za rešavanje nelinearnih jednačina unapređuju tako što nastaju kombinacijom nekih poznatih iterativnih postupaka.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 10.05.2012.

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: dr Nataša Krejić,
redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Član: dr Zorana Lužanin,
redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Član: dr Dragoslav Herceg,
redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
DEPARTAMENT OF MATHEMATICS AND INFORMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monographic publication
DT
Type of record: Textual printed material
TR
Contents Code: Master thesis
CC
Author: Svetlana Trifunović
AU
Mentor: dr Dragoslav Herceg
MN
Title: Derivate-free methods for numerical solving nonlinear equations
XI
Language of text: Serbian (Latinic)
LT
Language of abstract: Serbian and English
LA
Country of publication: Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2012
PY
Publisher: Author's reprint
PU
Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics,
Faculty of Science, Trg Dositeja Obradovića 3
PP
Physical description: 7 chapters/72 pages/1 photograph/8 charts/14 references
PD
Scientific field: Mathematics
SF
Scientific discipline: Numerical Analysis
SD
Key words: Methods, iteration, order of convergence, method efficiency
KW
Holding data: Library of Department of Mathematics and Informatics

HD
Note: /
N
Abstract: This paper deals with the analysis of some basic derivate-fee methods for solving nonlinear equations such as bisection and secant method and analyze published and accepted papers in which the procedures for solving nonlinear equations are improved by the combination of some well known iterative methods.
AB
Accepted by the Scientific Board on: 10. May 2012.
Defended:
DE
Thesis defense board:
DB
President: Dr Nataša Krejić,
Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
Member: Dr Zorana Lužanin,
Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
Member: Dr Dragoslav Herceg,
Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad