UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Srđan Milićević

Rado graf

-master rad-

Novi Sad, 2012.

Sadržaj

Predgovor

Tema ovog master rada je Rado graf. Sam graf je dobio naziv po čuvenom nemačkom matematičaru Richardu Rado koji je 1964. godine prvi opisao njegovu konstrukciju preko binarnog zapisa brojeva. Takođe, mađarski matematičari Paul Erdös i Alfréd Rényi su opisali konstrukciju datog grafa preko teorije verovatnoće. Stoga u literaturi postoji još nekoliko naziva za Rado graf (Erdös & Rényi graf ili Random graf).

Rad se sastoji iz tri poglavlja. Na početku svakog od njih navedeni su osnovni pojmovi i definicije, neophodni za dalje izlaganje i razumevanje. Za krajeve dokaza osobina, lema i teorema korišćena je oznaka $\square$.

U prvom delu rada uvedena je definicija Rado grafa i opisane su njegove različite konstrukcije: preko binarnog zapisa, kvadratnih ostataka, teorije skupova, teorije verovatnoće, kao i rekurzivan način konstrukcije. Potom su opisane i dokazane mnoge njegove osobine. Neke od njih su: samokomplementarnost, stabilnost, tranzitivnost, normalnost, $\aleph_0$*-kategoričnost, itd. Takođe, pokazana je njegova jedinstvenost do na izomorfizam, kao i da skup svih automorfizama Rado grafa obrazuje grupu automorfizama.*

U drugom delu rada govori se o homogenim prebrojivim bipartitnim grafovima. Uveden je pojam homogenosti i pokazano je da je i Rado graf homogen graf. Zatim je razmatrana osobina homogenosti kod bipartitnih grafova, opisana je konstrukcija jednog saS *grafa i izvršena je klasifikacija homogenih bipartitnih grafova.*

U trećem delu rada, priča o prostom Rado grafu proširena je na orijentisane grafove. Nakon upoznavanja sa terminologijom, analizirane su neke specijalne vrste digrafova. Posebno je razmatrana najizučenija klasa digrafova-turniri, kao i dve vrste Rado digrafa: Random orijentisani graf (RO) *i Random aciklični orijentisani graf* (ARO).

Najveću zahvalnost za izradu master rada i odabir ovako izazovne teme dugujem svom mentoru- dr Borisu Šobotu. Hvala mu na izdvojenom vremenu, kao i na korisnim sugestijama i primedbama bez kojih rad ne bi primio sadašnji oblik.

Takođe, želeo bih da se zahvalim i prof. dr Milošu Kuriliću i dr Aleksandru Pavloviću, članovima komisije za odbranu ovog master rada.

Posebnu zahvalnost dugujem svojim roditeljima, sestri i prijateljima. Hvala im na ukazanom poverenju, razumevanju i bezuslovnoj podršci koju su mi pružali tokom celokupnog školovanja.

Novi Sad, oktobar 2012. godine *Srđan Milićević*

Glava 1

Rado graf

1.1 Grafovi-osnovni pojmovi i definicije

Definicija 1.1.1 *Prost graf G je uređeni par $G = (V, E)$, gde je V neprazan skup, a E proizvoljan podskup skupa $V^{(2)} = \{\{u, v\} \subseteq V; u \neq v\}$.*

Pri tome, skup V nazivamo skup čvorova (vrhova, temena), a skup E nazivamo skup grana grafa G. Često se skup čvorova obeležava i sa $V(G)$, a skup grana sa $E(G)$. Ubuduće ćemo umesto termina prost graf koristiti samo graf.

Definicija 1.1.2 *Neka su u i v elementi skupa V, tj. čvorovi grafa G. Tada je $e = \{u, v\}$ jedna grana grafa G koja spaja čvorove u i v.*

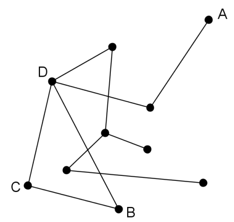
Ona se skraćeno može zapisati i kao $e = uv$. Kažemo još i da je grana e incidentna sa čvorovima u i v, a čvorovi u i v su susedni.

Definicija 1.1.3 *Stepen čvora predstavlja broj grana koje su sa njim incidentne.*

Dakle, stepen čvora predstavlja broj njegovih suseda. Skup svih suseda čvora u iz grafa G se označava sa $G(u)$. Stepen čvora se obeležava sa $\delta_G(u)$. U slučaju da se graf G podrazumeva, skraćena oznaka je $\delta(u)$. Ako je $\delta(u) = 0$, onda se u naziva izolovan čvor.

Graf G možemo predstaviti geometrijski tako što čvorovima pridružimo tačke u ravni, a granama duži ili lukove. Grafovi su upravo i dobili naziv zbog svoje grafičke reprezentacije. Koristeći njihov grafički prikaz, možemo modelirati mnogobrojne složene pojave kod kojih je bitno da li su određeni objekti u vezi ili ne. To su na primer: predstavljanje raskrsnica i ulica, puteva i gradova u nekoj državi, predstavljanje električnih mreža i računara itd. Na Slici 1.1 dat je primer jednog grafa.

Vidimo da dati graf ima 10 čvorova i 10 grana. Npr. čvorovi A i B nisu povezani, dok su čvorovi C i D povezani i formiraju granu $\{C, D\}$.



Slika 1.1: *Graf*

U zavisnosti od osobina koje poseduju, možemo izdvojiti neke specijalne vrste grafova.

Definicija 1.1.4 *Ako svi čvorovi u grafu imaju isti stepen, tada se on zove regularan. Specijalno, graf G je k-regularan ukoliko važi da je $\delta(u) = k$ za sve čvorove u iz G.*

Definicija 1.1.5 *Graf čija su svaka dva različita čvora susedna naziva se kompletan graf.*

Oznaka za kompletan graf sa n čvorova je K_n. Nasuprot njemu, postoji prazan graf u kojem nikoja dva čvora nisu susedna.

Definicija 1.1.6 *Graf čiji su svi čvorovi izolovani (tj. 0-regularan graf) se naziva prazan graf.*

Prazan graf sa n čvorova označavamo sa $\bar{K}_n$.

Definicija 1.1.7 *Za graf H kažemo da je podgraf grafa G (u oznaci $H \subseteq G$) ukoliko važi da je $V(H) \subseteq V(G)$ i $E(H) \subseteq E(G)$.*
Za graf G kažemo da je nadgraf grafa H.

Definicija 1.1.8 *Za graf H kažemo da je pokrivajući podgraf od G ako je ispunjeno $V(H) = V(G)$ i $E(H) \subseteq E(G)$.*

Definicija 1.1.9 *Za graf H kažemo da je indukovani podgraf od G ako važi da je $V(H) \subseteq V(G)$ i $E(H) = E(G) \cap V(H)^{(2)}$.*

Definicija 1.1.10 *Šetnja u grafu G se definiše kao prizvoljan niz čvorova i grana $v_0e_1v_1e_2v_2...v_{k-1}e_kv_k$, pri čemu čvorovi i grane mogu da se ponavljaju i važi da je $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$.*

Definicija 1.1.11 *Ako se grane u šetnji ne ponavljaju, onda se ona naziva staza. Ukoliko je $v_0 = v_k$ kažemo da je šetnja zatvorena.*

Definicija 1.1.12 *Šetnja u kojoj nema ponavljanja čvorova i grana i važi $v_0 \neq v_k$ se naziva put.*

Oznaka za put sa n čvorova je P_n.

Definicija 1.1.13 *Zatvorena šetnja u kojoj nema ponavljanja čvorova i grana naziva se kontura.*

Oznaka za konturu sa n čvorova je C_n. Ako graf ne sadrži nijednu konturu, onda se on naziva acikličan graf.

Definicija 1.1.14 *Hamiltonov put u grafu G je put koji sadrži sve čvorove toga grafa.*

Definicija 1.1.15 *Hamiltonova kontura u grafu G je kontura koja sadrži sve čvorove grafa G. Graf je Hamiltonov ako sadrži Hamiltonovu konturu.*

Definicija 1.1.16 *Za dva čvora kažemo da su povezana ako postoji put između njih.*

Može se pokazati da je povezanost čvorova relacija ekvivalencije. Klase ekvivalencije određene njom nazivaju se komponente povezanosti.

Definicija 1.1.17 *Za graf G kažemo da je povezan ako ima tačno jednu komponentu povezanosti. U suprotnom, graf nije povezan.*

Definicija 1.1.18 *Graf koji nije povezan i ne sadži nijednu konturu kao svoj podgraf se naziva stablo.*

Definicija 1.1.19 *Neka je v čvor grafa G, a e njegova grana. Tada je $G - v$ graf koji se dobija od grafa G ako mu oduzmemo čvor v, a $G - e$ je graf koji se dobija ako mu oduzmemo granu e.*

Definicija 1.1.20 *Čvor v je artikulacioni čvor grafa G ako je broj komponenti povezanosti od $G - v$ veći nego od G.*

Definicija 1.1.21 *Grana e je most grafa G ako je broj komponenti povezanosti od $G - e$ veći nego od G.*

Definicija 1.1.22 *Za grafove G_1 i G_2 kažemo da su izomorfni ako postoji bijekcija $f : V(G_1) \to V(G_2)$ tako da važi: $\{u, v\} \in E(G_1)$ ako i samo ako $\{f(u), f(v)\} \in E(G_2)$.*

Preslikavanje f se naziva izomorfizam. Da su grafovi G_1 i G_2 izomorfni pišemo kraće $G_1 \cong G_2$. Njime se očuvava relacija incidencije. Drugim rečima, izomorfizmom se dobijaju "isti" grafovi.

Definicija 1.1.23 *Za graf G_1 kažemo da se utapa u graf G_2 ako se može uspostaviti izomorfizam između grafa G_1 i nekog indukovanog podgrafa od G_2 .*

Definicija 1.1.24 *Ako važi $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$, za grafove G_1 i G_2 kažemo da su disjunktni. Specijalno, ako je ispunjen samo uslov $E(G_1) \cap E(G_2) = \emptyset$, tada kažemo da su G_1 i G_2 granski disjunktni.*

Definicija 1.1.25 *Unija grafova G_1 i G_2, tj. $G_1 \cup G_2$ je graf čiji je skup čvorova $V(G_1) \cup V(G_2)$, a skup grana $E(G_1) \cup E(G_2)$.*

Ukoliko su G_1 i G_2 disjunktni grafovi njihova unija se obeležava sa $G_1 + G_2$. Analogno se definiše i presek dva grafa.

Definicija 1.1.26 *Presek grafova G_1 i G_2, tj. $G_1 \cap G_2$ je graf čiji je skup čvorova $V(G_1) \cap V(G_2)$, a skup grana $E(G_1) \cap E(G_2)$.*

Definicija 1.1.27 *Za graf $\bar{G}$ kažemo da je komplement grafa G ukoliko važi da je $V(G) = V(\bar{G})$ i $E(\bar{G}) = V^{(2)} \backslash E(G)$.*

Na primer, komplement kompletnog grafa je prazan graf i obrnuto.

Definicija 1.1.28 *Graf G je samokomplementaran ako je izomorfan sa svojim komplementom.*

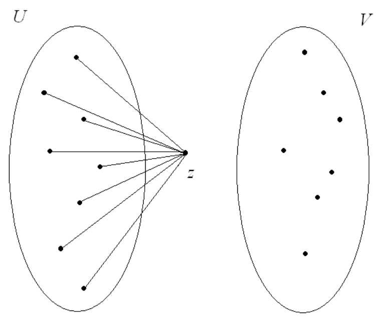
U odnosu na broj čvorova, grafove možemo podeliti na konačne i beskonačne. Kod beskonačnih grafova sa prebrojivo mnogo čvorova, sve čvorove možemo numerisati prirodnim brojevima. Ovakvi grafovi mogu imati i konačan broj grana (npr. prebrojivi prazan graf nema nijednu granu). Naravno, njihov grafički prikaz je dosta komplikovaniji nego kod konačnih grafova. U ovom radu biće reči o Rado grafu koji spada u grupu grafova sa prebrojivo mnogo čvorova.

1.2 Definicija i konstrukcije Rado grafa

Postoji više ekvivalentnih načina za definisanje Rado grafa. U ovom radu, biće opisani različiti načini konstruisanja grafa: preko binarnog zapisa brojeva, pomoću kvadratnih ostataka, preko teorije skupova, kao i definicija preko teorije verovatnoće. Izvođenjem ovih konstrukcija, doći ćemo do mnogih bitnih osobina koje poseduje Rado graf.

Definicija 1.2.1 *Rado graf je prebrojivi graf koji ima sledeću osobinu: ako su dati njegovi različiti čvorovi* $u_1, u_2, ..., u_m, v_1, v_2, ..., v_n$ *tada postoji čvor* z *koji je susedan sa svim čvorovima* $u_1, u_2, ..., u_m$*, a nije susedan ni sa jednim od čvorova* $v_1, v_2, ..., v_n$*.*

Ovu osobinu ćemo ubuduće označavati sa $(*)$. Ilustracija ove osobine je data na Slici 1.2 na kojoj je predstavljen čvor z koji je susedan sa svim čvorovima iz skupa U i nije susedan ni sa jednim čvorom iz skupa V.



Slika 1.2: *Prikaz osobine (*)*

1.2.1 Konstrukcija Rado grafa preko teorije verovatnoće

Prikazujemo prvo konstrukciju grafa preko teorije verovatnoće. Prebrojivi graf R se bira na slučajan način tako što mu se grane selektuju nezavisno sa verovatnoćom $\frac{1}{2}$ između bilo koja dva čvora. Pri tome, verovatnoća $\frac{1}{2}$ se može zameniti bilo kojom fiksnom verovatnoćom p, pri čemu je $0 < p < 1$.

Teorema 1.2.2 *Prebrojivi graf* R *ima osobinu* $(*)$ *sa verovatnoćom 1.*

Dokaz: Pokazaćemo da događaj da graf R nema osobinu $(*)$ ima verovatnoću 0. Posmatrajmo neki graf koji nema osobinu $(*)$. Neka su $z_1, z_2, ..., z_k$ čvorovi različiti od $u_1, u_2, ..., u_m, v_1, v_2, ..., v_n$. Verovatnoća da je z_i, pri čemu $i \in \{1, 2, ..., k\}$, povezan sa $u_1, u_2, ..., u_m$, a nije sa $v_1, v_2, ..., v_n$ je $\frac{1}{2^{m+n}}$ jer su svi događaji povezivanja nezavisni. To znači da verovatnoća da čvor z_i nije odgovarajuće povezan iznosi $1 - \frac{1}{2^{m+n}}$. Stoga je verovatnoća da nijedan od čvorova $z_1, z_2, ..., z_k$ nije odgovarajuće povezan $(1 - \frac{1}{2^{m+n}})^k$. Ovaj izraz teži 0 kada $k \to \infty$. Kako ima prebrojivo mnogo vrednosti za m i n i za svaki par prebrojivo mnogo čvorova, možemo primeniti lemu da je prebrojiva unija skupova mere 0 takođe mere 0. Odatle sledi da događaj da graf nema osobinu $(*)$ ima verovatnoću 0, tj. graf R skoro sigurno ima osobinu $(*)$. □

Da je umesto verovatnoće $\frac{1}{2}$ stajala proizvoljna verovatnoća p, dokaz bi bio analogan jer izraz $(1 - p^{m+n})^k \to 0$, kada $k \to \infty$. Pokazaćemo sada da između bilo koja dva grafa koja poseduju datu osobinu možemo uspostaviti izomorfizam.

Teorema 1.2.3 *Svi prebrojivi grafovi koji zadovoljavaju osobinu $(*)$ su međusobno izomorfni.*

Dokaz: Neka su G_1 i G_2 dva prebrojiva grafa koja imaju osobinu $(*)$. Pretpostavimo da je f preslikavanje skupa $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ čvorova G_1 u G_2 koje je izomorfizam između indukovanih podgrafova i x_{n+1} proizvoljan čvor iz G_1. Hoćemo da f proširimo i na čvor x_{n+1}. Neka je U skup svih suseda čvora x_{n+1} (posmatrajući čvorove iz skupa $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$) i neka je $V = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \backslash U$. Potencijalna slika od x_{n+1} će biti čvor u G_2 susedan svakom čvoru u $f(U)$ i nesusedan svakom čvoru u $f(V)$. To možemo da učinimo jer na osnovu prethodne teoreme znamo da važi osobina $(*)$. Sada primenjujemo $back\ and\ forth$ metod.

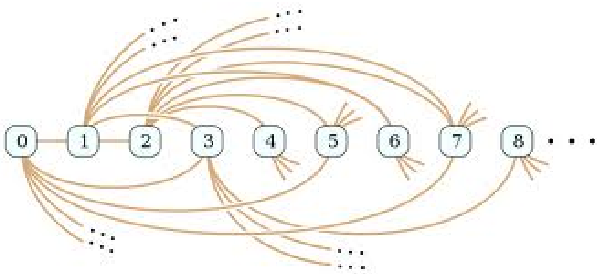
Numerišimo čvorove iz G_1 i G_2 respektivno sa $\{x_1, x_2, x_3, ...\}$ i $\{y_1, y_2, y_3, ...\}$. Konstruišimo konačne izomorfizme f_n na sledeći način. Neka je $f_0 = \emptyset$. Pretpostavimo da je f_n konstruisano. Ako je n parno, neka je m najmanji indeks čvorova u G_1 koji nije u domenu od f_n. Tada f_n proširujemo do f_{n+1} sa x_m u domenu tako što na osnovu aksiome izbora izaberemo čvor sa najmanjim indeksom iz G_2 koji zadovoljava $(*)$ da bude slika od x_m. Ako je n neparno, radimo obrnuto. Neka je sada m najmanji indeks čvorova u G_2 koji nije u rangu od f_n. Proširujemo f_n do f_{n+1} sa y_m u rangu koristeći osobinu $(*)$. Neka je $f = \cup f_i$. Primenjujući $back\ and\ forth$ metod, garantuje se da je svaki čvor iz G_1 u domenu i svaki čvor iz G_2 u rangu. Prema tome, f je traženi izomorfizam. □

Dakle, Rado graf je jedinstveni do na izomorfizam prebrojivi graf koji ima osobinu $(*)$. Inače, izomorfizam među grafovima koji imaju osobinu $(*)$ se može formirati na više načina.

1.2.2 Konstrukcija Rado grafa preko binarnog zapisa

Opisaćemo sada konstrukciju grafa koju je predložio Rado. Za skup čvorova uzimamo skup prirodnih brojevima (uključujići i 0): $0, 1, 2, ...$ Uočimo dva proizvoljna čvora x i y. Grana $\{x, y\}$ postoji ako je x-ta cifra zdesna u binarnoj reprezentaciji od y jednaka 1 u slučaju da je $x < y$ i analogno, ako je y-ta cifra zdesna u binarnoj reprezentaciji od x jednaka 1 u slučaju kada je $x > y$. Primer ovakvog povezivanja dat je na Slici 1.3. Vidimo da su susedi čvora numerisanog brojem 0 svi neparni brojevi, da su susedi čvora koji je numerisan brojem 1 osim 0-čvora još i svi čvorovi numerisani brojevima koji daju ostatke 2 ili 3 pri deljenju sa 4, itd.

Pokazaćemo sada da i ovako definisani graf ima osobinu $(*)$. Odatle će na osnovu prethodne teoreme slediti da je konstruisani graf Rado graf. Neka su dati proizvoljni različiti čvorovi: $u_1, u_2, ..., u_m$ i $v_1, v_2, ..., v_n$. Zbog jednostavnosti zapisa uzmimo da je $U = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$ i $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Uočimo čvor $x = 2^{1+max(U \cup V)} + \sum_{u \in U} 2^u$. On je spojen sa svim čvorovima iz skupa U jer su sve cifre u njegovoj binarnoj reprezentaciji koje odgovaraju čvorovima iz U jednake 1. S druge strane, cifre koje odgovaraju čvorovima iz V su jednake 0, a kako je x veće od svakog čvora iz V, to je x-ta cifra u binarnoj reprezentaciji svakog čvora iz V jednaka 0. Sledi da x nije povezan ni sa jednim čvorom iz V čime smo pokazali da važi osobina $(*)$.



Slika 1.3: *Rado graf*

1.2.3 Konstrukcija Rado grafa preko teorije skupova

Sledeći način konstruisanja Rado grafa jeste preko teorije skupova. Neka je $V_0 = \emptyset$, $V_1 = \{\emptyset\}$, $V_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots, V_{n+1} = \mathcal{P}(V_n), \ldots$
Uzmimo da je $V = \cup_{n \in \mathbb{N}} V_n$ skup nasledno konačnih skupova. Definišimo graf V^* pomoću pravila $x \sim y$ ako i samo ako važi $x \in y$ ili $y \in x$. Pokazaćemo da je tada V^* izomorfan sa R.

Neka su dati $u_1, u_2, ..., u_m$ i $v_1, v_2, ..., v_n$ različiti elementi iz V. Uzmimo da je $x = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ i $z = \{u_1, u_2, ..., u_m, x\}$. Pokazujemo da z zadovoljava uslov $(*)$. Jasno, važi $z \sim u_i$ za sve $i \in \{1, 2, ..., m\}$. Pretpostavimo sada i da je $z \sim v_j$. Ako je $v_j \in z$, onda važi $v_j = u_i$ što je u suprotnosti sa početnom pretpostavkom ili je $v_j = x$ odakle bi sledilo $x \in x$ što je kontradikcija. Ako je pak $z \in v_j$, onda važi $x \in z \in v_j \in x$ što nas takođe (na osnovu aksiome regularnosti) dovodi do kontradikcije. Sledi da V^* ima osobinu $(*)$ pa je samim tim izomorfan sa R.

1.2.4 Konstrukcija Rado grafa preko kvadratnih ostataka

Sledeća konstrukcija Rado grafa koju opisujemo je konstrukcija preko kvadratnih ostataka. Prvo ćemo navesti teoreme i oznake koje ćemo koristiti pri ovoj konstrukciji.

Teorema 1.2.4 (Kineska teorema o ostacima) *Neka su $m_1, m_2, ..., m_k$ po parovima uzajamno prosti prirodni brojevi, a $a_1, a_2, ..., a_k$ celi brojevi. Tada sistem:*

$$x \equiv a_1 (mod\, m_1), x \equiv a_2 (mod\, m_2), ..., x \equiv a_k (mod\, m_k)$$

ima jedinstveno rešenje do na moduo $m_1 m_2 ... m_k$.

Teorema 1.2.5 (Dirihleova teorema) *Ako su a i b uzajamno prosti prirodni brojevi, onda aritmetička progresija $a, a+b, a+2b, a+3b, ...$ sadrži beskonačno mnogo prostih brojeva.*

Definicija 1.2.6 *Kažemo da je $q \in \mathbb{Z}$ kvadratni ostatak po modulu $n \in \mathbb{N}$ ako postoji $x \in \mathbb{Z}$ takav da je $x^2 \equiv q (mod\, n)$.*

Definicija 1.2.7 *Ležandrov simbol za $a \in \mathbb{Z}$ i prost broj p glasi:*

$$(\frac{a}{p}) = \begin{cases} 0, & ako\, p \mid a \\ 1, & ako\, p \not| \, a \text{ } i \text{ } a \text{ } je \text{ } kvadratni \text{ } ostatak \text{ } po \text{ } modulu \text{ } p \\ -1, & ina\check{c}e \end{cases}$$

Teorema 1.2.8 (Zakon kvadratnog reciprociteta) *Ako su p i q različiti neparni prosti brojevi, onda važi:*

$$(\frac{p}{q})(\frac{q}{p}) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}.$$

Uzmimo da je skup čvorova našeg grafa skup prostih brojeva koji daju ostatak 1 pri deljenju sa 4. Obeležimo taj skup slovom $\mathbb{P}$. Ako $p, q \in \mathbb{P}$, koristeći kvadratni reciprocitet važi da je $(\frac{p}{q}) = 1$ ako i samo ako je $(\frac{q}{p}) = 1$. Uzmimo da su čvorovi p i q susedni čvorovi ako je $(\frac{p}{q}) = 1$.

Neka su dati proizvoljni različiti elementi $u_1, u_2, ..., u_m$ i $v_1, v_2, ..., v_n$ iz $\mathbb{P}$. Neka je a_i fiksirani kvadratni ostatak po modulu u_i i b_j fiksirana vrednost koja nije kvadratni ostatak po modulu v_j. Koristeći Kinesku teoremu o ostacima i uslove:

$$x \equiv 1(mod\, 4),\; x \equiv a_i(mod\, u_i),\; x \equiv b_j(mod\, v_j)$$

sledi da postoji rešenje $x \equiv x_0(mod\, 4u_1u_2...u_m...v_1v_2...v_n)$.
Na osnovu Dirihleove teoreme sledi da postoji prost broj z takav da zadovoljava date kongruencije. Stoga je osobina $(*)$ zadovoljena.

1.2.5 Konstrukcija Rado grafa preko univerzalnog skupa

Sada ćemo pokazati još jednu konstrukciju Rado grafa korišćenjem teorije brojeva.

Definicija 1.2.9 *Skup S pozitivnih celih brojeva se naziva univerzalan ako za dati prirodan broj k i skup T, pri čemu je $T \subseteq \{1, 2, ..., k\}$ postoji ceo broj N takav da je ispunjeno $N + i \in S$ ako i samo ako $i \in T$.*

Neka je dat univerzalan skup S. Posmatrajmo prebrojivi graf čiji je skup čvorova skup celih brojeva i neka su čvorovi x i y susedni ako i samo ako važi $|x - y| \in S$. Pokazaćemo da je ovaj graf izomorfan sa R.

Neka su dati proizvoljni različiti čvorovi $u_1, u_2, ..., u_m, v_1, v_2, ..., v_n$. Neka je l najmanji, a L najveći među njima. Uzmimo da je $k = L - l + 1$ i neka je skup T definisan kao $T = \{u_i - l + 1; i = 1, 2, ..., m\}$. Neka se vrednost za N izabere kao u definiciji za univerzalnost. Biramo da je $z = l - 1 - N$. Očigledno, z će biti susedan sa svim čvorovima $u_1, u_2, ..., u_m$, a neće ni sa jednim od čvorova $v_1, v_2, ..., v_n$. Stoga je zadovoljena osobina $(*)$.

1.2.6 Konstrukcija Rado grafa preko podskupova skupa $\mathbb{N}$

U narednoj konstrukciji Rado grafa, konstruisaćemo prvo prebrojivi graf U. Pokazaćemo potom da je on izomorfan sa R.

Neka je $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ numeracija skupa svih konačnih podskupova od $\mathbb{N}$, tako da se svaki skup pojavljuje beskonačno mnogo puta (ovo je moguće jer konačnih podskupova od $\mathbb{N}$ ima prebrojivo mnogo). Neka je dat niz prirodnih brojeva $v_1, v_2, v_3, ...$ takav da su zadovoljeni sledeći uslovi:
(1) $v_1 < v_2 < v_3 < ...$
(2) $v_n > max(P_n), \forall n \in \mathbb{N}$.

Neka je skup čvorova grafa U skup $\mathbb{N}$, a skup grana mu se sastoji od svih parova čvorova (w, v_n), pri čemu $w \in P_n, n \in \mathbb{N}$. Stoga U zadovoljava sledeću osobinu: ako je F konačan podskup od U, onda postoji dovoljno veliko $v \in U$ tako da važi: $F = \{w \mid w < v,\ (w, v) \in E(U)\}$.

Kako je ovaj uslov još jači od uslova $(*)$, sledi da i U zadovoljava uslov $(*)$ pa je U takođe izomorfan sa Rado grafom.

1.2.7 Konstrukcija Rado grafa rekurzijom

Pored navedenih načina konstrukcije Rado grafa, njega možemo konstruisati i rekurzijom, direktno sledeći definiciju. Neka je G_0 graf sa jednim čvorom. Dalje, neka se G_{n+1} dobija od G_n dodavanjem čvora $z(U)$ čiji je skup suseda U i nije susedan više ni sa jednim čvorom iz G_{n+1}, za svaki skup U, podskup skupa čvorova od G_n. Uzmimo da je $G = \cup_{n\in\mathbb{N}} G_n$, tj. $G = (\cup_{n\in\mathbb{N}} V(G_n), \cup_{n\in\mathbb{N}} E(G_n))$. Pokazaćemo da ovako konstruisani G ima osobinu $(*)$.

Za disjunktne skupove različitih čvorova A i B tražimo najmanji indeks n tako da su skupovi A i B sadržani u $V(G_n)$. Onda po konstrukciji od G_{n+1} postoji čvor $v \in V(G_{n+1})$ takav da je susedan sa svakim čvorom iz A i nije susedan ni sa jednim iz B jer se po konstrukciji grafova G_k za $k > n+1$ ne dodaju nove grane u G_{n+1}. Odatle sledi da graf G ima osobinu $(*)$.

Navedeni su neki od načina konstruisanja Rado grafa. Kao što smo videli, svi rezultujući grafovi su međusobno izomorfni. Stoga ćemo ubuduće Rado graf označavati slovom R.

1.3 Osobine Rado grafa

Rado graf karakterišu mnoge značajne osobine. U ovom poglavlju, biće predstavljene neke od njih. Pre svega, za Rado graf možemo reći da je veoma stabilan, tj. ako izvršimo male promene na njemu dobićemo graf sa kojim je on opet izomorfan. To ćemo upravo i videti kroz njegove osobine.

Osobina 1.3.1 *Neka su $u_1, u_2, ..., u_m, v_1, v_2, ..., v_n$ različiti čvorovi grafa R. Definišimo skup Z:*
$Z = \{z : z\, je\, povezan\, sa\, u_i, za\, i = 1, 2, ..., m,\ a\, nije\, sa\, v_j,\ za\, j = 1, 2, ..., n\}$.
Tada je skup Z beskonačan i indukovani podgraf na njemu je izomorfan sa R.

Dokaz: Dovoljno je pokazati osobinu $(*)$ za Z. Neka su $u'_1, u'_2, ..., u'_k, v'_1, v'_2, ..., v'_l$ različiti čvorovi iz Z. Stoga svaki čvor susedan sa $u_1, u_2, ..., u_m, u'_1, u'_2, ..., u'_k$ i nije sa $v_1, v_2, ..., v_n, v'_1, v'_2, ..., v'_l$ pripada skupu Z pa je zadovoljena osobina $(*)$.□

Osobina 1.3.2 *Ukoliko grafu R izbrišemo konačan broj čvorova ili mu dodamo ili izbrišemo konačan broj grana, tada je novodobijeni graf izomorfan sa R.*

Dokaz: Dokaz ove osobine sledi na osnovu prethodne osobine. Pretpostavimo da su $u_1, u_2, ..., u_m, v_1, v_2, ..., v_n$ različiti čvorovi grafa nakon izvršenih promena. Kako je izvršen konačan broj promena, skup Z će i dalje ostati beskonačan i dalje će važiti osobina $(*)$. □

Pre nego što pređemo na naredne osobine, definišimo još pojam operacije promene grafa u odnosu na neki skup čvorova. Posmatrajmo neki graf G i neki njegov podgraf čiji je skup čvorova X.

Definicija 1.3.3 *Promena grafa G u odnosu na skup čvorova X se definiše tako što svaku granu čiji je jedan kraj u X, a drugi u $\bar{X}$ izbrišemo i obrnuto, tj. dodajemo grane koje nisu postojale u grafu G takve da im je jedan kraj u X, a drugi u $\bar{X}$.*

Osobina 1.3.4 *Ako izvršimo promene grafa R u odnosu na konačan skup čvorova X, novodobijeni graf je izomorfan sa R.*

Dokaz: Neka je dat skup čvorova X iz grafa R. Neka su $U = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$ i $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ skupovi čvorova kada u R izvršimo promene u odnosu na X. Tražimo čvor z tako da bude susedan sa svim čvorovima iz U i nesusedan sa svim iz V. Biramo z tako što izaberemo čvor izvan skupa X koji je bio susedan sa svim čvorovima iz skupova $U \setminus X$ i $V \cap X$, a nije sa čvorovima iz skupova $V \setminus X$ i $U \cap X$ (u R). Na taj način je odabrano z tako da važi osobina $(*)$ pa je novodobijeni graf izomorfan sa R. □

Osobina 1.3.5 *Ako se skup čvorova grafa R podeli na konačan broj delova, tada je bar jedan indukovani podgraf na tim delovima izomorfan sa R.*

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, tj. da osobina ne važi. Neka je $\{X_1, X_2, ..., X_k\}$ particija skupa čvorova grafa R. Tada za sve $i \in \{1, 2, ..., k\}$ postoje disjunktni neprazni skupovi U_i i V_i iz X_i takvi da ne postoji nijedan čvor u X_i za koji važi osobina $(*)$. Neka je $U = U_1 \cup U_2 \cup ... \cup U_k$ i $V = V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_k$. Tada za date skupove U i V iz R sledi da nije ispunjena osobina $(*)$ što nas dovodi do kontradikcije pa sledi da osobina važi. □

Zbog toga što poseduje ovu osobinu, kažemo da Rado graf zadovoljava Dirihleov princip.

Osobina 1.3.6 *Graf R je samokomplementaran.*

Dokaz: Pokazaćemo da je R izomorfan sa $\bar{R}$, tj. da $\bar{R}$ zadovoljava osobinu $(*)$. Neka su $U = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$ i $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ dva proizvoljna skupa različitih čvorova iz $\bar{R}$. Pokazaćemo da postoji čvor koji je susedan svim čvorovima iz U i nije sused nijednom čvoru iz V. Znamo da postoji čvor z takav da je povezan sa svim čvorovima iz V i ni sa jednim iz U u grafu R. Stoga će z biti povezano sa svim čvorovima iz U i ni sa jednim iz V u grafu $\bar{R}$ pa je zadovoljena osobina $(*)$. Sledi da je R samokomplementaran. □

Osobina 1.3.7 *Kompletan prebrojivi graf, prazan prebrojivi graf i Rado graf su jedini prebrojivi grafovi koji imaju osobinu da ako im skup čvorova podelimo na dva dela, tada je indukovani podgraf na bar jednom podgrafu izomorfan sa čitavim grafom.*

Dokaz: Prvo ćemo pokazati da prazan prebrojivi graf, kompletan prebrojivi graf i Rado graf imaju datu osobinu. Neka je dat prebrojivi graf G. Pretpostavimo da je G prazan graf. Za prebrojivi prazan graf važi data osobina jer ako mu skup čvorova podelimo na dva dela, tada će se u bar jednom od njih nalaziti prebrojivo mnogo čvorova. Ako konstruišemo indukovani podgraf na njemu, dobiće se opet prebrojivi prazan graf koji je samim tim izomorfan sa polaznim grafom. Analogno će važiti i ako je G kompletan graf. Ako pretpostavimo da je G Rado graf, tada će data osobina važiti na osnovu prethodne osobine (uzimajući da je $k = 2$).

Neka graf G nije nijedan od ta tri grafa koji imaju datu osobinu. Pretpostavimo sada da G ima izolovanih čvorova. Tada ga možemo podeliti na dva dela: prazan graf i graf koji nema izolovanih čvorova. Kako G nije prazan graf, onda on nije izomorfan sa prvim delom. Takođe, on ima izolovanih čvorova pa samim tim nije izomorfan ni sa drugim delom. Odatle sledi da G ne može imati izolovane čvorove. Analogno, zaključujemo da G ne može imati ni čvorove koji su povezani sa svim ostalim čvorovima u grafu.

Pošto po pretpostavci G nije Rado graf, onda on ne zadovoljava osobinu $(*)$. Tada postoje različiti čvorovi $u_1, u_2, ..., u_m, v_1, v_2, ..., v_n$ tako da ne postoji čvor $z \in G$ koji je povezan sa svim čvorovima $u_i,\ i = 1, 2, ..., m$ i nije povezan ni sa jednim od čvorova $v_j,\ j = 1, 2, ..., n$. Posmatrajmo one čvorove za koje je $m + n$ minimalno. Pošto znamo da G nema izolovanih čvorova niti onih koji su povezani sa svim ostalim, zaključujemo da je $m + n > 1$.

Stoga skup čvorova $\{u_1, u_2, ..., u_m, v_1, v_2, ..., v_n\}$ možemo podeliti na dva neprazna disjunktna podskupa. Obeležimo ih sa A i B. Formirajmo particiju $\{X, Y\}$ skupa čvorova grafa G na sledeći način. Neka se X sastoji od svih čvorova iz A i onih koji ne zadovoljavaju osobinu $(*)$ u odnosu na skup A, a nisu iz B. Neka se Y sastoji od svih čvorova iz B i svih onih čvorova koji nisu iz X. Ako posmatramo indukovane podgrafove na skupovima X i Y, uočavamo da za njih neće važiti osobina $(*)$ u odnosu na skupove A i B respektivno. Sledi da osobina $(*)$ neće važiti u datim grafovima za manje od $m + n$ čvorova. Samim tim, nijedan od tih podgrafova neće biti izomorfan sa G jer kod njega minimalan broj čvorova za koje nije ispunjena osobina $(*)$ iznosi $m + n$. Sledi da G zadovoljava osobinu $(*)$ pa je samim tim izomorfan sa R. $\square$

Sada ćemo opisati osobinu Rado grafa koja se ujedno smatra njegovom najznačajnijom osobinom. Ona se još naziva i osobina univerzalnosti.

Osobina 1.3.8 *Rado graf sadrži sve konačne i prebrojive grafove kao svoje indukovane podgrafove.*

Dokaz: Da bismo pokazali ovu osobinu koristimo metod $go\ forth$. Neka je dat graf čiji je skup čvorova $\{x_1, x_2, ...\}$. Neka je dato preslikavanje f_n koje je izomorfizam između indukovanih podgrafova nad proizvoljnim skupom čvorova $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, pri čemu je $f_0 = \emptyset$. Uočimo sada proizvoljni čvor x_{n+1}. Neka je $U \subseteq \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ njegov skup suseda i $V = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \backslash U$ skup čvorova sa kojim nije susedan. Biramo $z \in R$ koji je susedan sa svim čvorovima iz $f(U)$ i nesusedan sa $f(V)$. To je moguće jer važi osobina $(*)$. Na taj način je dobijeno prošireno preslikavanje f_{n+1} koje će takođe biti izomorfizam između indukovanih podgrafova. Nastavljajući postupak za svaki čvor proizvoljnog konačnog ili prebrojivog grafa, dobićemo utapanje svih konačnih i prebrojivih grafova u R. $\square$

Definicija 1.3.9 *Graf G je (čvorno) tranzitivan ako za svaka dva čvora u i v postoji automorfizam f takav da je $f(u) = v$.*

Osobina 1.3.10 *R je tranzitivan graf.*

Dokaz: Neka su dati u i v, proizvoljni čvorovi iz R. Na osnovu prethodnih osobina, znamo da se svaki izomorfizam između konačnih grafova G_1 i G_2 (podgrafova od R) može metodom $back\ and\ forth$ proširiti do automorfizma od R. Uzimajući da je $G_1 = u$ i $G_2 = v$, dobijamo da je R tranzitivan graf. □

Definicija 1.3.11 *Za graf G kažemo da je normalan ako i on i njegov komplement imaju beskonačno mnogo grana.*

Osobina 1.3.12 *R je normalan graf.*

Dokaz: Kako R sadrži sve konačne i prebrojive grafove kao svoje indukovane podgrafove, sledi da ima beskonačno mnogo grana. S druge strane, pošto je on samokomplementan (tj. izomorfan sa svojim komplementom) sledi da i njegov komplement ima beskonačno mnogo grana. Stoga je R normalan graf. □

Analogno konceptu indukovanog podgrafa, osobine se mogu izvesti i za pokrivajući podgraf. On koristi sve čvorove grafa R, ali samo neke njegove grane. Upravo zbog toga nije svaki prebrojivi graf pokrivajući podgraf od R (npr. to nije kompletan graf).

Osobina 1.3.13 *Prebrojivi graf G je izomorfan sa pokrivajućim podgrafom od R ako i samo ako za bilo koji konačan skup $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ čvorova iz G postoji čvor z koji nije povezan ni sa jednim od čvorova $v_1, v_2, ..., v_n$.*

Dokaz: Neka je G izomorfan sa pokrivajućim podgrafom od R. Uočimo bilo koji skup čvorova $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ iz G. Kako je u R postojao čvor koji nije susedan ni sa jednim od njih, a G je nastao brisanjem nekih grana od R sledi da će postojati čvor i u G koji nije susedan ni sa jednim od njih.

Pretpostavimo sada da je G prebrojivi graf koji zadovoljava osobinu da za svaki njegov konačni podskup $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ važi da postoji čvor z koji nije povezan ni sa jednim od njih. Pomoću metode $back\ and\ forth$ konstruisaćemo izomorfizam između G i odgovarajućeg pokrivajućeg podgrafa od R.

Numerišimo čvorove od G i R respektivno sa $\{x_1, x_2, x_3, ...\}$ i $\{y_1, y_2, y_3, ...\}$. Konstruišimo konačne izomorfizme f_n na sledeći način. Neka je $f_0 = \emptyset$. Pretpostavimo da je f_n konstruisano. Ako je n parno, neka je m najmanji indeks čvorova iz G koji nisu u domenu od f_n. Analogno kao u teoremi 1.2.3, tada f_n proširujemo do f_{n+1} sa x_m u domenu tako što na osnovu aksiome izbora izaberemo čvor sa najmanjim indeksom iz R koji zadovoljava $(*)$ da bude slika od x_m. Ako je n neparno, tražimo čvor sa najmanjim indeksom y_m u R koji nije u rangu od f_n. Neka je U skup svih čvorova koji su susedi y_m u rangu od f_n, a $V = \{y_1, y_2, ..., y_n\} \backslash U$. Izaberemo čvor sa najmanjim indeksom iz G takav da nije spojen ni sa jednim od čvorova iz $dom(f_n)$ koji imaju sliku u V. Na taj način proširujemo f_n do f_{n+1}. Traženi izomorfizam je $f = \cup f_i$. □.

Osobina 1.3.14 *Svaki prebrojivi graf čiji je svaki čvor konačnog stepena je pokrivajući podgraf od R.*

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji skup $U = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ tako da je svaki čvor iz U konačnog stepena i pri tome ne postoji čvor iz $G \backslash U$ koji nije susedan ni sa jednim od čvorova iz U. Dakle, za svaki čvor iz $G \backslash U$ postoji bar jedan čvor iz U sa kojim je on susedan. Međutim, tada bi sledilo da zbir stepena čvorova iz U nije konačan što nas dovodi u kontradikciju. $\square$

Osobina 1.3.15 *Skup grana grafa R može da se podeli na pokrivajuće podgrafove izomorfne bilo kojem datom prebrojivom skupu grafova čiji je svaki čvor konačnog stepena.*

Dokaz: Na osnovu prethodnih osobina znamo da ukoliko grafu R izbrišemo konačan broj grana, tada će rezultujući graf takođe biti izomorfan sa R. Štaviše, može se pokazati da i ako se izbrišu grane prebrojivog grafa čiji su svi čvorovi konačnog stepena iz R, rezultujući graf će opet biti izomorfan sa R.

Neka su $G_1, G_2, ...$ neprazni prebrojivi grafovi čiji su svi čvorovi konačnog stepena. Numerišimo grane grafa R redom sa $e_1, e_2, ...$ Pretpostavimo da smo pronašli podgrafove od R koji nemaju zajedničkih grana izomorfne sa grafovima $G_1, G_2, ..., G_n$. Neka je m najmanji indeks grane iz R koja ne leži ni u jednom podgrafu. Kako je graf $R - (G_1 \cup G_2 \cup ... \cup G_n)$ izomorfan sa R, to znači da se može pronaći njegov prebrojivi podgraf koji sadrži granu e_m i koji je (na osnovu prethodne osobine) izomorfan sa G_{n+1}. $\square$

Dakle, svaka grana grafa R leži na nekom pokrivajućem podgrafu izomorfnom sa datim nepraznim grafom G_i, čiji je svaki čvor konačnog stepena. Ako se za grafove G_i, za $i = 1, 2, ...$ izaberu odgovarajući grafovi, može se primetiti da R ima 1-faktorizaciju, kao i da se može podeliti na particiju Hamiltonovih puteva, itd.

U narednom izlaganju, numerisaćemo čvorove prebrojivog grafa elementima iz skupa $\mathbb{N}$, uključujići i 0.

Teorema 1.3.16 *Postoji familija prebrojivih grafova $\{H_i, i \in \mathbb{N}\}$ koji nemaju zajedničkih grana tako da za svaki prebrojivi graf G takav da je $E(H_i) \subset E(G)$ i $E(H_j) \cap E(G) = \emptyset$, za neke $i, j \in \mathbb{N}$, važi da je G izomorfan sa Rado grafom.*

Dokaz: Neka je $\{(P_n, Q_n, f(n), g(n)), n \in \mathbb{N}\}$ numeracija svih uređenih četvorki (A, B, i, j), pri čemu su A i B konačni, međusobno disjunktni podskupovi od $\mathbb{N}$, a $i, j \in \mathbb{N}$.

Neka je dat niz prirodnih brojeva $v_0 < v_1 < v_2 < ...$ koji zadovoljava uslov $v_n > max(P_n \cup Q_n)$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Neka su $H_i, \forall i \in \mathbb{N}$ takvi grafovi da im je skup čvorova $\mathbb{N}$ i neka se $E(H_i)$ sastoji od svih parova čvorova (w, v_n) i (v_n, w) takvih da je $f(n) = i, w \in P_n$ i $g(n) = i, w \in Q_n$.

Pretpostavimo da je dat graf G čiji je skup čvorova $\mathbb{N}$ i koji zadovoljava uslove: $E(H_i) \subset E(G)$ i $E(H_j) \cap E(G) = \emptyset$. Neka su F_1 i F_2 proizvoljni disjunktni konačni podskupovi od G. Izaberimo n tako da je $P_n = F_1$, $Q_n = F_2$, $f(n) = i$ i $g(n) = j$. Stoga je v_n povezan u H_i (pa samim tim i u G) sa svakim čvorom iz F_1. Takođe, v_n je povezan u H_j sa svakim čvorom iz F_2 pa samim tim nije povezan ni sa jednim iz F_2 u G. Sledi da graf G zadovoljava uslov $(*)$ pa je samim tim izomorfan sa Rado grafom. $\square$

Kao što je već ranije navedeno, za konačan graf G kažemo da sadrži Hamiltonov put ako postoji put u grafu G koji sadrži sve njegove čvorove. Sada uvodimo definiciju i za prebrojive grafove.

Definicija 1.3.17 *Hamiltonov put za prebrojivi graf G je bijekcija τ između skupa $\mathbb{N}$ i skupa čvorova od G tako da su čvorovi $\tau(n)$ i $\tau(n+1)$ povezani, za sve n iz skupa $\mathbb{N}$.*

Definicija 1.3.18 *Hamiltonov put za prebrojive grafove se naziva totalno simetričan ako je preslikavanje $\tau(n) \to \tau(n+1)$, za sve n iz skupa $\mathbb{N}$, utapanje grafa G u samog sebe.*

Osobina 1.3.19 *Rado graf sadrži totalno simetričan Hamiltonov put.*

Dokaz: Neka je $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ numeracija svih konačnih podskupova od $\mathbb{N}$, pri čemu su zadovoljena sledeća dva uslova:
(1) $P_n \subseteq \{0, 1, 2, ..., n\}, \forall n \in \mathbb{N}$
(2) Svaki konačan podskup od $\mathbb{N}$ se pojavljuje beskonačno mnogo puta.

Definišimo sada rekurzivno niz $a_n, \forall n \in \mathbb{N}$

$$a_n = 2 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Možemo primetiti da je $a_0 = 2$, a da se svi ostali članovi mogu zapisati u obliku $a_{n+1} = a_n + n + 1$.

Konstruišimo sada niz konačnih podskupova od $\mathbb{N}$ takvih da je:
(1) $Q_0 \subset Q_1 \subset Q_2 \subset ...$
(2) $Q_0 = \{1\}$ i $Q_{n+1} = Q_n \cup \{a_{n+1} - k, k \in P_n\}$.

Ako $k \in P_n$, onda važi $0 \leq k \leq n$ te je ispunjeno:

$$a_n + 1 = a_{n+1} - n \leq a_{n+1} - k \leq a_{n+1}.$$

Odavde sledi da je $Q_n \subseteq \{0, 1, ..., a_n\}$ i važi:

$$Q_{n+1} \backslash Q_n \subseteq \{a_n + 1, a_n + 2, ..., a_{n+1}\}.$$

Neka je $A = \cup\{Q_n, n \in \mathbb{N}\}$. Konstruišimo sada graf G čiji je skup čvorova $\mathbb{N}$, a skup grana $E(G) = \{(m, n), |m - n| \in A\}$. Pošto $1 \in A$ sledi da graf G sadrži totalno simetričan Hamiltonov put.

Preostaje nam još da pokažemo da je konstruisani graf izomorfan sa R, tj. da zadovoljava osobinu $(*)$. Neka su F_1 i F_2 proizvoljni konačni disjunktni podskupovi od $\mathbb{N}$. Možemo da izaberemo dovoljno veliko n tako da je ispunjeno $P_n = F_1$ i $F_1 \cup F_2 \in \{0, 1, ..., n\}$ (ovo je moguće jer se svaki od skupova ponavlja beskonačno mnogo puta). Tada, za sve $0 \leq k \leq n$, na osnovu konstrukcije skupova Q_n važi:

$$a_{n+1} - k \in Q_{n+1} \iff k \in F_1.$$

Međutim, kako je $A \cap \{0, 1, ..., a_{n+1}\} = Q_{n+1}$ sledi da je:

$$a_{n+1} - k \in A \iff k \in F_1.$$

Kako je čvor a_{n+1} povezan u G sa svakim čvorom iz F_1 i nije ni sa jednim u F_2, sledi da graf G zadovoljava uslov $(*)$, čime je i ovaj dokaz završen. $\square$

1.4 $\aleph_0$-kategoričnost

Definicija 1.4.1 *Uređeni par* $(\mathcal{A}, \mathcal{R})$*, gde je* $\mathcal{A}$ *neprazan skup, a* $\mathcal{R}$ *skup relacija na njemu se naziva relacijska struktura. Pri tome, skup* $\mathcal{A}$ *se naziva nosač ili univerzum.*

Posmatrajmo skup čvorova grafa R kao neprazan skup na kome je definisana relacija ρ na sledeći način: za svaka dva čvora x i y važi

$$x\rho y \longleftrightarrow x \ i \ y \ su \ susedni.$$

Tada je (R, ρ) jedna relacijska struktura.

Definicija 1.4.2 *Struktura* $\mathcal{M}$ *je* $\aleph_0$*-kategorična ako bilo koja prebrojiva struktura koja zadovoljava iskazne formule kao i* $\mathcal{M}$ *je izomorfna sa* $\mathcal{M}$*.*

Teorema 1.4.3 (R, ρ) *je* $\aleph_0$*-kategorična struktura.*

Dokaz: Osobinu $(*)$ možemo predstaviti kao prebrojivi skup predikatskih formula $\sigma_{m,n}$, gde su m i n proizvoljni prirodni brojevi. Pri tome, $\sigma_{m,n}$ ima sledeći oblik:

$$(\forall u_1, u_2, ..., u_m, v_1, v_2, ..., v_n)((u_1 \neq v_1) \wedge ... \wedge (u_m \neq v_n)) \longrightarrow$$
$$(\exists z)((z \ \rho \ u_1) \wedge ... \wedge (z \ \rho \ u_m) \wedge \neg(z \ \rho \ v_1) \wedge ... \wedge \neg(z \ \rho \ v_n))$$

Kako su sve strukture koje zadovaljavaju osobinu $(*)$ izomorfne sa R, sledi da R je $\aleph_0$-kategoričan. $\square$

U prethodnoj teoremi definisane su rečenice $\sigma_{m,n}$ koje aksiomatizuju graf R. Sledećom teoremom pokazaćemo još neka njegova bitna svojstva sa stanovišta predikatske logike. Pri tome, smatramo da neka osobina $\mathcal{O}$ važi za skoro sve konačne random grafove ako verovatnoća da graf sa N čvorova ima osobinu $\mathcal{O}$ teži 1 kada $N \to \infty$.

Teorema 1.4.4 *Neka je* θ *iskazna formula u jeziku teorije grafova. Tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:*
(a) θ *važi za skoro sve konačne random grafove;*
(b) θ *važi za graf* R*;*
(c) θ *je sintaktička posledica skupa formula* $\{\sigma_{m,n}, \ m, n \in \mathbb{N}\}$.

Dokaz: Prvo ćemo pokazati da su tvrđenja (b) i (c) ekvivalentna. Na osnovu tvrđenja pod (b) sledi da je iskazna formula θ semantička posledica skupa formula $\{\sigma_{m,n}, m, n \in \mathbb{N}\}$ jer te formule aksiomatizuju R. Na osnovu tvrđenja pod (c)

sledi da je θ sintaktička posledica skupa formula $\{\sigma_{m,n}, m, n \in \mathbb{N}\}$. Međutim, kako na osnovu Gödel-Henkin teoreme kompletnosti sledi da su to ekvivalentni pojmovi sledi i ekvivalentnost tvrđenja (b) i (c).

Pokazaćemo sada ekvivalenciju tvrđenja (a) i (c). Neka važi (c). Najpre ćemo pokazati da $\sigma_{m,n}$ važi za skoro sve konačne random grafove. Verovatnoća da $\sigma_{m,n}$ ne važi u grafu sa N čvorova je manja od $N^{m+n}(1-\frac{1}{2^{m+n}})^{N-m-n}$ (od N čvorova biramo $m+n$ što je manje od N^{m+n}, a verovatnoća da od preostalih $N-m-n$ čvorova nijedan nije povezan tako da važi osobina $(*)$ je $(1-\frac{1}{2^{m+n}})^{N-m-n}$). Ovaj izraz teži ka 0 kada $N \to \infty$. Neka θ zadovoljava uslov (c). Tada se izvođenje od θ može dobiti pomoću konačnog skupa Σ formula $\sigma_{m,n}$. Kako skoro svi konačni random grafovi zadovoljavaju formule u Σ, sledi da zadovoljavaju i formulu θ.

Da iz (a) sledi (c), pokazujemo kontrapozicijom. Ako pretpostavimo da (c) ne važi, odatle sledi da je $\neg\theta$ logička posledica formula $\sigma_{m,n}$ što znači (na osnovu prethodnog pasusa) da $\neg\theta$ važi za skoro sve konačne random grafove. Dakle, pokazali smo da iz $\neg(c)$ sledi $\neg(a)$ pa važi ekvivalencija tvrđenja (a) i (c). $\square$

Teorema 1.4.5 *Neka je θ predikatska formula u jeziku teorije grafova. Tada θ važi za skoro sve konačne random grafove ili ne važi skoro ni za jedan.*

Dokaz: Dokaz ove teoreme važi neposredno na osnovu prethodne. Ako pretpostavimo da je θ logička posledica skupa formula $\{\sigma_{m,n},\ m, n \in \mathbb{N}\}$, onda će ona skoro sigurno važiti za sve random grafove i obrnuto, ako nije posledica, onda neće važiti skoro ni u jednom. $\square$

Ova teorema je u literaturi poznata još i kao nula-jedan zakon.

1.5 Grupe automorfizama

Definicija 1.5.1 *Grupa $(G, *)$ je neprazan skup G sa binarnom operacijom *, pri čemu su zadovoljeni sledeći uslovi:*
(1) *zatvorenost: $\forall a, b \in G$ važi $a * b \in G$;*
(2) *asocijativnost: $\forall a, b, c \in G$ važi $(a * b) * c = a * (b * c)$;*
(3) *neutralni element: $\exists e \in G$ takav da je $a * e = e * a = a$;*
(4) *inverzni element: $\forall a \in G$ $\exists b \in G$ tako da je $a * b = b * a = e$, gde je e neutralni element grupe, a element b se obeležava još i sa a^{-1}.*

Definicija 1.5.2 *Za H kažemo da je podgrupa grupe G (u oznaci $H \subseteq G$) ako je H i sama grupa u odnosu na restrikciju operacije $*$ na H.*

Definicija 1.5.3 *Za podgrupu N od G kažemo da je normalna ako za sve $g \in G$ važi $g * N = N * g$.*

Skupove $gN = \{gn, n \in N\}$ i i $Ng = \{ng, n \in N\}$ nazivamo levi i desni koset respektivno. Inače, svaka grupa G ima bar dve normalne podgrupe, a to su $\{e\}$ i G. One se nazivaju još i trivijalne podgrupe.

Definicija 1.5.4 *Ako grupa G sem trivijalnih grupa nema drugih normalnih podgrupa, tada se ona naziva prosta grupa.*

Definicija 1.5.5 *Ako su a i b dva proizvoljna elementa grupe $(G, *)$, onda za njih kažemo da su konjugovani ako postoji element $g \in G$ tako da važi $a = g * b * g^{-1}$.*

Svi prebrojivi grafovi koji imaju osobinu $(*)$ su međusobno izomorfni. Ako posmatramo skup svih automorfizama na grafu R, oni fomiraju grupu u odnosu na kompoziciju preslikavanja. Ta grupa se naziva grupa automorfizama. Ona se obeležava sa $Aut(R)$. Da bismo pokazali da je $Aut(R)$ grupa, ispitujemo sledeće osobine:

-zatvorenost: ova osobina važi jer je kompozicija dva izomorfizma f i g, tj. $f \circ g$ takođe izomorfizam;

-asocijativnost: ova osobina važi jer za svaka tri preslikavanja f, g i h važi da je $f \circ (g \circ h) = f \circ (g \circ h)$ zbog asocijativnosti kompozicije;

-neutralni element: kako važi $f \circ e = e \circ f = f$, gde je e identičko preslikavanje, a f proizvoljni izomorfizam sledi da je identičko preslikavanje neutralni element;
-inverzni element: za proizvoljno $f \in Aut(R)$ važi da je $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = e$, gde je f^{-1} inverzno preslikavanje od f pa sledi da za svaki elemenat postoji njegov inverzni.

Teorema 1.5.6 *Grupa $Aut(R)$ ima $2^{\aleph_0}$ elemenata.*

Dokaz: Zna se da je grupa automorfizama bilo koje prebrojive strukture prvog reda najviše prebrojiva ili kardinalnosti $2^{\aleph_0}$. Ona će biti najviše prebrojiva ako je stabilizator neke n-torke (tj. preslikavanje koje datu n-torku slika u samu sebe) identičko preslikavanje. Neka je data proizvoljna n-torka koja se preslikava u sebe. Na osnovu osobina R ovo preslikavanje možemo da proširimo do automorfizma, ali tako da ne bude identičko preslikavanje pa sledi da je $|Aut(R)| = 2^{\aleph_0}$, tj. grupa $Aut(R)$ ima $2^{\aleph_0}$ elemenata. $\square$

Teorema 1.5.7 *Grupa $Aut(R)$ je prosta.*

Matematičar Truss je pokazao sledeći rezultat: ako su g i h proizvoljna dva elementa iz $Aut(G)$ različita od identičkog preslikavanja, onda se preslikavanje h može predstaviti kao proizvod pet konjugata elemenata g i g^{-1}.

U konstrukciji Rado grafa preko univerzalog skupa $S \subseteq \mathbb{N}$, za skup čvorova uzet je skup celih brojeva, tj. $\mathbb{Z}$, pri čemu su čvorovi x i y susedni ako je ispunjeno $|x-y| \in S$. Posmatrajmo sada preslikavanje $f : x \to x+1$. Očigledno, ono je automorfizam, pri čemu su svi čvorovi pomereni za po jedno mesto ”udesno”. Stoga se f naziva ciklični automorfizam. Može se pokazati da su dva ciklična automorfizma konjugovana ako i samo ako su određeni istim univerzalnim skupom S. Pošto ukupno ima $2^{\aleph_0}$ univerzalnih skupova, dolazimo do sledeće osobine Rado grafa.

Osobina 1.5.8 *Rado graf ima $2^{\aleph_0}$ cikličnih automorfizama koji nisu konjugovani.*

Glava 2

Homogeni bipartitni grafovi

U ovom delu biće reči o homogenim bipartitnim grafovima. Njihova klasifikacija zasnovana je na rezultatima iz rada [10]. Najpre ćemo definisati pojmove i oznake koje ćemo koristiti.

2.1 Bipartitni graf-osnovni pojmovi

Definicija 2.1.1 *Bipartitni graf je uređena trojka $G = (L, R, E)$ takva da važi $L \cap R = \emptyset$, gde su L i R neprazni skupovi i $E \subseteq \{\{u, v\} : u \in L, v \in R\}$.*

Skup $L \cup R$ se naziva skup čvorova, a skup E se naziva skup grana grafa G. Pri tome, L nazivamo skup levih, a R skup desnih čvorova grafa G. Ako je v proizvoljan čvor iz grafa G, sa $G(v)$ ćemo obeležavati skup svih njegovih suseda, tj. $G(v) = \{u : u \in G, \{u, v\} \in E\}$.

Definicija 2.1.2 *Graf $G = (L, R, E)$ je podgraf grafa $G' = (L', R', E')$ ako je $L \subseteq L'$, $R \subseteq R'$ i $E \subseteq E'$. Specijalno, G se zove indukovani podgraf ako je $E = E' \cap (L \times R)$.*

Definicija 2.1.3 *Bipartitan graf $G = (L, R, E)$ se naziva kompletan ako za sve $u \in L$,$v \in R$ važi $\{u, v\} \in E$. Ukoliko je $E = \emptyset$, onda se on naziva prazan bipartitni graf.*

Definicija 2.1.4 *Ako je $G = (L, R, E)$, onda je graf $\bar{G} = (L, R, (L \times R)\backslash E)$ njegov komlement.*

Definicija 2.1.5 *Parcijalni homomorfizam između grafova $G_1 = (L_1, R_1, E_1)$ i $G_2 = (L_2, R_2, E_2)$ je preslikavanje $f : G_1' \to G_2'$, gde je $G_1' \subseteq G_1$ i $G_2' \subseteq G_2$ sa osobinom da za sve čvorove $u, v \in G_1'$ važi: $\{u, v\} \in E_1$ ako i samo ako $\{f(u), f(v)\} \in E_2$.*

Definicija 2.1.6 *Parcijalni izomorfizam f između dva bipartitna grafa $G_1 = (L_1, R_1, E_1)$ i $G_2 = (L_2, R_2, E_2)$ je "1-1" preslikavanje između skupova $L_1 \cup R_1$ i $L_2 \cup R_2$ tako da je ispunjeno $f[L_1] \subseteq L_2$, $f[R_1] \subseteq R_2$ i za sve čvorove u i v iz G važi $\{u, v\} \in E_1$ ako i samo ako $\{f(u), f(v)\} \in E_2$.*
Ako je f bijekcija između čvorova grafova G_1 i G_2, onda se f se naziva (totalni) izomorfizam.

Definicija 2.1.7 *Za bipartitan graf G kažemo da je lokalno $n-$simetričan ako postoji $H \subseteq Aut(G)$ tako da za svaki čvor $v \in G$ i svake dve $n-$torke njegovih suseda $x_1, x_2, ..., x_n$ i $y_1, y_2, ..., y_n$ postoji izomorfizam $h \in H$ takav da važi $h(v) = v$ i $h(x_i) = y_i$, za sve $i \in \{1, 2, ..., n\}$.*

Definicija 2.1.8 *Za bipartitan graf kažemo da ima savršen mečing ako je svaki njegov čvor stepena 1 (tj. ima 1-faktorizaciju).*

2.2 Homogenost

Definicija 2.2.1 *Graf G je homogen ako se svaki izomorfizam između njegovih konačnih podgrafova može proširiti do automorfizma grafa G.*

Sada ćemo navesti dve teoreme koje karakterišu homogenost kod prebrojivih grafova.

Teorema 2.2.2 *Prebrojivi graf G je homogen ako i samo ako za svaki njegov konačan podgraf H svako utapanje grafa $H - v$ u graf G se može proširiti do utapanja čitavog H u G.*

Teorema 2.2.3 *Neka je G prebrojivi homogeni graf. Tada važe sledeća tvrđenja:*
(a) Ako za graf H važi $|H| = |G|$ i G sadrži svaki konačan podgraf od H, onda G sadrži i graf H.
(b) Ako za homogeni graf H važi $|H| = |G|$ i ako sadrže tačno iste konačne grafove kao svoje indukovane podgrafove, tada su grafovi G i H izomorfni.

Teorema 2.2.4 *Rado graf je homogen.*

Dokaz: Da bismo ovo pokazali, koristimo teoremu 2.2.2. Neka je H proizvoljni konačni podgraf od R. Neka je v proizvoljan čvor iz H, a preslikavanje f utapanje grafa $H - v$ u G. Uzmimo da je $G_1 = f(H(v))$, a $G_2 = rang(f)\backslash G_1$. Kako Rado graf zadovoljava osobinu $(*)$, sledi da postoji čvor w u R takav da je susedan sa svim čvorovima iz skupa G_1 i nije susedan ni sa jednim čvorom iz skupa G_2. Neka je $f(v) = w$. Preslikavanje f je utapanje čitavog grafa H u R pa sledi da je Rado graf homogen. $\square$

Koristeći ovu teoremu, možemo na još jedan način dokazati teoremu 1.2.3. Naime, ako posmatramo dva proizvoljna prebrojiva grafa koja zadovoljavaju osobinu $(*)$, na osnovu prethodne teoreme sledi da su oni homogeni. Takođe, na osnovu prethodnog izlaganja znamo da oni sadrže sve konačne grafove kao svoje indukovane podgrafove. Kako su zadovoljeni svi uslovi teoreme 2.2.3, sledi da su dati grafovi izomorfni.

2.3 Klasifikacija homogenih bipartitnih grafova

Neka je dat homogeni bipartitni graf $G = (L, R, E)$. Pretpostavimo da su obe strane (tj. L i R) kardinalnosti 1. Tada za G imamo 2 mogućnosti: G je kompletan ili prazan graf.

Pretpostavimo sada da je bar jedna strana (npr. L) kardinalnosti veće od 1. Neka su x i y dva različita čvora iz L. Ako pretpostavimo $G(x) = G(y)$, tada za svaki čvor z iz L važi da je $G(z) = G(x)$. Ovo je ispunjeno jer je G homogen, a ako uočimo izomorfizam $x \to y$ i $y \to z$ sledi da bi se on proširio do automorfizma mora biti ispunjeno $G(x) = G(y) = G(z)$. Drugim rečima, postoji skup $B \subseteq R$ takav da je $G(x) = B$ za sve čvorove x iz L. Pretpostavimo sada da su skupovi čvorova B i $R \backslash B$ pravi podskupovi od R. Uočimo čvorove $u \in B$ i $v \in R \backslash B$. Posmatrajmo preslikavanje koje dodeljuje čvoru u čvor v, čvoru v dodeljuje čvor u, a ostale čvorove iz R slika same u sebe. Kako je ono izomorfizam, sledi da se može proširiti do automorfizma. Međutim, to nas dovodi do kontradikcije pa sledi da je bar jedan od B i $R \backslash B$ jednak sa R. Dakle, ako bar dva čvora imaju iste susede, dobija se da je G ili prazan ili kompletan bipartitni graf.

Pretpostavimo sada da je za sve čvorove $x, y \in L$ ispunjeno ako je $x \neq y$ onda $G(x) \neq G(y)$. Tada očigledno graf G ne može biti ni kompletan, a ni prazan.

Razmotrimo prvo slučaj da je za neki čvor $x \in L$ skup suseda, tj. $G(x)$ konačan podskup od R. Neka je njegova kardinalnost n. Na osnovu osobine homogenosti sledi da je $\{G(x) : x \in L\} = \{U : U \subseteq R, |U| = n\}$. Očigledno, tada mora biti $|R| > n$ jer bi u slučaju da je $|R| = n$ sledilo da je G kompletan bipartitan graf.

Pretpostavimo da je $n > 1$ i $|R| > n + 1$. U tom slučaju možemo formirati izomorfizam koji čvorovima sa $n-1$ zajedničkih suseda dodeljuje čvorove sa $n-2$ zajednička suseda pa nas na osnovu homogenosti to dovodi do kontradikcije.

Sledeći slučaj koji razmatramo je $|R| = n + 1$. Tada je G komplement bipartitnog grafa sa $2n+2$ čvorova (tj. obe strane imaju po $n+1$ čvor) koji ima savršen mečing.

Preostali slučaj je kada je $n = 1$. Očigledno, tada G ima savršen mečing.

Analogno, u slučaju da je komplement skupa $G(x)$ konačan za neko $x \in L$, dobiće se da je G komplement bipartitnog grafa koji ima savšen mečing. Potpuno su ista razmatranja i kada umesto skupa L posmatramo skup R.

Razmotrimo sada slučaj kada svaki čvor $x \in L$ ima beskonačno mnogo suseda u R i da je komplement njegovog skupa suseda takođe beskonačan skup. U tom slučaju će za sve $k, l \in \mathbb{N}$, G imati sledeću osobinu:

Osobina 2.3.1 *Za svaki izbor različitih čvorova $x_1, x_2, ..., x_k, y_1, y_2, ..., y_l$ iz skupa*

L (R) postoji beskonačno mnogo čvorova u iz R (L) tako da važi:

$$u \in G(x_i) \; i \; u \notin G(y_j), \; za \; sve \; i \in \{1, 2, ..., k\} \; i \; j \in \{1, 2, ..., l\}. \tag{$**$}$$

Dokaz: Zbog jednostavnosti zapisa, osobinu datu ovom teoremom označili smo sa $(**)$. Neka su dati $x_1, x_2, ..., x_k, y_1, y_2, ..., y_l$, različiti čvorovi iz L. Pokazaćemo prvo da postoji bar jedan čvor $u \in R$ koji je susedan sa svakim čvorom x_i i nije susedan ni sa jednim čvorom y_j za sve $i \in \{1, 2, ..., k\}$ i $j \in \{1, 2, ..., l\}$. Neka je v proizvoljan čvor iz R. Neka su $x'_1, x'_2, ..., x'_k \in G(v)$ i $y'_1, y'_2, ..., y'_l \notin G(v)$ različiti čvorovi iz L. Oni sigurno postoje jer je $G(v)$ beskonačan, a takođe i njegov komplement. Neka je f automorfizam koji dodeljuje x'_i, y'_j odgovarajućim x_i, y_j respektivno i neka je $f(v) = u$. Na ovaj način smo pokazali da postoji bar jedan čvor u tako da važi osobina $(**)$.

Pretpostavimo da postoje x'_i, y'_j takvi da postoji konačno mnogo izbora čvora u. Neka je broj izbora čvorova u minimalan za dati izbor x_i, y_j. Kako je skup L beskonačan, sledi da postoji čvor $z \in L$, takav da je $z \neq x_i$ i $z \neq y_j$ za sve $i \in \{1, 2, ..., k\}$ i $j \in \{1, 2, ..., l\}$.

Neka je u proizvoljan čvor za koji važi osobina $(**)$. Postoje dva slučaja. Ako $u \in G(z)$, onda za čvor uzmemo da je $z = y_{l+1}$. Ako $u \notin G(z)$, onda uzmemo da je $z = x_{k+1}$. U oba slučaja dobićemo x_i, y_j sa manjim brojem izbora čvorova u što nas dovodi do kontradikcije. □

Definicija 2.3.2 *Svaki bipartitni graf koji zadovoljava osobinu $(**)$ se naziva random bipartitni graf.*

Navešćemo sada neke teoreme koje važe za random bipartitne grafove.

Teorema 2.3.3 *Svaki prebrojivi random bipartitni graf je homogen.*

Teorema 2.3.4 *Dužina najkraće konture u prebrojivom random bipartitnom grafu je 4.*

Teorema 2.3.5 *Svaka dva prebrojiva random bipartitna grafa su međusobno izomorfna.*

Pre nego što pređemo na dalje izlaganje o bipartitnim homogenim grafovima, sumirajmo koje smo do sada homogene bipartitne grafove pronašli. To su:

1. Kompletni bipartitni grafovi
2. Prazni bipartitni grafovi
3. Bipartitni grafovi koji imaju savršen mečing

4. Komplementi bipartitnih grafova koji imaju savršen mečing
5. Random prebrojivi bipartitni graf.

Međutim, postoje još neki prebrojivi bipartitni grafovi koji su homogeni. Tu spadaju i random grafovi koji imaju prebrojivo mnogo čvorova u levom delu i neprebrojivo mnogo čvorova u desnom delu.

Definicija 2.3.6 *Bipartitni graf $G = (L, R, E)$ se naziva saS graf ako je $|L| = \aleph_0$, a $|R| = \kappa$, gde je $\kappa > \aleph_0$.*

U slučaju da homogeni bipartitan graf nije ni kompletan ni prazan, moraju biti ispunjeni sledeći uslovi: $|L| \leq 2^{|R|}$ i $|R| \leq 2^{|L|}$. Stoga, ako imamo homogeni bipartitni saS graf, iz uslova da je $|L| = \aleph_0$, sledi da je $|R| = 2^{\aleph_0}$. Pre nego što pokažemo da takav graf uopšte i postoji, definišimo još neke nove pojmove.

Uvodimo sada notaciju koju ćemo koristiti u narednom izvođenju. Neka je ω oznaka za skup svih prirodnih brojeva. Neka se sa n obeležava skup svih prirodnih brojeva (uključujući i 0) manjih od n, tj. $n = \{0, 1, ..., n-1\}$. Neka je ω^ω skup svih funkcija iz ω u ω, a ω^n je skup svih funkcija iz n u ω, tj. skup svih $n-$torki. Ako $\eta \in \omega^n$, onda $\eta\hat{\ }i$ označava da je niz η proširen sa i, tj. $\eta \cup \{< n, i >\}$. Oznaka $\forall^\infty n$ se čita kao "za sve, osim za konačno mnogo n".

Definicija 2.3.7 *Kažemo da graf G' ima osobinu "magičnog proširenja" ako su zadovoljena sledeća dva uslova:*
(1) G je indukovani podgraf od G'
(2) Svaki konačan parcijalni automorfizam od G može se proširiti do automorfizma čitavog G'.

Matematičar E. Hrushovski je pokazao sledeću teoremu:

Teorema 2.3.8 *Za svaki konačan graf postoji konačan graf koji je njegovo "magično proširenje".*

Takođe, može se pokazati da ova teorema važi i ako se umesto termina "konačan graf" upotrebi termin "bipartitan konačan graf". Štaviše, za svaki beskonačni bipartitan graf njegovo magično proširenje je bipartitni graf koji je iste kardinalnosti kao i on.

Formirajmo sada rekurzijom niz grafova $G_n = (L_n, R_n, E_n)$ tako da je L_n podskup skupa ω, a R_n je podskup od ω^n, tj. skup nizova prirodnih brojeva dužine n. Neka je $L_1 = \{0, 1\}$, $R_1 = \{\langle 1\rangle, \langle 2\rangle\}$ i $E_1 = \{(0, \langle 1\rangle), (1, \langle 2\rangle)\}$. Ovim smo sprečili da krajnji graf bude kompletan ili prazan graf. Zahtevamo da budu ispunjena sledeća tri uslova:
(1) $L_{2i+1} = L_{2i}$;
(2) $R_{2i+1} = \{\eta\hat{\ }1 : \eta \in R_{2i}\} \cup \{\eta\hat{\ }2 : \eta \in R_{2i}\}$;

(3) Za sve $x \in L_{2i+1}$ i sve $\eta \in R_{2i+1}$ važi $\{x, \eta\} \in E_{2i+1}$ ako i samo ako $\{x, \eta \restriction (2i)\} \in E_{2i}$.
Dakle, na levoj strani broj čvorova u neparnim slučajevima ostaje isti kao i u parnim, dok se na desnoj strani broj čvorova udvostručava.

Definišimo sada preslikavanja ρ i π tako da je $\rho_{2i}(\eta) = \eta\hat{\ }1$, za sve $\eta \in R_{2i}$ i $\pi_{2i}(\eta) = \eta \restriction (2i)$, za sve $\eta \in R_{2i+1}$ i neka su ρ_{2i} i π_{2i} identička preslikavanja na L_{2i}, tj. $\rho_{2i}(x) = x$ i $\pi_{2i}(x) = x$, za sve $x \in L_{2i}$. Stoga, iako graf G_{2i} nije indukovan podgraf od G_{2i+1}, preslikavanje ρ_{2i} predstavlja utapanje grafa G_{2i} u graf G_{2i+1} kao indukovanog podgrafa, dok preslikavanje π_{2i} predstavlja homomorfizam između datih grafova. Takođe, neka je $\rho_{2i+1}(\eta) = \eta\hat{\ }1$, za $\eta \in R_{2i+1}$ i neka je ρ_{2i+1} identičko preslikavanje na skupu L_{2i+1}. Sada pronalazimo graf $G_{2i+2} = \langle L_{2i+2}, R_{2i+2}, E_{2i+2}\rangle$ koji je "magično proširenje" grafa $\rho_{2i+1}[G_{2i+1}]$. Pretpostavimo da su svi čvorovi iz R_{2i+2} koji nisu u grafu $\rho_{2i+1}[G_{2i+1}]$ nizovi dužine $2i+2$ čijih su prvih $2i+1$ cifara jednake 0, a L_{2i+2} je inicijalni segment skupa prirodnih brojeva. Neka je $\pi_{2i+1}(\eta) = \eta \restriction (2i+1)$, za sve $\eta \in \rho_{2i+1}[R_{2i+1}]$, dok je π identičko preslikavanje na skupu L_{2i+1}. Stoga je π parcijalni homomorfizam iz grafa G_{2i+2} na graf G_{2i+1}.

Definišimo sada graf $G_\infty = (L, R, E)$ pomoću niza grafova, $G_n, n \in \omega$. Za levu stranu uzimamo skup svih prirodnih brojeva, tj. $L = \omega$. Za desnu stranu uzimamo skup $R = \{\eta \in \omega^\omega : (\forall^\infty n)(\eta \restriction n \in R_n)\}$, dok za skup grana uzimamo $E = \{\{x, \eta\} : (\forall^\infty n)(\{x, \eta \restriction n\} \in E_n)\}$.

Očigledno, kardinalnost od L je $\aleph_0$, a može se pokazati i da je kardinalnost od R jednaka $2^{\aleph_0}$.

Teorema 2.3.9 *Postoji saS graf $G = (L, R, E)$ takav da je ispunjeno:*
$|L| = \aleph_0$ *i* $|R| = 2^{\aleph_0}$.

Dokaz: Primer za takav graf je konstruisani graf G_∞. □

Teorema 2.3.10 *Graf $G_\infty = (L, R, E)$ je homogen.*

Dokaz: Neka je f izomorfizam između konačnih podgrafova grafa G_∞. Možemo pronaći dovoljno veliko n_0 tako da su ispunjeni sledeći uslovi:
(1) $(dom(f) \cup rang(f)) \cap L \subseteq L_{n_0}$
(2) Za sve $\eta_1, \eta_2 \in dom(f) \cup rang(f)$, pri čemu je $\eta_1 \neq \eta_2$, ispunjeno je:
$\eta_1 \restriction n_0, \eta_2 \restriction n_0 \in R_{n_0}$ i $\eta_1 \restriction n_0 \neq \eta_2 \restriction n_0$
(3) Za sve $x, \eta \in dom(f)$ važi: $\{x, \eta\} \in E \iff \{x, \eta \restriction n_0\} \in E_{n_0}$.

Kako su za sve $n \geq n_0$ ispunjeni dati uslovi, sledi da f određuje konačne parcijalne automorfizme f_n grafova G_n date sa:
$f_n(x) = f(x)$, za sve $x \in dom(f) \cap L$ i
$f_n(\eta \restriction n) = f(\eta) \restriction n$, za sve $\eta \in dom(f) \cap R$.

Pretpostavimo sada, bez umanjenja opštosti, da je n_0 neparno i da je $f_{n_0} = \bar{f}_{n_0}$. Indukcijom po n, za $n \geq n_0$ dobijamo niz preslikavanja $\bar{f}_n$ koja zadovoljavaju sledeće uslove:
(1) $\bar{f}_n$ je parcijalni automorfizam od G_n i ako je $n > n_0$, onda je $\bar{f}_n$ totalni automorfizam
(2) $\bar{f}_n$ je proširenje od f_n
(3) $\pi_n \circ \bar{f}_{n+1} = \bar{f}_n \circ \pi_n$.

Dati parcijalni automorfizam $\bar{f}_{2i-1}$ od G_{2i-1}, možemo proširiti do totalnog automorfizma $\bar{f}_{2i}$ grafa G_{2i} (na osnovu "magičnog proširenja").

Definišimo sada $\bar{f}_{2i+1}$. Pošto je $\bar{f}_{2i+1} \restriction L_{2i+1} = \bar{f}_{2i} \restriction L_{2i}$, preostaje nam da definišemo $\bar{f}_{2i+1} \restriction R_{2i+1}$. Da bi bili zadovoljeni traženi uslovi mora biti: ako je $\bar{f}_{2i}(x) = y$ onda je $\bar{f}_{2i+1}(\{x\hat{\ }1, x\hat{\ }2\}) = \{y\hat{\ }1, y\hat{\ }2\}$.

Definišimo funkciju F na grafu G_∞ na sledeći način:
za $x \in L$ je $F(x) = y \iff (\forall^\infty n)(\bar{f}_n(x) = y)$,
za $\eta \in R$ je $F(\eta) = v \iff (\forall^\infty n)(\bar{f}_n(\eta \restriction n) = v \restriction n)$.

Kako su sva preslikavanja f_i automorfizmi i F je dobro definisano na obe strane (L i R) sledi da je F traženi automorfizam grafa G_∞. $\square$

Analogno, mogu se pokazati egzistencija i homogenost saS grafova čije su strane L i R kardinalnosti κ i 2^κ respektivno, za bilo koji kardinal κ.

Glava 3

Digrafovi sa osobinom $\mathcal{P}$

3.1 Digrafovi-osnovni pojmovi i definicije

U prethodnom izlaganju, bilo je reči o prebrojivim prostim grafovima (ili samo grafovima) kod kojih su oba kraja grane smatrana ravnopravnim. Dakle, ako su u i v dva proizvoljna čvora grafa G, onda je grana uv ista kao i grana vu. U ovom poglavlju biće reči o prebrojivim orijentisanim grafovima. Uvešćemo sada nekoliko osnovnih pojmova vezanih za njih.

Definicija 3.1.1 *Orijentisani graf ili digraf je uređeni par $D = (V, E)$, gde je V neprazan skup, a E podskup skupa $V^2 = \{(u, v) : u, v \in V,\ u \neq v\}$.*

Skup V se naziva skup čvorova, a skup E skup grana. Pri tome, redosled čvorova u nekoj grani je bitan, tj. sada se svaka grana posmatra kao uređeni par.

Neka su u i v čvorovi digrafa D, a $e = (u, v)$ njegova grana. Tada za e kažemo da je orijentisana od u ka v. Kaže se i da u vodi ka (dominira) v, a da je v dominiran od strane u. Čvor u se još naziva i početak, a v kraj grane e. Za granu $e = (u, v)$ mogu se još koristiti oznake $u \to v$, uEv ili samo uv.

Definicija 3.1.2 *Neka je dat digraf $D = (V, E)$. Dual digrafa D (u oznaci D^*) je digraf $D^* = (V, E^*)$, pri čemu je $E^* = \{(y, x) : (x, y) \in E\}$.*

Bitnu povezanost između digrafa i njegovog duala daje nam princip dualnosti na osnovu kojeg ako digraf ima neku osobinu, onda i njegov dual poseduje odgovarajuću (izmenjenu) osobinu.

Definicija 3.1.3 *Neka je dat digraf $D = (V, E)$. Za digraf $D' = (V', E')$ kažemo da je poddigraf od D ako je $V' \subseteq V$ i $E' \subseteq E$.*

Analogno ovoj definiciji, mnogi drugi pojmovi iz teorije (neorijentisanih) grafova se prenose i na digrafove samo je bitna stavka da se posmatra orijentacija.

Definicija 3.1.4 *Za digraf D kažemo da ima osobinu $\mathcal{P}$ ako za svaku konačnu particiju skupa čvorova od D indukovani poddigraf na bar jednom od delova particije je izomorfan sa čitavim D.*

Ovu osobinu smo već razmatrali kod prebrojivih običnih grafova i pokazali da su jedini grafovi koji imaju datu osobinu kompletan, prazan i Rado graf.

Definišimo sada još neke oznake koje ćemo koristiti u radu.

Definicija 3.1.5 *Neka je D digraf i x proizvoljan čvor iz D. Tada je:*

a) $N_\emptyset(x) = \{y \in D : \neg yEx \wedge \neg xEy \wedge x \neq y\}$
b) $N_0(x) = \{y \in D : \neg yEx \wedge xEy\}$
c) $N_i(x) = \{y \in D : yEx \wedge \neg xEy\}$
d) $N_u(x) = \{y \in D : yEx \wedge xEy\}$.

Najviše i najbolje izučeni digrafovi su turniri.

Definicija 3.1.6 *Turnir sa n čvorova je proizvoljna orijentacija kompletnog grafa sa n čvorova.*

Iz same definicije turnira zaključujemo da je turnir digraf u kojem između svaka dva čvora važi da su povezani tačno jednom granom. Uopštena oznaka za turnir sa n čvorova je T_n. Ako se radi o proizvoljnom turniru, oznaka je samo T.

Definicija 3.1.7 *Turnir T ima osobinu $\mathcal{S}$ ako za $\Box \in \{i, o\}$ i za neko $x \in T$ važi: ako je $N_\Box(x) \neq \emptyset$, onda $N_\Box(y) \neq \emptyset$, za sve $y \in T$.*

T^∞ je oznaka za prebrojivi turnir koji zadovoljava sledeću osobinu:
ako su A i B dva proizvoljna konačna podskupa skupa čvorova turnira T, onda postoji čvor v u T koji dominira u odnosu na sve čvorove iz skupa A i koji je dominiran od strane svih čvorova iz skupa B.

Vidimo da je ova osobina analogna osobini $(*)$ kod običnih grafova, samo prilagođena jeziku turnira. Nju ćemo dalje označavati sa $(*)'$.

Kao i kod Rado grafa, postoji više načina za konstruisanje turnira T^∞. Sada ćemo opisati konstrukciju T^∞ rekurzijom.

Neka je T_0 oznaka za turnir koji ima samo jedan čvor. Dalje, neka je T_{n+1} turnir koji se dobija rekurzijom od T_n dodavanjem čvora $t(U)$ koji je povezan sa svim čvorovima iz U, ali tako da dominira u odnosu na svaki čvor iz U i koji je povezan sa svim preostalim čvorovima iz skupa T_{n+1}, ali tako da je dominiran od strane njih. Pri tome, ovo uradimo za svaki podskup U od T_n. Ako uzmemo da je $T^\infty = \cup_{n\in\mathbb{N}} T_n$, dobićemo konstrukciju datog turnira.

Definicija 3.1.8 *Neka je T turnir.*
(1) *Čvor $a \in T$ za koji važi aEb, za sve $b \in T, a \neq b$ se naziva izvor.*
(2) *Čvor $a \in T$ za koji važi bEa, za sve $b \in T, a \neq b$ se naziva ponor.*
(3) *Ako je neki čvor $a \in T$ izvor ili ponor, tada se on zove specijalan čvor.*

Posmatrajmo sada niz ordinala:

$0 = \emptyset$,
$1 = \{0\}$,
$2 = \{0, 1\}$,
. . .
$n = \{0, 1, ..., n-1\}$,
. . .
ω ,
$\omega + 1$,
. . .

Dakle, prvo ide 0, a svaki sledeći ordinal je skup prethodnih. Ordinale 1, 2,... nazivamo nasledni ordinali. To su ordinali oblika $\alpha + 1$, za neki ordinal α. Svi ostali izuzev 0 se nazivaju granični ordinali. Najmanji granični ordinal je ω.

Pri tome, ω odgovara skupu $\mathbb{N}_0$. Ako dati skup posmatramo kao skup čvorova, a skup grana definišemo tako da je svaki element datog niza spojen sa svim elementima koji su iza njega (tj. sa njegovim nadskupovima), dobićemo jedan prebrojivi turnir. Na analogan način dobijamo i turnir ω^α ili njegov dual $(\omega^\alpha)^*$, gde je α nenula prebrojivi ordinal. Navešćemo sada definiciju u opštem obliku.

Definicija 3.1.9 *Ako je α ordinal, onda se orijentisani graf sa skupom čvorova $\{\beta \mid \beta < \alpha\}$ i skupom grana $\{\beta \to \gamma, \beta < \gamma < \alpha\}$ naziva $\alpha-$ turnir.*

Definicija 3.1.10 *Relacija ρ na skupu A se definiše kao proizvoljan podskup od skupa $A \times A$.*

Definicija 3.1.11 *Relacija ρ je relacija poretka (poredak, parcijalno uređenje) skupa A ako su ispunjeni sledeći uslovi:*
(1) Refleksivnost: $(\forall x \in A)\ x\rho x$;
(2) Antisimetričnost: $(\forall x, y \in A)\ x\rho y \wedge\ y\rho x \Longrightarrow x = y$;
(3) Tranzitivnost: $(\forall x, y, z \in A)\ x\rho y \wedge\ y\rho z \Longrightarrow x\rho z$.

Definicija 3.1.12 *Poredak ρ na skupu A je linearan ili totalan ako pored svojstava refleksivnosti, antisimetričnosti i tranzitivnosti zadovoljava i uslov $x\rho y$ ili $y\rho x$, $\forall x, y \in A$.*

Definicija 3.1.13 *Element $a \in A$ je najmanji ako $\forall x \in A$ važi $a\rho x$.*

Definicija 3.1.14 *Element $a \in A$ je najveći ako $\forall x \in A$ važi $x\rho a$.*

Definicija 3.1.15 *Linearno uređeni skup (A, ρ) je dobro uređen ako svaki njegov neprazan podskup ima najmanji element.*

Definicija 3.1.16 *Uređeni skup (A, ρ) se naziva antilanac ako $\forall x, y \in A$ važi $\neg(x\rho y \vee y\rho x)$.*

3.2 Klasifikacija uređenih skupova sa osobinom $\mathcal{P}$

Pre nego što klasifikujemo turnire sa osobinom $\mathcal{P}$, izvršićemo klasifikaciju uređenih skupova sa osobinom $\mathcal{P}$. Ovi rezultati su bazirani na radovima [1] i [2].

Definicija 3.2.1 *Neka je P uređeni skup relacijom ρ. Tada je $G(P)$ graf koji se dobija tako što mu se za skup čvorova uzme skup P, a za skup grana skup: $\{\{x,y\} : x,y \in P, x \neq y \wedge (x\rho y \vee y\rho x)\}$.*

Drugim rečima, graf $G(P)$ dobijamo tako što elemente iz P koji su u relaciji povežemo odgovarajućom granom.

Lema 3.2.2 *Ako je P uređeni skup koji zadovoljava osobinu $\mathcal{P}$, onda i graf $G(P)$ zadovoljava osobinu $\mathcal{P}$.*

Teorema 3.2.3 *Neka je P uređeni skup koji zadovoljava osobinu $\mathcal{P}$. Tada je P ili beskonačni antilanac ili jedan od ω^α ili $(\omega^\alpha)^*$, gde je α nenula prebrojivi ordinal.*

Dokaz: Zna se da beskonačni antilanac ima osobinu $\mathcal{P}$. Stoga pretpostavimo da P nije beskonačni antilanac i neka je $|P| = \delta$.

Za P konstruišimo odgovarajući graf $G(P)$. Na osnovu prethodne leme, $G(P)$ takođe ima osobinu $\mathcal{P}$. Kako smo u ranijem izlaganju konstatovali da su jedini prebrojivi grafovi koji zadovoljavaju ovu osobinu kompletan, prazan i Rado graf, sledi da je $G(P)$ jedan od ta tri grafa.

Graf $G(P)$ ne može biti prazan (ima bar jednu granu), a ni Rado graf jer on sadrži sve konačne grafove kao svoje indukovane podgrafove pa samim tim sadrži i konturu C_5. To nije moguće jer onda u P neće važiti tranzitivnost. Stoga je $G(P)$ kompletan graf, tj. $G(P) = K_\delta$ pa je samim tim P i linearno uređen skup.

Pokazaćemo sada da P ima najveći ili najmanji element. Pretpostavimo suprotno, tj. da P nema ni najmanji ni najveći element. Neka su dati $a, b \in P,\ a < b$. Uzmimo da je $A = \{y \in P : y \geq a\} \backslash \{b\}$ i $B = P \backslash A$. Međutim, tada $P \restriction A$ ima najmanji , a $P \restriction B$ ima najveći element. To nas dovodi u kontradikciju jer bar jedan od njih mora biti izomorfan sa P zbog osobine $\mathcal{P}$ pa i P mora imati najveći ili najmanji element.

Razmotrićemo sada sva tri slučaja, tj. da P ima samo najmanji, samo najveći element ili da ima oba.

Prvi slučaj: P ima najmanji i nema najveći element.

Označićemo najmanji element od P sa 0. Pokazaćemo da je P dobro uređen. Pri tome, koristićemo pomoćno tvrđenje da je P dobro uređen ako nema podskup izomorfan sa ω^*.

Pretpostavimo suprotno, tj. da P nije dobro uređen. Definišimo sada skup S na sledeći način:

$$S = \{x \in P : x < y \ , \forall y \in X \subseteq P, \ X \cong \omega^*\}.$$

Skup S je neprazan jer $0 \in S$. U suprotnom bi bilo $0 \geq y$, gde je y element beskonačnog opadajućeg lanca u P što nas dovodi u kontradikciju.

Skup S je dobro uređen. Ovo važi jer ne postoji skup $X \subseteq S$ koji je izomorfan sa ω^*. Da bismo ovo pokazali, pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $X \subseteq S$ izomorfan sa ω^*. Neka je dat $x \in X$. Sledi da je $x < x$ što je nemoguće. Dakle, skup S je dobro uređen.

Uvedimo sada neke nove oznake. Neka je $A = S$ i $B = P \backslash S$. Ako je $B = \emptyset$, onda je $P = S$ pa je samim tim i P dobro uređen što je kontradikcija sa početnom pretpostavkom. Stoga pretpostavimo suprotno, tj. $B \neq \emptyset$.

Pokazujemo da je $P \cong P \restriction A$. Pretpostavimo suprotno, tj. $P \ncong P \restriction A$. Tada je $P \cong P \restriction B$ (pošto P zadovoljva osobinu $\mathcal{P}$). To znači i da B sadrži najmanji element. Označimo ga sa $0'$. Pošto $0' \notin S$, postoji $y \in X \subseteq P$ tako da je $y \leq 0'$, gde je $X \subseteq P$ takav da je $X \cong \omega^*$. Međutim, na osnovu prethodnog pasusa sledi da je $X \subseteq B$ što nas dovodi u kontradikciju. Sledi da je P dobro uređen i samim tim izomorfan sa ordinalom α.

Na osnovu Kantorove teoreme važi (dokaz se može naći u [8]): postoje ordinali $\alpha_1 > \alpha_2 > ... > \alpha_k$, za $k \in \omega \backslash \{0\}$ i $n_1, n_2, ..., n_k \in \omega \backslash \{0\}$ tako da je:

$$\alpha = \omega^{\alpha_1} n_1 + \omega^{\alpha_2} n_2 + ... + \omega^{\alpha_k} n_k.$$

Pokazaćemo sada da je $k = 1$. Pretpostavimo suprotno, tj. $k \geq 2$. Neka je $A_i = \omega^i n_i$, pri čemu $i \in \{1, 2, ..., k\}$. Pošto P zadovoljava osobinu $\mathcal{P}$, postoji i tako da je $P \cong P \restriction A_i$. Zbog jedinstvenosti prikazivanja ordinala α sledi da je $\alpha = \omega^{\alpha_i} n_i$

Pokazaćemo sada i da je $n_i = 1$. Ako pretpostavimo da nije, dobija se:

$$\alpha = \omega^{\alpha_1} n_i = \omega^{\alpha_1} + \omega^{\alpha_1} + ... + \omega^{\alpha_1},$$

pri čemu se sabirak ω^{α_1} ponavlja n_i puta. Međutim, kao i u prethodnom slučaju, kako P zadovoljava osobinu $\mathcal{P}$, sledi da je α izomorfan sa ω^{α_1}.

Preostaje nam još da pokažemo da ω^α zadovoljava osobinu $\mathcal{P}$, pri čemu je α nenula ordinal. Pokazaćemo to indukcijom za $\alpha \geq 1$.

Neka je $\alpha = \beta + 1 \geq 2$ naslednі ordinal. Tada je $\omega^\alpha = \omega^\beta * \omega$. Neka je:

$$\omega^\alpha = S_1 + S_2 + ... + S_n, \ \ n \geq 2.$$

S druge strane, ω^α možemo predstaviti koristeći skup $\{\omega^\beta(i), i \in \omega\}$, tj. kao ω kopija od ω^β. Za $i \in \omega$ i $j \in \{1, 2, ..., n\}$ definišimo:

$$S_{ij} = \omega^\beta(i) \cap S_j.$$

Takođe, vidimo da je za $j \in \{1, 2, .., n\}$:

$$S_j = \sum_{i\in\omega} S_{ij}.$$

Kako po indukcijskoj pretpostavci ω^β ima osobinu $\mathcal{P}$, sledi:
$(\forall i \in \omega)$ $(\exists j(i)) \in \{1, 2, ..., n\}$ tako da je ispunjeno $S_{ij(i)} \cong \omega^\beta$.
Takođe, postoji $j \in \{1, 2, ..., n\}$ za koje beskonačno puta važi $S_{ij} \cong \omega^\beta$.
Za $\beta \geq 1$ je ispunjen uslov $\epsilon + \omega^\beta = \omega^\beta$, za $\epsilon < \omega^\beta$. Sledi da je:

$$S_j \cong \sum_{i\in\omega} \omega^\beta = \omega^\alpha.$$

Neka je sada α proizvoljni granični ordinal za koji važi $\alpha > \omega$. Onda važi $\omega^\alpha = \sum_{\beta<\alpha} \omega^\beta$. Dokaz da je zadovoljena osobina $\mathcal{P}$ je analogan kao i u prethodnom slučaju.

Drugi slučaj: P ima najveći i nema najmanji element.

U ovom slučaju se prvo pokazuje da je P izomorfan sa $(\omega^\alpha)^*$. Dokaz sledi iz prethodnog slučaja primenom principa dualnosti.

Treći slučaj: P ima i najmanji i najveći element.

Pokazaćemo svođenjem na kontradikciju da je ovo nemoguće. Označimo najmanji i najveći element sa 0 i ∞ respektivno. Neka je $A = S$ i $B = P \backslash A$. Jasno je da tada $0 \in A$ i $\infty \in B \backslash A$. Kao što je već pokazano u prvom slučaju, skup A je dobro uređen.

Kako P zadovoljava osobinu $\mathcal{P}$, sledi da je $P \upharpoonright A$ ili $P \upharpoonright B$ izomorfan sa P. Ako je to $P \upharpoonright A$, onda je P dobro uređen i stoga izomorfan sa nekim ordinalom. Dakle, kao i u prvom slučaju, P je izomorfan sa ω^α, za neki nenula kardinal α što nas dovodi u kontradikciju sa činjenicom da P ima najveći element.

S druge strane, ako je $P \upharpoonright B$, onda B ima najmanji element $0'$ i $0' \in P \backslash S$ pa $0' \geq y$ za neko $y \in X$, gde je X izomorfan sa ω^*. Ovo nas opet dovodi do kontradikcije, čime je ovaj dokaz i završen. $\square$

3.3 Klasifikacija turnira sa osobinom $\mathcal{P}$

Lema 3.3.1 *Turnir ne može imati više od dva specijalna čvora. U slučaju da ima dva, onda jedan mora biti izvor, a drugi ponor tog turnira.*

Dokaz: Pretpostavimo da postoji turnir T koji ima više od dva specijalna čvora. Tada on mora imati bar dva izvora ili ponora. Pretpostavimo da ima dva izvora. Označimo ih sa a i b, $a \neq b$. Tada mora biti aEb, a takođe i bEa. Međutim, to nas dovodi u kontradikciju jer je T turnir. Analogno se pokazuje i da turnir ne može imati dva ponora pa sledi da nijedan turnir ne može imati više od dva specijalna čvora. Jasno, ako turnir ima dva specijalna čvora, onda jedan od njih mora biti izvor, a drugi ponor. $\square$

Lema 3.3.2 *Netrivijalni turnir ima osobinu $\mathcal{S}$ ako i samo ako ne sadrži specijalne čvorove.*

Dokaz: Pretpostavimo prvo da T ima osobinu $\mathcal{S}$. Pokazaćemo da on ne sadrži specijalne čvorove. Pretpostavimo suprotno, tj. neka je a specijalni čvor od T. Bez umanjenja opštosti pretpostavimo da je a izvor. Tada je $N_i(a) = \emptyset$. Kako je T netrivijalan turnir, postoji $b \in T$ takav da je aEb. Sledi da je $N_i(b) \neq \emptyset$ pa kako važi osobina $\mathcal{S}$, sledi da je $N_i(x) \neq \emptyset, \forall x \in T$ što nas dovodi u kontradikciju. Analogno se pokazuje i ako se pretpostavi da je a ponor.

Drugi smer pokazujemo kontrapozicijom. Pretpostavimo da turnir T nema osobinu $\mathcal{S}$. Sledi da postoje čvorovi $a, b \in T$ takvi da za neko $\square \in \{i, o\}$ važi $N_\square(a) \neq \emptyset$ i $N_\square(b) = \emptyset$. Odatle sledi da je b specijalan čvor. $\square$

Sada ćemo navesti teoremu koja nam govori koji je potreban i dovoljan uslov da neki prebrojivi turnir bude izomorfan sa turnirom T^∞.

Teorema 3.3.3 *Prebrojivi turnir T je izomorfan sa T^∞ ako i samo ako T ima osobine $\mathcal{P}$ i $\mathcal{S}$.*

Teorema 3.3.4 *Neka je T prebrojivi turnir koji zadovoljava osobinu $\mathcal{P}$. Ako važi $T \ncong T^\infty$, onda je T linaerno uređen.*

Dokaz: Ako T zadovoljava osobinu $\mathcal{S}$, onda je na osnovu prethodne teoreme $T \cong T^\infty$. Stoga pretpostavimo da T nema osobinu $\mathcal{S}$. Iz toga sledi $T \ncong T^\infty$. Pokazaćemo da T mora biti linearno uređen. Na osnovu leme 3.3.2, sledi da T ima bar jednu specijalnu tačku pa razlikujemo sledeća dva slučaja.

Prvi slučaj: T ima jedan specijalni čvor.

Bez gubitka opštosti pretpostavimo da T ima izvor u čvoru 0 (slučaj kada T ima ponor će biti analogan na osnovu principa dualnosti). Želimo da pokažemo da

T ne sadrži netranzitivnu konturu D_3 (tj. konturu sa tri čvora koja nema izvor) kao svoj indukovani podturnir. Ako ovo pokažemo, slediće da je T linearno uređen.

Pretpostavimo suprotno, tj. da T sadrži D_3 kao svoj indukovani podturnir. Definišimo sada skup S na sledeći način:

$$S = \{y \in T : yEz \ , \forall z \in X, \ X \ je \ indukovani \ podgraf \ od \ T \ i \ X \cong D_3\}.$$

Pokazaćemo prvo da $0 \in S$. Pretpostavimo suprotno, tj. $0 \notin S$. Tada postoje dve opcije: ili postoji z u X tako da je $zE0$ što je nemoguće jer je 0 izvor ili $0 \in X$ što je takođe nemoguće jer D_3 nema izvor. Odavde sledi da $0 \in S$, tj. S je neprazan skup.

Pokazaćemo sada da je S linearno uređen skup. Pretpostavimo suprotno, tj. da je indukovani podturnir X od S izomorfan sa D_3. Međutim, onda je $X \subseteq T$ pa za sve $x \in X$ važi xEx što nas dovodi u kontradikciju jer u X ne važi refleksivnost.

Uvedimo sada još neke oznake. Neka je $A = S$ i $B = T \backslash S$. Ako je $B = \emptyset$, onda je $T = S$ pa je T linearno uređen. Stoga pretpostavimo da je $B \neq \emptyset$.

Pokazaćemo da je $T \cong T \restriction A$. Pretpostavimo suprotno, tj. da ne važi. Kako T zadovoljava osobinu $\mathcal{P}$, sledi da je $T \cong T \restriction B$. Ako to važi, onda i B mora imati svoj izvor. Označimo ga sa $0'$. Stoga za sve $y \in B$ važi $0'Eb$. Kako $0' \notin S$, to implicira da postoji $X \subseteq T$ izomorfan sa D_3 takav da $0' \in X$ ili postoji $y \in X$ takav da je $yE0'$. Takođe, kako smo pokazali da je A (tj. S) linearno uređen, sledi da je $X \subseteq B$. Stoga, kako je $0'$ izvor u B, dolazimo u kontradikciju u oba slučaja.

Dakle, dobija se da je $T \cong S$. Kako je S linearno uređen, sledi i da je T linearno uređen što nas dovodi u kontradikciju sa pretpostavkom da T ima D_3 kao svoj indukovani podturnir. Stoga sledi da je T linearno uređeni turnir.

Potpuno analogno se dokaz izvodi i u slučaju da T ima ponor. Preostaje nam da razmotrimo drugi slučaj.

Drugi slučaj: T ima dva specijalna čvora.

U ovom slučaju T će imati i izvor i ponor i analogno prvom slučaju može se pokazati da T mora biti linearno uređen. $\square$

Konačno dolazimo do teoreme koja nam klasifikuje sve prebrojive turnire sa osobinom $\mathcal{P}$. Takođe, iz nje zaključujemo da takvih prebrojivih turnira ima neprebrojivo mnogo.

Teorema 3.3.5 *Prebrojivi turniri sa osobinom $\mathcal{P}$ su T^{∞}, ω^{α} i $(\omega^{\alpha})^*$, gde je α nenula prebrojivi ordinal .*

Dokaz: Neka je T prebrojivi turnir koji ima osobinu $\mathcal{P}$. Razlikujemo sledeća dva slučaja.

Prvi slučaj: T ima osobinu $\mathcal{S}$.

Ako T zadovoljava osobinu $\mathcal{S}$, tada je na osnovu Teoreme 3.3.3 ispunjeno $T \cong T^{\infty}$.

Drugi slučaj: T nema osobinu $\mathcal{S}$.

Ako T nema osobinu $\mathcal{S}$, onda $T \ncong T^{\infty}$ pa na osnovu Teoreme 3.3.4 sledi da je T linearno uređen. Takođe, na osnovu Teoreme 3.2.3 sledi da onda on mora biti jedan od turnira iz skupa $\{\omega^{\alpha}, (\omega^{\alpha})^{*}, \alpha \ je \ nenula \ prebrojivi \ ordinal\}$. Time smo ujedno i dokazali datu teoremu. $\square$

3.4 Rado digraf

Pre nego što pređemo na opis priče o Rado digrafovima, definisaćemo nove pojmove i uvešćemo još neke oznake. Rezultati u ovom i narednom odeljku zasnovani su na rezultatima iz [7].

Definicija 3.4.1 *Neka je X beskonačni skup i $\mathcal{Y}$ prebrojivi skup beskonačnih podskupova od X. Particija (A, B) od X se naziva Bernstein-ova particija u odnosu na $\mathcal{Y}$ ako su za svaki skup $Y \in \mathcal{Y}$ oba skupa $Y \cap A$ i $Y \cap B$ beskonačna.*

Takve particije se lako konstruišu indukcijom. Na primer, neka je $Y_1, Y_2, ...$ niz skupova dužine ω u $\mathcal{Y}$ tako da se svaki od njih pojavljuje beskonačno mnogo puta u nizu. Formirajmo particiju (A, B) u ω koraka birajući u $n-$tom koraku dva elementa iz Y_n koji nisu ni u A ni u B, pri čemu pridružujemo jedan element skupu A, a drugi skupu B. Na kraju, sve elemente koje nismo pridružili na ovaj način dodelimo jednom od skupova npr. skupu A.

Neka je v čvor u digrafu D. Sa $v_D^- = \{u \mid u \to v\}$ označavamo skup svih čvorova koji sa v formiraju granu, tako da je v kraj te grane. Zbog jednostavnosti, umesto oznake v_D^-, koristimo kraće samo v^-. Takođe, $|v^-|$ nazivamo ulazni stepen čvora v. Ako je skup v^- prazan, onda je čvor v izvor u digrafu D.

Analogno, sa $v_D^+ = \{u \mid v \to u\}$ označavamo skup svih čvorova koji sa v formiraju granu, tako da je v početak te grane. Zbog jednostavnosti, umesto oznake v_D^+, koristimo kraće samo v^+. Takođe, $|v^+|$ nazivamo izlazni stepen čvora v. Ako je skup v^+ prazan, onda je čvor v ponor u digrafu D.

Definicija 3.4.2 *Neka je dat digraf D. Skup čvorova $I \subseteq V(G)$ se naziva $in-$sekcija od D ako važi uslov:*

$$x \in I \wedge y \to x \Longrightarrow y \in I.$$

Presek svih $in-$sekcija koji sadrže dati skup X je $in-$sekcija generisana sa X.

Definicija 3.4.3 *Neka je dat digraf D. Skup čvorova $I \subseteq V(G)$ se naziva $out-$sekcija od D ako važi uslov:*

$$x \in I \wedge x \to y \Longrightarrow y \in I.$$

Presek svih $out-$sekcija koji sadrže dati skup X je $out-$sekcija generisana sa X.

Definicija 3.4.4 *Ako se u digrafu D zanemari orijentacija grana, dobija se običan (prost) graf koji nazivamo podvučeni graf od D.*

Definicija 3.4.5 *Neka je dat digraf $D(V, E)$ i neka je v njegov proizvoljan čvor. Tada se v naziva koren digrafa D ako iz v postoji put ka bilo kojem čvoru iz D.*

Definicija 3.4.6 *Digraf D je dobro zasnovan ako ne sadrži orijentisanu konturu i beskonačni put čija je forma $...v_{-2} \to v_{-1} \to v_0$.*

Neka je L_0 skup čvorova koji su izvori digrafa D. U opštem slučaju, sa L_α ćemo označiti skup izvora digrafa $D - \cup_{\beta<\alpha} L_\beta$. Skupovi L_α su nivoi od D i svi čvorovi od L_α su ranga α. Najmanji ordinal α takav da je $L_\alpha = \emptyset$ predstavlja rang od D.

