UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Master rad

LAPLASOVA TRANSFORMACIJA

Snježana Maksimović

Mentor: Akademik dr Stevan Pilipović

Novi Sad, april 2011.

Sadržaj

Predgovor

Laplace-ova transformacija predstavlja jako dobar "alat" za rješavanje običnih i parcijalnih diferencijalnih jednaćina. Integralne transformacije pojavljuju se u radu Leonarda Euler-a, koji ih je prilikom rješavanja običnih diferencijalnih jednačina drugog reda, predstavljao u obliku inverzne Laplace-ove transformacije. Laplace u svom velikom djelu *Théorie analytique des probabilités (1812)*, pominje Euler-a kao začetnika integralnih transformacija. Krajem devetnaestog vijeka, Laplace-ova transformacija je proširena do njenog kompleksnog oblika zaslugama *Poincaré-a* and *Pincherle-a*, i proširena na dvije promjenjive zaslugom *Picard-a*. Jedna od najljepših formula iz teorije Laplace-ove transformacije je svakako formula kompleksne inverzije. Prva primjena savremene Laplace-ove transformacije pojavljuje se u radu *Bateman-a (1910)*. *Berstein* je 1920-te u svom radu o teta funkcijama izraz $f(s) = \int_0^\infty e^{-st}\phi(t)dt$ nazvao Laplace-ovom transformacijom. Određeni podsticaj i doprinos ovome dao je *Deutch* 1920-ih i 1930-ih godina koji primjenjuje Laplace-ovu transformaciju za rješavanje diferencijalnih, integralnih i integrodiferencijalni jednačina. Rezultate toga rad je izložio u djelu *Theorie und Anwendungen der Laplace Transformation (1937)*. Važnu ulogu u primjeni Laplace-ove transformacije u Elektrotehnici odigrao je *Oliver Heaviside*. On je izumio *Heaviside-ovu* stepenastu funkciju i primjenio je na modelu stuje u elektičnom kolu. Pronašao je i metodu za rješavanje linearnih diferencijalnih jednačina, za koju je kasnije utvrđeno da odgovara Laplace-ovoj transformaciji. Mnogi naučnici su pokušali da *Heaviside-ov* račun učine složenijim i povežu ga sa Laplace-ovom transformacijom. Jedan od njih bio je i *Bromwich*, koji je otkrio inverznu Laplace-ovu transformaciju. Laplace-ova transformacija primjenjuje se u fizici (na primjer, provođenje toplote) kao i u analizi prenosa signala u različitim sistemima (elektične mreže, komunikacioni sistemi, ...). Optički sistemi, kao i kompjuterski programi za obradu digitalizovane slike i zvukova se takođe mogu smatrati sistemima na koje se može primjeniti Laplace-ova transformacija.

U ovom master radu sam pokušala da na najbolji način približim čitaocu Laplace-ovu transformaciju, njene osnovne osobine i primjene. Rad se sastoji od dve glava. Prva glava predviđena je za čitaoce koji se prvi put upoznaju sa pojmom Laplace-ove transformacije i koji nisu upoznati sa Banahovim prostorima, dok je druga glava napredniji nivo i ona je namjenjena čitaocima koji su upoznati sa ovim pojmovima, kao i sa teorijom operatora.

Prva glava se sastoji četrnaest poglavlja. Tu su izložene neke osnovne osobine Laplace-ovog integrala. U prva četiri poglavlja su date osobine Laplace-ove transformacije. U petom poglavlju je definisana inverzna Laplace-ova transformacija i dokazana je formula kompleksne inverzije. U narednih šest poglavlja su definisane Gama, Beta i Beselova funkcija, definisan je pojam konvolucije funkcija i dokazana je teorema za konvoluciju Laplace-ove transformacije. Takođe je definisan pojam distribucija i dokazana teorema za konvoluciju distibucija. Jedanaesto poglavlje je posvećeno Riemann-Stieltjes-ovom integralu. Tu su date osnovne definicije Riemann-Stieltjes-ovog integrala, funkcija ograničene varijacije i Laplace-Stieltjes-ove transformacije , a sve to na prostorima $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$. Posljednja dva poglavlja su posvećena primjenama Laplace-ove transformacije.

Druga glava se sastoji od deset poglavlja. To je uopštenje prethodne glave na Banahovim prostorima. Ovde su još uvedeni dodatni pojmovi kao što su funkcije ograničene semivarijacije, slabe ograničene varijacije, apscise konvergencije, Riesz-ovog operatora, Riesz-Stieltjes-ove transformacije i drugih. Laplace-ova i Laplace-Stieltjes-ova transformacije su predstavljene kao operatori koji djeluju na određenim prostorima.

1. Osnovna Laplace-ova transformacija

1.1. Egzistencija Laplace-ove transformacije

Definicija 1.1.1. *Pretpostavimo da je* $t \mapsto f(t)$ *realna ili kompleksna funkcija* $(t > 0)$ *i* s *realan ili kompleksan parametar. Definišimo Laplace-ovu transformaciju funkcije* f *sa*

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt = \lim_{\tau \to \infty} \int_0^{\tau} e^{-st} f(t)dt \tag{1.1}$$

pod uslovom da ovaj limes postoji.

Ako ovaj limes postoji, onda kažemo da integral (1.1) konvergira. U suprotnom slučaju integral divergira i ne možemo definisati Laplace-ovu transformaciju za f. U nastavku ćemo se baviti konvergencijom integrala (1.1).

Definicija 1.1.2. *Integral (1.1) je apsolutno konvergentan ako postoji*

$$\lim_{\tau \to \infty} \int_0^{\tau} |e^{-st} f(t)|dt.$$

Ako $\mathcal{L}(f(t))$ *konvergira apsolutno, onda vrijedi*

$$|\int_{\tau}^{\tau'} e^{-st} f(t)dt| \leq \int_{\tau}^{\tau'} |e^{-st} f(t)|dt \to 0, kad\ \tau \to \infty$$

za sve $\tau' > \tau$.

Definicija 1.1.3. *Funkcija* f *je dio po dio neprekidna na intervalu* $[0, \infty)$ *ako:*
i) $\lim_{t \to 0^+} f(t) = f(0^+)$ *postoji*
ii) f *je neprekidna na svakom konačnom intervalu* (a, b) *osim u eventualno konačno mnogo tačaka* $r_1, r_2, ..., r_n \in (a, b)$ *u kojima funkcija* f *ima prekide.*

Definicija 1.1.4. *Funkcija f je* **eksponencijanlo ograničena** *ako postoje konstante $M > 0$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ takve da za neko $t_0 \geq 0$ vrijedi*

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t},\ t \geq t_0$$

Teorema 1.1.1. *Ako je f dio po dio neprekidna na $[0, \infty)$ i eksponencijalno ograničena, tada Laplace-ova transformacija postoji ako je $Re(s) > \alpha$ i konvergira apsolutno.*

Dokaz. Kako je funkcija f eksponencijalno ograničena (eksponencijalnog reda α), tada postoji konstanta $M_1 > 0$ tako da vrijedi

$$|f(t)| \leq M_1 e^{\alpha t},\ t \geq t_0,$$

za neko realno α. Funkcija f je dio po dio neprekidna na $[0, t_0]$ i odatle imamo ograničenost tj.

$$|f(t)| \leq M_2,\ 0 < t < t_0$$

Kako funkcija $e^{\alpha t}$ ima pozitivan minimum na $[0, t_0]$, a konstantu M možemo izabrati dovoljno veliku, pa imamo

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t},\ t > 0$$

Dakle,

$$\int_0^\tau |e^{-st} f(t)| dt \leq M \int_0^\tau e^{-(x-\alpha)t} dt = \frac{Me^{-(x-\alpha)t}}{-(x-\alpha)} |_0^\tau = \frac{M}{x-\alpha} - \frac{Me^{-(x-\alpha)\tau}}{x-\alpha}.$$

Kada pustimo $\tau \to \infty$ i $Re(s) = x > \alpha$ daje

$$\int_0^\infty |e^{-st} f(t)| dt \leq \frac{M}{x-\alpha}. \tag{1.2}$$

□

1.2. Osobine Laplace-ove transformacije

Neka je $L := \{f : (0, \infty) \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C}) \mid F(s)\ postoji\ za\ neko\ s\}$.

Teorema 1.2.1. *(Teorema linearnosti) Ako $f_1 \in L$ za $Re(s) > \alpha$, $f_2 \in L$ za $Re(s) > \beta$, tada $f_1 + f_2 \in L$ za $Re(s) > \max\{\alpha, \beta\}$ i*

$$\mathcal{L}(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \mathcal{L}(f_1) + c_2 \mathcal{L}(f_2)$$

za proizvoljne konstante c_1 i c_2.

Dokaz. Iz (1.1) i linearnosti integrala dobijamo

$$\int_0^\infty e^{-st}(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t))dt = c_1 \int_0^\infty e^{-st} f_1(t)dt + c_2 \int_0^\infty e^{-st} f_2(t)dt.$$

□

Teorema 1.2.2. *(Teorema sličnosti) Ako je $f \in L$, $Re(s) > \alpha$ i $a > 0$, onda je i $Re(s) > a\alpha$ i vrijedi*

$$\mathcal{L}(f(at)) = \frac{1}{a} F(\frac{s}{a}).$$

Dokaz. Po definiciji Laplace-ove transformacije imamo

$$\mathcal{L}(f(at)) = \int_0^\infty e^{-st} f(at)dt.$$

Smjenom $at = u$, a $dt = du$ gornji integral postaje

$$\mathcal{L}(f(u)) = \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}u} f(u)du.$$

□

Teorema 1.2.3. *(Prva teorema pomjeranja) Ako je $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$, $Re(s) > 0$, tada je $F(s-a) = \mathcal{L}(e^{at} f(t))$, $Re(s) > a$, $a \in \mathbb{R}$.*

Dokaz. Za $Re(s) > a$, važi

$$F(s-a) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} f(t)dt = \mathcal{L}(e^{at} f(t)).$$

□

Teorema 1.2.4. *(Druga teorema pomjeranja) Ako je $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$, tada je*

$$\mathcal{L}(u_a(t) f(t-a)) = e^{-as} F(s), \ (a \geq 0)$$

gdje je

$$u_a(t) = \begin{cases} 1 & , t > a \\ 0 & , t < a \end{cases}.$$

Dokaz.

$$\mathcal{L}(u_a(t) f(t-a)) = \int_0^\infty e^{-st} u_a(t) f(t-a)dt = \int_0^\infty e^{-st} f(t-a)dt.$$

Uvodeći smjenu $\tau = t - a$, dobijamo

$$\int_0^\infty e^{-s(\tau + a)} f(\tau)d\tau = e^{-as} \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)d\tau = e^{-as} F(s).$$

□

Napomena 1.2.1. *Za $a \geq 0$, funkcija $u_a(t)$ se naziva Heaviside-ova stepenasta funkcija.*

Teorema 1.2.5. *Ako*

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

konvergira za $t \geq 0$ uz uslov da je

$$|a_n| \leq \frac{K\alpha^n}{n!}$$

za sve dovoljno velike n i $\alpha > 0, K > 0$, tada je

$$\mathcal{L}(f(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathcal{L}(t^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n n!}{s^{n+1}} \quad (Re(s) > \alpha)\ .$$

Dokaz. Kako je funkcija $f(t)$ predstavljena pomoću stepenog reda, ona je neprekidna na $[0, \infty)$. Želimo da pokažemo da razlika

$$|\mathcal{L}(f(t)) - \sum_{n=0}^{N} a_n \mathcal{L}(t^n)| = |\mathcal{L}(f(t) - \sum_{n=0}^{N} a_n t^n)| \leq \mathcal{L}_x(|f(t) - \sum_{n=0}^{N} a_n t^n|)$$

konvergira nuli kad $N \to \infty$, gdje je $\mathcal{L}_x(h(t)) = \int_0^\infty e^{-xt} h(t)dt$, za neku funkciju h gdje je $x = Re(s)$. Prema tome je

$$|f(t) - \sum_{n=0}^{N} a_n t^n| = |\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n t^n| \leq K \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(\alpha t)^n}{n!} = K(e^{\alpha t} - \sum_{n=0}^{N} \frac{(\alpha t)^n}{n!}).$$

Kako za proizvoljne Laplace transformabilne funkcije h i g takve da je $h \leq g$ vrijedi $\mathcal{L}_x(h) \leq \mathcal{L}_x(g)$, onda vrijedi

$$\mathcal{L}_x(|f(t) - \sum_{n=0}^{N} a_n t^n|) \leq K\mathcal{L}_x(e^{\alpha t} - \sum_{n=0}^{N} \frac{(\alpha t)^n}{n!}) = K(\frac{1}{x-\alpha} - \sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha^n}{x^{n+1}}) =$$

$$= K(\frac{1}{x-\alpha} - \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{N} (\frac{\alpha}{x})^n) \to 0 \ \textit{ kad } N \to \infty, \ (Re(s) = x > \alpha).$$

Ovdje smo iskoristi činjenicu da je

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1.$$

Prema tome je

$$\mathcal{L}(f(t)) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} a_n \mathcal{L}(t^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n n!}{s^{n+1}}, \ (Re(s) > \alpha).$$

□

Teorema 1.2.6. *Ako je f dio po dio neprekidna na $[0,\infty)$ i eksponencijalno ograničena, tada*

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) \to 0 \quad kad \quad Re(s) \to \infty.$$

Dokaz. Iz (1.2) slijedi da za proizvoljnu konstantu $M > 0$ važi

$$|\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt| \leq \frac{M}{x-\alpha}, \quad (Re(s) = x > \alpha).$$

Puštajući u prethodnoj nejednakosti $x \to \infty$ dobijamo tvrdnju. □

Teorema 1.2.7. *Neka je f neprekidna na $(0,\infty)$ eksponencijalnog reda α i f' dio po dio neprekidna na $[0,\infty)$. Tada*

$$\mathcal{L}(f'(t)) = s\mathcal{L}(f(t)) - f(0^+) \quad (Re(s) > \alpha).$$

Dokaz. Parcijalnom integracijom dobijamo

$$\int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt = \lim_{\tau\to\infty,\ \delta\to 0} \int_\delta^\tau e^{-st} f'(t)dt = \lim_{\tau\to\infty,\ \delta\to 0} [e^{-st} f(t) \mid_\delta^\tau + s\int_\delta^\tau e^{-st} f(t)dt] =$$

$$= \lim_{\tau\to\infty,\ \delta\to 0} [e^{-s\tau} f(\tau) - e^{-s\delta} f(\delta) + s\int_\delta^\tau e^{-st} f(t)dt] =$$

$$= -f(0^+) + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \ \ (Re(s) > \alpha).$$

Prema tome je

$$\mathcal{L}(f'(t)) = s\mathcal{L}(f(t)) - f(0^+).$$

Ovdje smo koristi činjenicu da za $Re(s) = x > \alpha$ važi

$$|e^{-s\tau} f(\tau)| \leq e^{-x\tau} M e^{\alpha\tau} =$$

$$= M e^{-(x-\alpha)\tau} \to 0 \ \ kad \ \ \tau \to \infty\ .$$

Primjetimo da $f(0^+)$ postoji jer $f'(0^+) = \lim_{t\to 0^+} f'(t)$ postoji. Jasno, ako je f neprekidna u nuli, onda je $f(0^+) = f(0)$ i naša formula postaje

$$\mathcal{L}(f'(t)) = s\mathcal{L}(f(t)) - f(0).$$

□

Teorema 1.2.8. *Pretpostavimo da je f neprekidna na $[0,\infty)$ osim u tački $t_1 > 0$ u kojoj ima prekid i neka je f eksponencijalno ograničena, a f' dio po dio neprekidna na $[0,\infty)$. Tada*

$$\mathcal{L}(f'(t)) = s\mathcal{L}(f(t)) - f(0) - e^{-t_1 s}(f(t_1^+) - f(t_1^-)) \ \ (Re(s) > \alpha).$$

Dokaz.

$$\int_0^\infty e^{-st}f'(t)dt = \lim_{\tau\to\infty}\int_0^\tau e^{-st}f'(t)dt = \lim_{\tau\to\infty}[e^{-st}f(t)\mid_0^{t_1^-} + e^{-st}f(t)\mid_{t_1^+}^{\tau} + s\int_0^\tau e^{-st}f(t)dt] =$$

$$= \lim_{\tau\to\infty}[e^{-st}f(t_1^-) - f(0) + e^{-s\tau}f(\tau) - e^{-st}f(t_1^+) + s\int_0^\tau e^{-st}f(t)dt].$$

Odatle je

$$\mathcal{L}(f'(t)) = s\mathcal{L}(f(t)) - f(0) - e^{-t_1 s}(f(t_1^+) - f(t_1^-)).$$

Ako su $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$ prekidi funkcije f, a n je konačan broj, tada prethodna formula postaje

$$\mathcal{L}(f'(t)) = s\mathcal{L}(f(t)) - f(0) - \sum_{k=1}^{n} e^{-t_k s}(f(t_k^+) - f(t_k^-)).$$

$\square$

Napomena 1.2.2. *Primjetimo da ako je f' neprekidna na $[0,\infty)$ eksponencijalnog reda α, tada isto vrijedi i za funkciju f.*

Slijedeća teorema je uopštenje Teoreme 1.2.7 i glasi:

Teorema 1.2.9. *Pretpostavimo da su $f(t), f'(t), ...f^{(n-1)}(t)$ neprekidne na $(0,\infty)$ eksponencijalnog reda α, a $f^{(n)}(t)$ dio po dio neprekidna na $[0,\infty)$. Tada je*

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = s^n\mathcal{L}(f(t)) - s^{n-1}f(0^+) - s^{n-2}f'(0^+) - ... - f^{(n-1)}(0^+).$$

Teorema 1.2.10. *(Teorema o diferenciranju slike) Neka je $f(t)$ dio po dio neprekidna na $[0,\infty)$, eksponencijalnog reda α i $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$. Tada*

$$\frac{d^n}{ds^n}F(s) = \mathcal{L}((-1)^n t^n f(t)) \quad n = 1,2,3,... \quad (Re(s) > \alpha).$$

Dokaz. Poći ćemo od same definicije Laplace-ove transformacije funkcije f

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt.$$

Diferenciranjem lijeve i desne strane prethodne nejednakosti po s dobijamo

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}e^{-st}f(t)dt$$

$$= \int_0^\infty -te^{-st}f(t)dt = \mathcal{L}(-tf(t))$$

Ovdje smo koristili teoremu o zamjeni mjesta izvoda i integrala. Nastavljajući postupak dobijamo tvrdnju. $\square$

Teorema 1.2.11. *(Teorema o početnoj vrijednosti) Pretpostavimo da f i f' zadovoljavaju uslove Teoreme 1.2.7 i $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$. Tada*

$$f(0^+) = \lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s) \quad (s \text{ je realno}).$$

Dokaz. Na osnovu Teoreme 1.2.6 je $\mathcal{L}(f'(t)) = G(s) \to 0$ kad $s \to \infty$. Na osnovu Teoreme 1.2.7 je

$$G(s) = sF(s) - f(0^+), \quad s > \alpha.$$

Puštajući limes u prethodnoj jednakosti dobijamo

$$0 = \lim_{s \to \infty} G(s) = \lim_{s \to \infty} sF(s) - f(0^+).$$

Prema tome je

$$f(0^+) = \lim_{s \to \infty} sF(s).$$

□

Teorema 1.2.12. *Pretpostavimo da funkcija f zadovoljava uslove Teoreme 1.2.7, $\mathcal{L}(f'(t)) = G(s)$ postoji za sve $s > 0$ i $\lim_{t\to\infty} f(t)$ postoji. Tada*

$$\lim_{s \to 0^+} \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt = \int_0^\infty f'(t) dt.$$

Dokaz. Vidjeti u [1]. □

Teorema 1.2.13. *(Teorema o krajnjoj vrijednosti) Pretpostavimo da f zadovoljava uslove Teoreme 1.2.7 i $\lim_{t\to\infty} f(t)$ postoji. Tada je*

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s) \quad (s \text{ je realno}).$$

Dokaz. Na osnovu pretpostavke funkcija f je ograničena, pa primjetimo da je eksponencijalni red ove funkcije $\alpha = 0$. Na osnovu Teoreme 1.2.7 je

$$G(s) = \mathcal{L}(f'(t)) = sF(s) - f(0^+) \qquad (s > 0).$$

Puštajući limes kad $s \to 0$ u prethodnoj jednačini dobijamo

$$\lim_{s \to 0} G(s) = \lim_{s \to 0} sF(s) - f(0^+). \tag{1.3}$$

Na osnovu Teoreme 1.2.12 limes može ući ispod znaka integrala, pa dobijamo

$$\lim_{s \to 0} G(s) = \lim_{s \to 0} \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt = \int_0^\infty f'(t) dt. \tag{1.4}$$

Integral $\int_0^\infty f'(t)dt$ postoji, jer

$$\int_0^\infty f'(t) dt = \lim_{\tau \to \infty} \int_0^\tau f'(t) dt = \lim_{\tau \to \infty} (f(\tau) - f(0^+)). \tag{1.5}$$

Iz jednačina (1.3), (1.4) i (1.5) dobijamo tvrdnju. □

Definicija 1.2.1. *Ako je kompleksna funkcija $f(z)$ diferencijabilna u svim tačkama u nekoj okolini $|z - z_0| < r$, tada je $f(z)$ analitička (holomorfna) u tački z_0. Ako je $f(z)$ analitička u svakoj tački u oblasti D, onda je $f(z)$ analitička (holomorfna) na D.*

Teorema 1.2.14. *Ako je funkcija $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ definisana u oblasti D i njeni parcijalni izvodi u_x, u_y, v_x, v_y su neprekidni i zadovoljavaju Cauchy-Riemann-ove (C-R)*[1] *uslove. Tada je $f(z)$ analitička (holomorfna) na D.*

Dokaz. Vidjeti u [5]. □

Teorema 1.2.15. *Ako je f dio po dio neprekidna funkcija i integral*

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

uniformno konvergira za sve $s \in E \subseteq \mathbb{C}$, onda je $F(s)$ neprekidna na E, tj. za $s \to s_0 \in E$ je

$$\lim_{s \to s_0} \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty \lim_{s \to s_0} e^{-st} f(t)dt = F(s_0).$$

Dokaz. Vidjeti u [1]. □

Teorema 1.2.16. *Pretpostavimo da su $f(x, y)$ i $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ neprekidne u pravougaoniku $a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq T,\ T > 0$, osim u možda konačno mnogo tačaka u kojima ima prekide duž pravih $y = y_i,\ i = 1, 2, ..., n$ i neka $\int_0^\infty f(x, y)dy$ konvergira, a $\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)dy$ konvergira uniformno. Tada je*

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty f(x, y)dy = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)dy \quad (a < x < b).$$

Dokaz. Vidjeti u [1]. □

Teorema 1.2.17. *Neka je $f(t)$ dio po dio neprekidna na $[0, \infty)$ eksponencijalnog reda α, onda je $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ analitička funkcija u domenu $Re(s) > \alpha$.*

Dokaz. Neka je $s = x + iy$.

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-(x+iy)t} f(t)dt = e^{-xt} \int_0^\infty (\cos(yt) - i \sin(yt)) f(t)dt =$$

$$= \int_0^\infty (e^{-xt} \cos(yt)) f(t)dt + \int_0^\infty (-e^{-xt} \sin(yt)) f(t)dt = u(x, y) + iv(x, y)$$

---

[1] Ovi uslovi se dosta često koriste u kompleksnoj analizi u dati su u [5]

Uzmimo u obzir

$$|\int_{t_0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}(e^{-xt}\cos(yt))f(t)dt| = |\int_{t_0}^{\infty}(-te^{-xt}\cos(yt))f(t)dt| \leq \int_{t_0}^{\infty} te^{-xt}|f(t)|dt \leq$$

$$\leq M\int_{t_0}^{\infty} e^{-(x-\alpha-\delta)t}dt \leq \frac{M}{x-\alpha-\delta}e^{-(x-\alpha-\delta)t_0}$$

gdje je $\delta > 0$ izabrano proizvoljno malo. Tada za $x \geq x_0 > \alpha$ ($x \geq x_0 > \alpha + \delta$), desna strana prethodne nejednakosti može biti dovoljno mala birajući t_0 dovoljno veliko. Iz toga slijedi da integral $\int_0^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}(e^{-xt}\cos(yt))f(t)dt$ uniformno konvergira za $Re(s) \geq x_0 > \alpha$. Na isti način zaključujemo da integral $\int_0^{\infty}\frac{\partial}{\partial y}(-e^{-xt}\sin(yt))f(t)dt$ konvergira uniformno za $Re(s) \geq x_0 > \alpha$. Na osnovu ove uniformne konvergencije i apsolutne konvergencije $\mathcal{L}(f(t))$ po Teoremi 1.2.16 zaključujemo da možemo diferencirati ispod znaka integrala. Iz toga je

$$u_x = \int_0^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}(e^{-xt}\cos(yt))f(t)dt = \int_0^{\infty}(-te^{-xt}\cos(yt))f(t)dt$$

$$v_y = \int_0^{\infty}\frac{\partial}{\partial y}(-e^{-xt}\sin(yt))f(t)dt = \int_0^{\infty}(-te^{-xt}\cos(yt))f(t)dt$$

tj. $u_x = v_y$. Na sličan način pokažemo da je $u_y = -v_x$. Neprekidnost parcijalnih izvoda u_x, u_y, v_x, v_y slijedi iz Teoreme 1.2.15 primjenjene na funkciju $g(t) = -tf(t)$. Na osnovu Teoreme 1.2.14 slijedi tvrdnja. □

Teorema 1.2.18. *Ako je f dio po dio neprekidna na $[0,\infty)$ eksponencijalnog reda $\alpha \geq 0$ i*

$$g(t) = \int_0^t f(u)du,$$

onda je

$$\mathcal{L}(g(t)) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(f(t)) \qquad (Re(s) > \alpha).$$

Dokaz. Kako je $g'(t) = f(t)$, osim u tačkama prekida funkcije f, pa parcijalnom integracijom dobijamo

$$\int_0^{\infty} e^{-st}g(t)dt = \lim_{\tau\to\infty}[\frac{g(t)e^{-st}}{-s}|_0^{\tau} + \frac{1}{s}\int_0^{\tau} e^{-st}f(t)dt].$$

Kako je $g(0) = 0$, trebamo odrediti

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{g(\tau)e^{-s\tau}}{-s}.$$

U tom cilju je ,

$$|g(\tau)e^{-s\tau}| \leq e^{-x\tau}\int_0^{\tau}|f(u)|du$$

$$\leq Me^{-x\tau}\int_0^{\tau} e^{\alpha u}du$$

$$= \frac{M}{\alpha}(e^{-(x-\alpha)\tau} - e^{-x\tau}) \to 0 \ \ kad\ \tau \to \infty$$

gdje je $x = Re(s) > \alpha > 0$. Ovo vrijedi i za $\alpha = 0$. Otuda je

$$\mathcal{L}(g(t)) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(f(t)) \qquad (Re(s) > \alpha).$$

□

Teorema 1.2.19. *Ako je f dio po dio neprekidna na $[0,\infty)$ eksponencijalnog reda $\alpha \geq 0$ i ako postoji $\int_0^\infty F(u)du$, tada je*

$$\mathcal{L}(\frac{f(t)}{t}) = \int_s^\infty F(u)du \qquad (Re(s) > \alpha).$$

Dokaz.

$$\int_s^\infty F(u)du = \int_s^\infty du \int_0^\infty e^{-ut}f(t)dt = \int_0^\infty f(t)dt \int_s^\infty e^{-ut}du =$$

$$= \int_0^\infty f(t)\frac{e^{-ut}}{t}\mid_\infty^s dt = \int_0^\infty f(t)\frac{e^{-st}}{t}dt = \mathcal{L}(\frac{f(t)}{t}).$$

Ovdje smo koristili Fubini[2]-jevu teoremu o zamjeni mjesta integrala. □

1.3. Laplace-ova transformacija periodičnih funkcija

Neka je data funkcija $t \to f(t)$ takva da je $f(t) = 0$ za svako $t < 0$ koja je periodična na intervalu $[0,\infty)$ sa periodom T. Tada vrijedi jednakost $f(t+kT) = f(t)$ gdje je k prirodan broj.

Teorema 1.3.1. *Ako je $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ i ako je f periodična sa periodom T na intervalu $[0,\infty)$, onda vrijedi*

$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)dt.$$

Dokaz. Na osnovu definicije Laplace-ove transformacije, imamo

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = \int_0^T e^{-st}f(t)dt + \int_T^\infty e^{-st}f(t)dt.$$

Uvodeći smjenu $\tau = t - T$, dobijamo

$$\int_T^\infty e^{-st}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-s(\tau+T)}f(\tau+T)d\tau = e^{-sT}\int_0^\infty e^{-s\tau}f(\tau)d\tau.$$

Prema tome je

$$F(s) = \int_0^T e^{-st}f(t)dt + e^{-sT}F(s),$$

pa na osnovu ovoga dobijamo tvrdnju. □

[2]Formulacija i dokaz Fubini-jeve teoreme se nalazi u [3]

1.4. Suština Laplace-ove transformacije

Definicija 1.4.1. Orginalom *se naziva svaka kompleksna funkcija realne promjenjive $t \mapsto f(t)$ koja ispunjava slijedeće uslove:*
i) Za svako $t < 0$ je $f(t) = 0$. Funkcija koja ispunjava ovaj uslov se naziva kauzalna funkcija.
ii) Funkcija f je integrabilna na svakom konačnom intervalu koji pripada oblasti $[0, a]$, gdje je $a < \infty$.
iii) Funkcija f je eksponencijalno ograničena.

Definicija 1.4.2. *Neka je funkcija $t \mapsto f(t)$ apsolutno integrabilna na intervalu $(-\infty, +\infty)$. Fourier-ova transformacija ove funkcije je*

$$(\mathcal{F}f)(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ity} f(t)dt. \tag{1.6}$$

Njena inverzna Fourier-ova transformacija glasi:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity} (\mathcal{F}f)(y)dy.$$

Ako je f kauzalna funkcija, tada je donja granica integrala (1.6) umjesto $-\infty$ jednaka 0. Pomnožimo podintegralnu funkciju jednakosti (1.6) sa funkcijom e^{-xt}, gdje je x realni parametar izabran tako da integral (1.1) konvergira za svaki original $f(t)$. Na taj način Fourier-ova transformacija od $e^{-xt} f(t)$, gdje je $f(t)$ original, jednaka je

$$\int_0^{+\infty} e^{-ity} e^{-xt} f(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-(x+iy)t} f(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt = F(s)$$

gdje je $s = x + iy$. Do inverzne Laplace-ove transformacije dolazimo pomoću inverzne Fourier-ove transformacije. Imamo da je

$$e^{-xt} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity} F(s)dy.$$

Odavde je

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt} e^{ity} F(s)dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{st} F(s)dy.$$

Ako uvedemo smjenu $s = x + iy$, za koju je $ds = idy$, dobijamo

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{st} F(s)ds. \tag{1.7}$$

Ovo je inverzna Laplace-ove transformacija i integral na desnoj strani jednakosti (1.7) naziva se **Bromwich – ov** integral.

1.5. Inverzna Laplace-ova transformacija

Definicija 1.5.1. *Vrijednost* $\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A} f(t)dt$ *se naziva Cauchy-jeva glavna vrijednost integrala* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$*, pod uslovom da ovaj integral postoji.*

Teorema 1.5.1. *(Fundamentalna teorema Fourier-ovih integrala) Neka je* f *apsolutno neprekidna i dio po dio glatka funkcija na* $\mathbb{R}$ *i neka je* $(\mathcal{F}f)(y)$ *Fourier-ova transformacija od* f*. Tada integral (1.6) konvergira za svako* $t \in \mathbb{R}$ *kao Cauchy-jeva glavna vrijednost i vrijedi*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity}(\mathcal{F}f)(y)dy = \frac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-)), \tag{1.8}$$

gdje je $f(t^+) = \lim_{h\to 0} f(t+h)$ *i* $f(t^-) = \lim_{h\to 0} f(t-h)$*.*

Dokaz. Vidjeti u [2]. □

Teorema 1.5.2. *Neka je* $f(t)$ *dio po dio glatka (i kauzalna) funkcija eksponencijalnog reda* $\alpha \in \mathbb{R}$ *i neka je* $F(s)$ *Laplace-ova transformacija od* $f(t)$*. Onda za* $t \geq 0$ *i* $s = x + iy$ *takvo da je* $Re(s) > \alpha$ *vrijedi*

$$\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} F(s)e^{st}dy = \frac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-)).$$

Dokaz. Definišimo funkciju $g(t) = u_a(t)f(t)e^{-xt}$ $(a \geq 0)$. Primjetimo da je funkcija $g(t)$ apsolutno integrabilna, jer je $f(t)$ eksponencijalnog reda α. Odatle zaključujemo da Fourier-ova transformacija od $g(t)$ postoji za $Re(s) > \alpha$ i

$$(\mathcal{F}g)(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ity}u_a(t)f(t)e^{-xt}dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-(x+iy)t}f(t)dt = F(s).$$

Kako je f dio po dio glatka, onda je i g dio po dio glatka i apsolutno integrabilna. Prema tome, Teoremu 1.5.1 možemo primjeniti na funkciju g. Kako je $(\mathcal{F}g)(y) = F(s)$ iz (1.8) dobijamo

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(x+iy)e^{ity}dy = \frac{1}{2}(g(t^+) + g(t^-)).$$

Za $t \geq 0$ imamo $g(t^+) = u_a(t^+)f(t^+)e^{-xt} = f(t^+)e^{-xt}$ i $g(t^-) = f(t^-)e^{-xt}$, što nam daje

$$\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} F(s)e^{ity}dy = \frac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-))e^{-xt}.$$

Ako pomnožimo lijevu i desnu stranu prethodne nejednakosti sa e^{xt}, dobijamo tvrdnju koja važi za $Re(s) > \alpha$ i $t \geq 0$. □

Teorema 1.5.3. *(Laplace-ova transformacija je 1-1) Neka su $f(t)$ i $g(t)$ dio po dio neprekidne funkcije eksponencijalnog reda α i neka su $F(s)$ i $G(s)$ Laplace-ove transformacije od $f(t)$ i $g(t)$ respektivno. Tada, ako je $F(s) = G(s)$ u poluravni $Re(s) > \alpha$, onda je $f(t) = g(t)$ u svim tačkama u kojima su $f(t)$ i $g(t)$ neprekidne.*

Dokaz. Neka je $t \in \mathbb{R}$ tačka u kojoj su $f(t)$ i $g(t)$ neprekidne. Kako je $F(s) = G(s)$ za $Re(s) > \alpha$, iz Teoreme 1.5.1 dobijamo da je

$$f(t) = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} F(s)e^{st}dy = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} G(s)e^{st}dy = g(t).$$

□

Definicija 1.5.2. *Neka je funkcija $f(z)$ regularna u prstenu $0 < |z-z_0| < r$ i nije definisana u tački $z = a$, $(a \neq 0)$. Tada se a naziva* **izolovanim** *singularitetom funkcije f.*

Definicija 1.5.3. *Izolovani singularitet a funkcije f se naziva:*
i) otklonjivim , ako $\lim_{z\to a} f(z)$ postoji i konačan je.
ii) polom, ako $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$.
iii) esencijalnim singularitetom, ako $\lim_{z\to a} f(z)$ ne postoji.

Definicija 1.5.4. *Ako analitičku funkciju $z \mapsto f(z)$ razvijemo u* **Laurent – ov** *red u okolini njenog pola ili esencijalnog singulariteta, tj.*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(z-a)^n}$$

onda se koeficijent B_1 uz $\frac{1}{z-a}$ naziva ostatkom funkcije f u tački $z = a$. Ostatak se označava sa $res_{z=a}f(z)$ ili $res(f(z), z = a)$.

Teorema 1.5.4. *(Cauchy-jeva teorema o ostacima) Ako je L kontura koja obuhvata polove ili esencijalne singularitete z_k, $(k = 1, 2, ..., n)$ uniformne funkcije $z \mapsto f(z)$, tada je*

$$\oint_L f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res(f(z), z = z_k).$$

Dokaz. Vidjeti u [5]. □

Osnovna osobina inverzne Laplace-ove transformacije je linearnost koju možemo dokazati po definiciji. U nastavku ćemo se baviti nekim osobinama inverzne Laplace-ove transformacije.

Teorema 1.5.5. *Ako se funkcija $s \mapsto F(s)$ može razložiti u Laurent-ov red*

$$F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{s^{k+1}}, \tag{1.9}$$

tada je

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{t^k}{k!}, \tag{1.10}$$

gdje je $\mathcal{L}^{-1}(F(s))$ inverzna Laplace-ova transformacija od $F(s)$.

Dokaz. Primjenimo jednakost $\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$, odnosno $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^{n+1}}) = \frac{t^n}{n!}$ na (1.9). Zamjenom mjesta sume i inverzne Laplace-ove transformacije dolazimo do jednakosti (1.10). □

Teorema 1.5.6. *Ako je $F(s) = \frac{Q_m(s)}{P_n(s)}$, gdje su $Q_m(s)$ i $P_n(s)$ polinomi ($m < n$) i ako $P_n(s)$ ima proste nule $s_1, s_2, ..., s_n$, tada je*

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{Q_m(s_k)}{P_n'(s_k)} e^{s_k t}. \tag{1.11}$$

Formula (1.11) poznata je kao Heaviside-ova formula.

Dokaz. Primjenom Bromwich-ovog integrala i Cauchy-jeve teoreme o ostacima imamo

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} res(\frac{Q_m(s)}{P_n(s)} e^{st}, s = s_k).$$

Kako je

$$\begin{aligned} res(\frac{Q_m(s)}{P_n(s)} e^{st}, s = s_k) &= \lim_{s \to s_k} (s - s_k) \frac{Q_m(s)}{P_n(s)} e^{st} = \\ &= Q_m(s_k) e^{s_k t} \lim_{s \to s_k} \frac{s - s_k}{P_n(s)} = \\ &= \frac{Q_m(s_k) e^{s_k t}}{P_n'(s_k)} \end{aligned}$$

gdje je na posljednji limes primjenjeno L'Hospital-ovo pravilo. □

Postoji i opštija formula od ove. Pretpostavimo da je $s_1 = s_2 = ... = s_\vartheta = a$, tj. $s = a$ je nula polinoma $P_n(s)$ reda ϑ. Neka su ostale nule $s_{\vartheta+1}, ..., s_n$ proste. Tada se racionalna funkcija $\frac{Q_m(s)}{P_n(s)}$ može prikazati u obliku

$$\frac{Q_m(s)}{P_n(s)} = \frac{c_1}{s-a} + ... + \frac{c_k}{(s-a)^k} + ... + \frac{c_{\vartheta-1}}{(s-a)^{\vartheta-1}} + \frac{c_\vartheta}{(s-a)^\vartheta} + \sum_{k=\vartheta+1}^{n} \frac{Q_m(s_k)}{P_n'(s_k)} \cdot \frac{1}{(s-s_k)}.$$

Prethodnu jednakost pomnožimo sa $(s-a)^{\vartheta}$, a zatim diferencirajmo $\vartheta - k$ puta i pustimo da $s \to a$. Tada dobijamo

$$c_k = \frac{1}{(\vartheta - k)!} \lim_{s \to a} \frac{d^{\vartheta - k}}{d_s^{\vartheta - k}} ((s-a)^{\vartheta} \frac{Q_m(s)}{P_n(s)}).$$

Inverzna transformacija racionalne funkcije $\frac{Q_m(s)}{P_n(s)}$ daje

$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{Q_m(s)}{P_n(s)}) = \sum_{k=1}^{\vartheta} \frac{c_k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{at} + \sum_{k=\vartheta+1}^{n} \frac{Q_m(s_k)}{P_n'(s_k)} e^{s_k t}.$$

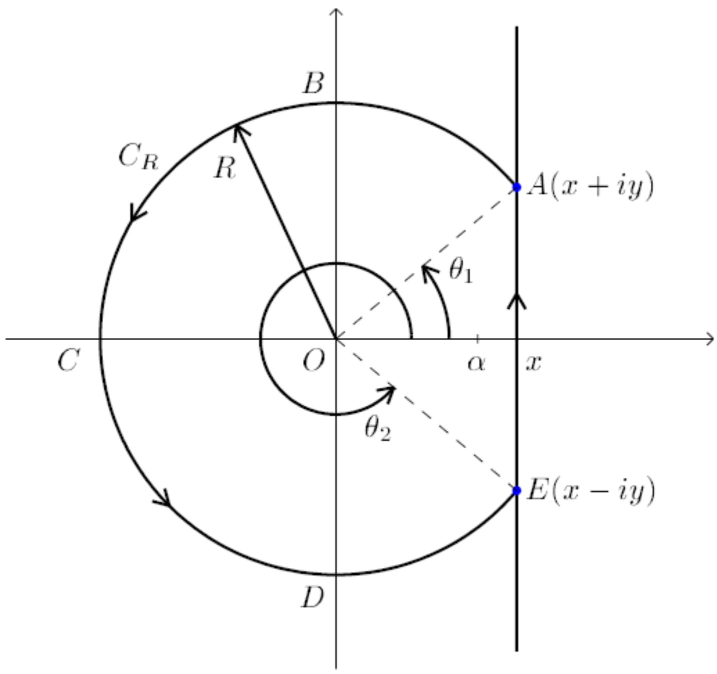
Lema 1.5.1. *Pretpostavimo da za s na konturi kruga C_R (Slika 1.1), funkcija $F(s)$ zadovoljava*

$$|F(s)| \leq \frac{M}{|s|^p}, \quad \text{za neko } p > 0 \text{ i sve } R > R_0.$$

Tada je

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} e^{ts} F(s) ds = 0 \qquad (t > 0).$$

Dokaz. U tačkama $s = Re^{i\theta}$ na C_R je $|e^{ts}| = e^{tR\cos\theta}$. Prema tome, za dovoljno



Slika 1.1: Figura 1

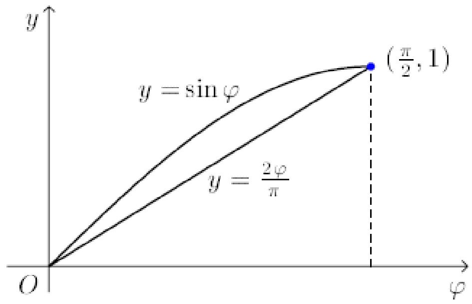
veliko R takvo da su svi polovi funkcije $F(s)$ u unutrašnjosti konture $\Gamma_R = ABCDEA$, funkcija $F(s)$ će biti neprekidna na C_R i $|F(s)| \leq \frac{M}{R^p}$, za dovoljno veliko R. Otuda dobijamo da na kružnom luku BCD vrijedi

$$|\int_{BCD} e^{st} F(s) ds| \leq \int_{BCD} |e^{ts}||F(s)||ds| \leq \frac{M}{R^{p-1}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{tR\cos\theta} d\theta \; .$$

Uvodeći smjenu $\theta = \varphi + \frac{\pi}{2}$, dobijamo

$$|\int_{BCD} e^{st} F(s) ds| \leq \frac{M}{R^{p-1}} \int_0^{\pi} e^{-tR\sin\varphi} d\varphi = \frac{2M}{R^{p-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-tR\sin\varphi} d\varphi. \tag{1.12}$$

Posljednja jednakost je posljedica toga da je funkcija $\sin\varphi$ simetrična oko $\varphi = \frac{\pi}{2}$, za $0 \leq \varphi \leq \pi$. Da bismo odredili granicu za integral (1.12), posmatrajmo grafik funkcije $y = \sin\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Kriva od tačke $(0,0)$ do tačke $(\frac{\pi}{2}, 1)$ ima nagib



Slika 1.2: Figura 2

$\beta = \frac{2}{\pi} < 1$, pa na osnovu toga zaključujemo da prava $\frac{2}{\pi}\varphi$ leži ispod krive $y = \sin\varphi$, tj.

$$\sin\varphi \geq \frac{2}{\pi}\varphi, \qquad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Zbog toga jednačina (1.12) daje,

$$|\int_{BCD} e^{st} F(s) ds| \leq \frac{2M}{R^{p-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2Rt\varphi}{\pi}} d\varphi = \frac{2M}{R^{p-1}} (-\frac{\pi}{2Rt} e^{-\frac{2Rt\varphi}{\pi}} |_0^{\frac{\pi}{2}}) =$$

$$= \frac{M\pi}{R^p t}(1 - e^{-Rt}) \to 0 \;\; kad \;\; R \to \infty.$$

Iznad luka AB imamo da je $|e^{ts}| \leq e^{tx} = c$, za fikcno $t > 0$ i dužina luka AB, u oznaci $l(AB)$, ostaje ograničena kad $R \to \infty$. Prema tome je

$$|\int_{AB} e^{st} F(s) ds| \leq \frac{cMl(AB)}{R^p} \to 0 \quad kad \;\; R \to \infty.$$

Na sličan način pokazuje se da

$$|\int_{DE} e^{st} F(s) ds| \to 0 \quad kad \;\; R \to \infty.$$

Iz ovog zaključujemo da je

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} e^{st} F(s) ds = 0.$$

□

Teorema 1.5.7. *Pretpostavimo da je f neprekidna i eksponencijalno ograničena na $[0,\infty)$, a f' dio po dio neprekidna na $[0,\infty)$. Ako je $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$, za $Re(s) = x > \alpha$ i zadovoljava*

$$|F(s)| \leq \frac{M}{|s|^p}, \quad p > 0$$

za sve $|s|$ dovoljno velike i neko p i ako je $F(s)$ analitička na $\mathbb{C}$ osim u konačno mnogo polova $z_1, z_2, ..., z_n$, tada je

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{st}F(s)ds = \sum_{k=1}^{n} res(e^{st}F(s), s = z_k). \tag{1.13}$$

Dokaz. Po Teoremi 1.1.1, $F(s)$ konvergira apsolutno za $Re(s) = x > \alpha$, tj.

$$\int_0^\infty |e^{-st}f(t)|dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xt}|f(t)|dt < \infty, \quad x > \alpha.$$

Iz toga zaključujemo da je funkcija $g(t) = e^{-xt}f(t)$ apsolutno integrabilna, pa na osnovu Teoreme 1.5.1 je

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity}(\mathcal{F}g)(y)dy, \quad t > 0.$$

Ako pomnožimo lijevu i desnu stranu prethodne jednakosti sa e^{xt} dobijamo

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{st}(\mathcal{F}g)(y)dy, \quad t > 0.$$

Ako uvedemo smjenu $s = x + iy$, $x > \alpha$, prethodna jednačina postaje

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{st}F(s)ds = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{x-iy}^{x+iy} e^{st}F(s)ds.$$

Da bismo dokazali tvrdnju, uzmimo C_R radijusa R i centra u koordinatnom početku. Tada za neko s koje se nalazi na konturi $\Gamma_R = ABCDEA$ vrijedi

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} e^{st}F(s)ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} e^{st}F(s)ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{EA} e^{st}F(s)ds. \tag{1.14}$$

Kako je $F(s)$ analitička, za $Re(s) = x > \alpha$, tada svi singulariteti funkcije $F(s)$ moraju ležati lijevo od prave $Re(s) = \alpha$ (Bromwich-ova linija). Ako je $F(s)$ analitička za $Re(s) < \alpha$ osim u konačno mnogo polova $z_1, z_2, ..., z_n$, onda je $F(s)$ oblika $F(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}$, gdje su $Q(s)$ i $P(s)$ polinomi. Uzimajući R dovoljno veliko, svi polovi funkcije $F(s)$ će ležati unutar konture Γ_R. Na osnovu Cauchy-jeve teoreme o ostacima dobijamo

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} e^{st}F(s)ds = \sum_{k=1}^{n} res(e^{st}F(s), s = z_k). \tag{1.15}$$

Iz (1.14) i (1.15) dobijamo

$$\sum_{k=1}^{n} res(e^{st}F(s), s = z_k) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} e^{st}F(s)ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{x-iy}^{x+iy} e^{st}F(s)ds.$$

Iz Leme 1.5.1 i puštajuči $R \to \infty$ dobijamo tvrdnju. □

Napomena 1.5.1. *Ako funkcija $F(s)$ iz prethodne teoreme ima beskonačno mnogo polova $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ koji se nalaze lijevo od linije $Re(s) = x_0 > 0$ i $|z_1| \leq |z_2| \leq ...$, $|z_k| \to \infty$ kad $k \to \infty$. Tada vrijedi*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x_0-i\infty}^{x_0+i\infty} e^{st}F(s)ds = \sum_{k=1}^{\infty} res(e^{st}F(s), s = z_k).$$

1.6. Gama funkcije

Definicija 1.6.1. *Funkcija $p \mapsto \Gamma(p)$, definisana pomoću integrala*

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1}e^{-x}dx, \qquad (p > 0)$$

naziva se (Euler-ova) **gama** *funkcija.*

Posmatrajmo Laplace-ovu transformaciju funkcije t^{ϑ} koja postoji za $\vartheta > -1$ i glasi

$$\mathcal{L}(t^{\vartheta}) = \int_0^{\infty} e^{-st}t^{\vartheta}dt.$$

Uvodeći smjenu $x = st$, $(s > 0)$, dobijamo

$$\mathcal{L}(t^{\vartheta}) = \int_0^{\infty} e^{-x}(\frac{x}{s})^{\vartheta}\frac{1}{s}dx = \frac{1}{s^{\vartheta+1}}\int_0^{\infty} e^{-x}x^{\vartheta}dx.$$

Koristeći Gama funkcije, prethodna jednakost postaje

$$\mathcal{L}(t^{\vartheta}) = \frac{\Gamma(\vartheta+1)}{s^{\vartheta+1}}, \quad \vartheta > -1, \ s > 0.$$

Koristeći jednakost $\mathcal{L}(t^{\vartheta}) = \frac{\vartheta!}{s^{\vartheta+1}}$ (pogledati Teoremu 1.2.5) i stavljajući $\vartheta = n = 0, 1, 2, ...$, dobijamo $\Gamma(n+1) = n!$.

Teorema 1.6.1. *Ako*

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+\vartheta} \quad (\vartheta > -1) \tag{1.16}$$

konvergira za sve $t \geq 0$ i $|a_n| \leq K\frac{\alpha^n}{n!}$, pri čemu su $K, \alpha > 0$ i jednakost (1.16) važi za sve dovoljno velike n. Tada

$$\mathcal{L}(f(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n\Gamma(n+\vartheta+1)}{s^{n+\vartheta+1}} \quad (Re(s) > \alpha).$$

Dokaz. Vidjeti u [7]. □

Teorema 1.6.2. *Ako*

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{s^{n+1}} \tag{1.17}$$

konvergira za $|s| > R$*, tada je*

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n t^n}{n!}, \quad (t \geq 0). \tag{1.18}$$

Dokaz. Primjetimo da ako red (1.17) konvergira za $|s| > R$, onda je

$$|\frac{a_n}{s^n}| \leq K,$$

za neku konstantu $K > 0$ i sve n. Tada za $|s| = r > R$ vrijedi

$$|a_n| \leq Kr^n. \tag{1.19}$$

Vrijedi i

$$r^n < \frac{2^n}{n} r^n = \frac{\alpha^n}{n}, \tag{1.20}$$

gdje je $\alpha = 2r$. Kako je $\Gamma(n+\vartheta+1) \geq \Gamma(n)$ za $\vartheta > -1$ i $n > 1$, pa (1.19) i (1.20) daju

$$\frac{|a_n|}{\Gamma(n+\vartheta+1)} \leq \frac{K\alpha^n}{n\Gamma(n)} = \frac{K\alpha^n}{n!}.$$

Množeći lijevu i desnu stranu prethodne jednakosti sa t^n, $t \geq 0$, dobijamo

$$|\frac{a_n}{\Gamma(n+\vartheta+1)}|t^n \leq \frac{K(\alpha t)^n}{n!}.$$

Kako red $e^{\alpha t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^n}{n!}$ konvergira, onda red

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\Gamma(n+\vartheta+1)} t^{n+\vartheta} \tag{1.21}$$

konvergira apsolutno. Iz ovoga vidimo da je funkcija f eksponencijalno ograničena i savljajući $\vartheta = 0$ u (1.21) dobijamo (1.18). □

1.7. Konvolucija Laplace-ove transformacije

Neka su funkcije $f(t)$ i $g(t)$ definisane za $t > 0$.

Definicija 1.7.1. Konvolucija *funkcija f i g je data pomoću integrala*

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

koji postoji ako su f i g dio po dio neprekidne.

Konvolucija se u opštem slučaju definiše pomoću integrala

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Ako su f i g originali, za $\tau < 0$ je $f(\tau) = 0$, a za $\tau > t$ je $g(t-\tau) = 0$, tako da granice integrala ostaju 0 i t.

Osnovne osobine konvolucije su:
i) $f * g = g * f$ (komutativnost)
ii) $c(f * g) = f * cg = cf * g$, c je konstanta
iii) $f * (g * h) = (f * g) * h$ (asocijativnost)
iv) $f * (g + h) = f * g + f * h$ (distributivnost).
Osobine (i), (ii) i (iv) lako se provjeravaju. Provjerimo osobinu (iii).

$$[f * (g * h)](t) = \int_0^t f(\tau)(g * h)(t-\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)(\int_0^{t-\tau} g(x)h(t-\tau-x)dx)d\tau =$$

$$= \int_0^t (\int_\tau^t f(\tau)g(u-\tau)h(t-u)du)d\tau = \int_0^t (\int_0^u f(\tau)g(u-\tau)d\tau)h(t-u)du = [(f*g)*h](t).$$

U prethodnu jednakost uveli smo smjenu $x = u - \tau$.

Teorema 1.7.1. *(Konvoluciona teorema) Ako su f i g dio po dio neprekidne na $[0, \infty)$ i eksponencijalno ograničene, onda je*

$$\mathcal{L}[(f * g)(t)] = \mathcal{L}(f(t)) \cdot \mathcal{L}(g(t)) \qquad (Re(s) > \alpha).$$

Dokaz.

$$\mathcal{L}(f(t)) \cdot \mathcal{L}(g(t)) = (\int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)d\tau) \cdot (\int_0^\infty e^{-su} g(u)du) =$$

$$= \int_0^\infty (\int_0^\infty e^{-s(\tau+u)} f(\tau)g(u)du)d\tau.$$

Uvedimo smjenu $t = \tau + u$ i primjetimo da je τ fiksno u unutrašnjosti integrala. Na osnovu toga imamo

$$\mathcal{L}(f(t)) \cdot \mathcal{L}(g(t)) = \int_0^\infty (\int_\tau^\infty e^{-st} f(\tau) g(t-\tau) dt) d\tau.$$

Ako definišemo $g(t) = 0$ za $t < 0$, onda je $g(t-\tau) = 0$ za $t < \tau$, pa dobijamo

$$\mathcal{L}(f(t)) \cdot \mathcal{L}(g(t)) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-st} f(\tau) g(t-\tau) dt d\tau.$$

Na osnovu pretpostavke, Laplace-ovi integrali funkcija f i g konvergiraju apsolutno i odatle dobijamo da integral

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |e^{-st} f(\tau) g(t-\tau)| dt d\tau$$

konvergira. Ovo nam omogućava da zamjenimo redoslijed integracije, pa je

$$\mathcal{L}(f(t)) \cdot \mathcal{L}(g(t)) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-st} f(\tau) g(t-\tau) dt d\tau = \int_0^\infty (\int_0^t e^{-st} f(\tau) g(t-\tau) d\tau) dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} (\int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau) dt = \mathcal{L}((f * g)(t)).$$

□

1.8. Beta funkcije

Definicija 1.8.1. *Funkcija* $(p, q) \mapsto B(p, q)$ *definisana pomoću*

$$B(p, q) = \int_0^1 u^{p-1} (1-u)^{q-1} du \qquad (p, q > 0),$$

naziva se **beta** *funkcija.*

Ako je $f(t) = t^{p-1}$, $g(t) = t^{q-1}$, $p, q > 0$, onda je

$$(f * g)(t) = \int_0^t \tau^{p-1} (t-\tau)^{q-1} d\tau.$$

Uvodeći smjenu $\tau = ut$, dobijamo

$$(f * g)(t) = t^{p+q-1} \int_0^1 u^{p-1} (1-u)^{q-1} du.$$

Tada na osnovu Teoreme o konvoluciji, dobijamo

$$\mathcal{L}(t^{p+q-1} B(p, q)) = \mathcal{L}(t^{p-1}) \mathcal{L}(t^{q-1}) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{s^{p+q}}.$$

Dakle,

$$t^{p+q-1} B(p, q) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{s^{p+q}}) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q) t^{p+q-1}}{\Gamma(p+q)},$$

pa na osnovu toga dobijamo Euler-ovu formulu za beta funkciju

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

1.9. Bessel-ova funkcija

Definicija 1.9.1. *Bessel-ova funkcija je rješenje Bessel-ove jednačine reda* ϑ

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2}+t\frac{dy}{dt}+(t^2-\vartheta^2)y=0$$

i definisana je pomoću reda

$$J_\vartheta(at)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(at)^{2n+\vartheta}}{2^{2n+\vartheta}n!(n+\vartheta)!}. \tag{1.22}$$

Za $\vartheta=0$ jednačina (1.22) postaje

$$J_0(at)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(at)^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}t^{2n}.$$

$J_0(at)$ je ograničena funkcija i

$$|a_{2n}|=\frac{|a|^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}\leq\frac{|a|^{2n}}{(2n)!}.$$

Uzimajući $\alpha=|a|$, prema Teoremi 1.2.5 dobijamo

$$\mathcal{L}(J_0(at))=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(a)^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}\mathcal{L}(t^{2n})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(a)^{2n}(2n)!}{2^{2n}(n!)^2s^{2n+1}}=$$

$$=\frac{1}{s}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}(\frac{a^2}{s^2})^n=\frac{1}{s}\cdot\frac{s}{\sqrt{s^2+a^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}\quad(Re(s)>|a|).$$

1.10. Integralne jednačine

Definicija 1.10.1. *Jednakosti oblika*

$$f(t)=g(t)+\int_0^t k(t,\tau)f(\tau)d\tau$$

i

$$g(t)=\int_0^t k(t,\tau)f(\tau)d\tau$$

nazivaju se integralne jednačine, gdje je $f(t)$ *nepoznata funkcija.*

Kada je jezgro $k(t,\tau)$ oblika

$$k(t,\tau)=k(t-\tau),$$

gornji integrali predstavljaju konvolucije. Ako su g i k poznate funkcije, onda je po konvolucionoj teoremi

$$\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g) + \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(k),$$

odnosno

$$\mathcal{L}(f) = \frac{\mathcal{L}(g)}{1 - \mathcal{L}(k)}.$$

Posmatrajmo sada konvoluciju funkcija $f'(t)$ i $g(t)$. Laplace-ova transformacija konvolucije glasi

$$\mathcal{L}(\int_0^t f'(\tau)g(t-\tau)d\tau) = \mathcal{L}(f'(t))\mathcal{L}(g(t)) = (sF(s) - f(0))G(s) =$$

$$= sF(s)G(s) - f(0)G(s).$$

Ako član $f(0)G(s)$ prebacimo na lijevu stranu jednačine, dobijemo jedan od DuHamel-ovih integrala

$$\mathcal{L}(f(0)g(t) + \int_0^t f'(\tau)g(t-\tau)d\tau) = sF(s)G(s).$$

1.11. Laplace-ova transformacija distribucija

Neka je $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} | \ f\ je\ beskonačno\ diferencijabilna\}$.

Definicija 1.11.1. *Funkcija $f \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$ se naziva brzo opadajuća funkcija, ako je za svako m i $n \in \mathbb{N}$ funkcija $t^n f^{(m)}$ ograničena na $\mathbb{R}$, tj. postoji konstanta $M > 0$ takva da je $|t^n f^{(m)}| < M$, za sve $t \in \mathbb{R}$.*

Prostor brzo opadajućih funkcija, označićemo sa $\mathcal{S}$. Sada kada smo uveli pojam brzo opadajućih funkcija, možemo uvesti i pojam distribucija.

Definicija 1.11.2. Distribucija *T je linearno preslikavanje koje svakoj brzo opadajućoj funkciji ϕ dodjeljuje kompleksan broj. Djelovanje distibucije T na brzo opadajuću funkciju ϕ označićemo sa $\langle T, \phi \rangle$.*

Dakle, distibucija je preslikavanje $T : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ koje zadovoljava:
i) $\langle T, c\phi \rangle = c\langle T, \phi \rangle$
ii) $\langle T, \phi_1 + \phi_2 \rangle = \langle t, \phi_1 \rangle + \langle T, \phi_2 \rangle$
gdje su $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{S}$ i $c \in \mathbb{C}$.

Definicija 1.11.3. *Neka su S i T distribucije i za $r \in \mathbb{R}$ definišimo funkciju $\psi(r)$ sa $\psi(r) = \langle T(t), \phi(t+r) \rangle$. Ako za svako $\phi \in \mathcal{S}$, funkcija $\psi(r) \in \mathcal{S}$, tada je konvoluvija distribucija S i T definisana sa*

$$\langle S * T, \phi \rangle = \langle S(r), \psi(r) \rangle = \langle S(r), \langle T(t), \phi(t+r) \rangle \rangle.$$

Iz ove definicije zaključujemo da vrijedi slijedeća lema.

Lema 1.11.1. *Ako su distribucije T i S definisane na $\mathcal{S}$, tada su $S * T$ i $T * S$ definisane na prostoru $\mathcal{S}$.*

Slijedeća definicija nam omogućava da predstavimo distribuciju pomoću integrala.

Definicija 1.11.4. *Ako je funkcija $f(t)$ apsolutno neprekidna na $(-\infty, \infty)$, onda definišimo distribuciju T_f sa*

$$\langle T_f, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi(t)dt \tag{1.23}$$

za sve $\phi \in \mathcal{S}$.

Ako je funkcija f u (1.23) kauzalna, izaberimo $\phi \in \mathcal{S}$ takvo da je $\phi(t) = 0$, za sve $t \geq 0$. Tada (1.23) postaje

$$\langle T_f, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi(t)dt = \int_{0}^{\infty} f(t)\phi(t)dt = 0.$$

Definicija 1.11.5. *Neka je T distibucija. Kažemo da je $T = 0$ na $(-\infty, 0)$, kada je $\langle T, \phi \rangle = 0$ za sve $\phi \in \mathcal{S}$ takve da je $\phi(t) = 0$ za sve $t \geq 0$. Ovakvu distibuciju nazivamo kauzalna distibucija.*

Da bismo definisali Laplace-ovu transformaciju distibucija, funkcija e^{-st} treba pripadati prostoru $\mathcal{S}$, što nije tačno. Dakle u nastavku ćemo posmatrati distibucije na prostoru $\mathbb{C}^{\infty}(\mathbb{R})$.

Definicija 1.11.6. *Neka je T kauzalna distribucija na prostoru $\mathbb{C}^{\infty}(\mathbb{R})$. Tada je Laplace-ova transformacija distribucije T definisana kao kompleksna funkcija*

$$U(s) = \langle T(t), e^{-st} \rangle.$$

Teorema 1.11.1. *(Konvolucija distibucija) Neka su S i T kauzalne distibucije definisane na prostoru $\mathbb{C}^{\infty}(\mathbb{R})$. Tada je i $S * T$ kauzalna distibucija definisana na prostoru $\mathbb{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ i vrijedi*

$$\mathcal{L}(S * T) = \mathcal{L}(S) \cdot \mathcal{L}(T). \tag{1.24}$$

Dokaz. Kako su S i T kauzalne distibucije, onda je i $S * T$ kauzalna distribucija. Na osnovu Leme (1.11.1), zaključujemo da $S * T \in \mathbb{C}^{\infty}(\mathbb{R})$. Dokažimo još da vrijedi (1.24). Za $s \in \mathbb{C}$, po definiciji je

$$(\mathcal{L}(S * T))(s) = \langle (S * T)(t), e^{-st} \rangle = \langle S(\tau), \langle T(t), e^{-s(t+\tau)} \rangle \rangle.$$

Za fiksno τ, kompleksan broj $e^{-s\tau}$, ne zavisi od t, pa vrijedi

$$\mathcal{L}(S * T)(s) = \langle S(\tau), \langle T(t), e^{-st} \rangle e^{-s\tau} \rangle.$$

Dalje, $\langle T(t), e^{-st} \rangle$, za fiksno t, je kompleksan broj koji ne zavisi od τ, pa vrijedi

$$(\mathcal{L}(S * T))(s) = \langle S(\tau), e^{-s\tau} \rangle \langle T(t), e^{-st} \rangle.$$

□

1.12. Riemann-Stieltjes-ov integral

Definicija 1.12.1. *Neka je data funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i neka je I interval na realnoj pravoj. Veličinu*

$$V(f, I) = \sup \sum_{j=1}^{N} |f(x_j) - f(x_{j-1})|$$

sa supremumom uzetim po svim izborima tačaka $x_0 < x_1 < ... < x_N$ unutar intervala I, zovemo **varijacijom** *funkcije f na intervalu I.*

Formula

$$V_f(x) = V(f, (-\infty, x])$$

za proizvoljno $x \in \mathbb{R}$ definiše tzv. funkciju varijacije V_f funkcije f. Postoji $\lim_{x\to\infty} V_f(x)$ u $\overline{\mathbb{R}}$[3] koju nazivamo totalnom varijacijom funkcije f i označavamo sa $V(f)$. Ukoliko je $V(f) < +\infty$, onda kažemo da je f **funkcija ograničene varijacije**. Skup svih funkcija ograničene varijacije označavamo sa BV.

Neka je φ funkcija ograničene varijacije na $[a, b]$ i f kompleksna funkcija na $[a, b]$.

Definicija 1.12.2. *Za datu podjelu $P : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ intervala $[a, b]$ i za izbor tačaka $t = (t_1, ..., t_n)$ takav da $t_j \in [x_{j-1}, x_j] = \Delta_j$ za $1 \leq j \leq n$ definišimo Riemann-Stieltjes-ovu sumu*

$$\sigma(P, t, \varphi, f) = \sum_{j=1}^{n} f(t_j)[\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})].$$

[3] $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \bigcup (-\infty, \infty)$

Ukoliko postoji kompleksan broj I takav da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da je $|\sigma(P, t, \varphi, f) - I| < \varepsilon$ kad god je dijametar podjele P u oznaci $d(P) = \max_{1\leq j\leq n}(x_j - x_{j-1}) < \delta$, kažemo da je funkcija f **Riemann – Stieltjes integrabilna** *po funkciji φ.*

Jasno je da je u tom slučaju kompleksan broj I jedinstveno određen. Njega zovemo Riemann-Stieltjes-ovim integralom funkcije f po funkciji ograničene varijacije φ i označavamo ga sa $\int_a^b f d\varphi(x)$ ili sa $\int_a^b f d\varphi$.

Napomena 1.12.1. *U slučaju $\varphi(x) = x$, Riemann-Stieltjes-ov integral se svodi na Riemann-ov integral.*

Teorema 1.12.1. *(Osobine Riemann-Stieltjes-ovog integrala)*
i) Ako $\int_a^b f d\varphi_1$ i $\int_a^b f d\varphi_2$ postoje i $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, onda je f Rimenn-Stieltjes integrabilna u odnosu na φ i vrijedi

$$\int_a^b f d\varphi = \int_a^b f d\varphi_1 + \int_a^b f d\varphi_2.$$

ii) Ako $\int_a^b f_1 d\varphi$ i $\int_a^b f_2 d\varphi$ postoje i $f = f_1 + f_2$, onda je f Rimenn-Stieltjes integrabilna u odnosu na φ i

$$\int_a^b f d\varphi = \int_a^b f_1 d\varphi + \int_a^b f_2 d\varphi.$$

iii) Ako $\int_a^b f d\varphi$ postoji, onda za neku konstantu c vrijedi

$$\int_a^b (cf) d\varphi = c\int_a^b f d\varphi.$$

iv) Ako $\int_a^c f d\varphi$ i $\int_c^b f d\varphi$ postoje, $a < c < b$, onda $\int_a^b f d\varphi$ postoji i vrijedi

$$\int_a^b f d\varphi = \int_a^c f d\varphi + \int_c^b f d\varphi.$$

Teorema 1.12.2. *Ako su f, φ, φ' neprekidne na $[a, b]$, tada $\int_a^b f d\varphi$ postoji i vrijedi*

$$\int_a^b f(t) d\varphi(t) = \int_a^b f(t)\varphi'(t) dt.$$

Dokaz. Uzmimo proizvoljno $\varepsilon > 0$ i pokažimo da za $\max_{1\leq j\leq n}(t_j - t_{j-1})$ dovoljno malo vrijedi

$$|\sum_{j=1}^{n} f(x_j)[\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})] - \int_a^b f(t)\varphi'(t) dt| < \varepsilon.$$

Na osnovu teoreme o srednjoj vrijednosti, sumu na lijevoj strani prethodne nejednakosti izrazićemo u obliku

$$\sum_{j=1}^{n} f(x_j)[\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})] = \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\varphi'(\xi_j)(t_j - t_{j-1}),$$

za neko $\xi_j \in [t_{j-1}, t_j]$. Funkcija f je neprekidna funkcija na $[a, b]$, pa vrijedi $|f(t)| \leq M$, $t \in [a, b]$. Funkcija φ' je neprekidna na $[a, b]$, pa je i uniformno neprekidna na $[a, b]$. Zbog toga postoji $\delta > 0$ takvo da za $|\xi_j - x_j| < \delta$ vrijedi

$$|\varphi'(\xi_j) - \varphi'(x_j)| < \frac{\varepsilon}{2M(b-a)}. \tag{1.25}$$

Kako je $f\varphi'$ Riemann integrabilna za svaki odgovarajući podinterval od $[a, b]$ takav da je $\max_{1\leq j\leq n}(t_j - t_{j-1}) < \delta$ dobijamo

$$|\sum_{j=1}^{n} f(x_j)\varphi'(x_j)(t_j - t_{j-1}) - \int_a^b f(t)\varphi'(t)dt| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.26}$$

Iz (1.25) dobijamo

$$|\sum_{j=1}^{n} f(x_j)[\varphi'(\xi_j) - \varphi'(x_j)](t_j - t_{j-1})| < \sum_{j=1}^{n} M|\frac{\varepsilon}{2M(b-a)}(t_j - t_{j-1})| = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.27}$$

Iz (1.26), (1.27), $\xi_j, x_j \in [t_{j-1}, t_j]$ i nejednakosti trougla dobijamo

$$|\sum_{j=1}^{n} f(x_j)\varphi'(\xi_j)(t_j - t_{j-1}) - \int_a^b f(t)\varphi'(t)dt| < \varepsilon.$$

□

Definicija 1.12.3. *Laplace-ova transformacija Rieman-Stieltjes-ovog integrala u odnosu na funkciju φ definisanu na $[0, \infty)$ je data sa*

$$F(s) = \mathcal{L}_{R-S}(d\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} d\varphi(t) = \lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} e^{-st} d\varphi(t),$$

pod uslovom da ovaj limes postoji.

Teorema 1.12.3. *Pretpostavim da je φ neprekidna i eksponencijalno ograničena na $[0, \infty)$. Tada je*

$$\mathcal{L}_{R-S}(\varphi) = \mathcal{L}(\varphi).$$

Dokaz. Neka je

$$\psi(t) = \int_0^t \varphi(\tau)d\tau,$$

i stavimo da je $\varphi(t) = \psi(t) = 0$ za $t < 0$. Tada je $\psi'(t) = \varphi(t)$ osim možda u tački $t = 0$. Na osnovu Teoreme 1.12.2 i prethodne definicije dobijamo

$$\mathcal{L}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}\varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}\psi'(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}d\psi(t) =$$

$$= \mathcal{L}_{R-S}(d\psi) = \mathcal{L}_{R-S}(\psi') = \mathcal{L}_{R-S}(\varphi).$$

□

Iz prethodne teoreme zaključujemo da pri rješavanju diferencijalnih jednačina, umjesto Laplace-Stieltjes-ove transformacije $\mathcal{L}_{R-S}$, možemo uzeti standardnu Laplace-ovu transformaciju $\mathcal{L}$.

1.13. Primjena Laplace-ove transformacije na obične diferencijalne jednačine

Laplace-ova transformacija se može koristiti za rješavanje običnih diferencijalnih jedanačina. Ona se primjenjuje na sisteme linearnih diferencijalnih, integralnih i integrodiferencijalnih jednačina. Posmatrajmo nekoliko karakterističnih primjera.

1° Riješiti nehomogenu linearnu diferencijalnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima

$$a_0y^{(n)}(t) + a_1y^{(n-1)}(t) + ... + a_{n-1}y'(t) + a_ny(t) = f(t), \qquad (1.28)$$

pri čemu se podrazumijeva da je $f(t)$ original.

Rješenje: Neka je $Y = Y(s) = \mathcal{L}(y(t))$, $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$. Pretpostavimo da su dati početni uslovi $y(0), y'(0), ..., y^{(n-1)}(0)$. Ako na jednačinu (1.28) primjenimo Laplace-ovu transformaciju, dobijamo

$$a_0(s^nY - s^{n-1}y(0) - ... - y^{(n-1)}(0)) + a_1(s^{n-1}Y - s^{n-2}y(0) - ... - y^{(n-2)}(0)) + ...+$$

$$+a_{n-1}(sY - y(0)) + a_nY = F(s).$$

Uvodeći polinome

$$P_n(s) = a_0s^n + a_1s^{n-1} + ... + a_{n-1}s + a_n$$

$$Q_{n-1}(s) = a_0(s^{n-1}y(0)+...+y^{(n-1)}(0))+a_1(s^{n-2}y(0)+...+y^{(n-2)}(0))+...+a_{n-1}y(0)$$

iz prethodne jednačine dobijamo

$$Y(s) = \frac{Q_{n-1}(s)}{P_n(s)} + \frac{F(s)}{P_n(s)}.$$

Primjenom inverzne Laplace-ove transformacije, dobijamo rješenje

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{Q_{n-1}(s)}{P_n(s)}) + \mathcal{L}^{-1}(\frac{F(s)}{P_n(s)}) = y_h(t) + y_p(t)$$

gdje je $y_h(t)$ rješenje homogene jednačine, a $y_p(t)$ partikularno rješenje homogene jednačine.

2° Riješiti sistem diferencijalnih jednačina

$$\begin{gathered}\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n + f_1(t) \\ ... \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n + f_n(t)\end{gathered} \tag{1.29}$$

gdje su $f_i(t),\ i = 1, 2, ..., n$ originali, pod uslovima $x_1(0) = x_{10}, ..., x_n(0) = x_{n0}$.

Rješenje: Neka je $X_i = X_i(s) = \mathcal{L}(x_i(t))$, a $F_i(s) = \mathcal{L}(f_i(t)),\ i = 1, 2, ..., n$. Ako na sve jednačine (1.29) primjenimo Laplace-ovu transformaciju, dobijamo

$$sX_1(s) - x_{10} = a_{11}X_1(s) + ...a_{1n}X_n(s) + F_1(s)$$

$$...$$

$$sX_n(s) - x_{n0} = a_{n1}X_1(s) + ...a_{nn}X_n(s) + F_n(s)$$

tj.

$$(a_{11} - s)X_1(s) + ... + a_{1n}X_n(s) = -x_{10} - F_1(s)$$

$$...$$

$$a_{n1}X_1(s) + ... + (a_{nn} - s)X_n(s) = -x_{n0} - F_n(s).$$

Determinanta ovog sistema je

$$D = \det \begin{pmatrix} a_{11} - s & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} - s \end{pmatrix},$$

a to je karakteristični polinom matrice sistema

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix},$$

tj. $D = \det(A - sI)$, gdje je I jedinična matrica. U daljem toku rješavanja treba odrediti slike $X_1(s), ..., X_n(s)$, a zatim odrediti rješenja $x_1(t), ..., x_n(t)$.

3° Riješiti integrodiferencijalnu jednačinu drugog reda

$$a\frac{dy(t)}{dt} + by(t) + c\int_0^t y(\tau)d\tau = f(t) \tag{1.30}$$

gdje su $a,\ b,\ c$ konstante, a $f(t)$ je dati original.

Rješenje: Uzimajući $\mathcal{L}(y(t)) = Y(s)$, Laplace-ova transformacija pretvara jednačinu (1.30) u

$$a(sY(s) - y(0)) + bY(s) + \frac{c}{s}Y(s) = F(s).$$

Iz ove jednačine dobijamo

$$Y(s) = \frac{s}{as^2 + bs + c}(F(s) + ay(0))$$

iz koje nalazimo original $y(t)$.

1.14. Primjena Laplace-ove transformacije na parcijalne diferencijalne jednačine

Laplace-ova transformacija se može koristiti za rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina.

Definicija 1.14.1. *Jednačina oblika*

$$F(x_1, ..., x_n, u; \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}; \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, ...) = 0$$

naziva se **parcijalna** *diferencijalna jednačina. Najveći red izvoda je red parcijalne diferencijalne jednačine.*

Posmatraćemo PDJ za funkciju $u(x,t)$ od dve promjenjive i tražićemo njenu Laplace-ovu transformaciju. Ako u funkciji $u(x,t)$ izaberemo $t = 0$ (npr. $u(x,0)$, $u_t(x,0)$) dobijamo uslove koji se nazivaju *početni uslovi.* Birajući u funkciji $u(x,t)$, $x = 0$ dobijamo *granične uslove* (npr. $u(0,t)$, $u_x(0,t)$).

Laplace-ova transformacija od $u(x,t)$ glasi

$$U(x,s) = \mathcal{L}(u(x,t))(s) = \int_0^\infty u(x,t)e^{-st}dt. \tag{1.31}$$

Laplace-ova transformacija od u_t slijedi direktno parcijalnom integracijom

$$\mathcal{L}(u_t(x,t))(s) = \int_0^\infty u_t(x,t)e^{-st}dt = sU(x,s) - u(x,0).$$

S druge strane, Laplace-ove transformacije od u_x i u_{xx} su

$$\mathcal{L}(u_x(x,t)) = \frac{d}{dx}(\mathcal{L}(u(x,t))) = \frac{dU(x,s)}{dx} \qquad i$$

$$\mathcal{L}(u_{xx}(x,t)) = \frac{d^2}{dx^2}(\mathcal{L}(u(x,t))) = \frac{d^2U(x,s)}{dx^2}.$$

Nekom transformacijom se eliminiše varijabla t, pa samo $U(x,s)$ i njeni izvodi ostaju u jednačini.

Rješavanje PDJ pomoću Laplace-ove transformacije odvija se u nekoliko koraka:

1° Svaki izraz u PDJ za $u(x,t)$ se transformiše pomoću Laplace-ove transformacije u odnosu na promjenjive x i t. Laplace-ovom transformacijom dobijamo običnu diferencijalnu jednačinu koja sadrži jedino parcijalne izvode po x. Ova jednačina sadrži sve početne uslove.

2° Riješimo običnu diferencijalnu jednačinu korištenjem već poznatih metoda. Da bismo je riješili moramo odrediti granične uslove za $U(x,s)$ koje nalazimo Laplace-ovom transformacijom graničnih uslova za $u(x,t)$.

3° Rješenje od $U(x,s)$ se inverznom transformacijom transformiše u $u(x,t)$.

Navešćemo nekoliko karakterističnih primjera primjene Laplace-ove transformacije na PDJ.

1° Riješiti jednodimenzionu jednačinu provođenja toplote

$$u_t = u_{xx} \quad 0 \le x \le l \tag{1.32}$$

$$u(x,0) = 0$$

$$u(0,t) = f_1(t) \quad u(l,t) = f_2(t). \tag{1.33}$$

Rješenje. Laplace-ova transformacija od $u(x,t)$ je

$$U(x,s) = \int_0^\infty e^{-st} u(x,t)dt. \tag{1.34}$$

Primjenimo Laplace-ovu transformaciju na obe strane (1.32) i pretpostavimo da možemo diferencirati po x ispod znaka integrala jednačine (1.34). Tada dobijamo

$$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2} = sU(x,s).$$

Primjenjujući Laplace-ovu transformaciju na (1.33), dobijamo

$$U(0,s) = F_1(s), \quad U(l,s) = F_2(s),$$

gdje su

$$F_k(s) = \int_0^\infty e^{-st} f_k(t)dt, \quad k = 1, 2.$$

Odavde dobijamo da je

$$U(x,s) = F_1(s)\Omega_1(x,s) + F_2(s)\Omega_2(x,s), \tag{1.35}$$

gdje su

$$\Omega_1(x,s) = \frac{\sinh(l-x)\sqrt{s}}{\sinh l\sqrt{s}} \quad i \quad \Omega_2(x,s) = \frac{\sinh x\sqrt{s}}{\sinh l\sqrt{s}}.$$

Funkcije $\Omega_1(x,s)$ i $\Omega_2(x,s)$ su Laplace-ove transformacije funkcija

$$-\frac{1}{l}\theta_x[\frac{x}{2^l}, \frac{t}{l^2}] \quad i \quad \frac{1}{l}\theta_x[\frac{l-x}{2^l}, \frac{t}{l^2}]$$

respektivno i

$$\theta(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{2ni\pi x - n^2\pi^2 t}$$

je teta fukcija. Da bismo odredili $u(x,t)$ iz (1.35) koristićemo konvolucionu teoremu. Odatle nalazimo

$$u(x,t) = -\frac{1}{l}\int_0^t \theta_x[\frac{x}{2^l}, \frac{t-\tau}{l^2}]f_1(\tau)d\tau + \frac{1}{l}\int_0^t \theta_x[\frac{l-x}{2^l}, \frac{t-\tau}{l^2}]f_2(\tau)d\tau.$$

2° Riješiti jednačinu oblika

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.36}$$

pod uslovima

$$u(x,0) = 0, \quad x > 0$$

$$u(0,t) = f(t) \ . \tag{1.37}$$

Rješenje. Ako primjenimo Laplace-ovu transformaciju na (1.36), dobijamo

$$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2} = sU(x,s).$$

Iz (1.37) dobijamo $U(0,s) = F(s)$. Rješavanjem ove diferencijalne jednačine dobijamo

$$U(x,s) = c_1 e^{-x\sqrt{s}} + c_2 e^{x\sqrt{s}}.$$

Kako je $U(x,s)$ ograničena kad $x \to \infty$, dobijamo

$$U(x,s) = F(s)e^{-x\sqrt{s}} = sF(s)\frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s}.$$

Uz pomoć konvolucione teoreme nalazimo da je

$$u(x,t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}} d\tau =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty} f(t - \frac{x}{4\xi^2}) e^{-\xi^2} d\xi \ .$$

Jasno se vidi da je

$$u(x,0) = 0, \quad u(0,t) = f(t) \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = f(t).$$

3° Riješiti jednačinu (1.36) pod uslovima

$$u(x,0) = u_0, \quad 0 < x < \infty$$

$$u'(0,t) = hu(0,t) \quad (h = const). \tag{1.38}$$

Rješenje. Primjenjujući Laplace-ovu transformaciju na (1.36), dobijamo

$$\frac{d^2U}{dx^2}(x,s) = sU(x,s) - u_0.$$

Iz (1.38) dobijamo

$$\frac{dU}{dx}(x,s) \mid_{x=0} = hU(0,s).$$

Koristeći činjenicu da je $U(x,s)$ ograničena kad $x \to \infty$, dobijamo

$$U(x,s) = \frac{u_0}{s} + ce^{-x\sqrt{s}},$$

$$\frac{dU}{dx}(x,s) \mid_{x=0} = -c\sqrt{s} = h(\frac{u_0}{s} + c) = hU(0,s).$$

Odavde je

$$U(x,s) = \frac{u_0}{s}(1 - \frac{h}{h+\sqrt{s}} e^{-x\sqrt{s}}) = \frac{u_0}{s}(1 - e^{-x\sqrt{s}}) + \frac{u_0}{\sqrt{s}(\sqrt{s}+h)} e^{-x\sqrt{s}}.$$

Kako je

$$\mathcal{L}(u_0 erf(\frac{x}{2\sqrt{t}})) = \frac{u_0}{s}(1 - e^{-x\sqrt{s}}),$$

$$\mathcal{L}(e^{-h(t-x)}) = \frac{1}{s+h} e^{-sx} = F(s),$$

gdje je $erf(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi$ i integracija je uzeta od x do ∞. Koristeći

$$\frac{F(\sqrt{s})}{\sqrt{s}} = \frac{1}{\sqrt{s}(\sqrt{s}+h)} e^{-x\sqrt{s}} = \mathcal{L}(\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_x^{\infty} e^{-h(\tau - x) - \frac{\tau^2}{4t}} d\tau)$$

dobijamo

$$u(x,t) = u_0 erf(\frac{x}{2\sqrt{t}}) + \frac{u_0}{\sqrt{\pi t}} \int_x^\infty e^{-h(\tau - x) - \frac{\tau^2}{4t}} d\tau.$$

4° Riješiti talasnu jednačinu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \beta t < x < \infty, \ t > 0 \tag{1.39}$$

pod uslovima

$$u(x,0) = 0, \quad 0 < x < \infty \tag{1.40}$$

$$u(x,t) \mid_{x=\beta t} = f(t), \quad \lim_{x\to\infty} |u(x,t)| < \infty, \quad t > 0. \tag{1.41}$$

Rješenje. Uvedimo smjenu $\eta = x\beta t$. Tada (1.39) postaje

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial u}{\partial \eta} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \quad 0 < \eta < \infty, \quad t > 0, \tag{1.42}$$

a (1.40) i (1.41) postaju

$$u(0,t) = f(t), \quad \lim_{\eta\to\infty} |u(\eta,t)| < \infty, \quad t > 0 \tag{1.43}$$

$$u(\eta, 0) = 0, \quad 0 < \eta < \infty.$$

Primjenjujući Laplace-ovu transformaciju na jednačine (1.42) i (1.43), dobijamo

$$\frac{d^2 U(\eta,s)}{d\eta^2} + \frac{\beta}{a^2} \cdot \frac{dU(\eta,s)}{d\eta} - \frac{s}{a^2} U(\eta,s) = 0 \tag{1.44}$$

i

$$U(0,s) = F(s) \ \ i \ \ \lim_{\eta\to\infty} |U(\eta,s)| < \infty. \tag{1.45}$$

Rješenje jednačina (1.44) i (1.45) je

$$U(\eta,s) = F(s) e^{-\frac{\beta\eta}{2a^2} - \frac{\eta}{a}\sqrt{s + \frac{\beta^2}{4a^2}}}.$$

Kako je

$$\mathcal{L}(\Phi(\eta,t)) = e^{-\frac{\eta}{a}\sqrt{s+\frac{\beta^2}{4a^2}}}$$

gdje je

$$\Phi(\eta,t) = \frac{1}{2}[e^{-\frac{\beta\eta}{2a^2}} erf(\frac{\eta}{2a\sqrt{t}} - \frac{\beta\sqrt{t}}{2a}) + e^{\frac{\beta\eta}{2a^2}} erf(\frac{\eta}{2a\sqrt{t}} + \frac{\beta\sqrt{t}}{2a})],$$

na osnovu konvolucione teoreme je

$$u(\eta,t) = e^{-\frac{\beta\eta}{2a^2}} \int_0^t f(t-\tau)\Phi(\eta,\tau) d\tau,$$

odnosno

$$u(x,t) = e^{-\frac{\beta(x-\beta t)}{2a^2}} \int_0^t f(t-\tau)\Phi(x-\beta\tau,\tau) d\tau.$$

2. Uopštenje Laplace-ove transformacije

2.1. Bochner-ov integral

Definicija 2.1.1. *Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$. Funkcija $\| \ \| : X \to [0, \infty)$ koja ima osobine:*
i) $\|x\| = 0 \iff x = 0$,
ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ *za svaki skalar* $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ *i za svaki vektor* $x \in X$ *i*
iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *za svaka dva vektora* x *i* y *iz* X
naziva se normom na X, a prostor X zajedno sa normom naziva se **normirani prostor**.

Definicija 2.1.2. *Vektorski prostor X naziva se* **kompletnim** *ako svaki Košijev niz u tom prostoru konvergira.*

Definicija 2.1.3. *Kompletan normiran prostor naziva se* **Banach – ovim** *prostorom.*

Neka je X kompleksan Banach-ov prostor i neka je I interval na $\mathbb{R}$.

Definicija 2.1.4. *Funkcija $f : I \to X$ oblika $f(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{\Omega_i}(t)$ za neko $n \in \mathbb{N}$, $x_i \in X$ i Lebesgue mjerljive skupove $\Omega_i \in I$ sa konačnom Lebesgue-ovom mjerom $m(\Omega_i)$ naziva se prostom funkcijom.*
Funkcija $f : I \to X$ naziva se mjerljivom ako postoji niz prostih funkcija g_n takvih da je $f(t) = \lim_{n\to\infty} g_n(t)$ za skoro sve $t \in I$.

Definicija 2.1.5. *Funkcija $f : I \to X$ se naziva* **Bochner** *integrabilnom ako postoji niz prostih funkcija g_n takvih da $g_n \to f$ tačku po tačku i $\lim_{n\to\infty} \int_I \|f(t) - g_n(t)\| dt = 0$. Ako je $f : I \to X$ Bochner integrabilna, onda je Bochner-ov integral od f na I dat sa*

$$\int_I f(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_I g_n(t)dt.$$

Teorema 2.1.1. *(Bochner) Funkcija $f : I \to X$ je Bochner integrabilna ako i samo ako je f mjerljiva i $\|f\|$ integrabilna. Ako je f Bochner integrabilna, onda je*

$$\| \int_I f(t)dt\| \leq \int_I \|f(t)\|dt. \tag{2.1}$$

Dokaz. Ako je f Bochner integrabilna, tada postoji niz prostih funkcija takvih da $g_n \to f$ tačku po tačku i $\lim_{n\to\infty} \int_I \|f(t) - g_n(t)\|dt = 0$. Odatle zaključujemo da su f i $\|f\|$ mjerljive. Integrabilnost od f slijedi iz

$$\int_I \|f(t)\|dt \leq \int_I \|g_n(t)\|dt + \int_I \|f(t) - g_n(t)\|dt.$$

Šta više je,

$$\| \int_I f(t)dt\| = \lim_{n\to\infty} \| \int_I g_n(t)dt\| \leq \lim_{n\to\infty} \int_I \|g_n(t)\|dt = \int_I \|f(t)\|dt.$$

Dokažimo obrnuto tvrđenje. Neka je h_n niz prostih funkcija koji aproksimira f tačku po tačku na $I\backslash\Omega_0$, gdje je $m(\Omega_0) = 0$. Definišimo niz prostih funkcija

$$g_n(t) = \begin{cases} h_n(t) & \text{ako } \|h_n(t)\| \leq \|f(t)\|(1 + n^{-1}) \\ 0 & \text{u suprotnom slučaju} \end{cases}.$$

Tada $\|g_n(t)\| \leq \|f(t)\|(1+n^{-1})$ i $\lim_{n\to\infty} \|g_n(t)-f(t)\| = 0$ za sve $t \in I\backslash\Omega_0$. Kako su funkcije $\|f\|$ i $\|g_n-f\|$ integrabilne i $\|g_n(t)-f(t)\| \leq 3\|f(t)\|$, prema Lesbegue[1]-ovoj teoremi o dominantnoj konvergenciji je $\lim_{n\to\infty} \int_I \|g_n(t) - f(t)\|dt = 0$. $\square$

Definicija 2.1.6. *Neka je X kompleksan Banahov prostor. Operator na X je linearno preslikavanje $A : D(A) \to X$, gdje je $D(A)$ linearan potprostor od X.*

Stav 2.1.1. *Neka su X i Y Banahovi prostori, $T : X \to Y$ ograničen linearan operator i $f : I \to X$ Bochner integrabilna. Tada je $T \circ f : t \mapsto T(f(t))$ Bochner integrabilna i vrijedi $T \int_I f(t)dt = \int_I T(f(t))dt$.*

Definicija 2.1.7. *Operator $A : D(A) \to X$ je zatvoren ako za sve $x, y \in X$ i za svaki niz $x_n \in D(A)$ takve da je $\|x_n - x\| \to 0$ i $\|Ax_n - y\| \to 0$ vrijedi $x \in D(A)$ i $Ax = y$.*

Definicija 2.1.8. *Neka su X i Y Banahovi prostori i $A \in \mathcal{B}(X, Y)$, gdje je $\mathcal{B}(X, Y) = \{A : X \to Y \mid A$ je linearan i ograničen$\}$. Skup $G_A = \{(x, Ax) : x \in X\} \subset X \times Y$ naziva se* **grafikom** *operatora A.*

[1]Formulaciju i dokaz možete vidjeti u [3]

Stav 2.1.2. *Neka je A zatvoren linearan operator na X i neka je $f : I \to X$ Bochner integrabilna. Pretpostavimo još da je $f(t) \in D(A)$ za sve $t \in I$ i da je $A \circ f : I \mapsto X$ Bochner integrabilna. Tada je $\int_I f(t)dt \in D(A)$ i*

$$A(\int_I f(t)dt) = \int_I A(f(t))dt.$$

Dokaz. Posmatraćemo Banahov prostor $X \times X$ i na njemu normu zadatu sa $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$. Graf operatora A u oznaci G_A je zatvoren potprostor od $X \times X$. Definišimo $g : I \to G_A \subset X \times X$ sa $g(t) = (f(t), A(f(t)))$. Jasno je da je g mjerljiva i vrijedi

$$\int_I \|g(t)\|dt = \int_I \|f(t)\|dt + \int_I \|A(f(t))\|dt < \infty,$$

pa po Teoremi 2.1.1 zaključujemo da je Bochner integrabilna. Šta više, $\int_I g(t)dt \in G_A$. Na osnovu Stava 2.1.1, dobijamo

$$\int_I g(t)dt = (\int_I f(t)dt, \int_I A(f(t))dt).$$

□

Lema 2.1.1. *Neka je $f : I \to X$. Ako je $f_n : I \to X$ mjerljiva funkcija i $f_n \to f$ tačku po tačku skoro svuda, onda je funkcija f mjerljiva.*

Teorema 2.1.2. *(O dominantnoj konvergenciji) Neka je $f_n : I \to X$ $(n \in \mathbb{N})$ Bochner integrabilna funkcija. Ako postoji $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ skoro svuda i ako postoji integrabilna funkcija $g : I \to \mathbb{R}$ takva da je za sve $(n \in \mathbb{N})$ $\|f_n(t)\| \leq g(t)$ skoro svuda, onda je f Bochner integrabilna i $\int_I f(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n(t)dt$. Takođe vrijedi i $\int_I \|f(t) - f_n(t)\|dt \to 0$ kad $n \to \infty$.*

Dokaz. Na osnovu Leme 2.1.1 funkcija f je mjerljiva. Iz uslova $\|f_n(t)\| \leq g(t)$ skoro svuda, zaključujemo da je $\|f\|$ integrabilna. Iz ovoga vidimo da je f Bochner integrabilna. Definišimo funkciju $h_n(t) = \|f(t) - f_n(t)\|$ za $t \in I$. Kako je $|h_n(t)| \leq 2g(t)$ i $h_n(t) \to 0$ skoro svuda, na osnovu Lebesgue-ove teoreme o dominantnoj konvergenciji zaključujemo da $\int_I \|f(t) - f_n(t)\| \to 0$ kad $n \to \infty$. Na osnovu (2.1) je

$$\| \int_I f(t)dt - \int_I f_n(t)dt\| \to 0.$$

□

Teorema 2.1.3. *(Fubini-jeva teorema) Neka je $I = I_1 \times I_2$ pravougaonik u $\mathbb{R}^2$, $f : I \to X$ mjerljiva i pretpostavimo da je*

$$\int_{I_1} \int_{I_2} \|f(s, t)\|dtds < \infty.$$

Tada je f Bochner integrabilana i integrali

$$\int_{I_1}\int_{I_2} f(s,t)dtds \text{ i } \int_{I_2}\int_{I_1} f(s,t)dsdt$$

postoje i jednaki su.

Dokaz. Vidjeti u [8]. $\square$

Sa $L^p(I,X)$ označimo skup svih Bochner integrabilnih funkcija $f : I \to X$ i neka je

$$\|f\|_p := (\int_I \|f(t)\|^p dt)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \le p < \infty).$$

Teorema 2.1.4. *Prostor $L^1(I,X)$ je Banahov.*

Dokaz. Neka je $\{f_n\}$ niz u $L^1(I,X)$ takav da je $\sum_n \|f_n\|_1 < \infty$. Na osnovu teoreme o monotonoj konvergenciji[2] je $\sum_n \|f_n(t)\| < \infty$ skoro svuda, $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n(t)\|$ je integrabilna i

$$\int_I \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n(t)\|dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I \|f_n(t)\|dt.$$

Odatle $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ konvergira skoro svuda ka $g(t)$ u Banahovom prostoru X. Na osnovu Leme 2.1.1 funkcija g je mjerljiva, a kako je $\|g(t)\| \le \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n(t)\|$, $\|g\|$ je integrabilna, pa na osnovu Teoreme 2.1.1 zaključujemo da je g Bochner integrabilna. Konačno je

$$\|g - \sum_{n=1}^{k} f_n\|_1 \le \int_I \|g(t) - \sum_{n=1}^{k} f_n(t)\|dt \le \int_I \sum_{n=k+1}^{\infty} \|f_n(t)\|dt \to 0$$

kad $k \to \infty$. Odatle zaključujemo da je $L^1(I,X)$ Banahov. $\square$

2.2. Radon-Nikodym-ova teorema

U prethodnoj glavi smo se upoznali sa pojmom funkcija ograničene varijacije, kao i sa Riemann-Stieltjes-ovim integralom. U ovoj glavi će se ovi pojmovi definisati na Banahovim prostorima.
Neka je X kompleksan Banahov prostor.

Definicija 2.2.1. *Ako je funcija $f : [a,b] \to X$ Bochner integrabilna, onda kažemo da je funkcija $F : [a,b] \to X$ primitivna funkcija od f ako vrijedi*

$$F(t) = F(a) + \int_a^t f(s)ds \quad (t \in [a,b]).$$

[2]Formulaciju i dokaz teoreme o monotonoj konvergenciji možete vidjeti u [3]

Definicija 2.2.2. *Kažemo da je funkcija F apsolutno neprekidna na $[a, b]$ ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takvo da je $\sum_i \|F(b_i) - F(a_i)\| < \varepsilon$ za svaku konačnu kolekciju disjunktnih podintervala $\{(a_i, b_i)\}$ od $[a, b]$ takvih da je $\sum_i (b_i - a_i) < \delta$.*

Definicija 2.2.3. *Funkcija F je Lipschitz neprekidna na $[a, b]$ ako postoji konstanta $M > 0$ takva da je $\|F(t) - F(s)\| \leq M|t - s|$ za sve $s, t \in [a, b]$. Jasno je da je svaka Lipschitz neprekidna funkcija i apsolutno neprekidna.*

Definicija 2.2.4. *Funkcija F je uniformno neprekidna na $[a, b]$ ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za sve $x, x' \in [a, b]$ vrijedi $\|F(x) - F(x')\| < \varepsilon$ kad god je $\|x - x'\| < \delta$.*

Stav 2.2.1. *Neka je $F : [a, b] \to X$ apsolutno neprekidna. Tada je F ograničene varijacije. Ako je $G(t) = V_{[a,t]}(F)$, tada je G apsolutno neprekidna na $[a, b]$.*

Dokaz. Uzmimo $\varepsilon > 0$ proizvoljno i neka je δ izabrano kao u definiciji apsolutne neprekidnosti funkcije F. Tada, ako je konačna kolekcija disjunktnih podintervala $\{(a_i, b_i)\}$ od $[a, b]$ takva da je $\sum_i (b_i - a_i) < \delta$, onda je $\sum_i V_{[a_i,b_i]}(F) < \varepsilon$. Iz ovoga vidimo da je F ograničene varijacije na svakom podintervalu dužine manje od δ . Kako je $[a, b]$ konačna unija takvih intervala, tada je F ograničene varijacije na $[a, b]$. Takođe vrijedi

$$\sum_i |G(b_i) - G(a_i)| = \sum_i V_{[a_i,b_i]}(F) < \varepsilon.$$

Odavde zaključujemo da je G apsolutno neprekidna. □

Definicija 2.2.5. *Za svaki normiran prostor,* **konjugovanim** *ili* **dualnim** *prostorom X^* naziva se prostor $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ ili prostor $\mathcal{B}(X, \mathbb{C})$. Elementi ovog prostora nazivaju se linearni funkcionali. Prostor X^{**} se naziva drugi dual prostora X.*

Neka je Φ preslikavanje koje X preslikava u X^{**} definisano sa $\Phi(x) = x^{**}$.

Definicija 2.2.6. *Prostor X je* **refleksivan** *ako je $X^{**} = \Phi(X)$. U suprotnom slučaju naziva se* **irefleksivan**.

Teorema 2.2.1. *(Hahn-Banach) Neka je X normiran prostor, Y njegov potprostor i $f \in Y^*$. Tada postoji $g \in X^*$ takav da je $g|_Y = f$ i $\|f\| = \|g\|$.*

Stav 2.2.2. *Neka je $F : [a, b] \to X$ apsolutno neprekidna i pretpostavimo da postoji $f(t) = F'(t)$ skoro svuda. Tada je f Bochner integrabilna i vrijedi $F(t) = F(a) + \int_a^t f(s)ds$ za sve $t \in [a, b]$.*

Dokaz. Kako je $f(t) = \lim_{n\to\infty} n(F(t+\frac{1}{n}) - F(t))$, na osnovu Leme 2.1.1 zaključujemo da je f mjerljiva. Neka je $G(t) = V_{[a,t]}(F)$. Tada je na osnovu Stava 2.2.1 funkcija $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ apsolutno neprekidna. Odatle zaključujemo da je G diferencijabilna skoro svuda i $G' \in L^1[a,b]$. Kako je

$$\|F(t+h) - F(t)\| \leq V_{[t,t+h]}(F) = G(t+h) - G(t),$$

$\|f(t)\| \leq G'(t)$ skoro svuda, pa na osnovu ovoga zaključujemo da je $\|f\| \in L^1[a,b]$. Prema Teoremi 2.1.1 je funkcija f Bochner integrabilna. Za $x^* \in X^*$ je

$$\langle F(t), x^*\rangle = \langle F(a), x^*\rangle + \int_a^t \langle f(s), x^*\rangle ds = \langle F(a) + \int_a^t f(s)ds, x^*\rangle.$$

Na osnovu Hahn-Banach-ove teoreme dobijamo tvrdnju. □

Teorema 2.2.2. *Za svaki Banahov prostor X slijedeća dva tvrđenja su ekvivalentna:*
i) Svaka apsolutno neprekidna funkcija $F : \mathbb{R}^+ \to X$ je diferencijabilna skoro svuda.
ii) Svaka Lipschitz neprekidna funkcija $F : \mathbb{R}^+ \to X$ je diferencijabilna skoro svuda.

Dokaz. Jasno je da i) povlači ii). Dokažimo obrat. Pretpostavimo da vrijedi ii) i neka je funkcija $F : \mathbb{R}^+ \to X$ apsolutno neprekidna. Na osnovu Stava 2.2.1 funkcija F je ograničene varijacije i $G(t) = V_{[0,t]}(F)$ je apsolutno neprekidna. Neka je $h(t) = G(t) + t$. Tada je h strogo rastuća, $h(0) = 0$ i $h(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$. Takođe je

$$\|F(t) - F(s)\| \leq G(t) - G(s) \leq h(t) - h(s)$$

za sve $t \geq s \geq 0$. Odatle je $F \circ h^{-1} : \mathbb{R}^+ \to X$ Lipschitz neprekidna funkcija. Po pretpostavici je $F \circ h^{-1}$ diferencijabilna skoro svuda. Kako je $|h(t) - h(s)| \geq |t-s|$, tada je h^{-1} preslikavanje koje preslikava nula skupove u nula skupove. Kako je G apsolutno neprekidna, tada je F diferencijabilna skoro svuda. □

Definicija 2.2.7. *Banahov prostor X ima Radon-Nikodym-ovo svojstvo ako su zadovoljeni uslovi Teoreme 2.2.2.*

Definicija 2.2.8. *Normiran prostor X je* **separabilan** *on sadrži gust i prebrojiv podskup.*

Napomena 2.2.1. *Skup $S \subset X$ je gust u X ako za svako $a \in S$ i za svako $\varepsilon > 0$ vrijedi $B(a, \varepsilon) \bigcap S \neq \emptyset$.*

Teorema 2.2.3. *(Dunford-Pettis) Neka je $X = Y^*$ gdje je Y Banahov prostor i pretpostavimo da je X separabilan. Tada X ima Radon-Nikodym-ovo svojstvo.*

Dokaz. Vidjeti u [8]. $\square$

Lema 2.2.1. *Svaki refleksivan prostor ima Radon-Nikodym-ovo svojstvo.*

Dokaz. Na osnovu teoreme Dunford-Pettis dobijamo tvrdnju. $\square$

Neka je $c_0 = \{(t_n)_{n=1}^{\infty} \mid \lim_{n\to\infty} t_n = 0 \}$.

Stav 2.2.3. *Prostor c_0 nema Radon-Nikodym-ovo svojstvo.*

Dokaz. Neka je $F(t) = (F_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$, gdje je $F_n(t) = \frac{1}{n}\sin(nt)$ $(n \in \mathbb{N})$. Kako je

$$|F_n(t) - F_n(s)| = |\int_s^t \cos(n\tau)d\tau| \le |t-s| \quad (t,\ s \ge 0,\ n \in \mathbb{N}),$$

funkcija $F : \mathbb{R}^+ \to c_0$ je Lipschitz neprekidna. Kako je $F_n'(t) = \cos(nt)$, a $\cos(nt)$ ne pripada c_0, F nije diferencijabilna nigdje. $\square$

Stav 2.2.4. *Prostor $L^1(0,1)$ nema Radon-Nikodym-ovo svojstvo.*

Dokaz. Definišimo $F : [0,1] \to L^1(0,1)$ sa $F(t) = \chi_{[0,t]}$. Tada je F Lipschitz neprekidna. Neka je $0 < t < 1$. Tada F nije diferencijabilna u t jer

$$\|\frac{1}{h}(F(t+h) - F(t)) - \frac{1}{2h}(F(t+2h) - F(t))\|_1 = 1$$

gdje je $0 < h < \frac{1-t}{2}$. $\square$

2.3. Konvolucije

U prethodnoj glavi smo definisali konvoluciju funkcija f i g. Sada ćemo posmatrati konvoluciju i njene osobine na Banahovim prostorima.
Prostor svih ograničenih linearnih operatora iz Banahovog prostora X u Banahov prostor Y označićemo sa $\mathcal{L}(X,Y)$. Ako je $X = Y$, onda je $\mathcal{L}(X,Y) = \mathcal{L}(X)$.

Definicija 2.3.1. *Funkcija $T : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X,Y)$ je jako neprekidna ako je funkcija $t \mapsto T(t)x$ neprekidna za sve $x \in X$.*

Neka je $L^1_{loc}(R^+, X) = \{f : \mathbb{R}^+ \to X \mid$ f je Bochner integrabilna na $[0,\tau]$ za sve $\tau > 0\}$.

Teorema 2.3.1. *Neka je* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+, X)$ *i neka je* $T : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X,Y)$ *jako neprekidna. Tada integral*

$$(T * f)(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds$$

postoji i definiše neprekidnu funkciju $T * f : \mathbb{R}^+ \to Y$.

Dokaz. Fiksirajmo $t \geq 0$ i pokažimo da je funkcija $s \mapsto T(t-s)f(s)$ mjerljiva na $[0,t]$. Ako je $f(s) = \chi_\Omega(s)x$ za neki mjeljiv skup $\Omega \subset \mathbb{R}^+$ i $x \in X$, onda je

$$T(t-s)f(s) = \chi_\Omega(s)T(t-s)x.$$

Ova funkcija je mjerljiva kao proizvod mjerljive skalarne funkcije i neprekidne vektorske funkcije. Kako za mjerljivu funkciju f postoji niz prostih funkcija $f_n \to f$ skoro svuda, pa onda $T(t-s)f_n(s)$ jako konvergira ka $T(t-s)f(s)$ skoro svuda. Prema tome je funkcija $T(t-\cdot)f(\cdot)$ mjerljiva. Kako je

$$\|T(t-s)f(s)\| \leq \|T(t-s)\|\|f(s)\|,$$

po Teoremi 2.1.1 $(T*f)(t)$ postoji. Na osnovu Teoreme 2.1.2 je $T*f$ neprekidna. $\square$

Označimo sa $BUC(I,X) = \{f : I \to X| \ f$ je ograničena i uniformno neprekidna $\}$ i $C_0(I,X) = \{f : I \to X| \ f$ je neprekidna i $\lim_{|t|\to\infty, t\in I} \|f(t)\| = 0\}$. Oba ova prostora su Banahovi u odnosu na normu $\|\cdot\|_\infty$ i vrijedi $C_0(I,X) \subset BUC(I,X) \subset L^\infty(I,X)$, gdje je $L^\infty(I,X) = \{f : I \to X| \ f$ je mjerljiva i $\|f\|_\infty = supess|f|\}$.

Stav 2.3.1. *Neka je* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+, X)$ *i* $T : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X,Y)$ *jako neprekidna. Tada:*

*a)(***Young – ova nejednakost***) Neka* $1 \leq p,q,r \leq \infty$ *zadovoljavaju* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. *Ako je* $\int_0^\infty \|T(t)\|^p dt < \infty$ *i* $f \in L^q(\mathbb{R}^+, X)$, *onda* $T * f \in L^r(\mathbb{R}^+, Y)$ *i*

$$\|T * f\|_r \leq \|f\|_q (\int_0^\infty \|T(t)\|^p dt)^{\frac{1}{p}}.$$

b) Neka $1 < p, p' < \infty$ *zadovoljavaju* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. *Ako je* $\int_0^\infty \|T(t)\|^p dt < \infty$ *i* $f \in L^{p'}(\mathbb{R}^+, X)$, *onda* $T * f \in C_0(\mathbb{R}^+, Y)$.

c) Ako je $\int_0^\infty \|T(t)\| dt < \infty$ *i* $f \in BUC(\mathbb{R}^+, X)$, *ili ako je* T *ograničen, a* $f \in L^1(\mathbb{R}^+, X)$, *onda* $T * f \in BUC(\mathbb{R}^+, Y)$.

d) Ako je $\int_0^\infty \|T(t)\|dt < \infty$ *i* $f \in C_0(\mathbb{R}^+, X)$*, ili ako je* $\lim_{t\to\infty} \|T(t)\| = 0$ *i* $f \in L^1(\mathbb{R}^+, X)$*, onda* $T * f \in C_0(\mathbb{R}^+, Y)$*.*

Dokaz. Vidjeti u [8]. □

Stav 2.3.2. *Neka je* $T : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X, Y)$ *jako neprekidna i ograničena,* $x \in X$*,* $f' \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+, X)$*,* $f(t) = x + \int_0^t f'(s)ds$ $(t \geq 0)$*. Tada* $T * f \in C^1(\mathbb{R}^+, Y)$ *i*

$$(T * f)'(t) = (T * f')(t) + T(t)x.$$

Dokaz. Neka je $u(t) = (T * f')(t) + T(t)x$. Tada na osnovu Teoreme 2.3.1 zaključujemo da $u \in C(\mathbb{R}^+, Y)$. Na osnovu Fubinijeve teoreme je

$$\begin{aligned}
\int_0^t u(s)ds &= \int_0^t \int_0^s T(\tau)f'(s-\tau)d\tau ds + \int_0^t T(s)xds \\
&= \int_0^t \int_\tau^t T(\tau)f'(s-\tau)dsd\tau + \int_0^t T(s)xds \\
&= \int_0^t \int_0^{t-\tau} T(\tau)f'(s)dsd\tau + \int_0^t T(s)xds \\
&= \int_0^t T(\tau)(f(t-\tau) - x)d\tau + \int_0^t T(s)xds \\
&= (T * f)(t) \quad (t \geq 0).
\end{aligned}$$

□

Stav 2.3.3. *Neka je* $T : [0, \tau] \to \mathcal{L}(X, Y)$ *Lipschitz neprekidna takva da je* $T(0) = 0$ *i neka je* $f \in L^1([0, \tau], X)$*. Tada* $T * f \in C^1([0, \tau], Y)$*.*

Dokaz. Na početku pretpostavimo da $f \in C^1([0, \tau], X)$. Na osnovu Stava 2.3.2, $T * f$ ima izvod $g \in C([0, \tau], Y)$. Za $0 \leq r \leq t \leq \tau$ je

$$\begin{aligned}
\| \int_r^t g(s)ds\| &= \|(T * f)(t) - (T * f)(r)\| \\
&\leq \int_\tau^t \|T(t-s)f(s)\|ds + \int_0^\tau \|(T(t-s) - T(r-s))f(s)\|ds \\
&\leq \int_r^t L(t-s)\|f(s)\|ds + \int_0^\tau L(t-r)\|f(s)\|ds \\
&\leq L(t-r)\|f\|_1,
\end{aligned}$$

gdje je L Lipschitz-ova konstanta u odnosu na T. Kako je $T(0) = 0$, tada je $\|T(s)\| \leq Ls$, pa na osnovu toga i prethodnih nejednakosti je $\|g(s)\| \leq L\|f\|_1$ za sve $s \in [0, \tau]$. Kako je $f \in L^1([0, \tau], X)$, tada postoji niz $f_n \in C^1([0, \tau], X)$ takav da $\|f_n - f\|_1 \to 0$. Na osnovu Stava 2.3.1 $\|(T * (f_n - f))(t)\| \to 0$. Dalje je

$$\|(T * f_n)' - (T * f_m)'\|_\infty \leq L\|f_n - f_m\|_1 \to 0$$

pa na osnovu ovoga vidimo da $(T * f_n)'$ konvergira uniformno ka funkciji $g \in C([0, \tau], Y)$. Kako je

$$(T * f)(t) = \lim_{n\to\infty} (T * f_n)(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^t (T * f_n)'(s)ds = \int_0^t g(s)ds,$$

dobijamo da $T * f \in C^1([0, \tau], Y)$.

□

2.4. Egzistencija Laplace-ovog integrala

Neka je X kompleksan Banahov prostor. U ovom poglavlju bavićemo se postojanjem Laplace-ovog integrala

$$\hat{f}(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \lim_{\tau\to\infty} \int_0^\tau e^{-st} f(t)dt,$$

gdje je $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+, X)$ i $s \in \mathbb{C}$. Primjetimo da integral $\int_0^\tau e^{-st} f(t)dt$ postoji kao Bochner-ov integral.

Definicija 2.4.1. **Abscisa konvergencije** *od $\hat{f}$ je definisana kao*

$$abs(f) = \inf\{Re(s) : \hat{f}(s) \ postoji\}.$$

U nastavku ćemo se baviti uslovima pod kojima Laplace-ov integral konvergira.

Stav 2.4.1. *Neka je $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+, X)$. Tada Laplace-ov integral $\hat{f}(s)$ konvergira ako je $Re(s) > abs(f)$ i divergira ako je $Re(s) < abs(f)$.*

Dokaz. Jasno je da $\hat{f}(s)$ ne postoji ako je $Re(s) < abs(f)$. Za $s_0 \in \mathbb{C}$ definišimo $G_0(t) = \int_0^t e^{-s_0 r} f(r)dr$ $(t \geq 0)$. Tada za sve $s \in \mathbb{C}$ i $t \geq 0$ parcijalna integracija daje

$$\begin{aligned} \textstyle\int_0^t e^{-sr} f(r)dr &= \textstyle\int_0^t e^{-(s-s_0)r} e^{-s_0 r} f(r)dr \\ &= e^{-(s-s_0)t} G_0(t) + (s - s_0) \textstyle\int_0^t e^{-(s-s_0)r} G_0(r)dr. \end{aligned}$$

Ako $\hat{f}(s_0)$ postoji, onda je G_0 ograničena. Iz prethodne jednakosti vidimo da $\hat{f}(s)$ postoji ako je $Re(s) > Re(s_0)$ i

$$\hat{f}(s) = (s - s_0) \int_0^\infty e^{-(s-s_0)r} G_0(r)dr \quad (Re(s) > Re(s_0)).$$

Iz posljednjeg vidimo da $\hat{f}(s)$ postoji ako je $Re(s) > abs(f)$. □

Iz prethodnog stava i definicije abscise konvergencije vidimo da ako $\hat{f}(s)$ konvergira za sve $s \in \mathbb{C}$, onda je $abs(f) = -\infty$. Ako je domen konvergencije prazan, onda je $abs(f) = \infty$.

Definicija 2.4.2. *Funkcija f ima Laplace-ovu transformaciju (Laplace transformabilna), ako je $abs(f) < \infty$.*

Definicija 2.4.3. *Apscisu konvergencije možemo i definisati sa*

$$abs(f) = \inf\{s \in \mathbb{R} : \sup_{t>0} |\int_0^t e^{-sr}\langle f(r), x^*\rangle dr| < \infty, \text{ za sve } x^* \in X^*\}.$$

Definicija 2.4.4. *Za funkciju $f : \mathbb{R}^+ \to X$, definišimo njenu eksponencijalnu granicu sa*

$$\omega(f) = \inf\{\omega \in \mathbb{R} : \sup_{t\geq 0} \|e^{-\omega t} f(t)\| < \infty\}.$$

Teorema 2.4.1. *Neka je $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+, X)$. Tada je $abs(f) = \omega(F - F_\infty)$, gdje je F primitivna funkcija od f, a $F_\infty := \lim_{t\to\infty} F(t)$ ako ovaj limes postoji, odnosno $F_\infty := 0$ u suprotnom slučaju.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $abs(f) < \infty$. Za $s_0 > abs(f)$ definišimo funkciju $G_0(t) = \int_0^t e^{-s_0 r} f(r)dr$ $(t \geq 0)$. Tada je G_0 neprekidna i konvergira kad $t \to \infty$, pa je prema tome i ograničena. Da bi dokazali da je $abs(f) \geq \omega(F - F_\infty)$ razmotrićemo tri slučaja.

1° $abs(f) > 0$

Tada je $F_\infty := 0$ i za $s_0 > abs(f)$ parcijalnom integracijom dobijamo

$$F(t) = \int_0^t f(r)dr = \int_0^t e^{s_0 r} e^{-s_0 r} f(r)dr = e^{s_0 t} G_0(t) - s_0 \int_0^t e^{s_0 r} G_0(r)dr.$$

Iz ovoga vidimo da je $\|F(t)\| \leq \sup_{r\geq 0} \|G_0(r)\| e^{s_0 t} + \sup_{r\geq 0} \|G_0(r)\|(e^{s_0 t} - 1) \leq 2\sup_{r\geq 0} \|G_0(r)\| e^{s_0 t}$ $(t \geq 0)$. Iz ovoga vidimo da je $abs(f) \geq \omega(F - F_\infty)$ za $abs(f) > 0$.

2° $abs(f) = 0$

Ako je $F_\infty := 0$, na isti način kao u slučaju 1° pokažemo da je $abs(f) \geq \omega(F - F_\infty)$. Ako $F_\infty := \lim_{t\to\infty} F(t)$ postoji, onda iz neprekidnosti F slijedi da je $\sup_{t\geq 0} \|F(t) - F_\infty\| < \infty$. Odatle je $abs(f) = 0 \geq \omega(F - F_\infty)$.

Pokazali smo da ako je $abs(f) = 0$, onda je $abs(f) \geq \omega(F - F_\infty)$.

3° $abs(f) < 0$

Izaberimo $abs(f) < s_0 < 0$. Za $\tau \geq t \geq 0$ je

$$\begin{aligned} F(\tau) - F(t) &= \textstyle\int_t^\tau e^{s_0 r} e^{-s_0 r} f(r)dr \\ &= e^{s_0 \tau} G_0(\tau) - e^{s_0 t} G_0(t) - s_0 \textstyle\int_t^\tau e^{s_0 r} G_0(r)dr. \end{aligned}$$

Kako je G_0 ograničena i $\lim_{\tau\to\infty} F(\tau) = F_\infty$, tada je za sve $t \geq 0$

$$\|F_\infty - F(t)\| = \|e^{s_0 t} G_0(t) + s_0 \int_t^\infty e^{-|s_0| r} G_0(r)dr\| \leq 2\sup_{r\geq 0} \|G_0(r)\| e^{s_0 t}.$$

Ovo dokazuje da je $abs(f) \geq \omega(F - F_\infty)$.

Da bi dokazali obrnutu nejednakost, pretpostavimo da je $\omega(F - F_\infty) < \infty$ i neka je $\omega > \omega(F - F_\infty)$. Kako je F neprekidna, tada postoji $M \geq 0$ takvo da je $\|F(t) - F_\infty\| \leq Me^{\omega t}$ za sve $t \geq 0$. Neka je $s > \omega > \omega(F - F_\infty)$. Parcijalnom integracijom dobijamo

$$\int_0^t e^{-sr} f(r)dr = e^{-st}(F(t) - F_\infty) + F_\infty + s\int_0^t e^{-sr}(F(r) - F_\infty)dr.$$

Odavde vidimo da $f(\hat{s})$ postoji za $s > \omega(F - F_\infty)$ i data je sa $\hat{f}(s) = F_\infty + s(\widehat{F - F_\infty})(s)$. Ovo pokazuje da je $abs(f) \leq \omega(F - F_\infty)$.
Kako je $s\widehat{F_\infty}(s) = s\int_0^\infty e^{-st} F_\infty dt = F_\infty$ za $Re(s) > 0$, onda je i

$$\hat{f}(s) = s\hat{F}(s) \quad za\ Re(s) > \max\{abs(f), 0\}.$$

□

Definicija 2.4.5. *Ako je operator $T : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X, Y)$ jako neprekidan, onda je $\int_0^t e^{-sr}T(r)dr$ ograničen i definišemo*

$$\begin{aligned} abs(T) &= \inf\{Re(s) :\ \textstyle\int_0^t e^{-sr}T(r)dr \text{ jako konvergira kad } t \to \infty\} \\ &= \sup\{abs(u_x) : x \in X\}, \end{aligned}$$

gdje je $u_x(t) = T(t)x$.

Da operator $T : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X, Y)$ jako konvergira kad $t \to \infty$ znači da $\lim_{t\to\infty} T(t)x$ postoji u Y za sve $x \in X$.

Stav 2.4.2. *Neka je $T : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X, Y)$ jako neprekidan, $S(t) = \int_0^t T(r)dr$ i neka je S_∞ jaki limes od $S(t)$ kad $t \to \infty$, ako takav limes postoji, odnosno $S_\infty = 0$ u suprotnom slučaju. Tada:*
a) $\lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-sr}T(r)dr$ postoji u normi operatora kad god je $Re(s) > abs(T)$.

b) $abs(T) = \inf\{s \in \mathbb{R} : \sup_{t>0} |\int_0^t e^{-sr}\langle T(r)x, y^*\rangle dr| < \infty,\ za\ sve\ x \in X\ i\ y^* \in Y^*\}.$
c) $abs(T) = \omega(S - S_\infty)$.

Dokaz. Dio pod a) slijedi iz Stava 2.4.1, dok dio pod b) slijedi iz Definicije 2.4.3. Ostaje nam da dokažemo dio pod c). Dokaz se izvodi na sličan način kao u dokazu Teoreme 2.4.1.
Neka je $u_x(t) = T(t)x$, $\tilde{v}_x(t) = S(t)x - S_\infty x$ i

$$v_x(t) = \begin{cases} S(t)x - \lim_{t\to\infty} S(t)x & \text{ako limes postoji} \\ S(t)x & \text{u suprotnom slučaju.} \end{cases}.$$

Po Teoremi 2.4.1 je $abs(u_x) = \omega(v_x)$. Šta više je $\omega(v_x) = \omega(\tilde{v}_x)$ ako je bar jedna od njih strogo pozitivna. Razlikovaćemo nekoliko slučajeva.
Ako je $abs(T) < 0$. Tada je $\omega(v_x) = abs(u_x) \leq abs(T) < 0$, pa $\lim_{t\to\infty} v_x(t)$ postoji za sve $x \in X$. Odatle $S(t)$ jako konvergira , pa je $v_x = \tilde{v}_x$ i vrijedi

$$\begin{aligned} abs(T) &= \sup\{abs(u_x) : x \in X\} \\ &= \sup\{\omega(v_x) : x \in X\} \\ &= \sup\{\omega(\tilde{v}_x) : x \in X\} \\ &= \omega(S - S_\infty). \end{aligned}$$

Dalje, pretpostavimo da je $\omega(S - S_\infty) < 0$. Tada, kao i u gornjem slučaju zaključujemo da $S(t)$ konvergira jako i vrijedi $abs(T) = \omega(S - S_\infty)$.
Sada pretpostavimo da je $abs(T) > 0$. Tada je

$$\begin{aligned} abs(T) &= \sup\{abs(u_x) : x \in X,\ abs(u_x) > 0\} \\ &= \sup\{\omega(v_x) : x \in X,\ \omega(v_x) > 0\} \\ &= \sup\{\omega(\tilde{v}_x) : x \in X,\ \omega(\tilde{v}_x) > 0\} \\ &= \omega(S - S_\infty). \end{aligned}$$

Na kraju pretpostavimo da je $\omega(S - S_\infty) > 0$. Na sličan način može se pokazati da je $abs(T) = \omega(S - S_\infty)$. □

Teorema 2.4.2. *Neka je $\Omega \subset \mathbb{C}$ otvoren i povezan skup i neka su $f_n : \Omega \to X$ $(n \in \mathbb{N})$ holomorfne funkcije takve da je*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}, z\in B(z_0,r)} \|f_n(z)\| < \infty,$$

kad god je $\bar{B}(z_0, r) \subset \Omega$. Dalje pretpostavimo da tačke limesa skupa

$$\Omega_0 = \{z \in \Omega : \lim_{n\to\infty} f_n(z) \text{ postoji}\}$$

pripadaju Ω. Tada postoji holomorfna funkcija $f : \Omega \to X$ takva da $f^{(k)}(z)$ uniformni limes od $f_n^{(k)}(z)$ kad $n \to \infty$ na svim kompaknim podskupovima od Ω i za sve $k \in \mathbb{N}_0$.

Teorema 2.4.3. *Neka je $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+, X)$ takva da je $abs(f) < \infty$. Tada je $s \mapsto \hat{f}(s)$ holomorfna za $Re(s) > abs(f)$ i za sve $n \in \mathbb{N}_0$ i $Re(s) > abs(f)$ vrijedi*

$$\hat{f}^{(n)}(s) = \int_0^\infty e^{-st}(-t)^n f(t)dt. \tag{2.2}$$

Dokaz. Definišimo $q_k : \mathbb{C} \to X$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ sa

$$q_k(s) = \int_0^k e^{-st} f(t)dt = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{s^n}{n!} \int_0^k (-t)^n f(t)dt.$$

Za s koje se nalazi u ograničenim podskupovima od $\mathbb{C}$ ovaj uniformni limes postoji. Na osnovu Teoreme 2.4.2, funkcije q_k su cijele i vrijedi $q_k^{(j)}(s) = \int_0^k e^{-st}(-t)^j f(t)dt$ za sve $j \in \mathbb{N}_0$. Neka je $Re(s) > s_0 > abs(f)$ i definišimo $G_0(t) = \int_0^t e^{-s_0 r} f(r)dr$. Na osnovu Stava 2.4.1 zaključujemo da je G_0 ograničena i parcijalnom integracijom dobijamo

$$\begin{aligned} \hat{f}(s) - q_k(s) &= \int_k^\infty e^{-(s-s_0)r} e^{-s_0 r} f(r)dr \\ &= -e^{-(s-s_0)k} G_0(k) + (s - s_0) \int_k^\infty e^{-(s-s_0)r} G_0(r)dr. \end{aligned}$$

Iz ovoga vidimo da q_k konvergira uniformno ka funkciji $\hat{f}$ na kompaktnim podskupovima od $\{s : Re(s) > abs(f)\}$. Ponovo, na osnovu Teoreme 2.4.2 zaključujemo da je $\hat{f}$ holomorfna i $q_k^{(j)}(s) \to \hat{f}^{(j)}(s)$ kad $k \to \infty$ za $Re(s) > abs(f)$. □

Definicija 2.4.6. *Ako je $abs(f) < \infty$, onda je abscisa holomorfnosti od $\hat{f}$ definisana sa*

$$hol(\hat{f}) = \inf\{\omega \in \mathbb{R} : \hat{f} \textit{ se holomorfno proširuje za } Re(s) > \omega\}.$$

Definicija 2.4.7. *Abscisa ograničenosti od $\hat{f}$ definisana je sa*

$$hol_0(\hat{f}) = \inf\{\omega \in \mathbb{R} : \hat{f} \textit{ ima ograničeno holomorfno proširenje za } Re(s) > \omega\}.$$

Stav 2.4.3. *Neka je $T : \mathbb{R}^+ \to\to \mathcal{L}(X, Y)$ jako neprekidan operator i neka je $abs(T) < \infty$. Tada je*

$$hol(T) = \sup\{hol(\widehat{u_x}) : \ x \in X\},$$

gdje je

$$hol(T) = \inf\{\omega \in \mathbb{R} : \hat{T} \textit{ se holomorfno proširuje na funkciju sa } \{Re(s) > \omega\} \textit{ na } \mathcal{L}(X, Y)\}.$$

Dokaz. Vidjeti u [8]. □

2.5. Osobine Laplace-ovog integrala

Stav 2.5.1. *Neka je* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+, X)$*,* $s, \lambda \in \mathbb{C}$*,* $r \in \mathbb{R}^+$ *i neka su*

$$\begin{aligned} g(t) &= e^{-\lambda t} f(t) \quad (t \geq 0). \\ f_r(t) &= f(r+t) \quad (t \geq 0). \\ h_r(t) &= \begin{cases} f(t-r) & ,(t \geq r) \\ 0 & ,(0 \leq t < r) \end{cases} \end{aligned}$$

Tada
a) $\hat{g}(s)$ *postoji ako i samo ako* $\hat{f}(s+\lambda)$ *postoji i vrijedi* $\hat{g}(s) = \hat{f}(s+\lambda)$*.*
b) $\widehat{f_r}(s)$ *postoji ako i samo ako* $\hat{f}(s)$ *postoji i vrijedi*

$$\widehat{f_r}(s) = e^{sr}(\hat{f}(s) - \int_0^r e^{-st} f(t)dt).$$

c) $\widehat{h_r}(s)$ *postoji ako i samo ako* $\hat{f}(s)$ *postoji i vrijedi* $\widehat{h_r}(s) = e^{-sr}\hat{f}(s)$*.*

Dokaz. Dokaz se izvodi po definiciji. □

Stav 2.5.2. *Neka je* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+, X)$ *i* $T \in \mathcal{L}(X, Y)$*. Tada* $T \circ f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+, Y)$*. Ako* $\hat{f}(s)$ *postoji, onda* $\widehat{T \circ f}(s)$ *postoji i* $\widehat{T \circ f}(s) = T(\hat{f}(s))$*.*

Dokaz. Na osnovu Stava 2.1.1 zaključujemo da $T \circ f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+, Y)$ i

$$\int_0^\tau e^{-st}(T \circ f)(t)dt = T\int_0^\tau e^{-st} f(t)dt.$$

Drugo tvrđenje dobijamo iz prethodne jednakosti puštajući $\tau \to \infty$. □

Stav 2.5.3. *Neka je* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+, X)$ *i neka je* A *zatvoren operator na* X*. Pretpostavimo da* $f(t) \in D(A)$ *skoro svuda i* $A \circ f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+, X)$ *i neka* $s \in \mathbb{C}$*. Ako* $\hat{f}(s)$ *i* $\widehat{A \circ f}(s)$ *postoje, onda je* $\hat{f}(s) \in D(A)$ *i* $\widehat{A \circ f}(s) = A(\hat{f}(s))$*.*

Dokaz. Kako je A zatvoren operator osnovu Stava 2.1.2 je

$$\int_0^\tau e^{-st}(A \circ f)(t)dt = A\int_0^\tau e^{-st} f(t)dt.$$

Drugo tvrđenje slijedi iz prethodne jednakosti puštajući $\tau \to \infty$. □

Teorema 2.5.1. *Ako* $k \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$*,* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+, X)$*,* $s \in \mathbb{C}$ *i ako pretpostavimo da je* $Re(s) > \max\{abs(|k|), abs(f)\}$*. Tada* $(\widehat{k * f})(s)$ *postoji i* $(\widehat{k * f})(s) = \hat{k}(s)\hat{f}(s)$*.*

Dokaz. Zamjenjujući $k(t)$ sa $e^{-st}k(t)$ i $f(t)$ sa $e^{-st}f(t)$ i korištenjem Stava 2.5.1 zaključujemo da je $s = 0$. Kako $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+, X)$, na osnovu Fubini-jeve teoreme zaključujemo da $k * f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+, X)$ i

$$\begin{aligned} \widehat{(k*f)}(0) &= \int_0^\infty (k*f)(t)dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^t k(t-r)f(r)drdt \\ &= \int_0^\infty (\int_r^\infty k(t-r)dt)f(r)dr \\ &= \hat{k}(0)\hat{f}(0). \end{aligned}$$

Pretpostavimo da $\hat{f}(0)$ postoji. Zamjenjujući $f(t)$ sa $f(t) - e^{-t}\hat{f}(0)$, možemo zaključiti da je $\hat{f}(0) = 0$.

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Tada postoji K takvo da je $\| \int_0^\tau f(r)dr\| < \varepsilon$ kad god je $\tau > K$. Tada je

$$\int_0^\tau (k*f)(t)dt = (1*(k*f))(\tau) = (k*(1*f))(\tau).$$

Dakle,

$$\begin{aligned} \| \int_0^\tau (k*f)(t)dt\| &\leq \| \int_0^K k(\tau-t)(\int_0^t f(r)dr)dt\| \\ &+ \| \int_K^\tau k(\tau-t)(\int_0^t f(r)dr)dt\| \\ &\leq \sup_{t\geq 0} \| \int_0^t f(r)dr\| \int_{\tau-K}^\tau |k(r)|dr + \varepsilon \int_0^{\tau-K} |k(r)|dr. \end{aligned}$$

Puštajući $\tau \to \infty$ dobijamo

$$\limsup_{\tau\to\infty} \| \int_0^\tau (k*f)(t)dt\| \leq \varepsilon \|k\|_1.$$

Kako je $\varepsilon > 0$ proizvoljno, dobijamo da je $\widehat{(k*f)}(t) = 0$ što je trebalo i dokazati. □

Stav 2.5.4. *Neka je $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+, X)$ i neka je $F(t) = \int_0^t f(r)dr$. Ako je $Re(s) > 0$ i $\hat{f}(s)$ postoji, onda $\hat{F}(s)$ postoji i vrijedi $\hat{F}(s) = \hat{f}(s)/s$.*

Stav 2.5.5. *Neka je $f : \mathbb{R}^+ \to X$ apsolutno neprekidna i diferencijabilna skoro svuda. Ako je $Re(s) > 0$ i ako $\widehat{f'}(s)$ postoji, onda i $\hat{f}(s)$ postoji i vrijedi $\widehat{f'}(s) = s\hat{f}(s) - f(0)$.*

Dokaz. Na osnovu Stava 2.2.2 zaključujemo da $f' \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+, X)$ i da je $f(t) - f(0) = \int_0^t f(r)dr$. Na osnovu Stava 2.5.4 dobijamo tvrdnju. □

2.6. Teoreme jedinstvenosti, aproksimacije i inverzije

Definicija 2.6.1. *Za skup S ograničenih linearnih funkcionala na separabilnom vektorskom prostoru X kažemo da je cio u X ako za svako $x \in X$ vrijedi $f(x) \neq 0$, gdje je $f \in S$.*

Lema 2.6.1. *Neka su $a, b > 0$ i definišimo $s_n = a + nb$ i $e_{-s_n}(t) = e^{-s_n t}$, $(n \in \mathbb{N}_0,\ t \geq 0)$. Tada je skup $\{e_{-s_n} : n \in \mathbb{N}_0\}$ cio u $L^1(\mathbb{R}^+)$.*

Teorema 2.6.1. *(Teorema jedinstvenosti) Neka su $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+, X)$ takve da je $abs(f) < \infty$, $abs(g) < \infty$ i neka je $s_0 > \max\{abs(f), abs(g)\}$. Pretpostavimo da je $\hat{f}(s) = \hat{g}(s)$ kad god je $s > s_0$. Tada je $f(t) = g(t)$ skoro svuda.*

Definicija 2.6.2. *Niz $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kompleksnih brojeva naziva se jedinstvenim nizom Laplace-ove transformacije ako je $f = 0$ skoro svuda kad god je $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+, X)$, $abs(f) < Re(s_n)$ za sve n i $\hat{f}(s_n) = 0$ za sve n.*

Definicija 2.6.3. *Familija funkcija $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je ekvineprekidna ako su sve funkcije iz te familije neprekidne i imaju jednake varijacije u datom domenu.*

Definicija 2.6.4. *Neka je $f : X \to Y$ preslikavanje za koje vrijedi*
i) f je surjektivno
ii) f je neprekidno
iii) ako je za $U \subset Y$, $f^{-1}(U)$ otvoren u X, onda je U otvoren u Y,
kažemo da je količničko preslikavanje.

Teorema 2.6.2. *(Teorema aproksimacije) Neka su funkcije $f_n \in C(\mathbb{R}^+, X)$ takve da je $\|f_n(t)\| \leq Me^{\omega t}$ za neko $M > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ i sve $n \in \mathbb{N}$ i neka je $s_0 \geq \omega$. Tada su slijedeće tvrdnje ekvivalentne:*
i) Laplace-ova transformacija $\hat{f}_n$ konvergira tačku po tačku na (s_0, ∞) i familija funkcija $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je ekvineprekidna na $\mathbb{R}^+$.
ii) Funkcija f_n konvergira uniformno na kompaktnim podskupovima od $\mathbb{R}^+$.

Dokaz. Prostor $c(X) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in X \text{ i } \lim_{n\to\infty} x_n \text{ postoji }\}$ je zatvoren potprostor od $l^\infty(X) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in X \text{ i } \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty\}$. Definišimo $w : \mathbb{R}^+ \to l^\infty(X)$ sa $w(t) = \{f_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$.
Sada pretpostavimo da vrijedi i). Ekvineprekidnost od f_n povlači neprekidnost od w, a iz konvergencije $\hat{f}_n(s)$ dobijamo da je $\hat{w}(s) = \{\hat{f}_n(s)\}_{n\in\mathbb{N}} \in c(X)$ za sve

$s > s_0$. Posmatrajmo sada količničko preslikavanje $q : l^\infty(X) \to l^\infty(X)/c(X)$. Tada je $\widehat{(q \circ w)}(s) = q(\hat{w}(s)) = 0$ za sve $s > s_0$. Kako je $q \circ w : \mathbb{R}^+ \to l^\infty(X)/c(X)$ neprekidno (kao kompozicija neprekidnih preslikavanja) iz Teoreme jedinstvenosti slijedi da je $(q \circ w)(t) = 0$ za sve $t \geq 0$, a to znači da $w(t) \in c(X)$ za sve $t \geq 0$. Odatle imamo konvergenciju tačku po tačku niza $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Kako je niz $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ekvineprekidan, iz ovoga možemo zaključiti da funkcija f_n konvergira uniformno na kompaktnim podskupovima od $\mathbb{R}^+$.
Pretpostavimo sada da vrijedi ii). Jasno je da iz uniformne konvergencije slijedi ekvineprekidnost. Neka je $f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$. Tada na osnovu Teoreme 2.1.2 slijedi da je $\hat{f}(s) = \lim_{n\to\infty} \widehat{f_n}(s)$ za sve $s > s_0$. □

Stav 2.6.1. *Neka je A zatvoren linearan operator na X i neka su $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+, X)$ takve da je $abs(f) < \infty$, $abs(g) < \infty$ i neka je $\omega > \max\{abs(f), abs(g)\}$. Tada su slijedeća tvrđenja ekvivalentna:*
i) $f(t) \in D(A)$ i $Af(t) = g(t)$ skoro svuda na $\mathbb{R}^+$.
ii) $\hat{f}(s) \in D(A)$ i $A\hat{f}(s) = \hat{g}(s)$ za $s > \omega$.

Dokaz. Iz Stava 2.5.3 slijedi da i) povlači ii). Dokažimo *ii)* $\Rightarrow$ *i)*.
Neka je G_A graf operatora A koji je zatvoren potprostor od $X \times X$ i neka je $q : X \times X \to (X \times X)/G_A$ količničko preslikavanje. Definišimo preslikavanje $h : \mathbb{R}^+ \to (X \times X)/G_A$ sa $h(t) = q(f(t), g(t))$. Tada je na osnovu ii) $\hat{h}(s) = q(\hat{f}(s), \hat{g}(s)) = 0$ za sve $s > \omega$, pa je na osnovu Teoreme jedinstvenosti $h(t) = 0$ skoro svuda. □

Definicija 2.6.5. *Tačka $t \in [a, b]$ se naziva Lebesgue-ova tačka funkcije $f \in L^1([a, b], X)$ ako je $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|f(r) - f(t)\| dr = 0$.*

Teorema 2.6.3. *(Post-Widder) Neka je $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+, X)$ i pretpostavimo da je $abs(f) < \infty$ i tačka $t > 0$ Lebesgue-ova tačka od f. Tada je*

$$f(t) = \lim_{k\to\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} (\frac{k}{t})^{k+1} \hat{f}^{(k)}(\frac{k}{t}).$$

2.7. Riemann-Stieltjesov integral

U prethodnoj glavi smo se već upoznali sa Riemann-Stieltjesovim integralom. Ovdje ćemo definisati još neke pojmove i dati neka dodatna tvrđenja, a sve to na Banahovim prostorima. Pored funkcija ograničene varijacije, definisaćemo pojmove kao što su funkcije ograničene semivarijacije i slabe ograničene varijacije. Neka je X Banahov prostor.

Definicija 2.7.1. *Funkcija $F : [a,b] \to X$ je* **ograničene semivarijacije** *ako postoji $M \geq 0$ takvo da je $\| \sum_i (F(t_i) - F(r_i))\| \leq M$ za svaki konačan izbor disjunktnih intervala (r_i, t_i) u $[a,b]$. Prostor tavkvih funkcija označavamo sa $BSV([a,b], X)$.*

Funkcija $F : [a,b] \to X$ pripada $BSV_{loc}([a,b], X)$ ako je ograničene semivarijacije na svakom kompaktnom podintervalu od $\mathbb{R}^+$.

Definicija 2.7.2. *Funkcija $F : [a,b] \to X$ je* **slabe ograničene varijacije** *ako je $x^* \circ F : t \mapsto \langle F(t), x^* \rangle$ ograničene varijacije za sve $x^* \in X^*$.*

Definicija 2.7.3. *Familija $\mathcal{F} \in \mathcal{B}(X,Y)$ je ravnomjerno ograničena ako postoji konstanta M takva da je $\|A_n\| \leq M$ za svako $A_n \in \mathcal{F}$ i za sve $n \in \mathbb{N}$.*

Definicija 2.7.4. *Familija $\mathcal{F} \in \mathcal{B}(X,Y)$ je tačku po tačku ograničena ako je za svako $x \in X$ $\sup_{A_n \in \mathcal{F}} \|A_n x\|_Y < +\infty$.*

Napomena 2.7.1. *Ako je familija $\mathcal{F} \in \mathcal{B}(X,Y)$ ravnomjerno ograničena, onda je i $\mathcal{F}$ tačku po tačku ograničena.*

Teorema 2.7.1. *(Banach-Steinhaus) Neka je X Banahov, a Y normiran prostor i $\mathcal{F} \in \mathcal{B}(X,Y)$ je tačku po tačku ograničena. Tada je $\mathcal{F}$ je ravnomjerno ograničena.*

Stav 2.7.1. *Funkcija $F : [a,b] \to X$ je ograničene semivarijacije ako i samo ako je slabe ograničene varijacije.*

Dokaz. Neka je funkcija F slabe ograničene varijacije i neka je $S_\Omega = \sum_i (F(t_i) - F(r_i))$, gje je Ω unija konačno mnogo disjunktnih intervala (r_i, t_i) u $[a,b]$. Tada za svako $x^* \in X^*$ postoji $M_{x^*} = V_{[a,b]}(x^* \circ F)$ takvo da je $|\langle S_\Omega, x^* \rangle| \leq M_{x^*}$ za sve takve Ω. Na osnovu teoreme Banach-Steinhaus-a zaključujemo da je F ograničene semivarijacije.
Sada pretpostavimo da je F ograničene semivarijacije. Tada postoji $M \geq 0$ takvo da je $\| \sum_i (F(t_i) - F(r_i))\| \leq M$ za svaki konačan izbor intervala (r_i, t_i) koji se ne preklapaju u $[a,b]$. Neka je $x^* = x_1^* + i x_2^*$ gdje su x_1 i x_2 realni linearni funkcionali. Praveći razliku između podintervala na kojima su brojevi $\langle F(t_i) - F(r_i), x_1^* \rangle$ i $\langle F(t_i) - F(r_i), x_2^* \rangle$ ili oba pozitivna ili oba negativna, dolazimo do tvrđenja. $\square$

Stav 2.7.2. *Ako je funkcija $F : [a,b] \to X$ ograničene varijacije, a $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ ograničena i integral $\int_a^b g(t) dF(t)$ postoji, onda je*

$$\| \int_a^b g(t) dF(t) \| \leq \sup_{t \in [a,b]} \|g(t)\| V_{[a,b]}(F).$$

Stav 2.7.3. *Ako je funkcija* $F : [a,b] \to X$ *ograničene semivarijacije, a* $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ *ograničena i integral* $\int_a^b g(t)dF(t)$ *postoji, onda je*

$$\| \int_a^b g(t)dF(t)\| \leq 4M \sup_{t\in[a,b]} \|g(t)\|,$$

gdje je

$$M = \sup\{\| \sum_i (F(t_i) - F(r_i))| \ : (r_i, t_i) \text{ su disjunktni podintervali od } [a,b]\}.$$

Dokaz. Dokaz izvodimo iz Stava 2.7.1. □

Napomena 2.7.2. *Ako je* P *podjela intervala* $[a,b]$ *takva da je* $a = t_0 < ... < t_n = b$ *pri čemu* $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, *a P' podjela intervala* $[a,b]$ *takva da je* $a = \xi_0 \leq ... \leq \xi_{n+1} = b$ *pri čemu* $t_i \in [\xi_i, \xi_{i+1}]$ *tada je* $d(P') \leq 2d(P)$ *i vrijedi*

$$\int_a^b g(t)dF(t) = g(b)F(b) - g(a)F(a) - \int_a^b F(t)dg(t). \tag{2.3}$$

Stav 2.7.4. *Neka su* $F : [a,b] \to X$ *i* $g : [a,b] \to \mathbb{C}$. *Ako je jedna od funkcija neprekidna, a druga ograničene semivarijacije, onda su F i g Riemann-Stieltjes integrabilne u odnosu jedna na drugu.*

Dokaz. Razlikovaćemo dva slučaja:
1° Ako je F ograničene semivarijacije, a g neprekidna. Tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takvo da je $|g(\xi_1) - g(\xi_2)| < \varepsilon$ kad god je $|\xi_1 - \xi_2| < \delta$. Neka su P_1 i P_2 podjele intervala $[a,b]$ takve da je $d(P_1) < \frac{\delta}{2}$ i $d(P_2) < \frac{\delta}{2}$ i neka su $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ tačke zajedničke podjele za P_1 i P_2 . Tada je

$$\sigma(P, \xi, F, g) = \sum_{i=1}^{n} g(\xi_{j,i})(F(t_i) - F(t_{i-1})),$$

gdje tačke $\xi_{j,i}$, t_i i t_{i-1} pripadaju istom podintervalu od P_j, $j = 1, 2$. Vrijedi i $|\xi_{1,i} - \xi_{2,i}| < \delta$. Za $x^* \in X^*$ je

$$\begin{aligned} |\langle\sigma(P_1, \xi, F, g) - \sigma(P_2, \xi, F, g), x^*\rangle| &= |\textstyle\sum_{i=1}^n (g(\xi_{1,i}) - g(\xi_{2,i}))\langle(F(t_i) - F(t_{i-1})), x^*\rangle| \\ &< \varepsilon \textstyle\sum_{i=1}^n |\langle(F(t_i) - F(t_{i-1})), x^*\rangle| \\ &\leq 4\varepsilon M\|x^*\|, \end{aligned}$$

gdje je M dato u Stavu 2.7.3. Na osnovu Cauchy-jeve teoreme o konvergenciji zaključujemo da postoji $\int_a^b g(t)dF(t)$.
2° Ako je g ograničene semivarijacije, a F neprekidna. Na osnovu Stava 2.7.1 je funkcija g ograničene varijacije. Iz neprekidnosti F je: za svako $\varepsilon > 0$ postoji

$\delta > 0$ takvo da je $\|F(\xi_1) - F(\xi_2)\| < \varepsilon$ kad god je $|\xi_1 - \xi_2| < \delta$. Na sličan način kao u 1° se pokazuje da je

$$\|\sigma(P_1, \xi, g, F) - \sigma(P_2, \xi, g, F)\| \leq \varepsilon V_{[a,b]}(g),$$

kad god je $d(P_1) < \frac{\delta}{2}$ i $d(P_2) < \frac{\delta}{2}$. Odavde zaključujemo da integral $\int_a^b F(t)dg(t)$ postoji. $\square$

Stav 2.7.5. *Neka je funkcija $F : [a,b] \to X$ ograničene semivarijacije i neka je $g \in C^1[a,b]$. Tada je Fg' Riemann integrabilna i vrijedi*

$$\int_a^b F(t)dg(t) = \int_a^b F(t)g'(t)dt.$$

Stav 2.7.6. *Neka je $F : [a,b] \to X$ ograničene semivarijacije i neka su $g, h \in C[a,b]$. Tada je $G(t) = \int_a^t h(\xi)dF(\xi)$ ograničene semivarijacije na $[a,b]$ i vrijedi*

$$\int_a^b g(t)dG(t) = \int_a^b g(t)h(t)dF(t).$$

Dokaz. Neka je M takvo da je $|h(t)| \leq M$ za sve $t \in [a,b]$ i neka je P podjela intervala $[a,b]$. Tada, na osnovu Stava 2.7.2, za sve $x^* \in X^*$ je

$$\sum_i |\langle G(t_i) - G(t_{i-1}), x^*\rangle| = \sum_i |\int_{t_{i-1}}^{t_i} h(\xi)d\langle F(\xi), x^*\rangle| \leq MV_{[a,b]}(x^* \circ F).$$

Iz Stava 2.7.1 slijedi da je G ograničene semivarijacije. Na osnovu Stava 2.7.4 zaključujemo da integrali $\int_a^b g(t)dG(t)$ i $\int_a^b g(t)h(t)dF(t)$ postoje. Za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takvo da je $|g(\xi') - g(\xi)| < \varepsilon$ kad god je $|\xi' - \xi| < \delta$. Ako je $d(P) < \delta$, onda je

$$\begin{aligned} |\langle(\sigma(P, \xi, G, g) - \textstyle\int_a^b g(t)h(t)dF(t)), x^*\rangle| &= |\textstyle\sum_i \int_{t_{i-1}}^{t_i}(g(\xi_i) - g(t))h(t)d\langle F(t), x^*\rangle| \\ &\leq \varepsilon MV_{[a,b]}(x^* \circ F). \end{aligned}$$

Iz ovoga slijedi da je

$$\langle \int_a^b g(t)dG(t) - \int_a^b g(t)h(t)dF(t), x^*\rangle = 0.$$

Tvrđenje slijedi na osnovu teoreme Hahn-Banach-a. $\square$

Stav 2.7.7. *Neka su $F : [a,b] \to X$ i $g : [a,b] \to \mathbb{C}$. Ako je F primitivna funkcija Bochner integrabilne funkcije f i ako je g neprekidna, onda $\int_a^b g(t)dF(t)$ postoji i jednak je Bochner-ovom integralu $\int_a^b g(t)f(t)dt$. Ako je F neprekidna i g apsolutno neprekidna, tada je $\int_a^b F(t)dg(t)$ jednak Bochner-ovom integralu $\int_a^b F(t)g'(t)dt$.*

2.8. Laplace-Stiltjes-ov integral

Definicija 2.8.1. *Neka je X Banahov prostor i $F \in BSV_{loc}(\mathbb{R}^+, X)$. Laplace-Stieltjes-ova transformacija funkcije F je data sa*

$$\widehat{dF}(s) = \int_0^\infty e^{-st} dF(t) = \lim_{\tau \to \infty} \int_0^\tau e^{-st} dF(t),$$

ako gornji limes postoji, gdje je $s \in \mathbb{C}$.

Laplace-Stieltjes-ova transformacija je uopštenje Laplace-ove transformacije. U nastavku ćemo se baviti nekim osobinama Laplace-Stieltjes-ove transformacije. Slijedeći stav je uopštenje Stava 2.5.1 i glasi:

Stav 2.8.1. *Neka je $F \in BSV_{loc}(\mathbb{R}^+, X)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ i definišimo $G(t) = \int_0^t e^{-\lambda r} dF(r)$ $(t \geq 0)$. Za $s \in \mathbb{C}$, $\widehat{dG}(s)$ postoji ako i samo ako $\widehat{dF}(s+\lambda)$ postoji i vrijedi $\widehat{dG}(s) = \widehat{dF}(s+\lambda)$.*

Dokaz. Na osnovu Stava 2.7.6 je

$$\int_0^\tau e^{-st} dG(t) = \int_0^\tau e^{-(s+\lambda)t} dF(t).$$

Puštajući da $\tau \to \infty$ dobijamo tvrdnju. □

Definicija 2.8.2. *Za $F \in BSV_{loc}(\mathbb{R}^+, X)$, definišimo abscisu konvergencije Laplace-Stieltjes-ovog integrala sa*

$$abs(dF) = \inf\{Re(s) : \widehat{dF}(s) \text{ postoji}\}.$$

Apscisu konvergencije Laplace-Stieltjes-ovog integrala možemo i definisati sa

$$abs(dF) = \inf\{s \in \mathbb{R} : \sup_{t>0} |\int_0^t e^{-sr} d\langle F(r), x^* \rangle| < \infty, \ za \ sve \ x^* \in X^*\}.$$

Definicija 2.8.3. *Za funkciju $F \in BSV_{loc}(\mathbb{R}^+, X)$, definišimo njenu eksponencijalnu granicu sa*

$$\omega(F) = \inf\{\omega \in \mathbb{R} : \sup_{t \geq 0} \|e^{-\omega t} F(t)\| < \infty\}.$$

Teorema 2.8.1. *Neka je $F \in BSV_{loc}(\mathbb{R}^+, X)$. Tada $\widehat{dF}(s)$ konvergira ako je $Re(s) > abs(dF)$ i divergira ako je $Re(s) < abs(dF)$.*

Dokaz. Jasno je da $\widehat{dF}(s)$ ne postoji ako je $Re(s) < abs(dF)$. Za $s_0 \in \mathbb{C}$ definišimo $G_0(t) = \int_0^t e^{-s_0 r} dF(r)$ $(t \geq 0)$. Tada za sve $s \in \mathbb{C}$ i $t \geq 0$ na osnovu Stava 2.7.6 je

$$\int_0^t e^{-sr} dF(r) = \int_0^t e^{-(s-s_0)r} dG_0(r).$$

Parcijalnom integracijom jednačine (2.3) i na osnovu Stava 2.7.5 dobijamo

$$\int_0^t e^{-sr} dF(r) = e^{-(s-s_0)t} G_0(t) + (s - s_0) \int_0^t e^{-(s-s_0)r} G_0(r) dr. \tag{2.4}$$

Ako $\widehat{dF}(s_0)$ postoji, onda je G_0 ograničena. Prema tome, $\widehat{dF}(s)$ postoji ako je $Re(s) > Re(s_0)$ i

$$\widehat{dF}(s) = (s - s_0) \int_0^\infty e^{-(s-s_0)r} G_0(r) dr \quad (Re(s) > Re(s_0)).$$

Iz posljednjeg vidimo da $\widehat{dF}(s)$ postoji ako je $Re(s) > abs(dF)$. □

Teorema 2.8.2. *Neka je $F \in BSV_{loc}(\mathbb{R}^+, X)$. Tada je $abs(dF) = \omega(F - F_\infty)$, gdje je $F_\infty := \lim_{t\to\infty} F(t)$ ako ovaj limes postoji, odnosno $F_\infty := 0$ u suprotnom slučaju.*

Dokaz. Za $s_0 > abs(dF)$ definišimo funkciju $G_0(t) = \int_0^t e^{-s_0 r} dF(r) dr$ $(t \geq 0)$. Tada je G_0 neprekidna i konvergira kad $t \to \infty$, pa je prema tome i ograničena. Da bi dokazali da je $abs(dF) \geq \omega(F - F_\infty)$ razmotrićemo dva slučaja.

1° $abs(dF) \geq 0$

Ako je $abs(dF) \geq 0$ i $s_0 > abs(dF)$. Iz Stava 2.7.5, Stava 2.7.6 i pacijalnom integracijom jednačine (2.3) dobijamo

$$F(t) = F(0) + \int_0^t e^{s_0 r} dG_0(r) = F(0) + e^{s_0 t} G_0(t) - s_0 \int_0^t e^{s_0 r} G_0(r) dr,$$

za sve $t \geq 0$. Iz ovoga vidimo da je $\sup_{t\geq 0} \|e^{-s_0 t}(F(t) - F_\infty)\| < \infty$. Odavde je $abs(dF) \geq \omega(F - F_\infty)$.

2° $abs(dF) < 0$

Izaberimo $abs(dF) < s_0 < 0$. Za $\tau \geq t \geq 0$ je

$$\begin{aligned} F(\tau) - F(t) &= \textstyle\int_t^\tau e^{s_0 r} dG_0(r) \\ &= e^{s_0 \tau} G_0(\tau) - e^{s_0 t} G_0(t) - s_0 \textstyle\int_t^\tau e^{s_0 r} G_0(r) dr. \end{aligned}$$

Zaključujemo da limes

$$\lim_{\tau\to\infty} F(\tau) = F_\infty = F(t) - e^{s_0 t} G_0(t) - s_0 \int_t^\infty e^{s_0 r} G_0(r) dr$$

postoji i $\sup_{t\geq 0} \|e^{-s_0 t}(F(t) - F_\infty)\| < \infty$. Prema tome je $abs(f) \geq \omega(F - F_\infty)$.

Da bi dokazali obrnutu nejednakost, pretpostavimo da je $\omega > \omega(F - F_\infty)$. Kako je F neprekidna, tada postoji $M \geq 0$ takvo da je $\|F(t) - F_\infty\| \leq M e^{\omega t}$ za sve $t \geq 0$. Neka je $s > \omega > \omega(F - F_\infty)$. Parcijalnom integracijom dobijamo

$$\int_0^t e^{-sr} dF(r) = e^{-st}(F(t) - F_\infty) + F_\infty - F(0) + s \int_0^t e^{-sr}(F(r) - F_\infty) dr.$$

Odavde vidimo da $\widehat{dF}(s)$ postoji za $s > \omega(F - F_\infty)$ i data je sa $\widehat{dF}(s) = F_\infty - F(0) + s(\widehat{F - F_\infty})(s)$. Ovo pokazuje da je $abs(dF) \leq \omega(F - F_\infty)$.

$\square$

Slijedeća teorema je uopštenje Teoreme 2.4.3 i glasi:

Teorema 2.8.3. *Neka je $f \in BSV_{loc}(\mathbb{R}^+, X)$ i pretpostavimo da je $abs(dF) < \infty$. Tada je $s \mapsto \widehat{dF}(s)$ holomorfna za $Re(s) > abs(dF)$ i za sve $n \in \mathbb{N}_0$ i $Re(s) > abs(dF)$ vrijedi*

$$\widehat{dF}^{(n)}(s) = \int_0^\infty e^{-st}(-t)^n dF(t). \tag{2.5}$$

Dokaz. Definišimo $q_k : \mathbb{C} \to X$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ sa $q_k(s) = \int_0^k e^{-st} dF(r)$. Iz Stava 2.7.3 je

$$q_k(s) = \int_0^k e^{-st} dF(t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{s^n}{n!} \int_0^k (-t)^n dF(t).$$

Na osnovu Teoreme 2.4.2, funkcije q_k su cijele i vrijedi $q_k^{(j)}(s) = \int_0^k e^{-st}(-t)^j dF(t)$ za sve $j \in \mathbb{N}_0$. Neka je $Re(s) > s_0 > abs(dF)$ i definišimo $G_0(t) = \int_0^t e^{-s_0 r} dF(r)$. Na osnovu Stava 2.7.5, Stava 2.7.6 i jednakosti (2.3) zaključujemo da je

$$\begin{aligned} \widehat{dF}(s) - q_k(s) &= \textstyle\int_k^\infty e^{-(s-s_0)r} dG_0(r) \\ &= -e^{-(s-s_0)k} G_0(k) + (s - s_0) \textstyle\int_k^\infty e^{-(s-s_0)r} G_0(r) dr. \end{aligned}$$

Iz ovoga vidimo da q_k konvergira uniformno ka funkciji $\widehat{dF}$ na kompaktnim podskupovima od $\{s : Re(s) > abs(dF)\}$. Ponovo, na osnovu Teoreme 2.4.2 zaključujemo da je $\widehat{dF}$ holomorfna i $q_k^{(j)}(s) \to \widehat{dF}^{(j)}(s)$ kad $k \to \infty$ za $Re(s) > abs(dF)$. $\square$

Posmatrajmo funkciju $T : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X, Y)$. Na teoreme Banach-Steinhaus-a je $T \in BSV_{loc}(\mathbb{R}^+, \mathcal{L}(X, Y))$ ako i samo ako $v_x = T(\cdot)x \in BSV_{loc}(\mathbb{R}^+, Y)$ za sve $x \in X$.

Definicija 2.8.4. *Ako je $T \in BSV_{loc}(\mathbb{R}^+, \mathcal{L}(X, Y))$, definišimo tada*

$$\omega(T) = \inf\{\omega \in \mathbb{R} : \sup_{t\geq 0} \|e^{-\omega t} T(t)\| < \infty\}$$

i

$$\begin{aligned} abs(dT) &= \inf\{Re(s) : \textstyle\int_0^t e^{-sr} dT(r) \text{ jako konvergira kad } t \to \infty\} \\ &= \sup\{abs(dv_x) : x \in X\}. \end{aligned}$$

Stav 2.8.2. *Neka je* $T \in BSV_{loc}(\mathbb{R}^+, \mathcal{L}(X,Y))$ *i neka je* T_∞ *jaki limes od* $T(t)$ *kad* $t \to \infty$ *ako takav limes postoji, odnosno* $T_\infty = 0$ *u suprotnom slučaju. Tada:*
a) $\lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-sr} dT(r)$ *postoji u normi operatora kad god je* $Re(s) > abs(dT)$.
b) $abs(dT) = \omega(T - T_\infty)$.

Dokaz. Ako integral $\int_0^t e^{-sr} dT(r)$ jako konvergira kad $t \to \infty$, tada ovaj integral uniformno konvergira u normi operatora. Na osnovu ovoga i jednakosti (2.4) dobijamo tvrđenje pod a). Na osnovu prethodne teoreme je

$$\begin{aligned} abs(dT) &= \inf\{Re(s) : \int_0^t e^{-sr} dT(r) \text{ konvergira u normi } t \to \infty\} \\ &= \omega(T - \tilde{T}_\infty), \end{aligned}$$

gdje je $\tilde{T}_\infty = \|\lim_{t\to\infty} T(t)\|$ ako navedeni limes postoji, odnosno $\tilde{T}_\infty = 0$ u suprotnom slučaju. Odavde je $\omega(T - \tilde{T}_\infty) = \omega(T - T_\infty)$. Dokazali smo b). $\square$

2.9. Riesz-Stieltjes-ov operator

Definišimo prostor $Lip_0(\mathbb{R}^+, X)$ sa

$$Lip_0(\mathbb{R}^+, X) = \{F : \mathbb{R}^+ \to X : F(0) = 0, \ \|F\|_{Lip_0(\mathbb{R}^+,X)} = \sup_{t,r\geq 0} \frac{\|F(t) - F(r)\|}{|t-r|} < \infty\}.$$

U ovom poglavlju ćemo se baviti Riesz-Stieltjesovim operatorom u oznaci Φ_S koji funkciji $F \in Lip_0(\mathbb{R}^+, X)$ dodjeljuje ograničen linearan operator $T_F : L^1(\mathbb{R}^+) \to X$ definisan sa

$$T_F f = \int_0^\infty f(t) dF(t) = \lim_{\tau\to\infty} \int_0^\tau f(t) dF(t),$$

ako ovaj limes postoji i ako je funkcija $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$ neprekidna. Posebna pažnja biće i posvećena Laplace-Stieltjes-ovoj transformaciji $\mathcal{L}_S : F \to \widehat{dF}$ koja djeluje na prostoru $Lip_0(\mathbb{R}^+, X)$, dok ćemo Laplace-ovu transformaciju $\mathcal{L} : f \to \hat{f}$ posmatrati kao operator koji djeluje na prostoru $L^\infty(\mathbb{R}^+, X)$

Definicija 2.9.1. *Neka u* X *i* Y *normirani prostori. Linearno preslikavanje* $\varphi : X \to Y$ *takvo da za svaki* $x \in X$ *vrijedi* $\|\varphi(x)\|_Y = \|x\|_X$ *nazivamo izometrijom. Ako je* φ *bijektivna izometrija, onda kažemo da su normirani prostori* X *i* Y *izometrički izomorfni.*

Teorema 2.9.1. *(Riesz-Stieltjes-ova teorema) Postoji jedinstven izometrički izomorfizam* $\Phi_S : F \to T_F$ *sa* $Lip_0(\mathbb{R}^+, X)$ *na* $\mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}^+), X)$ *takav da vrijedi*

$$T_F \chi_{[0,t]} = F(t)$$

za sve $t \geq 0$ *i* $F \in Lip_0(\mathbb{R}^+, X)$. *Šta više je*

$$T_F g = \int_0^\infty g(t)dF(t) = \lim_{\tau\to\infty} \int_0^\tau g(t)dF(t)$$

za sve neprekidne funkcije $g \in L^1(\mathbb{R}^+)$.

Dokaz. Neka je $D = lin\{\chi_{[0,t)} : t > 0\}$ prostor stepenastih funkcija koji je gust u $L^1(\mathbb{R}^+)$. Tada se svaka funkcija $f \in D$ na jedinstven način može prikazati u obliku

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{[t_{i-1},t_i)},$$

gdje je $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$ $(i = 1, 2, ..., n)$. Neka je $F \in Lip_0(\mathbb{R}^+, X)$ i definišimo $T_F : D \to X$ sa

$$T_F(f) = T_F(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{[t_{i-1},t_i)}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (F(t_i) - F(t_{i-1})).$$

Tada je

$$\|T_F(f)\| \leq \|F\|_{Lip_0(\mathbb{R}^+,X)} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|(t_i - t_{i-1}) = \|F\|_{Lip_0(\mathbb{R}^+,X)} \|f\|_1.$$

Dakle, funkcija T_F ima jedinstveno proširenje $T_F \in \mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}^+), X)$. Šta više je

$$\|T_F\| \leq \|F\|_{Lip_0(\mathbb{R}^+,X)}.$$

Dokažimo sada da je $\|T_F\| \geq \|F\|_{Lip_0(\mathbb{R}^+,X)}$. Ako $T \in \mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}^+), X)$ i neka je $F(t) = T\chi_{[0,t)}$ za $t \geq 0$. Tada za $t > r \geq 0$ je

$$\|F(t) - F(r)\| = \|T\chi_{[r,t)}\| \leq \|T\| \|\chi_{[r,t)}\|_1 = \|T\|(t - r).$$

Dakle, $F \in Lip_0(\mathbb{R}^+, X)$ i $\|T\| \geq \|F\|_{Lip_0(\mathbb{R}^+,X)}$. Po definiciji je $F = G$ ako je $T = T_F$ i $T = T_G$. Pokazali smo da je $F \mapsto T_F$ izometrički izomorfizam.
Na kraju, pretpostavimo da je $g \in L^1(\mathbb{R}^+)$ neprekidna funkcija i $F \in Lip_0(\mathbb{R}^+, X)$. Uzmimo $t > 0$ i neka je $P : 0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = t$ podjela intervala $[0, t]$ i $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Ako je

$$f_P = \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\chi_{[t_{i-1},t_i)}$$

onda je $\sigma(P, \xi, F, g) = T_F(f_P)$. Kad $d(P) \to 0$, onda je $\|f_P - g\chi_{[0,t)}\|_1 \to 0$ i

$$\int_0^t g(r)dF(r) = T_F(g\chi_{[0,t)}).$$

Kada $t \to \infty$, $\|g\chi_{[0,t)} - g\|_1 \to 0$ i

$$T_F g = \int_0^\infty g(r)dF(r).$$

□

Teorema 2.9.2. *Neka je $M > 0$, $F_n \in Lip_0(\mathbb{R}^+, X)$ gdje je $\|F_n\|_{Lip_0(\mathbb{R}^+,X)} \leq M$ za sve $n \in \mathbb{N}$ i $r_n = \mathcal{L}_S(F_n)$. Slijedeća tvrđenja su ekvivalentna:*
i) Postoje $a, b > 0$ takvi da $\lim_{n\to\infty} r_n(a + kb)$ postoji za sve $k \in \mathbb{N}_0$.
ii) Postoji $r \in C^\infty((0, \infty), X)$ takvo da $r_n \to r$ uniformno na kompaktnim podskupovima od $(0, \infty)$.
iii) $\lim_{n\to\infty} F_n(t)$ postoji za sve $t \geq 0$.
iv) Postoji $F \in Lip_0(\mathbb{R}^+, X)$ takvo da $F_n \to F$ uniformno na kompaktnim podskupovima od $\mathbb{R}^+$.

Dokaz. Dokaz se izvodi korištenjem Teoreme 2.9.1. □

2.10. Laplace-Stieltjes-ova transformacija

Stav 2.10.1. *Laplace-Stieltjes-ova transformacija $\mathcal{L}_S : F \to \widehat{dF}$ preslikava prostor $Lip_0(\mathbb{R}^+, X)$ na prostor $C_W^\infty((0, \infty), X) = \{r \in C^\infty((0, \infty), X) : \|r\|_W := \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \sup_{s>0} \frac{s^{n+1}}{n!}\|r^{(n)}(s)\| < \infty\}$.*

Stav 2.10.2. *Neka su X i Y Banahovi prostori i neka su $T_n \in \mathcal{L}(X, Y)$, $(n \in \mathbb{N})$, takve da je $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$. Slijedeća tvrđenja su ekvivalentna:*
i) $\{T_n x\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira za sve x u gustom potprostoru od X.
ii) $\{T_n x\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira za sve $x \in X$.
iii) $\{T_n x\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira uniformno za $x \in K$ za sve kompaktne podskupove K od X.

Teorema 2.10.1. *Laplace-Stieltjes-ova transformacija $\mathcal{L}_S$ je izometrički izomorfizam između prostora $Lip_0(\mathbb{R}^+, X)$ i $C_W^\infty((0, \infty), X)$.*

Dokaz. Iz Stava 2.10.1 zaključujemo da $\mathcal{L}_S$ preslikava prostor $Lip_0(\mathbb{R}^+, X)$ u prostor $C_W^\infty((0, \infty), X)$. Takođe vrijedi $\|\mathcal{L}_S(F)\|_W \leq \|F\|_{Lip_0(\mathbb{R}^+,X)}$. Ako je $\mathcal{L}_S(F) = \widehat{dF} = 0$, za neko $F \in Lip_0(\mathbb{R}^+, X)$, onda je $T_F e_{-s} = \int_0^\infty e^{-st} dF(t) = \widehat{dF}(s) = 0$ za sve $s > 0$. Kako su na osnovu Leme 2.6.1 eksponencijalne funkcije e_{-s} $(s > 0)$ cijele u $L^1(\mathbb{R}^+)$, tada je $T_F = 0$. Takođe je $T_F \chi_{[0,t]} = F(t) = 0$ za sve $t \geq 0$. Odatle zaključujemo da je $\mathcal{L}_S$ 1-1. Pokažimo da je $\mathcal{L}_S$ surjektivno.
Neka je $r \in C_W^\infty((0, \infty), X)$ i definišimo niz operatora $T_k \in \mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}^+), X)$ sa

$$T_k f = \int_0^\infty f(t)(-1)^k \frac{1}{k!}(\frac{k}{t})^{k+1} r^{(k)}(\frac{k}{t})dt \quad (k \in \mathbb{N}_0).$$

Operatori T_k su uniformno ograničeni sa $\|r\|_W$ jer je $\|T_k f\| \le \|r\|_W \|f\|_1$ za sve $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$. Pokazaćemo da $T_k e_{-s} \to r(s)$ kad $k \to \infty$ za sve $s > 0$. Kako su eksponencijalne funkcije e_{-s} $(s > 0)$ cijele u $L^1(\mathbb{R}^+)$, tada na osnovu Stava 2.10.2 zaključujemo da postoji $T \in \mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}^+), X)$ takav da $\|T\| \le \|r\|_W$ i $T_k f \to Tf$ za sve $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$. Dakle,

$$r(s) = \lim_{k\to\infty} T_k e_{-s} = Te_{-s}.$$

Na osnovu Teoreme 2.9.1 zaključujemo da postoji neko $F \in Lip_0(\mathbb{R}^+, X)$ takvo da je $\|F\|_{Lip_0(\mathbb{R}^+,X)} = \|T\| \le \|r\|_W$ i $Tg = \int_0^\infty g(t)dF(t)$ za sve neprekidne funkcije $g \in L^1(\mathbb{R}^+)$. Odatle je za sve $s > 0$

$$r(s) = Te_{-s} = \int_0^\infty e^{-st} dF(t) = \widehat{dF}(s).$$

Dakle, $\mathcal{L}_S$ je surjektivno (na) i za sve $F \in Lip_0(\mathbb{R}^+, X)$ vrijedi $\|\mathcal{L}_S(F)\|_W = \|\widehat{dF}\|_W = \|F\|_{Lip_0(\mathbb{R}^+,X)}$.
Ostaje nam još da dokažemo da $T_k e_{-s} \to r(s)$ kad $k \to \infty$ za sve $s > 0$. Primjetimo da je

$$\begin{aligned} T_k e_{-s} &= \textstyle\int_0^\infty e^{-st}(-1)^k \frac{1}{k!}(\frac{k}{t})^{k+1} r^{(k)}(\frac{k}{t})dt \\ &= (-1)^k \tfrac{1}{(k-1)!} \textstyle\int_0^\infty e^{-sk/u} u^{k-1} r^{(k)}(u)du \\ &= (-1)^k \tfrac{1}{(k-1)!}[\ \textstyle\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \frac{d^j}{du^j}(e^{-sk/u}u^{k-1}) r^{(k-j-1)}(u) \mid_{u=0}^{\infty} \\ &+ (-1)^k \textstyle\int_0^\infty \frac{d^k}{du^k}(e^{-sk/u}u^{k-1}) r(u)du\ ]. \end{aligned}$$

Definišimo sada funkciju $G(x, u) = e^{-x/u}(\frac{u}{x})^{k-1}$. Tada je

$$G(lx, lu) = G(x, u) \tag{2.6}$$

za sve $l > 0$. Diferencirajući obe strane jednakosti (2.6) u odnosu na l i stavljajući $l = 1$ dobijamo da je

$$x\frac{\partial G}{\partial x}(x, u) + u\frac{\partial G}{\partial u}(x, u) = 0,$$

odnosno

$$\frac{1}{u}\frac{\partial G}{\partial x}(x, u) = -\frac{1}{x}\frac{\partial G}{\partial u}(x, u).$$

Iz ovoga slijedi da je

$$\frac{\partial}{\partial u}(e^{-x/u}\frac{u^{k-1}}{x^k}) = -\frac{\partial}{\partial x}(e^{-x/u}\frac{u^{k-2}}{x^{k-1}}).$$

Indukcijom po j dobijamo,

$$\frac{\partial^j}{\partial u^j}(e^{-x/u}\frac{u^{k-1}}{x^k}) = (-1)^j \frac{\partial^j}{\partial x^j}(e^{-x/u}\frac{u^{k-j-1}}{x^{k-j}}) \quad (0 \le j \le k),$$

odnosno
$$\frac{\partial^j}{\partial u^j}(e^{-x/u}u^{k-1}) = (-1)^j x^k u^{k-j-1}\frac{\partial^j}{\partial x^j}(\frac{e^{-x/u}}{x^{k-j}}). \tag{2.7}$$
Dakle,
$$\begin{aligned} h(u) &:= \textstyle\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j \frac{\partial^j}{\partial u^j}(e^{-x/u}u^{k-1})r^{(k-j-1)}(u) \\ &= \textstyle\sum_{j=0}^{k-1} x^k \frac{\partial^j}{\partial x^j}(\frac{e^{-x/u}}{x^{k-j}})u^{k-j-1}r^{(k-j-1)}(u). \end{aligned}$$
Kako je
$$\|u^{k-j-1}r^{(k-j-1)}(u)\| \le \frac{\|r\|_W(k-j-1)!}{u},$$
dobijamo da je
$$\|h(u)\| \le \sum_{j=0}^{k-1}\frac{\|r\|_W(k-j-1)!}{u}x^k|\frac{\partial^j}{\partial x^j}(\frac{e^{-x/u}}{x^{k-j}})|.$$
Iz ovoga dobijamo da $\lim_{u\to\infty} h(u) = 0 = \lim_{u\to 0} h(u)$. Prema ovome je za $x = sk$
$$T_k e_{-s} = \frac{1}{(k-1)!}\int_0^\infty \frac{d^k}{du^k}(e^{-sk/u}u^{k-1})r(u)du.$$
Na osnovi jednakosti (2.7) je
$$\frac{\partial^k}{\partial u^k}(e^{-x/u}u^{k-1}) = (-1)^k\frac{x^k}{u}\frac{\partial^k}{\partial x^k}(e^{-x/u}) = \frac{x^k}{u^{k+1}}e^{-x/u}.$$
Tada je
$$\begin{aligned} T_k e_{-s} &= \tfrac{s^k k^k}{(k-1)!}\textstyle\int_0^\infty e^{-sk/u}\frac{1}{u^{k+1}}r(u)du \\ &= \tfrac{s^k k^{k+1}}{k!}\textstyle\int_0^\infty e^{-skt}t^{k-1}r(\frac{1}{t})dt. \end{aligned}$$
Definišimo sada $f(t) := \frac{1}{t}r(\frac{1}{t})$ i $l := \frac{1}{s}$. Tada je
$$\begin{aligned} T_k e_{-s} &= \tfrac{l}{k!}(\tfrac{k}{l})^{k+1}\textstyle\int_0^\infty e^{-kt/l}t^k f(t)dt \\ &= l(-1)^k\tfrac{1}{k!}(\tfrac{k}{l})^{k+1}\hat{f}^{(k)}(\tfrac{k}{l}). \end{aligned}$$
Konačno, iz Teoreme 2.6.3 dobijamo da je
$$\lim_{k\to\infty} T_k e_{-s} = lf(l) = r(s).$$
□

Teorema 2.10.2. *Neka je X Banahov prostor. Slijedeća tvrđenja su ekvivalentna:*

i) X ima Radon-Nikodym-ovo svojstvo.

ii) Laplace-ova transformacija $\mathcal{L} : f \to \hat{f}$ *je izometrički izomorfizam između prostora* $L^\infty(\mathbb{R}^+, X)$ *i* $C_W^\infty((0,\infty), X)$.

iii) Riesz-ov operator $\Phi : f \to R_f$, $R_f g = \int_0^\infty g(t)f(t)dt$ *je izometrički izomorfizam između prostora* $L^\infty(\mathbb{R}^+, X)$ *i* $\mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}^+), X)$.

Dokaz. Prvo dokažimo da je $i) \Leftrightarrow ii)$. Definišimo $I : L^\infty(\mathbb{R}^+, X) \to Lip_0(\mathbb{R}^+, X)$ sa $I(f) = F$, gdje je $F(t) = \int_0^t f(r)dr$ $(t \geq 0)$. Tada je I injektivno i $\|I(f)\|_{Lip_0(\mathbb{R}^+,X)} \leq \|f\|_\infty$ za sve $f \in L^\infty(\mathbb{R}^+, X)$. Ako je I surjektivno, onda X ima Radon-Nikodym-ovo svojstvo. Obrnuto, ako X ima Radon-Nikodym-ovo svojstvo i ako $F \in Lip_0(\mathbb{R}^+, X)$, onda $f(t) = F'(t)$ postoji za skoro sve $t \geq 0$. Kako je $f(t) = \lim_{h\to 0} \frac{F(t+h)-F(t)}{h}$ skoro svuda, zaključujemo da je $\|F\|_{Lip_0(\mathbb{R}^+,X)} \geq \|f\|_\infty$. Dakle $f \in L^\infty(\mathbb{R}^+, X)$ i na osnovu Stava 2.2.2 je $F = I(f)$. Dokazali smo da X ima Radon-Nikodym-ovo svojstvo ako i samo ako je I izometrički izomorfizam.
Risez-Stieltjes-ov operator $\Phi_S : F \to T_F$, gdje je $T_F g = \int_0^\infty g(t)dF(t)$ za sve neprekidne funkcije $g \in L^1(\mathbb{R}^+)$ je izometrički izomorfizam između prostora $Lip_0(\mathbb{R}^+, X)$ i $\mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}^+), X)$ i Laplace-Stieltjes-ova transformacija $\mathcal{L}_S : F \to \widehat{dF}$ je izometrički izomorfizam između prostora $Lip_0(\mathbb{R}^+, X)$ i $C_W^\infty((0,\infty), X)$. Na osnovu Stava 2.7.7 i neprekidnosti L^1 normi je $F = I(f)$, $T_F g = \int_0^\infty g(t)f(t)dt$ za sve $g \in L^1(\mathbb{R}^+)$. Tvrđenja slijede iz činjenice da je $\Phi = \Phi_S \circ I$ i $\mathcal{L} = \mathcal{L}_S \circ I$ na $L^\infty(\mathbb{R}^+, X)$. □

Lema 2.10.1. *Neka je $t \geq 0$ i $a, c > 0$. Tada funkcije*

$$h_{k,t} := \frac{1}{2\pi i} \int_{c-ik}^{c+ik} e^{st} \frac{e_{-s}}{s} ds$$

uniformno konvergiraju ka $\chi_{[0,t]}$ u $L^1(\mathbb{R}^+)$ kad $k \to \infty$ za $t \in [0, a]$.

Dokaz. Vidjeti u [8]. □

Teorema 2.10.3. *(Kompleksna inverzija) Neka je $F \in Lip_0(\mathbb{R}^+, X)$ i $r = \mathcal{L}_S(F)$. Tada je*

$$F(t) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-ik}^{c+ik} e^{st} \frac{r(s)}{s} ds$$

pri čemu je ovaj limes uniforman za $t \in [0, a]$, sve $a > 0$ i proizvoljno $c > 0$.

Dokaz. Na osnovu Teoreme 2.9.1 postoji $T \in \mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}^+), X)$ takvo da je $r(s) = Te_{-s}$ $(Re(s) > 0)$ i $F(t) = T\chi_{[0,t]}$ $(t \geq 0)$. Odatle je

$$\|F(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_{c-ik}^{c+ik} e^{st} \frac{r(s)}{s} ds\| \leq \|T\| \|\chi_{[0,t]} - \frac{1}{2\pi i} \int_{c-ik}^{c+ik} e^{st} \frac{e_{-s}}{s} ds\|_1.$$

Na osnovu Leme 2.10.1 dobijamo tvrdnju.

□

Dodatak A

Tablice

Tablica A.1: Osobine Laplace-ove transformacije

F(s)	f(t)
$c_1F_1(s) + c_2F_2(s)$	$c_1f_1(t) + c_2f_2(t)$
$F(as) \quad (a > 0)$	$\frac{1}{a}f(\frac{t}{a})$
$F(s-a)$	$e^{at}f(t)$
$e^{-as}F(s) \quad (a \geq 0)$	$u_a(t)f(t-a)$
$sF(s) - f(0^+)$	$f'(t)$
$s^2F(s) - sf(0^+) - f'(0^+)$	$f''(t)$
$s^nF(s) - s^{n-1}f(0^+) - s^{n-2}f'(0^+)$	$f^{(n)}(t)$
$-... - f^{(n-1)}(0^+)$	
$\frac{F(s)}{s}$	$\int_0^t f(\tau)d\tau$
$F'(s)$	$-tf(t)$
$F^{(n)}(s)$	$(-1)^{(n)}t^nf(t)$
$\int_s^\infty F(x)dx$	$\frac{1}{t}f(t)$
$F(s)G(s)$	$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$
$\lim_{s\to\infty} sF(s)$	$\lim_{t\to 0^+} f(t) = f(0^+)$
$\lim_{s\to 0} sF(s)$	$\lim_{t\to\infty} f(t)$

Tablica A.2: Tablice Laplace-ove transformacije

F(s)	f(t)
1	$\delta(t)$
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{1}{s^n} \quad (n = 1, 2, ...)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
$\frac{1}{s^\vartheta} \quad (\vartheta > 0)$	$\frac{t^{\vartheta-1}}{\Gamma(\vartheta)}$
$\frac{(s-1)^n}{s^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, ...)$	$\frac{e^t}{n!} \cdot \frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})$
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$\frac{1}{s(s-a)}$	$\frac{1}{a}(e^{at} - 1)$
$\frac{1}{(s-a)(s-b)} \quad (a \neq b)$	$\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$
$\frac{s}{(s-a)(s-b)} \quad (a \neq b)$	$\frac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}$
$\frac{s}{(s-a)^2}$	$(1 + at)e^{at}$
$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin at$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
$\frac{a}{(s-b)^2+a^2}$	$e^{bt} \sin at$
$\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$	$e^{bt} \cos at$

Tablica A.3: Tablice Laplace-ove transformacije

F(s)	f(t)
$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\sinh at$
$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$
$\frac{a}{(s-b)^2-a^2}$	$e^{bt}\sinh at$
$\frac{s-b}{(s-b)^2-a^2}$	$e^{bt}\cosh at$
$\frac{1}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a^3}(\sin at - at\cos at)$
$\frac{s}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a}(t\sin at)$
$\frac{s^2}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a}(\sin at + at\cos at)$
$\frac{s^3}{(s^2+a^2)^2}$	$\cos at - \frac{1}{2}at\sin at$
$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$	$t\cos at$
$\frac{1}{(s^2-a^2)^2}$	$\frac{1}{2a^3}(at\cosh at - \sinh at)$
$\frac{s}{(s^2-a^2)^2}$	$\frac{1}{2a}(t\sinh at)$
$\frac{s^2}{(s^2-a^2)^2}$	$\frac{1}{2a}(\sinh at + at\cosh at)$
$\frac{s^3}{(s^2-a^2)^2}$	$\cosh at + \frac{1}{2}at\sinh at$
$\frac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}$	$t\cosh at$
$\frac{ab}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\quad (a^2 \neq b^2)$	$\frac{a\sin bt - b\sin at}{a^2-b^2}$

Tablica A.4: Tablice Laplace-ove transformacije

F(s)	f(t)
$\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)} \quad (a^2 \neq b^2)$	$\frac{\cos bt - \cos at}{a^2-b^2}$
$\frac{s^2}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)} \quad (a^2 \neq b^2)$	$\frac{a \sin at - b \sin bt}{a^2-b^2}$
$\frac{s^3}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)} \quad (a^2 \neq b^2)$	$\frac{a^2 \cos at - b^2 \cos bt}{a^2-b^2}$
$\frac{ab}{(s^2-a^2)(s^2-b^2)} \quad (a^2 \neq b^2)$	$\frac{b \sinh at - a \sinh bt}{a^2-b^2}$
$\frac{s}{(s^2-a^2)(s^2-b^2)} \quad (a^2 \neq b^2)$	$\frac{\cosh at - \cos bt}{a^2-b^2}$
$\frac{s^2}{(s^2-a^2)(s^2-b^2)} \quad (a^2 \neq b^2)$	$\frac{a \sinh at - b \sinh bt}{a^2-b^2}$
$\frac{s^3}{(s^2-a^2)(s^2-b^2)} \quad (a^2 \neq b^2)$	$\frac{a^2 \cosh at - b^2 \cosh bt}{a^2-b^2}$
$\frac{a^2}{s^2(s^2+a^2)}$	$t - \frac{1}{a} \sin at$
$\frac{a^2}{s^2(s^2-a^2)}$	$\frac{1}{a} \sinh at - t$
$\frac{1}{\sqrt{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
$\frac{1}{\sqrt{s+a}}$	$\frac{e^{-at}}{\sqrt{\pi t}}$
$\frac{1}{s\sqrt{s+a}}$	$\frac{1}{\sqrt{a}} erf(\sqrt{at})$
$\frac{1}{\sqrt{s+a}+\sqrt{s+b}}$	$\frac{e^{-bt}-e^{-at}}{2(b-a)\sqrt{\pi t^3}}$
$\frac{1}{s\sqrt{s}}$	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$
$\frac{1}{(s-a)\sqrt{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{a}} e^{at} erf(\sqrt{at})$

Tablica A.5: Tablice Laplace-ove transformacije

F(s)	f(t)
$\frac{1}{\sqrt{s-a}+b}$	$e^{at}(\frac{1}{\sqrt{\pi t}} - be^{b^2t}erf(b\sqrt{t}))$
$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$J_0(at)$
$\frac{(\sqrt{s^2+a^2}-s)^\vartheta}{\sqrt{s^2+a^2}} \quad (\vartheta > -1)$	$a^\vartheta J_\vartheta(at)$
$\frac{1}{(s^2+a^2)^\vartheta} \quad (\vartheta > 0)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\vartheta)}(\frac{t}{2a})^{\vartheta-\frac{1}{2}}J_{\vartheta-\frac{1}{2}}(at)$
$(\sqrt{s^2+a^2}-s)^\vartheta \quad (\vartheta > 0)$	$\frac{\vartheta a^\vartheta}{t}J_\vartheta(at)$
$\sqrt{s-a}-\sqrt{s-b}$	$\frac{1}{2t\sqrt{\pi t}}(e^{bt}-e^{at})$
$\frac{e^{-\frac{a}{s}}}{\sqrt{s}}$	$\frac{\cos 2\sqrt{at}}{\sqrt{\pi t}}$
$\frac{e^{-\frac{a}{s}}}{s\sqrt{s}}$	$\frac{\sin 2\sqrt{at}}{\sqrt{\pi a}}$
$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}} \quad (a > 0)$	$\frac{e^{-\frac{a^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}}$
$e^{-a\sqrt{s}} \quad (a > 0)$	$\frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-\frac{a^2}{4t}}$
$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s} \quad (a > 0)$	$erf(\frac{a}{2\sqrt{t}})$
$\frac{e^{-as}}{s} \quad (a > 0)$	$u_a(t)$
$e^{\frac{s^2}{4}}erf(\frac{s}{2})$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}$
$\log(\frac{s+a}{s+b})$	$\frac{e^{-bt}-e^{-at}}{t}$

Tablica A.6: Tablice Laplace-ove transformacije

F(s)	f(t)
$\frac{-\log s-\gamma}{s}$ $\quad(\gamma\ je\ Euler-ova\ konstanta)$	$\log t$
$\frac{\log s}{s}$	$-\log -\gamma$
$\log(\frac{s^2+a^2}{s^2+b^2})$	$\frac{2}{t}(\cos bt-\cos at)$
$\tan^{-1}(\frac{a}{s})$	$\frac{1}{t}\sin at$
$\frac{\sinh xs}{s\sinh as}$	$\frac{x}{a}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{n\pi t}{a}$
$\frac{\sinh xs}{s\cosh as}$	$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2a}\sin\frac{(2n-1)\pi t}{2a}$
$\frac{\cosh xs}{s\sinh as}$	$\frac{t}{a}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cos\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{n\pi t}{a}$
$\frac{\cosh xs}{s\cosh as}$	$1+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2a}\cos\frac{(2n-1)\pi t}{2a}$
$\frac{\sinh xs}{s^2\sinh as}$	$\frac{xt}{a}+\frac{2a}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{n\pi t}{a}$
$\frac{\sinh xs}{s^2\cosh as}$	$x+\frac{8a}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2a}\cos\frac{(2n-1)\pi t}{2a}$
$\frac{\cosh xs}{s^2\sinh as}$	$\frac{1}{2a}(x^2+t^2-\frac{a^2}{3})-\frac{2A}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{n\pi t}{a}$
$\frac{\cosh xs}{s^2\cosh as}$	$t+\frac{8a}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2a}\sin\frac{(2n-1)\pi t}{2a}$

Tablica A.7: Tablice Laplace-ove transformacije

F(s)	f(t)
$\frac{\sinh x\sqrt{s}}{\sinh a\sqrt{s}}$	$\frac{2\pi}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n e^{\frac{-n^2\pi^2 t}{a^2}} \sin\frac{n\pi x}{a}$
$\frac{\cosh x\sqrt{s}}{\cosh a\sqrt{s}}$	$\frac{\pi}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(2n-1) e^{\frac{-(2n-1)^2\pi^2 t}{4a^2}} \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2a}$
$\frac{\sinh x\sqrt{s}}{\sqrt{s}\cosh a\sqrt{s}}$	$\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} e^{\frac{-(2n-1)^2\pi^2 t}{4a^2}} \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2a}$
$\frac{\cosh x\sqrt{s}}{\sqrt{s}\sinh a\sqrt{s}}$	$\frac{1}{a}+\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{\frac{-n^2\pi^2 t}{a^2}} \cos\frac{n\pi x}{a}$
$\frac{\sinh x\sqrt{s}}{s\sinh a\sqrt{s}}$	$\frac{x}{a}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} e^{\frac{-n^2\pi^2 t}{a^2}} \sin\frac{n\pi x}{a}$
$\frac{\cosh x\sqrt{s}}{s\cosh a\sqrt{s}}$	$1+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)} e^{\frac{-(2n-1)^2\pi^2 t}{4a^2}} \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2a}$
$\frac{\sinh x\sqrt{s}}{s^2\sinh a\sqrt{s}}$	$\frac{xt}{a}+\frac{2a^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}(1-e^{\frac{-n^2\pi^2 t}{a^2}}) \sin\frac{n\pi x}{a}$
$\frac{\cosh x\sqrt{s}}{s^2\cosh a\sqrt{s}}$	$\frac{x^2-a^2}{2}+t-\frac{16a^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^3} e^{\frac{-(2n-1)^2\pi^2 t}{4a^2}} \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2a}$

Napomena A.0.1. *U tabeli A.2 smo pominjali funkciju $\delta(t)$ koja je definisana sa*

$$\delta(t-a)=\begin{cases}\infty & , t=0\\ 0 & , t\neq 0\end{cases}.$$

Biografija

Rođena sam 24.10.1986. u Banja Luci. Osnovnu školu i srednju Gimnaziju sam završila u Banja Luci. Godine 2005 sam upisala Prirodno-matematički fakultet u Banja Luci, koji sam završila 2009 godine. Iste godine upisala sam master studije iz teorijske matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu, Univerziteta u Novom Sadu. Zaposlena sam na Elektrotehničkom fakultetu u Banja Luci kao asistent na predmetima Matematička analiza 1, Matematička analiza 2 i Diskretna matematika. U srećnom sam braku i majka sina Lazara.

Literatura

[1] Joel L. Shift, *The Laplace Transform*, Department of Mathematics, Springer-Verlag , New York, 1999

[2] R. J. Beerends, H. G. ter Morsche, J. C. van den Berg i E. M. van de Vrie, *Fourier and Laplace Transforms*, Cambridge University Press, New York, 2003

[3] Miloš Arsenović, Milutin Dostanić i Danko Jocić, *Teorija mere, funkcionalna analiza i teorija operatora*, Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu, 1999

[4] Dean G. Duffy, *Transform metods for solving partial differential equations*, CRC Press LLC, Florida, 2000

[5] Dobrilo Đ. Tošic, *Matematika III*, Akademska misao, Beograd, 2006

[6] A. P. Prudnikov, Yu.A. Brychov, O. I. Marichev, *Discret Lapalce Transforms*, Gordon and Breach Science Publichers, New York, 1992

[7] E. J. Watson, *Laplace Transforms*, Van Nostrand Reinhold Co, 1981

[8] Wolfgang Arendt, Charles J.K. Batty, Matthias Hieber, Frank Neubrander, *Vector-valued, Laplace Transforms and Cauchy Problems*, Birkhäuser Verlang, Germany, 2001

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Snježana Maksimović
AU

Mentor: Akademik Stevan Pilipović
MN

Naslov rada: Laplasova transformacija
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: srpski i engleski
JI

Zemlja publikovanja: Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2011
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mjesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (2,73, 8, 7, 1, 1, 1)
(broj poglavlja, broj strana, broj literalnih citata, broj tabela, broj slika, broj grafika, broj priloga)
FOR

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Funkcionalna analiza
ND

Predmatna odrednica/ključne riječi: Laplace-ova transformacija, Fourier-ova transformacija, konvolucija, Banahov prostor, funkcije ograničene varijacije, Riemann-Stieltjes-ov integral, Laplace-Stieltjes-ov integral, Bochner-ov integral, Radon-Nikodym-ovo svojstvo, Riesz-Stieltjes-ov operator
PO

UDK :

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: U ovom radu je izložena Laplace-ova transformacija na prostorima $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$, kao i na Banahovim prostorima. Opisan je postupak rješavanja običnih i parcijalnih diferencijalnih jednačina primjenom Laplace-ove transformacije. Dati su uslovi pod kojima Laplace-ova transformacija postoji. Laplace-ova transformacija je primjenjena na Riemann-Stieltjes-ov integral i izvedena je Laplace-Stieltjes-ova transformacija. Pokazano je da je Riesz-Stieltjes-ov operator izometrički izomorfizam sa prostora $Lip_0(\mathbb{R}^+, X)$ na prostor $\mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}^+), X)$ gdje je X Banahov prostor. Na kraju je pokazano da je Laplace-Stieltjesova transformacija izometrički izomorfizam između prostora $Lip_0(\mathbb{R}^+, X)$ i $C_W^\infty((0,\infty), X)$.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN vijeća:
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
KO

Predsjednik:	dr Arpad Takači, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član:	Akademik dr Stevan Pilipović, redovni profesor, Prirodno--matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član:	dr Sanja Konjik, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Snježana Maksimović
AU

Mentor: Dr. Stevan Pilipović, Academician
MN

Title: The Laplace Transform
TI

Language of text: Serbian
TL

Language of abstract: English
LA

Country of publication: Serbia
SP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2011
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: (2,73, 8, 7, 1, 1, 1)
(chapters, pages, references, tables, pictures, charts, supplements)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Functional Analysis
SD

Subject/Key words: the Laplace Transform, the Fourier Transform, convolution, the Banach space, functions of bounded variation, the Riemann-Stieltjes Integral, the Laplace-Stieltjes Integral, the Bochner Integral, the Radon-Nikodym Property, the Riesz-Stieltjes operator
SKW

UC :
Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD

Note:

N

Abstract: This thesis presents the Laplace transformation of the spaces $\mathbb{R}$ and $\mathbb{C}$ as well as the Banach spaces. It is described the procedure for solving ordinary and partial differential equations using Laplace transform. It is given conditions under which the Laplace transform exists. Laplace transformation is applied on the Riemann-Stieltjes integral and derived the Laplace-Stieltjes transformation. It is shown that the Riesz-Stieltjes operator is isometric isomorphism the space $Lip_0(\mathbb{R}^+, X)$ to the space $\mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}^+), X)$. It was finally determined that the Laplace-Stieltjes transform is isometric isomorphism between spaces $Lip_0(\mathbb{R}^+, X)$ and $C_W^\infty((0,\infty), X)$.
AB

Accepted by the Scientific Board on:
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President:	Dr. Arpad Takači, Full Professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
Član:	Dr. Stevan Pilipović, Academian, Full Professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
Član:	Dr. Sanja Konjik, Assistant Professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad