UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI
FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU
I INFORMATIKU

Slađan Dimitrijević

Stohastičke diferencijalne jednačine

master rad

Mentor: dr Danijela Rajter-Ćirić

Novi Sad, 2009.

Sadržaj

Predgovor

Cilj ovog rada je da se detaljno upoznamo sa osnovama teorije stohastičkih diferencijalnih jednačina, jer je njihova upotreba u mnogim naučnim granama postala neizbežna. Napomenimo da je finansijska matematika jedna od oblasti gde je ozbiljan rad nemoguć bez poznavanja i upotrebe stohastičkih diferencijalnih jednačina.

Teorija stohastičkih diferencijalnih jednačina (SDJ) se bazira na teoriji običnih diferencijalnih jednačina (ODJ) pa je glavna ideja ovog rada da na neki način uopštimo već postojeću teoriju ODJ. Znamo da pri modeliranju mnogih prirodnih pojava determinističke (obične) diferencijalne jednačine predstavljaju veoma dobar alat. Razlog upotrebe diferencijalnih jednačina leži u činjenici da promena posmatrane modelirane pojave, u oznaci $x(t)$, najčešće zavisi od promene neke druge prirodne veličine, a sam izvod $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$, u suštini, predstavlja veličinu promene funkcije $x(t)$ u zavisnosti od t.

Kod ovakvog modeliranja problem koji može nastati je taj da rešenje determinističke diferencijalne jednačine (tj. trajektorija) počne da poprima neke slučajne osobine, odnosno, vrednost funkcije $x(t)$ u tački $t \in [t_0, T]$ nije deterministički određena, već može uzimati slučajne vrednosti, a to u stvari znači da je $x(t)$ jedna slučajna promenljiva. Dakle, vidimo da u postojeći početni deterministički problem moramo ubaciti nekakvu slučajnu veličinu i tako dobijena jednačina će u stvari biti jedna stohastička diferencijalna jednačina, a njeno rešenje je stohastički proces. Naravno, ovo je samo osnovna ideja, a u radu je cela ta priča tehnički detaljno odrađena.

U uvodnom delu podsetićemo se osnovnih pojmova iz teorije običnih diferencijalnih jednačina i verovatnoće. Zatim ćemo definisati stohastički proces, Brownovo kretanje i beli šum i uvesti pojmove stohastičkog integrala i stohastičkog diferencijala. Potom sledi Itôva formula u opštem slučaju, njeni specijalni slučajevi i primeri.

U trećem poglavlju formalno definišemo stohastičku diferencijalnu jednačinu i njeno rešenje. Zatim dajemo teoremu o postojanju jedinstvenog rešenja SDJ i diskutujemo njena moguća uopštenja.

U četvrtom poglavlju analiziramo osobine stohastičkog procesa koji predstavlja rešenje SDJ. Dajemo ocenu za momente rešenja SDJ i posmatramo analitičke osobine rešenja i na kraju poglavlja diskutujemo kako promena nekih parametara ili početnih vrednosti utiče na promenu rešenja stohastičke diferencijalne jednačine.

U petoj glavi detaljnije analiziramo linearne stohastičke diferencijalne jednačine. Krenućemo od najjednostavnijeg slučaja (linearna SDJ u užem smislu) i ići do najopštijeg (opšta vektorska linearna SDJ) i za svaki oblik daćemo formulu u zatvorenom obliku za rešenje posmatrane linearne stohastičke diferencijalne jednačine. Na kraju ovog poglavlja, kroz nekoliko primera, videćemo primenu linearnih SDJ i metod za njihovo rešavanje.

Glava 1

Oznake

Ako je $a \in R$ (R predstavlja skup realnih brojeva), onda $|a|$ predstavlja apsolutnu vrednost broja a. Dalje, ako je $b \in R^n$, tj. ako je b vektor kolona

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix}^T,$$

onda $|b|$ predstavlja normu vektora b, tj.

$$|b| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2} = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ako je $C \in R^{m \times n}$, tj. ako je C matrica dimenzija $m \times n$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix} = [c_{ij}]_{m \times n}$$

onda je

$$|C| = \sqrt{c_{11}^2 + c_{12}^2 + \ldots + c_{1n}^2 + \ldots + c_{m1}^2 + c_{m2}^2 + \ldots + c_{mn}^2} = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ako je $A \in R^{n \times n}$, tj. $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ onda trA predstavlja trag matrice A, tj.

$$trA = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Dakle, sada možemo da zaključimo sledeće:

$$\text{za } a \in R^n,\ |a|^2 = tr(a\, a^T),$$

$$\text{za } A \in R^{n\times n},\ |A|^2 = tr(A\,A^T).$$

Ako je g vektorska funkcija jedne realne promenljive, tj.

$$g : R \to R^n,\ g(t) = (g_1(t), g_2(t), \ldots, g_n(t)),$$

onda se izvod takve vektorske funkcije (tj. $g'(t)$ ili $\dot{g}(t)$) definiše na sledeći način:

$$g'(t) = (g_1'(t), g_2'(t), \ldots, g_n'(t)).$$

Analogno se definiše i integral

$$\int_a^b g(t)\,dt = \left(\int_a^b g_1(t)\,dt, \int_a^b g_2(t)\,dt, \ldots, \int_a^b g_n(t)\,dt\right).$$

Izvod i integral matrične funkcije jedne realne promenljive, tj.

$$A : R \to R^{m\times n},\ A(t) = [a_{ij}(t)]_{m\times n}$$

definiše se na isti način kao kod vektorske funkcije:

$$A'(t) = [a_{ij}'(t)]_{m\times n} \quad \text{ili} \quad \dot{A}(t) = [\dot{a}_{ij}(t)]_{m\times n},$$

$$\int_a^b A(t)\,dt = \left[\int_a^b a_{ij}(t)\,dt\right]_{m\times n}.$$

Za funkciju $g : A \to B$ koristićemo termin "g je $B-vrednosna$ funkcija na skupu A".

Glava 2

Uvod

Prvo ćemo se podsetiti osnovnih pojmova iz ODJ. Kako je za rad sa stohastičkim diferencijalnim jednačinama potrebno poznavanje osnovnih pojmova iz stohastičke analize u drugom delu uvoda biće date potrebne definicije iz te oblasti.

2.1 Obične diferencijalne jednačine (ODJ)

2.1.1 Egzistencija i jedinstvenost rešenja

Posmatrajmo početni problem

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x, y(x)) \\ y(x_0) &= y_0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Napomenimo da se dati početni problem (2.1) može zapisati i na drugačiji način pomoću integralnog zapisa.

Lema 2.1.1 *Ako je funkcija $f(x, y)$ neprekidna u zatvorenoj oblasti*

$$G: \quad |x - x_0| \leq a, \quad |y - y_0| \leq b,$$

tada je svako rešenje $y(x)$, definisano u intervalu $I \subset [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $0 < \delta \leq a$, početnog problema (2.1), istovremeno neprekidno rešenje integralne jednačine

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt, \tag{2.2}$$

i obratno.

Dokaz. Ako je $y = y(x)$ rešenje problema (2.1) onda se integracijom prve jednačine tog početnog problema u intervalu (x_0, x) i korišćenjem drugog uslova iz (2.1) dolazi do (2.2). Ako je $y = y(x)$ rešenje problema (2.2) onda se diferenciranjem obe strane jednakosti (2.2) i stavljajući $x = x_0$ dobija (2.1).

□

Zanima nas pod kojim uslovima za funkciju $f(x,y)$ postoji rešenje datog početnog problema (2.1) i ako postoji da li je jedinstveno. Odgovor na ovo pitanje nam daje poznata teorema Picarda i Lindelöfa:

Teorema 2.1.1 (Teorema Picarda i Lindelöfa) *Neka je $f(x,y)$ neprekidna funkcija u oblasti*

$$G: \quad a \leq x \leq b, \quad \alpha \leq y \leq \beta$$

i neka zadovoljava Lipschitzov uslov po y, tj. postoji $K > 0$ takvo da je za svake dve tačke (x, y_1), (x, y_2) iz G

$$|f(x,y_2) - f(x,y_1)| \leq K|y_2 - y_1|.$$

Tada postoji jedinstveno rešenje $y(x)$ početnog problema (2.1) koje je definisano u razmaku $[a', b']$ gde je

$$a' = \max\{a,\ x_0 - (\beta - y_0)/M,\ x_0 - (y_0 - \alpha)/M\},$$

$$b' = \min\{b,\ x_0 + (\beta - y_0)/M,\ x_0 + (y_0 - \alpha)/M\},$$
$$M = \max_G |f(x,y)|.$$

Kompletan dokaz ove teoreme će biti izostavljen, jedino ćemo dati ideju za dokazivanje egzistencije rešenja. Definišemo niz $\{y_n(x)\}_{n\in N}$ na sledeći način

$$y_0(x) = y_0,$$

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt,\ n = 1, 2, \ldots$$

Egzistenciju rešenja dokazujemo tako što pokažemo da dati niz $\{y_n(x)\}_{n\in N}$ uniformno konvergira ka nekoj funkciji $y(x)$ i ta funkcija predstavlja rešenje početnog problema (2.1). Članovi niza $\{y_n(x)\}_{n\in N}$ nazivaju se uzastopne aproksimacije rešenja $y(x)$ i svaka sledeća aproksimacija je bolja od prethodne. Ovaj metod konstrukcije rešenja naziva se metod uzastopnih (sukcesivnih) aproksimacija i može se iskoristiti za numeričko rešavanje početnog problema (2.1).

Za dalji rad neophodna je sledeća Bellman-Gronwallova lema.

Lema 2.1.2 (Bellman-Gronwallova lema) *Neka su funkcije $y(x)$, $k(x)$, $c(x)$ neprekidne na intervalu $[x_0, b]$ i neka je $k(x) \geq 0$. Ako je*

$$y(x) \leq c(x) + \int_{x_0}^{x} k(t)y(t)dt, \quad x \in [x_0, b]$$

tada je

$$y(x) \leq c(x) + \int_{x_0}^{x} c(t)k(t)e^{\int_t^x k(s)ds}dt, \quad x \in [x_0, b].$$

Specijalno ako je $c(x) = c_0 = const.$, tada je

$$y(x) \leq c_0\, e^{\int_{x_0}^{x} k(t)dt}. \tag{2.3}$$

2.1.2 Sistemi diferencijalnih jednačina

Posmatrajmo sada početni problem u "n dimenzija":

$$x_1'(t) = f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$x_2'(t) = f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$\vdots$$

$$x_n'(t) = f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{2.4}$$

uz uslove

$$x_1(u_0) = x_1^0,$$
$$x_2(u_0) = x_2^0,$$
$$\vdots$$
$$x_n(u_0) = x_n^0,$$

pri čemu su funkcije $f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, neprekidne skalarne funkcije u oblasti $[t_0, T] \times R^n$ i važi $(u_0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in [t_0, T] \times R^n$.

Rešenje početnog problema (2.4) na intervalu $[t_0, T]$ je svaka n-torka diferencijabilnih funkcija $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ za koje važi, za svako $t \in [t_0, T]$,

$$y_i'(t) = f_i(t, y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)),$$

$$y_i(u_0) = x_i^0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$
$$(u_0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in [t_0, T] \times R^n.$$

Ako bi uveli oznake

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)),$$
$$f(t, x) = (f_1(t, x), f_2(t, x), \ldots, f_n(t, x)),$$

i

$$x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0),$$

onda bi početni problem (2.4) mogli da zapišemo na jednostavniji način

$$x'(t) = f(t, x)$$

$$x(u_0) = x^0.$$

Linearni sistemi

To su sistemi oblika (2.4) pri čemu su funkcije f_i linearne po svim funkcijama $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, tj.

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \ldots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t), \\ x_2'(t) &= a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \ldots + a_{2n}(t)x_n(t) + b_2(t), \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \ldots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Ako je $b_i(t) = 0$, za svako $i = 1, 2, \ldots, n$, onda se sistem (2.5) naziva **homogen**, a ako je, za bar jedno $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $b_i(t) \neq 0$, onda je sistem **nehomogen**. Ako opet uvedemo sledeće oznake

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)), \quad b(t) = (b_1(t), b_2(t), \ldots, b_n(t)),$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \ldots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} = [a_{ij}(t)]_{n\times n}$$

i dodamo početni uslov, dobijamo sledeći zapis za sistem (2.5)

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$$

$$x(u_0) = x^0.$$

Homogeni linearni sistemi

To su sistemi oblika

$$x'(t) = A(t)x(t), \tag{2.6}$$

pri čemu se za matričnu funkciju $A(t)$ formata $n \times n$ pretpostavlja da je neprekidna na intervalu $[t_0, T]$.

Teorema 2.1.2 *Skup rešenja sistema (2.6) na intervalu $[t_0, T]$, u oznaci V, čini n-dimenzionalni vektorski prostor nad R.*

Definicija 2.1.1 *Svaka baza vektorskog prostora V naziva se* **fundamentalni skup rešenja** *sistema (2.6).*

Definicija 2.1.2 *Ako je $u_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ jedan fundamentalni skup rešenja sistema (2.6), a c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ proizvoljne konstante, tada se rešenje*

$$u(t) = c_1u_1(t) + c_2u_2(t) + \ldots + c_nu_n(t) = \sum_{i=1}^{n} c_iu_i(t) \tag{2.7}$$

naziva **opšte rešenje** *sistema (2.6).*

Napomenimo još jednom da, za fiksirano $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $u_i(t)$ predstavlja uređenu n-torku diferencijabilnih funkcija koje rešavaju homogeni sistem (2.6), tj. $u_i(t)$ je n-dimenzionalni vektor za svako $t \in [t_0, T]$, $u_i(t) = (u_i^1(t), u_i^2(t), \dots, u_i^n(t))$, pri čemu $u_i^j : R \to R$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Smisao prethodne definicije vidi se iz teoreme 2.1.2 zato što se pogodnim izborom konstanti c_i iz opšteg rešenja (2.7) može dobiti bilo koje rešenje homogenog sistema (2.6).

Posle definicije opšteg rešenja homogenog sistema (2.7) prirodno slede sledeće definicije:

Definicija 2.1.3 *Matrica sa n vrsta čije su kolone rešenja homogenog sistema (2.6) na intervalu $[t_0, T]$ naziva se* **matrica rešenja** *tog sistema.*

Definicija 2.1.4 *Matrica formata $n \times n$ čije su kolone linearno nezavisna rešenja homogenog sistema (2.6) na intervalu $[t_0, T]$ naziva se* **fundamentalna matrica** *tog sistema.*

Ako je, na primer, $\Phi(t)$ jedna fundamentalna matrica homogenog sistema (2.6), a c vektor iz R^n, tj. $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, tada opšte rešenje (2.7) sistema (2.6) možemo zapisati na sledeći način:

$$u(t) = \Phi(t)c. \tag{2.8}$$

Iz definicije opšteg rešenja sistema (2.7) jasno je da nam je za rešavanje homogenog sistema (2.6) dovoljno da odredimo n nezavisnih rešenja tog sistema, a na osnovu (2.8) to znači da nam je dovoljno da odredimo fundamentalnu matricu sistema (2.6). Dalje se postavlja pitanje kako za proizvoljnu matricu rešenja sistema (2.6) možemo zaključiti da li je ona istovremeno i fundamentalna matrica tog sistema. Odgovor na ovo pitanje daje sledeći kriterijum.

Teorema 2.1.3 *Da bi matrica rešenja $\Phi(t)$ sistema (2.6) bila fundamentalna matrica tog sistema na intervalu $[t_0, T]$ potrebno je i dovoljno da za svako $t \in [t_0, T]$ važi*

$$det(\Phi(t)) = |\Phi(t)| \neq 0.$$

Napomenimo još da fundamentalna matrica sistema (2.6) nije jedinstvena, a kako iz jedne fundamentalne matrice možemo dobiti neku drugu opisuje sledeća teorema:

Teorema 2.1.4 *Ako je $\Phi(t)$ fundamentalna matrica homogenog sistema (2.6), tada je i $\Phi(t)C$ fundamentalna matrica istog sistema za proizvoljnu konstantnu nesingularnu matricu C. Takođe, svaka fundamentalna matrica $\Psi(t)$ sitema (2.6) je oblika $\Psi(t) = \Phi(t)C_\psi$, gde indeks ψ označava zavisnost C od izbora matrice $\Psi(t)$.*

Nehomogeni linearni sistemi

To su sistemi oblika

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t), \quad t \in [t_0, T], \tag{2.9}$$

pri čemu je $b(t) \neq 0 \in R^n$.

Sledeća teorema nam opisuje kako pomoću fundamentalne matrice homogenog dela nehomogenog sistema (2.9) (tj. sistema (2.6)) možemo dobiti jedno rešenje sistema (2.9).

Teorema 2.1.5 *Ako je $\Phi(t)$ fundamentalna matrica homogenog dela sistema (2.9), tada je vektorska funkcija*

$$u_p(t) = \Phi(t) \int_{u_0}^{t} \Phi^{-1}(s)b(s)ds, \quad u_0, t \in [t_0, T]$$

rešenje sistema (2.9), koje zadovoljava početni uslov $u_p(u_0) = 0$.

Sada ćemo konstruisati opšte rešenje sistema (2.9).

Teorema 2.1.6 *Neka je na intervalu $[t_0, T]$ $u_p(t)$ neko rešenje nehomogenog sistema (2.9), a $u_h(t)$ opšte rešenje njegovog homogenog dela. Tada je*

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t)$$

opšte rešenje nehomogenog sistema (2.9).

Linearni sistemi sa konstantnim koeficijentima

Na osnovu prethodno navedenih teorema možemo zaključiti da nam nehomogeni linearni sistemi "nisu zanimljivi" zato što se do njihovih rešenja dolazi rešavanjem homogenih sistema pa ćemo zato obraditi još jednu specijalnu klasu homogenih sistema, a to su homogeni linearni sistemi sa konstantnim koeficijentima. Kod ovih sistema matrica A je konstantna, tj.

$$x'(t) = Ax(t). \tag{2.10}$$

Za sistem (2.10) možemo eksplicitno odrediti fundamentalnu matricu, a samim tim i opšte rešenje tog sistema.

DEFINICIJA 2.1.5 *Neka su jedinična matrica I i matrica A istog formata $n \times n$. Tada je*

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

Teorema 2.1.7 *Matrica*

$$\Phi(t) = e^{At}$$

je fundamentalna matrica sistema (2.10) na intervalu $(-\infty, \infty)$ i $\Phi(0) = I$.

Iz prethodne teoreme slede dve posledice:

Teorema 2.1.8 *Rešenje sistema (2.10) koje zadovoljava početni uslov* $u(t_0) = x^0$, $t_0 \in (-\infty, \infty)$, $|x^0| < \infty$ *dato je sa*

$$u(t) = e^{(t-t_0)A}x^0.$$

Teorema 2.1.9 *Opšte rešenje nehomogenog sistema sa konstantnim koeficijentima*

$$x'(t) = Ax(t) + b(t), \quad t \in [t_0, T],$$

dato je sa

$$u(t) = e^{At} + \int_{u_0}^{t} e^{A(t-s)}b(s)ds, \quad u_0, t \in [t_0, T],$$

a rešenje koje zadovoljava početni uslov $u(u_0) = x^0$ *sa*

$$u(t) = e^{A(t-u_0)}x^0 + \int_{u_0}^{t} e^{A(t-s)}b(s)ds, \quad u_0, t \in [t_0, T].$$

2.2 Osnovni pojmovi i definicije iz verovatnoće

Podsetimo se prvo nekih osnovnih pojmova iz teorije verovatnoće.

Definicija 2.2.1 *Neka je* $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, *pri čemu je* Ω *skup svih elementarnih događaja, a* $\mathcal{P}(\Omega)$ *predstavlja partititvni skup od* Ω. *Ako važi:*

1. $\Omega \in \mathcal{U}$;
2. $A \in \mathcal{U} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{U}$;
3. $A_n \in \mathcal{U}, n \in N \Rightarrow \bigcup\limits_{n \in N} A_n \in \mathcal{U}$,

onda se $\mathcal{U}$ *zove* ***σ*-algebra** *nad* Ω.

Iz definicije σ-algebre vidimo da prebrojiva unija elemenata takođe pripada σ-algebri. Takođe se može dokazati (iz same definicije 2.2.1) da i konačne unije elemenata pripadaju σ-algebri, kao i prebrojivi i konačni preseci. Dajemo sledeće tvrđenje.

Teorema 2.2.1 *Osobine* σ*-algebre:*

1. $\emptyset \in \mathcal{U}$;
2. $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{U} \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{U}$;
3. $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{U} \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{U}$;
4. $A_n \in \mathcal{U}, n \in N \Rightarrow \bigcap\limits_{n \in N} A_n \in \mathcal{U}$.

Napomena. Najmanja σ-algebra koja sadrži sve otvorene podskupove od R^n zove se **Borelova *σ*-algebra** nad R^n i označava se sa $\mathcal{B}(R^n) = \mathcal{B}^n$.

Napomena. Koristićemo oznaku $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ samo u slučaju kada su elementi unije međusobno disjunktni skupovi.

Definicija 2.2.2 *Neka je $\mathcal{U}$ σ-algebra nad Ω. Preslikavanje $P : \mathcal{U} \to [0, 1]$ za koje važi:*

1. $P(\Omega) = 1$ - *osobina normiranosti;*
2. $P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ - *σ-aditivnost;*

pri čemu je $A_i \in \mathcal{U}$, $i \in N$ familija disjunktnih skupova iz $(\Omega, \mathcal{U})$ (tj. za svako $i, j \in N$, $i \neq j$ važi $A_i \bigcap A_j = \emptyset$) zove se **verovatnoća** *na $\mathcal{U}$.*

Definicija 2.2.3 *Trojku $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ nazvaćemo* **prostor verovatnoća** *ili* **verovatnosni prostor**.

Definicija 2.2.4 *Neka je $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ verovatnosni prostor. Preslikavanje*

$$X : \Omega \to R^n$$

za koje važi

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{U}, \text{ za svako } B \in \mathcal{B}(R^n),$$

naziva se ***n*-dimenzionalna slučajna promenljiva**.
Ekvivalentno, X je ***$\mathcal{U}$*-merljivo**.

Napomena. Umesto $P\{X^{-1}(B)\}$ pišemo $P\{X \in B\}$.

Teorema 2.2.2 *Neka je $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ verovatnosni prostor, a $X : \Omega \to R^n$ jedna n-dimenzionalna slučajna promenljiva definisana na tom prostoru. Tada je*

$$\mathcal{U}(X) := \{X^{-1}(B);\ B \in \mathcal{B}(R^n)\}$$

jedna σ-algebra koja se naziva **σ-algebra generisana sa X**. *To je najmanja σ-algebra ($\mathcal{U}(X) \subseteq \mathcal{U}$), takva da je u odnosu na nju slučajna promenljiva X merljiva.*

Napomenimo da intuitivno σ-algebru $\mathcal{U}(X)$ treba shvatiti kao objekat koji sadrži sve potrebne informacije o slučajnoj promenljivoj X.
Takođe, ako je $Y = \Phi(X)$ tada je i Y $\mathcal{U}(X)$-merljivo.

Definicija 2.2.5 *Neka je $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ verovatnosni prostor. Očekivanje slučajne promenljive X definišemo na sledeći način*

$$E[X] := \int_{\Omega} X\, dP.$$

Definicija 2.2.6 *Neka je $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ verovatnosni prostor, a Y proizvoljna slučajna promenljiva. Uslovno očekivanje $E[X|Y]$ je bilo koja $\mathcal{U}(Y)$-merljiva slučajna promenljiva koja zadovoljava uslov*

$$\int_A X\, dP = \int_A E[X|Y]\, dP, \quad \text{za svako } A \in \mathcal{U}(Y).$$

2.2.1 Vrste konvergencija u teoriji verovatnoće

Neka su X i $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ R^d-vrednosne slučajne promenljive definisane na istom verovatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{U}, P)$. Razmatramo 4 koncepta konvergencije u teoriji verovatnoće i sada slede njihove definicije.

Definicija 2.2.7 *Neka je $M \in \mathcal{U}$ skup mere nula. Ako za svako $\omega \notin M$ niz $X_n(\omega) \in R^d$ konvergira u uobičajenom smislu (tj. kao običan brojni niz) ka $X(\omega) \in R^d$, kažemo da niz $\{X_n\}_{n\in N}$ konvergira* **skoro sigurno** *ili* **sa verovatnoćom 1** *ka X. To zapisujemo na sledeći način*

$$ss - \lim_{n\to\infty} X_n = X.$$

Definicija 2.2.8 *Niz slučajnih promenljivih $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ konvergira* **srednje kvadratno** *ili* **u kvadratnoj sredini** *ka X ako važi:*

1. $E(X_n^2) < \infty, \quad za\ svako\ n \in N,$
2. $E\left(|X_n - X|^2\right) \to 0,\ kad\ n \to \infty,$

i takvu konvergenciju označavamo sa

$$sk - \lim_{n\to\infty} X_n = X.$$

Ako uslove 1. *i* 2. *generalizujemo na sledeći način*

1.′ $E(X_n^p) < \infty, \quad za\ svako\ n \in N,$

2.′ $E\left(|X_n - X|^p\right) \to 0,\ kad\ n \to \infty,$

kažemo da niz $\{X_n\}_{n\in N}$ **konvergira u p-toj sredini** *ka X, $p \in N$.*

Definicija 2.2.9 *Ako za svako $\varepsilon > 0$ važi*

$$p_n(\varepsilon) = P\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\} \to 0,\ kad\ n \to \infty,$$

onda kažemo da $\{X_n\}_{n\in N}$ konvergira **stohastički** *ili* **u verovatnoći** *ka X i to zapisujemo*

$$st - \lim_{n\to\infty} X_n = X.$$

Definicija 2.2.10 *Neka je F_{X_n} funkcija raspodele za slučajnu promenljivu X_n, $n \in N$, F_X funkcija raspodele za slučajnu promenljivu X. Za niz $\{X_n\}_{n\in N}$ kažemo da konvergira u raspodeli ka X ako je*

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

u svakoj tački x u kojoj je $F_X(x)$ neprekidna.

Navedene 4 vrste konvergencije stoje u sledećem odnosu:

konvergencija u q-toj sredini

$\Downarrow \quad (p \le q)$

konvergencija u p-toj sredini

$\Downarrow$

skoro sigurna konvergencija $\Rightarrow$ stohastička konvergencija $\Rightarrow$ konvergencija u raspodeli

2.2.2 Nezavisnost

Neka je $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ posmatrani verovatnosni prostor.

Definicija 2.2.11 **(Nezavisnost dva događaja)**
Za događaje A i B kažemo da su nezavisni ako važi

$$P(A \bigcap B) = P(A)P(B).$$

Definicija 2.2.12 **(Nezavisnost familije događaja)**
Za familiju događaja $\{A_i\}_{i \in I}$, $I \subseteq N$, kažemo da je nezavisna ako za svaki konačan niz indeksa $k_1, k_2, \ldots, k_n \in I$, gde je $k_1 < k_2 < \ldots < k_n$, važi

$$P(A_{k_1} \bigcap A_{k_2} \bigcap \ldots \bigcap A_{k_n}) = P(A_{k_1})P(A_{k_2}) \ldots P(A_{k_n}). \tag{2.11}$$

Definicija 2.2.13 **(Nezavisnost σ-algebri)**
Za σ-algebre $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}$ kažemo da su nezavisne ako formula (2.11) važi za bilo koji izbor događaja $A_{k_i} \in \mathcal{U}_i$, $i = 1, \ldots, n$, $k_i \in I_i$.

Definicija 2.2.14 **(Nezavisnost slučajnih promenljivih)**
Za slučajne promenljive $X_1, \ldots, X_n$ kažemo da su nezavisne ako su nezavisne σ-algebre koje generišu te slučajne promenljive, tj. ako su nezavisne $\mathcal{U}(X_1), \ldots, \mathcal{U}(X_n)$.

2.2.3 Borel-Cantellijeva lema

Za proizvoljan niz događaja $\{A_n\}_{n \in N}$ (tj. podskupova skupa Ω) iz verovatnosnog prostora $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ važi da je skup

$$A = \{\omega : \omega \in A_n \text{ za beskonačno mnogo } n\text{-ova}\} \tag{2.12}$$

takođe događaj, odnosno podskup skupa Ω.

Lema 2.2.1 (Borel-Cantellijeva lema) *Neka je A definisano sa (2.12). Posmatraćemo dva slučaja:*
Ako je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ sledi $P(A) = 0$.
Ako je $\{A_n\}_{n \in N}$ niz nezavisnih događaja i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ sledi $P(A) = 1$.

2.3 Stohastički procesi

Zamislimo da se u svakom vremenskom trenutku $t \in I$ posmatra neka karakteristika X koja je slučajna. Dakle, $X(t)$ je neka slučajna promenljiva, za svako $t \in I$. Tada na skup svih slučajnih promenljivih $\{X(t)\}_{t \in I}$ možemo gledati kao na slučajnu veličinu koja se menja u vremenu, tj. dobijamo jednu funkciju vremena. Sada ćemo dati formalnu definiciju stohastičkog procesa.

DEFINICIJA 2.3.1 **Stohastički (slučajni) proces** $\{X(t)\}_{t\in I}$ *je familija slučajnih promenljivih definisanih na istom verovatnosnom prostoru* $(\Omega,\mathcal{U},P)$.
Skup I *se naziva* **parametarski skup**, *a realni prostor* R^d $(X:\Omega\to R^d)$ *je* **skup stanja procesa**.
Ovakav proces još zovemo i R^d*-vrednosni stohastički proces.*

Za stohastički proces pored oznake $\{X(t)\}_{t\in I}$ koristimo još i $\{X_t\}_{t\in I}$ ili samo X_t ako znamo šta je pametarski skup I.
Kako je slučajni proces za fiksirano $t\in I=[t_0,T]$ jedna slučajna promenljiva, a znamo da je svaka slučajna promenljiva funkcija po ω $(\omega\in\Omega)$, sledi da je stohastički proces, u suštini, funkcija dva parametara, tj. $X_t=\{X(t,\omega)\}_{t\in I}$.
Sada ćemo posmatrati dva slučaja vezana za parametre stohastičkog procesa:
1. Ako fiksiramo $t\in[t_0,T]$, kao što smo već rekli, dobijamo jednu slučajnu promenljivu.
2. Ako fiksiramo $\omega\in\Omega$ dobijamo realnu funkciju vremena na intervalu $[t_0,T]$ i tu funkciju nazivamo **trajektorija** ili **realizacija** stohastičkog procesa X_t.

DEFINICIJA 2.3.2 *Za dva procesa* X_t *i* $\bar{X}_t$ *definisana na istom verovatnosnom prostoru* $(\Omega,\mathcal{U},P)$ *kažemo da su* **(stohastički) ekvivalentni** *ako se* X_t *poklapa sa* $\bar{X}_t$ *(tj.* $X_t\equiv\bar{X}_t$*) skoro sigurno (tj. sa verovatnoćom 1). U tom slučaju kažemo da je* $\bar{X}_t$ **verzija (modifikacija)** *procesa* X_t, *i obrnuto.*

DEFINICIJA 2.3.3 *Stohastički proces* X_t *definisan na intervalu* $[t_0,T]$ *se naziva* **Gaussovski proces** *ako je svako njegovo* n*-dimenzionalno sečenje jedna Gaussovska (normalna) slučajna promenljiva.*
Pod n*-dimenzionalnim sečenjem podrazumevamo slučajnu promenljivu oblika*

$$Y=a_1X_{t_1}+a_2X_{t_2}+\ldots+a_nX_{t_n},$$

gde je $a_1,a_2,\ldots,a_n\in R$, $n\in N$ *i* $t_0\le t_1\le t_2\le\ldots\le t_n\le T$.

2.3.1 Neka svojstva stohastičkih procesa

DEFINICIJA 2.3.4 **Srednja vrednost** *procesa* X_t *ili* **očekivanje** *procesa* X_t, *u oznaci* $m_X(t)$ *ili samo* $m(t)$ *je jedna realna funkcija po* t, *tj.*

$$m_X:[t_0,T]\to R$$

i izračunava se $m_X(t)=E[X_t]$.

DEFINICIJA 2.3.5 **Autokovarijansna funkcija** *ili* **korelaciona funkcija** *procesa* X_t *je*

$$K_X(t,s)=K(t,s)=E\left[(X_t-m_X(t))(X_s-m_X(s))\right]=E[X_tX_s]-m_X(t)m_X(s).$$

DEFINICIJA 2.3.6 **Uzajamna korelaciona funkcija** *dva stohastička procesa* X_t *i* Y_t *je*

$$K_{X,Y}(t,s)=E[(X_t-m_X(t))(Y_s-m_Y(s))].$$

Definicija 2.3.7 **Disperzija** *stohastičkog procesa* X_t *je*

$$D_X(t) = D(t) = K_X(t,t) = K(t,t) = E[X_t^2] - m_X^2(t) = E[X_t^2] - (E[X_t])^2.$$

Definicija 2.3.8 **Koeficijent korelacije** *procesa* X_t *je*

$$\rho_X(t,s) = \rho(t,s) = \frac{K_X(t,s)}{\sqrt{D_X(t)D_X(s)}} = \frac{K(t,s)}{\sqrt{D(t)D(s)}}.$$

2.4 Brownovo kretanje i beli šum

Definicija 2.4.1 *Proces* X_t *se naziva* **proces sa nezavisnim priraštajima** *ako su slučajne promenljive (tzv. priraštaji)*

$$X_{u_0}, X_{t_1} - X_{u_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}, \ldots$$

nezavisne za bilo koji izbor tačaka $u_0, t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots \in [t_0, T]$ *za koje važi*

$$u_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n \leq \ldots.$$

Definicija 2.4.2 *Realni stohastički proces* W_t *se naziva* **Brownovo kretanje** *ili* **Wienerov proces** *ako su ispunjeni sledeći uslovi:*
1. $W_0 = 0$;
2. $W_t - W_s : \mathcal{N}(0, t-s)$, *za sve* $t > s \geq 0$;
3. proces W_t *ima nezavisne priraštaje.*

Primetimo da u specijalnom slučaju prethodne definicije 2.4.2 za $s = 0$ iz uslova 1. i 2. dobijamo

$$W_t : \mathcal{N}(0,t), \text{ za sve } t > 0,$$

a odavde sledi

$$P\{a \leq W_t \leq b\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2t}} dx.$$

Napomena. Može se pokazati da svako Brownovo kretanje W_t ima verziju $\bar{W}_t$ (definicija 2.3.2) sa skoro sigurno neprekidnim trajektorijama. Međutim, iako su trajektorije Brownovog kretanja skoro sigurno neprekidne, one su **nigde-diferencijabilne**. To znači da je u svakoj tački intervala $[t_0, T]$ u kojoj je trajektorija neprekidna ona istovremeno i nediferencijabilna, tj. ne postoji prvi izvod.

Sada ćemo uvesti neke specijalne σ-algebre vezane za Brownovo kretanje i definisaćemo neanticipirajući stohastički proces.

Definicija 2.4.3 *Neka je* t_0 *fiksiran nenegativan broj.* σ*-algebra*

$$\mathcal{W}[t_0, t] := \mathcal{U}(W_s,\ t_0 \leq s \leq t),$$

naziva se **istorija Brownovog kretanja** *do trenutka* t *(uključujući i trenutak* t*).*

Definicija 2.4.4 *Neka je t_0 fiksiran nenegativan broj. σ-algebra*

$$\mathcal{W}^+(t) = \mathcal{W}_t^+ := \mathcal{U}(W_s - W_t,\ s > t \geq t_0),$$

naziva se **budućnost Brownovog kretanja** *nakon trenutka t.*

Definicija 2.4.5 *Neka je t_0 fiksiran nenegativan broj. Familiju $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq t_0}$, σ-algebri koje su podskupovi od $\mathcal{U}$ nazivamo* **neanticipirajuća** *u odnosu na Brownovo kretanje W_t ako važi:*

(a) $\mathcal{F}_t \supseteq \mathcal{F}_s$, za $t \geq s \geq t_0$,

(b) $\mathcal{F}_t \supseteq \mathcal{W}[t_0, t]$, za $t \geq t_0$,

(c) $\mathcal{F}_t$ je nezavisna od $\mathcal{W}^+(t)$, za $t \geq t_0$, tj. $\mathcal{F}_t$ je nezavisna od budućnosti Brownovog kretanja W_t.

Najjednostavniji primer za neanticipirajuću familiju $\mathcal{F}_t$ je

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{W}[t_0, t],$$

jer je to najmanja moguća neanticipirajuća familija σ-algebri i ona zadovoljava sva tri uslova iz definicije 2.4.5. Međutim, često je potrebno ili poželjno da povećamo $\mathcal{F}_t = \mathcal{W}[t_0, t]$ sa drugim objektima koji su takođe nezavisni od $\mathcal{W}^+(t)$. Na primer, kada kod stohastičkih diferencijalnih jednačina želimo da ubacimo i početni uslov, familiju $\mathcal{F}_t$ pravimo na sledeći način

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{U}(\mathcal{W}[t_0, t], c),$$

pri čemu je c slučajna promenljiva nezavisna od $\mathcal{W}^+(t_0)$.

U suštini, neanticipirajuću familiju $\mathcal{F}_t$ treba intuitivno shvatiti kao σ-algebru koja sadrži sve nama bitne informacije do trenutka t, uključujući i informacije vezane za Brownovo kretanje do t.

Definicija 2.4.6 *Za stohastički proces $G = G(t, \omega)$ koji je definisan na $[t_0, T] \times \Omega$ i merljiv po (t, ω), tj. merljiv po oba parametra, kažemo da je* **neanticipirajući stohastički proces** *u odnosu na neanticipirajuću familiju $\mathcal{F}_t$, ako je $G(t, \cdot)$ $\mathcal{F}_t$-merljivo za svako $t \in [t_0, T]$.*

Kako je stohastički proces jedna funkcija dve promenljive prethodnu definiciju možemo uopštiti na sledeći način.

Definicija 2.4.7 *Za $R^{d \times m}$-vrednosnu funkciju $G = G(s, \omega)$ koja je definisana na $[t_0, t] \times \Omega$ i merljiva po (s, ω), tj. merljiva po oba parametra, kažemo da je* **neanticipirajuća funkcija** *u odnosu na neanticipirajuću familiju $\mathcal{F}_s$, ako je $G(s, \cdot)$ $\mathcal{F}_s$-merljivo za svako $s \in [t_0, t]$.*
Dalje, uvodimo sledeću oznaku

$$M_2^{d,m}[t_0, t] = M_2[t_0, t]$$

koja će predstavljati skup svih neanticipirajućih $R^{d\times m}$-vrednosnih funkcija definisanih na $[t_0, t] \times \Omega$ za koje se trajektorije $G(\cdot, \omega)$ sa verovatnoćom 1 nalaze u skupu $L_2[t_0, t]$, tj. skoro sigurno zadovoljavaju uslov

$$\int_{t_0}^{t} |G(s, \omega)|^2 ds < \infty.$$

Podsetimo se da ako je $G \in R^{d\times m}$, tj. G je matrica dimenzija $d \times m$, onda se $|G|$ izračunava na sledeći način

$$|G| = \left(\sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{m} g_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = (tr(GG^T))^{\frac{1}{2}}.$$

2.4.1 Brownovo kretanje u R^m

DEFINICIJA 2.4.8 *R^m-vrednosni stohastički proces*

$$W_t = (W_t^1, W_t^2, \ldots, W_t^m)$$

je **m-dimenzionalno Brownovo kretanje***:*
1. ako je za svako $k = 1, 2, \ldots, m$, W_t^k jednodimenzionalno Brownovo kretanje i
2. ako su σ-algebre $\mathcal{W}^k := \mathcal{U}(W_t^k;\ t \geq t_0)$ međusobno nezavisne za $k = 1, 2, \ldots, m$.

2.4.2 Beli šum

Ako bismo hteli da izračunamo prvi izvod Brownovog kretanja vidimo da to neće biti jednostavno zato što su, kao što smo već rekli, trajektorije Brownovog kretanja nigde-diferencijabilne, ali ako pređemo u oblast uopštenih funkcija (ili distribucija), a zatim uvedemo i pojam uopštenih stohastičkih procesa dolazimo do pojma koji nazivamo beli šum.
Pošto se u ovom radu izostavlja teorija uopštenih funkcija, za **beli šum**, u oznaci ξ_t, ćemo reći da je to uopšteni stohastički proces koji predstavlja izvod Brownovog kretanja (u ovom slučaju i Brownovo kretanje posmatramo kao uopšten stohastički proces), što zapisujemo na sledeći način

$$\xi_t = \frac{dW_t}{dt} = \dot{W}_t,$$

ili u integralnom obliku

$$W_t = \int_0^t \xi_s \, ds.$$

2.5 Stohastički integrali

Neka je X_t proizvoljan stohastički proces. Integrale oblika $\int_a^b f(X_t, t)\, dt$, gde $a, b \in R$, a f je skalarna funkcija, nećemo svrstavati u klasu stohastičkih integrala zato što kod njih integralimo po promenljivoj t. (Pravi) stohastički integrali su integrali oblika

$$\int_a^b f(X_t, t)\, dW_t,$$

gde W_t predstavlja Brownovo kretanje. Sada želimo da damo odgovor na pitanje šta je

$$\int_0^T G_t\, dW_t,$$

za što širu klasu stohastičkih procesa G_t, pri čemu je T realan broj veći od nule. Za početak posmatramo jedan jednostavan slučaj.

DEFINICIJA 2.5.1 **(Definicija Paley-Wiener-Zygmunda)**
Neka je $g : [0,1] \to R$ neprekidno diferencijabilna (deterministička) funkcija za koju važi $g(0) = g(1) = 0$. Definišemo

$$\int_0^1 g(t)\, dW_t := -\int_0^1 g'(t) W_t\, dt.$$

Primetimo da prethodna definicija može da nas asocira na primenu parcijalne integracije na integral $\int_0^1 g(t)\, dW_t$.

Lema 2.5.1 *Ako je W_t, $t \geq 0$, Brownovo kretanje, onda važi*

$$E[W_t W_s] = \min\{t, s\}.$$

Dokaz. Podsetimo se da ako W_t, $t \geq 0$, predstavlja Brownovo kretanje onda je, za svako fiksirano $t \geq 0$, W_t jedna normalna slučajna promenljiva, tj. $W_t : \mathcal{N}(0,t)$, pa važi $E[W_t] = 0$ i $D[W_t] = E[W_t^2] - (E[W_t])^2 = E[W_t^2] = t$.

1. slučaj. Neka je $t > s \geq 0$.

$$E[W_t W_s] = E[((W_t - W_s) + W_s)W_s] = E[(W_t - W_s)W_s] + E[W_s^2] =$$

(a kako su priraštaji Brownovog kretanja međusobno nezavisni važi)

$$= E[W_t - W_s]E[W_s] + s = 0 + s = \min\{s, t\}.$$

2. slučaj. Neka je $s > t \geq 0$. Analogno kao 1. slučaj.
3. slučaj. Neka je $t = s \geq 0$.

$$E[W_t W_s] = E[W_t^2] = t = \min\{s, t\}.$$

□

Teorema 2.5.1 *Osobine Paley-Wiener-Zygmundovog integrala:*

1.

$$E\left[\int_0^1 g(t)\, dW_t\right] = 0,$$

2.

$$E\left[\left(\int_0^1 g(t)\, dW_t\right)^2\right] = \int_0^1 g^2(t)\, dt.$$

Dokaz.
1. Iz same definicije Paley-Wiener-Zygmundovog integrala zaključujemo

$$E\left[\int_0^1 g(t)\,dW_t\right] = E\left[-\int_0^1 g'(t)W_t\,dt\right] = -\int_0^1 g'(t)E[W_t]\,dt = 0.$$

2. Iz definicije dobijamo

$$E\left[\left(\int_0^1 g(t)\,dW_t\right)^2\right] = E\left[\left(\int_0^1 g(t)\,dW_t\right)\left(\int_0^1 g(s)\,dW_s\right)\right] =$$

$$= E\left[\left(\int_0^1 g'(t)W_t\,dt\right)\left(\int_0^1 g(s)W_s\,ds\right)\right] = E\left[\int_0^1\int_0^1 g'(t)g'(s)W_tW_s\,dsdt\right] =$$

$$= \int_0^1\int_0^1 g'(t)g'(s)E[W_tW_s]\,dsdt =$$

(a to je dalje na osnovu leme 2.5.1)

$$= \int_0^1\int_0^1 g'(t)g'(s)\min\{s,t\}\,dsdt = \int_0^1 g'(t)\left(\int_0^t sg'(s)\,ds + \int_t^1 tg'(s)\,ds\right)dt =$$

(primenom parcijalne integracije na integral $\int_0^t sg'(s)\,ds$ dobijamo)

$$= \int_0^1 g'(t)\left(tg(t) - \int_0^t g\,ds - tg(t)\right)dt = \int_0^1 g'(t)\left(-\int_0^t g\,ds)\right)dt =$$

(opet pomoću parcijalne integracije dobijamo)

$$= \int_0^1 g^2(t)\,dt.$$

□

Sada želimo da damo odgovor na pitanje: Šta je $\int_0^T W_t\,dW_t$? Odgovor dobijamo pomoću postupka koji je sličan izračunavanju određenog integrala preko Riemannovih suma.

Definicija 2.5.2 *(1.)* **Particija** P *na intervalu* $[0,T]$ *je konačan skup tačaka iz* $[0,T]$ *takav da važi*

$$P := \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = T\}.$$

(2.) **Maksimalno rastojanje** *za particiju* P *je*

$$|P| := \max_{0\le k\le m-1} |t_{k+1} - t_k|.$$

(3.) Za fiksirano $0 \le \lambda \le 1$ *i da datu particiju* P *definišimo* **tačke deobe** τ_k *intervala* $[t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, *na sledeći način*

$$\tau_k := (1-\lambda)t_k + \lambda t_{k+1}$$

i uvedimo oznaku

$$R = R(P,\lambda) := \sum_{k=0}^{m-1} W(\tau_k)(W(t_{k+1}) - W(t_k)).$$

Primetimo da $R(P,\lambda)$ u stvari predstavlja aproksimaciju pomoću Riemannovih suma za integral $\int_0^T W_t\, dW_t$. Ključno pitanje je: šta se dešava kad $|P| \to 0$, za fiksirano λ?

Lema 2.5.2 *Neka je $[a,b]$ interval iz $[0,\infty)$ i neka su*

$$P^n := \{a = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{m_n}^n = b\}$$

particije intervala $[a,b]$, pri čemu $|P^n| \to 0$, kad $n \to \infty$.
Uvedimo oznaku

$$Q_n := \sum_{k=0}^{m_n-1} (W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n))^2.$$

Tada važi

$$E\left[(Q_n - (b-a))^2\right] \to 0, \text{ kad } n \to \infty,$$

tj.

$$sk - \lim_{n\to\infty} Q_n = b - a.$$

Dokaz. Kako je $b - a = \sum_{k=0}^{m_n-1}(t_{k+1}^n - t_k^n)$ dobijamo

$$Q_n - (b-a) = \sum_{k=0}^{m_n-1} ((W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n))^2 - (t_{k+1}^n - t_k^n)).$$

Dakle,

$$E\left[(Q_n - (b-a))^2\right] =$$

$$= E\left[\sum_{k=0}^{m_n-1} ((W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n))^2 - (t_{k+1}^n - t_k^n)) \sum_{j=0}^{m_n-1} ((W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n))^2 - (t_{j+1}^n - t_j^n))\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{m_n-1}\sum_{j=0}^{m_n-1} E\left[((W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n))^2 - (t_{k+1}^n - t_k^n))((W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n))^2 - (t_{j+1}^n - t_j^n))\right].$$

Kako je Brownovo kretanje W_t proces sa nezavisnim priraštajima, slučajne promenljive $W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)$ i $W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n)$ su nezavisne za svako $k \neq j$, pa važi

$$E\left[((W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n))^2 - (t_{k+1}^n - t_k^n))((W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n))^2 - (t_{j+1}^n - t_j^n))\right] =$$

$$E\left[((W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n))^2 - (t_{k+1}^n - t_k^n))\right] E\left[((W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n))^2 - (t_{j+1}^n - t_j^n))\right] = 0.$$

Poslednja jednakost sledi iz činjenice da slučajna promenljiva $W_t - W_s$, $t > s \geq 0$, ima $\mathcal{N}(0, t-s)$ pa je $D[W_t - W_s] = E[(W_t - W_s)^2] = t - s$.

Dakle, u dvostrukoj sumi su nam ostali samo članovi $k = j$ pa dobijamo

$$E\left[(Q_n - (b-a))^2\right] = \sum_{k=0}^{m_n-1} E\left[((W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n))^2 - (t_{k+1}^n - t_k^n))^2\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{m_n-1} E\left[\left(\left(\frac{W(t_{k+1}^n)-W(t_k^n)-0}{\sqrt{t_{k+1}^n-t_k^n}}\right)^2(t_{k+1}^n-t_k^n)-(t_{k+1}^n-t_k^n)\right)^2\right]$$

i uz oznaku

$$Y_k = Y_k^n := \frac{W(t_{k+1}^n)-W(t_k^n)}{\sqrt{t_{k+1}^n-t_k^n}} : \mathcal{N}(0,1)$$

dobijamo

$$E\left[(Q_n-(b-a))^2\right] = \sum_{k=0}^{m_n-1} E\left[(Y_k^2-1)^2(t_{k+1}^n-t_k^n)^2\right].$$

Dakle, postoji konstanta C tako da važi

$$E\left[(Q_n-(b-a))^2\right] \leq C\sum_{k=0}^{m_n-1}(t_{k+1}^n-t_k^n)^2 \leq$$

$$\leq C|P^n|\sum_{k=0}^{m_n-1}(t_{k+1}^n-t_k^n) = C|P^n|(b-a)\to 0, \text{ kad } n\to\infty.$$

□

Teorema 2.5.2 *Neka P^n predstavlja particiju intervala $[0,T]$, $n\in N$, i neka je $\lambda\in[0,1]$ fiksiran broj.*
Uvedimo oznaku

$$R_n := \sum_{k=0}^{m_n-1} W(\tau_k^n)(W(t_{k+1}^n)-W(t_k^n)).$$

Tada je

$$sk-\lim_{n\to\infty} R_n = \frac{W^2(T)}{2}+\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)T,$$

tj.

$$E\left[\left(R_n-\frac{W^2(T)}{2}-\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)T\right)^2\right]\to 0 \textit{ kad } n\to\infty.$$

Dokaz. Prvo ćemo R_n zapisati na malo drugačiji način

$$R_n := \sum_{k=0}^{m_n-1} W(\tau_k^n)(W(t_{k+1}^n)-W(t_k^n)) =$$

$$= \frac{W^2(t_m^n)}{2}-\frac{W^2(t_0^n)}{2}-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m_n-1}(W(t_{k+1}^n)-W(t_k^n))^2+$$

$$+\sum_{k=0}^{m_n-1}(W(\tau_k^n)-W(t_k^n))^2+\sum_{k=0}^{m_n-1}(W(t_{k+1}^n)-W(\tau_k^n))(W(\tau_k^n)-W(t_k^n)).$$

Uz oznake

$$A = \sum_{k=0}^{m_n-1}(W(t_{k+1}^n)-W(t_k^n))^2,$$

$$B = \sum_{k=0}^{m_n-1} (W(\tau_k^n) - W(t_k^n))^2,$$

$$C = \sum_{k=0}^{m_n-1} (W(t_{k+1}^n) - W(\tau_k^n))(W(\tau_k^n) - W(t_k^n))$$

i uz činjenicu da je, za svako $n \in N$,

$$t_m^n = T, \quad t_0^n = 0 \quad \text{i} \quad W(0) = 0$$

dobijamo

$$R_n = \frac{W^2(T)}{2} - \frac{1}{2}A + B + C.$$

Na osnovu leme 2.5.2 zaključujemo sledeće

$$sk - \lim_{n\to\infty} A = T - 0 = T.$$

Takođe, na osnovu iste leme i iz činjenice da je pozicija tačaka $\tau_k^n \in [t_k^n, t_{k+1}^n]$, $k = 0, 1, \dots, m_n - 1$, određena pomoću $\lambda \in [0, 1]$ zaključujemo

$$sk - \lim_{n\to\infty} B = \lambda T.$$

Dalje je

$$E[C^2] = E\left[\left(\sum_{k=0}^{m_n-1} (W(t_{k+1}^n) - W(\tau_k^n))(W(\tau_k^n) - W(t_k^n))\right)^2\right],$$

a kako su priraštaji Brownovog kretanja međusobno nezavisne slučajne promenljive i $W_t - W_s : \mathcal{N}(0, t-s)$, $t > s \geq 0$, znamo

$$E[W_t - W_s] = 0 \quad \text{i} \quad E[(W_t - W_s)^2] = t - s,$$

pa dobijamo

$$E[C^2] = \sum_{k=0}^{m_n-1} E\left[(W(t_{k+1}^n) - W(\tau_k^n))^2\right] E\left[(W(\tau_k^n) - W(t_k^n))^2\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{m_n-1} (t_{k+1}^n - \tau_k^n)(\tau_k^n - t_k^n) =$$

(i kako je $\tau_k^n = (1-\lambda)t_k^n + \lambda t_{k+1}^n$, dobijamo)

$$= \sum_{k=0}^{m_n-1} (t_{k+1}^n - (1-\lambda)t_k^n - \lambda t_{k+1}^n)((1-\lambda)t_k^n + \lambda t_{k+1}^n - t_k^n) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m_n-1} (1-\lambda)(t_{k+1}^n - t_k^n)\lambda(t_{k+1}^n - t_k^n) \leq$$

$$\leq (1-\lambda)\lambda|P^n| \sum_{k=0}^{m_n-1} (t_{k+1}^n - t_k^n) = (1-\lambda)\lambda\,|P^n|\,T \to 0, \text{ kad } n \to \infty.$$

Dakle,

$$sk - \lim_{n\to\infty} C = 0$$

pa na kraju dobijamo

$$sk - \lim_{n\to\infty} R_n = sk - \lim_{n\to\infty} \left(\frac{W^2(T)}{2} - \frac{1}{2}A + B + C \right) = \frac{W^2(T)}{2} + \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) T.$$

$\square$

U specijalnom slučaju za $\lambda = 0$ dobijamo **Itôvu definiciju** stohastičkog integrala

$$\int_0^T W_t\, dW_t = \frac{W(T)^2}{2} - \frac{T}{2}$$

ili opštije

$$\int_r^s W_t\, dW_t = \frac{W(s)^2 - W(r)^2}{2} - \frac{s-r}{2}, \quad \text{za sve } \; r \geq s \geq 0.$$

U specijalnom slučaju za $\lambda = \frac{1}{2}$ dobijamo **Stratonovichevu definiciju** stohastičkog integrala

$$\int_0^T W_t\, dW_t = \frac{W(T)^2}{2}.$$

Definicija 2.5.3 *Neanticipirajući stohastički proces $G_t \in M_2[0,T]$ nazivamo* **step proces** *ako postoji particija $P = \{0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m = T\}$ takva da je*

$$G_t \equiv G_k, \quad \textit{za} \;\; t_k \leq t < t_{k+1}, \quad k = 0,1,2,\ldots,m-1,$$

pri čemu G_k, $k = 0,1,2,\ldots,m-1$, predstavljaju slučajne promenljive.

Primetimo da je svaka slučajna promenljiva G_k $\mathcal{F}_{t_k}$-merljiva, jer je G_t neanticipirajući proces.

Definicija 2.5.4 *Neka je $G_t \in M_2[0,T]$ proizvoljan step proces. Tada*

$$\int_0^T G_t\, dW_t := \sum_{k=0}^{m-1} G_k (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})$$

predstavlja **Itôv stohastički integral** *step procesa G_t na intervalu $[0,T]$.*

Teorema 2.5.3 *Osobine stohastičkih integrala step procesa.*
Neka su $G_t, H_t \in M_2[0,T]$ step procesi i $a, b \in R$. Tada važi:
(a)

$$\int_0^T (aG_t + bH_t) dW_t = a\int_0^T G_t dW_t + b\int_0^T H_t dW_t;$$

(b)

$$E\left[\int_0^T G_t dW_t\right] = 0;$$

(c)

$$E\left[\left(\int_0^T G_t\,dW_t\right)^2\right] = \int_0^T E[G_t^2]dt.$$

Dokaz.
(a) Iz definicije stohastičkog integrala step procesa dobijamo

$$\int_0^T (aG_t + bH_t)dW_t = \sum_{k=0}^{m-1}(aG_k + bH_k)(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) =$$

$$= a\sum_{k=0}^{m-1} G_k(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) + b\sum_{k=0}^{m-1} H_k(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) = a\int_0^T G_t\,dW_t + b\int_0^T H_t\,dW_t.$$

(b)

$$E\left[\int_0^T G_t dW_t\right] = E\left[\sum_{k=0}^{m-1} G_k(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})\right] = \sum_{k=0}^{m-1} E[G_k(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})].$$

Kako je slučajna promenljiva G_k $\mathcal{F}_{t_k}$-merljiva, a znamo da je $\mathcal{F}_{t_k}$ nezavisno od $\mathcal{W}_{t_k}^+$, jer je $\mathcal{F}_t$ neanticipirajuća familija, i kako je $W_{t_{k+1}} - W_{t_k}$ $\mathcal{W}_{t_k}^+$-merljiva dobijamo da su slučajne promenljive G_k i $W_{t_{k+1}} - W_{t_k}$ nezavisne pa važi

$$E\left[\int_0^T G_t dW_t\right] = \sum_{k=0}^{m-1} E[G_k]E[(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})] = \sum_{k=0}^{m-1} E[G_k]\cdot 0 = 0.$$

(c) Imamo

$$E\left[\left(\int_0^T G_t\,dW_t\right)^2\right] = E\left[\sum_{k=0}^{m-1} G_k(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})\sum_{j=0}^{m-1} G_j(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{m-1} E[G_k(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})G_j(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})].$$

Za $j < k$ na isti način kao u tvrđenju pod (b) zaključujemo da je $W_{t_{k+1}} - W_{t_k}$ nezavisno od $G_kG_j(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})$ pa za član pod dvostrukom sumom važi

$$E[G_k(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})G_j(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})] = E[G_kG_j(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})]E[W_{t_{k+1}} - W_{t_k}] = 0,$$

jer je

$$E[W_{t_{k+1}} - W_{t_k}] = 0 \quad \text{i} \quad E[G_kG_j(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})] < \infty.$$

Za $k < j$ izvodimo isti zaključak pa nam u dvostrukoj sumi ostaju samo članovi za $k = j$ i dobijamo

$$E\left[\left(\int_0^T G_t\,dW_t\right)^2\right] = \sum_{k=0}^{m-1} E[G_k^2(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2] = \sum_{k=0}^{m-1} E[G_k^2]E[(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2] =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} E[G_k^2](t_{k+1} - t_k) = \int_0^T E[G_t^2]dt.$$

□

Sada ćemo dati definiciju stohastičkog integrala proizvoljnog neanticipirajućeg procesa G_t.

DEFINICIJA 2.5.5 *Neka je* G_t *proizvoljan proces iz klase* $M_2[0,T]$, *a* $\{G^n\}_{n \in N}$ *niz ograničenih step procesa iz* $M_2[0,T]$ *za koje važi*

$$\int_0^T |G(t,\omega) - G^n(t,\omega)|^2 dt \to 0 \text{ sa verovatnoćom 1, kad } n \to \infty \quad i$$

$$G_t^n = G_{\frac{k}{n}}, \quad za \ \frac{k}{n} \le t < \frac{k+1}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \lfloor nT \rfloor,$$

(može se pokazati da takav niz $\{G^n\}_{n \in N}$ *uvek postoji) tada se* **stohastički integral proizvoljnog neanticipirajućeg procesa** *definiše na sledeći način:*

$$\int_0^T G_t \, dW_t := \lim_{n \to \infty} \int_0^T G_t^n \, dW_t.$$

Teorema 2.5.4 *Osobine stohastičkih integrala.*
Neka $G_t, H_t \in M_2[0,T]$ *i* $a, b \in R$. *Tada važi:*
(a)

$$\int_0^T (aG_t + bH_t) dW_t = a \int_0^T G_t dW_t + b \int_0^T H_t dW_t;$$

(b)

$$E\left[\int_0^T G_t dW_t\right] = 0;$$

(c)

$$E\left[\left|\int_0^T G_t \, dW_t\right|^2\right] = \int_0^T E\left[|G_t|^2\right] dt.$$

Tvrđenja (a), (b), (c) iz teoreme 2.5.4 slede iz već dokazanih tvrđenja (a), (b), (c) za step procese iz teoreme 2.5.3.
Napomena. Primetimo, na osnovu izloženih definicija, da stohastički integral $\int_0^T G_t \, dW_t$, u suštini, predstavlja jednu slučajnu promenljivu.

2.6 Stohastički diferencijali i Itôva formula

Posmatrajmo R^d-vrednosni stohastički proces X_t definisan na sledeći način

$$X_t(\omega) = X_{t_0}(\omega) + \int_{t_0}^t f(s,\omega) ds + \int_{t_0}^t G(s,\omega) dW_s(\omega), \tag{2.13}$$

pri čemu W_t predstavlja m-dimenzionalno Brownovo kretanje, $\mathcal{F}_t$ je neanticipirajuća familija σ-algebri nezavisna od $\mathcal{W}_t^+$ i G je $R^{d\times m}$-vrednosna funkcija iz skupa $M_2^{d,m}[t_0,T] = M_2[t_0,T]$, tj. za nju sa verovatnoćom 1 važi

$$\int_{t_0}^{T} |G(s,\omega)|^2 ds < \infty.$$

Ako dodamo još i uslove:
1. $X_{t_0}(\omega)$ je $\mathcal{F}_{t_0}$- merljiva slučajna promenljiva. Dakle, $X_{t_0}(\omega)$ je nezavisna od $\mathcal{W}_{t_0}^+$, a samim tim i od $W_t - W_{t_0}$, za $t \geq t_0$;
2. R^d-vrednosna funkcija $f(t,\omega)$ je neanticipirajuća funkcija u odnosu na neaticipirajuću familiju $\mathcal{F}_t$ (tj. ona je $\mathcal{F}_t$- merljiva za svako $t \in [t_0,T]$) i sa verovatnoćom 1 zadovoljava uslov

$$\int_{t_0}^{T} |f(s,\omega)| ds < \infty,$$

onda možemo uvesti sledeću definiciju.

Definicija 2.6.1 *Kažemo da neanticipirajući stohastički proces X_t (dakle, X_t je $\mathcal{F}_t$-merljiv) definisan pomoću (2.13), pri čemu su ispunjeni svi prethodno navedeni uslovi, ima* **stohastički diferencijal**

$$dX_t = f(t)\,dt + G(t)\,dW_t = f\,dt + G\,dW. \tag{2.14}$$

Primetimo da iz stohastičkog diferencijala (2.14) možemo da se vratimo na integralni oblik u proizvoljnim granicama s i t, $t_0 \leq s \leq t \leq T$ na sledeći način

$$X_t(\omega) - X_s(\omega) = \int_s^t f(u,\omega)du + \int_s^t G(u,\omega)dW_u(\omega),$$

ili ako u zapisu izostavimo "omege" dobijamo razliku

$$X_t - X_s = \int_s^t f(u)du + \int_s^t G(u)dW_u.$$

Sada ćemo formulisati Itôvu teoremu u opštem obliku, a zatim ćemo posmatrati neke njene jednostavnije slučajeve.

Teorema 2.6.1 (Itôva teorema za skalarni slučaj) *Neka $u = u(t,x) = u(t,x_1,x_2,\ldots,x_d)$ predstavlja R-vrednosnu (tj. skalarnu) neprekidnu funkciju na skupu $[t_0,T] \times R^d$ i neka su joj neprekidni sledeći parcijalni izvodi prvog i drugog reda: u_t, u_{x_i}, $u_{x_ix_j}$, $i,j = 1,2,\ldots,d$.*
Ako je R^d-vrednosni stohastički proces X_t definisan na intervalu $[t_0,T]$ pomoću svog stohastičkog diferencijala

$$dX_t = f(t)\,dt + G(t)\,dW_t,$$

gde je W_t m-dimenzionalno Brownovo kretanje, onda u odnosu na isto Brownovo kretanje postoji stohastički diferencijal realnog (tj. R-vrednosnog) procesa

$$Y_t = u(t,X_t)$$

definisanog na istom intervalu $[t_0, T]$ *sa početnom vrednošću* $Y_{t_0} = u(t_0, X_{t_0})$ *i može se izračunati na sledeći način*

$$dY_t = \left(u_t(t, X_t) + u_x(t, X_t) f(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} u_{x_i x_j}(t, X_t) (G(t) G(t)^T)_{ij} \right) dt +$$

$$+ u_x(t, X_t) G(t) dW_t, \tag{2.15}$$

pri čemu u_x *predstavlja skraćeni zapis vektor vrste*

$$u_x = \left[\begin{array}{cccc} u_{x_1} & u_{x_2} & \dots & u_{x_d} \end{array} \right]_{1 \times d}.$$

Teorema 2.6.2 (Itôva teorema za vektorski slučaj) *Ako je funkcija* $u = u(t, x) = u(t, x_1, x_2, \dots, x_d)$ *jedna* R^k*-vrednosna funkcija, pri čemu je* $k \in N$ *i* $k \geq 2$*, onda se Itôva formula iz Itôve teoreme 2.6.1 zapisuje na isti način, s tim što treba napomenuti da su sad parcijalni izvodi prvog i drugog reda funkcije* $u(t, x)$*, odnosno,* u_t*,* u_{x_i} *i* $u_{x_i x_j}$*,* $i, j = 1, 2, \dots, d$*, u stvari, vektori dimenzije* k*, a* u_x *je matrica formata* $k \times d$*, tj.*

$$u_x = \left[\begin{array}{cccc} u_{x_1} & u_{x_2} & \dots & u_{x_d} \end{array} \right]_{k \times d}.$$

Sada ćemo na jednom primeru ilustrovati primenu Itôve formule.

Primer 1. (Itôva formula za slučaj $d = m = 2$ i $k = 1$)

Neka je X_t R^2-vrednosni stohastički proces zadat pomoću svog stohastičkog diferencijala

$$dX_t = f(t, X_t)\, dt + G(t, X_t)\, dW_t, \tag{2.16}$$

pri čemu je W_t dvodimenzionalno Brownovo kretanje i neka su ispunjene sve pretpostavke Itôve teoreme.

Uvedimo oznake

$$X_t = \left[\begin{array}{cc} X_t^1 & X_t^2 \end{array} \right]^T,$$

$$W_t = \left[\begin{array}{cc} W_t^1 & W_t^2 \end{array} \right]^T,$$

$$f(t, X_t) = \left[\begin{array}{cc} f_1(t, X_t) & f_2(t, X_t) \end{array} \right]^T = \left[\begin{array}{cc} f_1 & f_2 \end{array} \right]^T = f,$$

$$G(t, X_t) = \left[\begin{array}{cc} G_{11}(t, X_t) & G_{12}(t, X_t) \\ G_{21}(t, X_t) & G_{22}(t, X_t) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{array} \right] = G.$$

Napomenimo da izraz (2.16) pomoću ovih oznaka možemo raspisati na sledeći način

$$dX_t^1 = f_1\, dt + G_{11}\, dW_t^1 + G_{12}\, dW_t^2,$$

$$dX_t^2 = f_2\, dt + G_{21}\, dW_t^1 + G_{22}\, dW_t^2.$$

Naš zadatak u ovom primeru je da izračunamo stohastički diferencijal realnog procesa

$$Y_t = |X_t|^{2n}, \quad \text{za } n \in N. \tag{2.17}$$

(Podsetimo se da je $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ za $x = (x_1, x_2) \in R^2$.)
Prvo moramo da odredimo funkciju $u(t, x) = u(t, x_1, x_2)$ iz Itôve formule. Dakle, pošto je $Y_t = |X_t|^{2n} = u(t, X_t)$ sledi

$$u(t, x_1, x_2) = |x|^{2n} = (x_1^2 + x_2^2)^n.$$

Sada određujemo potrebne parcijalne izvode funkcije u. Dakle,

$u_t = 0,$

$u_{x_1} = 2nx_1(x_1^2 + x_2^2)^{n-1} = 2nx_1|x|^{2n-2},$

$u_{x_2} = 2nx_2|x|^{2n-2},$

$u_{x_1x_1} = 2n(x_1^2 + x_2^2)^{n-1} + 4n(n-1)x_1^2(x_1^2 + x_2^2)^{n-2} = \ldots$

$\ldots = 2n|x|^{2n-2} + 4n(n-1)x_1^2|x|^{2n-4},$

$u_{x_1x_2} = 4n(n-1)x_1x_2(x_1^2 + x_2^2)^{n-2} = 4n(n-1)x_1x_2|x|^{2n-4},$

$u_{x_2x_1} = 4n(n-1)x_1x_2|x|^{2n-4},$

$u_{x_2x_2} = 2n|x|^{2n-2} + 4n(n-1)x_2^2|x|^{2n-4}.$

Sada možemo da zaključimo da je vektor vrsta

$$u_x = \begin{bmatrix} u_{x_1} & u_{x_2} \end{bmatrix} = 2n|x|^{2n-2} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} = 2n|x|^{2n-2}\, x^T.$$

Još nam je potrebno da odredimo elemente matrice $G\,G^T$,

$$G\,G^T = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{11} & G_{21} \\ G_{12} & G_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}^2 + G_{12}^2 & G_{11}G_{21} + G_{12}G_{22} \\ G_{21}G_{11} + G_{22}G_{12} & G_{21}^2 + G_{22}^2 \end{bmatrix}.$$

Sada Itôva formula za dY_t izgleda ovako

$$dY_t = u_t(t, X_t)dt + u_x(t, X_t)f(t, X_t)dt + \frac{1}{2}(u_{x_1x_1}(t, X_t)(G\,G^T)_{11} + u_{x_1x_2}(t, X_t)(G\,G^T)_{12} +$$

$$+ u_{x_2x_1}(t, X_t)(G\,G^T)_{21} + u_{x_2x_2}(t, X_t)(G\,G^T)_{22})dt + u_x(t, X_t)G(t, X_t)dW_t.$$

Računamo,

$$u_{x_1x_1}(G\,G^T)_{11} + u_{x_1x_2}(G\,G^T)_{12} + u_{x_2x_1}(G\,G^T)_{21} + u_{x_2x_2}(G\,G^T)_{22} =$$

$$= (2n|x|^{2n-2} + 4n(n-1)x_1^2|x|^{2n-4})(G_{11}^2 + G_{12}^2) +$$

$$+4n(n-1)x_1x_2|x|^{2n-4}(G_{11}G_{21} + G_{12}G_{22}) +$$

$$+4n(n-1)x_1x_2|x|^{2n-4}(G_{21}G_{11} + G_{22}G_{12}) +$$

$$+(2n|x|^{2n-2} + 4n(n-1)x_2^2|x|^{2n-4})(G_{21}^2 + G_{22}^2) =$$

$$= 2n|x|^{2n-2}(G_{11}^2 + G_{12}^2 + G_{21}^2 + G_{22}^2) + 4n(n-1)|x|^{2n-4}(x_1^2G_{11}^2 + x_1^2G_{12}^2 +$$

$$+2x_1x_2G_{11}G_{21} + 2x_1x_2G_{12}G_{22} + x_2^2G_{21}^2 + x_2^2G_{22}^2) =$$

$$= 2n|x|^{2n-2}|G|^2 + 4n(n-1)|x|^{2n-4}((x_1G_{11} + x_2G_{21})^2 + (x_1G_{12} + x_2G_{22})^2) =$$

$$= 2n\,|x|^{2n-2}\,|G|^2 + 4n(n-1)\,|x|^{2n-4}\,|x^T\,G|^2.$$

Dakle,

$$dY_t = 2n\,|X_t|^{2n-2}\,X_t^T\,f(t,X_t)\,dt + 2n\,|X_t|^{2n-2}\,X_t^T\,G(t,X_t)\,dW_t +$$
$$+n\,|X_t|^{2n-2}\,|G(t,X_t)|^2\,dt + 2n(n-1)\,|X_t|^{2n-4}\,|X_t^T\,G(t,X_t)|^2\,dt. \qquad (2.18)$$

Napomenimo na kraju da formula (2.18) važi za proizvoljne $d, m \in N$.

Primer 2. (Itôva formula za slučaj $d = m = k = 1$)
Neka je $X_t = W_t$, $t \in [t_0, T]$. Odavde dobijamo

$$dX_t = dW_t$$

(vidimo da je $f \equiv 0$ i $G \equiv 1$) i zanima nas čemu je jednako $d(W_t^m)$, za $m \in N$.
Definišemo proces

$$Y_t := X_t^m = W_t^m$$

i pomoću Itôve formule određujemo njegov diferencijal.
Dakle, $u(t,x) = x^m$, $m \in N$, pa dobijamo

$$u_t = 0, \qquad u_x = mx^{m-1}, \qquad u_{xx} = m(m-1)x^{m-2}$$

i na osnovu formule (2.15) sledi

$$dY_t = d(W_t^m) = mW_t^{m-1}dW_t + \frac{1}{2}\,m(m-1)W_t^{m-2}dt. \qquad (2.19)$$

Sada ćemo posmatrati dva specijalna slučaja Itôve teoreme 2.6.1.

Teorema 2.6.3 (Itôva teorema za slučaj $m = k = 1$) *Neka je $u = u(t, x_1, x_2, \ldots, x_d)$ neprekidna funkcija definisana na skupu $[t_0, T] \times R^d$ sa neprekidnim parcijalnim izvodima u_t, u_{x_i} i $u_{x_i x_j}$, za $i, j \leq d$. Dalje, pretpostavimo da je d jednodimenzionalnih stohastičkih procesa $X_i(t)$ definisano na intervalu $[t_0, T]$ pomoću svojih stohastičkih diferencijala*

$$dX_i(t) = f_i(t)dt + G_i(t)dW_t, \quad i = 1, 2, \ldots, d, \tag{2.20}$$

u odnosu na isto jednodimenzionalno Brownovo kretanje W_t. Tada se stohastički diferencijal procesa

$$Y_t = u(t, X_1(t), \ldots, X_d(t)),$$

definisanog na intervalu $[t_0, T]$, može izračunati na sledeći način

$$dY_t = u_t dt + \sum_{i=1}^{d} u_{x_i} dX_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} u_{x_i x_j} dX_i(t) dX_j(t). \tag{2.21}$$

Napomenimo da proizvod $dX_i(t)dX_j(t)$ pomoću tablice za množenje diferencijala

$\cdot$	dW_t	dt
dW_t	dt	0
dt	0	0

možemo zapisati na sledeći način

$$dX_i(t)dX_j(t) = (f_i(t)dt + G_i(t)dW_t)\,(f_j(t)dt + G_j(t)dW_t) = G_i(t)G_j(t)dt. \tag{2.22}$$

Sada iz (2.20), (2.21) i (2.22) dobijamo drugačiji zapis Itôve formule za slučaj $k = m = 1$

$$dY_t = \left(u_t + \sum_{i=1}^{d} u_{x_i} f_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} u_{x_i x_j} G_i G_j \right) dt + \left(\sum_{i=1}^{d} u_{x_i} G_i \right) dW_t.$$

Ostalo nam je da objasnimo gore pomenutu tablicu za množenje diferencijala. Na osnovu (2.19) za $m = 2$ dobijamo

$$d(W_t^2) = 2W_t dW_t + dt.$$

Sa druge strane iz Taylorovog razvoja za funkciju $Y = Y(W_t) = W_t^2$ dobijamo

$$dY = d(W_t^2) = 2W_t dW_t + (dW_t)^2$$

pa sledi

$$(dW_t)^2 = dW_t\, dW_t = dt. \tag{2.23}$$

Dalje, iz (2.19) za $m = 3$ dobijamo

$$d(W_t^3) = 3W_t^2 dW_t + 3W_t dt,$$

a iz Taylorovog razvoja za funkciju $Z = Z(W_t) = W_t^3$ sledi

$$dZ = d(W_t^3) = 3W_t^2 dW_t + 3W_t(dW_t)^2 + (dW_t)^3,$$

i (uz već dokazanu jednakost (2.23)) dobijamo

$$(dW_t)^3 = 0, \quad \text{odnosno,} \quad (dW_t)^3 = (dW_t)^2 dW_t = dt\, dW_t = 0.$$

Ostalo nam je da pokažemo i poslednju jednakost iz tabele. Iz

$$(dW_t)^4 = (dW_t)^2(dW_t)^2 = dt\, dt \quad \text{i} \quad (dW_t)^4 = (dW_t)^3 dW_t = 0 \cdot dW_t = 0$$

sledi

$$(dt)^2 = dt\, dt = 0.$$

I na kraju dajemo Itôvu formulu u najjednostavnijem slučaju.

Teorema 2.6.4 (Itôva teorema za slučaj $d = m = k = 1$) *Neka $u = u(t, x)$ predstavlja skalarnu neprekidnu funkciju definisanu na $[t_0, T]$ sa neprekidnim parcijalnim izvodima u_t, u_x i u_{xx}. Dalje, neka je X_t R-vrednosni proces definisan na intervalu $[t_0, T]$ pomoću svog stohastičkog diferencijala*

$$dX_t = f\, dt + G\, dW,$$

pri čemu su f, G i W_t skalarne (tj. R-vrednosne) funkcije. Stohastički diferencijal za proces

$$Y_t = u(t, X_t)$$

definisan na intervalu $[t_0, T]$ može se izračunati na sledeći način

$$dY_t = \Big(u_t(t, X_t) + u_x(t, X_t)f(t) + \frac{1}{2}u_{xx}(t, X_t)G(t)^2\Big)\, dt + u_x(t, X_t)G(t)\, dW_t.$$

Glava 3

Stohastičke diferencijalne jednačine

3.1 Motivacija

Posmatrajmo početni problem iz ODJ

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad t \geq 0,$$

$$x(0) = x_0, \tag{3.1}$$

pri čemu je x_0 fiksiran realan broj, a $f : R^2 \rightarrow R$ glatka funkcija. Rešenje (ili trajektorija) početnog problema (3.1) je neka glatka kriva u R^2 ravni

$$x(\cdot) : [0, \infty) \rightarrow R.$$

Problem koji može nastati pri modeliranju nekog sistema pomoću ODJ je taj da trajektorija (koja je rešenje početnog problema) može biti nepredvidiva, tj. u tački $t \in [0, \infty)$ vrednost $x(t)$ nije deterministički određena, već uzima neke slučajne vrednosti. Dakle, $x(t)$ je jedna slučajna promenljiva, za svako $t \in [0, \infty)$, (tj. vrednost x zavisi i od t i od ω), a to znači da je $x(t, \omega)$ jedan stohastički proces na intervalu $[0, \infty)$. Na osnovu ovog zaključka vidimo da u početnom problemu (3.1) moramo uvesti nekakvu slučajnu veličinu pa dobijamo sledeće

$$\dot{X}_t = f(t, X_t) + G(t, X_t)\xi_t, \quad t \geq 0,$$

$$X(0) = x_0, \tag{3.2}$$

gde funkcija $G : R^2 \rightarrow R$, a slučajna veličina ξ_t predstavlja beli šum.
Ako sada iskoristimo činjenicu da beli šum predstavlja prvi izvod Brownovog kretanja po promenljivoj t, tj.

$$\xi_t = \dot{W}_t = \frac{dW_t}{dt},$$

onda sistem (3.2) možemo zapisati na sledeći način

$$
\begin{aligned}
\frac{dX_t}{dt} &= f(t, X_t) + G(t, X_t)\frac{dW_t}{dt}, \\
X(0) &= x_0,
\end{aligned}
$$

odnosno,

$$
\begin{aligned}
dX_t &= f(t, X_t)dt + G(t, X_t)dW_t, \\
X(0) &= x_0,
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

ili u integralnom obliku

$$
X(t) = x_0 + \int_0^t f(s, X_s)\, ds + \int_0^t G(s, X_s)\, dW_s. \tag{3.4}
$$

Izrazi (3.3) ili (3.4), u suštini, predstavljaju stohastičku diferencijalnu jednačinu, a u sledećem poglavlju ćemo dati i njenu formalnu definiciju kao i potrebne uslove da neki proces X_t bude rešenje SDJ.

3.2 Definicija stohastičke diferencijalne jednačine

Posmatrajmo stohastički diferencijal zadat na sledeći način

$$
\begin{aligned}
dX_t &= f(t, X_t)dt + G(t, X_t)dW_t, \\
X_{t_0} &= c, \quad t_0 \leq t \leq T < \infty,
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

ili u integralnom obliku

$$
X_t = c + \int_{t_0}^t f(s, X_s)\, ds + \int_{t_0}^t G(s, X_s)\, dW_s, \quad t_0 \leq t \leq T < \infty, \tag{3.6}
$$

pri čemu X_t predstavlja R^d-vrednosni stohastički proces definisan na intervalu $[t_0, T]$, a W_t je m-dimenzionalno Brownovo kretanje. Za R^d-vrednosnu funkciju f i $R^{d\times m}$-vrednosnu funkciju G pretpostavljamo da su definisane i merljive na skupu $[t_0, T] \times R^d$. Takođe, pretpostavljamo da za fiksiranu tačku $(t, x) \in [t_0, T] \times R^d$ funkcije $f(t, x)$ i $G(t, x)$ ne zavise od $\omega \in \Omega$, to znači da se ω u njima indirektno javlja, tj. u formi $f(t, X_t(\omega))$ i $G(t, X_t(\omega))$.

Dakle, u opštem slučaju, uz ranije uvedene oznake, stohastički diferencijal iz (3.5) možemo raspisati na sledeći način:

$$
d\begin{bmatrix} X_t^1 \\ X_t^2 \\ \vdots \\ X_t^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t, X_t) \\ f_2(t, X_t) \\ \vdots \\ f_d(t, X_t) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} G_{11}(t, X_t) & G_{12}(t, X_t) & \dots & G_{1m}(t, X_t) \\ G_{21}(t, X_t) & G_{22}(t, X_t) & \dots & G_{2m}(t, X_t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{d1}(t, X_t) & G_{d2}(t, X_t) & \dots & G_{dm}(t, X_t) \end{bmatrix} d\begin{bmatrix} W_t^1 \\ W_t^2 \\ \vdots \\ W_t^m \end{bmatrix}
$$

odnosno,

$$
\begin{aligned}
dX_t^1 &= f_1\,dt + G_{11}\,dW_t^1 + G_{12}\,dW_t^2 + \ldots + G_{1m}\,dW_t^m,\\
dX_t^2 &= f_2\,dt + G_{21}\,dW_t^1 + G_{22}\,dW_t^2 + \ldots + G_{2m}\,dW_t^m,\\
&\vdots\\
dX_t^d &= f_d\,dt + G_{d1}\,dW_t^1 + G_{d2}\,dW_t^2 + \ldots + G_{dm}\,dW_t^m.
\end{aligned}
$$

Da bi diferencijal iz (3.5) bio dobro definisan (u smislu definicije 2.6.1) rešenje SDJ (3.5) je stohastički proces X_t (za koji u ovom trenutku pretpostavljamo da postoji i da znamo da ga odredimo) koji mora biti $\mathcal{F}_t$-merljiv, tj. neanticipirajući.

Od sada pa nadalje, oznaka $\mathcal{F}_t$ će predstavljati najmanju σ-algebru u odnosu na koju su slučajne promenljive c (početna vrednost iz (3.5)) i W_s, za $s \leq t$ merljive. Dakle,

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{U}(c; W_s, s \leq t).$$

Kako je po definiciji 2.4.5 $\mathcal{F}_t$ nezavisno od budućnosti Brownovog kretanja, tj. od

$$\mathcal{W}_t^+ = \mathcal{U}(W_s - W_t,\ s \geq t),$$

i kako je X_t $\mathcal{F}_t$-merljiv proces, za $t = t_0$ dobijamo da je početna vrednost $c = X_{t_0}$ nezavisna od $\mathcal{W}_{t_0}^+$, tj. slučajne promenljive c i $W_t - W_{t_0}$ su nezavisne, za svako $t \in [t_0, T]$.

Definicija 3.2.1 *Jednačina oblika (3.5) se naziva* **stohastička diferencijalna jednačina** *(***SDJ***, kraće), a slučajna promenljiva c se naziva* **početna vrednost** *u trenutku t_0.*

Napomenimo da je (3.5) samo drugačiji zapis za stohastičku integralnu jednačinu (3.6).

Definicija 3.2.2 *Stohastički proces X_t je* **rešenje** *jednačine (3.5) ili (3.6) na intervalu $[t_0, T]$, ako ima sledeće osobine:*

a) X_t je $\mathcal{F}_t$-merljiv za svako $t \in [t_0, T]$, odnosno, X_t je neanticipirajući proces.

b) Funkcije $\overline{f}(t,\omega) = f(t, X_t(\omega))$ i $\overline{G}(t,\omega) = G(t, X_t(\omega))$ su neanticipirajuće i, sa verovatnoćom 1, zadovoljavaju uslove

$$\int_{t_0}^{T} |\overline{f}(s,\omega)| ds < \infty$$

i

$$\int_{t_0}^{T} |\overline{G}(s,\omega)|^2 ds < \infty$$

(tj. $\overline{G} \in M_2^{d,m}$).

c)Jednačina (3.6) je, sa verovatnoćom 1, tačna za svako $t \in [t_0, T]$.

Ako obratimo pažnju na izraz (3.5) vidimo da se u njemu pojavljuju četiri poznate veličine, to su determinističke funkcije f i G koje opisuju sistem koji modeliramo i dva međusobno nezavisna slučajna elementa c i W_t, i jedna nepoznata veličina, a to je proces X_t i njega želimo da odredimo. Dakle, taj nepoznati proces X_t, u suštini, možemo posmatrati kao sledeću funkciju

$$X_t = g(c; W_s,\, s \le t),$$

pri čemu je funkcija g određena samo pomoću f i G.

U nastavku slede dva primera stohastičkih diferencijalnih jednačina za slučaj $d = m = 1$.

Primer 1. Neka je $g : R \to R$ deterministička neprekidna funkcija i $g \in L_2[t_0, T]$. Jedinstveno rešenje stohastičke diferencijalne jednačine

$$dX_t = g(t) X_t \, dW_t,$$

$$X(t_0) = 1,$$

na intervalu $[t_0, T]$ je

$$X_t = e^{-\frac{1}{2}\int_{t_0}^t g^2(s)\,ds + \int_{t_0}^t g(s)\,dW_s}.$$

Da bi dokazali da X_t jeste rešenje date SDJ definisaćemo pomoćni proces $Y(t)$

$$Y(t) := -\frac{1}{2}\int_{t_0}^t g^2(s)\,ds + \int_{t_0}^t g(s)\,dW_s.$$

Vidimo da je

$$dY_t = -\frac{1}{2} g^2(t)\,dt + g(t)\,dW_t. \tag{3.7}$$

Sada na osnovu Itôve formule 2.6.4 dobijamo

$$dX_t = \Big(u_t(t, Y_t) + u_x(t, Y_t) f(t) + \frac{1}{2} u_{xx}(t, Y_t) G(t)^2\Big)\,dt + u_x(t, Y_t) G(t)\,dW_t.$$

Kako je $X_t = e^{Y_t}$ imamo da je funkcija $u(t, x)$ iz Itôve teoreme 2.6.4 jednaka

$$u(t, x) = u(x) = e^x$$

pa je $u_t = 0$ i $u_x = u_{xx} = e^x$.
Iz (3.7) dobijamo potrebne funkcije $f(t)$ i $G(t)$ iz Itôve teoreme 2.6.4

$$f(t) = -\frac{1}{2} g^2(t), \qquad G(t) = g(t).$$

Dakle,

$$dX_t = \Big(e^{Y_t}\Big(-\frac{1}{2} g^2(t)\Big) + \frac{1}{2} e^{Y_t} g^2(t)\Big)\,dt + e^{Y_t} g(t)\,dW_t = X_t\, g(t)\,dW_t$$

i za $t = t_0$ imamo $X(t_0) = e^0 = 1$.

U specijalnom slučaju za $g(t) = 1$ rešenje SDJ

$$dX_t = X_t \, dW_t,$$
$$X(t_0) = 1,$$

na intervalu $[t_0, T] \subseteq [0, \infty)$ je

$$X_t = e^{W_t - W_{t_0} - \frac{t-t_0}{2}}.$$

Primetimo da na isti način kao u prethodnom primeru možemo pokazati da je rešenje jednačine

$$dX_t = g(t) X_t \, dW_t,$$
$$X(t_0) = c,$$

dato sa

$$X_t = c \, e^{-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} g^2(s)\, ds + \int_{t_0}^{t} g(s)\, dW_s}.$$

Primer 2. Neka su $f, g : R \to R$ determinističke neprekidne funkcije i $f \in L_1[t_0, T]$, $g \in L_2[t_0, T]$. Na isti način kao u prethodnom primeru može se pokazati da je jedinstveno rešenje SDJ

$$dX_t = f(t) X_t \, dt + g(t) X_t \, dW_t,$$
$$X(t_0) = 1,$$

dato sa

$$X_t = e^{\int_{t_0}^{t} f(s)\, ds - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} g^2(s)\, ds + \int_{t_0}^{t} g(s)\, dW_s}.$$

Napomenimo da u oba primera nismo dokazivali jedinstvenost rešenja pošto će kasnije, kada formulišemo i dokažemo teoremu o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja SDJ, biti jasno da data rešenja jesu jedinstvena.

Sada ćemo videti kako sa nekih malo drugačijih oblika SDJ možemo preći na oblik (3.5).

Posmatrajmo stohastičku diferencijalnu jednačinu oblika

$$dY_t = f(t, Y_t, W_t) dt + G(t, Y_t, W_t) dW_t,$$
$$Y_{t_0} = c.$$

Sa ovog oblika SDJ prelazimo na oblik (3.5) tako što dodamo jednačinu

$$dW_t = dW_t$$

i pređemo na $(d+m)$-dimenzionalni vektor

$$X_t = (Y_t, W_t) = \begin{bmatrix} Y_t \\ W_t \end{bmatrix}_{(d+m)\times 1}.$$

Dakle, dobijamo

$$d\begin{bmatrix} Y_t \\ W_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(t, Y_t, W_t) \\ 0 \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} G(t, Y_t, W_t) \\ I_m \end{bmatrix} dW_t,$$

$$\begin{bmatrix} Y_{t_0} \\ W_{t_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix},$$

odnosno,

$$dX_t = \tilde{f}(t, X_t)dt + \tilde{G}(t, X_t)dW_t,$$

$$X_{t_0} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix},$$

pri čemu je

$$\tilde{f}(t, X_t) = \begin{bmatrix} f(t, Y_t, W_t) \\ 0 \end{bmatrix}_{(d+m)\times 1}, \qquad \tilde{G}(t, X_t) = \begin{bmatrix} G(t, Y_t, W_t) \\ I_m \end{bmatrix}_{(d+m)\times m},$$

a I_m je jedinična matrica dimenzija $m \times m$.

Posmatrajmo sada sledeći oblik stohastičke diferencijalne jednačine n-tog reda

$$Y_t^{(n)} = f(t, Y_t, \dot{Y}_t \ldots, Y_t^{(n-1)}) + G(t, Y_t, \dot{Y}_t \ldots, Y_t^{(n-1)})\, \xi_t,$$

odnosno,

$$dY_t^{(n-1)} = f(t, Y_t, \ldots, Y_t^{(n-1)})\, dt + G(t, Y_t, \ldots, Y_t^{(n-1)})\, dW_t,$$

uz početne vrednosti

$$Y_{t_0}^{(i)} = c_i, \text{ za } \; i = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

pri čemu je Y_t R^d-vrednosni proces, a ξ_t m-dimenzionalni beli šum, odnosno, W_t m-dimenzionalno Brownovo kretanje.
Sa datog oblika SDJ n-tog reda prelazimo na SDJ prvog reda (tj. na oblik (3.5))

$$dX_t = \tilde{f}(t, X_t)dt + \tilde{G}(t, X_t)dW_t,$$

$$X_{t_0} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix}_{dn\times 1},$$

na sledeći način

$$X_t = \begin{bmatrix} Y_t \\ \dot{Y}_t \\ \vdots \\ Y_t^{(n-1)} \end{bmatrix}_{dn\times 1}, \quad \tilde{f}(t, X_t) = \begin{bmatrix} \dot{Y}_t \\ \ddot{Y}_t \\ \vdots \\ f(t, Y_t, \ldots, Y_t^{(n-1)}) \end{bmatrix}_{dn\times 1},$$

$$\tilde{G}(t, X_t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ G(t, Y_t, \ldots, Y_t^{(n-1)}) \end{bmatrix}_{dn\times m}.$$

Napomena. Za svako rešenje SDJ (3.5) postoji njemu ekvivalentno rešenje sa skoro sigurno neprekidnim trajektorijama. Dakle, mi ćemo uvek posmatrati **neprekidna rešenja** stohastičkih diferencijalnih jednačina (pod tim podrazumevamo rešenja sa skoro sigurno neprekidnim trajektorijama).

3.3 Egzistencija i jedinstvenost rešenja

Pošto smo u prethodnom poglavlju definisali stohastičku diferencijalnu jednačinu prirodno se nameće pitanje kada takva jednačina ima rešenje i, ako utvrdimo da rešenje postoji, da li je ono jedinstveno.

Kako nam odgovor na pitanje o postojanju i jedinstvenosti rešenja obične diferencijalne jednačine daje teorema Picarda i Lindelöfa (teorema 2.1.1), a vidimo da iz (3.2) dobijamo (3.1) za $G(t, x) \equiv 0$, jasno je da trebamo da uopštimo teoremu 2.1.1 i da utvrdimo kada SDJ ima jedinstveno rešenje. To postižemo na sledeći način:

Teorema 3.3.1 (Egzistencija i jedinstvenost rešenja SDJ) *Neka je data stohastička diferencijalna jednačina oblika*

$$dX_t = f(t, X_t)\, dt + G(t, X_t)\, dW_t,$$

$$X_{t_0} = c, \quad t_0 \le t \le T < \infty, \tag{3.8}$$

gde W_t predstavlja m-dimenzionalno Brownovo kretanje, a c je slučajna promenljiva nezavisna od $W_t - W_{t_0}$ za $t \ge t_0$. Dalje, neka su R^d-vrednosna funkcija $f(t, x)$ i $R^{d\times m}$-vrednosna funkcija $G(t, x)$ definisane i merljive na skupu $[t_0, T] \times R^d$ i neka zadovoljavaju sledeće uslove:
Postoji konstanta $K > 0$ takva da važi:
(a) **(Lipschitzov uslov)**

$$|f(t, x) - f(t, y)| + |G(t, x) - G(t, y)| \le K|x - y|,$$

za svako $t \in [t_0, T]$ i za svako $x, y \in R^d$ i;

(b) **(Restrikcija rasta)**

$$|f(t, x)|^2 + |G(t, x)|^2 \le K^2(1 + |x|^2),$$

za svako $t \in [t_0, T]$ i za svako $x \in R^d$.
Tada, jednačina (3.8) na intervalu $[t_0, T]$ ima jedinstveno R^d-vrednosno rešenje X_t, neprekidno sa verovatnoćom 1, koje zadovoljava početni uslov $X_{t_0} = c$, odnosno, ako

su, pri datim uslovima, X_t i Y_t dva neprekidna rešenja SDJ (3.8) sa istom početnom vrednošću c, onda za njih važi

$$P\{\sup_{t_0\le t\le T}|X_t - Y_t| > 0\} = P\{\omega;\ \sup_{t_0\le t\le T}|X_t(\omega) - Y_t(\omega)| > 0\} = 0.$$

Pre dokaza ove teoreme daćemo dve leme koje će nam biti neophodne.

Lema 3.3.1 *Označimo sa $C^d_{[t_0,T]}$ skup svih neprekidnih R^d-vrednosnih funkcija definisanih na intervalu $[t_0,T]$. Za proizvoljnu funkciju $f \in C^d_{[t_0,T]}$ važi*

$$\left|\int_{t_0}^T f(t)\,dt\right|^2 \le (T-t_0)\int_{t_0}^T |f(t)|^2 dt.$$

Dokaz leme 3.3.1. Dokazaćemo tvrđenje za $d = 1$.
Za proizvoljne $f, g \in C_{[t_0,T]}$, na osnovu Cauchy-Schwarzove nejednakosti,

$$|(f|g)| \le \|f\| \cdot \|g\|$$

uz specijalan odabir funkcije $g(t) = 1$ iz $C_{[t_0,T]}$ dobijamo

$$|(f|1)| \le \|f\| \cdot \|1\|,$$

$$\left|\int_{t_0}^T f(t)\cdot 1\,dt\right| \le \left(\int_{t_0}^T f(t)^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{t_0}^T 1^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\int_{t_0}^T f(t)\,dt\right|^2 \le (T-t_0)\int_{t_0}^T f(t)^2\,dt.$$

□

Napomena. Klasa neprekidnih funkcija sadrži klasu funkcija koje zadovoljavaju Lipschitzov uslov, a ova klasu diferencijabilnih funkcija.

Lema 3.3.2 *Za proizvoljne $x, y, z \in R^d$ važi:*

(a) $|x+y|^2 \le 2(|x|^2 + |y|^2)$;

(b) $|x+y+z|^2 \le 3(|x|^2 + |y|^2 + |z|^2)$.

Dokaz leme 3.3.2
(a) Za proizvoljne $x, y \in R^d$ važi $(|x| - |y|)^2 \ge 0$, a odatle dobijamo

$$|x|^2 + |y|^2 \ge 2\,|x|\,|y|$$

pa je

$$|x+y|^2 \le (|x| + |y|)^2 = |x|^2 + 2\,|x|\,|y| + |y|^2 \le 2\left(|x|^2 + |y|^2\right).$$

(b) Za proizvoljne $x, y, z \in R^d$ važi

$$|x+y+z|^2 \le (|x|+|y|+|z|)^2 = |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 + 2\,|x|\,|y| + 2\,|x|\,|z| + 2\,|y|\,|z| \le$$

$$\le 3\left(|x|^2 + |y|^2 + |z|^2\right).$$

$\square$

Sada ćemo dati dokaz teoreme o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja SDJ.
Dokaz teoreme 3.3.1
(a) Prvo ćemo dokazati **jedinstvenost**.
Neka su X_t i Y_t dva neprekidna rešenja SDJ (3.8), dakle važi

$$X_t = c + \int_{t_0}^{t} f(s, X_s)\, ds + \int_{t_0}^{t} G(s, X_s)\, dW_s, \quad t_0 \leq t \leq T < \infty,$$

$$Y_t = c + \int_{t_0}^{t} f(s, Y_s)\, ds + \int_{t_0}^{t} G(s, Y_s)\, dW_s, \quad t_0 \leq t \leq T < \infty.$$

Da bi pokazali jedinstvenost rešenja trebamo da pokažemo

$$E\left[|X_t - Y_t|^2\right] = 0, \text{ za svako } t \in [t_0, T].$$

Pošto drugi momenti procesa X_t i Y_t (tj. $E\left[|X_t|^2\right]$ i $E\left[|Y_t|^2\right]$) ne moraju biti konačni iskoristićemo tzv. *metod odsecanja*. Dakle, za $N > 0$ i $t \in [t_0, T]$ definišemo

$$I_N(t) := \begin{cases} 1, & \text{ako je } |X_s| \leq N \text{ i } |Y_s| \leq N, \text{ za sve } t_0 \leq s \leq t, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Kako je

$$I_N(t) = I_N(t)\, I_N(s), \text{ za } s \leq t$$

važi jednakost

$$I_N(t)(X_t - Y_t) = I_N(t) \left(\int_{t_0}^{t} I_N(s)(f(s, X_s) - f(s, Y_s))\, ds + \right.$$
$$\left. + \int_{t_0}^{t} I_N(s)(G(s, X_s) - G(s, Y_s))\, dW_s \right). \tag{3.9}$$

Dalje, za svako $s \in [t_0, t]$ Lipschitzov uslov implicira

$$I_N(s)(|f(s, X_s) - f(s, Y_s)| + |G(s, X_s) - G(s, Y_s)|) \leq I_N(s)\, K|X_s - Y_s| \leq 2KN,$$

pa možemo zaključiti da oba integrala u (3.9) postoje, tj. manji su od ∞.
Sada možemo da analiziramo šta se dešava sa drugim momentom $E\left[I_N(t)|X_t - Y_t|^2\right]$, jer je on manji od ∞.
Na osnovu (3.9) i leme 3.3.2 pod (a) dobijamo

$$E\left[I_N(t)|X_t - Y_t|^2\right] \leq 2E\left[\left|\int_{t_0}^{t} I_N(s)(f(s, X_s) - f(s, Y_s))\, ds\right|^2\right] +$$
$$+ 2E\left[\left|\int_{t_0}^{t} I_N(s)(G(s, X_s) - G(s, Y_s))\, dW_s\right|^2\right] \leq$$

a dalje je sve to, na osnovu leme 3.3.1 i činjenice da je $t \leq T$

$$\leq 2(T - t_0) \int_{t_0}^{t} E\left[I_N(s)\, |(f(s, X_s) - f(s, Y_s))|^2\right] ds +$$

$$+2E\left[\left|\int_{t_0}^{t} I_N(s)(G(s,X_s)-G(s,Y_s))\,dW_s\right|^2\right]=$$

na osnovu teoreme 2.5.4 pod (c) važi jednakost

$$=2(T-t_0)\int_{t_0}^{t} E\left[I_N(s)\,|(f(s,X_s)-f(s,Y_s))|^2\right]\,ds+$$

$$+2\int_{t_0}^{t} E\left[I_N(s)\,|(G(s,X_s)-G(s,Y_s))|^2\right]\,ds\leq$$

dalje, na osnovu Lipschitzovog uslova primenjenog na podintegralne funkcije dobijamo

$$\leq 2(T-t_0)\int_{t_0}^{t} E\left[I_N(s)\,K^2|X_s-Y_s|^2\right]\,ds+2\int_{t_0}^{t} E\left[I_N(s)\,K^2|X_s-Y_s|^2\right]\,ds$$

i na kraju, uz oznaku $L=2K^2(T-t_0+1)$, dobijamo

$$E\left[I_N(t)\,|X_t-Y_t|^2\right]\leq L\int_{t_0}^{t} E\left[I_N(s)\,|X_s-Y_s|^2\right]\,ds. \tag{3.10}$$

Ako u (3.10) iskoristimo specijalni slučaj (2.3) iz Bellman-Gronwallove leme (lema 2.1.2) za $c_0=0$ i $k(s)=L$ dobijamo

$$E\left[I_N(t)\,|X_t-Y_t|^2\right]\leq 0\cdot e^{L\int_{t_0}^{t} ds}=0,\ \text{ za svako } t\in[t_0,T].$$

Sa druge strane je očigledno da je

$$E\left[I_N(t)\,|X_t-Y_t|^2\right]\geq 0,\ \text{ za svako } t\in[t_0,T],$$

pa dobijamo

$$E\left[I_N(t)\,|X_t-Y_t|^2\right]=0,\ \text{ za svako } t\in[t_0,T],$$

odnosno,

$$I_N(t)\,X_t=I_N(t)\,Y_t,\ \text{ sa verovatnoćom } 1,$$

za proizvoljno fiksirano $t\in[t_0,T]$.
Iz nejednakosti

$$P\{I_N(t)\not\equiv 1 \text{ na skupu } [t_0,T]\}\leq P\{\sup_{t_0\leq t\leq T}|X_t|>N\}+P\{\sup_{t_0\leq t\leq T}|Y_t|>N\}$$

i iz činjenice da su X_t i Y_t neprekidna rešenja zaključujemo da desni član u poslednjoj nejednakosti teži nuli kad pustimo da $N\to\infty$, pa dobijamo

$$X_t=Y_t,\ \text{ sa verovatnoćom } 1, \tag{3.11}$$

za proizvoljno fiksirano $t\in[t_0,T]$, a samim tim jednakost (3.11) važi i na prebrojivom gustom skupu $M\subset[t_0,T]$. Sada, iz činjenice da su X_t i Y_t rešenja sa skoro sigurno neprekidnim trajektorijama koja se poklapaju na skupu M sledi da se ta rešenja poklapaju i na celom intervalu $[t_0, T]$ pa važi

$$P\{\sup_{t_0 \le t \le T} |X_t - Y_t| > 0\} = 0.$$

Primetimo da nam za dokazivanje jedinstvenosti rešenja nije bio potreban uslov restrikcije rasta, već samo Lipschitzov uslov.

(b) Sada dokazujemo **egzistenciju** rešenja SDJ.
Prvo posmatramo slučaj

$$E\left[|c|^2\right] < \infty.$$

Egzistenciju rešenja dokazujemo pomoću iterativnog postupka koji nazivamo *metod uzastopnih (sukcesivnih) aproksimacija*, dakle, definišemo sledeći niz

$$X_t^{(0)} \equiv c,$$
$$X_t^{(n)} = c + \int_{t_0}^{t} f(s, X_s^{(n-1)})\, ds + \int_{t_0}^{t} G(s, X_s^{(n-1)})\, dW_s, \quad \text{za } n \ge 1 \text{ i } t \in [t_0, T]. \tag{3.12}$$

Naš zadatak je da pokažemo da niz $X_t^{(n)}$ uniformno konvergira ka procesu X_t koji je rešenje SDJ (3.8).
Pokažimo prvo da je

$$\sup_{t_0 \le t \le T} E\left[|X_t^{(n)}|^2\right] < \infty, \qquad \text{za svako } n \ge 0. \tag{3.13}$$

Iz pretpostavke $E\left[|c|^2\right] < \infty$ zaključujemo

$$\sup_{t_0 \le t \le T} E\left[|X_t^{(0)}|^2\right] < \infty.$$

Na osnovu leme 3.3.2 pod (b) iz (3.12) zaključujemo

$$E\left[|X_t^{(n)}|^2\right] \le 3E\left[|c|^2\right] + 3E\left[\left|\int_{t_0}^{t} f(s, X_s^{(n-1)})\, ds\right|^2\right] + 3E\left[\left|\int_{t_0}^{t} G(s, X_s^{(n-1)})\, dW_s\right|^2\right] \le$$

a to je dalje na osnovu leme 3.3.1 i teoreme 2.5.4 pod (c)

$$\le 3E\left[|c|^2\right] + 3(T - t_0)\int_{t_0}^{t} E\left[\left|f(s, X_s^{(n-1)})\right|^2\right] ds + 3\int_{t_0}^{t} E\left[\left|G(s, X_s^{(n-1)})\right|^2\right] ds \le$$

i na osnovu uslova restrikcije rasta iz teoreme 3.3.1 dobijamo

$$\le 3E\left[|c|^2\right] + 3(T - t_0)\int_{t_0}^{t} K^2\left(1 + E\left[\left|X_s^{(n-1)}\right|^2\right]\right) ds +$$

$$+3\int_{t_0}^{t} K^2\left(1 + E\left[\left|X_s^{(n-1)}\right|^2\right]\right) ds \le$$

$$\leq 3E\left[|c|^2\right] + 3K^2(T-t_0+1)(T-t_0)\left(1+\sup_{t_0\leq t\leq T} E\left[\left|X_t^{(n-1)}\right|^2\right]\right)$$

pa je

$$\sup_{t_0\leq t\leq T} E\left[|X_t^{(n)}|^2\right] < \infty, \qquad \text{za svako } n\geq 1,$$

jer je taj uslov ispunjen za $n=0$.
Na isti način kao što smo u dokazu pod (a) dobili (3.10) sad imamo (pošto smo dokazali (3.13) ne treba nam član $I_N(t)$)

$$E\left[\left|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}\right|^2\right] \leq L\int_{t_0}^t E\left[\left|X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}\right|^2\right]ds \leq$$

odnosno,

$$\leq L\int_{t_0}^t L\int_{t_0}^s E\left[\left|X_u^{(n-1)} - X_u^{(n-2)}\right|^2\right]du\,ds \leq \dots$$

$$\dots \leq L^n\int_{t_0}^t\int_{t_0}^{t_{n-1}}\dots\int_{t_0}^{t_1} E\left[\left|X_s^{(1)} - X_s^{(0)}\right|^2\right]ds\,dt_1\dots dt_{n-1}$$

pri čemu je $L = 2K^2(T-t_0+1)$.

Sada na osnovu Cauchyjeve formule

$$\int_{t_0}^t\int_{t_0}^{t_{n-1}}\dots\int_{t_0}^{t_1} g(s)\,ds\,dt_1\dots dt_{n-1} = \int_{t_0}^t g(s)\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\,ds$$

dobijamo

$$E\left[\left|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}\right|^2\right] \leq L^n\int_{t_0}^t E\left[\left|X_s^{(1)} - X_s^{(0)}\right|^2\right]\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\,ds.$$

Kako je, iz uslova restrikcije rasta,

$$E\left[\left|X_t^{(1)} - X_t^{(0)}\right|^2\right] \leq 2(T-t_0+1)K^2\int_{t_0}^t\left(1+E\left[|c|^2\right]\right)ds \leq L(T-t_0)\left(1+E\left[|c|^2\right]\right) = C,$$

sledi

$$\sup_{t_0\leq t\leq T} E\left[\left|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}\right|^2\right] \leq \frac{C\,L^n\,(T-t_0)^n}{n!}, \quad n\geq 0.$$

Da bi pokazali uniformnu konvergenciju niza $X_t^{(n)}$ moramo naći ocenu za "rastojanje" između dve uzastopne aproksimacije, odnosno,

$$d_n = \sup_{t_0\leq t\leq T}\left|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}\right|.$$

Dalje, iz (3.12) dobijamo

$$d_n \leq \int_{t_0}^T\left|f(s,X_s^{(n)}) - f(s,X_s^{(n-1)})\right|ds + \sup_{t_0\leq t\leq T}\left|\int_{t_0}^t G(s,X_s^{(n)}) - G(s,X_s^{(n-1)})\,dW_s\right|.$$

U nastavku dokaza koristićemo rezultat

$$E\left[\sup_{a\le t\le b}\left|\int_{t_0}^{t} G(s)\,dW_s-\int_{t_0}^{a} G(s)\,dW_s\right|^2\right]\le 4\int_a^b E\left[|G(s)|^2\right]ds \tag{3.14}$$

$$\text{za}\ \ a,b\in[t_0,T]\ \text{i}\ a\le b.$$

Sada iz (3.14), za $a=t_0$ i $b=T$, Lipschitzovog uslova i leme 3.3.1 dobijamo

$$E\left[d_n^2\right]\le 2(T-t_0)K^2\int_{t_0}^{T} E\left[\left|X_s^{(n)}-X_s^{(n-1)}\right|^2\right]ds+$$

$$+2\cdot 4K^2\int_{t_0}^{T} E\left[\left|X_s^{(n)}-X_s^{(n-1)}\right|^2\right]ds.$$

Dakle,

$$E\left[d_n^2\right]\le\left(2(T-t_0)+8\right)K^2\,(T-t_0)\cdot\frac{C\,L^{n-1}\,(T-t_0)^{n-1}}{(n-1)!}=C_1\cdot\frac{(L\,(T-t_0))^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Na osnovu nejednakosti Chebysheva, koja glasi

$$P\{|X|\ge\varepsilon\}\le\frac{E[X^2]}{\varepsilon^2},$$

gde je X slučajna promenljiva za koju postoji drugi momenat $E[X^2]$, a ε je bilo koji realni pozitivni broj, zaključujemo sledeće

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\left\{d_n>\frac{1}{n^2}\right\}\le\sum_{n=1}^{\infty}E[d_n^2]\,n^4,$$

a to je dalje

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\left\{d_n>\frac{1}{n^2}\right\}\le\sum_{n=1}^{\infty}E[d_n^2]\,n^4\le C_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(L\,(T-t_0))^{n-1}}{(n-1)!}\cdot n^4<\infty.$$

Konvergenciju poslednjeg (brojnog) reda možemo dokazati npr. d'Alembertovim kriterijumom.
Na osnovu Borel-Cantellijeve leme (lema 2.2.1 pri čemu je $A_n=\left\{d_n>\frac{1}{n^2}\right\}$) iz poslednje nejednakosti možemo da zaključimo

$$P\left\{d_n=\sup_{t_0\le t\le T}\left|X_t^{(n+1)}-X_t^{(n)}\right|>\frac{1}{n^2},\ \text{za beskonačno mnogo } n\text{-ova}\right\}=0$$

i kako je

$$X_t^{(n)}=X_t^{(0)}+\sum_{i=1}^{n}\left(X_t^{(i)}-X_t^{(i-1)}\right)$$

dobijamo da niz $X_t^{(n)}$ uniformno konvergira ka nekom procesu X_t na intervalu $[t_0,T]$, odnosno

$$ss-\lim_{n\to\infty}X_t^{(n)}=X_t,\ \text{za svako}\ t\in[t_0,T].$$

Kako proces X_t predstavlja limes niza neanticipirajućih i neprekidnih funkcija, onda je i on sam neprekidan i neanticipirajući.
Na kraju još ostaje da pokažemo da dobijeni proces X_t (odnosno granica niza uzastopnih aproksimacija $X_t^{(n)}$) jeste rešenje stohastičke diferencijalne jednačine (3.8), odnosno da važi

$$X_t = c + \int_{t_0}^{t} f(s, X_s)\, ds + \int_{t_0}^{t} G(s, X_s)\, dW_s, \qquad \text{za svako } t \in [t_0, T],$$

a to postižemo tako što pustimo da $n \to \infty$ u izrazu (3.12).
Napomenimo da smo egzistenciju rešenja SDJ (3.8) dokazali samo za slučaj $E\left[|c|^2\right] < \infty$, ali to je dovoljno zato što u opštem slučaju definišemo

$$c_N := \begin{cases} c, & \text{ako je } |c| \leq N, \\ 0, & \text{inače}, \end{cases}$$

i posmatramo limes kad $N \to \infty$.

$\square$

3.4 Uopštenja teoreme o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja SDJ

Primetimo da Lipschitzov uslov iz teoreme o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja, u suštini, kaže da funkcije $f(t,x)$ i $G(t,x)$ ne smeju da se menjaju brže, po drugoj promenljivoj, od same funkcije x (pomnožene konstantom). Već smo napomenuli da je svaka funkcija koja zadovoljava Lipschitzov uslov, takođe i neprekidna (to se vidi iz same definicije Lipschitzovog uslova i definicije neprekidnosti), pa moramo otpisati sve prekidne funkcije (po drugoj promenljivoj) kao koeficijente u SDJ (3.8), odnosno kao funkcije $f(t,x)$ i $G(t,x)$. Pored prekidnih moramo isključiti i neke neprekidne funkcije, npr.

$$f(t,x) = |x|^{\alpha}, \text{ za } 0 < \alpha < 1,$$

a razlog za to je vidljiv iz sledećeg primera.
Posmatrajmo nepotpunu SDJ (nepotpunu u smislu da nam fali član dW_t) za $d = 1$

$$\begin{aligned} dX_t &= X_t^{\alpha}\, dt \\ X_{t_0} &= 0, \end{aligned} \tag{3.15}$$

za $t_0 \geq 0$ i $\alpha > 0$. Očigledno je da je njeno rešenje $X_t \equiv 0$ za svako $\alpha > 0$. Međutim, ako krenemo da rešavamo datu SDJ (rešavamo je kao ODJ zbog toga što nemamo član dW_t) dobijamo

$$\int_0^{X_t} \frac{dr}{r^{\alpha}} = \int_{t_0}^{t} ds,$$

i za $1-\alpha>0$, odnosno, $0<\alpha<1$ imamo još jedno rešenje u obliku

$$\frac{X_t^{1-\alpha}}{1-\alpha}=t-t_0,\ \text{tj.}$$

$$X_t=((t-t_0)(1-\alpha))^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Dakle, vidimo da za odabir funkcije $f(t,x)=x^\alpha$, za $0<\alpha<1$, SDJ (3.15) nema jedinstveno rešenje.
Takođe je pokazano da jednačina ($d=m=1$)

$$dX_t=|X_t|^\alpha\,dW_t$$

$$X_0=0, \tag{3.16}$$

ima tačno jedno neanticipirajuće rešenje za $\alpha\geq\frac{1}{2}$, ali beskonačno mnogo za $0<\alpha<\frac{1}{2}$, tj. opet gubimo jedinstvenost.
Dakle, naš cilj je sada da nekako povećamo klasu funkcija koje mogu biti koeficijenti u SDJ (3.8), tj. da uopštimo Lipschitzov uslov, ali tako da sačuvamo egzistenciju i jedinstvenost rešenja. To postižemo na sledeći način:

Teorema 3.4.1 *Teorema o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja ostaje validna ako uopštimo Lipschitzov uslov na sledeći način, za svako $N>0$, postoji konstanta K_N takva da za svako $t\in[t_0,T]$, $|x|\leq N$ i $|y|\leq N$ važi*

$$|f(t,x)-f(t,y)|+|G(t,x)-G(t,y)|\leq K_N|x-y|.$$

Napomenimo da nam uslov iz prethodne teoreme dopušta da za koeficijente u (3.8) uzmemo funkcije koje postaju sve strmije i strmije sa povećanjem x-a (kao npr. $\sin x^2$).

Sada ćemo dati jedan dovoljan uslov za ispunjenje Lipschitzovog uslova. Na osnovu teoreme o srednjoj vrednosti iz diferencijalnog računa znamo da za skalarnu (tj. R-vrednosnu) funkciju $g(x)$, $x\in R^d$, sa neprekidnim prvim parcijalnim izvodima g_{x_i}, $i=1,2,\ldots,d$, postoji realan broj $\theta\in(0,1)$ tako da važi jednakost

$$g(b)-g(a)=g_x(a+\theta(b-a))^T(b-a),\ \ a,b\in R^d,$$

pri čemu je $g_x\in R^d$, tj. $g_x=(g_{x_1},g_{x_2},\ldots,g_{x_d})$. Ako još pretpostavimo da je $|g_x|$ ograničeno na skupu R^d nekom konstantom $C\in R$ dobijamo da za svako $x,y\in R^d$ važi

$$|g(y)-g(x)|\leq\sup_{z\in R^d}|g_x(z)||y-x|\leq C|y-x|,$$

što je u stvari Lipschitzov uslov.
Ako sada sve ovo primenimo na funkcije $f(t,x)$ i $G(t,x)$ iz (3.8) dobijamo sledeće tvrđenje.

Teorema 3.4.2 *Da bi Lipschitzov uslov iz teoreme 3.3.1 ili njegovo uopštenje iz teoreme 3.4.1 bili zadovoljeni, dovoljno je da funkcije $f(t,x)$ i $G(t,x)$ imaju neprekidne prve parcijalne izvode po promenljivoj x za svako $t \in [t_0, T]$ i da ti prvi parcijalni izvodi budu ograničeni na skupu $[t_0, T] \times R^d$, odnosno na skupu $[t_0, T] \times \{x : |x| \leq N\}$ za uopštenje Lipschitzovog ulova.*

Primetimo da u poslednjoj teoremi pojačavamo Lipschitzov uslov, tj. smanjujemo klasu funkcija koje mogu biti koeficijenti u (3.8). Opravdanje za takav postupak nalazimo u činjenici da se neprekidnost i ograničenost prvih parcijalnih izvoda dosta jednostavno proveravaju.

Sada ćemo malo prodiskutovati drugi uslov iz teoreme 3.3.1, tj. uslov restrikcije rasta. Suština ove pretpostavke je, kako joj i samo ime kaže, da ne dozvoli brz rast funkcija $f(t,x)$ i $G(t,x)$ da ne bi došlo do tzv. **eksplozije** rešenja X_t, odnosno da bi izbegli situaciju da u nekoj tački t iz intervala $[t_0, T]$ vrednost procesa X_t, koji predstavlja rešenje SDJ (3.8), ode u beskonačnost. Ako bi u teoremi 3.3.1 izostavili uslov restrikcije rasta onda bi vrednost slučajne promenljive c iz početnog uslova uticala na to da li dolazi ili ne dolazi do eksplozije procesa X_t na intervalu $[t_0, T]$. Ovo najlakše možemo ilustrovati primerom iz ODJ.
Posmatrajmo početni problem ($d = 1$)

$$dX_t = X_t^2 \, dt$$

$$X_0 = c. \tag{3.17}$$

Iz postupka

$$\int_c^{X_t} \frac{dr}{r^2} = \int_0^t ds, \text{ odnosno,}$$

$$X_t = \frac{1}{\frac{1}{c} - t},$$

vidimo da rešenje početnog problema (3.17) možemo zapisati na sledeći način (primetimo da je za $c = 0$ (3.17) samo specijani slučaj jednačine (3.15) za $\alpha = 2$ i $t_0 = 0$)

$$X_t = \begin{cases} 0, & \text{za } c = 0, \\ X_t = \frac{1}{\frac{1}{c} - t}, & \text{za } c \neq 0. \end{cases}$$

Posmatrajmo sad rešenje X_t problema (3.17) za $c > 0$. Vidimo da je funkcija X_t neprekidna na intervalu $[0, \frac{1}{c})$, ali u tački $t = \frac{1}{c}$ dolazi do eksplozije funkcije X_t, tj. X_t ide u beskonačnost. Dakle, ako rešavamo početni problem (3.17) na intervalu $[0, T]$ za svaki odabir konstante c takve da je $c \geq \frac{1}{T}$, dolazi do eksplozije rešenja X_t, tj. X_t nije definisano na celom intervalu $[0, T]$.
Sad možemo da zaključimo da uslov restrikcije rasta za funkcije $f(t,x)$ i $G(t,x)$ obezbeđuje da rešenje X_t, sa verovatnoćom 1, ne eksplodira na intervalu $[t_0, T]$, za bilo koji odabir početne vrednosti $X_{t_0} = c$.

Primetimo da u teoremi 3.3.1 tražimo jedinstveno rešenje na intervalu $[t_0, T]$ pri čemu zahtevamo da je $T < \infty$, takvo rešenje ćemo u nastavku zvati *lokalno* rešenje. Postavlja se pitanje pod kojim uslovima SDJ (3.8) ima jedinstveno rešenje na intervalu $[t_0, \infty)$. U tu svrhu uvodimo pojam *globalnog* rešenja SDJ.

DEFINICIJA 3.4.1 *Ako su funkcije $f(t,x)$ i $G(t,x)$ definisane na skupu $[t_0,\infty) \times R^d$ i ako pretpostavke iz teoreme 3.3.1 važe za svaki konačni podinterval $[t_0,T] \subset [t_0,\infty)$ onda jednačina (3.8), ili zapisana u integralnom obliku*

$$X_t = c + \int_{t_0}^{t} f(s, X_s)\, ds + \int_{t_0}^{t} G(s, X_s)\, dW_s,$$

ima jedinstveno rešenje definisano na celoj polupravoj $[t_0,\infty)$. Takvo rešenje se naziva **globalno rešenje**.

DEFINICIJA 3.4.2 **Autonomna** *stohastička diferencijalna jednačina je specijalni oblik jednačine (3.8) pri čemu je $f(t,x) \equiv f(x)$ i $G(t,x) \equiv G(x)$, odnosno to je jednačina oblika*

$$\begin{aligned} dX_t &= f(X_t)\, dt + G(X_t)\, dW_t, \\ X_{t_0} &= c. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Teorema 3.4.3 *Za bilo koju početnu vrednost c koja je nezavisna od m-dimenzionalnog Brownovog kretanja $W_t - W_{t_0}$, za svako $t \geq t_0$, jednačina (3.18) ima tačno jedno neprekidno globalno rešenje X_t na intervalu $[t_0,\infty)$ takvo da je $X_{t_0} = c$, ako je ispunjen Lipschitzov uslov, odnosno ako postoji pozitivna konstanta K, takva da za svako $x, y \in R^d$ važi*

$$|f(x) - f(y)| + |G(x) - G(y)| \leq K|x - y|. \tag{3.19}$$

Primetimo da u prethodnoj teoremi ne tražimo da bude ispunjen uslov restrikcije rasta zato što u autonomnom slučaju on sledi direktno iz globalnog Lipschitzovog uslova (3.19) za fiksirano $y = y_0$.
U nastavku slede još dva tvrđenja vezana za specijalne slučajeve autonomnih SDJ.

Teorema 3.4.4 *Neka je $d = m = 1$. Autonomna SDJ (3.18), pod uslovom da su $f(x)$ i $G(x)$ neprekidno diferencijabilne funkcije, ima jedinstveno rešenje na intervalu $[t_0, \eta)$ pri čemu η predstavlja trenutak prve (ako postoji) eksplozije rešenja X_t i važi $t_0 < \eta \leq \infty$. Ako je $\eta < \infty$, onda je $X_{\eta-0} = +\infty$ ili $-\infty$.*

Primetimo da je na osnovu primera (3.17) iz ODJ ovaj zaključak intuitivno jasan.

Teorema 3.4.5 *Neka je $d = m = 1$ i $c = 0$. U skalarnom autonomnom slučaju Lipschitzov uslov za funkciju $G(x)$ može biti zamenjen Hölderovim uslovom za $\alpha > \frac{1}{2}$, tj.*

$$|G(x) - G(y)| \leq K|x - y|^{\alpha}, \quad x, y \in R, \quad \alpha > \frac{1}{2}, \quad K \geq 0.$$

Primetimo da primer (3.16) nagoveštava ovaj rezultat.

Glava 4

Osobine rešenja stohastičkih diferencijalnih jednačina

4.1 Momenti rešenja SDJ

U ovom poglavlju ćemo pretpostaviti da su ispunjeni svi uslovi iz teoreme o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja SDJ

$$
\begin{aligned}
dX_t &= f(t, X_t)\, dt + G(t, X_t)\, dW_t, \\
X_{t_0} &= c, \quad t_0 \leq t \leq T < \infty,
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

i želimo da vidimo šta se dešava sa momentima $E\left[|X_t|^k\right]$ pri čemu X_t predstavlja rešenje SDJ (4.1) na intervalu $[t_0, T]$. U opštem slučaju momenti $E\left[|X_t|^k\right]$ ne moraju da postoje i na njihovu egzistenciju utiče početna vrednost c na sledeći način:

Teorema 4.1.1 *Neka su ispunjeni svi uslovi iz teoreme 3.3.1 i neka važi*

$$E\left[|c|^{2n}\right] < \infty,$$

pri čemu je n pozitivan ceo broj. Tada za rešenje X_t SDJ (4.1) na intervalu $[t_0, T]$, gde je $T < \infty$, važi

$$E\left[|X_t|^{2n}\right] \leq \left(1 + E\left[|c|^{2n}\right]\right) e^{C(t-t_0)} \tag{4.2}$$

i

$$E\left[|X_t - c|^{2n}\right] \leq A\left(1 + E\left[|c|^{2n}\right]\right) (t - t_0)^n\, e^{C(t-t_0)}, \tag{4.3}$$

pri čemu je konstanta $C = 2n\,(2n+1)\,K^2$, a konstanta A zavisi od n, K i $T - t_0$.

Pre dokaza ove teoreme daćemo jedan rezultat koji će nam biti potreban.

Lema 4.1.1 *Za proizvoljno $x \in R^d$ i proizvoljan prirodan broj n važi*

$$\left(1 + |x|^2\right) |x|^{2n-2} \leq 1 + 2|x|^{2n}.$$

Dokaz leme 4.1.1.
Prvi slučaj. Neka je $0 \leq |x| \leq 1$. Tada važi

$$\left(1+|x|^2\right)|x|^{2n-2} = |x|^{2n-2} + |x|^{2n} \leq 1 + |x|^{2n} \leq 1 + 2|x|^{2n}.$$

Drugi slučaj. Neka je $|x| > 1$. Tada važi

$$\left(1+|x|^2\right)|x|^{2n-2} = |x|^{2n-2} + |x|^{2n} \leq |x|^{2n} + |x|^{2n} \leq 1 + 2|x|^{2n}.$$

□

Dokaz teoreme 4.1.1. Na osnovu jednakosti (2.17) i (2.18) iz primera za Itôvu formulu dobijamo

$$|X_t|^{2n} = |c|^{2n} + \int_{t_0}^{t} 2n\,|X_s|^{2n-2}\,X_s^T\,f(s,X_s)\,ds + \int_{t_0}^{t} 2n\,|X_s|^{2n-2}\,X_s^T\,G(s,X_s)\,dW_s +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} n\,|X_s|^{2n-2}\,|G(s,X_s)|^2\,ds + \int_{t_0}^{t} 2n(n-1)\,|X_s|^{2n-4}\,|X_s^T\,G(s,X_s)|^2\,ds,$$

pri čemu poslednji sabirak ne postoji za $n = 1$.
Sada posmatramo očekivanje obe strane u poslednjoj jednakosti. Iz pretpostavke $E\left[|c|^{2n}\right] < \infty$, na sličan način kao u dokazu teoreme 3.3.1 pod (b), sledi $E\left[|X_t|^{2n}\right] < \infty$. Takođe, iz teoreme 2.5.4 pod (b) zaključujemo

$$E\left[\int_{t_0}^{t} 2n\,|X_s|^{2n-2}\,X_s^T\,G(s,X_s)\,dW_s\right] = 0.$$

Dakle,

$$E\left[|X_t|^{2n}\right] = E\left[|c|^{2n}\right] + \int_{t_0}^{t} E\left[2n\,|X_s|^{2n-2}\,X_s^T\,f(s,X_s) + \right.$$

$$\left. + n\,|X_s|^{2n-2}\,|G(s,X_s)|^2 + 2n(n-1)\,|X_s|^{2n-4}\,|X_s^T\,G(s,X_s)|^2\right] ds,$$

a to je dalje na osnovu uslova restrikcije rasta iz teoreme 3.3.1

$$\leq E\left[|c|^{2n}\right] + (2n+1)\,n\,K^2 \int_{t_0}^{t} E\left[\left(1+|X_s|^2\right)|X_s|^{2n-2}\right] ds.$$

Iz leme 4.1.1 dobijamo

$$E\left[|X_t|^{2n}\right] \leq E\left[|c|^{2n}\right] + (2n+1)\,n\,K^2\,(t-t_0) + 2n\,(2n+1)\,K^2 \int_{t_0}^{t} E\left[|X_s|^{2n}\right] ds.$$

Dalje, na osnovu Bellman-Gronwallove leme (lema 2.1.2), za

$$c(t) = E\left[|c|^{2n}\right] + (2n+1)\,n\,K^2\,(t-t_0)$$

i

$$k(t) = 2n\,(2n+1)\,K^2 = C > 0$$

dobijamo

$$E\left[|X_t|^{2n}\right] \leq E\left[|c|^{2n}\right] + \frac{C}{2}(t-t_0) + C\int_{t_0}^{t}\left(E\left[|c|^{2n}\right] + \frac{C}{2}(s-t_0)\right)e^{\int_s^t C du}ds =$$

a daljim izračunavanjem (pomoću parcijalne integracije) dobija se da je poslednji izraz jednak

$$= E\left[|c|^{2n}\right]e^{C(t-t_0)} + \frac{1}{2}\left(e^{C(t-t_0)} - 1\right) \leq$$

što je dalje (jer je $C(t-t_0) \geq 0$)

$$\leq E\left[|c|^{2n}\right]e^{C(t-t_0)} + e^{C(t-t_0)} - 1 \leq E\left[|c|^{2n}\right]e^{C(t-t_0)} + e^{C(t-t_0)}.$$

Iz poslednjeg izraza je jasno da smo dokazali (4.2).

Sada ćemo dokazati (4.3) za slučaj $n = 1$. Na osnovu leme 3.3.2 pod (a) važi

$$E\left[|X_t - c|^2\right] \leq 2E\left[\left|\int_{t_0}^{t} f(s, X_s)\, ds\right|^2\right] + 2E\left[\left|\int_{t_0}^{t} G(s, X_s)\, dW_s\right|^2\right].$$

Primenjujući isti postupak kao u dokazu teoreme 3.3.1 dobijamo

$$E\left[|X_t - c|^2\right] \leq 2(T-t_0)\int_{t_0}^{t} E\left[|f(s, X_s)|^2\right]\, ds + 2\int_{t_0}^{t} E\left[|G(s, X_s)|^2\right]\, ds$$

i primenjujući uslov restrikcije rasta dobijamo da važi

$$E\left[|X_t - c|^2\right] \leq L\int_{t_0}^{t}\left(1 + E\left[|X_s|^2\right]\right)\, ds,$$

pri čemu je $L = 2\left(T - t_0 + 1\right)K^2$.
Ako u poslednjem izrazu iskoristimo prethodno dokazanu nejednakost (4.2) dobijamo

$$E\left[|X_t - c|^2\right] \leq L\int_{t_0}^{t}\left(1 + \left(1 + E\left[|c|^2\right]\right)e^{C(s-t_0)}\right)\, ds =$$

$$= L(t-t_0)\left(1 + \frac{\left(1 + E\left[|c|^2\right]\right)\left(e^{C(t-t_0)} - 1\right)}{C(t-t_0)}\right) \leq$$

$$\leq L(t-t_0)\left(1 + \left(1 + E\left[|c|^2\right]\right)e^{C(t-t_0)}\right) \leq$$

$$\leq A\left(1 + E\left[|c|^2\right]\right)(t-t_0)\, e^{C(t-t_0)},$$

pri čemu je konstanta $A = 2L$.

□

Već znamo da, ako (4.1) zapišemo u integralnom obliku, dobijamo

$$X_t = c + \int_{t_0}^{t} f(s, X_s)\, ds + \int_{t_0}^{t} G(s, X_s)\, dW_s, \quad t_0 \le t \le T < \infty. \tag{4.4}$$

Primetimo da iz jednačine (4.4) dobijamo njoj ekvivalentnu jednačinu oblika

$$X_t - X_u = \int_{u}^{t} f(s, X_s)\, ds + \int_{u}^{t} G(s, X_s)\, dW_s,$$

na intervalu $[u, T]$, pri čemu važi $t_0 \le u \le t \le T$, a početna vrednost X_u jednaka je vrednosti procesa X_t (koji je rešenje jednačine (4.4)) baš u tački u. Ako sada na isti način uopštimo nejednakost (4.3) dobijamo

$$E\left[|X_t - X_u|^{2n}\right] \le D\left(1 + E\left[|c|^{2n}\right]\right)\,(t-u)^n\, e^{C(t-u)}$$

i za $n = 1$, uz pretpostavku $E\left[|c|^2\right] < \infty$, sledi da za proces X_t u svakoj tački $u \in [t_0, T]$ važi

$$\lim_{t \to u} E\left[|X_t - X_u|^2\right] = 0.$$

Dakle, možemo da zaključimo da je X_t *srednje-kvadratno-neprekidan* proces na intervalu $[t_0, T]$.

4.2 Analitičke osobine rešenja SDJ

Opet ćemo pretpostaviti da su ispunjene sve pretpostavke iz teoreme 3.3.1 i analiziraćemo osobine trajektorija procesa X_t koji je rešenje SDJ (4.1), odnosno (4.4). Iz same teoreme 3.3.1 znamo da su skoro sve trajektorije rešenja X_t neprekidne na intervalu $[t_0, T]$. Postavlja se pitanje da li su te trajektorije u nekim tačkama diferencijabilne.

U opštem slučaju odgovor na ovo pitanje je negativan, zato što se osobine Brownovog kretanja W_t (iz člana dW_t) prenose na proces X_t, a već smo rekli da su trajektorije Brownovog kretanja nigde-diferencijabilne. Dakle, trajektorije $X_t(\omega)$ mogu, pod određenim uslovima, biti diferencijabilne samo u onim tačkama iz intervala $[t_0, T]$ u kojima je $G(t, x) = 0$.

Posmatrajmo sada jednačinu (4.4). Znamo da, ako je f neprekidna funkcija, onda ODJ

$$X_t^{\{1\}} = \int_{t_0}^{t} f(s, X_s)\, ds$$

ima neprekidno diferencijabilno rešenje i za njega važi

$$\dot{X}_t^{\{1\}} = f(t, X_t).$$

Posmatrajmo sada slučajni deo u jednačini (4.4)

$$X_t^{\{2\}} = \int_{t_0}^{t} G(s, X_s)\, dW_s.$$

U svim tačkama u kojima je $G(t,x) \neq 0$, trajektorije rešenja $X_t^{\{2\}}$ će biti nigde-diferencijabilne (bez obzira da li je funkcija G glatka ili nije) zato što su, kao što smo već istakli, trajektorije Brownovog kretanja W_t nigde-diferencijabilne. Dakle, jedino ako u nekim tačkama izgubimo slučajni deo u jednačini (4.4), tj. ako je $G(t,x) = 0$, možemo se nadati da su trajektorije procesa X_t u tim tačkama diferencijabilne.
Dajemo sledeće tvrđenje.

Teorema 4.2.1 *Neka je X_t rešenje jednačine (4.4), neka su f i G neprekidne funkcije na intervalu $[t_0, T]$ i neka je početna vrednost c skoro sigurno konstanta. Ako je $G(t_0, c) = 0$, onda sa verovatnoćom 1 važi*

$$\lim_{t \to t_0} \frac{X_t - c}{t - t_0} = \dot{X}_{t_0} = f(t_0, c).$$

Možemo da zaključimo da su trajektorije rešenja stohastičke diferencijalne jednačine po pravilu nigde-diferencijabilne, jedino u nekim specijalnim slučajevima dobijamo diferencijabilnost.

4.3 Zavisnost rešenja SDJ od parametara i početnih vrednosti

Neka je X_t rešenje jednačine (4.1). Podsetimo se da za trajektorije rešenja X_t važi

$$X_t(\omega) = g(c(\omega);\ W_s(\omega) - W_{t_0}(\omega), \quad t_0 \leq s \leq t),$$

pri čemu je funkcija g jedinstveno određena funkcijama f i G. Dakle, trajektorija $X_t(\omega)$ je, u suštini funkcija dva nezavisna slučajna argumenta $c(\omega)$ i $W_s(\omega) - W_{t_0}(\omega)$, za $t_0 \leq s \leq t$.
Kao i u teoriji običnih diferencijalnih jednačina, zanima nas kako rešenje X_t, odnosno funkcija g, zavisi od promene početnih vrednosti c ili od nekih parametara koji se mogu pojaviti u funkcijama f i G. U sledećoj teoremi p će predstavljati pomenuti parametar.

Teorema 4.3.1 *Neka $X_t(p)$ predstavlja rešenje stohastičke diferencijalne jednačine*

$$dX_t(p) = f(p,t,X_t)\,dt + G(p,t,X_t)\,dW_t,$$

$$X_{t_0} = c(p), \quad t_0 \leq t \leq T < \infty,$$

na intervalu $[t_0, T]$. Dalje, neka funkcije $f(p,t,x)$ i $G(p,t,x)$, za svako p, zadovoljavaju uslove teoreme 3.3.1 i neka su još ispunjeni sledeći uslovi:
(a)

$$st - \lim_{p \to p_0} c(p) = c(p_0),$$

(b) za svako $N > 0$ važi

$$\lim_{p \to p_0} \sup_{t \in [t_0,T],\ |x| \leq N} (|f(p,t,x) - f(p_0,t,x)| + |G(p,t,x) - G(p_0,t,x)|) = 0,$$

(c) postoji konstanta K, nezavisna od p, takva da važi

$$|f(p,t,x)|^2 + |G(p,t,x)|^2 \leq K^2(1+|x|^2).$$

Tada je

$$st - \lim_{p \to p_0} \sup_{t_0 \leq t \leq T} |X_t(p) - X_t(p_0)| = 0.$$

Sada ćemo prodiskutovati kako se menja rešenje SDJ ako promenimo početnu vrednost. Posmatraćemo sledeći slučaj: za početnu tačku intervala na kojem tražimo rešenje X_t neke SDJ uzimamo proizvoljnu tačku s iz intervala $[t_0, T]$ i u toj tački s rešenje X_t može uzeti bilo koju početnu vrednost $x \in R^d$. Primetimo da je početna vrednost u trenutku s neka proizvoljna konstanta iz R^d, tj. početna vrednost nije slučajna promenljiva. Dakle, naše rešenje X_t sada zavisi od parametra t koji se kreće kroz interval $[s, T]$, zatim od početne tačke s i od početne vrednosti x u trenutku s, pa kažemo da je $X_t(s,x)$ rešenje stohastičke diferencijane jednačine

$$X_t(s,x) = x + \int_s^t f(u, X_u(s,x))\, du + \int_s^t G(u, X_u(s,x))\, dW_u, \tag{4.5}$$

sa početnom vrednošću

$$X_s(s,x) = x \in R^d,$$

pri čemu je $t_0 \leq s \leq t \leq T$.
Pre nego što formulišemo teoremu koja će nam reći nešto više o rešenju $X_t(s,x)$ stohastičke diferencijalne jednačine (4.5) uvodimo pojam:

Definicija 4.3.1 *Za proces X_t kažemo da je* **srednje-kvadratno-diferencijabilan** *u trenutku t_1 i da slučajna promenljiva Y_{t_1} predstavlja njegov prvi izvod u trenutku t_1, ako postoje drugi momenti za X_t i Y_{t_1} i ako važi*

$$\lim_{h \to 0} E\left[\left|\frac{X_{t_1+h} - X_{t_1}}{h} - Y_{t_1}\right|^2\right] = 0.$$

Ovakav način definisanja izvoda stohastičkog procesa nam pomaže da lakše prodiskutujemo zavisnost rešenja $X_t(s,x)$ SDJ (4.5) od promene početne vrednosti x.

Teorema 4.3.2 *Neka su funkcije $f(t,x)$ i $G(t,x)$ iz jednačine (4.5) neprekidne u odnosu na (t,x) i neka imaju ograničene i neprekidne prve i druge parcijalne izvode po x_i, $i = 1, 2, \ldots, d$, pri čemu je $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in R^d$. Tada je, za fiksirano $t \in [s, T]$, rešenje $X_t(s,x)$ srednje-kvadratno-neprekidno po (s,x) i dvaput srednje-kvadratno-diferencijabilno po x_i, $i = 1, 2, \ldots, d$.*
Takođe važi da su izvodi

$$\frac{\partial}{\partial x_i} X_t(s,x), \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} X_t(s,x), \quad i,j = 1, 2, \ldots, d,$$

kao funkcije po x, srednje-kvadratno-neprekidni i zadovoljavaju stohastičku diferencijalnu jednačinu koja se dobija iz (4.5) traženjem odgovarajućih parcijalnih izvoda. Na primer, stohastički proces

$$Y_t = \frac{\partial}{\partial x_i} X_t(s,x)$$

je rešenje stohastičke diferencijalne jednačine

$$Y_t = e_i + \int_s^t f_x(u, X_u(s,x))\, Y_u\, du + \int_s^t G_x(u, X_u(s,x))\, Y_u\, dW_u,$$

koja se dobija iz jednačine (4.5) traženjem prvog parcijalnog izvoda po x_i*, pri čemu* $e_i \in R^d$ *predstavlja jedinični vektor u pravcu* x_i*,*

$$f_x = [f_{x_1} \;\; f_{x_2} \;\; \ldots \;\; f_{x_d}]$$

je $d \times d$ *matrica gde su* f_{x_i}*,* $i = 1, 2, \ldots, d$*, vektor kolone, a*

$$G_x = [G_{x_1} \;\; G_{x_2} \;\; \ldots \;\; G_{x_d}]\,,$$

gde su G_{x_i}*,* $i = 1, 2, \ldots, d$*, matrice formata* $d \times m$*.*

Glava 5

Linearne stohastičke diferencijalne jednačine

5.1 Uvod

U ovom poglavlju ćemo posmatrati stohastičke diferencijalne jednačine oblika

$$dX_t = f(t, X_t)\, dt + G(t, X_t)\, dW_t,$$

$$X_{t_0} = c, \quad t_0 \leq t \leq T < \infty, \tag{5.1}$$

za specijalni odabir funkcija $f(t, x)$ i $G(t, x)$ tako da one budu linearne po parametru x (u opštem slučaju funkcije $f(t, x)$ i $G(t, x)$ su nelinearne). Napomenimo da će teorija iz linearnih SDJ, u suštini predstavljati uopštenje teorije ODJ počevši od linearnih sistema diferencijalnih jednačina (sa početka ovog rada), pošto će proces X_t, koji će predstavljati rešenje linearne SDJ, biti jedan R^d-vrednosni stohastički proces.
Na početku dajemo formalnu definiciju linearne stohastičke diferencijalne jednačine.

Definicija 5.1.1 **Linearna stohastička diferencijalna jednačina** *je SDJ oblika (5.1), čije je rešenje na intervalu $[t_0, T]$ R^d-vrednosni proces X_t, ako su $f(t, x)$ i $G(t, x)$ linearne funkcije po promenljivoj x na skupu $[t_0, T] \times R^d$, odnosno, drugim rečima, ako je*

$$f(t, x) = A(t)\, x + a(t),$$

gde je $A(t)$ jedna $R^{d\times d}$-vrednosna funkcija (tj. matrica formata $d \times d$), a $a(t)$ je R^d-vrednosna funkcija i ako je

$$G(t, x) = [B_1(t)\, x + b_1(t) \quad B_2(t)\, x + b_2(t) \quad \dots \quad B_m(t)\, x + b_m(t)]_{d\times m},$$

pri čemu su $B_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, m$, $R^{d\times d}$-vrednosne funkcije, a $b_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, m$, R^d-vrednosne funkcije. Dakle, linearnu SDJ možemo zapisati na sledeći način

$$dX_t = (A(t)\, X_t + a(t))\, dt + (B_1(t)\, X_t + b_1(t))\, dW_t^1 + \dots + (B_m(t)\, X_t + b_m(t))\, dW_t^m,$$

odnosno,

$$dX_t = (A(t)\,X_t + a(t))\,dt + \sum_{i=1}^{m}(B_i(t)\,X_t + b_i(t))\,dW_t^i, \tag{5.2}$$

pri čemu je $W_t = (W_t^1, W_t^2, \ldots, W_t^m)$.

Linearnu SDJ, tj. SDJ oblika (5.2), nazivamo **homogena linearna SDJ** *ako važi*

$$a(t) = b_1(t) = b_2(t) = \ldots = b_m(t) \equiv 0.$$

Linearnu SDJ, tj. SDJ oblika (5.2), nazivamo **linearna SDJ u užem smislu** *ako važi*

$$B_1(t) = B_2(t) = \ldots = B_m(t) \equiv 0.$$

Iz teoreme o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja SDJ (teorema 3.3.1) dobijamo sledeće posledice.

Posledica 5.1.1 *Linearna stohastička diferencijalna jednačina oblika (5.2) ima, za bilo koju početnu vrednost* $X_{t_0} = c$ *koja je nezavisna od* $W_t - W_{t_0}$*, za* $t \geq t_0$*, jedinstveno neprekidno rešenje na celom intervalu* $[t_0, T]$*, ako su funkcije* $A(t)$*,* $a(t)$*,* $B_i(t)$ *i* $b_i(t)$*,* $i = 1, 2, \ldots, m$ *merljive i ograničene na istom tom intervalu.*
Ako navedene pretpostavke (merljivost i ograničenost datih funkcija) važe na svakom podintervalu od $[t_0, \infty)$*, onda linearna SDJ (5.2) ima jedinstveno globalno rešenje (tj. rešenje definisano za svako* $t \in [t_0, \infty)$*).*

Posledica 5.1.2 *Za autonomnu linearnu SDJ oblika*

$$dX_t = (A\,X_t + a)\,dt + \sum_{i=1}^{m}(B_i\,X_t + b_i)\,dW_t^i,$$

(tj. koeficijenti A*,* a*,* B_i *i* b_i*,* $i = 1, 2, \ldots, m$*, ne zavise od* t*) uvek postoji globalno rešenje.*

Naš cilj u daljem radu je da odredimo zatvorene i eksplicitne oblike za rešenja linearnih stohastičkih diferencijalnih jednačina.

5.2 Linearne SDJ u užem smislu

Linearnu SDJ u užem smislu zapisujemo

$$dX_t = (A(t)\,X_t + a(t))\,dt + B(t)\,dW_t, \tag{5.3}$$

pri čemu $B(t)$ predstavlja matricu formata $d \times m$ čije su kolone vektori $b_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, odnosno

$$B(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) & b_2(t) & \ldots & b_m(t) \end{bmatrix}_{d \times m}.$$

Primetimo da do jednačine (5.3) dolazimo kad determinističkom linearnom sistemu jednačina

$$\dot{X}_t = A(t)\, X_t + a(t),$$

gde je $A(t)$ jedna $d \times d$ matrica, a X_t i $a(t)$ su vektori iz R^d, dodamo slučajni deo u obliku

$$B(t)\, \xi_t,$$

pri čemu je $B(t)$ opisana $d \times m$ matrica, a ξ_t predstavlja m-dimenzionalni beli šum. U nastavku ćemo pretpostaviti da su ispunjeni svi uslovi iz teoreme 5.1.1, tj. da su funkcije $A(t)$, $a(t)$ i $B(t)$ merljive i ograničene na intervalu $[t_0, T]$, i daćemo zatvoreni oblik jedinstvenog rešenja X_t na intervalu $[t_0, T]$.

Teorema 5.2.1 *Linearna SDJ u užem smislu*

$$dX_t = (A(t)\, X_t + a(t))\, dt + B(t)\, dW_t,$$

$$X_{t_0} = c,$$

na intervalu $[t_0, T]$ *ima rešenje*

$$X_t = \Phi(t) \left(c + \int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1}\, a(s)\, ds + \int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1}\, B(s)\, dW_s \right), \tag{5.4}$$

pri čemu $\Phi(t)$ *predstavlja fundamentalnu matricu (definicija 2.1.4) determinističke jednačine* $\dot{X}_t = A(t)\, X_t$ *(tj. homogenog linearnog sistema (2.6)).*

Dokaz. Na osnovu definicije fundamentalne matrice $\Phi(t)$ (definicija 2.1.4) znamo da su kolone matrice $\Phi(t)$ linearno nezavisna rešenja determinističkog homogenog linearnog sistema

$$\dot{X}_t = A(t)\, X_t, \tag{5.5}$$

(napomenimo da prateći sadašnje oznake zaključujemo da je $\Phi(t)$ matrica dimenzija $d \times d$). Ako je svako od tih d rešenja sistema (5.5) (tj. kolone matrice $\Phi(t)$) u početnom trenutku t_0 jednako odgovarajućem jediničnom vektoru $e_i \in R^d$, $i = 1, 2, \ldots, d$, jasno je da je fundamentalna matrica $\Phi(t)$, u suštini, rešenje matrične jednačine

$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\, \Phi(t) \tag{5.6}$$

sa početnim uslovom

$$\Phi(t_0) = I,$$

gde je I jedinična matrica formata $d \times d$.
Uvedimo sada oznaku

$$Y_t = c + \int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1}\, a(s)\, ds + \int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1}\, B(s)\, dW_s.$$

Stohastički diferencijal za Y_t je

$$dY_t = \Phi(t)^{-1}\, a(t)\, dt + \Phi(t)^{-1}\, B(t)\, dW_t.$$

Na osnovu Itôve formule iz teoreme 2.6.1 (tačnije iz teoreme 2.6.2, jer je $k = d \geq 1$) dobijamo da proces

$$X_t = \Phi(t)\, Y_t = u(t, Y_t)$$

ima diferencijal

$$dX_t = \dot{\Phi}(t)\, Y_t\, dt + \Phi(t)\, \Phi(t)^{-1} a(t)\, dt + \Phi(t)\, \Phi(t)^{-1} B(t)\, dW_t,$$

jer je funkcija $u(t, y) = \Phi(t)\, y$ linearna po promenljivoj y pa su svi drugi parcijalni izvodi $u_{y_i y_j} = 0$ za $i, j = 1, 2, \ldots, d$ i $y = (y_1, y_2, \ldots, y_d)$.
Dalje je, na osnovu (5.6),

$$dX_t = A(t)\, \Phi(t)\, Y_t\, dt + \Phi(t)\, \Phi(t)^{-1} a(t)\, dt + \Phi(t)\, \Phi(t)^{-1} B(t)\, dW_t,$$

odnosno,

$$dX_t = A(t)\, \Phi(t)\, Y_t\, dt + a(t)\, dt + B(t)\, dW_t,$$
$$dX_t = (A(t)\, X_t + a(t))\, dt + B(t)\, dW_t.$$

I za $t = t_0$ dobijamo $X_{t_0} = \Phi(t_0)\, Y_{t_0} = I\, c = c$.

□

U nastavku slede dva specijalna slučaja prethodne teoreme.

Teorema 5.2.2 *Ako je u izrazu (5.3) matrica $A(t)$ konstantna, tj. nezavisna od parametra t, $A(t) \equiv A$, onda rešenje ima sledeći oblik*

$$X_t = e^{A(t-t_0)} c + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} (a(s)\, ds + B(s)\, dW_s).$$

Teorema 5.2.3 *Za $d = 1$ (ali proizvoljno m) fundamentalna matrica je oblika*

$$\Phi(t) = e^{\int_{t_0}^{t} A(s)\, ds}$$

pa je rešenje X_t oblika

$$X_t = e^{\int_{t_0}^{t} A(s)\, ds} \left(c + \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t_0}^{s} A(u)\, du} (a(s)\, ds + B(s)\, dW_s) \right).$$

Na osnovu teoreme 4.1.1 znamo da postoji drugi momenat rešenja X_t, ako važi $E\,[|c|^2] < \infty$.

Teorema 5.2.4 *Neka je $E\,[|c|^2] < \infty$. Tada za rešenje X_t linearne SDJ*

$$dX_t = (A(t)\, X_t + a(t))\, dt + B(t)\, dW_t,$$
$$X_{t_0} = c,$$

važi

$$m_X(t) = m_t = E[X_t] = \Phi(t) \left(E[c] + \int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1} a(s)\, ds \right). \tag{5.7}$$

Dalje možemo zaključiti da je m_t rešenje determinističke linearne diferencijalne jednačine

$$\dot{m}_t = A(t)\, m_t + a(t),$$
$$m_{t_0} = E[c].$$

Dokaz. Ako u izrazu (5.4) potražimo očekivanje leve i desne strane (uz korišćenje teoreme 2.5.4 pod (b)) dobijamo

$$m_t = E[X_t] = \Phi(t)E[c] + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1}a(s)\,ds,$$

što je u stvari (5.7). Dalje, ako poslednji izraz diferenciramo po t dobijamo

$$\dot{m}_t = \dot{\Phi}(t)E[c] + \dot{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1}a(s)\,ds + \Phi(t)\,\Phi(t)^{-1}a(t),$$

a to je dalje na osnovu (5.6)

$$\dot{m}_t = A(t)\,\Phi(t)\,E[c] + A(t)\,\Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1}a(s)\,ds + a(t),$$

$$\dot{m}_t = A(t)\,m_t + a(t).$$

Takođe je

$$m_{t_0} = \Phi(t_0)\,E[c] = I\,E[c] = E[c],$$

pa, na osnovu teoreme 2.1.5, sledi (5.7).

□

Lema 5.2.1 *Ako je R-vrednosna funkcija $G(s)$ iz $L_2[t_0,t]$, onda stohastički integral $\int_{t_0}^{t} G(s)\,dW_s$ ima sledeću normalnu raspodelu*

$$\int_{t_0}^{t} G(s)\,dW_s : \mathcal{N}\left(0, \int_{t_0}^{t} G^2(s)ds\right).$$

Primetimo da podintegralna funkcija G ne zavisi od ω, tj. G je realna deterministička funkcija.

Pre dokaza ove leme podsetićemo se nekih jednostavnih tvrđenja:

1. Ako $X : \mathcal{N}(m,\sigma^2) \Rightarrow X + k : \mathcal{N}(m+k,\sigma^2)$, gde je k proizvoljna konstanta iz R.
2. Ako su $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n \in N$, međusobno nezavisne slučajne promenljive sa normalnom raspodelom

$$X_i : \mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2), \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

onda slučajna promenljiva $Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$, $a_i \in R$, $i = 1,2,\ldots,n$, ima sledeću normalnu raspodelu

$$Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i : \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i m_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right).$$

Dokaz leme 5.2.1. Kako je funkcija G nezavisna od ω, postoji niz step funkcija $\{G_n\}_{n\in N}$, takođe nezavisnih od ω, tako da važi

$$\int_{t_0}^{t} |G(s) - G_n(s)|^2 ds \to 0, \quad \text{kad } n \to \infty.$$

Na osnovu teoreme 2.5.4 pod (c) dobijamo

$$E\left[\left|\int_{t_0}^{t}(G(s)-G_n(s))dW_s\right|^2\right]\to 0,\quad \text{kad } n\to\infty,$$

odnosno

$$sk-\lim_{n\to\infty}\int_{t_0}^{t}G_n(s)dW_s=\int_{t_0}^{t}G(s)dW_s.$$

Kako stohastički integral za determinističku step funkciju G_n, $n\in N$, zapisujemo

$$\int_{t_0}^{t}G_n(s)dW_s=\sum_{i=1}^{n}G_n(t_{i-1})(W_{t_i}-W_{t_{i-1}})$$

i iz činjenice $W_{t_i}-W_{t_{i-1}}:\mathcal{N}(0,t_i-t_{i-1})$ zaključujemo

$$\int_{t_0}^{t}G_n(s)dW_s:\mathcal{N}\left(0,\sum_{i=1}^{n}G_n^2(t_{i-1})(t_i-t_{i-1})\right),$$

odnosno,

$$\int_{t_0}^{t}G_n(s)dW_s:\mathcal{N}\left(0,\int_{t_0}^{t}G_n^2(s)ds\right)$$

i kad pustimo limes dobijamo

$$\int_{t_0}^{t}G(s)dW_s:\mathcal{N}\left(0,\int_{t_0}^{t}G^2(s)ds\right).$$

□

Teorema 5.2.5 *Ako je početna vrednost c Gaussovska (normalna) slučajna promenljiva ili konstanta, onda je proces X_t, $t\in[t_0,T]$, oblika (5.4) koji je rešenje lineane SDJ (5.3) jedan Gaussovski stohastički proces.*

Dokaz. Ako u izrazu (5.4) uvedemo oznake

$$A:=\Phi(t)c,\quad B:=\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi(s)^{-1}\,a(s)\,ds,\quad C:=\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi(s)^{-1}\,B(s)\,dW_s,$$

onda proces X_t možemo zapisati na sledeći način

$$X_t=A+B+C,\quad t\in[t_0,T].$$

Kako znamo da je proces X_t neanticipirajući u odnosu na neanticipirajuću familiju $\mathcal{F}_t$, jer je rešenje linearne SDJ (5.3), on je, dakle, $\mathcal{F}_t$-merljiv pa je početna vrednost $c=X_{t_0}$ $\mathcal{F}_{t_0}$-merljiva i samim tim nezavisna od $\mathcal{W}_{t_0}^{+}$ pa sledi da su slučajne promenljive A i C nezavisne.
Dalje, kako B ne zavisi od ω, tj. B je deterministička veličina, A je po pretpostavci teoreme normalna slučajna promenljiva ili konstanta, a C je na osnovu leme 5.2.1 normalna slučajna promenljiva, možemo zaključiti da je X_t, za svako $t\in[t_0,T]$, takođe jedna normalna slučajna promenljiva, pa je i svako sečenje procesa X_t opet normalna slučajna promenljiva. Dakle, X_t je Gaussovski proces.

□

5.3 Opšta skalarna linearna SDJ

Posmatrajmo stohastičku diferencijalnu jednačinu oblika

$$dX_t = (A(t)\,X_t + a(t))\,dt + \sum_{i=1}^{m}(B_i(t)\,X_t + b_i(t))\,dW_t^i,$$

$$X_{t_0} = c, \tag{5.8}$$

gde je X_t jedan R-vrednosni (skalarni) proces (primetimo da je u ovom slučaju samo Brownovo kretanje W_t R^m-vrednosna funkcija, a sve ostale veličine su skalarne funkcije).
Pretpostavimo da su koeficijenti $A(t)$, $a(t)$, $B_i(t)$ i $b_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, merljive i ograničene funkcije na intervalu $[t_0, T]$, tada na osnovu posledice 5.1.1 na datom intervalu postoji jedinstveno rešenje X_t u sledećem obliku.

Teorema 5.3.1 *Jednačina (5.8) ima rešenje*

$$X_t = \Phi_t \left(c + \int_{t_0}^{t} \Phi_s^{-1} \left(a(s) - \sum_{i=1}^{m} B_i(s)\, b_i(s) \right) ds + \sum_{i=1}^{m} \int_{t_0}^{t} \Phi_s^{-1} b_i(s)\, dW_s^i \right),$$

gde je

$$\Phi_t = e^{\int_{t_0}^{t} \left(A(s) - \sum_{i=1}^{m} \frac{B_i(s)^2}{2} \right) ds + \sum_{i=1}^{m} \int_{t_0}^{t} B_i(s)\, dW_s^i},$$

rešenje homogene jednačine

$$d\Phi_t = A(t)\,\Phi_t\,dt + \sum_{i=1}^{m} B_i(t)\,\Phi_t\,dW_t^i,$$

$$\Phi_{t_0} = 1.$$

Dokaz. Uvedimo oznaku

$$Y_t = \int_{t_0}^{t} \left(A(s) - \sum_{i=1}^{m} \frac{B_i(s)^2}{2} \right) ds + \sum_{i=1}^{m} \int_{t_0}^{t} B_i(s)\, dW_s^i.$$

Primetimo da je

$$\Phi_t = e^{Y_t}.$$

Uvedimo još jednu oznaku

$$Z_t = c + \int_{t_0}^{t} e^{-Y_s} \left(a(s) - \sum_{i=1}^{m} B_i(s)\, b_i(s) \right) ds + \sum_{i=1}^{m} \int_{t_0}^{t} e^{-Y_s}\, b_i(s)\, dW_s^i.$$

Dakle, jasno je da X_t možemo zapisati na sledeći način

$$X_t = e^{Y_t}\, Z_t,$$

i želimo pomoću Itôve formule (2.15) iz teoreme 2.6.1 da pokažemo da za X_t važi (5.8).
Prvo možemo da zaključimo sledeće

$$dY_t = \left(A(t) - \sum_{i=1}^{m} \frac{B_i(t)^2}{2} \right) dt + \sum_{i=1}^{m} B_i(t)\, dW_t^i$$

i

$$dZ_t = e^{-Y_t} \left(a(t) - \sum_{i=1}^{m} B_i(t)\, b_i(t) \right) dt + \sum_{i=1}^{m} e^{-Y_t}\, b_i(t)\, dW_t^i.$$

Kako je $X_t = e^{Y_t} Z_t = u(t, Y_t, Z_t)$ dobijamo

$$u(t, y, z) = e^y z,$$

pa važi

$$u_t = 0, \qquad u_y = e^y z, \qquad u_z = e^y,$$
$$u_{yy} = e^y z, \qquad u_{yz} = u_{zy} = e^y, \qquad u_{zz} = 0.$$

U našem slučaju (za $d = 2$) formula (2.15) će imati sledeći oblik

$$\begin{aligned} dX_t = \Big(& u_t(t, Y_t, Z_t) + u_y(t, Y_t, Z_t) f_1(t) + u_z(t, Y_t, Z_t) f_2(t) + \\ & + \frac{1}{2} u_{yy}(t, Y_t, Z_t)(G(t)G(t)^T)_{11} + \frac{1}{2} u_{yz}(t, Y_t, Z_t)(G(t)G(t)^T)_{12} + \\ & + \frac{1}{2} u_{zy}(t, Y_t, Z_t)(G(t)G(t)^T)_{21} + \frac{1}{2} u_{zz}(t, Y_t, Z_t)(G(t)G(t)^T)_{22} \Big) dt + \\ & + \begin{bmatrix} u_y(t, Y_t, Z_t) & u_z(t, Y_t, Z_t) \end{bmatrix}_{1\times 2} G(t)\, dW_t, \end{aligned}$$

pri čemu je

$$\begin{bmatrix} u_y(t, Y_t, Z_t) & u_z(t, Y_t, Z_t) \end{bmatrix}_{1\times 2} = \begin{bmatrix} e^{Y_t} Z_t & e^{Y_t} \end{bmatrix}_{1\times 2},$$

$$\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}_{2\times 1} = \begin{bmatrix} A(t) - \sum_{i=1}^{m} \frac{B_i(t)^2}{2} \\ e^{-Y_t} \left(a(t) - \sum_{i=1}^{m} B_i(t)\, b_i(t) \right) \end{bmatrix}_{2\times 1},$$

$$G(t) = \begin{bmatrix} B_1(t) & B_2(t) & \dots & B_m(t) \\ e^{-Y_t} b_1(t) & e^{-Y_t} b_2(t) & \dots & e^{-Y_t} b_m(t) \end{bmatrix}_{2\times m},$$

pa je

$$G(t)\, G(t)^T = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} B_i(t)^2 & e^{-Y_t} \sum_{i=1}^{m} B_i(t)\, b_i(t) \\ e^{-Y_t} \sum_{i=1}^{m} B_i(t)\, b_i(t) & e^{-2Y_t} \sum_{i=1}^{m} b_i(t)^2 \end{bmatrix}_{2\times 2}.$$

Dakle,

$$dX_t = \left(0 + e^{Y_t}\, Z_t \left(A(t) - \sum_{i=1}^{m} \frac{B_i(t)^2}{2}\right) + e^{Y_t}\, e^{-Y_t} \left(a(t) - \sum_{i=1}^{m} B_i(t)\, b_i(t)\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\, e^{Y_t}\, Z_t \sum_{i=1}^{m} B_i(t)^2 + \frac{1}{2}\, e^{Y_t}\, e^{-Y_t} \sum_{i=1}^{m} B_i(t)\, b_i(t) + \frac{1}{2}\, e^{Y_t}\, e^{-Y_t} \sum_{i=1}^{m} B_i(t)\, b_i(t) + 0\right) dt +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \left(e^{Y_t}\, Z_t\, B_i(t) + e^{Y_t}\, e^{-Y_t}\, b_i(t)\right) dW_t^i =$$

$$= \left(e^{Y_t}\, Z_t\, A(t) + a(t)\right) dt + \sum_{i=1}^{m} \left(e^{Y_t}\, Z_t\, B_i(t) + b_i(t)\right) dW_t^i =$$

$$= (A(t)\, X(t) + a(t))\, dt + \sum_{i=1}^{m} (B_i(t)\, X_t + b_i(t))\, dW_t^i,$$

a to je, uz uslov $X_{t_0} = \Phi_{t_0}\, c = c$, u stvari (5.8).

$\square$

Teorema 5.3.2 *Rešenje X_t skalarne linearne SDJ (5.8) ima, za svako $t \in [t_0, T]$, momente p-tog reda ako i samo ako važi $E[|c|^p] < \infty$. Takođe je,*

$$m_t = E[X_t] = \varphi_t \left(E[c] + \int_{t_0}^{t} \varphi_s^{-1}\, a(s)\, ds\right),$$

gde je

$$\varphi_t = e^{\int_{t_0}^{t} A(s)\, ds},$$

odnosno, m_t je rešenje obične diferencijalne jednačine

$$\dot{m}_t = A(t)\, m_t + a(t),$$

$$m_{t_0} = E[c].$$

5.4 Opšta vektorska linearna SDJ

U ovom odeljku ćemo posmatrati linearnu SDJ oblika

$$dX_t = (A(t)\, X_t + a(t))\, dt + \sum_{i=1}^{m} (B_i(t)\, X_t + b_i(t))\, dW_t^i,$$

$$X_{t_0} = c, \tag{5.9}$$

čije je rešenje X_t jedan R^d-vrednosni proces, zatim $A(t)$ i $B_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ su $R^{d\times d}$-vrednosne funkcije, $a(t)$ i $b_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ su R^d-vrednosne funkcije i $W_t = (W_t^1, W_t^2, \ldots, W_t^m)$ je m-dimenzionalno Brownovo kretanje. Pretpostavimo da su opet ispunjeni svi potrebni uslovi iz teoreme 5.1.1 tako da jednačina (5.9) ima jedinstveno rešenje na intervalu $[t_0, T]$.

Teorema 5.4.1 *Linearna stohastička diferencijalna jednačina na intervalu* $[t_o, T]$ *ima rešenje*

$$X_t = \Phi_t \left(c + \int_{t_0}^{t} \Phi_s^{-1} \left(a(s) - \sum_{i-1}^{m} B_i(s)\, b_i(s) \right) ds + \sum_{i=1}^{m} \int_{t_0}^{t} \Phi_s^{-1} b_i(s)\, dW_s^i \right),$$

pri čemu je fundamentalna matrica Φ_t *(formata* $d \times d$*) rešenje homogene stohastičke diferencijalne jednačine*

$$d\Phi_t = A(t)\, \Phi_t\, dt + \sum_{i=1}^{m} B_i(t)\, \Phi_t\, dW_t^i,$$

$$\Phi_{t_0} = I.$$

Ideja dokaza je ista kao kod linearne SDJ u užem smislu i opšte skalarne linearne SDJ. Za dato rešenje X_t pomoću Itôve teoreme dokazujemo da zadovoljava (5.9).

Teorema 5.4.2 *Pod pretpostavkom* $E[|c|^2] < \infty$, *za rešenje* X_t *jednačine (5.9) važi da je* $m_t = E[X_t]$ *jedinstveno rešenje jednačine*

$$\dot{m}_t = A(t)\, m_t + a(t),$$

$$m_{t_0} = E[c].$$

5.5 Primeri linearnih SDJ

Prvo ćemo dati primer za linearnu SDJ u užem smislu.
Primer 1. Jedan od istorijski najstarijih primera stohastičke diferencijalne jednačine je tzv. *Langevinova jednačina* koja se dobija kada posmatramo Brownovo kretanje čestice pod uticajem sile trenja (i nijedne druge sile) i njen oblik je

$$\dot{X}_t = -\alpha X_t + \sigma \xi_t,$$

gde su $\alpha > 0$ i σ konstante. Proces X_t, koji je rešenje date jednačine, predstavlja jednu od tri komponente brzine čestice, a ξ_t je skalarni beli šum.
Primetimo da datu Langevinovu jednačinu možemo zapisati na sledeći način (uz odabir $t_0 = 0$)

$$dX_t = -\alpha\, X_t\, dt + \sigma\, dW_t,$$

$$X_0 = c,$$

a to je u stvari jedna autonomna linearna SDJ u užem smislu ($d = m = 1$).
Sada na osnovu teoreme 5.2.2 znamo da je njeno rešenje

$$X_t = e^{-\alpha t} c + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s,$$

a iz teoreme 5.2.4, za $E[|c|^2] < \infty$, dobijamo

$$m_t = E[X_t] = e^{-\alpha t}\, E[c].$$

Sada želimo da odredimo disperziju procesa X_t. Računamo

$$E\left[X_t^2\right] = E\left[e^{-2\alpha t}c^2 + 2\,\sigma\, c\, e^{-\alpha t}\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}dW_s + \sigma^2\left(\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}dW_s\right)^2\right].$$

Dalje je, na osnovu teoreme 2.5.4 pod (b) i (c),

$$E\left[X_t^2\right] = e^{-2\alpha t}E[c^2] + \sigma^2\int_0^t e^{-2\alpha(t-s)}ds = e^{-2\alpha t}E[c^2] + \frac{\sigma^2}{2\alpha}\left(1 - e^{-2\alpha t}\right).$$

Dakle, disperzija procesa X_t je data sa

$$D[X_t] = E[X_t^2] - (E[X_t])^2 =$$

$$= e^{-2\alpha t}E[c^2] + \frac{\sigma^2}{2\alpha}\left(1 - e^{-2\alpha t}\right) - e^{-2\alpha t}(E[c])^2 =$$

$$= e^{-2\alpha t}D[c] + \frac{\sigma^2}{2\alpha}\left(1 - e^{-2\alpha t}\right).$$

Ako još odaberemo da je c normalna slučajna promenljiva ili konstanta na osnovu teoreme 5.2.5 zaključujemo da je rešenje X_t jedan Gaussovski proces i takav proces se naziva *Ornstein-Uhlenbeckov proces brzine*.
Primetimo da kad $t \to \infty$, uz uslov $E[|c|^2] < \infty$, važi

$$E[X_t] \to 0, \text{ kad } t \to \infty,$$

$$D[X_t] \to \frac{\sigma^2}{2\alpha}, \text{ kad } t \to \infty,$$

pa možemo zaključiti da se X_t, za dovoljno veliko t, ponaša kao Gaussovska slučajna promenljiva, tj. ima normalnu $\mathcal{N}(0, \frac{\sigma^2}{2\alpha})$ raspodelu.

Primer 2. Kako proces X_t iz prethodnog primera predstavlja brzinu čestice, onda će proces Y_t koji zadovoljava jednačinu

$$X_t = \frac{dY_t}{dt},$$

odnosno u integralnom obliku

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t X_s\, ds,$$

predstavljati položaj čestice. Ako su Y_0 i c normalne slučajne promenljive ili konstante onda je Y_t Gaussovski proces i naziva se *Ornstein-Uhlenbeckov proces položaja.*
Primetimo da za proces Y_t važi

$$E[Y_t] = E[Y_0] + \int_0^t E[X_s]\, ds = E[Y_0] + \int_0^t E[c]e^{-\alpha s}\, ds$$

$$E[Y_t] = E[Y_0] + \frac{E[c](1 - e^{-\alpha t})}{\alpha}.$$

Sada ćemo kroz dva primera pokazati jednu od metoda za rešavanje linearnih stohastičkih diferencijalnih jednačina.
Primer 3. Neka su $f, g : R \to R$ determinističke neprekidne funkcije i $f \in L_1[t_0, T]$, $g \in L_2[t_0, T]$. Rešavamo linearnu SDJ oblika

$$dX_t = f(t)\, X_t\, dt + g(t)\, X_t\, dW_t,$$

$$X_{t_0} = c.$$

Pokušaćemo da pronađemo rešenje X_t u obliku proizvoda

$$X_t = X_1(t)\, X_2(t), \tag{5.10}$$

pri čemu su procesi $X_1(t)$ i $X_2(t)$ rešenja sledećih stohastičkih diferencijalnih jednačina

$$dX_1(t) = g(t)\, X_1(t)\, dW_t,$$

$$X_1(t_0) = c$$

i

$$dX_2(t) = A(t)\, dt + B(t)\, dW_t,$$

$$X_2(t_0) = 1,$$

a funkcije $A(t)$ i $B(t)$ moramo nekako da odredimo. To postižemo pomoću Itôve teoreme 2.6.3 za slučaj $k = m = 1$ i $d = 2$. Kako je

$$X_t = X_1(t)\, X_2(t) = u(t, X_1(t), X_2(t))$$

zaključujemo da je $u(t, x) = u(t, x_1, x_2) = x_1\, x_2$ pa su potrebni parcijalni izvodi
$u_t = 0, \quad u_{x_1} = x_2, \quad u_{x_2} = x_1,$
$u_{x_1x_1} = u_{x_2x_2} = 0,$
$u_{x_1x_2} = u_{x_2x_1} = 1.$

Dalje, iz (2.21) i (5.10) sledi

$$dX_t = u_t dt + u_{x_1} dX_1(t) + u_{x_2} dX_2(t) + \frac{1}{2} u_{x_1x_1} dX_1(t) dX_1(t) +$$

$$+ \frac{1}{2} u_{x_1x_2} dX_1(t) dX_2(t) + \frac{1}{2} u_{x_2x_1} dX_2(t) dX_1(t) + \frac{1}{2} u_{x_2x_2} dX_2(t) dX_2(t) =$$

$$= X_2(t)\, dX_1(t) + X_1(t)\, dX_2(t) + dX_1(t)\, dX_2(t) =$$

a to je dalje ($dW_t \cdot dW_t = dt$, $dW_t \cdot dt = 0$, $dt \cdot dt = 0$)

$$= X_2(t)\, dX_1(t) + X_1(t)\, dX_2(t) + g(t)\, X_1(t)\, B(t)\, dt =$$

i na osnovu (5.10) dobijamo

$$= X(t)\, g(t)\, dW_t + X_1(t)\, dX_2(t) + g(t)\, X_1(t)\, B(t)\, dt.$$

Dakle,

$$X_1(t)\, dX_2(t) + g(t)\, X_1(t)\, B(t)\, dt = f(t)\, X_t\, dt,$$

odnosno,

$$dX_2(t) + g(t)\, B(t)\, dt = f(t)\, X_2(t)\, dt,$$

$$A(t)\, dt + B(t)\, dW_t + g(t)\, B(t)\, dt = f(t)\, X_2(t)\, dt,$$

pa za funkcije $A(t)$ i $B(t)$ biramo

$$B(t) \equiv 0, \qquad A(t) = f(t)\, X_2(t).$$

Sada vidimo da za $X_2(t)$ dobijamo običnu diferencijalnu jednačinu (jer nestaje slučajni deo)

$$dX_2(t) = f(t)\, X_2(t)\, dt,$$

$$X_2(t_0) = 1,$$

i njeno rešenje je

$$\int_1^{X_2(t)} \frac{dr}{r} = \int_{t_0}^t f(s)\, ds$$

$$X_2(t) = e^{\int_{t_0}^t f(s)\, ds}.$$

Od ranije znamo da je

$$X_1(t) = c\, e^{-\frac{1}{2}\int_{t_0}^t g^2(s)\, ds + \int_{t_0}^t g(s)\, dW_s},$$

pa će krajnje rešenje imati oblik

$$X_t = X_1(t)\, X_2(t) = c\, e^{\int_{t_0}^t g(s)\, dW_s + \int_{t_0}^t \left(f(s) - \frac{1}{2} g^2(s)\right) ds}.$$

Primer 4. Neka su $c, d, e, f : R \to R$ determinističke neprekidne funkcije i $d \in L_1[t_0, T]$, $f \in L_2[t_0, T]$. Rešavamo linearnu SDJ oblika

$$dX_t = (c(t) + d(t)\, X_t)\, dt + (e(t) + f(t)\, X_t)\, dW_t,$$

$$X_{t_0} = c.$$

Opet pokušavamo da pronađemo rešenje X_t u obliku proizvoda

$$X_t = X_1(t)\, X_2(t)$$

pri čemu su procesi $X_1(t)$ i $X_2(t)$ rešenja sledećih stohastičkih diferencijalnih jednačina

$$dX_1(t) = d(t)\, X_1(t)\, dt + f(t)\, X_1(t)\, dW_t,$$

$$X_1(t_0) = 1$$

i

$$dX_2(t) = A(t)\, dt + B(t)\, dW_t,$$

$$X_2(t_0) = c.$$

Slično kao u prethodnom primeru određujemo funkcije $A(t)$ i $B(t)$

$$dX_t = X_2(t)\,dX_1(t) + X_1(t)\,dX_2(t) + dX_1(t)\,dX_2(t) =$$

$$= d(t)\,X_t\,dt + f(t)\,X_t\,dW_t + X_1\,A(t)\,dt + X_1\,B(t)\,dW_t + f(t)\,X_1(t)\,B(t)\,dt.$$

Dakle,

$$X_1\,A(t)\,dt + X_1\,B(t)\,dW_t + f(t)\,X_1(t)\,B(t)\,dt = c(t)\,dt + e(t)\,dW_t$$

pa je

$$X_1\,B(t) = e(t) \quad \Rightarrow \quad B(t) = \frac{e(t)}{X_1(t)}$$

i

$$X_1\,A(t) + f(t)\,X_1(t)\,B(t) = c(t) \quad \Rightarrow \quad A(t) = \frac{c(t) - f(t)\,e(t)}{X_1(t)}.$$

Sada znamo da $X_2(t)$ rešava jednačinu

$$dX_2(t) = \frac{c(t) - f(t)\,e(t)}{X_1(t)}\,dt + \frac{e(t)}{X_1(t)}\,dW_t,$$

$$X_2(t_0) = c,$$

odnosno, zapisanu u integralnom obliku,

$$X_2(t) = c + \int_{t_0}^{t} \frac{c(s) - f(s)\,e(s)}{X_1(s)}\,ds + \int_{t_0}^{t} \frac{e(s)}{X_1(s)}\,dW_s,$$

a kako je

$$X_1(t) = e^{\int_{t_0}^{t} f(s)\,dW_s + \int_{t_0}^{t}\left(d(s) - \frac{1}{2}f^2(s)\right)ds}$$

dobijamo da konačno rešenje izgleda ovako

$$X_t = X_1(t)\,X_2(t) = e^{\int_{t_0}^{t} f(s)\,dW_s + \int_{t_0}^{t}\left(d(s) - \frac{1}{2}f^2(s)\right)ds} \times$$

$$\times \left(c + \int_{t_0}^{t} (c(s) - f(s)\,e(s)) \cdot e^{-\int_{t_0}^{s} f(r)\,dW_r - \int_{t_0}^{s}\left(d(r) - \frac{1}{2}f^2(r)\right)dr}\,ds + \right.$$

$$\left. + \int_{t_0}^{t} e(s) \cdot e^{-\int_{t_0}^{s} f(r)\,dW_r - \int_{t_0}^{s}\left(d(r) - \frac{1}{2}f^2(r)\right)dr}\,ds\right).$$

Sada ćemo uraditi jedan primer iz finansijske matematike.

Primer 5. Neka $P(t)$, odnosno P_t, predstavlja cenu akcije u trenutku t. Možemo posmatrati ponašanje cene akcije P_t kroz vreme, tako što pretpostavimo da relativna promena cene, tj. $\frac{dP_t}{P_t}$, zadovoljava linearnu SDJ oblika

$$\frac{dP_t}{P_t} = \mu\,dt + \sigma\,dW_t,$$

odnosno da je

$$dP_t = \mu\,P_t\,dt + \sigma P_t\,dW_t,$$

gde su $\mu > 0$ i σ konstante, uz početni uslov

$$P_0 = p_0,$$

pri čemu pretpostavljamo da je početna cena p_0 pozitivna.
Na osnovu primera 3. znamo da je rešenje date linearne SDJ

$$P_t = p_0\, e^{\int_0^t \sigma\, dW_s + \int_0^t \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) ds}$$

odnosno,

$$P_t = p_0\, e^{\sigma\, W_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t}.$$

Primetimo, iz poslednje formule sledi da je cena akcije P_t uvek pozitivna (pošto smo rekli da je početna cena p_0 pozitivna).
Na osnovu teoreme 5.3.2 dobijamo

$$E[P_t] = p_0\, e^{\mu t}$$

i možemo zaključiti da se očekivana vrednost cene akcije poklapa sa rešenjem obične diferencijalne jednačine

$$dP_t = \mu P_t\, dt,$$
$$P_0 = p_0,$$

koja je u stvari specijalni slučaj početne linearne SDJ za $\sigma = 0$.

Prethodni primer nam pokazuje primenu SDJ u finansijskoj matematici, tj. videli smo kako promenu cene akcije mozemo modelirati pomoću stohastičke diferencijalne jednačine. Sada ćemo uraditi još jedan primer iz epidemiologije i pokazati kako širenje neke infekcije ili informacije kroz populaciju možemo opisati pomoću SDJ.

Primer 6. Želimo da modeliramo sledeću pojavu: Jedna osoba iz čitave populacije (nazovimo je osoba A) poseduje neku informaciju i sa određenom stopom (procentom) prenosa može da je prenese na ostale članove populacije, pri čemu pretpostavljamo da unutar populacije samo osoba A može da prosledi informaciju, a ostatak populacije zna ili ne zna informaciju, ali ne može međusobno da je prosleđuje.
Uvedimo sledeće oznake:
$x(t)$ - procenat (deo) populacije koji poseduje informaciju u trenutku t,
$a \in [0, 1]$ - stopa (procenat) prenosa informacije sa osobe A na proizvoljnu osobu iz populacije,
$b \in [0, 1]$ - stopa zaboravljanja informacije,
$c \in [0, 1]$ - stopa dobijanja informacije iz spoljašnje sredine (tj. neka osoba nije saznala informaciju od osobe A, već na neki drugi način).

Na osnovu uvedenih oznaka promenu $\frac{dx(t)}{dt}$ možemo modelirati na sledeći način

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(1 - x(t)) - b\, x(t) + c(1 - x(t)), \tag{5.11}$$

tj. (ako izostavimo t)

$$\frac{dx}{dt} = a(1-x) - bx + c(1-x) = (-a-b-c)x + (a+c). \tag{5.12}$$

Primetimo da u (5.11) izraz $1 - x(t)$ predstavlja deo populacije koji ne poseduje informaciju u trenutku t.
Ako dodamo i početni uslov

$$x(0) = 0,$$

(u nultom trenutku niko ne poseduje informaciju, zatim je saznaje osoba A i dalje širi kroz populaciju) dobijamo sledeći deterministički početni problem

$$\frac{dx}{dt} = (-a-b-c)x + (a+c)$$

$$x(0) = 0,$$

a njegovo rešenje je

$$x(t) = \frac{(a+c)\left(1 - e^{-(a+b+c)t}\right)}{a+b+c}.$$

Primetimo da je

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{a+c}{a+b+c},$$

a odatle vidimo da ako $b \to 0$ sledi da je

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 1,$$

što znači da ako niko ne bi zaboravljao informaciju (tj. stopa zaboravljanja informacije b je jednaka nuli), onda bi posle izvesnog vremena cela populacija znala informaciju.
Napomenimo da dati model (5.11) možemo poboljšati tako što bi pretpostavili da stope a, b i c nisu konstante, već da i one zavise od t, tj. iz (5.11) bi dobili sledeći model

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(t)(1-x(t)) - b(t)x(t) + c(t)(1-x(t)).$$

Od početnog modela (5.11) pravimo stohastički model tako što dodajemo slučajni deo u obliku

$$\varepsilon(1-x(t)), \quad \varepsilon \in [0,1],$$

(naravno, i ε ne mora biti konstanta, već može zavisiti od t, tj. $\varepsilon = \varepsilon(t)$).

Dakle, kao novi model dobijamo jednu opštu skalarnu linearnu SDJ

$$dX_t = ((-a-b-c)X_t + (a+c))dt + (-\varepsilon X_t + \varepsilon)dW_t$$

$$X_0 = 0, \tag{5.13}$$

čije je rešenje stohastički proces X_t. Rešenje X_t možemo odrediti pomoću već urađenog primera 4. Uzimajući da je

$$c(t) = a + c, \quad d(t) = -a - b - c, \quad e(t) = \varepsilon, \quad f(t) = -\varepsilon,$$

dobijamo

$$X_1(t) = e^{\int_0^t -\varepsilon\, dW_s + \int_0^t \left(-a-b-c-\frac{1}{2}(-\varepsilon)^2\right) ds},$$

odnosno,

$$X_1(t) = e^{-\varepsilon W_t - (a+b+c+\frac{1}{2}\,\varepsilon^2)t},$$

pa konačno rešenje ima oblik

$$X_t = X_1(t) \left(0 + \int_0^t \frac{a + c - (-\varepsilon)\varepsilon}{X_1(s)}\, ds + \int_0^t \frac{\varepsilon}{X_1(s)}\, dW_s \right),$$

odnosno,

$$X_t = X_1(t) \left((a + c + \varepsilon^2) \int_0^t \frac{ds}{X_1(s)} + \varepsilon \int_0^t \frac{dW_s}{X_1(s)} \right).$$

Na osnovu teoreme 5.3.2 dobijamo da je očekivanje procesa X_t realna funkcija oblika

$$m_t = E[X_t] = e^{\int_0^t (-a-b-c) ds} \left(0 + \int_0^t e^{\int_0^s (a+b+c) du} (a + c) ds \right),$$

odnosno,

$$m_t = E[X_t] = e^{-(a+b+c)t} \left(\frac{(a + c)\left(e^{(a+b+c)t} - 1\right)}{a + b + c} \right) = \frac{(a + c)\left(1 - e^{-(a+b+c)t}\right)}{a + b + c},$$

i primećujemo da je ona jednaka rešenju $x(t)$ za deterministički model (5.11), što važi na osnovu drugog dela teoreme 5.3.2.

Sada ćemo još malo uprostiti model (5.13) da bi dobili linearnu SDJ u užem smislu, pošto smo taj oblik detaljno obradili u ovom radu. Dakle, dobijamo

$$dX_t = ((-a - b - c)X_t + (a + c))dt + \varepsilon dW_t$$

$$X_0 = 0. \tag{5.14}$$

Na osnovu primera 4. dobijamo da rešenje modela (5.14) ima oblik

$$X_t = e^{-(a+b+c)t} \left(\frac{(a + c)\left(e^{(a+b+c)t} - 1\right)}{a + b + c} + \varepsilon \int_0^t e^{(a+b+c)s} dW_s \right). \tag{5.15}$$

Kako je u modelu (5.14) početna vrednost $c = 0$ (tj. c je konstanta) na osnovu teoreme 5.2.5 rešenje X_t je Gaussovski proces, odnosno, za svaki trenutak $t \geq 0$, X_t ima normalnu raspodelu.

Ako sada potražimo očekivanje za proces X_t iz (5.15), uz korišćenje teoreme 2.5.4 pod (b), dobijamo sledeću realnu funkciju

$$\tilde{m}_t = E[X_t] = \frac{(a+c)\left(1-e^{-(a+b+c)t}\right)}{a+b+c}$$

i primećujemo da je i ona jednaka rešenju $x(t)$ za deterministički model (5.11).

Dakle, rešenje X_t, kad $t \to \infty$, predstavlja slučajnu promenljivu sa normalnom raspodelom i očekivanjem $\frac{a+c}{a+b+c}$.

Na kraju ćemo samo istaći da model (5.13), dobijen iz modela (5.12), možemo uopštiti do kvadratne SDJ

$$dX_t = (aX_t(1-X_t) - bX_t + c(1-X_t))dt + \varepsilon X_t(1-X_t)dW_t$$

$$X_0 = 0,$$

i dati model opisuje širenje informacije kroz populaciju pri čemu svaka osoba može da prenosi informaciju (a ne samo osoba A) sa stopom prenosa a. I u ovom modelu X_t predstavlja procenat populacije koji poseduje informaciju u trenutku t.

Zaključak

Kao što se moglo videti iz priloženog materijala ovo je jedan rad teorijskog karaktera. Iako je urađeno nekoliko primera, akcenat je ipak bio na teorijskom pristupu, odnosno, koncentrisali smo se na objašnjenje potrebe za uvođenjem stohastičkih diferencijalnih jednačina, a najviše pažnje smo posvetili ispitivanju osobina rešenja SDJ. Međutim, važno je naglasiti da je praktična primena stohastičkih diferencijalnih jednačina ogromna, ali to nije bio primarni cilj ovog rada. I na kraju je bitno napomenuti da je ovo ipak samo uvodna teorija za rad sa SDJ, ali opet, u nekoj meri, dovoljna za razumevanje osnovnih pojmova vezanih za stohastičke diferencijalne jednačine.

Literatura

[1] L. Arnold, *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*, Wiley, 1974.

[2] L. C. Evans, *An Introduction to Stochastic Differential Equations (version 1.2)*, Department of mathematics, UC Berkeley.

[3] O. Hadžić, S. Pilipović, *Uvod u funkcionalnu analizu*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 1996.

[4] T. G. Kurtz, *Lectures on Stochastic Analysis*, Departments of mathematics and statistics, Wisconsin, 2001.

[5] V. Marić, M. Budinčević, *Diferencijalne i diferencne jednačine*, Prirodno-matematički fakultet Novi Sad, Departman za matematiku, Novi Sad, 2005.

[6] T. Seppäläinen, *Basics of Stochastic Analysis*, Departments of mathematics, University of Wisconsin-Madison, Madison 2003.

Biografija

Slađan Dimitrijević je rođen 28. juna 1984. godine u Novom Sadu. Završio je Osnovnu školu "Bora Stanković" u Karavukovu, a potom i Gimnaziju "Jovan Jovanović Zmaj" u Novom Sadu. Odmah po završetku gimnazije, 2003. godine, upisao je osnovne studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer matematika finansija. Diplomirao je 3. oktobra 2007. godine sa prosečnom ocenom 9.86. Iste godine upisao je master studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer primenjena matematika. Položio je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom za master studije sa prosečnom ocenom 10.00.

UNIVERZITET U NOVOM SADU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

<u>KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA</u>

Redni broj: **RBR**	
Identifikacioni broj: **IBR**	
Tip dokumentacije: **TD**	Monografska publikacija
Tip zapisa: **TZ**	Tekstualni štampani materijal
Vrsta rada: **VR**	Master rad
Autor: **AU**	Slađan Dimitrijević
Mentor: **MN**	dr Danijela Rajter-Ćirić, vanredni profesor
Naslov rada: **NR**	Stohastičke diferencijalne jednačine

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: srpski
JI

Zemlja publikovanja: Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2009.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Prirodno-matematički fakultet
MA Departman za matematiku i informatiku
Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad

Fizički opis rada: (5 / 79 / 6 / 0 / 0 / 0 / 0)
(broj poglavlja / strana / lit. citata / tabela / slika / grafika / priloga)
FO

Naučna oblast: Matematička analiza
NO

Naučna disciplina: Stohastička analiza
ND

Predmetna odrednica / Ključne reči:
PO/UDK Stohastičke diferencijalne jednačine, rešenja SDJ

Čuva se: Biblioteka departmana za matematiku
i informatiku,
ČU Prirodno-matematički fakultet,
Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad

Važna napomena: nema
VN

Izvod: Za modeliranje različitih pojava koristimo determinističke
IZ (obične) diferencijalne jednačine. Međutim, rešenja (trajektorije) tih diferencijalnih jednačina često dobijaju neke slučajne osobine pa početnom problemu moramo dodati neki slučajan element. Tako dobijene jednačine se nazivaju stohastičke diferencijalne jednačine i upravo ove jednačine će biti predmet proučavanja u ovom master radu, pri čemu će najveća pažnja biti usmerena ka ispitivanju osobina rešenja SDJ.

Datum prihvatanja teme od strane Nastavno-Naučnog Veća:
DP 14.10.2009.

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
(naučni stepen / ime i prezime / zvanje / fakultet)
KO

Predsednik: dr Marko Nedeljkov, redovni profesor,
Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad

Mentor: dr Danijela Rajter-Ćirić, vanredni profesor,
Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad

Član: dr Dora Seleši, docent,
Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad

UNIVERSITY OF NOVI SAD

FACULTY OF SCIENCE

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

<u>KEY WORD DOCUMENTATION</u>

Accession number: **ANO**	
Identification number: **INO**	
Document type: **DT**	Monographic publication
Type of record: **TR**	Textual printed material
Content code: **CC**	Master Thesis
Author: **AU**	Slađan Dimitrijević
Mentor: **MN**	Danijela Rajter-Ćirić Ph.D., Associate Professor
Title: **TI**	Stochastic Differential Equations
Language of text: **LT**	Serbian (latin)
Language of abstract: **LA**	English

Country of publication: **CP**	Serbia
Locality of publication: **LP**	Vojvodina
Publication year: **PY**	2009.
Publisher: **PU**	Author's reprint
Publication place: **PP**	Faculty of Natural Sciences and Mathematics Department for Mathematics and Informatics Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
Physical description: (chapter / pages / literature / tables / picture / graphs / appendix) **PD**	(5 / 79 / 6 / 0 / 0 / 0 / 0)
Scientific field: **SF**	Mathematical Analysis
Scientific discipline: **SD**	Stochastic Analysis
Subject / Key word: **SKW/UC**	Stochastic Differential Equations, The Solutions of SDEs
Holding: **HD**	Library of the Department for Mathematics and Informatics Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi sad
Note: **N**	none

Abstract: We use deterministic (ordinary) differential equations for modeling various appearances. However, solutions (trajectories) of these differential equations often get some random properties and we must add some random element to the initial problem. The equations obtained in that way are called stochastic differential equation and precisely these equations are subject of investigation in this master thesis, where most of our attention will be directed to investigation of properties of the solutions of SDEs.

AB

We use deterministic (ordinary) differential equations for modeling various appearances. However, solutions (trajectories) of these differential equations often get some random properties and we must add some random element to the initial problem. The equations obtained in that way are called stochastic differential equation and precisely these equations are subject of investigation in this master thesis, where most of our attention will be directed to investigation of properties of the solutions of SDEs.

Accepted by the Faculty Board on:
ASB October 14, 2009.

Defended on:
DE

Thesis Defense Board:
(name / degree / title / faculty)
DB

President: Marko Nedeljkov Ph.D., Full professor,
Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Novi Sad

Mentor: Danijela Rajter-Ćirić Ph.D., Associate professor,
Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Novi Sad

Member: Dora Seleši Ph.D., Assistant professor,
Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Novi Sad