Možemo primetiti da ako D ima osobinu $\mathcal{P}$, onda njegov rang mora biti neki granični ordinal. Pretpostavimo da to ne važi i neka je najviši rang u D jednak k. Onda možemo podeliti skup čvorova digrafa na čvorove najvišeg ranga s jedne strane i na sve ostale čvorove s druge strane. Međutim, tada nijedan od delova neće biti izomorfan sa D jer će najviši rang u prvom delu biti 1, a u drugom $k-1$ pa se ne može uspostaviti izomorfizam iz D ni sa jednim od delova. Slično, ako D ima osobinu $\mathcal{P}$ i rangovi čvorova u $X \subseteq V$ nisu granični (posmatrano u rangu od D), onda je D izomorfan sa $D \backslash X$.

Definicija 3.4.7 *Za poddigraf H dobro zasnovanog digrafa D kažemo da očuvava rang ako svi njegovi čvorovi imaju isti rang u H kao i u D.*

Takođe, veoma bitna činjenica je da se može pokazati da disjunktni poddigrafovi H_1 i H_2 koji očuvavaju rang u digrafu D mogu da se prošire do poddigrafova D_1 i D_2, koji čine particiju od D, pri čemu je $H_1 \subseteq D_1$ i $H_2 \subseteq D_2$.

U ovom poglavlju, opisaćemo konstrukciju dva orijentisana Rado grafa (tj. posmatraćemo dve različite orijentacije Rado grafa). Prvi od njih je $RO-$ digraf. To je prebrojivi orijentisani graf takav da za svaku trojku konačnih disjunktnih skupova čvorova $A,\ B$ i C postoji čvor x takav da važe sledeći uslovi:
(1) $A \subseteq x^+$
(2) $B \subseteq x^-$
(3) $C \cap (x^- \cup x^+ \cup \{x\}) = \emptyset$.
Kako je ova konstrukcija analogna konstrukciji Rado grafa kod običnih grafova, osobine koje smo kod njega posmatrali možemo preneti i na RO. Tako na primer, koristeći $back\ and\ forth$ metod, može se pokazati da su svaka dva $RO-$digrafa izomorfna, da ima osobinu $\mathcal{P}$ i sl.

Sada ćemo opisati drugu konstrukciju Rado digrafa. To je dobro zasnovan prebrojivi digraf takav da je svaki njegov čvor krajnji čvor konačnom broju grana i da za svaki konačan skup čvorova F postoji beskonačno mnogo čvorova v takvih da je $v^- = F$. Ovaj digraf nazivamo aciklični random ili kraće samo $ARO-$digraf. Njegova konstrukcija može se opisati indukcijom. Takođe, kao za RO i za ARO se može pokazati da je jedinstven do na izomorfizam i da ima osobinu $\mathcal{P}$.

Teorema 3.4.8 *$RO-$digraf ima osobinu $\mathcal{P}$.*

Dokaz: Neka D zadovoljava definiciju od RO. Neka su D' i D" indukovani pod-digrafovi od D takvi da njihovi čvorovi čine particiju skupa čvorova od D. Pretpostavimo da nijedan od njih nije izomorfan sa D. Tada u D' postoje disjunktni skupovi čvorova $A',\ B'$ i C' tako da ni za jedan čvor iz D' nisu ispunjeni uslovi $(1),\ (2)$ i (3) iz definicije za RO. Analogno, u D'' postoje disjunktni skupovi čvorova $A'',\ B''$ i C'' tako da ni za jedan čvor iz D'' nisu ispunjeni uslovi $(1),(2)$ i (3) iz definicije za RO. Međutim, tada za skupove $A' \cup A'',\ B' \cup B''$ i $C' \cup C''$ iz D neće postojati nijedan čvor takav da važe uslovi $(1),\ (2)$ i (3) što nas dovodi u kontradikciju da je on RO. Sledi da D ima osobinu $\mathcal{P}$. □

Lema 3.4.9 *(König) Ako je D beskonačni digraf čiji je koren r i svi čvorovi su konačnog ulaznog stepena, onda u D postoji put koji se završava sa r.*

Teorema 3.4.10 *ARO-digraf je jedinstveni do na izomorfizam digraf.*

Dokaz: Neka su D_1 i D_2 dva prebrojiva digrafa koji zadovoljavaju definiciju $ARO-$digrafa. Pretpostavimo da smo već konstruisali izomorfizam f između dve date $in-$sekcije F_1 i F_2, pri čemu je $F_1 \subseteq D_1$ i $F_2 \subseteq D_2$. Neka je v čvor iz $D_1 \backslash F_1$. Ako možemo proširiti f u parcijalni izomorfizam g čiji domen sadrži $F_1 \cup \{v\}$, onda možemo konstruisati i izomorfizam između D_1 i D_2 koristeći $back\ and\ forth$ metod.

Označimo sa F $in-$sekciju koju generiše čvor v. Na osnovu osobina koje važe za ARO, znamo da je digraf D_1 dobro zasnovan i da je svaki njegov čvor konačnog ulaznog stepena. Sledi da je skup F konačan. Ako to ne bi važilo, tj. ako bi skup bio F beskonačan, primenjujući Köing-ovu lemu na F došli bismo u kontradikciju. Stoga je $F_1 \cup F$ konačna $in-$sekcija u D_1.

Da bismo dobili g, koristimo osobinu $ARO-$digrafa za D_2 da proširimo f na $F_1 \cup F$, krenuvši od najnižeg nivoa skupa $F \backslash F_1$ (tj. od čvora v). Slika od g će takođe biti $in-$sekcija od D_2. □

Takođe, možemo formirati i random konstrukciju ovog digrafa. Neka je ω skup čvorova. Ako su i i j dva proizvoljna različita čvora ($i < j$), onda ćemo granu $i \to j$ uzeti nezavisno u odnosu na ostale sa verovatnoćom $2^{-(i+1)}$. Ovako konstruisani digraf je dobro zasnovan i sve njegove $in-$sekcije su konačne. Štaviše, digraf koji se dobija je skoro sigurno ARO.

Teorema 3.4.11 *$ARO-$digraf ima osobinu $\mathcal{P}$.*

Dokaz: Neka D zadovoljava definiciju od ARO. Neka su D' i D" indukovani poddigrafovi od D takvi da njihovi čvorovi čine particiju skupa čvorova od D. Ako nijedan od njih nije izomorfan sa D, onda D' sadrži konačan skup čvorova F'

takav da je skup $\{v \in D' \mid v^-_{D'} = F'\}$ konačan i D'' sadrži konačan skup čvorova F'' takav da je skup $\{v \in D'' \mid v^-_{D''} = F''\}$ konačan. Međutim, odatle sledi da samo konačno mnogo čvorova v iz D zadovoljava uslov da je $v^- = F' \cup F$" što nas dovodi u kontradikciju sa činjenicom da D je ARO. Stoga ARO zadovoljava osobinu $\mathcal{P}$. $\square$

Navešćemo sada veoma bitnu teoremu na osnovu koje možemo izvršiti klasifikaciju orijentisanih Rado grafova sa osobinom $\mathcal{P}$. Njen dokaz će biti dat u nastavku, kada se upoznamo sa još nekim osobinama Rado digrafa.

Teorema 3.4.12 *Jedini orijentisani Rado grafovi sa osobinom $\mathcal{P}$ su RO, ARO i dual od ARO.*

3.5 Klasifikacija digrafova sa osobinom $\mathcal{P}$

U narednom izlaganju ćemo sa $D = (V, E)$ označavati digraf koji predstavlja fiksiranu orijentaciju Rado grafa koji ima osobinu $\mathcal{P}$.

Teorema 3.5.1 *Ako je $D \neq RO$, onda je D ili njegov dual dobro zasnovan.*

Dokaz: Pretpostavimo da je $D \neq RO$. Pokazaćemo da D ima specijalnu tačku. Pošto je $D \neq RO$, sledi da postoje disjunktni konačni skupovi čvorova A, B i C takvi da ne postoji nijedan čvor $x \in D$ takav da je $A \subseteq x^+$, $B \subseteq x^-$ i $C \cap (x^+ \cup x^- \cup \{x\}) = \emptyset$.

Pretpostavimo da smo našli skupove A, B i C takve da je $|A \cup B \cup C|$ minimalno. Kako je D orijentacija Rado grafa sledi da je skup $A \cup B$ neprazan. Bez umanjenja opštosti pretpostavimo da je $A \neq \emptyset$ (u slučaju da je $B \neq \emptyset$ dokaz je analogan). Uzmimo da $a \in A$ i neka je D_1 poddigraf od D indukovan nad skupom čvorova $(A \cup B \cup C \cup a^-)\backslash\{a\}$, a D_2 poddigraf indukovan nad njegovim komplementom. Pošto D ima osobinu $\mathcal{P}$, a D_1 i D_2 čine njegovu particiju, sledi da je D izomorfan sa jednim od njih.

Pretpostavimo da je $D \cong D_1$. Pošto je $|A \cup B \cup C|$ minimalno, sledi da postoji $x \in D_1$ takav da je $A\backslash\{a\} \subseteq x^+$, $B \subseteq x^-$ i $C \cap (x^+ \cup x^- \cup \{x\}) = \emptyset$. Međutim, tada $x \in a^-$ pa je $A \subseteq x^+$, što je kontradikcija sa izborom skupova A, B i C. Sledi da je onda $D \cong D_2$. Pošto je a izvor od D_2, sledi da i D ima izvor.

Pretpostavimo da D ima izvor. Uzmimo da je S maksimalna dobro zasnovana $in-$sekcija od D. Tada S i $D\backslash S$ čine particiju od D i na njih primenimo osobinu $\mathcal{P}$. Zbog maksimalnosti od S , sledi da D ne može biti izomorfan sa $D\backslash S$ jer da jeste, onda bi $D\backslash S$ morao da sadrži izvor. Označimo ga npr. sa s. Međutim, tada je $S \cup \{s\}$ dobro zasnovana $in-$sekcija veća od S. Sledi da je D izomorfan sa $D[S]$ pa je stoga i D dobro zasnovan što je i trebalo pokazati. $\square$

Od sada ćemo pretpostaviti da je D i dobro zasnovan. Potom ćemo pokazati da je $D = ARO$. Pri tome, koristićemo da su nivoi čvorova od D označeni sa $L_0, L_1, L_2, ...$

Teorema 3.5.2 *Digraf D ima beskonačno mnogo izvora.*

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, tj. da ih ima konačno mnogo. Dakle, tada je skup L_0 konačan. Neka $x \in L_0$ i uočimo particiju $(X, V\backslash X)$ skupa čvorova V, gde je X $out-$sekcija generisana sa x. Jasno, tada $D \ncong D\backslash X$ pošto $D\backslash X$ ima manji skup izvora ($L_0\backslash\{x\}$).

Stoga je $D \cong D[X]$ pa i D ima samo jedan izvor. Pošto je D orijentacija Rado grafa, u njemu postoje dva nesusedna čvora, npr. u i v. Uočimo sada digraf

$D\backslash(u^- \cup v^-)$. On zbog osobine $\mathcal{P}$ mora biti izomorfan sa D. Međutim, on ima bar dva izvora što nas dovodi do kontradikcije jer D ima samo jedan izvor. $\square$

Teorema 3.5.3 *Ako svaki čvor digrafa D ima konačan ulazni stepen, onda je $D = ARO$.*

Da bismo ovo pokazali, moramo prethodno pokazati neka dodatna tvrđenja. Pretpostavimo da svaki čvor iz D ima konačan ulazni stepen. Onda D ima rang najviše ω, ali pošto D ima osobinu $\mathcal{P}$, sledi da mu je rang tačno ω.

Za dati skup čvorova U uvodimo nove oznake U^- i U^+ definisane na sledeći način: $U^- = U \cup \{u^- \mid u \in U\}$ i $U^+ = U \cup \{u^+ \mid u \in U\}$.

Lema 3.5.4 *Ako je $F \subset V$ konačan skup čvorova i $x \in V\backslash F$, onda je $x^+ \nsubseteq F^+$.*

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, tj. neka postoji konačan skup čvorova F i čvor x tako da je $x^+ \subseteq F^+$ i neka je izabrano $|F|$ minimalno. Ako je $F = \emptyset$, onda je x ponor i ima konačno mnogo suseda što je nemoguće jer je podvučeni graf datog digrafa Rado graf. Stoga je $F \neq \emptyset$.

Neka $y \in F$ i neka je $(X, V\backslash X)$ particija skupa čvorova iz D, pri čemu je $X = (y^+\backslash(\{x\} \cup F)) \cup \{y\}$. Kako je y susedan sa svim čvorovima iz X, a u Rado grafu ne postoji čvor susedan sa svim ostalim čvorovima, onda $D \ncong D[X]$. Stoga mora biti $D \cong D\backslash X$. Međutim, tada je i $x^+_{G\backslash X} \subseteq (F\backslash\{y\})^+_{G\backslash X}$, što je kontradikcija sa minimalnošću kardinalnosti od skupa F. Sledi da $x^+ \nsubseteq F^+$. $\square$

Lema 3.5.5 *Za svaki čvor $x \in V$ postoji čvor $y \in V$ takav da je $y^- = \{x\}$.*

Dokaz: Indukcijom ćemo konstruisati particiju (V_1, V_2) skupa čvorova V tako da će indukovani poddigrafovi nad njima imati osobinu da za svaki čvor $x \in V_i$ postoji čvor $y \in V_i$ tako da je $y^-_{G[V_i]} = \{x\}$, za $i = 1, 2$. Stoga će, na osnovu osobine $\mathcal{P}$, čitav digraf D imati datu osobinu.

Neka je $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ numeracija čvorova iz skupa V tako da je $i < j$ za svaku granu $x_i \to x_j$ iz D. Takva numeracija sigurno postoji jer je D dobro zasnovan. Pretpostavimo da su nam data dva konačna disjunktna skupa X_n i Y_n podskupa od V takva da je $\{x_0, x_1, ..., x_n\} \subseteq X_n \cup Y_n$ i za svaki $x_i \in X_n(Y_n)$ ako je $i \leq n$ postoji $y \in X_n(Y_n)$ tako da $x_i \in y^-$ i $y^-\backslash\{x_i\} \subseteq Y_n(X_n)$. Pokazaćemo da možemo proširiti skupove X_n i Y_n do skupova X_{n+1} i Y_{n+1} koji imaju odgovarajuću osobinu za indeks $n + 1$.

Pretpostavimo da $x_{n+1} \in X_n \cup Y_n$. Na osnovu prethodne leme sledi da važi $x^+_{n+1} \nsubseteq ((X_n \cup Y_n)\backslash\{x_{n+1}\})^+$ pa sledi da postoji čvor $y \in V\backslash(X_n \cup Y_n)$ takav da je $y^- \cap (X_n \cup Y_n) = \{x_{n+1}\}$.
Ako $x_{n+1} \in X_n$, onda X_{n+1} i Y_{n+1} dobijamo na sledeći način:

$$X_{n+1} := X_n \cup \{y\}, \;\; Y_{n+1} := Y_n \cup (y^-\backslash\{x_{n+1}\}).$$

Ako $x_{n+1} \in Y_n$ onda zamenimo uloge skupova:

$$Y_{n+1} := Y_n \cup \{y\}, \ \ X_{n+1} := X_n \cup (y^- \backslash \{x_{n+1}\}).$$

Uzimajući da je $V_1 = \cup X_i$ i $V_2 = \cup Y_i$, dobijamo traženu particiju od skupa V. $\square$

Pokazujemo sada teoremu 3.5.3, tj. da je $D = ARO$. Pretpostavimo suprotno, tj. da D nije ARO digraf. Stoga postoji konačan skup $F \subset V$ takav da je skup $A := \{v \in V \mid v^- = F\}$ konačan. Tada na osnovu leme 3.5.2 sledi da je $F \neq \emptyset$ jer ako je $F = \emptyset$ sledi da je čvor v za koji je $v^- = \emptyset$ izvor pa ih ima konačno mnogo što nas dovodi u kontradikciju. Sledi da je i skup $F \cup A$ takođe konačan. Biramo F tako da je $|F \cup A|$ minimalno.

Neka je S oznaka za $out-$sekciju generisanu sa A. Posmatrajmo $(S, V\backslash S)$, particiju skupa čvorova V. Tada na osnovu leme 3.5.2 sledi $D \ncong D[S]$. Stoga je na osnovu osobine $\mathcal{P}$ digraf D izomorfan sa digrafom $D\backslash S$ koji sadrži skup F, ali ne i čvor v takav da je $v^-_{D\backslash S} = F$. Na osnovu ovog izbora F sledi da je $A = \emptyset$.

Neka $x \in F$ i posmatrajmo maksimalni skup $X \subseteq V$ takav da važe sledeći uslovi:
(1) $X \cap F = \{x\}$
(2) $(V\backslash(F \cup x^+)) \subseteq X$
(3) Za svaki čvor $v \in x^+ \cap X$ važi $v^- \cap X \neq \{x\}$.

Pošto lema 3.5.5 ne važi za X, dobijamo da $D \ncong D[X]$. Stoga, zbog osobine $\mathcal{P}$, mora biti $D \cong D\backslash X$. Međutim, tada u $D\backslash X$ ne postoji čvor v takav da je $v^-_{D\backslash X} = F\backslash\{x\}$ jer bilo koji takav čvor će biti u $D\backslash(X \cup F) \subseteq x^+$ što daje $F \subseteq v^-$ pa je $F = v^-$ (pošto je $v^- \cap X = \{x\}$ zbog maksimalnosti skupa X). Sledi da $v \in A$ što nas dovodi u kontradikciju sa činjenicom da je $A = \emptyset$. Stoga u $D\backslash X$ ne postoji čvor v takav da je $v^-_{D\backslash X} = F\backslash\{x\}$, ali je to kontradikcija sa minimalnošću od $|F \cup A|$ čime je ovaj dokaz i završen. $\square$

Dakle, ako D nije RO i ako je svaki čvor konačnog ulaznog stepena, onda je on ARO. Analizirajmo sada preostali slučaj, tj. kada u D postoji čvor beskonačnog ulaznog stepena.

Lema 3.5.6 *Ako u D postoji čvor beskonačnog ulaznog stepena i ako je α najmanji rang takvog čvora, onda $\alpha \in \{1, \omega\}$.*

Dokaz: Neka je v čvor u koji ulazi beskonačno grana i neka je on ranga α. Pošto svi čvorovi ranga ω imaju tu osobinu, jasno da je $\alpha \leq \omega$. Ako je $\alpha < \omega$, onda je za neki konačan broj i skup $X = v^- \cap L_i$ beskonačan. Ako izbrišemo sve čvorove ranga $< \alpha$ osim tih iz X, dobijamo digraf u kojem je v ranga 1 i koji ima beskonačan ulazni stepen. Pošto je ovaj digraf izomorfan sa D, na osnovu osobine $\mathcal{P}$ sledi da $\alpha \in \{1, \omega\}$, što je i trebalo dokazati. $\square$

U preostalom delu rada razmotrićemo oba slučaja, tj. $\alpha = 1$ i $\alpha = \omega$. Pokazaćemo da su oba slučaja nemoguća, tj. da u D ne postoji čvor beskonačnog ulaznog stepena.

Analizirajmo prvo slučaj kada je $\alpha = 1$.

Teorema 3.5.7 *U digrafu D ne postoji čvor beskonačnog ulaznog stepena koji je ranga* 1.

Da bismo pokazali ovu teoremu, prethodno moramo pokazati nekoliko lema. Pre svega, označimo sa I skup svih čvorova ranga 1 koji imaju beskonačni ulazni stepen. Dokazaćemo da je $I = \emptyset$. Pretpostavimo suprotno, tj. $I \neq \emptyset$.

Lema 3.5.8 *Skup I je beskonačan.*

Dokaz: Pretpostavimo da je I konačan skup. Neka je X $out-$sekcija generisana sa I. Onda nijedan član particije $(X, V\backslash X)$ od V nema osobinu $\mathcal{P}$. Digraf $D[X]$ ima samo konačno mnogo izvora, a s druge strane digraf $D\backslash X$ nema čvor ranga 1 koji je krajnji čvor beskonačnom broju grana pa nijedan od njih ne može biti izomorfan sa D. $\square$

Označimo sa G_I običan (prost) graf koji ima skup čvorova I. Ako čvorovi $u, v \in G_I$, onda između njih postoji grana uv ako i samo ako su skupovi u^- i v^- konačni.

Lema 3.5.9 *Graf G_I ima osobinu $\mathcal{P}$.*

Dokaz: Neka je (X, Y) proizvoljna particija od I. Neka je (A, B) Bernstein-ova particija od skupa izvora (tj. skupa L_0) u odnosu na:

$$\{v^- : v \in I\} \cup \{u^- \cap v^- : u, v \in I \wedge |u^- \cap v^-| = \infty\}.$$

Proširimo particiju $(A \cup X, B \cup Y)$ do particije (V_a, V_b) od V u kojoj su svi čvorovi zadržali svoj prvobitni rang. Na osnovu osobine $\mathcal{P}$ za D možemo pretpostaviti da je $D \cong D[V_a] := D'$. Međutim, skup čvorova ranga 1 koji imaju beskonačni ulazni stepen u D' je tačno skup X pa je $G_I[X] := G'_I \cong G_I$ na osnovu izbora (A, B). $\square$

Kako graf G_I ima osobinu $\mathcal{P}$, na osnovu prethodnog izlaganja znamo da je G_I prebrojivi prazan, kompletan ili Rado graf.

Lema 3.5.10 *G_I nije Rado graf.*

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, tj. da je G_I Rado graf. Tada u njemu postoje 2 nesusedna čvora u i v. Na osnovu definicije za G_I, oni su elementi skupa I takvi da je skup $u^- \cap v^-$ beskonačan. Na osnovu osobine $\mathcal{P}$ znamo da važi: $G \cong G \backslash (u^- \triangle v^-)$. Stoga postoje 2 čvora $x, y \in I$ takvi da je $x^- = y^-$. Sledi da čvorovi x i y imaju iste susede u G_I. Međutim, ne postoje 2 čvora u Rado grafu koja imaju iste susede. Dakle, došli smo u kontradikciju pa sledi da G_I nije Rado graf. □

Lema 3.5.11 *G_I nije kompletan graf.*

Dokaz: Neka je $(x_i)_{i<\omega}$ numeracija svih čvorova iz I. Ako je graf G_I kompletan, onda je i skup $x_i^- \cap x_j^-$ konačan za sve $i \neq j$. Stoga možemo selektovati beskonačan niz $(y_i)_{i<\omega}$ čvorova iz L_0 tako da $y_i \in x_i^- \backslash (x_0^- \cup x_1^- \cup ... \cup x_{i-1}^-)$, za sve $i < \omega$.

Neka je $Y = \{y_i \mid i < \omega\}$. Proširimo particiju $(Y \cup I, L_0 \backslash Y)$ do particije (A, B) od V, tako da svaki čvor sačuva svoj rang. Onda nijedan od digrafova $D[A]$ i $D[B]$ nema čvor ranga 1 koji ima beskonačni ulazni stepen. Kako je $I \neq \emptyset$, a D zadovoljava osobinu $\mathcal{P}$, dolazimo u kontradikciju pa sledi da G_I nije kompletan graf. □

Na osnovu prethodne dve leme sledi da je G_I prazan graf. Drugim rečima, svaka dva proizvoljna čvora $u, v \in I$ imaju beskonačno mnogo zajedničkih suseda. Primetimo da ni skupovi $u^- \backslash v^-$ i $v^- \backslash u^-$ ne mogu biti oba beskonačna jer će u tom slučaju postojati izomorfizam iz $D \backslash (u^- \cap v^-)$ u D koji će (zbog osobine $\mathcal{P}$) dodeliti u i v susednim čvorovima iz G_I.

Označimo sa H_I prost (običan) graf na skupu I čiji čvorovi $u, v \in I$ formiraju granu uv ako i samo ako je skup $u^- \triangle v^-$ beskonačan.

Lema 3.5.12 *Graf H_I ima osobinu $\mathcal{P}$.*

Dokaz: Neka je (X, Y) proizvoljna particija od I. Uzmimo da je (A, B) Bernsteinova particija od L_0 u odnosu na

$$\{v^- : v \in I\} \cup \{u^- \triangle v^- : u, v \in I, |u^- \triangle v^-| = \infty\}.$$

Proširimo particiju $(A \cup X, B \cup Y)$ do particije (V_a, V_b) od V u kojoj su svi čvorovi zadržali svoj rang. Na osnovu osobine $\mathcal{P}$ za digraf D sledi da je D izomorfan sa indukovanim poddigrafom na jednom od delova particije. Pretpostavimo da je $D \cong D[V_a] := D'$. Definišimo I' i H_I' za D' analogno kao i I i H_I za D. Primetimo da je $I' = X$. Stoga je $H_I[X] := H_I' \cong H_I$ na osnovu izbora particije (A, B). □

Kako H_I ima osobinu $\mathcal{P}$, sledi da je H_I izomorfan sa praznim, kompletnim ili Rado grafom. Kao i u prethodnom izlaganju za graf G_I, dobija se da graf H_I

nije ni kompletan ni Rado graf (dokazi su analogni) pa sledi da je H_I prazan graf. Drugim rečima, za svaka dva čvora $u, v \in I$ sledi da se skupovi u^- i v^- razlikuju samo u konačno mnogo čvorova.

Lema 3.5.13 *Svaki čvor iz L_0 ima svog suseda u I.*

Dokaz: Označimo sa Y skup svih čvorova iz L_0 koji nemaju suseda u I. Proširimo particiju $(Y, (L_0 \backslash Y) \cup I)$ do particije (A, B) od V u kojoj svaki čvor zadržava svoj prvobitni rang. Pošto $D[A]$ nema čvor ranga 1 koji je beskonačnog ulaznog stepena, sledi da je D izomorfan sa $D[B]$ pa svaki čvor iz skupa L_0 ima svoga suseda u skupu I. $\square$

Konačno pokazujemo teoremu 3.5.7, tj. da u digrafu D ne postoji čvor ranga 1 koji ima beskonačni ulazni stepen. Neka $u \in I$ i proširimo particiju $(u^-, L_0 \backslash u^-)$ do particije (A, B) od V u kojoj će svaki čvor da zadrži svoj rang. Ako važi $D \cong D[B]$, onda $D[B]$ ima čvor beskonačnog ulaznog stepena koji je ranga 1. Označimo neki takav čvor sa v. Onda $v \in I$ i skup $v^- \backslash u^-$ je beskonačan. Odatle sledi da je uv grana u grafu H_I što je kontradikcija jer je H_I prazan graf. Tada, na osnovu osobine $\mathcal{P}$, sledi da je $D \cong D[A]$. Kao što čvor u mora biti u A, koristeći prethodnu lemu zaključujemo da D mora imati čvor v ranga 1 takav da je $v^- = L_0$.

Takođe, pokazaćemo sada da D ima čvor ranga 1 u koji ulazi samo jedna grana. Neka čvor $u \in L_0$ čini granu sa čvorom $v \in L_1$. Na osnovu osobine $\mathcal{P}$, digraf D je izomorfan sa digrafom dobijenim iz D brisanjem svih čvorova iz L_0 osim čvora u. U ovom digrafu čvor v i dalje ima rang 1, ali je $v^- = \{u\}$.

Neka je C skup svih čvorova iz D takav da za svaki čvor $v \in C$ skup v^- sadrži beskonačno mnogo čvorova iz L_0. Neka je (A, B) Bernstein-ova particija u odnosu na:

$$\{v^- \cap L_0 \mid v \in C\}.$$

Tada $D \ncong D[A \cup C]$ jer $D[A \cup C]$ nema čvor ranga 1 koji je krajnji čvor samo jednoj grani. Na osnovu osobine $\mathcal{P}$, sledi da je D izomorfan sa $D \backslash (A \cup C)$. Međutim, za razliku od digrafa D, u ovom digrafu ne postoji čvor v takav da je $v^- = L_0$. To nas dovodi u kontradikciju pa nije tačna pretpostavka da je $I \neq \emptyset$. Sledi da je $I = \emptyset$, čime je ujedno i završen dokaz date teoreme. $\square$

Pokazali smo da digraf D ne sadrži nijedan čvor ranga 1 beskonačnog ulaznog stepena. Stoga preostaje još da se ispita slučaj $\alpha = \omega$. Može se pokazati sledeća teorema.

Teorema 3.5.14 *Važi da je $L_\omega = \emptyset$.*

Odatle sledi da je i slučaj $\alpha = \omega$ takođe nemoguć. Sledi da je svaki čvor iz digrafa D konačnog ulaznog stepena pa je $D = ARO$.

Sada konačno možemo da izvršimo klasifikaciju svih prebrojivih orijentisanih grafova sa osobinom $\mathcal{P}$.

Teorema 3.5.15 *Prebrojivi orijentisani grafovi sa osobinom $\mathcal{P}$ su:*
(1) *Prazan digraf*
(2) *Random turnir* (T^∞)
(3) *Tranzitivni turniri* ω^α *i njihovi duali*
(4) *Random orijentisani graf* (RO)
(5) *Random aciklični orijentisani graf* (ARO) *i njegov dual.*

Zaključak

U ovom master radu dat je pregled osnovnih pojmova i osobina Rado grafa, homogenih bipartitnih grafova i Rado digrafa.

Kao što smo videli, Rado graf je prebrojivi graf koji sadrži sve konačne i prebrojive grafove kao svoje indukovane podgrafove. Zbog toga za njega kažemo da poseduje osobinu "univerzalnosti". Takođe, u radu je dokazana jedinstvenost Rado grafa do na izomorfizam i predstavljene su mnoge druge njegove osobine. Stoga, kao takav, Rado graf zauzima značajno mesto u teoriji grafova.

Iako priča o (običnom) Rado grafu datira od šezdesetih godina prošlog veka, radovi o orijentisanim grafovima sa osobinom $\mathcal{P}$ pojavili su se tek poslednjih godina. Najpre je izvršena klasifikacija turnira sa osobinom $\mathcal{P}$ (Teorema 3.3.5), a potom je priča uopštena i na klasifikaciju svih digrafova (Teorema 3.5.15).

Što se tiče primene Rado grafa, on se koristi kao jedan od najstarijih i najprimenljivijih modela u mrežama kao što su na primer internet, razne društvene mreže, itd. Takođe, ima značajnu primenu i u epidemiologiji jer se koristi kao model za širenje nekih zaraznih bolesti.

Sama tema rada za mene je bila veoma interesantna i inspirativna. Budući da je tema savremena, gotovo da nema literature na srpskom jeziku o njoj. Stoga prezentovani materijal predstavlja dobru osnovu čitaocu za upoznavanje sa osnovnim pojmovima o Rado grafu i ujedno pruža smernice za dalje istraživanje i produbljivanje.

Literatura

[1] Anthony Bonato, Peter J. Cameron, Dejan Delić, *Tournaments and orders with pigeonhole property*, Canad. Math. Bull. Vol. 43, 397-405, 2000.

[2] Anthony Bonato, Dejan Delić, *A pigeonhole property for relational structures*, Mathematical logic Quartely 45, 409-413, 1999.

[3] David M. Burton, *Elementary number theory*, Unversity of New Hampshire, 2007.

[4] Peter J. Cameron, *The random graph*, Springer Verlag, New York, 1997.

[5] Peter J. Cameron, *The random graph revisited*, European Congress of Mathematics, Vol. 1 (Barcelona), 2000.

[6] Reinhard Diestel, *Graph theory*, Springer Verlag, New York, 2000.

[7] Reinhard Diestel, Imre Leader, Alex Scott, Stéphan Thomassé, *Partitions and orientations of the Rado graph*, Transactions of the American Mathematical Society 359 (5), 2007.

[8] F. R. Drake, *Set theory*, North Holland, 1974.

[9] Paul Erdös, Alfréd Rény, *Asymmetric graphs*, Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae 14: 295315, 1963.

[10] Martin Goldstern, Rami Grossberg, Menachem Kojman, *Infinite homogeneous bipartite graphs with unequal sides*, Carnegie Mellon University, 1992.

[11] Brad Hannigan-Daley, *The Rado graph*, University of Waterloo, 2007.

[12] C. Ward Henson, *A family of countable homogeneous graphs*, Pacific journal of mathematics, Vol. 38, No. 1, 1971.

[13] Dragan Mašulović, *Odabrane teme diskretne matematike*, Prirodno-matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku, Novi Sad, 2007.

[14] M. E. J. Newman, *Random graphs as model of networks*, Santa Fe Institute, USA, 2005.

[15] Vojislav Petrović, *Teorija grafova*, Prirodno-matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku, Novi Sad, 1998.

[16] Rado Richard, *Universal graphs and universal functions"*, Acta Arith. 9: 331340, 1964.

[17] Branimir Šešelja, Andreja Tepavčević, *Algebra I*, Prirodno-matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku, Novi Sad, 2007.

[18] Boris Šobot, *Random graphs and independent families*, 2012.

Kratka biografija

Srđan Milićević je rođen 10. februara 1988. godine u Rumi. Završio je Osnovnu školu ”Zmaj Jova Jovanović” u Rumi 2003. godine kao nosilac Vukove diplome i kao đak generacije. Potom upisuje Gimnaziju ”Stevan Puzić”, prirodno-matematički smer, koju završava 2007. godine, takođe kao vukovac i đak generacije. Iste godine upisuje Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, smer matematika finansija, pri čemu je, kao nosilac najviših nagrada na državnim takmičenjima iz matematike, bio oslobođen polaganja prijemnog ispita. Zaključno sa junskim ispitnim rokom 2011. godine položio je sve predviđene ispite sa prosekom 10.00. Potom upisuje master studije na istom fakultetu, smer primenjena matematika. Položio je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom zaključno sa junskim ispitnim rokom 2012. godine sa prosečnom ocenom 10.00 i time stekao uslov za odbranu master rada.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Srđan Milićević
AU

Mentor: dr Boris Šobot
MN

Naslov rada: Rado graf
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: s / e
JI

Zemlja publikovanja: Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2012.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno–matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (3, 63, 18, 0, 4, 0, 0)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Teorija grafova
ND

Predmetna odrednica / Ključne reči: Rado graf, jedinstvenost, izomorfizam, prebrojivost, univerzalnost, grupa automorfizama, $\aleph_0$-kategoričnost, homogenost, bipartitni graf, digraf, turnir
PO

UDK

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno–matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: U prvom delu ovog master rada, govori se o Rado grafu i njegovim osobinama: jedinstvenost do na izomorfizam, univerzalnost, stabilnost u odnosu na konačan broj promena, tranzitivnost, $\aleph_0$- kategoričnost, itd. Uvedeni su osnovni pojmovi i opisano je nekoliko konstrukcija Rado grafa. U drugom delu rada, razmatran je pojam homogenosti i izvršena je klasifikacija prebrojivih homogenih grafova. Pokazana je i egzistencija $(\aleph_0, 2^{\aleph_0})$ saS grafa. U trećem delu, priča se sa prostih proširuje na orijentisane grafove, pri čemu se zasebno razmatraju turniri. Posmatrane su dve orijentacije Rado grafa- RO i ARO i izvršena je klasifikacija svih digrafova sa osobinom $\mathcal{P}$.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 19.4.2012.
DP

Datum odbrane: Novembar 2012.
DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik:	dr Miloš Kurilić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član:	dr Boris Šobot, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor
Član:	dr Aleksandar Pavlović, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Srđan Milićević
AU

Mentor: Boris Šobot, Ph.D.
MN

Title: Rado graph
TI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract: English
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2012.
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: (3, 63, 18, 0, 4, 0, 0)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Graph theory
SD

Subject / Key words: Rado graph, uniqueness, isomorphism, countable, automorphism group, universality, $\aleph_0$-categoricity, homogeneity, bipartite graph, digraph, tournament
SKW

UC:

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: The first part of this master thesis deals with Rado graph and its properties: uniqueness up to isomorphism, universality, robustness against finite changes, transitivity, $\aleph_0$-categoricity, etc. Also, we introduce fundamental terms and describe some constructions of Rado graph. In the next part of thesis, we talk about homogeneity and classify homogeneous bipartite graphs. We prove existence of $(\aleph_0, 2^{\aleph_0})$ saS graph. In the last part of thesis, we analyze countable oriented graphs, especially tournaments. We consider two orientations of Rado graph and classify all digraphs with property $\mathcal{P}$.
AB

Accepted by the Scientific Board on: 19.4.2012.
ASB

Defended: November 2012.
DE

Thesis defend board:
DB

President:	Dr Miloš Kurilić, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
Member:	Dr Boris Šobot, assistant professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, supervisor
Member:	Dr Aleksandar Pavlović, assistant professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad