Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku

Stefan Tošić

Primena Thieleove diferencne i diferencijalne jednačine u životnom osiguranju

Master rad

Mentor:

Prof. dr Dora Seleši

2017, Novi Sad

Predgovor

Još na master studijama dok sam slušao predavanja iz predmeta Aktuarska matematika, zainteresovao sam se za ovu široku i vrlo zanimljivu oblast matematike.
Osnovna ideja ovog master rada jeste da izvede matematički model koji će biti u stanju da odgovori na neka od osnovnih pitanja vezanih za tržište životnog osiguranja. Sa jedne strane model se bavi računanjem matematičke rezerve, čiji nivo svako osiguravajuće društvo teži da odredi što preciznije u cilju održanja sopstvene solventnosti, dok se sa druge strane model, bazirajući se na principu ekvivalentnosti, bavi i vrednovanjem polisa životnog osiguranja, za koje smo prethodno izračunali matematičku rezervu.
Ideja modela se zasniva na modeliranju verovatnoća stanja u kojima se osiguranik može naći u budućnosti, što je zapravo osnovna nepoznanica svake polise osiguranja. Kao jednostavan i efikasan način kojim se te verovatnoće mogu opisati nameću se lanci Markova, na kojima će model najviše i biti zasnovan, tako da se prvi deo rada bavi definisanjem osnovnih pojmova iz matematičke i stohastičke analize koji su nam neophodni za dalji rad.
U radu lance Markova posmatramo na dva načina, kroz diskretno vreme i kroz neprekidno vreme. U zavisnosti od toga model nam daje različite jednačine za računanje premija i rezervi. U diskretnom slučaju dobijamo Thieleovu diferencnu jednačinu dok u neprekidnom slučaju dolazimo do Thieleove diferencijalne jednačine. Jednačine su dobile ime po danskom astronomu, matematičaru i pioniru aktuarstva Thorvaldu N. Thieleu, koji ih je prvi izveo i primenio. Shodno tome, centralni deo rada se bavi izvođenjem pomenutih jednačina, kroz analizu diskretnog i neprekidnog slučaja.
Dobijene Thieleove jednačine imaju potrebnu fleksibilnost, tj. dozvoljavaju razne modifikacije koje mogu imati polise osiguranja. Tako se lako u model mogu ubaciti stvari kao npr. period čekanja kod invalidskog osiguranja, kao i različiti stepeni invalidnosti (trajni ili privremeni invaliditet), sigurni periodi otplate kod penzijskog osiguranja, razni tipovi nastanka smrti (prirodna smrt ili nesrećan događaj) kod klasičnog životnog osiguranja, itd. S tim u vezi u radu će kroz rešavanje primera biti analizirano dosta ovakvih slučajeva.

Kako je eksplicitno rešavanje Thieleovih jednačina, kako diferencnih tako i diferencijalnih, za pojedine polise osiguranja, gotovo nemoguće, ili zahteva previše vremena, u radu ćemo koristiti numeričke metode za rešavanje istih. Konkretno, za rešavanje (sistema) početnih problema dobijenih Thieleovih diferencijalnih jednačina koristimo postupak Runge-Kutta reda 4 uz pomoć programskog paketa MatLab.
Nakon izvođenja jednačina, na nekoliko primera polisa životnog osiguranja oba tipa Thieleovih jednačina su primenjena, rezultati su izloženi, kao i upoređivanje istih uz razne komentare.
Prilikom pisanja rada, trudio sam se da rad bude što razumljiviji, ne toliko matematički rigidan, međutim da bi se rad razumeo neophodna su osnovna znanja iz analize, teorije verovatnoće, i teorije mere, što siguran sam poseduju potencijalni čitaoci.

U ovom trenutku želeo bih da se zahvalim osobama koje su mi pomogle da napišem rad i učinim ga što boljim i sadržajnijim. Moja posebna zahvalnost ide profesorici Dori Seleši, koja mi je bila mentor prilikom izrade rada i odličan profesor tokom studija. Zatim, članovima komisije profesoru Marku Nedeljkovu, i profesorici Nataši Krklec-Jerinkić zbog korisnih saveta i sugestija. Veliku zahvalnost dugujem kolegi Manojlu Vukoviću kao i drugim kolegama sa fakulteta, zbog iskrenog i sadržajnog prijateljstva, ogromne podrške u učenju tokom studija kao i izrade master rada.
Na kraju, najveću zahvalnost dugujem svojom roditeljima, ocu Milošu i majci Vesni, zbog beskrajne i bezrezervne podrške i ljubavi koju mi svakodnevno pružaju.

Novi Sad, april 2017.

Stefan Tošić

Sadržaj

Glava 1

Osnovno o životnom osiguranju

1.1 Uvod

Tržište životnog osiguranja je danas u svetu dosta široko i razvijeno. Ponuda polisa životnog osiguranja je dosta raznovrsna, što se može videti već na prvi pogled ulaskom na sajt bilo kog osiguravajućeg društva.
Pokušaću da na dva karakteristična primera iz sveta oko nas objasnim smisao i potrebu za ovom vrstom osiguranja.
Naime, svako od nas se često nađe pred dilemom da li zarađeni novac potrošiti sada i prepustiti se trenutnom hedonizmu, ili izvesni deo zarade koji nam nije neophodan za svakodnevni život, "odložiti na stranu", tj. uštedeti i na neki način osigurati budućnost. Jedna od mogućnosti jeste da u radno sposobnom dobu uplaćujemo penziono osiguranje, koje predstavlja jedan od najrasprostranjenijih vidova životnog osiguranja, i tako se obezbedimo za godine kada više nećemo biti radno aktivni.
Primetimo da penzija nije klasičan vid štednje, već da nosi izvesni nivo rizika u sebi. U klasičnom slučaju penzija se prima nakon određene godine u kasnijem životnom dobu, pa sve do smrti. Kada počnemo da uplaćujemo penziono osiguranje, mi ne znamo da li ćemo dočekati da nam se uloženi novac vrati u starosti ili ne, dok se kod depozita u banci zna do kada je oročen, ili ukoliko kupimo obveznice neke države ili kompanije, tačno se zna kada one dospevaju. Kod osiguranja, to nije slučaj.
Razmotrimo sada drugi primer, koji pokazuje potrebu za jednim drugim tipom životnog osiguranja.
Posmatrajmo osobu koja ima 45 godina, u braku je, ima dvoje dece na univerzitetu, i nezaposlenog supružnika. Takođe, njena mesečna primanja su opterećena kreditom. Jedna od prvih stvari koju bi većina nas primetila jeste da bi iznenadna smrt posmatrane osobe egzistencijalno ugrozila njenu

porodicu. Posledice bi bile gubitak stana i nemogućnost nastavka daljeg školovanja dece.
Svaka odgovorna osoba će imajući u vidu moguće posledice, pokušati da stvari na neki način predupredi. Jedno od potencijalnih rešenja jeste da se ta osoba životno osigura. Šta to znači?
U slučaju smrti, porodica bi dobila određenu svotu novca i tako bila zbrinuta egzistencijalno bar za izvesno vreme. Polisa životnog osiguranja koja nudi takvu mogućnost naziva se riziko životno osiguranje.
Kod ovakvog tipa osiguranja mi se osiguravamo od smrti za određeni broj godina unapred, gde nam polisa u slučaju smrti garantuje izvesnu svotu novca, dok mi za svo to vreme plaćamo premije.
Napomenimo da ako osigurana osoba ostane živa, novac koji je dala za premije ostaje trajno izgubljen. Međutim u ovom slučaju satisfakcija joj je činjenica da je ostala živa, i svo to vreme bila u mogućnosti da vraća kredit, školuje decu itd.
Kako postoje osobe koje ne bi baš volele da izgube sav taj novac od premija, već da ipak jedan deo povrate, one će se radije odlučiti za trajno životno osiguranje, koje isplaćuje garantovanu svotu novca kad god da osiguranik umre. Primetimo u ovom slučaju, premija će biti dosta viša, jer se osiguravajuće društvo obavezalo da će sigurno u jednom trenutku novac isplatiti.
Na osnovu ova dva primera, možemo zaključiti da je životno osiguranje jedan vid klađenja, gde u početnom trenutku osiguranik i osiguravajuće društvo potpisuju ugovor u kome se obavezuju na niz obaveza kao što su visina premije, visina benefita itd.
Ono što nismo uzimali u obzir do sad u pomenuta dva primera a o čemu će biti u nastavku reči, jesu egzaktne cifre tj. ako želimo da kupimo polisu riziko životnog osiguranja na 20 godina, a mi u datom trenutku imamo 40 godina, koja nam u slučaju smrti garantuje 50.000 novčanih jedinica, postavlja se pitanje koliko to košta, kolika će nam biti premija?
Odgovari na ova pitanja nisu očigledni i jednostavni. Da bi odgovorili na njih napravićemo model koji će opisivati svaku od na tržištu ponuđenih polisa, pa će nam taj model zapravo dati odgovore na postavljena pitanja.
Kako životno osiguranje nije isto kao većina proizvoda na tržištu jer se u toku života kupuje najviše jednom ili dva puta, moramo sa dodatnom pažnjom pristupiti pravljenju pomenutog modela.
Osigurani period je uvek budućnost, pa je neophodno vršiti računanje cene osiguranja preko predviđanja situacija koje se potencijalno mogu dogoditi.
U nastavku glave navešćemo neke tipove i klasifikacije životnog osiguranja kao i opšti model za životno osiguranje koji će nam biti nulta tačka za dalji rad.

1.2 Klasifikacija i neki tipovi životnog osiguranja

Svaka polisa osiguranja ima svoj predmet osiguranja, kod polisa životnog osiguranja predmet osiguranja je strogo povezan sa životom (zdravljem) osiguranika. Stoga na osnovu te činjenice može se izvršiti sledeća klasifikacija polisa životnog osiguranja:

- osiguranje na život i smrt
- osiguranje na invaliditet
- zdravstveno osiguranje

Za osiguranja na život i smrt predmet osiguranja je život odnosno smrt osiguranika. Glavni događaj je da li je došlo do smrti ili ne u posmatranom vremenskom intervalu na koji se polisa odnosi. Dalje se ove vrste osiguranja mogu klasifikovati po tome kako je smrt nastupila, npr. da li od retke bolesti, ili u saobraćajnoj nesreći itd.
Za invaliditet, predmet osiguranja je radna sposobnost osiguranika, pa je glavni događaj da li je došlo do pojave invaliditeta u posmatranom periodu ili ne. Takođe, ako je došlo do invaliditeta, pitanje je da li je stepen invaliditeta dovoljan da bi ga pokrila polisa.
Za zdravstveno osiguranje, isplata zavisi od zdravstvenog stanja osiguranika, poznate polise ovog tipa su npr. osiguranje koje pokriva troškove skupih operacija, ili trajna nega koja je neophodna ako postanemo nesposobni za obavljanje osnovnih životnih potreba (npr. ne možemo da se sami obujemo) i druge.
Ako se dogodi predmet osiguranja, životno osiguranje se može klasifikovati i po tome da li će se dobit osiguraniku isplatiti u anuitetima (npr. kod penzije) ili jednokratnom sumom (npr. riziko životno osiguranje).
U nastavku dajemo neke tipove životnih osiguranja.

Penzija: Penzija predstavlja vrstu životnog osiguranja kod koga se osiguravajuće društvo obavezuje da će nakon određene godine koju osiguranik doživi, isplaćivati redovne mesečne, kvartalne ili godišnje anuitete do kraja života osiguranika. Ukoliko osiguranik umre pre godine nakon koje bi trebalo da prima anuitete, osiguravajuće društvo nema nikakve obaveze. Zato je moguće dogovoriti tzv. minimalni period plaćanja, pa ako dođe do prerane smrti, društvo je dužno da penziju daje za taj dogovoreni period. Međutim, ovakva korekcija, jasno, dovodi do povećanja cene polise.
Riziko/Trajno životno osiguranje: Riziko životno osiguranje isplaćuje dobit ako osiguranik umre do polisom definisanog trenutka, ako pak doživi

taj trenutak osiguranik ne dobija nikakvu naknadu.
Sa druge strane trajno životno osiguranje donosi dobit nezavisno od godine starosti u kojoj će osiguranik umreti.
Osiguranje doživljenja: Osiguranje doživljenja je zapravo suprotnost riziko životnom osiguranju. Ovo osiguranje donosi dobit u slučaju da osiguranik ostane živ do polisom definisanog trenutka, ako umre do tog trenutka ne dobija nadoknadu.
Mešovito osiguranje: Mešovito osiguranje je danas veoma popularno, u sebi sadrži riziko životno osiguranje i osiguranje doživljenja, što znači da donosi dobit i u slučaju prerane smrti osiguranika ali i u slučaju doživljenja.
Penzija udovice: Penzija udovice je povezana sa životima dve osobe, za razliku od prethodno pomenutih polisa koje su se ticale samo jedne. Ovde imamo osiguranika (npr. suprug) i korisnika osiguranja (npr. supruga). Sve dok je bar jedna od posmatranih osoba živa, društvo je dužno da isplaćuje penziju. Kao i kod obične penzije, i ovde se može dogovoriti minimalni period plaćanja.
Penzija za siroče: Ovaj tip penzije povezuje jednog roditelja sa detetom, pa se penzija detetu aktivira onog trenutka kada dođe do smrti osiguranog roditelja, i traje do polisom definisane godine života deteta.
Osiguranje dva života: Kod osiguranja dva života, kao u slučaju penzije udovice ili penzije za siroče, razmatraju se dve osobe, samo sada proizvoljne, ne moraju biti u srodstvu. Jasno je da su dva prethodno pomenuta osiguranja specijalan slučaj osiguranja na dva života.

Prethodno nabrojana osiguranja su osiguranja na život i smrt. U nastavku dajemo i par osiguranja invaliditeta, koji takođe imaju veliki udeo na tržištu.
Invalidska penzija: Invalidska penzija u slučaju da dođe do invaliditeta kod osiguranika obezbeđuje isplatu anuiteta dok osiguranik ne napuni polisom definisani broj godina, ili dok ponovo ne postane aktivan, ili dok ne umre.
Riziko invalidsko osiguranje: Riziko invalidsko osiguranje je tip osiguranja sličan riziko životnom osiguranju, naime ova polisa donosi dobit u obliku ukupne sume ako osiguranik do trenutka definisanog u polisi zadobije definisani oblik invaliditeta.
Invalidska penzija za siroče: Invalidska penzija za siroče je potpuno ekvivalentna penziji za siroče, samo je ovde roditelj osiguran od invalidnosti.

Do sada smo govorili o nekim klasifikacijama i tipovima osiguranja koja su najprepoznatljivija na tržištu. Sada ćemo nešto reći o načinima na koje osiguranik može platiti polisu. Generalno, postoje dva načina koji su podjednako zastupljeni:

- plaćanje premijama, koje mogu biti mesečne, kvartalne, godišnje, itd.
- plaćanje jednokratnom sumom

Obično, mada ne uvek, polise sadrže obe mogućnosti plaćanja, pa je na osiguraniku da izabere koja mu opcija više odgovara.
Prilikom vrednovanja polisa, vodićemo se principom ekvivalencije. Šta to znači?
Po principu ekvivalencije, vrednost ukupno naplaćenih premija od polise, i vrednost ukupno isplaćenih dobiti koje garantuje polisa, moraju biti jednake u trenutku izdavanja polise. Kako mi ne znamo šta će se desiti u budućnosti, cilj nam je da predvidimo sa kojim će se verovatnoćama osiguranik kretati iz stanja u stanje, kako bi ocenili očekivani iznos isplate dobiti, a zatim i premija.

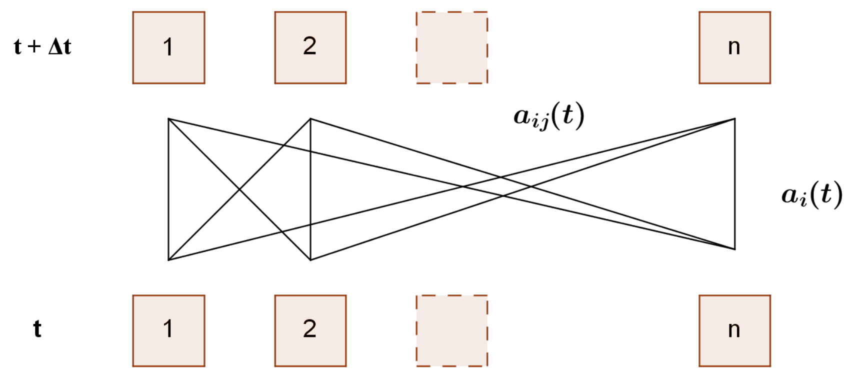
1.3 Model osiguranja

Kako želimo da napravimo model koji će najbolje opisivati svet osiguranja, u ovom odeljku trudimo se da predstavimo osnovnu ideju na kojoj se bazira naš budući model. Slika 1.1. tu ideju i ilustruje. Ako posmatramo osobu koja je osigurana proizvoljnom polisom osiguranja ona u trenutku t može biti u nekom od stanja $1, 2, ..., n$. Šta predstavljaju ova stanja? Stanje 1 može značiti npr. da je osiguranik živ i aktivan, dok stanje 2 da je neaktivan[1], sve zavisi o kojoj se polisi osiguranja radi. Vidimo da je stanje u kome se osiguranik nalazi u konkretnom trenutku t zapravo slučajna promenljiva. Dok, ako uključimo i protok vremena dobijamo stohastički proces, za koji važi $X_t(\omega) \in \{1, 2, ..., n\}$. Ovaj stohastički proces za svako t je zapravo slučajna promenljiva koja daje verovatnoće sa kojima se osiguranik u tom trenutku nalazi u nekom od stanja $1, 2, ..., n$.
Na slici se nalaze i oznake za dve funkcije $a_i(t)$ i $a_{ij}(t)$. Šta one predstavljaju? Funkcija $a_i(t)$ odgovara vertikalnim linijama na slici, i ona označava dobit za osiguranika ako osiguranik ostane u trenutku t u stanju i. To može na primer biti funkcija isplate penzija, pa ako smo penzioner, penziju ćemo primiti u trenutku t ako smo u tom trenutku živi, a ako primamo invalidsku penziju, primićemo je u trenutku t ako smo u tom trenutku osoba sa invaliditetom. Sa druge strane funkcija $a_{ij}(t)$ odgovara kosim linijama na slici, i označava plaćanja osiguraniku ako on u trenutku t pređe iz stanja i u stanje j. Na primer ako osiguranik umre u trenutku t, on je zapravo tada prešao iz stanja živ u stanje mrtav, te naša funkcija predstavlja dobit koju je osiguravajuće

[1] U radu namerno ne koristimo reč "invalid", zbog svoje osetljivosti, već ili neaktivan ili osoba sa invaliditetom

društvo obavezno da plati.

Primetimo još da stohastički proces $(X_t)_{t \in T}$ može biti posmatran na vre-



Slika 1.1: Model osiguranja

menskom intervalu koji je podskup skupa $\mathbb{R}$, ali takođe skup T može biti i podskup skupa $\mathbb{N}$. Razlika je u tome što se u prvom slušaju posmatra model kroz neprekidno vreme, a u drugom slučaju model kroz diskretno vreme. U nastavku razmatramo oba slučaja.

Definicija 1.3.1. *(Skup stanja) Kako svaka polisa osiguranja definiše svoj skup stanja, taj skup ćemo označavati sa S.*

Primer 1.3.1. Za riziko životno osiguranje ili za penziju, skup stanja je dat sa $S = \{*, \circledast\}$, gde $*$ označava stanje živ (aktivan), a $\circledast$ stanje mrtav.

Primer 1.3.2. Kod invalidskog osiguranja skup stanja je sledeći, živ (aktivan), neaktivan, i mrtav, ili u oznaci $S = \{*, \circledast, \circledcirc\}$, gde $\circledcirc$ označava da je osiguranik u stanju neaktivan.

Pošto smo uveli pojam skupa stanja, sada možemo dosta preciznije definisati funkcije $a_i(t)$ i $a_{ij}(t)$, kako u neprekidnom tako i u diskretnom slučaju.

Definicija 1.3.2.

- *$a_i(t)$ označava sumu plaćanja dobiti osiguraniku do trenutka t ako se on nalazi u stanju i, ova funkcija nam zapravo kaže da je osiguranik već neko vreme u stanju i.*

- $a_{ij}(t)$ *označava sumu plaćanja koja su posledica osiguranikovog prelaska iz stanja* i *u stanje* j.
- $a_i^{Pre}(t)$ *označava plaćanje u trenutku* t*, koje je posledica činjenice da se osiguranik nalazi u stanju* i.
- $a_{ij}^{Post}(t)$ *označava plaćanje koje je posledica činjenice da je osiguranik iz stanja* i *u trenutku* t *prešao u stanje* j *u trenutku t+1.*

Prve dve funkcije se odnose na neprekidno vreme, dok se druge dve odnose na diskretno. Ovde treba uočiti razliku između funkcije $a_i(t)$ i $a_i^{\text{Pre}}(t)$, naime ako osiguranik prima penziju funkcija $a_i(t)$ predstavlja zbir svih penzija koje je do trenutka t osiguranik primio, dok $a_i^{\text{Pre}}(t)$ označava samo veličinu penzije koju je primio u trenutku t. Analogno, zaključujemo šta je razlika između funkcija $a_{ij}(t)$ i $a_{ij}^{\text{Post}}(t)$.
Razmotrimo sve ovo na sledećem primeru.

Primer 1.3.3. Posmatrajmo riziko životno osiguranje na 20 godina, gde osiguranik kupuje polisu sa 30 godina, koja mu donosi dobit ako dođe do smrti od 100.000 novčanih jedinica i za to plaća 500 novčanih jedinica godišnju premiju. Odredimo funkcije plaćanja.

$$a_*(x) = \begin{cases} 0, & \text{ako } x > 30, \\ -\displaystyle\int_{30}^{x} 500dt, & \text{ako } x \in [30, 50], \\ 0, & \text{ako } x > 50, \end{cases}$$

$$a_{*\circledast}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ako } x < 30 \vee x > 50, \\ 100.000, & \text{ako } x \in [30, 50], \end{cases}$$

dok je u diskretnom obliku funkcija data sa,

$$a_*^{\text{Pre}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ako } x < 30 \vee x > 50, \\ -500, & \text{ako } x \in [30, 50]. \end{cases}$$

Primetimo da između funkcija $a_{*\circledast}(x)$ i $a_{*\circledast}^{\text{Post}}(x)$ nema razlike.

Glava 2

Teorijski uvod

U prethodnoj glavi rekli smo opšte o životnom osiguranju, najpoznatije tipove i klasifikacije. Takođe dali smo baziČnu ideju kako mislimo da modeliramo osiguranje, kao i funkcije plaćanja kojima ćemo modelirati plaćanja osiguranika osiguravajućem društvu, kao i osiguravajućeg društva osiguraniku, u zavisnosti od stanja. U ovoj glavi cilj nam je da se podsetimo nekih definicija i teorema iz stohastičke i matematičke analize, kao i teorije mere koje će nam biti neophodne u nastavku.

2.1 Osnovne definicije

Definicija 2.1.1. *(Skupovi) Koristićemo notaciju:*

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{N} \; - \; skup\ prirodnih\ brojeva,\\
&\mathbb{N}_0 \; - \; skup\ prirodnih\ brojeva\ sa\ nulom,\\
&\mathbb{R} \; - \; skup\ realnih\ brojeva,\\
&\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}.
\end{aligned}
$$

Definicija 2.1.2. *(Indikator funkcija) Za $A \subset \Omega$ definišemo indikator funkciju $\chi_A(\omega)$ sa*

$$\chi_A(\omega) := \begin{cases} 1, & ako\ \omega \in A, \\ 0, & ako\ \omega \notin A. \end{cases}$$

Definicija 2.1.3. *(Kroneckerova delta) Kroneckerova delta je definisana sa*

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & ako\ i = j, \\ 0, & ako\ i \neq j. \end{cases}$$

Definicija 2.1.4. *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$, funkcija f se naziva malo o od t, $o(t)$, ako važi*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{t} = 0.$$

Definicija 2.1.5. *(Funkcija ograničene varijacije) Neka je $I \subset \mathbb{R}$ ograničen interval. Za funkciju*

$$f : I \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto f(t)$$

totalna varijacija na intervalu I je definisana sa

$$V(f, I) = \sup \sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)|,$$

gde je supremum uzet po svim particijama intervala I koje zadovoljavaju

$$a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq ... \leq a_n \leq b_n.$$

Ako je $V(f, I)$ konačna vrednost, funkciju f nazivamo funkcijom ograničene varijacije.

Neke osobine funkcije ograničene varijacije mogu se naći u knjizi [17], ali biće reči i u nastavku rada.

Definicija 2.1.6. *(Prostor verovatnoća) Prostor verovatnoća koji zadovoljava aksiome Kolmogorova označavaćemo sa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.*

Neka je $(X, \mathcal{M})$ merljiv prostor gde je X skup a $\mathcal{M}$ σ-algebra na X. Borelova σ-algebra na skupu realnih brojeva se označava sa $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Definicija 2.1.7. *(Slučajna promenljiva) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća. Merljiva funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$, pri čemu se na $\mathbb{R}$ podrazumeva Borelova σ-algebra $\mathcal{B}$, naziva se slučajna promenljiva.*

Definicija 2.1.8. *(Stohastički proces) Neka je $\{X_t : t \in T\}$ familija slučajnih promenljivih takvih da važi*

$$X_t : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to (\mathcal{S}, \mathcal{M}), \quad \omega \mapsto X_t(\omega).$$

Tada tu familiju nazivamo stohastički proces na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, sa skupom stanja $\mathcal{S}$.

Definicija 2.1.9. *Neka je X slučajna promenljiva na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ σ-algebra. Tada označimo sa:*

$E[X]$*-očekivanje slučajne promenljive X,*
$D[X] = Var[X]$*-disperzija slučajne promenljive X,*
$E[X|\mathcal{A}]$*-uslovno očekivanje od X u odnosu na $\mathcal{A}$.*

Definicija 2.1.10. *Neka je* $(X_t)_{t\in T}$ *stohastički proces na* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *koji uzima vrednosti iz skupa* $\mathcal{S}$*, koji je prebrojiv. Definišimo za* $j \in \mathcal{S}$ *indikator funkciju u odnosu na proces* $(X_t)_{t\in T}$ *u vremenu* t *sa*

$$I_j(t)(\omega) := \begin{cases} 1, & ako\ X_t(\omega) = j, \\ 0, & ako\ X_t(\omega) \neq j. \end{cases}$$

Analogno, definišemo za $j, k \in \mathcal{S}$ *broj skokova iz* j *u* k *u vremenskom intervalu* $(0, t)$ *sa*

$$N_{jk}(t)(\omega) = Card\{\tau \in (0,t) : X_{\tau^-} = j\ i\ X_\tau = k\}.$$

Napomena 2.1.1. *U našem modelu* $I_j(t)$ *se može koristiti da bi se proverilo da li je osiguranik u stanju* j *dok prelazak iz* j *u* k *može biti vidljiv povećanjem* $N_{jk}(t)$ *za 1.*

Navedimo neke primere stohastičkih procesa koji su najpoznatiji.

Definicija 2.1.11. *Stohastički proces* X_t *se zove proces prebrajanja ako za svako* $t \in [t_0, T]$, X_t *predstavlja broj događaja koji su se realizovali do trenutka* t*, uključujući i* t*.*

Definicija 2.1.12. *Proces prebrajanja* $\{X_t,\ t \geq 0\}$ *se zove Poissonov proces sa stopom rasta* λ, $\lambda > 0$*, ako važi:*

- $X_0 = 0$,
- *Proces ima nezavisne priraštaje,*
- *Broj događaja koji se dese u proizvoljnom intervalu dužine* t *ima Poissonovu raspodelu sa očekivanjem* λt *tj. važi*

$$P\{X_{s+t} - X_t = n\} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Poissonon proces je vrlo rasprostranjen u praksi, sa njim se može modelirati dosta pojava, u osiguravajućim društvima Poissonov proces se koristi kako bi opisali broj prispelih polisa koje treba da budu isplaćene.
Navešćemo još jedan poznat stohastički proces, takođe jako koristan u modeliranju mnogih pojava u prirodi i društvu. To je Brownovo kretanje.

Definicija 2.1.13. *Stohastički proces* $\{W_t,\ t \geq 0\}$ *se zove Brownovo kretanje ako zadovoljava sledeće uslove:*

- $W_0 = 0$ *skoro svuda,*
- *Priraštaji* $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots$ *za* $0 < t_1 < t_2 < \ldots$ *su nezavisni,*

- $W_t - W_s : \mathcal{N}(0, t-s) \quad 0 < s < t.$

Pomenuta dva procesa, Brownovo kretanje i Poissonov proces jesu značajna, međutim stohastički proces koji je krucijalan za naš rad je Markovski proces tj. lanac Markova.
O tome govori sledeći odeljak ove glave.

2.2 Lanci Markova

U nastavku pretpostavljamo da je definisani skup stanja prebrojiv.

Definicija 2.2.1. *Neka je $(X_t)_{t\in T}$ stohastički proces na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$sa skupom stanja $\mathcal{S}$ i $T \subset \mathbb{R}$. Proces X se naziva lanac Markova ako za sve*

$$n \geq 1,\ t_1 < t_2 < \ldots < t_{n+1} \in T,\ i_1, \ldots, i_{n+1} \in \mathcal{S},$$

za koje je

$$P[X_{t_1} = i_1, \ldots, X_{t_n} = i_n] > 0,$$

važi

$$P[X_{t_{n+1}} = i_{n+1} | X_{t_k} = i_k,\ \forall k \leq n] = P[X_{t_{n+1}} = i_{n+1} | X_{t_n} = i_n].$$

Napomena 2.2.1.

- *Definicija kaže da verovatnoća da se u trenutku t_{n+1} nađemo u stanju i_{n+1} zavisi samo od toga gde smo bili u prethodnom trenutku. Obično se trenutak t_n interpretira kao sadašnji trenutak, a t_{n+1} kao budući, pa se kaže da to gde ćemo biti u budućnosti zavisi samo od sadašnosti a ne i od prošlosti.*
- *Lanci Markova su prilično upotrebljivi u praksi, u nastavku koristimo ih za modeliranje životnog osiguranja.*

Definicija 2.2.2. *Neka je $(X_t)_{t\in T}$ stohastički proces na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Tada se*

$$p_{ij}(s,t) := P[X_t = j | X_s = i], \quad s \leq t \quad i, j \in \mathcal{S},$$

naziva uslovna verovatnoća da ako smo u trenutku s bili u stanju i, u trenutku t budemo u stanju j.

Sledeća teorema daje jednačinu preko koje se mogu računati uslovne verovatnoće definisane u prethodnoj definiciji.

Teorema 2.2.1. *(Jednačina Chapman-Kolmogorova) Neka je $(X_t)_{t\in T}$ lanac Markova. Za $s \leq t \leq u \in T$, $i, k \in \mathcal{S}$ tako da je $P[X_s = i] > 0$, sledeća jednačina važi*

$$p_{ik}(s,u) = \sum_{j\in\mathcal{S}} p_{ij}(s,t)p_{jk}(t,u),$$

ili u matričnom obliku

$$P(s,u) = P(s,t)P(t,u).$$

Dokaz. Jasno jednačina važi za $t = s$ ili $t = u$. Pa možemo pretpostaviti da je $s < t < u$. Uvedimo oznaku na početku

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^* &= \{j \in \mathcal{S} :\ P[X_t = j | X_s = i] \neq 0\} \\ &= \{j \in \mathcal{S} :\ P[X_t = j, X_s = i] \neq 0\}, \end{aligned}$$

gde druga jednakost važi jer $P[X_s = i] > 0$. Sada imamo

$$\begin{aligned} p_{ik}(s,u) &= P[X_u = k | X_s = i] \\ &= \sum_{j\in\mathcal{S}^*} P[X_u = k, X_t = j | X_s = i] \\ &= \sum_{j\in\mathcal{S}^*} P[X_t = j | X_s = i] P[X_u = k | X_s = i, X_t = j] \\ &= \sum_{j\in\mathcal{S}^*} p_{ij}(s,t)p_{jk}(t,u) \\ &= \sum_{j\in\mathcal{S}} p_{ij}(s,t)p_{jk}(t,u) \end{aligned}$$

$\square$

Definicija 2.2.3. *(Matrica prelaza) Familija verovatnoća $(p_{ij}(s,t))_{(i,j)\in\mathcal{S}\times\mathcal{S}}$ se naziva matrica prelaza ako sledeći uslovi važe:*

1. $p_{ij}(s,t) \geq 0$.
2. $\sum_{j\in\mathcal{S}} p_{ij}(s,t) = 1$.
3. $p_{ij}(s,s) = \begin{cases} 1, & \textit{ako } i = j, \\ 0, & \textit{ako } i \neq j, \end{cases}$ *za* $P[X_s = i] > 0$.
4. $p_{ik}(s,u) = \sum_{j\in\mathcal{S}} p_{ij}(s,t)p_{jk}(t,u)$ *za* $s \leq t \leq u$ *i* $P[X_s = i] > 0$.

Teorema 2.2.2. *Neka je $(X_t)_{t\in T}$ lanac Markova. Tada je $(p_{ij}(s,t))_{(i,j)\in\mathcal{S}\times\mathcal{S}}$ matrica prelaza.*

Teorema 2.2.3. *Stohastički proces* $(X_t)_{t\in T}$ *je lanac Markova, ako i samo ako je*

$$P[X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_n} = i_n] = P[X_{t_1} = i_1] \prod_{k=1}^{n-1} p_{i_k i_{k+1}}(t_k, t_{k+1}) \tag{2.1}$$

za svako

$$n \geq 1,\ t_1 < t_2 < \ldots < t_{n+1} \in T,\ i_1, \dots, i_{n+1} \in \mathcal{S}.$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $(X_t)_{t\in T}$ lanac Markova, tada važi da je

$$P[X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_n} = i_n] = P[X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}] \cdot p_{i_{n-1}i_n}(t_{n-1}, t_n),$$

odakle indukcijom sledi dokaz jednakosti (2.1).
Sa druge strane, ako važi identitet (2.1) imamo da je

$$\begin{aligned} P[X_{t_{n+1}} = i_{n+1} | X_{t_1} = i_1 \dots, X_{t_n} = i_n] &= \frac{P[X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_n} = i_n, X_{t_{n+1}} = i_{n+1}]}{P[X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_n} = i_n]} \\ &= \frac{P[X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_n} = i_n] \cdot p_{i_n i_{n+1}}(t_n, t_{n+1})}{P[X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_n} = i_n]} \\ &= p_{i_n i_{n+1}}(t_n, t_{n+1}). \end{aligned}$$

□

Definicija 2.2.4. *Lanac Markova je homogen ako za svako* $s, t \in \mathbb{R}$, $h > 0$ *i* $i, j \in \mathcal{S}$ *tako da*

$$P[X_s = i] > 0,\ P[X_t = i] > 0,$$

važi

$$P[X_{s+h} = j | X_s = i] = P[X_{t+h} = j | X_t = i].$$

Stoga, za homogene lance Markova možemo definisati:

- $p_{ij}(h) := p_{ij}(s, s+h)$,
- $P(h) := P(s, s+h)$.

Što će reći da su homogeni lanci indiferentni u odnosu na vreme, verovatnoće zavise samo od dužine intervala h, a ne od položaja tog intervala na vremenskoj osi.

2.3 Diferencijalne jednačine Kolgomorova

Definicija 2.3.1. *Neka je $(X_t)_{t\in T}$ lanac Markova sa konačnim skupom stanja $\mathcal{S}$ i $T \subset \mathbb{R}$. Za $N \subset \mathcal{S}$ definišemo*

$$p_{jN}(s,t) := \sum_{k\in N} p_{jk}(s,t).$$

Definicija 2.3.2. *Neka je $(X_t)_{t\in T}$ lanac Markova u neprekidnom vremenu sa konačnim skupom stanja $\mathcal{S}$. $(X_t)_{t\in T}$ je regularan ako su*

$$\mu_i(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{1 - p_{ii}(t, t+\Delta t)}{\Delta t}, \quad za\ sve\ i \in \mathcal{S},$$

$$\mu_{ij}(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{p_{ij}(t, t+\Delta t)}{\Delta t}, \quad za\ sve\ i \neq j \in \mathcal{S},$$

dobro definisane i neprekidne u odnosu na t.

Funkcije $\mu_i(t)$ i $\mu_{ij}(t)$ nazivamo prelazne stope[1]. Takođe, definišemo

$$\mu_{ii}(t) = -\mu_i(t), \quad \text{za sve } i \in \mathcal{S}.$$

Napomena 2.3.1.

- *Primetimo da za prelazne stope važi sledeće*

$$\begin{aligned}\mu_{ij}(t) &= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{p_{ij}(t, t+\Delta t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{p_{ij}(t, t+\Delta t) - p_{ij}(t,t)}{\Delta t} \\ &= \frac{\partial}{\partial s} p_{ij}(t,s)|_{s=t}.\end{aligned}$$

- *$\mu_{ij} dt$ može biti shvaćeno kao verovatnoća (beskonačno mala) prelaska iz stanja i u stanje j u vremenskom intervalu $[t, t+dt]$, dok $\mu_i dt$ predstavlja verovatnoću (beskonačno malu) da napustimo stanje i u intervalu $[t, t+dt]$.*
- *Definišimo,*

$$\Lambda(t) := \begin{bmatrix} \mu_{11}(t) & \mu_{12}(t) & \dots & \mu_{1n}(t) \\ \mu_{21}(t) & \mu_{22}(t) & \dots & \mu_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n1}(t) & \mu_{n2}(t) & \dots & \mu_{nn}(t) \end{bmatrix}.$$

Matrica $\Lambda(t)$ generiše ponašanje lanca Markova.

[1]eng. Transition rates

- *Primetimo da važi jednakost* $\mu_i(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} \mu_{ij}(t)$, *što zajedno sa* $\mu_i(t) = -\mu_{ii}(t)$ *implicira da je* $\sum\limits_{j=1}^{n} \Lambda(i,j)(t) = 0$.

Sada na osnovu prelaznih stopa, i do sada definisanih pojmova možemo dokazati diferencijalne jednačine Kolmogorova.

Teorema 2.3.1. *Neka je* $(X_t)_{t\in T}$ *regularan lanac Markova na konačnom skupu stanja* $\mathcal{S}$. *Tada važe sledeća tvrđenja:*

1. *(Diferencijalna jednačina Kolmogorova unazad)*

$$\frac{\partial}{\partial s} p_{ij}(s,t) = \mu_i(s)p_{ij}(s,t) - \sum_{k\neq i} \mu_{ik}(s)p_{kj}(s,t),$$

$$\frac{\partial}{\partial s} P(s,t) = -\Lambda(s)P(s,t).$$

2. *(Diferencijalna jednačina Kolmogorova unapred)*

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{ij}(s,t) = -p_{ij}(s,t)\mu_j(t) + \sum_{k\neq j} p_{ik}(s,t)\mu_{kj}(t),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P(s,t) = P(s,t)\Lambda(t).$$

Dokaz. Suština dokaza se zasniva na Chapman-Kogmogorov jednačini.

1. Neka je $\Delta s > 0$ i $\xi := s + \Delta s$

$$\begin{aligned}\frac{p_{ij}(\xi,t) - p_{ij}(s,t)}{\Delta s} &= \frac{1}{\Delta s}(p_{ij}(\xi,t) - \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(s,\xi)p_{kj}(\xi,t)) \\ &= \frac{1}{\Delta s}\Big((1 - p_{ii}(s,\xi))p_{ij}(\xi,t) - \sum_{k\neq i} p_{ik}(s,\xi)p_{kj}(\xi,t)\Big) \\ &= \mu_i(s)p_{ij}(s,t) - \sum_{k\neq i} \mu_{ik}(s)p_{kj}(s,t), \quad \Delta s \to 0.\end{aligned}$$

2. Analogno se dokazuje diferencijalna jednačina unapred. Neka je $\Delta t > 0$ i $\xi := t + \Delta t$. Tada,

$$\begin{aligned}\frac{p_{ij}(s,\xi) - p_{ij}(s,t)}{\Delta t} &= \frac{1}{\Delta t}(\sum_{k=1}^{n} p_{ik}(s,t)p_{kj}(t,\xi) - p_{ij}(s,t)) \\ &= \frac{1}{\Delta t}\Big(p_{ij}(s,t)(p_{jj}(t,\xi) - 1) + \sum_{k\neq j} p_{ik}(s,t)p_{kj}(s,\xi)\Big) \\ &= -p_{ij}(s,t)\mu_j(t) + \sum_{k\neq j} p_{ik}(s,t)\mu_{kj}(t), \quad \Delta t \to 0.\end{aligned}$$

□

Definicija 2.3.3. *Neka je $(X_t)_{t\in T}$ regularan lanac Markova na konačnom skupu stanja $\mathcal{S}$. Tada definišemo uslovnu verovatnoću da će lanac ostati u stanju j u vremenu $[s,t]$ sa*

$$p_{jj}(s,t) := P[\bigcap_{\xi\in[s,t]} \{X_\xi = j\}|X_s = j] \tag{2.2}$$

gde $s,t\in\mathbb{R}$, $s\le t$, $j\in\mathcal{S}$.

U okruženju životnog osiguranja ovo može biti tumačeno (interpretirano) kao verovatnoća da osiguranik npr. ostane živ u narednih 10 godina. Sledeća teorema govori kako verovatnoće (2.2) možemo računati preko prelaznih stopa.

Teorema 2.3.2. *Neka je $(X_t)_{t\in T}$ regularan lanac Markova. Tada važi,*

$$p_{jj}(s,t) = \exp(-\sum_{k\neq j}\int_s^t \mu_{jk}(\tau)d\tau).$$

Dokaz. Definišimo $K_j(s,t) := \bigcap_{\xi\in[s,t]} \{X_\xi = j\}$. Neka je $\Delta t > 0$. U dokazu koristimo sledeći identitet

$$P[A\cap B|C] = P[B|C]\cdot P[A|B\cap C].$$

Sada važi,

$$\begin{aligned} p_{jj}(s,t) &= P[K_j(s,t)\cap K_j(t,t+\Delta t)|X_s = j] \\ &= P[K_j(s,t)|X_s=j]\cdot P[K_j(t,t+\Delta t)|\{X_s=j\}\cap K_j(s,t)] \\ &= p_{jj}(s,t)P[K_j(t,t+\Delta t)|X_t = j], \end{aligned}$$

gde smo koristili osnovne osobine lanaca Markova kao i $\{X_s = j\}\cap K_j(s,t) = \{X_t = j\}\cap K_j(s,t)$. Kada malo transformišemo dobijeni identitet dobijamo,

$$\begin{aligned} p_{jj}(s,t+\Delta t) - p_{jj}(s,t) &= -p_{jj}(s,t)(1 - P[K_j(s,t+\Delta t)|X_t = j]) \\ &= -p_{jj}(s,t)(\sum_{k\neq j} p_{jk}(t,t+\Delta t) + o(t)). \end{aligned}$$

Kada obe strane jednakosti podelimo sa Δt i pustimo da $\Delta t\to 0$ dobijamo,

$$\frac{\partial}{\partial t}p_{jj}(s,t) = -p_{jj}(s,t)\cdot\sum_{k\neq j}\mu_{jk}(t).$$

Rešavanjem ove diferencijalne jednačine uz uslov $p_{jj}(s,s) = 1$ dobijamo dokaz teoreme. □

2.4 Primeri

Na primerima koji slede namera nam je da primenimo i bliže objasnimo sve što smo radili do sada u ovoj glavi, i pokušamo da sve to stavimo u kontekst osiguranja.

Primer 2.4.1. Uzmimo u razmatranje riziko životno osiguranje, koje u slučaju smrti osiguraniku garantuje izvesnu sumu novca.
Obično se za modeliranje ovakvih polisa koriste dva stanja (živ, mrtav) ili tri stanja (živ, mrtav (nesrećan slučaj), mrtav (prirodna smrt)). Mi ćemo koristiti dva stanja, pa je naš skup $S = \{*, \circledast\}$. Stopu smrtnosti ćemo modelirati funkcijom

$$s(x) = \exp(-9.13275 + 8.09438 \cdot 10^{-2} \cdot x - 1.1018 \cdot 10^{-5} \cdot x^2).$$

Napomenimo da je u knjigama [6] i [16] korišćena identična funkcija za modeliranje stope smrtnosti, i dobijena je posmatranjem kretanja mortaliteta u Švajcarskim kantonima kroz poslednjih nekoliko decenija.
Funkcija za npr. $x = 45$ ima vrednost,

$$s(45) = 0.004.$$

Ovo se može protumačiti da će prosečno na svakih 1000 45-ogodišnjaka za godinu dana umreti njih 4.
Ako se vratimo malo unazad i prisetimo se šta je zapravo prelazna stopa $\mu_{ij}(t)$, videćemo da se $\mu_{ij}(t)dt$ može interpretirati kao verovatnoća da će osiguranik u vremenu $t + \Delta t$ biti u stanju j ako je u vremenu t bio u stanju i. Šta dobijamo ako pretpostavimo da je $dt = 1$?
Dobijamo sledeću aproksimaciju,

$$\mu_{ij}(t) \approx p_{ij}(t, t+1).$$

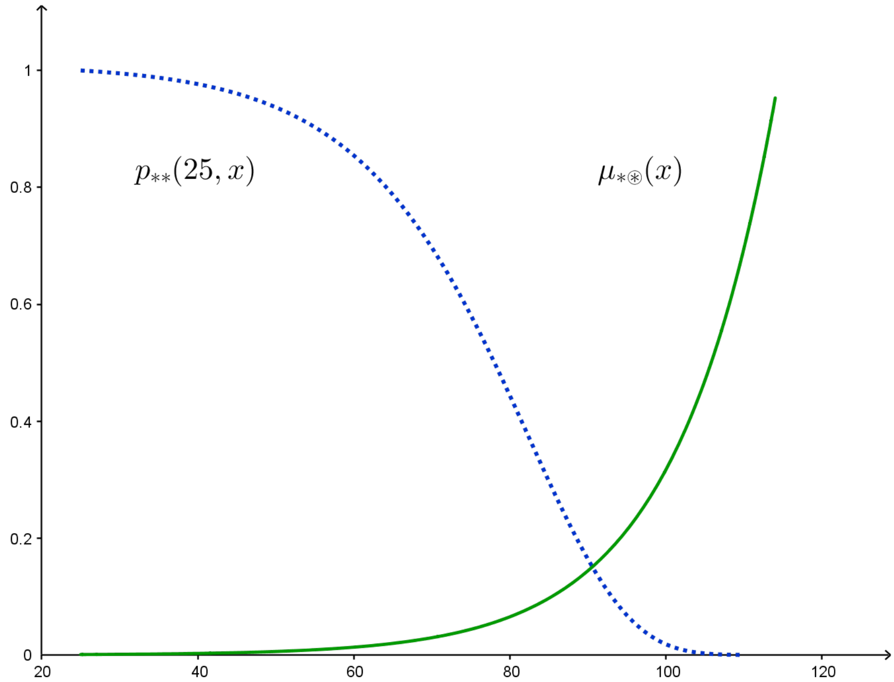
Te možemo koristiti da je

$$\mu_{*\circledast}(t) = \exp(-9.13275 + 8.09438 \cdot 10^{-2} \cdot x - 1.1018 \cdot 10^{-5} \cdot x^2).$$

Izvedimo sada funkciju koja predstavlja stopu preživljavanja za osiguranika koji je star 25 godina. Posmatrajmo jednakost,

$$p_{**}(25, x) = \exp(-\int_{25}^{x} \mu_{*\circledast}(\tau) d\tau), \quad x > 25.$$

Na slici 2.1 je prikazana funkcija stope smrtnosti kao i funkcija stope preživljavanja, za 25 godina starog osiguranika.



Slika 2.1: Verovatnoće $p_{**}(25, x)$ i $\mu_{*\circledast}(x)$

Razmotrimo sada primer sa invalidskim osiguranjem.

Primer 2.4.2. Posmatrajmo invalidsku penziju sa sledeća tri stanja (živ $*$, mrtav $\circledast$, neaktivan $\circledcirc$). Stope smrtnosti, i invalidnosti modeliramo funkcijama

$$\begin{aligned}
\sigma(x) &:= 0.0004 + 10^{0.065x-5.46}, \\
\mu(x) &:= 0.005 + 10^{0.038x-4.12}, \\
\mu_{*\circledcirc}(x) &:= \sigma(x), \\
\mu_{*\circledast}(x) &:= \mu(x), \\
\mu_{\circledcirc\circledast}(x) &:= \mu(x).
\end{aligned}$$

Kao i u prethodnom primeru i ovde prelazne stope interpretiramo kao verovatnoće. Npr. vrednost $\mu_{*\circledcirc}(45)$ posmatramo kao verovatnoću da osiguranik postane neaktivan u svojoj 45. godini. Napomenimo da smo funkcije $\sigma(x)$ i $\mu(x)$ uzeli iz knjiga [6] i [16] gde je korišćeno da one zaista modeliraju stope smrtnosti i invalidnosti. U primeru smo uveli jedno pojednostavljenje, naime nismo modelirali verovatnoću da osiguranik ponovo postane aktivan, već smo pretpostavili da je $\mu_{\circledcirc *}(x) = 0$. Takođe, pretpostavili smo da aktivna osoba i osoba sa invaliditetom imaju istu stopu smrtnosti što u stvarnosti nije

tačno, osobe sa invaliditetom umiru ranije sa većom verovatnoćom od osoba koje su zdrave.
Konstruišimo sada diferencijalne jednačine Kolgomorova za verovatnoće prelaza, na osnovu datih prelaznih stopa.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} p_{**}(s,t) = -p_{**}(s,t) \cdot (\sigma(t) + \mu(t)),\\
&\frac{\partial}{\partial t} p_{*\circledcirc}(s,t) = -p_{*\circledcirc}(s,t)\mu(t) + p_{**}(s,t)\sigma(t),\\
&\frac{\partial}{\partial t} p_{*\circledast}(s,t) = (p_{**}(s,t) + p_{*\circledcirc}(s,t)) \cdot \mu(t),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} p_{\circledcirc *}(s,t) = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial t} p_{\circledcirc\circledcirc}(s,t) = -p_{\circledcirc\circledcirc}(s,t)\mu(t),\\
&\frac{\partial}{\partial t} p_{\circledcirc\circledast}(s,t) = p_{\circledcirc\circledcirc}(s,t)\mu(t),
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{\circledast\circledast}(s,t) = 0.$$

Gde su početni uslovi dati sa,

$$p_{ij}(s,s) = \delta_{ij}.$$

Da bi dobili tražene verovatnoće, sistem diferencijalnih jednačina ćemo rešavati numeričkim putem, koristeći postupak Runge-Kutta[2], i programski paket MatLab za njegovu implementaciju. Za više informacija o postupku Runge-Kuta upućujemo čitaoce na knjigu [4].
Numeričko rešavanje je neophodno jer kada imamo više stanja, pa samim tim i više prelaznih stopa, dobijanje egzaktnog rešenja je gotovo nemoguće.
Posmatrajući sistem diferencijalnih jednačina odmah zaključujemo da je $p_{\circledcirc *}(s,t) = 0$, kao i $p_{\circledast\circledast}(s,t) = 0$. Takođe postoje dva odvojena sistema, sistem za stanje živ (aktivan), i sistem za stanje živ (neaktivan), po tri jednačine za svaki. Na oba sistema[3] je primenjen postupak i u tabelama koje slede su dobijeni rezultati.

[2] Misli se na postupak Runge-Kutta 4. reda

[3] Drugi sistem je trivijalan, i može se doći do egzaktnog rešenja ali ipak dajemo numeričko rešenje, jer u opštem slučaju bi tako radili

Tabela 2.1: Verovatnoće prelaza za stanje $*$

Starost	$p_{**}(25, x)$	$p_{*\odot}(25, x)$	$p_{*\circledast}(25, x)$
25	1	0	0
30	0.9718	0.0030	0.0252
35	0.9433	0.0070	0.0497
40	0.9132	0.0131	0.0737
45	0.8793	0.0236	0.0970
50	0.8371	0.0431	0.1198
55	0.7778	0.0802	0.1421
60	0.6867	0.1496	0.1638
65	0.5442	0.2709	0.1850

Tabela 2.2: Verovatnoće prelaza za stanje $\odot$

Starost	$p_{\odot\odot}(25, x)$	$p_{\odot\circledast}(25, x)$	$p_{\odot *}(25, x)$
25	1	0	0
30	0.9748	0.0252	0
35	0.9503	0.0497	0
40	0.9263	0.0737	0
45	0.9030	0.0970	0
50	0.8802	0.1198	0
55	0.8579	0.1421	0
60	0.8362	0.1638	0
65	0.8150	0.1850	0

Glava 3

Novčani tokovi

3.1 Uvod

U ovoj glavi se upoznajemo sa pojmom novčanog toka, načina na koji možemo vrednovati konkretan novčani tok, i što je najbitnije kako data polisa životnog osiguranja gereriše novčani tok. Na osnovu toga bićemo u stanju da vrednujemo polisu osiguranja u bilo kom vremenskom trenutku, što će nam biti od velike koristi kada budemo računali matematičku rezervu.
Na početku definišemo par pojmova koji su nam kasnije potrebni.

Definicija 3.1.1. *(Diskontni faktor) Neka je i_t kamatna stopa u godini t. Tada je*

$$v_t = \frac{1}{1+i_t}$$

diskontni faktor u godini t.

Definicija 3.1.2. *Intenzitet (kamatne) stope u godini t označavaćemo sa δ_t. Godišnji intenzitet stope i_t zadovoljava jednačinu*

$$e^{\delta_t} = 1 + i_t.$$

Definicija 3.1.3. *Neka je $\delta(t)$ intenzitet stope u trenutku t, tada je diskontni faktor u godini t dat sa*

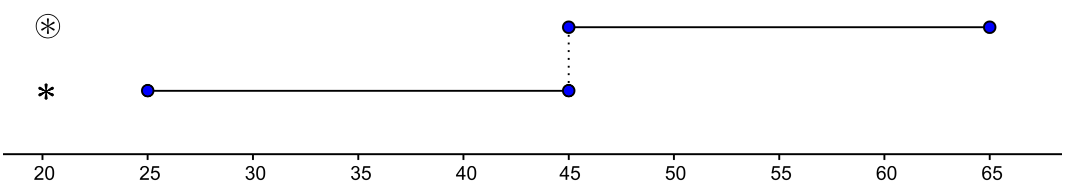
$$v_t = \exp(-\int\limits_t^{t+1} \delta(\xi)d\xi),$$

dok je diskontni faktor za početni trenutak dat sa

$$v(t) = \exp(-\int\limits_0^{t} \delta(\xi)d\xi).$$

U primerima koji su pred nama definišemo put stanja za konkretnu polisu.

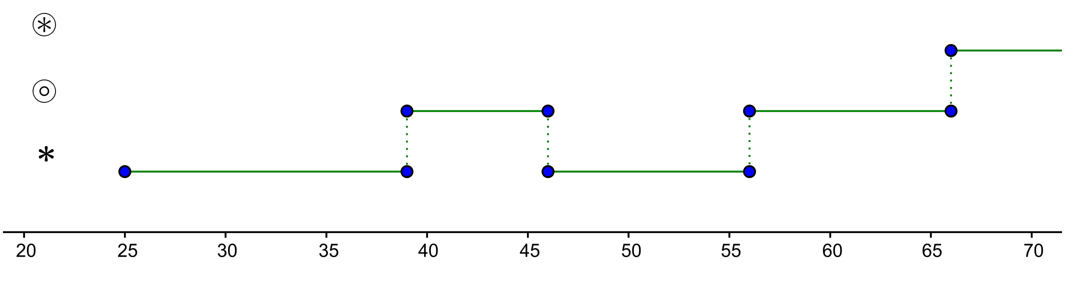
Primer 3.1.1. Ako imamo polisu riziko životnog osiguranja, osiguranik može biti u dva stanja koja direktno utiču na polisu, u stanju živ i u stanju mrtav. Naš skup stanja za ovu polisu izgleda $S = \{*, \circledast\}$. Pretpostavimo da osiguranik umire u svojoj 45. godini, da je kupio polisu u svojoj 25. godini, i da osiguranje važi narednih 40 godina. Put stanja polise, koja ima ovakav tok, dat je na slici 3.1.



Slika 3.1: Put stanja

Primetimo da je pomenuti tok stanja samo jedan od mogućih razvoja događaja za ovu polisu, osiguranik je sa pozitivnom verovatnoćom mogao umreti u bilo kojoj godini svog života, 26., 55., itd.

Primer 3.1.2. Posmatramo polisu koja ima put stanja kao na slici 3.2, gde je $S = \{*, \circledcirc, \circledast\}$. Ovo je polisa doživotnog invalidskog osiguranja, sa mogućnošću reaktivacije osiguranika, tj. $\mu_{\circledcirc *} \neq 0$.



Slika 3.2: Put stanja

Sledeće što ćemo uraditi jeste povezivanje puta stanja sa novčanim iznosima koje osiguranik prima jer se nalazi u konkretnom stanju, ili u tranziciji između dva stanja.

3.2 Deterministički novčani tokovi

Definicija 3.2.1. *(Funkcija plaćanja) Deterministička funkcija plaćanja je funkcija*

$$A : T \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto A(t),$$

gde je $T \subset \mathbb{R}$, sa sledećim osobinama:

1. *A je neprekidna sa desne strane,*
2. *A je funkcija ograničene varijacije.*

Vrednost $A(t)$ se može interpretirati kao sva plaćanja osiguravajućeg društva osiguraniku do trenutka t.

Napomena 3.2.1. *Dajemo par činjenica o funkcijama ograničene varijacije:*

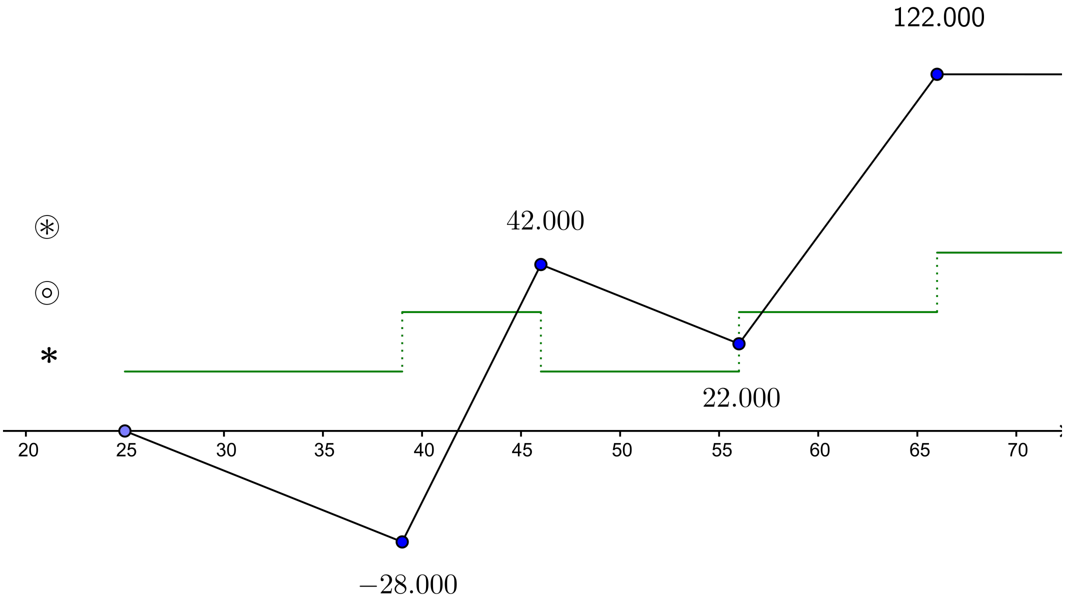
1. *Funkcija ograničene varijacije A definiše naboj na Borelovoj σ-algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ovaj naboj se naziva još i Lebesque-Stieltjesov naboj, međutim u našem kontekstu to će biti mera isplate osiguraniku.*
2. *Neka je A funkcija ograničene varijacije na $\mathbb{R}$. Znamo da se ona može podeliti na dve pozitivne, neopadajuće funkcije B i C tako da važi $A = B - C$. Mi to možemo u našoj priči interpretirati na sledeći način, B predstavlja isplate društva osiguraniku u vidu dobiti, a C isplate osiguranika društvu u vidu premija.*
3. *Ako je A funkcija ograničene varijacije i $T \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Tada je i $A \cdot \chi_T$ takođe funkcija ograničene varijacije.*

Definicija 3.2.2. *(Dekompozicija mere) Neka je A funkcija ograničene varijacije sa odgovarajućim Lebesque-Stieltjesovim nabojem μ_A.*
Znamo da se definisani naboj može dekomponovati tako da važi $\mu_A = \mu_B - \mu_C$, gde su μ_B i μ_C Lebesque-Stieltjesove mere. Stoga definišemo:

1. *A^+ kao Lebesque-Stieltjesovu funkciju pridruženu meri μ_B.*
2. *A^- kao Lebesque-Stieltjesovu funkciju pridruženu meri μ_C.*

Primer 3.2.1. Vratimo se na primer (3.1.2), pretpostavimo da je invalidska penzija 10.000 novčanih jedinica godišnje, sa premijama od 2.000 novčanih jedinica godišnje. Funkcija plaćanja data je na slici koja sledi.

Definicija 3.2.3. *(Vrednost novčanog toka) Neka je A deterministički novčani tok, i $t \in \mathbb{R}$.*



Slika 3.3: Funkcija plaćanja

1. *Vrednost novčanog toka u trenutku t definišemo kao*

$$V(t,A) := \frac{1}{v(t)} \int\limits_0^\infty v(\tau)dA(\tau). \tag{3.1}$$

2. *Vrednost budućeg novčanog toka definišemo kao*

$$V^+(t,A) := V(t, A \cdot \chi_{[t,\infty)}). \tag{3.2}$$

Primer 3.2.2. Hoćemo da izračunamo vrednost $V^+(t,A)$ za novčani tok definisan u primeru 3.1.2. Neka je dato $\delta(t) = \ln(1.04)$, prvo ćemo izračunati A^+ i A^-:

$$\begin{aligned} dA^+ &= 10.000(\chi_{[39,46)} + \chi_{[56,66)})d\tau, \\ dA^- &= 2.000(\chi_{[25,39)} + \chi_{[46,56)})d\tau. \end{aligned}$$

Dalje, primenom formula (3.1) i (3.2) za $t \in [25, +\infty)$ dobijamo,

$$\begin{aligned} V^+(t, A) &= V^+(t, A^+) - V^+(t, A^-) \\ &= \frac{1}{v(t)} \int_t^\infty v(\tau) dA^+ - \frac{1}{v(t)} \int_t^\infty v(\tau) dA^- \\ &= 10.000 \int_t^\infty (1.04)^{-(\tau - t)} (\chi_{[39,46)} + \chi_{[56,66)}) d\tau \\ &- 2.000 \int_t^\infty (1.04)^{-(\tau - t)} (\chi_{[25,39)} + \chi_{[46,56)}) d\tau. \end{aligned}$$

3.3 Stohastički novčani tokovi

U prethodnom odeljku smo se upoznali sa determinističkim novčanim tokovima. To bi nam bilo dovoljno da znamo unapred kada će doći do smrti ili povrede kod osiguranika, tj. kad bi znali unapred put stanja. Kako to ne možemo da znamo, moramo definisati stohastičke novčane tokove.

Definicija 3.3.1. *(Stohastički novčani tokovi) Stohastički novčani tok ili stohastički proces ograničene varijacije je stohastički proces* $(A_t)_{t \in T}$ *kome su skoro sve trajektorije funkcije ograničene varijacije.*

Neka je A stohastički proces ograničene varijacije tako da je $t \mapsto A_t(\omega)$ funkcija sa desna neprekidna i rastuća za sve $\omega \in \Omega$. Tada ako je $f(t)$ ograničena Borelova funkcija, možemo izračunati integral

$$\int f(\tau) d\mu_{A.(\omega)}(\tau).$$

Slično, ako je $F_t = f(t, \omega)$, funkcija merljiva u odnosu na proizvod σ-algebri, tada postoji integral

$$\int f(\tau, \omega) d\mu_{A.(\omega)}(\tau).$$

Isto će važiti i za procese ograničene varijacije, jer trajektorije možemo dekomponovati.

Definicija 3.3.2. *Neka je* $(A_t)_{t \in T}$ *proces ograničene varijacije na* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *i* $F : \mathbb{R} \times \Omega \mapsto \mathbb{R}$ *ograničena i merljiva funkcija u odnosu na proizvod* σ*-algebri. Tada na osnovu prethodne analize definišemo*

$$(F \cdot A)_t(\omega) = \int_0^t F(\tau, \omega) dA_\tau(\omega),$$

ili u obliku stohastičkih diferencijalnih jednačina

$$d(F \cdot A) = F \cdot dA.$$

Primetimo da je $(F \cdot A)_t(\omega)$ slučajna promenljiva, i kako smo pretpostavili da je funkcija $F_t = f(t, \omega)$ merljiva u odnosu na proizvod σ-algebri $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \Omega$, sledi da je $E[(F \cdot A)_t]$ dobro definisano. Iz istog razloga uslovno očekivanje $E[(F \cdot A)_t | \mathcal{F}_s]$, takođe postoji. Sada na osnovu ove definicije možemo definisati stohastičke novčane tokove za naš model osiguranja.

Definicija 3.3.3. *Neka polisa osiguranja ima skup stanja S, i funkcije plaćanja $a_{ij}(t)$ i $a_i(t)$, tada stohastičke novčane tokove za odgovarajuću polisu osiguranja definišemo*

$$\begin{aligned} dA_{ij}(t, \omega) &= a_{ij}(t) dN_{ij}(t, \omega), \\ dA_i(t, \omega) &= I_i(t) da_i(t, \omega), \\ dA &= \sum_{i \in \mathcal{S}} dA_i + \sum_{i \neq j} dA_{ij}. \end{aligned}$$

$A_{ij}(t, \omega)$ je suma različitih novčanih tokova koji su posledica osiguranikove tranzicije iz stanja i u stanje j. Analogno, $A_i(t, \omega)$ je suma različitih novčanih tokova koji su posledica činjenice da je osiguranik u stanju i.

Napomena 3.3.1.

- *Veličina $dA_{ij}(t, \omega)$ odgovara povećanju $A_{ij}(t, \omega)$ u trenutku t za $a_{ij}(t)$ ako je došlo do tranzicije $i \rightsquigarrow j$ tj. ako se $N_{ij}(t)$ povećalo za 1.*
- *Veličina $dA_i(t, \omega)$ odgovara povećanju $A_i(t, \omega)$ za $a_i(t)$ ako je osiguranik u trenutku t u stanju i.*
- *Ako u definiciju 3.2.3 implementiramo prethodnu definiciju, dobijamo sledeće,*

$$\begin{aligned} dV(t, A) &= v(t) dA(t, \omega) \\ &= v(t) \Big[\sum_{i \in \mathcal{S}} I_i(t, \omega) da_i(t) + \sum_{i \neq j} a_{ij}(t) dN_{ij}(t, \omega) \Big]. \end{aligned}$$

- *U diskretnom slučaju u intervalu $[t, t+1)$ javljaju se najviše dva novčana toka. Prvo ako je osiguranik u stanju i, $a_i^{Pre}(t)$ predstavlja anuitetno plaćanje društva osiguraniku za interval $[t, t+1)$. Drugo, ako dođe do tranzicije $i \rightsquigarrow j$, tada $a_{ij}^{Post}(t)$ predstavlja kapitalnu isplatu osiguraniku za interval $[t, t+1)$. Primetimo da je u diskretnom modelu ispunjeno:*

$$\begin{aligned} \Delta A_{ij}(t, \omega) &= a_{ij}^{Post}(t) \Delta N_{ij}(t), \\ \Delta A_i(t, \omega) &= I_i(t, \omega) a_i^{Pre}(t), \\ \Delta A(t, \omega) &= \sum_{i \in \mathcal{S}} \Delta A_i(t, \omega) + \sum_{i \neq j} \Delta A_{ij}(t, \omega), \end{aligned}$$

gde $\Delta A(t)$ označava nenegativno povećanje $A(t)$ u intervalu $[t, t+1)$ tj. $\Delta A(t) := A(t+1) - A(t)$.

Pošto smo definisali stohastičke novčane tokove, dajemo definiciju za vrednovanje tih procesa. Definicija se razlikuje od determinističkog slučaja, jer ovde imamo slučajne promenljive pa vrednovanje vršimo (uslovnim) očekivanjem.

Definicija 3.3.4. *Neka su A i v stohastički procesi, na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, koji su adaptirani u odnosu na filtraciju $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Vrednost budućeg stohastičkog novčanog toka se definiše kao*

$$V_{\mathbb{F}}^{+}(t, A) = E[V^{+}(t, A)|\mathcal{F}_t]. \tag{3.3}$$

Ono što može biti problem u ovom slučaju jeste da očekivanje ne postoji, tj. da je beskonačno. U nastavku pretpostavljamo da $V_{\mathbb{F}}^{+}(t, A)$ postoji, međutim ovo je realna pretpostavka jer je uvek ispunjena u praksi.
Kako pretpostavljamo da je stohastički proces $(X_t)_{t\in T}$ Markovski, gde X_t predstavlja slučajnu promenljivu koja nam govori sa kojim se verovatnoćama osiguranik može naći u kom stanju u trenutku t, izraz (3.3) ćemo redefinisati, pa dobijamo sledeće,

$$V_{j}^{+}(t, A) := E[V^{+}(t, A)|X_t = j]. \tag{3.4}$$

Primetimo, izraz (3.3) je slučajna promenljiva, dok je (3.4) samo broj.

Definicija 3.3.5. *(Regularan model osiguranja) Regularan model osiguranja sadrži:*

1. *Regularan lanac Markova $(X_t)_{t\in T}$ sa skupom stanja $\mathcal{S}$,*
2. *Funkcije plaćanja $a_{ij}(t)$ i $a_i(t)$,*
3. *Sa desne strane neprekidan intenzitet stope $\delta_i(t)$ koji je pritom ograničene varijacije.*

Glava 4

Matematička rezerva

4.1 Uvod

Suma novca koju osiguravajuće društvo mora da čuva da bi ostalo solventno u odnosu na potencijalne gubitke naziva se matematička rezerva, i računanje rezervi se vrši posebno za svaku prodatu polisu osiguranja. U glavi koja je pred nama nastojimo da iskoristimo sve što smo do sada definisali, dokazali, kako u vezi stohastičkih procesa, konkretno lanaca Markova, tako i novčanih tokova (stohastičkih), a u svrhu izračunavanja matematičke rezerve.
Ako imamo polisu riziko životnog osiguranja koju je osiguranik kupio u svojoj 25. godini, i koja traje do osiguranikove 65. godine, dužina trajanja polise je 40 godina. Osiguravajuće društvo za svaku od tih 40 godina mora da izračuna koliko je novca neophodno čuvati da bi se obezbedila solventnost društva. Nakon računanja matematičkih rezervi za sve godine u kojima traje polisa, što je prvi zadatak ovog rada, prećićemo na računanje premija za polisu osiguranja za koju smo izračunali rezerve, što je naš drugi zadatak u ovom radu.

4.2 Pojam i osobine

U nastavku pretpostavimo da važi

$$\delta_t = \sum_{j \in \mathcal{S}} I_j(t)\delta_j(t),$$

kao i da do tranzicije između stanja u diskretnom slučaju može doći isključivo na krajevima intervala.

Definicija 4.2.1. *(Matematička rezerva) Matematička rezerva ako smo u stanju $g \in \mathcal{S}$ u vremenskom intervalu $T \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pod uslovom $X_t = j$ se definiše sa*

$$V_j(t, A_{gT}) = E\Big[\frac{1}{v(t)} \cdot \int_T v(\tau) dA_g(\tau) | X_t = j\Big].$$

Slično za tranziciju g u h, definišemo

$$V_j(t, A_{ghT}) = E\Big[\frac{1}{v(t)} \cdot \int_T v(\tau) dA_{gh}(\tau) | X_t = j\Big].$$

Ako je $T = \mathbb{R}$, koristićemo oznake $V_j(t, A_g)$ i $V_j(t, A_{gh})$ za $V_j(t, A_{g\mathbb{R}})$ i $V_j(t, A_{gh\mathbb{R}})$ respektivno.

Napomena 4.2.1. *Definiciju matematičke rezerve možemo dati i u diskretnom modelu, samo zamenimo integrale odgovarajućim sumama i dobijamo,*

$$V_j(t, A_{gT}) = E\Big[\frac{1}{v(t)} \cdot \sum_{\tau \in T} v(\tau) \Delta A_g(\tau) | X_t = j\Big],$$

i analogno

$$V_j(t, A_{ghT}) = E\Big[\frac{1}{v(t)} \cdot \sum_{\tau \in T} v(\tau + 1) \Delta A_{gh}(t) | X_t = j\Big],$$

gde smo pretpostavili da se plaćanja kao što su penzije isplaćuju na početku vremenskog intervala, a kapitalne dobiti, poput dobiti nakon smrti osiguranika, uvek na kraju intervala. Stoga, ukupne rezerve za dato stanje j su,

$$V_j(t, A) = \sum_{g \in \mathcal{S}} V_j(t, A_g) + \sum_{g \neq h} V_j(t, A_{gh})$$

za neprekidni model, i

$$V_j(t, A) = \sum_{g \in \mathcal{S}} V_j(t, A_g^{Pre}) + \sum_{g \neq h} V_j(t, A_{gh}^{Post})$$

za diskretni model.

Pošto smo definisali matematičke rezerve, postavlja se pitanje kako ih računati. Sledeća teorema daje odgovor na to pitanje, jer se bavi izračunavanjem očekivanja kod dva relevantna novčana toka. Prvi je $dA_1(t) = a(t) dN_{jk}(t)$, a drugi $dA_2(t) = I_j(t) dA(t)$.

Teorema 4.2.1. *Neka je $(X_t)_{t \in T}$ regularan Markov lanac na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, i neka su $i, j, k \in \mathcal{S}$, $s < t$ i $T \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gde $T \subset [s, \infty)$. Tada važi:*

1.
$$E\Big[\int_T a(\tau)dN_{jk}(\tau)|X_s = i\Big] = \int_T a(\tau)p_{ij}(s,\tau)\mu_{jk}(\tau)d\tau,$$

za $a \in L^1(\mathbb{R})$.

2.
$$E\Big[\int_T I_j(\tau)dA(\tau)|X_s = i\Big] = \int_T p_{ij}(s,\tau)dA(\tau),$$

gde je A *funkcija ograničene varijacije.*

Dokaz.

1. Znamo da su po delovima konstantne funkcije guste u L^1. Tako da umesto $a(t)$ možemo posmatrati niz po delovima konstantnih funkcija koji konvergira ka $a(t)$. Stoga, teoremu je dovoljno pokazati za neku proizvoljnu funkciju $\chi_{[a,b]}$. Takođe, možemo uzeti da je $T = [c,d]$ i pritom bez umanjenja opštosti, možemo pretpostaviti da je $c = a$ i $d = b$ jer je funkcija $\chi_{[a,b]}$ van $[a,b]$ intervala jednaka nuli.
   Neka je $h(t) := E\Big[N_{jk}(t)|X_s = i\Big]$, sada imamo

$$\begin{aligned}
h(t+\Delta t) - h(t) &= E\Big[N_{jk}(t+\Delta t) - N_{jk}(t)|X_s = i\Big] \\
&= \sum_{l\in\mathcal{S}} E\Big[\chi_{\{X_t=l\}}(N_{jk}(t+\Delta t) - N_{jk}(t))|X_s = i\Big] \\
&= \sum_{l\in\mathcal{S}} E\Big[N_{jk}(t+\Delta t) - N_{jk}(t)|X_t = l\Big]\cdot p_{il}(s,t) \\
&= p_{ij}(s,t)\cdot\mu_{jk}(t)\cdot\Delta t + o(\Delta t).
\end{aligned}$$

   Poslednja jednakost važi jer članovi sume za koje je $l \neq j$ postaju $o(t)$. Sada deljenjem dobijene jednakosti sa Δt, i nakon $\Delta t \to 0$, dobijamo diferencijalnu jednačinu

$$h'(t) = p_{ij}(s,t)\cdot\mu_{jk}(t).$$

   Ako integralimo dobijenu diferencijalnu jednačinu od a do b dobijamo dokaz teoreme za funkciju $a(t) = \chi_{[a,b]}$ što je dovoljno, jer kao što smo rekli postoji niz takvih funkcija koji konvergira ka bilo kojoj funkciji iz L^1.

2. Dokaz drugog dela teoreme sledi na osnovu teoreme Fubinija, koja dozvoljava razmenu integrala u ovom slučaju, a kako je očekivanje zapravo integral sledi

$$
\begin{aligned}
E\Big[\int_T I_j(\tau)dA(\tau)|X_s = i\Big] &= \int_T E\Big[I_j(\tau)|X_s = i\Big]dA(\tau) \\
&= \int_T p_{ij}(s,\tau)dA(\tau).
\end{aligned}
$$

□

Napomena 4.2.2. *Teorema se može napisati i u diskretnom obliku,*

$$
E\Big[\sum_{i\in T} a(\tau)\Delta N_{jk}(\tau)|X_s = i\Big] = \sum_{\tau\in T} a(\tau)p_{ij}(s,\tau)p_{jk}(\tau,\tau+1),
$$

kao i

$$
E\Big[\sum_{i\in T} I_j(\tau)\Delta A(\tau)|X_s = i\Big] = \sum_{\tau\in T} p_{ij}(s,\tau)\Delta A(\tau).
$$

Sada dajemo teoremu koja je posledica prethodno dokazane teoreme.

Teorema 4.2.2. *Neka su a_i i a_{ij} funkcije plaćanja i $(X_t)_{t\in T}$ regularan lanac Markova na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Tada važe sledeće jednakosti za fiksirano $\delta(\xi)$ tj. $\delta_i = \delta$,*

$$
\begin{aligned}
E\Big[V(t, A_{jT})|X_s = i\Big] &= \frac{1}{v(t)}\int_T v(\tau)p_{ij}(s,\tau)da_j(\tau), \\
E\Big[V(t, A_{jkT})|X_s = i\Big] &= \frac{1}{v(t)}\int_T v(\tau)a_{jk}(\tau)p_{ij}(s,\tau)\mu_{jk}(\tau)d\tau.
\end{aligned}
$$

Napomena 4.2.3. *Prethodna teorema se može diskretizovati zamenom integrala odgovarajućim sumama, pa dobijamo,*

$$
\begin{aligned}
E\Big[V(t, A_{jT})|X_s = i\Big] &= \frac{1}{v(t)}\sum_{\tau\in T} v(\tau)p_{ij}(s,\tau)a_j^{Pre}(\tau), \\
E\Big[V(t, A_{jkT})|X_s = i\Big] &= \frac{1}{v(t)}\sum_{\tau\in T} v(\tau+1)p_{ij}(s,t)p_{jk}(\tau,\tau+1)a_{jk}^{Post}(\tau).
\end{aligned}
$$

Primetimo da u prvoj jednakosti imamo pod sumom $v(\tau)$, dok u drugoj jednakosti imamo $v(\tau+1)$. To je posledica pretpostavke da u diskretnom slučaju do tranzicije između stanja isključivo može doći na krajevima vremenskih intervala. Te zato ispred $a_{ij}^{Post}(\tau)$ mora stajati $v(\tau+1)$, za razliku od $a_i^{Pre}(\tau)$, gde imamo $v(\tau)$ jer se sva anuitetna praćanja vrše na početku vremenskih intervala.

Teorema 4.2.3. *Neka je dat regularan model osuguranja sa fiksnim intenzitetom stope ($\delta_i = \delta$). Tada je potencijalna rezerva data sa,*

$$V_j^+(t) = \frac{1}{v(t)} \int_t^\infty v(\tau) \sum_{g \in \mathcal{S}} p_{jg}(t,\tau) \times \Big\{ da_g(\tau) + \sum_{h \neq g} a_{gh}(\tau) \mu_{gh}(t) d\tau \Big\}. \quad (4.1)$$

Napomena 4.2.4. *Posmatrajući prethodnu teoremu vidimo da nam ona daje način za računanje ukupne potencijalne rezerve, međutim ono do čega je teško doći u praksi jesu funkcije prelaznih verovatnoća, obično imamo samo prelazne stope, tako da prethodna teorema nema veliku primenu u praksi, međutim u nastavku uz pomoć navedene teoreme, dolazimo do rekurzivne formule za računanje matematičke rezerve.*

Glava 5

Markov model u diskretnom vremenu

5.1 Uvod

U ovom odeljku zapravo dolazimo do suštine rada, a to je eksplicitna formula za računanje matematičke rezerve za konkretnu polisu životnog osiguranja, a onda znajući matematičku rezervu uz pomoć principa ekvivalencije biće određena i cena polise životnog osiguranja. Ovaj model, tzv. Markov model je izuzetno koristan u primeni, upotrebljiv je za većinu polisa životnog osiguranja što ćemo nastojati da pokažemo kroz primere. Takođe videćemo da Markov model može biti diskretan i neprekidan, zavisi da li lanac Markova posmatramo u diskretnom ili neprekidnom vremenu. U zavisnosti od toga, rekurzivna jednačina koju dobijemo biće diferencna odnosno diferencijalna. U ovom odeljku se fokusiramo na diskretno vreme.
U nastavku definišemo novi oblik matematičke rezerve, jedini razlog tome je da učinimo notaciju i dokaze jednostavnijim.

5.2 Thieleova diferencna jednačina

Definicija 5.2.1. *Definišimo za regularan model osiguranja*

$$W_j^+(t) := v(t)V_j^+(t).$$

Razlika između $W_j^+(t)$ i $V_j^+(t)$ je u tome što $V_j^+(t)$ predstavlja zapravo vrednost novčanog toka u trenutku t, dok $W_j^+(t)$ predstavlja vrednost novčanog toka u trenutku 0, tj. u početnom trenutku.

Lema 5.2.1. *Neka je $j \in \mathcal{S}$, $s < t < u$ i $(X_t)_{t \in T}$ regularan model osiguranja u neprekidnom vremenu sa determinističkim intenzitetom stope. Tada važi* *sledeća jednačina:*

$$\begin{aligned} W_j^+(t) &= \sum_{g\in\mathcal{S}} p_{jg}(t,u)W_g^+(u) \\ &+ \int\limits_{(t,u]} v(t)\sum_{g\in\mathcal{S}} p_{jg}(t,\tau)\Big\{da_g(\tau) + \sum_{\substack{h\in\mathcal{S}\\ h\neq g}} a_{gh}(\tau)\mu_{gh}(\tau)d\tau\Big\}. \end{aligned}$$

Dokaz. Na osnovu (4.1) sledi da je,

$$\begin{aligned} W_j^+(t) &= \int\limits_t^\infty v(\tau)\sum_{g\in\mathcal{S}} p_{jg}(t,\tau)\Big\{da_g(\tau) + \sum_{\substack{h\in\mathcal{S}\\ h\neq g}} a_{gh}(\tau)\mu_{gh}(\tau)d\tau\Big\} \\ &= \Big(\int\limits_{(t,u]} + \int\limits_{(u,\infty)}\Big)v(\tau)\sum_{g\in\mathcal{S}} p_{jg}(t,\tau)\Big\{da_g(\tau) + \sum_{\substack{h\in\mathcal{S}\\ h\neq g}} a_{gh}(\tau)\mu_{gh}(\tau)d\tau\Big\} \\ &= \int\limits_{(t,u]} v(\tau)\sum_{g\in\mathcal{S}} p_{jg}(t,\tau)\Big\{da_g(\tau) + \sum_{\substack{h\in\mathcal{S}\\ h\neq g}} a_{gh}(\tau)\mu_{gh}(\tau)d\tau\Big\} \\ &\quad + \int\limits_{(u,\infty)} v(\tau)\sum_{g\in\mathcal{S}}(\sum_{k\in\mathcal{S}} p_{jk}(t,u)p_{kg}(u,\tau))\cdot\Big\{da_g(\tau) + \sum_{\substack{h\in\mathcal{S}\\ h\neq g}} a_{gh}(\tau)\mu_{gh}(\tau)d\tau\Big\} \\ &= \int\limits_{(t,u]} v(\tau)\sum_{g\in\mathcal{S}} p_{jg}(t,\tau)\Big\{da_g(\tau) + \sum_{\substack{h\in\mathcal{S}\\ h\neq g}} a_{gh}(\tau)\mu_{gh}(\tau)d\tau\Big\} \\ &\quad + \sum_{k\in\mathcal{S}} p_{jk}(t,u)\Big(\int\limits_{(u,\infty)} v(\tau)\sum_{g\in\mathcal{S}} p_{kg}(u,\tau)\cdot\Big\{da_g(\tau) + \sum_{\substack{h\in\mathcal{S}\\ h\neq g}} a_{gh}(\tau)\mu_g h(\tau)d\tau\Big\}\Big) \\ &= \sum_{g\in\mathcal{S}} p_{jg}(t,u)W_g^+(u) \\ &\quad + \int\limits_{(t,u]} v(\tau)\sum_{g\in\mathcal{S}} p_{jg}(t,\tau)\Big\{da_g(\tau) + \sum_{\substack{h\in\mathcal{S}\\ h\neq g}} a_{gh}(\tau)\mu_{gh}(\tau)d\tau\Big\}. \end{aligned}$$

$\square$

Rekurzivnu formulu iz prethodne leme možemo dati i u diskretnom obliku. Za ovu operaciju, podsetimo se da u radu pretpostavljamo da u diskretnom slučaju penziona plaćanja i sva druga anuitetna plaćanja vršimo na početku intervala, a isplate jednokratnih suma na krajevima intervala. Ova pretpostavka, naravno nije utemeljena u realnosti, i ostaviće svoje posledice na rezultate koji iz nje proističu, međutim, o tome u nastavku kada dođemo do primera. Neka je $\Delta t = 1$, što označava jedan period, godinu, mesec, itd. Diskretizacijom prethodne leme dobijamo sledeću teoremu.

Teorema 5.2.1. *Za diskretni Markov model matematička rezerva zadovoljava sledeću jednačinu:*

$$V_i^+(t) = a_i^{Pre}(t) + \sum_{j \in \mathcal{S}} v_t \cdot p_{ij}(t, t+1) \cdot \Big\{ a_{ij}^{Post}(t) + V_j^+(t+1) \Big\}. \tag{5.1}$$

Napomena 5.2.1.

- *Jednačina* (5.1) *se naziva Thieleova diferencna jednačina.*
- *Data formula je vrlo upotrebljiva u praksi, i sposobna je da opiše većinu polisa životnog osiguranja, kao i modifikacije istih.*
- *Primetimo da nam je potreban početni uslov da bi rešili datu diferencnu jednačinu. Kako je vrednost u t zadata preko vrednosti $t+1$ potrebna nam je poslednja vrednost u kojoj ima smisla računati matematičku rezervu. Posmatrajmo npr. polisu privremenog invalidskog osiguranja, koja važi do osiguranikove 65. godine, tada je očito $V_*(65) = V_{\circledcirc}(65) = 0$ jer tada prestaje da važi polisa, te osiguravajuće društvo više nema rizik da će se osoba povrediti i tražiti novac.*

Dokaz. Vršimo diskretizaciju jednačine dobijene u prethodnoj lemi 5.2.1,

$$\begin{aligned} W_j^+(t) = &\sum_{g \in \mathcal{S}} p_{jg}(t,u) W_g^+(u) \\ &+ \int_{(t,u]} v(t) \sum_{g \in \mathcal{S}} p_{jg}(t,\tau) \Big\{ da_g(\tau) + \sum_{\substack{h \in \mathcal{S} \\ h \neq g}} a_{gh}(\tau) \mu_{gh}(\tau) d\tau \Big\}. \end{aligned}$$

Zamenom integrala odgovarajućim sumama kao i uzimanjem u obzir činjenice da je sada $u = t+1$ dobijamo:

$$\begin{aligned} v(t) V_j^+(t) = &\sum_{g \in \mathcal{S}} p_{jg}(t, t+1) v(t+1) V_g^+(t+1) \\ &+ \sum_{\tau = t}^{t+1} v(\tau) \sum_{g \in \mathcal{S}} p_{jg}(t,\tau) \Big\{ a_g^{\text{Pre}}(t) + \sum_{\substack{h \in \mathcal{S} \\ h \neq g}} a_{gh}^{\text{Post}}(\tau) p_{gh}(\tau, \tau+1) \Big\}. \end{aligned}$$

Sada deljenjem obe strane sa $v(t)$ imamo:

$$\begin{aligned} V_j^+(t) = \sum_{g\in\mathcal{S}} & p_{jg}(t,t+1)v_t V_g^+(t+1) \\ & + \frac{v(t)}{v(t)}\sum_{g\in\mathcal{S}} p_{jg}(t,t)a_g^{\text{Pre}}(t) + \frac{v(t+1)}{v(t)}\sum_{g\in\mathcal{S}} p_{jg}(t,t+1)a_g^{\text{Pre}}(t+1) \\ & + \frac{v(t+1)}{v(t)}\sum_{g\in\mathcal{S}} p_{jg}(t,t)\sum_{\substack{h\in\mathcal{S}\\ h\neq g}} a_{gh}^{\text{Post}}(t)p_{gh}(t,t+1) \\ & + \frac{v(t+2)}{v(t)}\sum_{g\in\mathcal{S}} p_{jg}(t,t+1)\sum_{\substack{h\in\mathcal{S}\\ h\neq g}} a_{gh}^{\text{Post}}(t+1)p_{gh}(t+1,t+2). \end{aligned}$$

Kako su $a_g^{\text{Pre}}(t+1)$ i $a_{gh}^{\text{Post}}(t+1)$ jednaki nuli jer posmatramo samo interval $[t,t+1)$ dobijamo,

$$V_i^+(t) = a_i^{\text{Pre}}(t) + \sum_{j\in\mathcal{S}} v_t \cdot p_{ij}(t,t+1)\cdot\Big\{a_{ij}^{\text{Post}}(t) + V_j^+(t+1)\Big\}.$$

□

5.3 Primeri: Računanje rezervi i premija

U odeljku koji je pred nama fokusiramo se na računanje premija i matematičke rezerve za neke tipove polisa životnog osiguranja, koristeći diskretni Markov model, tj. Thieleovu diferencnu jednačinu.

Primer 5.3.1. Razmatramo polisu mešovitog životnog osiguranja koja donosi 12.500 novčanih jedinica usled smrti i isto toliko usled doživljenja. Pretpostavimo da osoba kupuje polisu sa 25 godina, i da ona traje dok osoba ne napuni 65 godina.

1. Koliko iznosi jednokratna premija za navedenu polisu osiguranja, ako je kamatna stopa 5%?

2. Koliko iznosi godišnja premija?

Stopu smrtnosti kao i u primeru 2.4.1 modeliramo funkcijom,

$$\mu_{*\circledast}(x) = \exp(-9.13275 + 8.09438\cdot 10^{-2}\cdot x - 1.10180\cdot 10^{-5}\cdot x^2).$$

Takođe, bitne su nam i funkcije plaćanja:

$$a_{*\circledast}^{\text{Post}}(x) = \begin{cases} 12.500, & x < 65, \\ 0, & \text{inače}, \end{cases}$$

$$a_{**}^{\text{Post}}(x) = \begin{cases} 12.500, & x = 65, \\ 0, & \text{inače}. \end{cases}$$

Diskontni faktor v_t računamo kao

$$v_t = \frac{1}{1 + i_t},$$

gde je $i_t = 0.05$. Najpre konstruišimo Thieleove diferencne jednačine za posmatranu polisu, za svako od stanja $*$ i $\circledast$. One su date sa:

$$\begin{aligned} V_*(t) = a_*^{\text{Pre}}(t) &+ v_t \cdot p_{**}(t) \cdot \left\{ a_{**}^{\text{Post}}(t) + V_*(t+1) \right\} \\ &+ v_t \cdot p_{*\circledast}(t) \cdot \left\{ a_{*\circledast}^{\text{Post}}(t) + V_\circledast(t+1) \right\}, \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned} V_\circledast(t) = a_\circledast^{\text{Pre}}(t) &+ v_t \cdot p_{\circledast *}(t) \cdot \left\{ a_{\circledast *}^{\text{Post}}(t) + V_*(t+1) \right\} \\ &+ v_t \cdot p_{\circledast\circledast}(t) \cdot \left\{ a_{\circledast\circledast}^{\text{Post}}(t) + V_\circledast(t+1) \right\}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Uzimajući u obzir da je $a_*^{\text{Pre}}(t) = a_{**}^{\text{Post}}(t) = a_\circledast^{\text{Pre}}(t) = 0$, $\forall t < 65$, kao i da važi $p_{\circledast *}(t) = 0$, jednačine (5.2) i (5.3) postaju:

$$\begin{aligned} &V_*(t) = v_t \cdot p_{**}(t) \cdot V_*(t+1) + v_t \cdot p_{*\circledast}(t) \cdot a_{*\circledast}^{\text{Post}}(t), \\ &V_\circledast(t) = 0. \end{aligned} \tag{5.4}$$

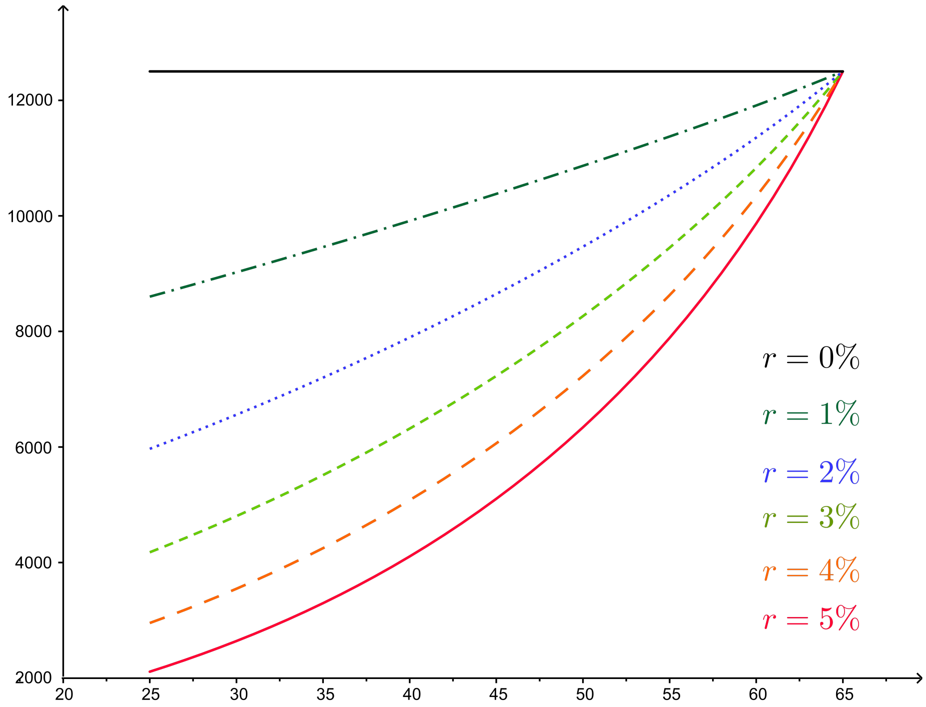
Potrebno je još reći koji su početni uslovi za sistem (5.4). Primetimo da su rezerve $V_\circledast(t)$, jednake nuli za sve $t \in \{25, 26, \cdots 64, 65\}$, tako da nećemo obraćati pažnju na ovu jednačinu, već ćemo se usresrediti na $V_*(t)$. Na isteku polise, ako je osiguranik živ osiguravajuće društvo je dužno da plati osiguraniku 12.500 novčanih jedinica. Tako da zaključujemo da je $V_*(65) = 12.500$, što će nam biti zapravo početni uslov. Primenom Thieleove diferencne jednačine sa početnim uslovom dobijamo rezultate koji su izloženi u tabeli 5.1 koja sledi.

Posmatrajmo rezultate dobijene u tabeli. Od velikog je značaja shvatiti šta nam oni zapravo govore. Neka je $t = 35$. Pod uslovom da osiguranik

Tabela 5.1: Matematička rezerva

Starost	$V_*(t, A_*)$	$V_*(t, A_{*\circledast})$	$V_*(t)$
65	12.500	0	12.500
64	11.686	219	11.905
63	10.941	407	11.347
62	10.257	568	10.824
61	9.627	705	10.332
60	9.046	821	9.868
55	6.721	1.167	7.888
50	5.081	1.259	6.340
45	3.887	1.217	5.104
40	2.998	1.109	4.106
35	2.324	974	3.298
30	1.808	834	2.642
25	1.410	702	**2.112**

ostane živ do svoje 35. godine, u toku te godine, osiguravajuće društvo je dužno da čuva prikazanu sumu novca, kako bi se obezbedilo od potencijalnih troškova koji dolaze usled smrti osiguranika. Šta nam predstavlja oznaka $V_*(t, A_*)$, a šta oznaka $V_*(35, A_{*\circledast})$? $V_*(35, A_*)$ predstavlja rezervu pod pretpostavkom da će osiguranik ostati živ i nakon 35 godine, dok $V_*(35, A_{*\circledast})$ predstavlja rezervu pod pretpostavkom da će osiguranik umreti u sledećoj godini. Logično, suma te dve rezerve, predstavlja ukupnu rezervu za godinu 35. za stanje aktivan tj. živ.
Primetimo još jednu bitnu stvar. Naime, ni u jednoj godini rezerva ne dostiže visinu benefita od 12.500 novčanih jedinica koje je osiguravajuće društvo dužno da plati usled smrti osiguranika, osim u poslednjoj godini, kada je rezerva baš 12.500 novčanih jedinica. Neko može reći, pa kako nas rezerva čuva od propasti kad ako npr. osiguranik umre u 35. godini, mi smo dužni isplatiti 12.500 a imamo samo 3.298 novčanih jedinica.
Odgovor leži u tome da je osiguravajuće društvo prodalo više ovakvih polisa, i da za više njih kompanija čuva 3.298 novčanih jedinica, te se sve te polise međusobno pokrivaju i čuvaju. Te, ukoliko dođe do smrti osiguranika tako rano, za šta je verovatnoća jako mala ali ipak pozitivna, društvo će imati novca da pokrije trošak i ostane solventno.
Teorijski gledano, ipak postoji pozitivna verovatnoća da npr. svi osiguranici



Slika 5.1: Rezerve kao funkcija od kamatne stope

kojima je prodata posmatrana polisa u posmatranoj godini, umru rano i da društvo ne može da isplati benefite rezervisanim novcem. Međutim, u ovom radu se nismo bavili teorijom propasti, koja daje odgovore na postavljeno pitanje, ali čitaoce upućujemo na knjige [16], [6], kao i radove [14], [5] .
Nakon računanja rezervi, prelazimo na računanje cene date polise. Kako to radimo?
Cenu dobijamo korišćenjem principa ekvivalencije, koji kaže da sadašnja vrednost ukupnih benefita koje polisa donosi, mora biti jednaka sadašnjoj vrednosti premija koje se plaćaju za to osiguranje.
Kako je u trenutnu prodaje polise, rezerva jednaka 2.112 novčanih jedinica, što je zapravo sadašnja vrednost svih izdataka polise, na osnovu principa ekvivalencije ta cifra predstavlja i jednokratnu premiju tj. cenu posmatrane polise. Kako većina polisa na tržištu ima mogućnost plaćanja polise ili ukupnom sumom ili premijama, sada ćemo izračunati godišnju premiju za datu polisu, kao i rezerve ukoliko imamo ovaj tip plaćanja.
Godišnja plaćanja premija se mogu modelirati funkcijom,

$$a_*^{\mathrm{Pre}}(x) = \begin{cases} P, & x < 65, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Kako je matematička rezerva u godini t data sa

$$V_t = V_t^{\text{Izdaci}} - V_t^{\text{Premije}},$$

u početnom trenutku na osnovu principa ekvivalencije mora važiti da je

$$V_t = 0, \text{ tj. } V_t^{\text{Izdaci}} = V_t^{\text{Premije}} = P \cdot V_t^{\text{Premije},P=1}.$$

Time dobijamo da je,

$$P = V_t^{\text{Izdaci}} / V_t^{\text{Premije},P=1} \quad \text{za } t = 25.$$

Na osnovu Thieleove diferencne jednačine uz početni uslov $V(65) = 0$, i korišćenjem funkcija,

$$a_*^{\text{Pre}}(x) = \begin{cases} 1, & x < 65, \\ 0, & \text{inače}, \end{cases}$$
$$a_{**}^{\text{Post}} = a_{*\circledast}^{\text{Post}} = 0,$$

dobijamo rezultate u tabeli 5.2.

Tabela 5.2: Sadašnja vrednost premija za $P = 1$

Starost	$V(t)$
65	0
64	1
63	1.9349
62	2.8115
61	3.6357
60	4.4125
55	7.7195
50	10.3046
45	12.3728
40	14.0463
35	15.4062
30	16.5113
25	**17.4076**

Kako je $V_{25}^{\text{Izdaci}} = 2.112$ a $V_{25}^{\text{Premije},P=1} = 17,4076$, dobijamo da je godišnja premija jednaka sa

$$P = 2.112/17,4076 = 121,3263.$$

To znači da je osiguravajućem društvu isto da li će osiguranik platiti odmah 2.112 ili po 121,3263 novčanih jedinica svake godine, tokom trajanja polise. Konačno u tabeli 5.3 koja sledi, date su matematičke rezerve ako se osiguranik odlučio za plaćanje polise godišnjim premijama.

Tabela 5.3: Rezerve za polisu sa godišnjim premijama

Starost	V_t^{Izdaci}	V_t^{Dobit}	$V_*(t)$
65	0	12.500	12.500
64	-121,3	11.905	11.670
63	-234,8	11.347	11.112
62	-341,1	10.824	10.483
61	-441,1	10.332	9.891
60	-535,4	9.867	9.331
55	-936,6	7.888	6.951
50	-1.250,2	6.341	5.090
45	-1.501,1	5.104	3.602
40	-1.704,2	4.106	2.401
35	-1.869,2	3.298	1.429
30	-2.003,3	2.642	639
25	-2.112	2.112	**0**

Primer 5.3.2. Razmotrimo sada polisu privremenog invalidskog osiguranja, koja donosi 5.000 novčanih jedinica godišnje osiguraniku ukoliko postane neaktivan. Pretpostavimo da osiguranik kupuje polisu sa 25 godina, i da će polisa važiti narednih 30 godina, do osiguranikove 55. godine.

1. Ako je kamatna stopa 4%, izračunati matematičke rezerve i jednokratnu premiju.

2. Izračunati godišnju premiju, prvo za slučaj kada osiguranik plaća premiju samo kada je aktivan, a zatim kada je i aktivan i neaktivan.

Prvo računamo matematičke rezerve za stanja $*$ i $\circledcirc$, tj. za stanja aktivan i neaktivan. Primenom Thieleove diferencne jednačine dobijamo sledeće jednakosti:

$$\begin{aligned} V_*(t) = a_*^{\text{Pre}}(t) + v_t \cdot p_{*\circledcirc}(t) \cdot \Big\{ a_{*\circledcirc}^{\text{Post}}(t) + V_\circledcirc(t+1) \Big\} \\ + v_t \cdot p_{**}(t) \cdot \Big\{ a_{**}^{\text{Post}}(t) + V_*(t+1) \Big\}, \end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned} V_\circledcirc(t) = a_\circledcirc^{\text{Pre}}(t) + v_t \cdot p_{\circledcirc *}(t) \cdot \Big\{ a_{\circledcirc *}^{\text{Post}}(t) + V_*(t+1) \Big\} \\ + v_t \cdot p_{\circledcirc\circledcirc}(t) \cdot \Big\{ a_{\circledcirc\circledcirc}^{\text{Post}}(t) + V_\circledcirc(t+1) \Big\}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Takođe iz načina na koji je definisana polisa zaključujemo da su početni uslovi dati sa:

$$V_*(55) = V_\circledcirc(55) = 0.$$

U primeru koristimo sledeće funkcije za modeliranje stopa invalidnosti i smrtnosti:

$$\begin{aligned} &\mu_{*\circledast}(x) = \mu_{\circledcirc\circledast}(x) = 0.005 + 10^{0.038x-4.12}, \\ &\mu_{*\circledcirc}(x) = 0.0004 + 10^{0.065x-5.46}, \\ &\mu_{\circledcirc *}(x) = 0.05. \end{aligned}$$

Primetimo da je jedina potencijalna dobit za osiguranika invalidska penzija, stoga prilikom korišćenja jednakosti (5.5) i (5.6) treba uzeti u obzir da je

$$a_*^{\text{Pre}}(x) = a_{*\circledcirc}^{\text{Post}}(x) = a_{**}^{\text{Post}}(x) = a_{\circledcirc *}^{\text{Post}}(x) = a_{\circledcirc\circledcirc}^{\text{Post}}(x) = 0,$$

te da je relevantno posmatrati samo funkciju $a_\circledcirc^{\text{Pre}}(x)$.
Dodijeni rezultati izloženi su u tabeli 5.4. Vidimo da za buduću penziju od 5.000 novčanih jedinica, osiguranik u trenutku kupovine mora da plati 706,0265 novčanih jedinica. Dalje želimo da izračunamo godišnju premiju.
Imamo dve mogućnosti za računanje godišnje premije. Prva je da pretpostavimo da osiguranik treba da plaća premiju samo u godinama u kojima je u stanju $*$, dok, sa druge strane, druga mogućnost je da pretpostavimo da je osiguranik dužan da plaća premije i kada je u stanju $*$, i kada je u stanju $\circledcirc$. U nastavku uzimamo u obzir oba slučaja.
Kao u prethodnom primeru premiju računamo iz jednakosti

$$P = V_t^{\text{Izdaci}} / V_t^{\text{Premije},P=1}, \quad \text{za } t = 25.$$

Tabela 5.4: Matematička rezerva za stanja $*$ i $\circledcirc$

Starost	$V_*(t)$	$V_\circledcirc(t)$
55	0	0
54	0	5.000
53	27,1542	9.527
52	71,3168	13.634
51	125,2212	17.365
50	183,7259	20.759
45	454,4442	33.750
40	619,3126	42.080
35	692,5577	47.492
30	712,2845	51.034
25	**706,0265**	53.359

Prvo pretpostavljamo da plaćamo premije samo za stanje $*$. Na osnovu Thieleove diferencne jednačine dobijamo formulu

$$V(t) = 1 + v_t \cdot p_{**}(t) \cdot V(t+1), \quad V(65) = 0. \tag{5.7}$$

Sa druge strane, ako premiju plaćamo bez obzira u kom stanju bili, $*$ ili $\circledcirc$, dobijamo formulu

$$V(t) = 1 + v_t \cdot (p_{**}(t) + p_{*\circledcirc}(t)) \cdot V(t+1), \quad V(65) = 0. \tag{5.8}$$

Na osnovu (5.7) i (5.8) dobijamo sadašnju vrednost premija u tabeli 5.5 koja sledi. Vidimo da je vrednost budućih premija u trenutku prodaje/kupovine polise $17,3468$, odnosto $17,5364$ novčanih jedinica, pod pretpostavkom da je $P = 1$. Sledi da je vrednost godišnje premije u prvom slučaju

$$P = 706,0265/17,3468 = 40,7007.$$

Slično, dobijamo da je

$$P = 706,0265/17,5364 = 40,2606,$$

godišnja premija za drugi slučaj.

Napomenimo još jednom da je društvu svejedno da li će se osiguranik odlučiti za plaćanje polise jednokratnom sumom, ili godišnjim premijama, bilo kog od dva pomenuta tipa.

Tabela 5.5: Sadašnja vrednost premija za $P = 1$

Starost	$V^{*}(t)$	$V^{*\circledcirc}(t)$
55	0	0
54	1	1
53	1,9481	1,9535
52	2,8495	2,8640
51	3,7085	3,7343
50	4,5288	4,5673
45	8,1441	8,2457
40	11,1141	11,2602
35	13,5809	13,7521
30	15,6359	15,8195
25	**17,3468**	**17,5364**

Primer 5.3.3. Razmotrimo sada polisu životnog osiguranja na više života. Primetimo da su se prethodna dva primera bavila životnim osiguranjem na jedan život. Posmatrajmo dalje polisu sa tri osobe, otac, majka i dete. Neka polisa u slučaju smrti jednog roditelja garantuje detetu 5.000 novčanih jedinica, a u slučaju smrti oba roditelja 10.000 novčanih jedinica. Pretpostavimo da otac u trenutku kupovine polise ima 30, majka 25, a dete 5 godina, i neka polisa važi narednih 20 godina, tj. dok dete ne napuni 25 godina.

Funkcije koje modeliraju dobit za dete su:

$$a^{\text{Post}}_{(***)(\circledast**)}(x) = a^{\text{Post}}_{(***)(*\circledast*)}(x) = \begin{cases} 5000, & x < 25, \\ 0, & \text{inače,} \end{cases} \tag{5.9}$$

$$a^{\text{Post}}_{(\circledast**)(\circledast\circledast*)}(x) = a^{\text{Post}}_{(*\circledast*)(\circledast\circledast*)}(x) = \begin{cases} 5000, & x < 25, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \tag{5.10}$$

Sa druge strane, treba uzeti u obzir da važi:

$$a^{\text{Pre}}_{***} = a^{\text{Pre}}_{\circledast**} = a^{\text{Pre}}_{*\circledast*} = 0, \tag{5.11}$$

$$V_{**\circledast}(t) = V_{*\circledast\circledast}(t) = V_{\circledast*\circledast} = V_{\circledast\circledast*}(t) = V_{\circledast\circledast\circledast}(t) = 0. \tag{5.12}$$

Na osnovu definisanih funkcija (5.9) i (5.10), i uzimajući u obzir (5.11) i (5.12) dobijamo sledeći sistem Thieleovih diferencnih jednačina:

$$\begin{aligned}
V_{***}(t) = & v_t \cdot p_{(***)(***)}(t) \cdot V_{***}(t+1) \\
& + v_t \cdot p_{(***)(\circledast**)}(t) \cdot (V_{\circledast**}(t+1) + a^{\text{Post}}_{(***)(\circledast**)}(t)) \\
& + v_t \cdot p_{(***)(*\circledast*)}(t) \cdot (V_{*\circledast*}(t+1) + a^{\text{Post}}_{(***)(*\circledast*)}(t)) \\
& + v_t \cdot p_{(***)(\circledast\circledast*)}(t) \cdot a^{\text{Post}}_{(***)(\circledast\circledast*)}(t),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{\circledast**}(t) = & v_t \cdot p_{(\circledast**)(\circledast**)}(t) \cdot V_{\circledast**}(t) \\
& + v_t \cdot p_{(\circledast**)(\circledast\circledast*)}(t) \cdot a^{\text{Post}}_{(\circledast**)(\circledast\circledast*)}(t),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{*\circledast*}(t) = & v_t \cdot p_{(*\circledast*)(*\circledast*)}(t) \cdot V_{*\circledast*}(t) \\
& + v_t \cdot p_{(*\circledast*)(\circledast\circledast*)}(t) \cdot a^{\text{Post}}_{(*\circledast*)(\circledast\circledast*)}(t),
\end{aligned}$$

gde su početni uslovi dati sa $V_{***}(25) = V_{\circledast**}(25) = V_{*\circledast*}(25) = 0$. Pretpostavimo još da je kamatna stopa 5%, i da stopu smrtnosti modeliramo funkcijom

$$\mu_{*\circledast}(x) = \exp(-9.13275 + 8.09438 \cdot 10^{-2} \cdot x - 1.10180 \cdot 10^{-5} \cdot x^2).$$

Sada možemo naći matematičke rezerve, i nakon toga videti kolika je cena ove polise osiguranja, tj. jednokratna premija.
Dobijeni rezultati izloženi su u tabeli 5.6. Posmatrajući tabelu uočavamo da matematička rezerva za npr. stanje $(***)$, i starost deteta od 15 godina iznosi 244,4330 novčanih jedinica, dok za istu starost deteta ali za stanja $(\circledast**)$ i $(*\circledast*)$ matematička rezerva iznosi 98,4044 i 146,0286 novčanih jedinica respektivno. Za nas najbitnija je rezerva za stanje $(***)$ u godini kupovine polise a to je u našoj tabeli za godinu starosti deteta 5, i ona iznosi 258,1283 novčanih jedinica. Drugim rečima, polisa košta 258,1283 novčanih jedinica i to je jednokratna premija za posmatranu polisu osiguranja.
Sledeće što bi moglo u ovom primeru da nas interesuje jeste godišnja premija, i matematičke rezerve za taj tip plaćanja polise osiguranja. Kao i u prethodnom primeru mora se razmotriti više slučajeva, tj kada se premije plaćaju. Vodeći se time, imamo sledeća dva slučaja:

- premije se plaćaju dok su oba roditelja živa,
- premije se plaćaju sve dok je bar jedan od roditelja živ.

Shodno tome, dobićemo različite godišnje premije pa i matematičke rezerve koje im odgovaraju. Formule preko kojih ćemo dobiti sadašnju vrednost

Tabela 5.6: Rezerve za osiguranje deteta

Starost deteta	$V_{***}(t)$	$V_{\circledast**}(t)$	$V_{*\circledast*}(t)$
25	0	0	0
24	44,1624	17,7272	26,4352
23	82,6159	33,1788	49,4371
22	115,9507	46,5864	69,3643
21	144,6967	58,1585	86,5382
20	169,3306	68,0836	101,2470
15	244,4330	98,4044	146,0286
10	265,9238	107,1286	158,7953
9	266,1308	107,2211	158,9097
8	265,3354	106,9084	158,4270
7	263,6630	106,2410	157,4219
6	261,2266	105,2646	155,9620
5	**258,1283**	104,0203	154,1080

premija pod pretpostavkom kao i do sada da je $P = 1$, su:

$$V(t) = 1 + v_t \cdot p_{(***)(***)}(t) \cdot V(t+1), \quad V(25) = 0, \tag{5.13}$$

$$V(t) = 1+v_t\cdot\Big(p_{(***)(***)}(t)+p_{(***)(\circledast**)}(t)+p_{(***)(*\circledast*)}(t)\Big)\cdot V(t+1), \;\; V(25) = 0. \tag{5.14}$$

Gde je diferencna jednačina (5.13) za slučaj da je porodica dužna da plaća premije sve dok su oba roditelja živa, dok je jednačina (5.14) za slučaj da je porodica dužna da plaća premije sve dok je bar jedan od roditelja živ.
Dalje egzaktno računanje premija i rezervi nećemo raditi, jer je bez novina i analogno prethodnim primerima.

5.4 Modifikacije osnovnog modela

Vratimo se na primer 5.3.2 koji se bavio invalidskim osiguranjem. Cilj nam je da ga upodobimo za period čekanja od jedne godine. Šta znači period čekanja?

Tu opciju imaju gotovo sva osiguravajuća društva kod polisa invalidskog osiguranja, naime, ako doće do povrede osiguranika, na radnom mestu ili bilo gde drugde, ne može se odmah znati da li je osigranik postao osoba sa invaliditetom ili ne. Zbog toga se osiguranik i društvo unapred dogovore za određeni period čekanja, u kome će se utvrditi zapravo da li je povreda izlečiva ili ne. Pa ako je došlo do invaliditeta, društvo počinje da isplaćije dobit kada prođe taj dogovoreni period, od trenutka kada je došlo do povrede. Mi pretpostavljamo da je period čekanja godinu dana. Da bi došli do cene polise i rezervi moramo modifikovati Thieleove diferencne jednačine koje smo koristili u originalnom modelu. Na osnovu razmatranja dobijamo da je jednačina za stanje aktivan data sa

$$V_*(t) = v_t^2 \cdot p_{*\circledcirc}(t) \cdot V_\circledcirc(t+2) + v_t \cdot (p_{**}(t) + p_{*\circledcirc}(t)) \cdot V_*(t+1). \qquad (5.15)$$

Sa druge strane, jednačina za računanje rezervi za stanje neaktivan, izgleda

$$V_\circledcirc(t) = a_\circledcirc^{\mathrm{Pre}}(t) + v_t \cdot p_{\circledcirc\circledcirc}(t) \cdot V_\circledcirc(t+1) + v_t \cdot p_{\circledcirc *}(t) \cdot V_*(t+1). \qquad (5.16)$$

U jednačini (5.15) prvi sabirak je posledica činjenice da jednu godinu nakon povrede osiguravajuće društvo nije u obavezi da isplaćuje penziju osiguraniku, dok je drugi sabirak posledica činjenice da će osiguravajuće društvo naredne godine čuvati rezerve za stanje aktivan i u slučaju da je osiguranik ostao aktivan i u slučaju da se povredi (zbog perioda čekanja). U drugoj jednačini (5.16) sabirci su ostali isti kao u regularnom modelu. Treba još primetiti da su početni uslovi dati sa $V_*(55) = 0$ i $V_\circledcirc(55) = V_\circledcirc(54) = 0$. U tabeli 5.7 iznosimo rezultate dobijene na osnovu diferencnih jednačina (5.15) i (5.16). Vidimo da je za ovakav tip osiguranja jednokratna premija 635,0827, a da je setimo se za regularno osiguranje bez perioda čekanja jednokratna premija bila 706,0265. Zbog ovog dodatka osiguranju, bilo je i očekivano da će ukupna premija biti manja, jer period čekanja zapravo smanjuje potencijalnu dobit za osiguranika, pa je logično da takva polisa košta manje.

Posmatrajmo još jednom model invalidskog osiguranja. Takav model ima najmanje tri stanja $\{*, \circledcirc, \circledast\}$, i odgovarajuće prelazne verovatnoće.
U razmatranju koje je pred nama, uvrstićemo u model par činjenica koje će model učiniti realnijim. Ideja je da stanje $\circledcirc$ podelimo na više stanja $\circledcirc_1, \circledcirc_2, ..., \circledcirc_n$ gde $\circledcirc_k$, označava da je osiguranik u stanju invaliditeta u intervalu $[k-1, k)$. Znači, kada se osiguranik povredi on prelazi iz stanja $*$, u stanje $\circledcirc_1$. Kada prođe godina dana, osiguranik ako ne postane aktivan, prelazi iz stanja $\circledcirc_1$ u stanje $\circledcirc_2$. Stanje $\circledcirc_n$ ima posebno značenje, naime, ako osiguranik nije ozdravio u prvih $n-1$ godina, pretpostavljamo da više ni ne može da ozdravi, pa kada dođe u stanje $\circledcirc_n$, verovatnoća reaktivacije

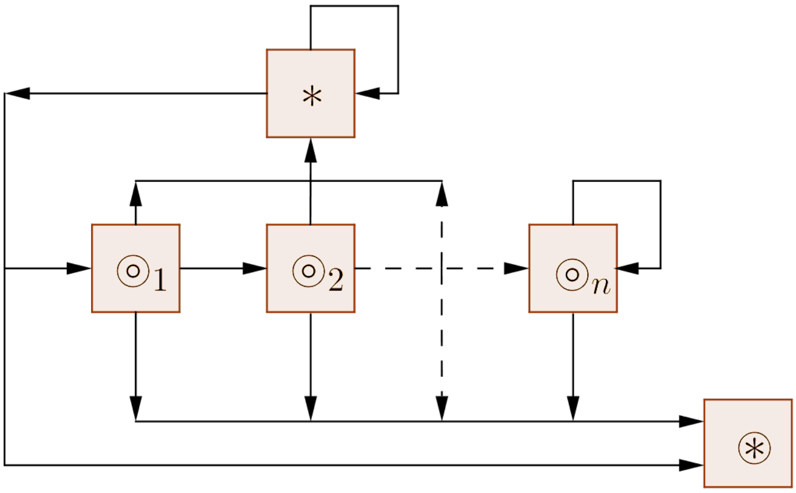
Tabela 5.7: Matematička rezerva za stanja $*$ i $\circledcirc$ uključujući period čekanja

Starost	$V_*(t)$	$V_\circledcirc(t)$
55	0	0
54	0	0
53	0	5000
52	22,9793	9.527,2
51	60,5296	13.632
50	106,5659	17.361
45	350,9330	31.579
40	517,1597	40.658
35	599,9383	46.545
30	630,8007	50.396
25	**635,0827**	52.925

postaje 0. Sa druge strane, dok osiguranik prelazi iz stanja $\circledcirc_k$ u stanje $\circledcirc_{k+1}$, verovatnoća da osiguranik umre raste, dok se njegova verovatnoća reaktivacije smanjuje, dok konačno ne postane jednaka nuli nakon $n-1$ godina, tj. dok osiguranik ne stigne u stanje $\circledcirc_n$. Na slici koja sledi 5.2, prikazana je opisana ideja modela. Napomenimo da dalje uopštavanje modela može ići u pravcu pretpostavljanja da nemamo jedan tip invaliditeta, već više njih, $\circledcirc^1, \circledcirc^2, ..., \circledcirc^m$, pa tek nakon toga posmatrati stanja $\circledcirc^k_1, \circledcirc^k_2, ..., \circledcirc^k_n$. Međutim, time se ne bavimo u radu jer je dovoljno izanalizirati model za samo jedan (opšti) tip invaliditeta.
Navedimo funkcije kojima ćemo modelirati prelazne verovatnoće:

$$\begin{aligned}
p_{*\circledast}(x) &= \exp(-7.85785 + 0.01538x + 0.000577355x^2),\\
p_{*\circledcirc_1}(x) &= 3\cdot 10^{-4}\cdot(8.4764 - 1.0985x + 0.055x^2),\\
p_{\circledcirc_k *}(x) &= \begin{cases}\exp(-0.94(k-1))\cdot\sigma(x,k), & k<n,\\ \quad 0, & \text{inače},\end{cases}\\
\sigma(x,k) &= 0.008\cdot 2k + p_{*\circledast}(x),\\
p_{**}(x) &= 1 - p_{*\circledcirc_1}(x) - p_{*\circledast}(x),\\
p_{\circledcirc_k\circledcirc_{k+1}}(x) &= 1 - p_{\circledcirc_k *}(x) - p_{\circledcirc_k\circledast}(x).
\end{aligned}$$

Za računanje rezervi potrebna nam je još funkcija koja modelira penziona plaćanja, $a^{\text{Pre}}_{\circledcirc_k}$. Pretpostavimo, radi jednostavnosti da buduća penzija iznosi



Slika 5.2: Poboljšani model invalidskog osiguranja

1 novčanih jedinica, da osiguranik kupuje osiguranje sa 25 godina, i da traje sve dok osiguranik ne napuni 65 godina. Tada je:

$$a_{\circledcirc_k}^{\mathrm{Pre}}(x) = \begin{cases} 1, & x < 65, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

U tabeli 5.8 koja sledi izloženi su rezultati za $n = 2$ i $n = 3$. Jasno, što je n veće to je model precizniji, jer bolje opisuje realnost, pa dobijamo realniju, pošteniju cenu polise. Za $n = 2$, cena polise je $1,9491$, dok je za $n = 3$ ona manja, i iznosi $1,6980$ novčanih jedinica.
Pitanje koje se nameće je, koliko treba da bude n da bi greška modela bila manja od zadate granice. Funkcija u MatLab-u *OptimalnoN*, koja se nalazi u dodatku rada, daje odgovor na postavljeno pitanje. Ako zadamo da je granica (greška) 5%, i kamatna stopa 4%, dobijamo da je optimalno uzeti $n = 5$. Dok ako je granica 1%, dobijamo da je optimalno uzeti $n = 10$. Slika 5.3 koja sledi, pokazuje rezerve za stanje $*$, u zavisnosti od n.

U nastavku govorimo o polisi mešovitog osiguranja iz već pominjanog primera 5.3.1. Želimo da analiziramo slučaj ako kamatna stopa nije fiksna, već varijabilna, tj. slučajna promenljiva. Naime, pretpostavka da stopa ostaje fiksna tokom celokupnog trajanja polise nije utemeljena u realnosti, pa želimo da to nekako izmenimo. Pretpostavljamo da kamatna stopa ima slobodan hod, odnosno da može sa pozitivnom verovatnoćom i da pada i da raste. Na šemi koja sledi dat je prikaz kakav hod posmatramo. U realnosti šemu

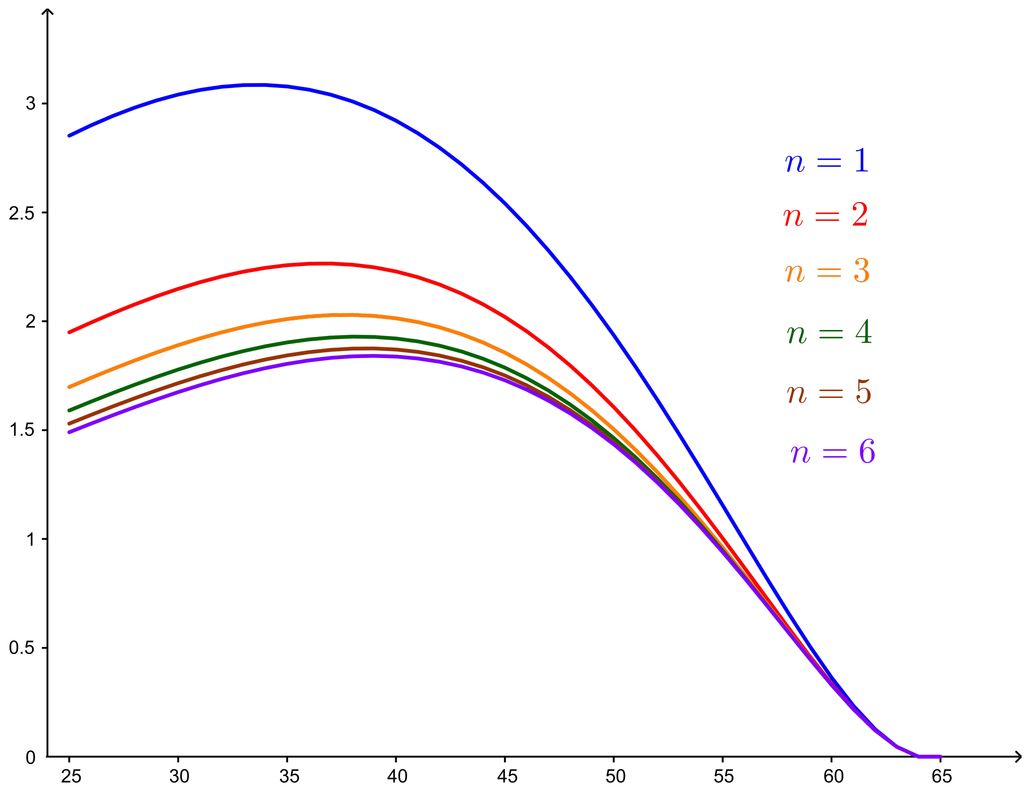
Tabela 5.8: Poboljšani model invalidskog osiguranja, $n = 2$ i $n = 3$

Starost	$V_*(t)$	$V_{\circledcirc_1}(t)$	$V_{\circledcirc_2}(t)$	$V_*(t)$	$V_{\circledcirc_1}(t)$	$V_{\circledcirc_2}(t)$	$V_{\circledcirc_3}(t)$
65	0	0	0	0	0	0	0
64	0	1	1	0	1	1	1
63	0,0455	1,8332	1,9365	0,0455	1,8332	1,8892	1,9288
62	0,1216	2,6010	2,8150	0,1216	2,5621	2,7114	2,7930
61	0,2204	3,3091	3,6405	0,2188	3,2247	3,4726	3,5983
60	0.3355	3,9626	4,4172	0,3306	3,8272	4,1781	4,3500
55	1,0034	6,5493	7,6884	0,9608	6,1067	7,0184	7,4426
50	1,6060	8,2535	10,1655	1,5039	7,4727	8,9893	9,6932
45	2,0202	9,3024	12,0630	1,8561	8,1974	10,3450	11,3515
40	2,2288	9,8437	13,5249	2,0137	8,4539	11,2506	12,5815
35	2,2575	9,9842	14,6541	2,0103	8,3645	11,8213	13,4968
30	2,1488	9,8077	15,5272	1,8902	8,0219	12,1414	14,1791
25	**1,9491**	9,3841	16,2023	**1,6980**	7,5006	12,2748	14,6881

sa hodom stope možemo praviti na osnovu predviđanja koja daje centralna banka, ili neka druga finansijska institucija. Posmatrajući šemu, vidimo da smo pretpostavili da u budućnosti kamatna stopa ima veće šanse da raste nego da opada.
Neka je u trenutku kupovine polise stopa 5%, kao i u originalnom modelu, nakon godinu dana stopa će biti slučajna promenljiva koja izgleda:

$$r : \begin{pmatrix} 4,5 & 4.7 & 4.9 & 5 & 5.1 & 5.3 & 5.5 \\ 0 & 0 & 0.35 & 0.2 & 0.45 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Stanje	**Komentar**	**Kamatna stopa (%)**	p_{ii-1}	p_{ii}	p_{ii+1}
1	Min. stopa	4.5	0.00	0.5	0.50
2		4.7	0.35	0.2	0.45
3		4.9	0.35	0.2	0.45
4	Početna stopa	5	0.35	0.2	0.45
5		5.1	0.35	0.2	0.45
6		5.3	0.35	0.2	0.45
7	Maks. stopa	5.5	0.50	0.5	0.00



Slika 5.3: Rezerve za aktivnu osobu u zavisnosti od n

Traženjem očekivanja dolazimo do vrednosti kamatne stope za sledeći period. Analogno, konstruisanjem matrice prelaza i korišćenjem Chapman-Kolmogorov jednačine dolazimo do slučajnih promenljivih, koje opisuju kamatnu stopu za ostale periode, u kojima polisa važi. Nakon traženja očekivanja, dolazimo do konkretnih vrednosti koje zatim koristimo u Thieleovoj diferencnoj jednačini. Korišćenjem funkcije *StohastickaKStopa* u MatLab-u, koja se nalazi u dodatku rada, dobijamo rezultate za matematičke rezerve, koji su izloženi u tabeli 5.9.
Posmatrajući tabelu vidimo da je dobijena cena polise 2.046 novčanih jedinica, što je manje nego u originalnom modelu, gde smo dobili 2.112. S obzirom da smo pretpostavili da stopa raste sa većom šansom nego što opada, to je bilo i očekivano. Sa druge strane, da smo pretpostavili da sa većom verovatnoćom stopa opada, sigurno bi dobili za cenu polise broj veći od 2.112.

Tabela 5.9: Matematička rezerva: Varijabilna i fiksna stopa

Starost	$\hat{V}_*(t, A_*)$	$\hat{V}_*(t, A_{*\circledast})$	$\hat{V}_*(t)$	$V_*(t, A_*)$	$V_*(t, A_{*\circledast})$	$V_*(t)$
65	12.500	0	12.500	12.500	0	12.500
64	11.673	218	11.891	11.686	219	11.905
63	10.916	406	11.321	10.941	407	11.347
62	10.221	566	10.787	10.257	568	10.824
61	9.582	703	10.285	9.627	705	10.332
60	8.994	818	9.812	9.046	821	9.868
55	6.644	1.160	7.803	6.721	1.167	7.888
50	4.995	1.247	6.242	5.081	1.259	6.340
45	3.801	1.202	5.002	3.887	1.217	5.104
40	2.916	1.092	4.007	2.998	1.109	4.106
35	2.250	957	3.206	2.324	974	3.298
30	1.744	818	2.562	1.808	834	2.642
25	1.358	688	**2.046**	1.410	702	**2.112**

Glava 6

Markov model u neprekidnom vremenu

6.1 Uvod

U razmatranju koje je iza nas izveli smo Markov model u diskretnom vremenu, i dokazali Thiele-ovu diferencnu jednačinu koju smo kasnije primenili na različitim polisama osiguranja. Ona se pokazala kao dosta jednostavan alat za rukovanje, ali pod određenim pretpostavkama što zapravo indukuje izvesne greške i netačnosti. U glavi koja je pred nama, imamo za cilj da posmatramo model osiguranja kroz neprekidno vreme i dokažemo Thiele-ovu diferencijalnu jednačinu kao i da je primenimo na različite polise osiguranja, i rezultate uporedimo sa onim koji su dobijeni u diskretnom modelu.
Kao što i sam naslov kaže, polise sada posmatramo kroz neprekidno vreme, tj. dozvoljavamo u modelu da osiguranik pređe iz stanja u stanje tj. da se povredi ili umre bilo kad, a ne kao u diskretnom modelu samo na kraju godine tj. vremenskog perioda. Zato sada očekujemo preciznije rezultate, koji će se za nijansu razlikovati od onih dobijenih u diskretnom modelu, ali samim tim i nešto komplikovaniji put do tih rezultata.

6.2 Thieleova diferencijalna jednačina

Teorema 6.2.1. *(Thieleova diferencijalna jednačina) Neka* $(X_t)_{t\in T}$, a_{ij}, a_i *i* δ_t *čine regularan model osiguranja, takođe neka je* $da_g(t)$ *apsolutno neprekidan u odnosu na Lebesquovu meru* λ, *tj.* $da_g(t) = a_g(t)d\lambda$. *Tada za* $\delta_t = \delta$, *važi sledeća jednakost:*

$$\frac{d}{dt}W_j^+(t) = -v(t)\Big\{a_j(t) + \sum_{\substack{g\in\mathcal{S}\\ g\neq j}} \mu_{jg}(t)a_{jg}(t)\Big\} + \mu_j(t)W_j^+(t) - \sum_{\substack{g\in\mathcal{S}\\ g\neq j}} \mu_{jg}(t)W_g^+(t).$$

Dokaz. Neka je $j \in \mathcal{S}$, $t \in \mathbb{R}$ i $\Delta t > 0$. Na osnovu Leme 5.2.1 znamo da važi

$$\begin{aligned} W_j^+(t) = &\sum_{g\in\mathcal{S}} p_{jg}(t,u)W_g^+(u) \\ &+ \int_{(t,u]} v(t)\sum_{g\in\mathcal{S}} p_{jg}(t,\tau)\Big\{da_g(\tau) + \sum_{\substack{h\in\mathcal{S}\\ h\neq g}} a_{gh}(\tau)\mu_{gh}(\tau)d\tau\Big\}. \end{aligned}$$

Aproksimacijom integrala formulom levih pravougaonika dobijamo,

$$\begin{aligned} W_j^+(t) =& v(t)\Big\{a_j(t) + \sum_{\substack{g\in\mathcal{S}\\ g\neq j}} \mu_{jg}(t)a_{jg}(t)\Big\}\Delta t \\ &+ (1-\Delta t\mu_j(t))W_j^+(t+\Delta t) \\ &+ \sum_{\substack{g\in\mathcal{S}\\ g\neq j}} \Delta t\mu_{jg}(t)W_g^+(t+\Delta t) + o(t), \end{aligned} \tag{6.1}$$

gde smo koristili sledeće poznate identitete:

$$\begin{aligned} p_{jj}(t,t+\Delta t) &= 1 - \Delta t\mu_j(t) + o(t), \\ p_{jk}(t,t+\Delta t) &= \Delta t\mu_{jk}(t) + o(t). \end{aligned}$$

Jednakost (6.1) daje

$$\begin{aligned} \frac{W_j^+(t+\Delta t) - W_j^+(t)}{\Delta t} =& - v(t)\Big\{a_j(t) + \sum_{\substack{g\in\mathcal{S}\\ g\neq j}} \mu_{jg}(t)a_{jg}(t)\Big\} \\ &+ \mu_j(t)W_j^+(t+\Delta t) \\ &- \sum_{\substack{g\in\mathcal{S}\\ g\neq j}} \mu_{jg}(t)W_g^+(t+\Delta t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}. \end{aligned}$$

Kada pustimo da $\Delta t \to 0$, dobijamo dokaz teoreme,

$$\frac{d}{dt}W_j^+(t) = -v(t)\Big\{a_j(t) + \sum_{\substack{g\in\mathcal{S}\\ g\neq j}} \mu_{jg}(t)a_{jg}(t)\Big\} + \mu_j(t)W_j^+(t) - \sum_{\substack{g\in\mathcal{S}\\ g\neq j}} \mu_{jg}(t)W_g^+(t).$$

$\square$

Nakon dokaza prethodne teoreme, imamo alat za računanje premija i rezervi, pa možemo preći na razmatranje primera koje smo posmatrali u diskretnom modelu, kao i upoređivanje dobijenih rezultata iz jednog i drugog modela.

Primer 6.2.1. Razmatramo polisu mešovitog životnog osiguranja identičnu kao u primeru 5.3.1 koja donosi 12.500 novčanih jedinica usled smrti i isto toliko usled doživljenja. Pretpostavimo da osoba kupuje polisu sa 25 godina, i da ona traje dok osoba ne napuni 65 godina. Zatim, neka je kamatna stopa 5%, i neka je funkcija

$$\mu_{*\circledast}(x) = \exp(-9.13275 + 8.09438 \cdot 10^{-2} \cdot x - 1.10180 \cdot 10^{-5} \cdot x^2),$$

prelazna stopa iz stanja $*$ u stanje $\circledast$. Koristeći Markov model u neprekidnom vremenu izračunati koliko iznose matematičke rezerve po godinama, kao i jednokratna premija.

Prvo što ćemo uraditi jeste formiranje sistema Thieleovih diferencijalnih jednačina, a zatim i njihovo rešavanje.
Za posmatranu polisu osiguranja, sistem ODJ je sledeći:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}W_*^+(t) = -v(t)\Big\{a_*(t) + \mu_{*\circledast}(t)a_{*\circledast}(t)\Big\} + \mu_*(t)W_*^+(t) - \mu_{*\circledast}(t)W_\circledast^+(t), \\ &\frac{d}{dt}W_\circledast^+(t) = 0. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Kako je $\mu_*(t) = \mu_{*\circledast}(t)$, kao i $a_*(t) = 0$, sistem (6.2) dobija sledeći oblik:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}W_*^+(t) = -v(t)\mu_{*\circledast}(t)a_{*\circledast}(t) + \mu_{*\circledast}(t)W_*^+(t), \\ &\frac{d}{dt}W_\circledast^+(t) = 0. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Praktično, dobili smo samo jednu diferencijalnu jednačinu, jer je druga jednačina očekivano pokazala da su rezerve u slučaju smrti kod posmatrane polise jednake nuli. Preostala jednačina je linearna ODJ sa početnim uslovom $W_*^+(65) = 12.500(1 + 0.05)^{-40}$ i ne može se lako rešiti zbog komplikovane funkcije $\mu_{*\circledast}(t)$, tako da ćemo je rešavati numeričkim putem, koristeći postupak Runge-Kutta 4. reda kao i do sada, uz pomoć programskog paketa MatLab.
Dobijeni rezultati za matematičke rezerve su prezentovani po godinama starosti osiguranika u tabeli 6.1, koja sledi. Pored dobijenih rezultata u tabeli

Tabela 6.1: Neprekidni model: Mešovito osiguranje

Godine starosti	$V_*^{\text{Cont}}(t)$	$V_*^{\text{Disc,Post}}(t)$	Razlika %
65	12.500	12.500	0 %
64	11.905	11.905	0.01 %
63	11.353	11.347	0.05 %
62	10.834	10.824	0.09 %
61	10.346	10.332	0.14 %
60	9.886	9.868	0.18 %
55	7.921	7.888	0.42 %
50	6.381	6.340	0.65 %
45	5.147	5.104	0.84 %
40	4.148	4.106	1.02 %
35	3.336	3.298	1.15 %
30	2.676	2.642	1.29 %
25	**2.141**	**2.112**	1.37 %

su prikazane i rezerve dobijene u diskretnom modelu. Ono što odmah vidimo jeste da se za odgovarajuće godine ne dobijaju iste vrednosti, takođe, vidimo da je uvek isti znak te razlike, tj. rezerve dobijene u neprekidnom modelu su uvek veće od onih dobijenih u diskretnom modelu. Razlog tome je pretpostavka u diskretnom modelu da osiguranik može umreti samo na kraju godine, ili posmatranog perioda što je u našem slučaju godina dana.
Sada na osnovu principa ekvivalencije, zaključujemo da je cena ove polise jednaka matematičkoj rezervi u trenutku kupovine/prodaje polise osiguranja, tj. 2.141 novčanih jedinica, što je više nego što smo dobili u diskretnom modelu, 2.112.
Nameće se pitanje, dobro, a šta bi se desilo da smo u diskretnom modelu pretpostavili da se promena stanja može desiti isključivo na početku godine. Kakvi bi onda bili dobijeni rezultati? Odgovor je dat u tabeli 6.2 koja sledi. Iz tabele primećujemo da je sada razlika između rezervi suprotna, tj. vrednosti dobijene diskretnim modelom su veće od rezervi dobijenih neprekidnim modelom, što je uostalom i bilo očekivano. Premija u ovom slučaju iznosi 2.147 novčanih jedinica, što je više nego u neprekidnom slučaju. Sada, na osnovu prethodne analize možemo zaključiti da je odnos jednokratnih pre-

Tabela 6.2: Neprekidni model: Mešovito osiguranje

Godine starosti	$V_*^{\text{Cont}}(t)$	$V_*^{\text{Disc,Pre}}(t)$	Razlika %
65	12.500	12.500	0 %
64	11.905	11.916	-0.09 %
63	11.353	11.368	-0.13 %
62	10.834	10.853	-0.17 %
61	10.346	10.367	-0.20 %
60	9.886	9.909	-0.23 %
55	7.921	7.946	-0.31 %
50	6.381	6.403	-0.34 %
45	5.147	5.165	-0.34 %
40	4.148	4.162	-0.33 %
35	3.336	3.346	-0.30 %
30	2.676	2.684	-0.30 %
25	**2.141**	**2.147**	-0.28 %

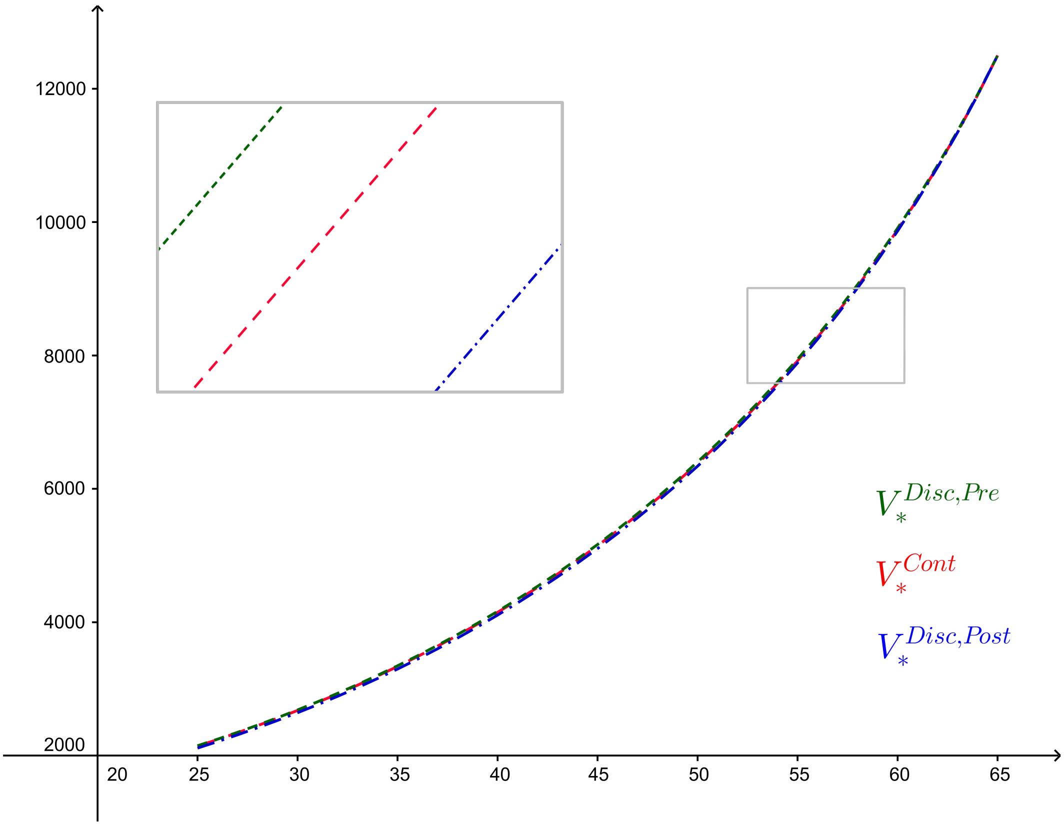
mija sledeći:

$$P^{\text{Disc,Post}} < P^{\text{Cont}} < P^{\text{Disc,Pre}}.$$

Na slici 6.1 vizuelno su prikazane rezerve dobijene neprekidnim i diskretnim modelom, kao i razlika između njih.

Primer 6.2.2. Razmotrimo dalje polisu životnog osiguranja identičnu kao u primeru 5.3.2. koja donosi 5.000 novčanih jedinica godišnje osiguraniku ukoliko postane neaktivan. Neka osiguranik kupuje polisu sa 25 godina, i neka polisa važi narednih 30 godina, dok osiguranik ne napuni 55 godina. Ako je kamatna stopa u trenutku kupovine polise 4%, izračunati matematičku rezervu u svim godinama u kojima je polisa definisana, kao i jednokratnu premiju.

Kao i u prethodnom primeru, pre svega formiramo sistem Thieleovih



Slika 6.1: Rezerve: Neprekidni i diskretni model

diferencijalnih jednačina, koji je za posmatrani primer dat sa:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}W_*(t) =& -v(t)\Big\{a_*(t) + \mu_{*\circledcirc}(t)a_{*\circledcirc}(t) + \mu_{*\circledast}(t)a_{*\circledast}(t)\Big\} \\ &+ \mu_*(t)W_*(t) - \mu_{*\circledcirc}(t)W_\circledcirc(t) - \mu_{*\circledast}(t)W_\circledast(t), \\ \frac{d}{dt}W_\circledcirc(t) =& -v(t)\Big\{a_\circledcirc(t) + \mu_{\circledcirc *}(t)a_{\circledcirc *}(t) + \mu_{\circledcirc\circledast}(t)a_{\circledcirc\circledast}(t)\Big\} \\ &+ \mu_\circledcirc(t)W_\circledcirc(t) - \mu_{\circledcirc *}(t)W_*(t) - \mu_{\circledcirc\circledast}(t)W_\circledast(t), \\ \frac{d}{dt}W_\circledast(t) =& \ 0. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Uzimajući u obzir da je $a_*(t) = a_{*\circledcirc}(t) = a_{*\circledast}(t) = a_{\circledcirc *}(t) = a_{\circledcirc\circledcirc}(t) = a_{\circledcirc\circledast}(t) = 0$, kao i da važi $\mu_*(t) = \mu_{*\circledast}(t) + \mu_{*\circledcirc}(t)$, $\mu_\circledcirc(t) = \mu_{\circledcirc *}(t) + \mu_{\circledcirc\circledast}(t)$, sistem (6.4) dobija sledeći oblik:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}W_*(t) = \mu_{*\circledcirc}(t)\Big(W_*(t) - W_\circledcirc(t)\Big) + \mu_{*\circledast}W_*(t),\\
&\frac{d}{dt}W_\circledcirc(t) = -v(t)a_\circledcirc(t) + \mu_{\circledcirc *}(t)\Big(W_\circledcirc(t) - W_*(t)\Big) + \mu_{\circledcirc\circledast}(t)W_\circledcirc(t), \qquad (6.5)\\
&\frac{d}{dt}W_\circledast = 0.
\end{aligned}
$$

Sistem (6.5) ima početne uslove $W_*(54) = 0$, i $W_\circledcirc(54) = 5000 \cdot (1 + 0.4)^{-29}$. Funkcije prelaznih stopa, modeliramo identično primeru 5.3.2 sa funkcijama:

$$
\begin{aligned}
&\mu_{*\circledast}(x) = \mu_{\circledcirc\circledast}(x) = 0.0005 + 10^{0.038x-4.12},\\
&\mu_{*\circledcirc}(x) = 0.0004 + 10^{0.06x-5.46},\\
&\mu_{\circledcirc *}(x) = 0.05.
\end{aligned}
$$

Rešavanjem sistema (6.5) numeričkim putem dobijamo rezultate koji su prezentovani u tabeli 6.3 koja sledi. Vidimo da rezultati jasno pokazuju da

Tabela 6.3: Neprekidni model: Matematička rezerva za stanja $*$ i $\circledcirc$

Starost	$V_*^{\text{Cont}}(t)$	$V_\circledcirc^{\text{Cont}}(t)$	$V_*^{\text{Disc}}(t)$	$V_\circledcirc^{\text{Disc}}(t)$
55	0	0	0	0
54	0	5.000	0	5.000
53	42	9.349	27	9.527
52	99	13.324	71	13.634
51	164	16.958	125	17.365
50	232	20.282	183	20.759
45	533	33.097	454	33.750
40	708	41.298	619	42.080
35	778	46.540	693	47.492
30	789	49.883	712	51.034
25	**771**	52.009	**706**	53.359

postoji razlika između rezervi dobijenih diskretnim i neprekidnim modelom. Rezerve za stanje $*$, $V_*^{\text{Cont}}(t)$, su u svakoj godini, u kojoj je polisa definisana, veće od onih iz diskretnog slučaja, dok su rezerve za stanje $\circledcirc$, $V_\circledcirc^{\text{Cont}}(t)$, u svakoj godini manje od odgovarajućih vrednosti u diskretnom modelu. Opet se postavlja pitanje kao u prethodnom primeru da li je to slučajno ili ne? Odgovor je ne, i razlog tome je ponovo činjenica da smo u diskretnom modelu pretpostavili da se promene iz stanja u stanje mogu desiti isključivo na kraju godine. To je razlog što sada imamo veću jednokratnu premiju, $P = 771$, za razliku od diskretnog modela. Sa druge strane, da smo u diskretnom Markovom modelu pretpostavili da se promene isključivo mogu desiti na početku vremenskog intervala, u našem slučaju godine, razlika bi bila suprotna.

Zaključak

Danas u svetu aktuarstva postoji više metoda za izračunavanje visine premije i matematičkih rezervi kod polisa životnog osiguranja. Thieleova diferencna i diferencijalna jednačina imaju dugu istoriju postojanja i primene u svetu životnog osiguranja. To postojanje, definitivno, posledica je činjenice da razmatrane jednačine (sistemi jednačina) nude jedan relativno jednostavan i efikasan metod modeliranja polisa životnog osiguranja, nezavisno kakav je posmatrani skup stanja S, i nezavisno koliko osoba je obuhvaćeno tom polisom osiguranja.
Osnosni cilj ovog rada bio je ne izmišljanje novog modela, jer pomenuti modeli postoje u teoriji već dugi niz godina, vez upoređivanje rezultata, i davanje komentara o uzrocima zašto su dobijeni odnosi između premija i rezervi kod različitih modela baš takvi. Takođe, rad je u nekim segmentima prilagodio osnovni model (diskretni) modifikacijama nekih polisa životnog i invalidskog osiguranja, npr. period čekanja, varijabilna kamatna stopa i dr.
Sam rad tj. model stoji na nekoliko baznih pretpostavki koje ćemo prodiskutovati, i ponuditi eventualne alternative.
Pre svega, princip ekvivalencije na osnovu koga vrednujemo posmatrane polise, kaže da ako je X slučajna promenljiva koja predstavlja potencijalne dobitke za osiguranika, $E[X]$ će biti cena (jednokratna premija) te polise. Jedna od osnovnih teorema aktuarske matematike kaže da je $E[X]$ najmanja vrednost za koju osiguravajuće društvo ima interes da proda polisu, dok primetimo, sa druge strane, $E[X]$ predstavlja najpovoljniju moguću cenu polise za potencijalnog kupca. Obično se društva odlučuju da vrednost $E[X]$ uvećaju za odrećeni procenat, pa premija bude $P = (1 + r)E[X]$. Kako postoje i druge metode određivanja visine premije, čitaoce upućujemo na knjigu [7]. Takođe, u radu smo posmatrali da je kamatna stopa fiksna. Na lak način se može implementirati u model da kamatna stopa prati neku drugu proizvoljnu determinističku funkciju $r(t)$. Međutim, ideja koja je u radu samo načeta jeste posmatranje kamatne stope kroz slučajne procese. Naime, šta ako r_t zadovoljava stohastičku diferencijalnu jednačinu

$$dr_t = \alpha(\rho - r_t)dt + \sigma dW_t, \tag{6.6}$$

gde je $\alpha > 0$, $\rho, \sigma \in \mathbb{R}$, i W_t Brownovo kretanje. Stvari se tada uopštavaju i postaju dosta komplikovanije, ali samim tim i relevantnije u primeni. Knjige i radovi u kojima je analizirana pomenuta tema su [6], [15].
Nastavak rada može dalje ići u pravcu konstruisanja funkcije raspodele matematičke rezerve, analiziranja poznate Hattendorffove teoreme [12], [9], posmatranju unit-linked polisa osiguranja [6], itd. međutim neka to bude tema za neki drugi master rad.

Bibliografija

[1] Boyse W.E., DiPrima R.C., *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems,* John Wiley & Sons

[2] Buhlmann H., *Life insurance with stochastic interest rate,* Springer, 1995.

[3] Gerber H.U., *Life insurance mathematics,* Springer, 1995.

[4] Herceg D., Krejić N., *Numerička analiza,* Stylos art, Novi Sad, 1998.

[5] Hesselager O., Norberg R., *On probability distributions of present values in life insurance,* J. Insur. Math. Econ. 1996.

[6] Koller M., *Stochastic Models in Life Insurance,* Springer, 2010.

[7] Krugman S.A., Panjer H. H., Willmot G.E., *Loss Models,* John Wiley & Sons, 2004.

[8] Lozanov-Crvenković Z., *Statistika,* PMF Novi Sad, 2012.

[9] Moller C.M., *Numerical evaluation of markov transition probabilities based on discretized product integral,* Scand. Actuar. J. 1992.

[10] Norberg R., *Payment measures, interest, and discounting,* Scand. Actuar. J. 1990.

[11] Norberg R., *Reserves in life and pension insurance,* Scand. Actuar. J. 1991.

[12] Norberg R., *Hattendorff's theorem and Thiele's differential equation generalized,* Scand. Actuar. J. 1992.

[13] Norberg R., *Differential equations for higher order moments of present values in life insurance,* Scand. Actuar. J. 1994.

[14] Norberg R., *Addendum to Hattendorff's theorem and Thiele's differential equation generalized,* Scand. Actuar. J. 1996.

[15] Norberg R., Moller C.M., *Thiele's differential equation by stochastic interest rate of diffusion,* Scand. Actuar. J. 1996.

[16] Norberg R., *Basic Life Insurance Mathematics,* Version: Septembar 2002.

[17] Pilipović S., Seleši D., *Mera i Integral,* Zavod za udžbenike, Beograd, 2012.

[18] Promislow D.S., *Fundamentals of Actuarial Mathematics,* John Wiley & Sons, 2008.

[19] Protter P., *Stochastic Integration and Differential Equations,* Springer, 1990.

[20] Rajter-Ćirić D., *Verovatnoća,* PMF Novi Sad, 2009.

Dodatak radu

Rezultati na osnovu kojih je prikazana slika 2.1 dobijeni su funkcijama:

```
function res=PomocnaFja(x)

res=exp(-9.13275+8.09438*10^(-2)*x-1.10180*10^(-5)*x^2);
```

```
function res=StopaSmrtnosti(x0,x)

% Verovatnoca da osoba umre za konkretnu godinu, pocev od x0 do x-te godine
int=[x0:1:x];
n=size(int,2);
res=[];
for i=1:n
    res=[res PomocnaFja(int(i))];
end
```

```
function res=SimpsonovaFla(x0,x)

% Aproksimacija integrala Simpsonovom kvadraturnom formulom
h=0.001;
int=[x0:h:x];
n=size(int,2);
sum=0;
for i=1:n-1
    br=(h/6)*(PomocnaFja(int(i))+PomocnaFja(int(i+1))+4*PomocnaFja((int(i)+int(i+1))/2));
    sum=sum+br;
end
res=sum;
```

```
function res=Verovatnoce(x0,x)

% Verovatnoce dozivljenja pocev od x0 godine pa do x-te
int=[x0:1:x];
n=size(int,2);
res=[];
for i=1:n
    res=[res;exp(-SimpsonovaFla(x0,int(i)))];
end
```

Rezultati u tabelama 2.1 i 2.2 dobijeni su funkcijama:

```
function res=PomocnaF1(x,y)

res=-y*(0.0004+10^(0.065*x-5.46)+0.005+10^(0.0038*x
    -4.12));

end
```

```
function res=PomocnaF2(x,y,z)

res=-z*(0.005+10^(0.0038*x-4.12))+y*(0.0004+10^(0.065*x
    -5.46));
```

```
function res=PomocnaF3(x,y,z)

res=(z+y)*(0.005+10^(0.0038*x-4.12));

end
```

```
function res=SistemDiferencijalnihJna(g1,g2,h)

%Resavanje sistema diferencijalnih jednacina metodom
    Runge-Kuta 4. reda.
int=[g1:h:g2];
ver=[1 0 0];
n=size(int,2);
for i=1:n
    k0=[PomocnaF1(int(i),ver(i,1)) PomocnaF2(int(i),ver
        (i,1),ver(i,2)) PomocnaF3(int(i),ver(i,1),ver(i
        ,2))];
```

```
    k1=[PomocnaF1(int(i)+h/2,ver(i,1)+h/2*k0(1)) PomocnaF2(int(i)+h/2,ver(i,1)+h/2*k0(2),ver(i,2)+h/2*k0(2)) PomocnaF3(int(i)+h/2,ver(i,1)+h/2*k0(3),ver(i,2)+h/2*k0(3))];
    k2=[PomocnaF1(int(i)+h/2,ver(i,1)+h/2*k1(1)) PomocnaF2(int(i)+h/2,ver(i,1)+h/2*k1(2),ver(i,2)+h/2*k1(2)) PomocnaF3(int(i)+h/2,ver(i,1)+h/2*k1(3),ver(i,2)+h/2*k1(3))];
    k3=[PomocnaF1(int(i)+h,ver(i,1)+h*k2(1)) PomocnaF2(int(i)+h,ver(i,1)+h*k2(2),ver(i,2)+h*k2(2)) PomocnaF3(int(i)+h,ver(i,1)+h*k2(3),ver(i,2)+h*k2(3))];
    ver=[ver;ver(i,:)+h/6*(k0+2*k1+2*k2+k3)];
end
res=[];
for i=1:n
    if mod(int(i),5)==0
        res=[res;int(i) ver(i,:)];
    end
end
```

```
function res=PomocnaF12(x,y)

res=-y*(0.005+10^(0.0038*x-4.12));
```

```
function res=PomocnaF22(x,y)

res=y*(0.005+10^(0.0038*x-4.12));
```

```
function res=SistemDiferencijalnihJna2(g1,g2,h)

%Resavanje sistema diferencijalnih jednacina metodom Runge-Kuta 4. reda.
int=[g1:h:g2];
ver=[1 0];
n=size(int,2);
for i=1:n
    k0=[PomocnaF12(int(i),ver(i,1)) PomocnaF22(int(i),ver(i,1))];
    k1=[PomocnaF12(int(i)+h/2,ver(i,1)+h/2*k0(1)) PomocnaF22(int(i)+h/2,ver(i,1)+h/2*k0(2))];
```

```
    k2=[PomocnaF12(int(i)+h/2,ver(i,1)+h/2*k1(1)) PomocnaF22(int(i)+h/2,ver(i,1)+h/2*k1(2))];
    k3=[PomocnaF12(int(i)+h,ver(i,1)+h*k2(1)) PomocnaF22(int(i)+h,ver(i,1)+h*k2(2))];
    ver=[ver;ver(i,:)+h/6*(k0+2*k1+2*k2+k3)];
end
res=[];
for i=1:n
    if mod(int(i),5)==0
        res=[res;int(i) ver(i,:)];
    end
end
```

Rezultati u tabelama 5.1 i 5.9 dobijeni su funkcijama:

```
function res=PomocnaF(x)

res=exp(-9.13275+8.09438*10^(-2)*x-1.10180*10^(-5)*x^2);
```

```
function res=MesovitoOsiguranje(r,dead,endow,g1,g2)

% Racunanje matematicke rezerve: Mesovito osiguranje
EndowRes=[endow];
DeadRes=[0];
MathRes=[endow];
n=g2-g1;
for i=1:n
    EndowRes=[EndowRes;(1+r)^(-1)*(1-PomocnaFja(g2-i))*EndowRes(i)];
    DeadRes=[DeadRes;(1/(1+r))*PomocnaFja(g2-i)*dead+(1+r)^(-1)*(1-PomocnaFja(g2-i))*DeadRes(i)];
    MathRes=[MathRes;EndowRes(i+1)+DeadRes(i+1)];
end
res=[];
for i=1:n+1
        res=[res;g2-i+1 EndowRes(i) DeadRes(i) MathRes(i)];
end
```

```
function res=StohastickaKStopa(r,dead,endow,g1,g2,vce,VekStopa)
```

```
m=size(vce,2);
BrStanja=size(VekStopa,2);
if (mod(m,2)~=0 && mod(BrStanja,2)~=0)
      McaPrelaza=zeros(BrStanja,BrStanja);
      for i=1:(m-1)/2
            for j=i:(m-1)/2+i
            McaPrelaza(i,j)=1/((m-1)/2+1);
            McaPrelaza(BrStanja-i+1,BrStanja-j+1)=1/((m-1)
                /2+1);
            end
      end
      for l=1+(m-1)/2:BrStanja-(m-1)/2
            for k=l-(m-1)/2:l-(m-1)/2+m-1
                  McaPrelaza(l,k)=vce(k-l+(m-1)/2+1);
            end
      end
      P=McaPrelaza;
      n=g2-g1;
      KS=[r VekStopa*McaPrelaza((BrStanja+1)/2,:)'];
      for i=1:n-2
            P=P*McaPrelaza;
            KS=[KS VekStopa*P((BrStanja+1)/2,:)'];
      end
      EndowRes=[endow];
      DeadRes=[0];
      MathRes=[endow];
      for i=1:n
            EndowRes=[EndowRes;(1+KS(n-i+1))^(-1)*(1-
                PomocnaFja(g2-i))*EndowRes(i)];
            DeadRes=[DeadRes;(1/(1+KS(n-i+1)))*PomocnaFja(
                g2-i)*dead+(1+KS(n-i+1))^(-1)*(1-PomocnaFja(
                g2-i))*DeadRes(i)];
            MathRes=[MathRes;EndowRes(i+1)+DeadRes(i+1)];
      end
      res=[];
      for i=1:n+1
              res=[res;g2-i+1 EndowRes(i) DeadRes(i) MathRes
                  (i)];
      end
else
```

```
    disp('Broj elemenata u ulaznom vektoru "vce" mora
       biti neparan!');
end
```

Rezultati u tabelama 5.4 i 5.7 dobijeni su funkcijama:

```
function res=PomocnaFja1(x)

res=0.0005+10^(0.038*x-4.12);

end
```

```
function res=PomocnaFja2(x)

res=0.0004+10^(0.06*x-5.46);

end
```

```
function res=InvalidskoOsiguranje(r,g1,g2,dobit)

%Matematicka rezerva za stanja aktivan i neaktivan
% V1-rezerve za stanje aktivan
% V2-rezerve za stanje neaktivan
%0.05 je verovatnoca reaktivacije osiguranika
n=g2-g1;
v=(1+r)^(-1);
V1=[0];
V2=[0];
for i=1:n+1
    V1=[V1;v*PomocnaFja2(g2-i)*V2(i)+v*(1-PomocnaFja1(
       g2-i)-PomocnaFja2(g2-i))*V1(i)];
    V2=[V2;dobit+v*(1-0.05-PomocnaFja1(g2-i))*V2(i)+v
       *0.05*V1(i)];
end
res=[];
for i=1:n+1
    res=[res;g2-i+1 V1(i) V2(i)];
end
```

```
function res=PeriodCekanja(r,g1,g2,dobit)

% Invalidsko osiguranje za perio cekanja od godinu dana
```

```
%V1 je matematicka rezerva za stanje zdrav
%V2 je matematicka rezerva za stanje neaktivan
%0.05 je verovatnoca reaktivacije osiguranika
n=g2-g1;
v=(1+r)^(-1);
V1=[0];
V2=[0;0];
for i=1:n+1
    V1=[V1;v^2*PomocnaFja2(g2-i)*V2(i)+v*(1-PomocnaFja1
        (g2-i))*V1(i)];
    V2=[V2;dobit+v*(1-0.05-PomocnaFja1(g2-i))*V2(i+1)+v
        *0.05*V1(i)];
end
res=[];
for i=1:n+1
    res=[res;g2-i+1 V1(i) V2(i)];
end
```

Rezultati u tabeli 5.6 dobijeni su funkcijama:

```
function res=PomocnaFja(x)

res=exp(-9.13275+8.09438*10^(-2)*x-1.10180*10^(-5)*x^2)
    ;
```

```
function res=OsiguranjeDeteta(r,g1,g2,g3,g4,dobit1,
    dobit2)

% Matematicke rezerve za osiguranje deteta
%r-kamatna stopa
%g1-starost oca u trenutku kupovine polise
%g2-starost majke u trenutku kupovine polise
%g3-starost deteta u trenutku kupovine polise
%g4-broj godina koliko traje polisa
%dobit1-iznos koji dobija dete uslet smrti jednog
    roditelja
%dobit2-iznos koji dobija dete usled smrti oba
    roditelja
V1=[0];%V1-rezerva kada su sva tri clana porodice ziva
V2=[0];%V2-rezerva kada je otac mrtav a majka i dete su
    zivi
```

```
V3=[0];%V3-rezerva kada je majka mrtva a otac i dete su zivi
v=(1+r)^(-1);
for i=1:g4
      v1=Pomocna(g1+g4-i);
      v2=Pomocna(g2+g4-i);
      v3=Pomocna(g3+g4-i);
      V1=[V1;v*(1-v1)*(1-v2)*(1-v3)*V1(i)+v*v1*(1-v2)*(1-v3)*(dobit1+V2(i))+v*(1-v1)*v2*(1-v3)*(dobit1+V3(i))+v*v1*v2*(1-v3)*dobit2];
      V2=[V2;v*(1-v2)*(1-v3)*V2(i)+v*v2*(1-v3)*dobit1];
      V3=[V3;v*(1-v1)*(1-v3)*V3(i)+v*v1*(1-v3)*dobit1];
end
res=[];
for i=1:g4+1
      res=[res;g4+5-i+1 V1(i) V2(i) V3(i)];
end
```

Rezultati dobijeni u tabeli 5.8, kao i optimalno n kod poboljšanog invalidskog osiguranja dobijeni su sledećim funkcijama:

```
function res=Pomocna1(x)

res=exp(-7.85785+0.01538*x+0.000577355*x^2);
```

```
function res=Pomocna2(x)

res=3*10^(-4)*(8.4764-1.0985*x+0.055*x^(2));
```

```
function res=Pomocna3(x,k)

res=exp(-0.94*(k-1))*(0.773763-0.01045*(x-k+1));
```

```
function res=Pomocna4(x,k)

res=0.008*k+Pomocna1(x);
```

```
function res=Pomocna5(x)

res=1-Pomocna1(x)-Pomocna2(x);
```

```
function res=Pomocna6(x,k)

res=1-Pomocna3(x,k)-Pomocna4(x,k);
```

```
function res=OpstiPoboljsaniModel(r,g1,g2,n,penzija)

%Poboljsani model invalidskog osiguranja za proizvoljno n
V=[g2 zeros(1,n+1)];
d=(1+r)^(-1);
for i=1:g2-g1
    v=[g2-i d*Pomocna5(g2-i)*V(i,2)+d*Pomocna2(g2-i)*V(i,3)];
    for j=1:n-1
        v=[v penzija+d*Pomocna3(g2-i,j)*V(i,2)+d*Pomocna6(g2-i,j)*V(i,j+3)];
    end
    v=[v penzija+d*(1-Pomocna4(g2-i,n))*V(i,n+2)];
    V=[V;v];
end
res=V;
```

```
function [res M]=OptimalnoN(r,g1,g2,nmax,epsilon,penzija)

M=[];
i=1;
while i<=nmax
    V=OpstiPobolj(r,g1,g2,i,penzija);
    v=V(:,2);
    obrnutoV=[];
    for l=1:size(v,1)
        obrnutoV=[obrnutoV v(size(v,1)-l+1)];
    end
    plot([g1:g2],obrnutoV);
    hold on
    M=[M v];
    i=i+1;
end
rezultati=[];
for i=1:nmax-1
```

```
        vek1=M(:,i);
        vek2=M(:,i+1);
        vek=vek1-vek2;
        broj=0;
        for j=1:size(vek,1)
            if vek(j)>=epsilon
                    broj=broj+1;
            end
        end
        rezultati=[rezultati broj];
end
zad=[];
for k=1:size(rezultati,2)
    if rezultati(k)==0
        zad=[zad k];
    end
end
res=zad(1);
```

Rezultati u tabeli 6.1 dobijeni su funkcijama:

```
function res=FjaPomocna(t,x,y,r,dead)

if t>=39
    res=0;
else
    res=-(1+r)^(-t)*exp(-9.13275+8.09438*10^(-2)*(x+t)
        -1.10180*10^(-5)*(x+t)^2)*dead+exp
        (-9.13275+8.09438*10^(-2)*(x+t)-1.10180*10^(-5)
        *(x+t)^2)*y;

end
```

```
function res=NeprekidnoMesovitoOsiguranje(r,g1,g2,h,
    dead,endow)

v=(1+r)^(-1);
W=[endow*v^(g2-g1)];
int=[0:h:g2-g1];
n=size(int,2);
for i=1:n
```

```
    k0=FjaPomocna(int(n-i+1),g1,W(i),r,dead);
    k1=FjaPomocna(int(n-i+1)+h/2,g1,W(i)+h/2*k0,r,dead);
    k2=FjaPomocna(int(n-i+1)+h/2,g1,W(i)+h/2*k1,r,dead);
    k3=FjaPomocna(int(n-i+1)+h,g1,W(i)+h*k2,r,dead);
    W=[W;W(i,:)-h/6*(k0+2*k1+2*k2+k3)];
end
PomW=[];
for i=1:n
    if mod(int(i),1)==0
        PomW=[PomW;W(i)];
    end
end
res=[];
for i=1:size(PomW,1)
    res=[res;g2-i+1 PomW(i)*(1+r)^(g2-g1-i+1)];
end
```

Rezultati dobijeni u tabeli 6.3 dobijeni su funkcijama:

```
function res=Fja1Pomocna(t,x,y1,y2)

res= (0.0004+10^(0.06*(x+t)-5.46))*(y1-y2)+(0.0005+10^(0.038*x-4.12))*y1;
```

```
function res=Fja2Pomocna(t,x,y1,y2,r,dobit)

res= -(1+r)^(-t)*dobit+0.05*(y2-y1)+(0.0005+10^(0.038*x-4.12))*y2;
```

```
function res=NeprekidnoInvalidskoOsiguranje(r,g1,g2,h,dobit)

W=[0 dobit*(1+r)^(-g2+g1+1)];
int=[0:h:g2-g1-1];
n=size(int,2);
for i=1:n
    k0=[Fja1Pomocna(int(n-i+1),g1,W(i,1),W(i,2)) Fja2Pomocna(int(n-i+1),g1,W(i,1),W(i,2),r,dobit)];
```

```
        k1=[Fja1Pomocna(int(n-i+1)+h/2,g1,W(i,1)+h/2*k0(1),W(i,2)+h/2*k0(1)) Fja2Pomocna(int(n-i+1)+h/2,g1,W(i,1)+h/2*k0(2),W(i,2)+h/2*k0(2),r,dobit)];
        k2=[Fja1Pomocna(int(n-i+1)+h/2,g1,W(i,1)+h/2*k1(1),W(i,2)+h/2*k1(1)) Fja2Pomocna(int(n-i+1)+h/2,g1,W(i,1)+h/2*k1(2),W(i,2)+h/2*k1(2),r,dobit)];
        k3=[Fja1Pomocna(int(n-i+1)+h,g1,W(i,1)+h*k2(1),W(i,2)+h*k2(1)) Fja2Pomocna(int(n-i+1)+h,g1,W(i,1)+h*k2(2),W(i,2)+h*k2(2),r,dobit)];
       W=[W;W(i,:)-h/6*(k0+2*k1+2*k2+k3)];
end
PomW=[];
for i=1:n
        if mod(int(i),1)==0
            PomW=[PomW;W(i,:)];
        end
end
res=[];
for i=1:size(PomW,1)
        res=[res;g2-i PomW(i,:)*(1+r)^(g2-g1-i)];
end
```

Kratka biografija

Stefan Tošić je rođen 19.9.1992. godine u Užicu. Osnovnu školu „Mito Igumanović" u Kosjeriću završava 2007. godine kao odličan učenik. Uporedo, završava i nižu muzičku školu „Petar Konjović" u Užicu u klasi profesora Petra Jovanovića, instrument gitara. Potom, upisuje gimnaziju „Sveti Sava" u Požegi, koju završava kao vrlo dobar učenik 2011. godine.
Studije Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, smer Primenjena matematika, modul matematika finansija, upisuje iste godine, i uspešno ih završava septembra 2014., prosekom 9,08. Master akademske studije smer Primenjena matematika upisuje na istom fakultetu. Poslednji ispit polaže u junu 2016. godine, i master studije završava prosekom 9,42.
Tokom studija u tri navrata bio je stipendista Vlade Republike Srbije. Od septembra 2016. zaposlen je na Fakultetu tehničkih nauka pri katedri za matematiku, kao saradnik u nastavi.

Novi Sad, april 2017.

Stefan Tošić

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: *monografska dokumentacija*
TD
Tip zapisa: *tekstualni štampani materijal*
TZ
Vrsta rada: *master rad*
VR
Autor: *Stefan Tošić*
AU
Mentor: *prof. dr Dora Seleši*
MN
Naslov rada: *Primena Thiele-ove diferencne i diferencijalne jednačine u životnom osiguranju*
NR
Jezik publikacije: *srpski (latinica)*
JP
Jezik izvoda: *s/e*
JI
Zemlja publikovanja: *Republika Srbija*
ZP
Uže geografsko područje: *Vojvodina*
UGP
Godina: *2017.*
GO
Izdavač: *autorski reprint*
IZ
Mesto i adresa: *Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4*
MA
Fizički opis rada: *6 poglavlja, 66 strana, 20 lit. citata, 15 tabela, 3 slike, 7 grafika, 14 Matlab funkcija*
FO
Naučna oblast: *matematika*
NO

Naučna disciplina: *primenjena matematika*
ND
Ključne reči: *osiguranje, matematička rezerva, prelazne verovatnoće, Thiele, premija, polisa osiguranja, lanci Markova*
PO
UDK
Čuva se: *u biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematičkog fakulteta, u Novom Sadu*
ČU
Važna napomena:
VN
Izvod: *Prvi cilj rada je izvođenje Markovog modela koji služi za računanje premija i matematičkih rezervi kod polisa životnog osiguranja. U osnovi modela nalaze se lanci Markova, i prelazne stope, kojima je rešen problem opisivanja potencijalnog osiguranikovog prelaska iz stanja u stanje. U zavisnosti od toga da li lance posmatramo kroz diskretno ili neprekidno vreme, dobijamo sisteme diferencnih odnosto diferencijalnih jednačina. Drugi cilj rada jeste primena dobijenih sistema na konkretnim polisama životnog i invalidskog osiguranja, upoređivanje dobijenih vrednosti, i zatim analiza tih vrednosti u zavisnosti od polaznih pretpostavki kod diskretnog modela. Rad se na kraju bavi modifikacijama raznih polisa, i pritom daje ideje za adaptaciju dobijenog diskretnog modela kod posmatranih primera.*
IZ
Datum prihvatanja teme od strane NN veća: *27. septembar 2016.*
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:
KO
Predsednik: *dr Marko Nedeljkov, redovni profesor*
Član: *dr Dora Seleši, vanredni profesor*
Član: *dr Nataša Krklec-Jerinkić, docent*

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: *monograph type*
DT
Type of record: *printed text*
TR
Contents code: *Master thesis*
CC
Author: *Stefan Tošić*
AU
Mentor: *Prof. Dora Seleši, PhD*
MN
Title: *Application of Thiele's difference and differential equations in life insurance*
XI
Language of text: *Serbian (latin)*
LT
Language of abstract: *s/e*
LA
Country of publication: *Republic of Serbia*
CP
Locality of publication: *Vojvodina*
LP
Publication year: *2017.*
PY
Publisher: *author's reprint*
PU
Publ. place: *Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4*
PP
Physical description: *6 chapters, 66 pages, 20 lit. references, 15 table, 3 images, 7 graphs, 14 Matlab functions*
PD
Scientific field: *mathematics*
SF

Scientific discipline: *applied mathematics*
SD
Key words: *insuranse, matematical reserve, transition probability, Thiele, premium, insurance policy, Markov chains*
UC
Holding data: *Department of Mathematics and Informatics' Library, Faculty of Sciences, Novi Sad*
HD
Note:
N
Abstract: *The first goal of the master paper is the derivation of Markov model, used for calculating premiums and mathematical reserves for the life insurance polices. The model is based on Markov chains and transition rates, which solved the problem of describing the potential insured transition from state to state. Depending on whether we look chains through discrete or continuous time, we obtain systems of difference and differential equations. Another aim of the work is the application of the systems obtained on concrete policies of life and disability insurance, comparing the obtained values, and then the analysis of these values depending on the assumptions of a discrete model. In the end, the work deals with modifications of various policies, and thereby provides ideas for renovating the resulting discrete model in the observed case.*
AB
Accepted by the Scientific Board on: *27 September 2016*
ASB
Defended:
DE
Thesis defend board:
DB
President: *Dr Marko Nedeljkov, Full Professor*
Member: *Dr Dora Seleši, Associate Professor*
Member: *Dr Nataša Krklec-Jerinkić, Assistant Professor*