



Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno - matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku



Silvia Šoš

Didaktički aspekti matematičkog modeliranja

- master rad -

Mentor:

Prof. dr Arpad Takači

Novi Sad, 2014.

Sadržaj

Sadržaj	3
Predgovor.....	5
1. Modeliranje	8
1.1.Modeliranje u nastavi matematike	10
1.2.Merenje	13
1.3.Merenje na osnovu vrednosti koje su direktno očitavane sa snimaka.....	15
1.4.Merenje uz pomoć računarskog vrednovanja snimaka	20
1.5.Od pojave do modela.....	24
1.6.Opisivanje pojave.....	25
1.7.Matematički model.....	26
2. Primeri matematičkog modeliranja.....	27
2.1.Uvod	27
2.2.Konzerve	27
2.3.Finetti kutije	31
2.4.Vožnja preko pustinje	34
3. Primena matematičkog modeliranja za infektivnih bolesti	40
3.1.Uvod	40
3.2.Modeli zaraznih bolesti i proces prenošenja	41
3.3.Prikaz jednostavnih epidemioloških modela i njihove praktične primene	44
3.4.SIS model.....	46
3.5.SIR model	54
3.6.Epidemija gripa u jednoj britanskoj školi	67
3.7.Modeliranje polno prenosivih bolesti	69
3.8.Modeliranje nastanka SIDE kao posledica HIV-a	72
4. Tušnadijev model	74
4.1.Uvod	74
4.2.Dinamički sistemi	75
4.3.Model.....	78
5. Zaključak	91

Literatura	94
Biografija	96
Ključna dokumentacija.....	97

Predgovor

Master rad se bavi teorijom modeliranja i daje postupak formiranja modela sistema na osnovu posmatranja realnog sistema. Cilj matematičkog modeliranja je da obuhvati više raznih oblasti nauke, kao što su medicina, biologija, tehničke i fizičke nauke, socijalne nauke, psihologija i da se prikažu matematički modeli pojedinih pojava iz pomenutih oblasti.

U radu je opisano nekoliko realnih pojava iz oblasti hemije, fizike i matematike za koje su dati odgovarajući modeli. Uzevši u obzir da je modeliranje kompleksnih sistema u velikoj meri otežano bez upotrebe računara, rad će ilustrovati primenu nekoliko softverskih alata koji služe za prikupljenje, obradu i prikaz podataka dobijenih iz realnih sistema.

Modeliranje ima jako veliki značaj u svim oblastima moderne nauke. Formiranjem matematičkih modela možemo dobiti jako korisne informacije koje mogu biti upotrebljene u svrhu učenja, rešavanja problema, pokretanju simulacija, izvršavanju eksperimenata i dr.

Rad je podeljen na četiri celine:

- Prva celina objašnjava osnove modeliranja, kao i mogućnost i način formiranja matematičkih modela. U ovom delu dajemo primer jedne hemijske pojave kroz koji objašnjavamo postupak dobijanja matematičkog modela sistema. Pored ovih biće navedeno još nekoliko primera neophodnih za razumevanje preostale tri celine. Literatura na osnovu koje je pisano prvo poglavlje je [1], pomoću referenci [2, 3, 4, 5, 6].
- Druga celina daje konkretne primere iz fizike i matematike u kojima koristimo proces modeliranja. Pored navedenog biće reči i o još nekoliko oblasti gde matematičko modeliranje ima veliku primenu, kao i o analizi rezultata iz nekoliko istraživačkih radova. Pokazaćemo vezu realnih sistema sa matematičkim modelima uz korišćenje grafika. Literatura na osnovu koje je pisano drugo poglavlje je [7], pomoću referenci [8, 9, 10, 11, 12, 13].

- Treća celina će pokazati važnost matematičkog i računarskog modeliranja i simulacije. Prikazaće rezime rezultata primera koji su korišćeni u radu i kakve posledice su imali u praktičnoj primeni. Za izradu ovog poglavlja korišćena je literatura [14, 15, 16].
- U četvrtoj celini je dat rezultat Gabora Tušnadija. Definisani su potrebni pojmovi za dati model. Za izradu ovog poglavlja korišćena je literatura [17, 18, 19, 20].

Cilj ovog rada je da pruži osnovno znanje koje je potrebno za kreiranje matematičkih modela, da pokaže kako se dolazi do matematičkog modela u praksi, i da ukaže na to o kakvim karakteristikama realnog sistema moramo voditi računa da bi model bio upotrebljiv (apstrakcija realnog sistema).

Takođe, cilj je da se pokaže važnost modeliranja sistema u nauci i tehnici uz ilustraciju korišćenja različitih programskih paketa u modeliranju.

Za izbor i pomoć u izradi master rada zahvalnost dugujem mentoru, prof dr Arpadu Takačiju, koja mi je u svakom trenutku pomogo i savetovao me u izradi rada.

Zahvaljujem se i članovima komisije, dr Ljiljani Gajić i dr Ivani Štajner-Papuga za prenešeno znanje kroz više kurseva u toku studija.

Posebnu zahvalnost dugujem svojim roditeljima, koji su sve ove godine bili moja bezuslovna podrška i verovali u moj rad.

1. Modeliranje

Naučno saznanje karakteriše temeljnost koja obuhvata svaku sitnicu i plansku osmišljenost. Njegovo osnovno sredstvo delovanja do danas je postalo modeliranje. U ovome merenje već dugo vremena ima značajnu ulogu na najrazličitijim oblastima nauke. Vrlo brzo je uočeno da je ova metoda kojom se može osigurati objektivnost koja je neophodna u naučnom radu. Iako su se u nekim granama nauke praksa i metode merenja specijalizovali, uočljivo je i to da nam za obradu rezultata merenja stoji na raspolaganju teorijska pozadina koju je moguće sve generalnije primeniti.

Ako pretpostavimo da iza pojava u svetu stoje veze koje se matematički mogu opisati i zakonitosti i da se one mogu upoznati, onda na osnovu uočavanja i merenja možemo opisati ove zakonitosti. U matematici su radi toga stvorena sve prefinjenija sredstva. Jedna od najosnovnijih među njima je kada rezultate merenja predstavljamo pomoću odgovarajuće funkcije. Na ovom nivou apstraktnosti nije potrebno tačno poznavanje objekta ispitivanja. Šta više, kao što ćemo to i videti, matematičko opisivanje dveju u osnovi potpuno različitih stvari, može biti identično. Slične spoznaje i njihovo sakupljanje u celinu je u prvoj polovini XX veka dovelo do formiranja teorije sistema koja danas služi kao sredstvo matematičkom modeliranju.

Pojmovi teorije sistema se ne pronalaze samo u terminologiji različitih nauka nego i u svakodnevnom jeziku. Takva je i reč *sistem*. U različitim skupovima reči (školski sistem, promena sistema, sistem potraživanja itd.) njegova upotreba je do danas postala uobičajena. Delovanje sistema se opisuje pomoću njegovih promenljiva. Predstavljanjem ulaznih i izlaznih promena možemo prikazati sistem tako da ne bude nezavisan od sveta. Ako pri predstavljanju sistema ne dajemo ni ulazne ni izlazne promene, onda pri stvaranju modela zanemarujemo vezu sistema i spoljnog sveta. Na ovaj način stvaramo takozvani zatvoreni sistem.

O otvorenom sistemu govorimo ako on ima ulazne i/ili izlazne promene. Ako se objekat istraživanja ne karakteriše samo početnim i krajnjm stanjem nego se može govoriti i o promeni karakteristika sistema u zavisnosti od neke funkcije, onda to možemo uzeti u obzir prilikom davanja osnovnih promenljiva u postupku modeliranja.

Teorija sistema nam, dakle, omogućava jedinstveno opisivanje veoma različitih pojava. Pri opisivanju svakog sistema dajemo njegove elemente i međusobni odnos tih elemenata. Naravno, svaki element datog sistema se može uzeti kao jedan (pod) sistem, isto tako i dat sistem može biti element jednog „većeg“ sistema.

Separacija i selekcija su radnje uz pomoć kojih iz realnog sistema „vadimo“ elemente koji su bitni iz aspekta modeliranja i odaberemo iz njihovih uzajamnih veza one koje su bitne iz aspekta modeliranja. Tokom istorije nauke je bezbroj puta bilo uočljivo da su sa sve tačnijim metodama merenja – tj. posedovanjem sve više i sve tačnijih podataka - postale tačnije i teorije koje opisuju pojave.

Dovoljno je da pomislimo samo na predstave o sastavu materija. Put je vodio od Demokritovih nedeljivih atoma preko Tomsonovog modela atoma pod nadimkom model pudinga sa šljivama (plum pudding model), Ruterfordovog modela atoma nalik na Sunčev sistem i Borovog modela atoma do kvantne mehanike. Ali, slične promene se mogu uočiti i u razvoju onih teorija koje ne opisuju sastav materije nego se trude da opišu karakteristike materijalnih skupova. Ideje da je Zemlja okrugla i da se oko nje okreće Sunce i da se oko Sunca nebeska tela okreću tačno u minut bile su veoma značajne stanice sve tačnijih naučnih saznanja.

Ovde navedene teorije se u nekom smislu nadograđuju jedna na drugu. Nastanak novih je prouzrokovano nedostacima starijih. Na ove nedostatke je uvek ukazivala neka pojava koja se nije mogla objasniti onim ranijim modelom. U slučaju stvaranja induktivnog modela nova hipoteza se na karakterističan način gradi na osnovu ranije sakupljenih podataka i iskustva.

U slučaju induktivne metode iskustvo je dalo osnovu teoriji, a u deduktivnom slučaju iskustvo pomaže da se neka teorija ili opravda ili opovrgne. U skladu sa ovim su se naučne teorije glaćale u nizu induktivnih i deduktivnih koraka. Čisto induktivni ili čisto deduktivni načini stvaranja modela se smatraju kao krajnji slučajevi. U praktičnim procesima modeliranja uglavnom se pojavljuju obe ove metode.

Veoma jednostavni primeri u ovom poglavlju pokušavaju da prikažu da se promene koje se dešavaju u svetu oko nas – nezavisno od toga da li su oni društveni ili prirodni fenomeni – mogu opisati pomoću sredstava matematike. Zapravo, ovo jeste zadatak matematike. Poglavlje nam daje naslutiti da pomoću ovih sredstava imamo mogućnosti i da na osnovu događaja koji su se desili u prošlosti donesemo zaključke koje se odnose na dešavanja u budućnosti.

To je moguće samo onda ako prvo odredimo zakonitosti razvijanja datog sistema na osnovu merenja koja se zasnivaju na posmatranjima i eksperimentima.

U velikom broju slučajeva prepoznati zakoni formulišu uzajamnu povezanost vremenskih i ostalih promena koje su odgovarajuće za opisivanje stanja sistema, tj. formulišu pravac i veličinu promene koja nastaje u trenutnom stanju sistema, u njegovoj funkciji. Apstraktni matematički modeli ovih sistema je diferencijalna jednačina. Na osnovu prethodnog, sledi da su rezultati ovih jednačina – u suprotnosti sa algebarskim jednačinama – (ako postoje) funkcije koje se priključuju datoj vremenskoj tački ili mestu vrednosti koje odgovaraju promenljivama stanja sistema. (Korišćena literatura [1].)

1.1. Modeliranje u nastavi matematike

Cilj modeliranja u nastavi matematike je da kod učenika razvije svest o tome da bolje razumeju matematičke koncepte, koja su neophodna za savlađivanje problemskih zadataka, kao i da učenici primenjuju naučena pravila na časovima. [22]

Prilikom modeliranja u nastavi matematike, postoji jedan didaktički krug koji počinje upoznavanjem učenika sa stvarnim problemom. Kao problem može da se javi neka pojava koja u toku nastave mora da bude konkretno definisana. Modeliranje razvija sposobnost učenika za rešavanje situacija, koja će se pojaviti posle završetka školovanja.

Razlikovaćemo sledeće faze:

Prva faza – nastavnik objašnjava temu, podstiče učenike da se uključe u temu, da postavljaju pitanja i da uključe situacije iz svakodnevnog života koja se odnose na datu temu.

1-2. Prelaz iz prve u drugu fazu - posle definisanja konkretne situacije, sledi prelaz iz posmatrane realne situacije na realan problem. U ovom slučaju potrebno je izvršiti sledeće kognitivne aktivnosti:

1. postavljanje zadatka,
2. razumevanje problema,
3. pojednostavljenje,
4. interpretacija i drugo.

Druga faza - u procesu modeliranja je problem svakodnevnog života kao i matematička formulacija. Nastavnik može postavljajući par pitanja uputiti učenike u problematiku.

2-3. Prelazak iz druge u treći fazu - Pomoću posebne pretpostavke i formulacije, situaciju iz realnog problema prilagođavamo matematičkim sadržajima.

Treća faza - nastaje matematički model. U ovom delu nastavnik sugerise učenicima moguće pretpostavke i daje uputstva vezana za podatke zadate u problemu. Nakon što učenici izlože ideje o tome kako će rešiti problem, kao i to na koje oblasti se odnosi dati problem, nastavnik im pomaže pri prevođenju realnog problema u matematički.

3-4. Prelaz iz treće u četvrtu fazu - Matematičko rešenje dobijamo matematičkim radom.

Četvrta faza - je konačno matematičko rešenje, koje podrazumeva rešavanje problema povezivanjem do sad stečenim znanjem, kao što su definicije, teoreme i činjenice koje su učenici ranije usvojili.

4-5. Prelaz iz četvrte u petu fazu - interpretacijom dobijenih matematičkih rezultata, tumačenjem matematičkih rezultata u kontekstu realnog problema dobijemo rešenje realnog problema.

Peta faza - Neophodno je da u procesu modeliranja dođe do povezivanja sa sličnim primerima koji su prethodno rađeni. U ovom delu treba učenicima sugerisati da koriste računar u svrhu lakšeg rešenja problema.

5-6. Prelaz iz pete u šestu fazu - Analizom dobijenih rezultata, proverom modela utvrđujemo da li je model prihvaćen ili odbijen.

Šesta faza – rezultat je poređenja, provere, procene, kritičke analize, kao i revidiranje, popravka modela ili prihvatanje rešenja. Kao rezultat ove faze imamo dva moguća ishoda.

Prvi ishod je u slučaju prihvatanja modela kada se model potvrđuje i tada se razvija diskusija.

Drugi ishod je u slučaju kada model nije zadovoljavajući i tada se u cilju popravke modela ceo proces ponavlja.

U ovom delu je predviđeno formulisanje matematičkog modela što predstavlja deo koji prethodi završnoj fazi procesa modeliranja kao i rešenje problema. Kada se problem formuliše neophodno je da učenici razrade model koji je opštiji, odnosno koji se neće odnositi samo na date podatke već generalno na problem uopšte.

6-7. Prelaz iz šeste u sedmu fazu – Ako je model prihvaćen piše se izveštaj.

Sedma faza – kao rezultat dobijamo izveštaj u slučaju da je model bio prihvaćen, i u tom slučaju, neophodno je da učenici prezentuju svoje rezultate.

6-2. Prelaz iz šeste u drugu fazu - Ako model nije prihvaćen vraćamo se na realan problem i radimo ponovo a ceo ciklus ponavljamo.

Kognitivne aktivnosti prilikom prelaska iz jedne faze matematičkog modeliranja obavljaju zajedno nastavnik i učenik. U tom slučaju nastavnik pomaže učeniku da lakše prevaziđe probleme nastale u toku rada, i ako se jave nove nerazumljive situacije usmerava ga na pravi put.

1.2. Merenje

Cilj modeliranja je upoznavanje datog sistema ili pojma. Ali za ovo nam je potrebno da prikupimo odgovarajući broj informacija o pojavi ili o sistemu koji želimo da modelujemo. To možemo da postignemo merenjem koji zahteva odgovarajuću tačnost prilikom posmatranja te pojave. Poželjno je da se uključi računar za obradu rezultata merenja kao i za prikupljanje podataka. To nam omogućuje da merenja vršimo znatno brže i tačnije od ranijih merenja. Ovo zahteva sredstva koja digitalnim putem šalju rezultate u računar. Parametri upotrebljenih senzora takođe mogu u velikoj meri da utiču na preciznost merenja.

U cilju demonstracije možemo posmatrati robot NXT koji je proizveden u fabrici Lego. (Deo fabričkog paketa je ultrazvučni sensor koji u daljini od 2m meri sa tačnošću i do 1cm). U slučaju ispitivanih sistema i pojava često želimo da posmatramo promenu njihovih karakteristika u nekom određenom vremenskom periodu; na to nam ukazujuju i stručni izrazi iz raznih disciplina kada ispred njih koristimo atribut trenutni, na primer u oblasti fizike imamo trenutnu brzinu, trenutno ubrzanje, trenutni napon, u hemiji trenutnu brzinu reakcije, trenutnu koncentraciju, trenutnu konformaciju, i trenutnu polarizaciju.

Ali, često govorimo i o trenutnom stanju sistema. Njime opisujemo razne promene vrednosti sistema koje se dešavaju u određenom vremenskom periodu. U toku ovakvih ispitivanja bitno je tačno merenje vremena. Što je promena brža tako je teže izvršiti merenja koja želimo da pratimo tokom ispitivanja.

Razvojem tehnologije imamo sve više sredstava koje možemo da koristimo u ovu svrhu. Pošto svaka pravilna, periodična “pojava” može biti pogodna za merenje vremena i, to zbog toga verovatno nije čudno što nam snimanje pokretnih slika može dobro poslužiti. Naravno, sve zavisi i od razlike između brzine snimanja i brzine promene. Brzina snimanja je veoma bitna karakteristika pokretnih slika. Njome iskazujemo broj statičnih slika u jednoj sekundi snimanja.

Na primer, dobro je poznata brzina koja daje 25 frejmova u sekundi (fps). To znači da svake 0,04 sekunde dobijamo novu informaciju o posmatranom sistemu. (Po nekim drugim kriterijumima bismo mogli reći da dodajemo vreme merenja odgovarajućim slikama u toku snimanja.) Ovo rešenje bi odgovaralo u onim slučajevima kada se ispitivanje ne možemo vršiti golim okom. (Brzina od 25 fps je postala regulativa jer ljudsko oko nije u stanju da prati veće brzine.) Moramo da napomenemo da u današnje vreme nisu više nedostižne kamere koje dostižu brzinu i od 80 fps i one nam, naravno, omogućavaju i posmatranje još bržih pojava i merenja vezana za te pojave.

Niz snimljenih statičnih koje čine pokretnu sliku na razne načine može da se obradi s obzirom na merenja. Ako ne moramo često da beležimo rezultate merenja i ako nam priroda pojave dozvoljava da na slike postavljamo odgovarajuće markere (to može čak i na kraju da se uradi, kada se konstruiše pokretna slika), onda se uokvirivanjem snimka očitavanje rezultata može vršiti i manualno. Ovo rešenje dolazi u obzir samo onda kada je cilj merenje dužina pomeranja, ili se merenje može na ovo svesti. (U velikom broju slučajeva odgovarajućim planiranjem eksperimenta ovo je moguće izvesti jer su aparati za merenje pre onih digitalnih, radili upravo na ovakav način.)

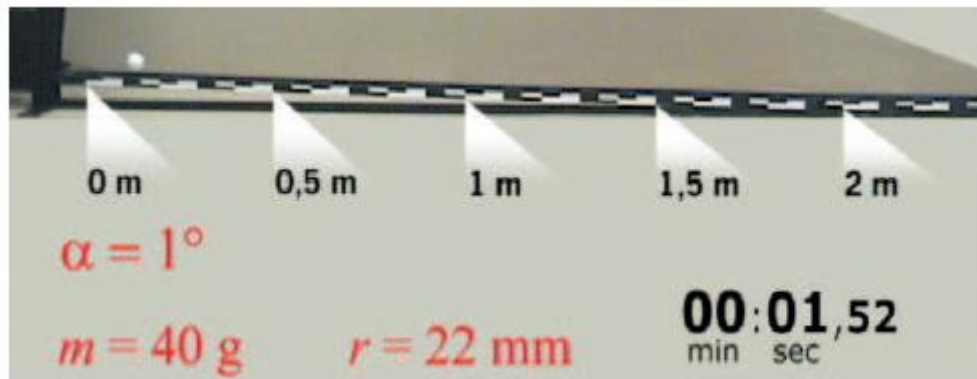
Drugo moguće rešenje koje nosi u sebi dosta veći broj mogućnosti je obrada frejmova na računaru. Naravno, ovde je u prvom planu pitanje korekcija optičke iskrivljenosti jer ova činjenica znatno utiče na tačnost merenja. (Korišćena literatura [1].)

1.3. Merenje na osnovu vrednosti koje su direktno očitane sa snimaka

U prvom primeru ćemo se baviti oblikom kretanja koji nam je vrlo dobro poznat iz oblasti fizike. Ispitaćemo eksperimentalno merenje koje se vezuje za pravolinijsko ravnomerno ubrzanje kugle koja se kotrlja niz nagib. Telo se kreće na terenu koji se nalazi pod podesivim nagibnim uglom. Teren, tj. put kojim se telo kreće označeno je odgovarajućom skalom (Slika 1). To nam omogućava očitavanje pređenog puta. Jednostavnije očitavanje nam omogućava naknadno obeležavanje snimaka, tokom njihovog uređivanja. Tada su postavljene na slike i ostale karakteristike eksperimenta (nagibni ugao, prečnik i masa kugle), kao i proteklo vreme do svakog pojedinačnog snimka od početka kretanja kugle.

“Uokvirivanjem” snimaka različitih nagibnih uglova možemo očitati pojedinačno vreme potrebno da se pređe uvek isti put. Ove podatke sadrži Tabela 1. Očitane vrednosti i parabole sa tačkama merenja prikazuje Slika 2. α označava nagibni ugao, a G masu tela u pokretu. Telo vrši pravolinijsko ravnomerno ubrzanje usled delovanja stalne sile F u pravcu nagiba. Sila je srazmerna sa masom tela i sa $\sin\alpha$:

$$F = G \sin \alpha.$$



Slika 1. ([1]) : Kugla koja se kreće niz nagib od 1°

s	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
t ($\alpha=1^\circ$)	0,00	1,28	1,85	2,30	2,66	2,98	3,26	3,54	3,78	4,02
t ($\alpha=2^\circ$)	0,00	0,88	1,24	1,56	1,80	2,02	2,22	2,40	2,56	2,72
t ($\alpha=3^\circ$)	0,00	0,72	1,04	1,27	1,48	1,65	1,80	1,97	2,09	2,22
t ($\alpha=4^\circ$)	0,00	0,58	0,86	1,07	1,24	1,39	1,52	1,66	1,78	1,89
t ($\alpha=5^\circ$)	0,00	0,52	0,76	0,96	1,12	1,25	1,38	1,49	1,60	1,70

s	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
t ($\alpha=1^\circ$)	4,22	4,44	4,64	4,84	5,02	5,20	5,38	5,54	5,70	5,88
t ($\alpha=2^\circ$)	2,86	3,01	3,14	3,28	3,41	3,53	3,65	3,77	3,88	3,99
t ($\alpha=3^\circ$)	2,34	2,45	2,58	2,68	2,78	2,88	2,98	3,08	3,16	3,25
t ($\alpha=4^\circ$)	1,99	2,09	2,19	2,28	2,37	2,46	2,54	2,62	2,70	2,78
t ($\alpha=5^\circ$)	1,79	1,88	1,96	2,04	2,13	2,20	2,28	2,35	2,42	2,50

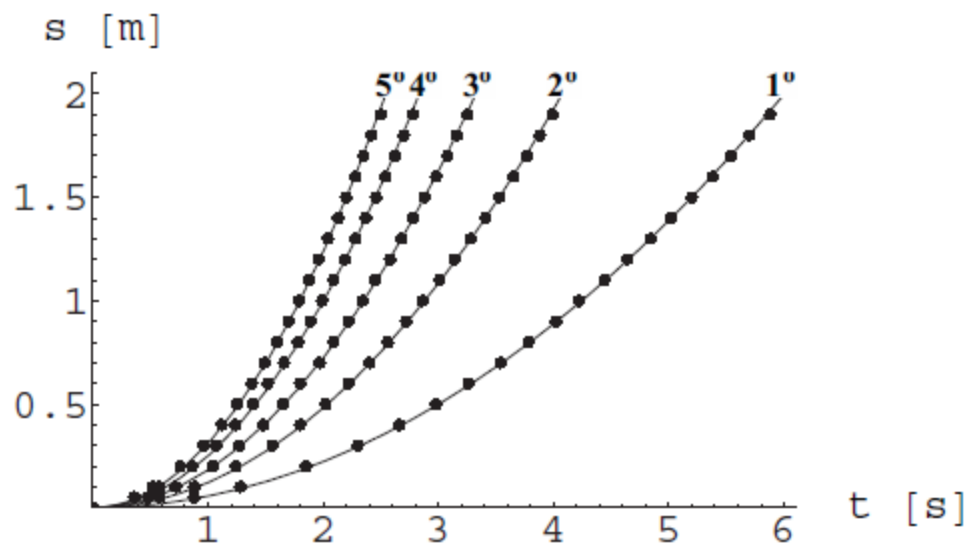
Tabela 1. ([1]) : Potrebno vreme da kugla pređe isti put na različitim nagibima

Kao što se i očekivalo tačke merenja se nalaze na krivama koje se sastoje od parabola. Njima pripadaju različiti uglovi nagiba. Tokom kristalizacije čvrstih materija možemo uočiti kako delići tečnosti pomeraju sfernu granicu stupajući u čvrstu fazu. U suštini se i ova promena može smatrati kretanjem, kao što to prikazuje i Slika 3.

Očitavanje brojčanih vrednosti nam omogućava skala zapremine postavljena pored epruvete. (Pri konstruisanju pokretne slike, isto kao i na Slici 1. i na ovom snimku, na pojedinačnim frejmovima, naznačene su vrednosti proteklog vremena od početka procesa).

Očitane vrednosti sadrži Tabela 1. i Tabela 2. prikazuje kako se ove vrednosti dobro uklapaju u jednu pravu, pa se brzina pomeranja sferne granice bila ravnomerna.

Na sličan način gore navedenom možemo posmatrati i pomeranje sferne površine dveju različitih faza i može se izvršiti merenje u vezi sa tim i u slučaju hemijskih reakcija pri kojima nastaje gas. U tim reakcijama gas koji nastaje u gasnoj bireti postaje istiska tečnost. Ako imamo uređaj sa odgovarajućom skalom onda možemo da pratimo povećavanje zapremine gasa koji nastaje prilikom reakcije.



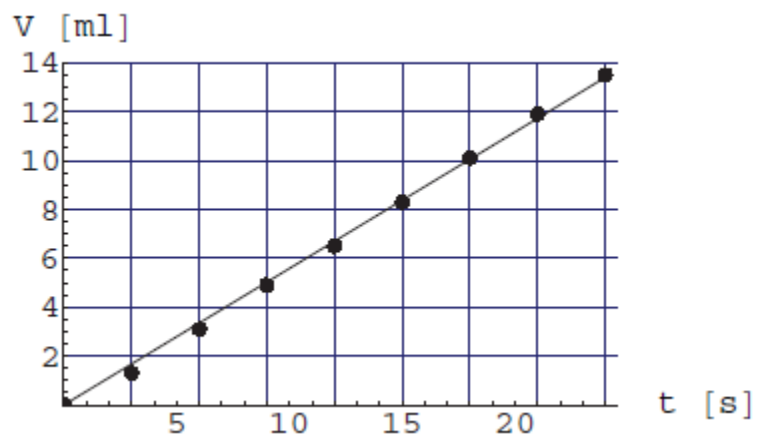
Slika 2. ([1]) : Pređeni put kugle pod različitim nagibnim uglovima ($\alpha = 1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ, 5^\circ$) u funkciji vremena



Slika 3. ([1]) : Kristalizacija natrijum-acetata u epruveti. Na nizu snimaka lako je uočljivo pomeranje sferne površine. Snimci su napravljeni u jednakim razmacima od 3 sekunde.

t	0,0	3	6	9	12	15	18	21	24
V_i	0	1,3	3,1	4,9	6,5	8,3	10,1	11,9	13,5
ΔV_i	1,3	1,8	1,8	1,6	1,8	1,8	1,8	1,6	/

Tabela 2. ([1]) : Zapremina rastućeg kristala u funkciji vremena, $\Delta V_i = V_{i+1} - V_i$ ($i = 0..7$)



Slika 4. ([1]) : Kristalizacija natrijum-acetata. Zapremina kristala u funkciji vremena (Podaci iz Tabele 2. i prava sa podacima merenja)

1.4. Merenja uz pomoć računarskog vrednovanja snimaka

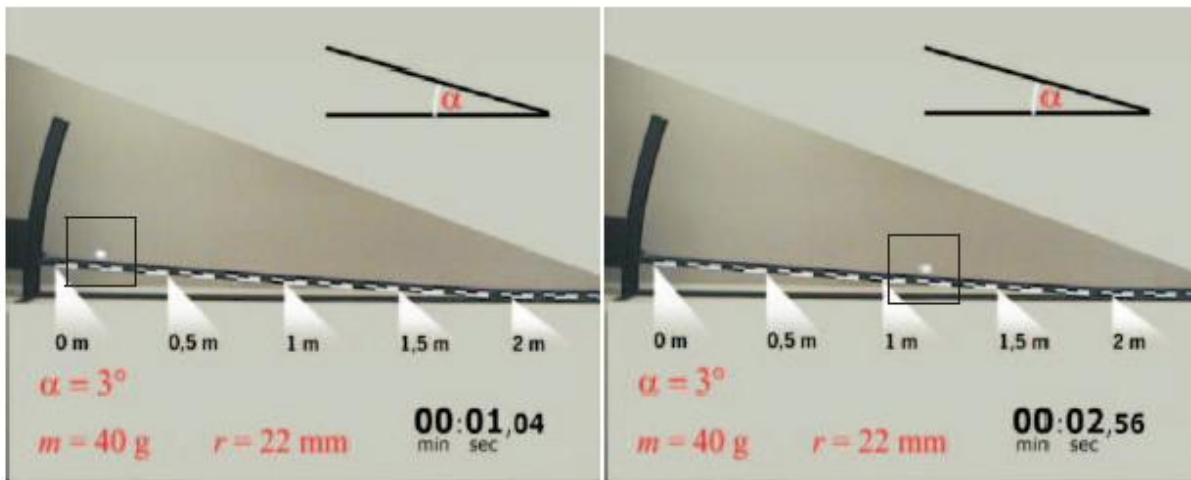
Pri kompjuterskoj obradi slika prvi bitan korak nam je da pozadinu odvojimo od bitnih informacija. U našem slučaju pod pozadinom podrazumevamo one tačke na slici koje se ne pomeraju u toku snimanja, dakle nisu deo objekta koji pratimo.

Zbog karakteristike problema koristi se najjednostavniji model. Kod rešavanja ovog problema pretpostavimo da nezavisno od kretanja sjaj tačkica na slici počinje normalno da se raspršuje.

Ako, dakle, sjaj jedne tačke na slici odstupa od proseka vrednosti sjaja istih tačaka na narednih nekoliko frejmova, onda tu tačku ne smatramo pozadinskom tačkom i kažemo da je deo objekta u pokretu.

Promenu sjaja tačaka ($I(x, y, t)$) na slici u vremenu i prostoru možemo opisati teorijom optičke struje (optical flow). Pošto se ovaj proces može sprovesti i u mnogo komplikovanijim problemima od našeg slučaja (objekat u pokretu i pozadina u pokretu) potreba za računanjem mora biti mnogo veća.

Za vrednovanje slika ćemo iskoristiti vrednu osobinu snimaka da se ispitani objekat kreće ispred pozadine koja se u suštini ne pomera, kako nam to prikazuje i Slika 5.



Slika 5. ([1]) : Kugla koja se kreće niz nagib od 3° u dva različita trenutka (pređeni put je 0,2 i 1,2 m)

Ako uzmemo u obzir ovu okolnost naš problem postaje lako rešiv. Pošto se kod ovih slika određene tačke u memoriji čuvaju na osnovu kodova njihovih boja, svaka slika dobija svoju matricu. Ako, dakle, slike za obradu koje slede jedna za drugom stoje u n redu i svaki red sadrži m tačaka onda svakoj slici odgovara jedna matrica $n \times m$ tipa u čijem redu i element j sadrži potrebne informacije tačke j u redu i odgovarajuće slike.

Iz aspekta problema dovoljno je da memorišemo sjaj tačaka, njihov nivo sivila u matrikama. Neka A i B budu matrice sa tačkama sivih nijansi slika koje obrađujemo. Sada konstruišemo na osnovu pravila elemente matrice $C=A-B$ od A i B matrica odgovarajućih slika.

U matrici C elementi koji odgovaraju pozadini koja se ne menja dobijaju vrednost blisku nuli i samo će oni elementi znatno odstupati od nule gde se i obe slike znatno razlikuju, tj. u odgovarajućim delovima objekta koji se kreće.

Iz aspekta problema tačke na slikama se mogu svrstati u dve grupe. Tačke pozadine su za nas zanemarljive i naspram njih želimo da istaknemo one tačke koje nose informacije bitne za naš zadatak, tačke objekta koji se kreće.

U stvarnosti je teško rešiti da odgovarajućim tačkama dveju slika pripada ista vrednost intenziteta ali njihova razlika može biti dovoljno mala ako boje odaberemo na odgovarajući način (tamna pozadina, svetli objekat). Bolje se razlikuju delovi dve grupe ako jednostavno zanemarimo bitove sa malom vrednošću elemenata

$$c_{ij} = \begin{cases} b_{ij} - a_{ij} & \text{ako } b_{ij} \geq a_{ij} \\ 0 & \text{ako } b_{ij} < a_{ij} \end{cases}.$$

Sledeći zadatak je određivanje mesta objekta koji se kreće. Ako bismo svakom stupcu matrice $\mathbf{C}$ dodelili zbir elemenata stupca videli bismo da veći zbir pripada onim stupcima koji označavaju slike sa više svetlih tačaka objekta. Ako izračunamo zbir elemenata redova došli bismo do istog zaključka . Ovo otkriće će nam pomoći da odredimo mesta objekata na slici. Neka su elementi vektora $\mathbf{V}$ sa elementima $\mathbf{n}$ i elementi vektora $\mathbf{W}$ sa elementima $\mathbf{m}$ dati se:

$$v_i = \sum_{j=1}^m c_{ij},$$

$$w_i = \sum_{i=1}^n c_{ij}.$$

Da bismo se približili poziciji objekta moramo da izračunamo sledeće vrednosti:

$$\hat{j} = \frac{\sum_{j=1}^m (j \cdot w_j)}{\sum_{j=1}^m w_j};$$

$$\hat{i} = \frac{\sum_{i=1}^n (i \cdot v_i)}{\sum_{i=1}^n v_i}.$$

Napomenućemo da bi u datom slučaju – u korist smanjivanja vremena potrebnog za vrednovanje i radi otklanjanja eventualnih detalja koji bi smetali na slici, bilo bi korisno označiti na matrici C jednu podmatricu. Ona bi odgovarala onom delu slike gde bi kugla u toku svog kretanja mogla da prođe. Uzimajući sve ovo u obzir računanje $\hat{j}$ i $\hat{t}$ bi se izmenilo na sledeći način:

$$\hat{j} = \frac{\sum_{j=g}^h (j \cdot \sum_{i=k}^l c_{ij})}{\sum_{j=g}^h \sum_{i=k}^l c_{ij}};$$

$$\hat{t} = \frac{\sum_{i=k}^l (i \cdot \sum_{j=g}^h c_{ij})}{\sum_{i=k}^l \sum_{j=g}^h c_{ij}};$$

gde je $1 \leq k \leq i \leq l \leq n$ i $1 \leq g \leq j \leq h \leq m$.

Ako bismo gore navedeni proces koristili u vezi slika drugih eksperimenata moguće je da bismo morali da nađemo drugo rešenje za pronalaženje potrebne informacije matrice C , Slika 6. prikazuje dve faze kristalizacije natrijum-acetata i rezultat primene gore opisanog procesa. Prsten vremena dobro prikazuje promenu (rast) koja je nastala za 1 sekundu. U ovom slučaju se može dati neka konstanta koja je pozitivna ($\delta > 0$). Odgovarajuću informaciju nosi broj elemenata većih od konstante u matrici C . Broj piksela koji čine vremenski prsten je srazmeran sa količinom materije koja se izdvojila za dato vreme.

Ali ako bismo odredili i vektore V i W , njihovom obradom bismo utvrdili i prečnik vremenskih prstena, a iz toga se može izračunati količina materije.

Ako proizvodnja elemenata matrice C teče na osnovu jednakosti:

$$c_{ij} = |b_{ij} - a_{ij}|,$$

zbog simetrije operacije mesto objekta koji se kreće bi bilo vidljivo u obe svoje faze, koja je nastala na osnovu matrice C . Ako iz ovoga proizvedemo vektore V i W među elementima u datom slučaju naći ćemo po dve grupe vrednosti koji se ističu. Procena pozicija se može sprovesti na već dati način samo onda ako se prvo uradi njihova separacija.



Slika 6. ([1]) : Snimak kristalizacije natrijum-acetata u 6. i 7. sekundi, kao i “pozitivna razlika” dva snimka

1.5. Od pojave do modela

Autori koji se bave proučavanjem diferencijalnih jednačina, njihovim konstruisanjem i modelima sa diferencijalnim jednačinama kao motivaciju navode najrazličitije primere: razmnožavanje bakterija, radioaktivno raspadanje (eksponencionalni rast), proces epidemije zaraznih bolesti, širenje informacija (logistički rast).

U isto vreme nalazimo veoma mali broj primera koji bi odgovarali prikazivanju početne faze stvaranju modela. U ovim primerima nije dovoljno naglašeno da se moraju vršiti merenja da bi se željeni sistem upoznao jer ova merenja služe kao osnova zakonitostima pomoću kojih se promene mogu opisati. U nekim određenim slučajevima opravdano je da se biraju pojave koje je lakše potvrditi merenjima i lakše ih je modelirati i od gore navedenih. Deo materija u čvrstom stanju su kristali. Pored gore navedenih razloga i praktični značaj moći će da prouzrokuje posmatranje procesa kristalizacije. (Korišćena literatura [1].)

1.6. Opisivanje pojave

Zbog nekih svojih određenih karakteristika, natrijum-acetat je veoma pogodan za izvršavanje nekih merenja u procesu da bi se utvrdile veze koje služe za osnovu modeliranja. U jednu epruvetu sipajmo prezasićen rastvor natrijum-acetata. Umetanjem jednog kristala materije pokreće se proces kristalizacije.

Brzina pretvaranja je idealna (niti je mnogo brza niti toliko spora da se ne može dočekati). Eksperiment zahteva tako mali broj sredstava i materija da se može izvršiti i u “kućnim” okolnostima. Sve ove okolnosti zajedno nam omogućavaju da se ovaj eksperiment sa jednostavnim sredstvima izvrši i da se dobiju tačni rezultati.

(Korišćena literatura [1].)

1.7. Matematički model

Pošto želimo da prikazemo proces kristalizacije prirodno je da masu materije $X(t)$ kristala (čvrsta faza) smatramo za konstantu stanja. Na osnovu eksperimentalnih merenja pretpostavićemo da je u određenoj vremenskoj jedinici α količina materije koja stupa u čvrstu fazu nezavisna od količine materije koja se već izdvojila i od t vremenske tačke:

$$X(t + 1) - X(t) = \alpha (t \geq 0). \quad (1.1)$$

Do sledećeg trenutka količina materije u čvrstoj fazi raste za veličinu α . Označimo vreme koje je proteklo između dve vremenske tačke sa h da bismo problem mogli da opišemo što opštije. Ako izaberemo veći interval onda će se odvojiti veća količina materije, a ako izaberemo manji interval onda će se izdvojiti manja. Dakle, α zavisi od h : $\alpha(h)$.

Jednačinu (1.1) dakle opisujemo na sledeći način:

$$X(t + h) - X(t) = \alpha(h) (t \geq 0) \quad (1.2)$$

Na osnovu iskustva je jasno i da je

$$\lim_{h \rightarrow 0} \alpha(h) = 0. \quad (1.3)$$

Možemo pretpostaviti da je veza između h i rasta direktno proporcionalna. Ako izaberemo veće h , njemu srazmerno raste i količina materije koja je nastala za to vreme.

Tako $\exists \lambda_1 \in \mathbb{R} (\lambda_1 > 0)$, tako da je:

$$\alpha(h) = \lambda_1 h,$$

ne zavise od λ_1 i od h , ali oni su samo konstante koje su karakteristične za ovaj sistem):

$$X(t + h) - X(t) = \alpha(h) = \lambda_1 h \quad (1.4)$$

Relaciju (1.4) delimo sa h , pa ako sa h težim nuli onda:

$$\frac{dX(t)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{X(t+h) - X(t)}{h} = \lambda_1. \quad (1.5)$$

Dakle, pojava koja je predstavljena ovim eksperimentom može se prikazati sledećom diferencijalnom jednačinom:

$$\frac{dX(t)}{dt} = \lambda_1, (0 < \lambda_1).$$

(Korišćena literatura [1].)

2.Primeri matematičkog modeliranja

2.1. Uvod

U svakodnevnom životu se susrećemo sa problemima čije rešavanje zahteva neko znanje iz matematike. U ovom slučaju ne možemo da govorimo samo o osnovnom znanju već i o narednom nivou na kojem ovo svoje znanje koristimo i razvijamo.

Ovi zadaci ili problemi se mogu javljati u različitim disciplinama nauka i to već i u osnovnoj školi. U sledećem poglavlju ćemo analizirati čak dva zadatka. Oni se rešavaju u nastavi matematike koju pokreće radoznalost. Veoma je bitno da naglasimo da je kod modelovnih zadataka moguće da postojanje više rešenja.

2.2. Konzerve

1. Zadatak: *Treba da se napravi konzerva, pri čemu je data njena zapremina. Koje će biti dimenzije konzerve, ako želimo da potrošimo što manje materijala?* [7]

2. Zadatak: *Kako će konzerva da izgleda ako se pri izradi dna i poklopca gubi p deo materijala, a proizvođač bi da potroši što manje materijala prilikom izrade konzervi? Zapremina i dalje mora bude ona ista.* [7]

Rešenje 1. zadatka

Neka je R bude poluprečnik osnovnog kruga, a visina konzerve neka je h . Tada je zapremina data sa:

$$V = \pi R^2 h$$

a količina materijala koja je potrebna za izradu je

$$P = 2R\pi h + 2\pi R^2.$$

Dakle, tražimo minimum P ako je data vrednost V . Tako je

$$h = \frac{V}{\pi R^2}$$

i tražimo najmanju vrednost izraza

$$P(R) = R^2 + \frac{V}{\pi R},$$

ako je vrednost V fiksirana. Na osnovu relacije između aritmetičke i geometrijske sredine je

$$P(R) = R^2 + \frac{V}{2\pi R} + \frac{V}{2\pi R} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}}.$$

Tako dobijamo

$$R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

i

$$h = 2 \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Da bismo postigli optimalnu uštedu materijala treba da koristimo jednačinu

$$\frac{h}{2R} = 1.$$

U praksi, veoma mnogo konzervi zaista ima ovakav oblik. Minimum funkcije P se u toku aktivnosti može i na drugi način odrediti, npr. u **Excel** tabeli možemo da izračunamo vrednosti funkcije i na osnovu numeričkih vrednosti možemo da odredimo minimalnu vrednost.

Rešenje 2. zadatka

Neka je R bude poluprečnik osnovnog kruga, a visina svih konzervi neka je h . Tada je zapremina konzervi data sa, kao i u prethodnom zadatku:

$$V = \pi R^2 h.$$

Količina upotrebljenog materijala za izradu je

$$P = 2\pi R h + 2(1 + p)R^2,$$

pa ponovo tražimo minimum P ako je vrednost V fiksirana. Na osnovu jednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine je

$$P(R) = (1 + p)R^2 + \frac{V}{2\pi R} + \frac{V}{2\pi R} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{(1 + p)V^2}{4\pi^2}}.$$

Poluprečnik R je tada jednak:

$$R = \sqrt{\frac{V}{2\pi(1 + p)}}.$$

U ovom slučaju je

$$h = 2(1 + p) \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi(1 + p)}},$$

dakle, da bismo postigli optimalnu uštedu materijala treba da koristimo jednačinu

$$\frac{h}{2R} = 1 + p.$$

Konzerva čiji je prečnik 7,5 cm a visina 11 cm se smatra standardnom. Ove dimenzije su optimalne onda ako njeno dno i gornji deo isečemo iz kvadrata čija je dužina stranica 8 cm, a prsten debljine 1,25 cm koji nastaje na ivici upotrebimo za fiksiranje za stranicu konzerve. Vredno je pažnje da se na internetu pogleda film “Kako se pravi konzerva?”. Na osnovu toga možemo da napravimo model koji još više odgovara stvarnosti.

2.3. Fineti kutije

Potrebno nam je neotvoreno pakovanje Fineti štapića od 140 g i pakovanje od 400 g, jedan lenjir i jedna vaga.



Slika 7. [7]: Fineti konzerve

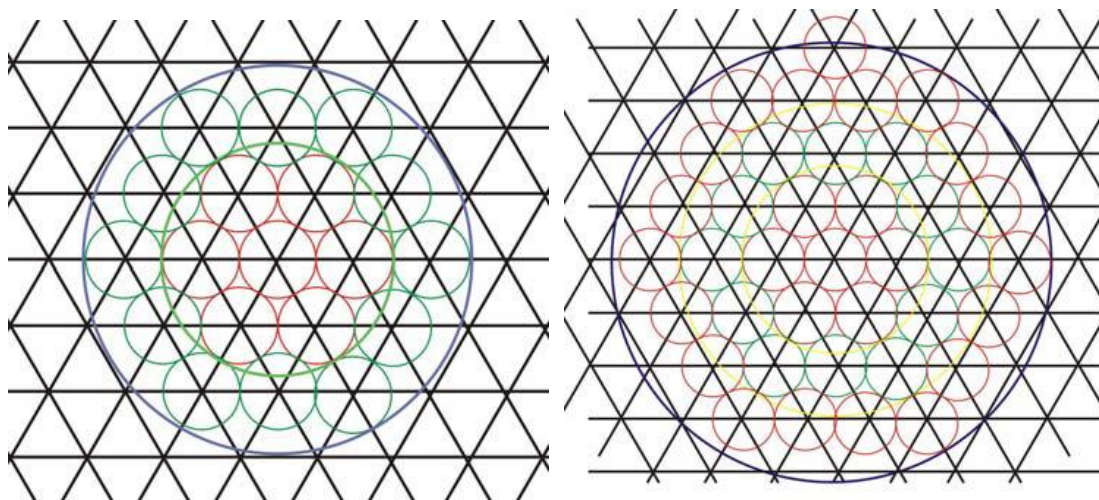
3. Zadatak: *Koliko štapića sadrži pakovanje Fineti slatkiša sa slike?* [7]

4. Zadatak: *Koliki je prečnik kutije Fineti štapića od 400 g, ako sadrži štapiće istih dimenzija kao i prethodne dve kutije?* [7]

Rešenje 3. zadatka

Korisno je da se izmeri prečnik kutije i bilo bi dobro da znamo i prečnik štapića. Pretpostavimo da štapići stoje uspravno u kutiji i tako će biti dovoljno da ispitamo samo presek. Pošto je prečnik štapića nepoznat potrebno nam je da to procenimo sami.

Na osnovu slike koja se vidi na kutiji prečnik štapća je 1,1 cm i zbog toga ćemo da računamo sa prečnikom približnim 1,1 cm. Dobili bismo sličnu vrednost ako bismo procenu doneli na osnovu broja štapića i prečnika kutije. Spoljašnji prečnik kutije je skoro 7 cm i od toga moramo da oduzmemo skoro 1 cm da bismo dobili prečnik otvora na gornjoj strani kutije.



Slika 8. ([7]): Fineti konzerve

Matematički model se dakle sastoji iz toga da treba da odredimo koliko pločica prečnika 1,1 cm može da stane na pločicu prečnika 6 cm bez preklapanja. U stvarnosti štapići ne stoje toliko blizu jedna do druge tako da prečnik od 1,1 cm može da sadrži i razmak među štapićima. Na jedan prečnik se na ovaj način može položiti najviše 5 štapića. Ako počnemo da redamo pločice iz centra kruga dobićemo rezultat koji se vidi na slici. Vidimo da se na ovaj način može postaviti 19 kružića-pločica i to nam kazuje da se u kutiju može staviti približno 19 Fineti štapića.

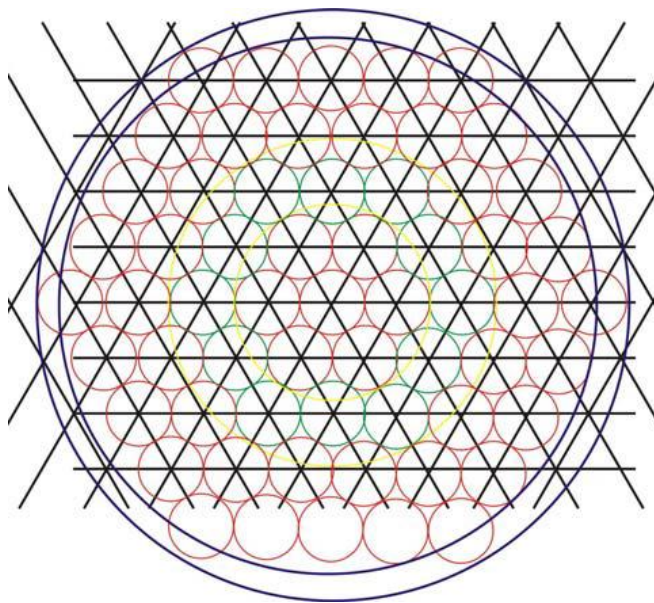
Posle otvaranja kutije možemo da proverimo da li ona zaista sadrži približno 19 štapića. Dakle, približna masa jednog štapića je 7,35 g. Ako znamo masu štapića onda vidimo da je to u proseku 8 g, i to nam kazuje da u kutijama ima u proseku po jedan štapić više nego što je to potrebno da bi masa sadržaja kutije bila 140 g.

Moguće rešenje 4. zadatka :

Na osnovu prethodnog zadatka masa jednog štapića je u proseku 8 g što znači da u kutiju od 400 g može da stane otprilike 50 štapića. Pokušajmo ovo da postavimo na osnovu prethodne konfiguracije. Možemo da uočimo da na pločicu prečnika 9,9 cm moguće je postaviti 61 pločicu prečnika 1,1 cm i zbog toga nam je moguće da smanjimo prečnik velike ploče.

Ako prečnik malo smanjimo, na otprilike 9,3 cm još uvek je moguće da postavimo 55 pločica. Ali ako prečnik velike ploče smanjimo na 8,8 cm onda nećemo moći da postavimo potrebnih 50 pločica. Tako je prečnik kutije otprilike 10,3 cm jer je razlika između prečnika spoljašnjeg i unutrašnjeg otvora 1 cm.

Ako izmerimo kutiju onda ćemo videti da je prečnik 10,2 cm i da ona sadrži 52 štapića. Dakle, procena je prihvatljiva.



Slika 9.([7]): Fineti konzerve

2.4. Vožnja preko pustinje

1. Zadatak: imamo na raspolaganju jedan džip koji prima najviše 100 litara goriva i koji na pređenih 100 km daljine koristi 10 litara goriva. Uz pomoć ovih saznanja moramo da pređemo pustinju u kojoj nema benzinskih pumpi. Organizujmo prelazak preko pustinje (napravimo plan prelaska) ako je :

- širina pustinje 1100 km
- širina pustinje 1600 km.

Koliko goriva nam je potrebno za prelazak preko pustinje u gore navedenim situacijama? [7]

2. Zadatak. Utvrdimo širinu D pustinje pod gore navedenim uslovima i utvrdimo na koji način zavisi potrebna količina goriva za prelazak preko pustinje od širine D . [7]

Rešenje 1. zadatka:

U oba slučaja moramo da postavimo neki punkt u pustinji. Pitanje je samo gde teba da se taj punkt postavi i koliko goriva vredi da se skladišti u njemu. U prvom slučaju je moguće rešenje da punkt postavimo 300 km od polazne tačke.

Tu možemo da ostavimo 40 litara goriva i da se vratimo na početnu tačku. Od punkta do kraja puta nam ostaje još 800 km i za to nam je potrebno 80 litara goriva, dakle kad sledeći put krećemo dovoljno je da u rezervoar sipamo 70 litara. Od toga ćemo 30 litara potrošiti dok stignemo do punkta. Tada ćemo imati u rezervoaru 40 l i uz onih prethodno ostavljenih 40 l sa punkta imaćemo ukupno 80 l goriva i to će nam biti dovoljno da pređemo put. Dakle, sa 170 litara goriva je moguće da se pređe put.

Pitanje je samo da li je ovaj prelazak optimalan? Ako punkt postavimo da 200km od starta onda bi nam bilo dovoljno i 150 l goriva. A ako punkt postavimo na 100 km onda potrebno gorivo iznosi 130 l. Udaljenost između starta i punkta označimo sa **100·d**.

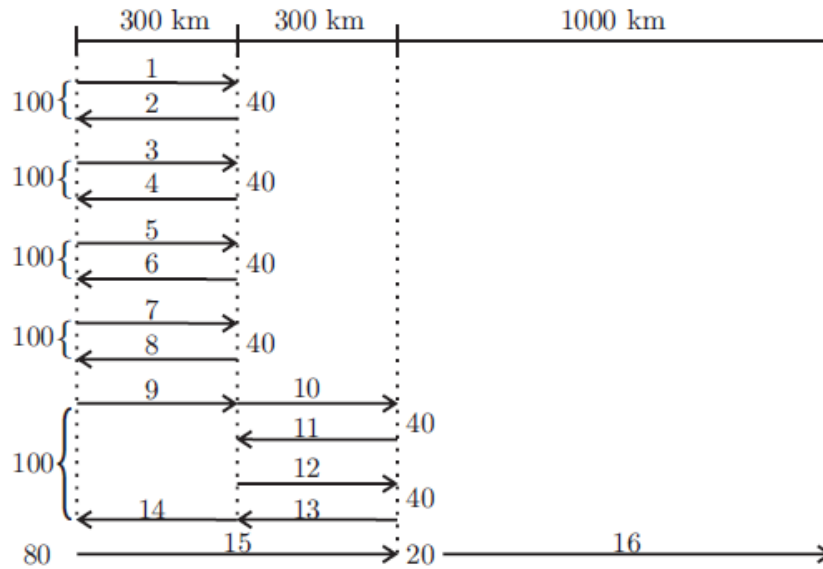
Da bi se stiglo od punkta do druge strane pustinje potrebna nam je nejednačina $d \geq 1$. Sa druge strane postavljanje punkta zahteva da se pređe $200 \cdot d$ i posle toga se opet mora preći čitav put, dakle potrošeno gorivo iznosi $110 + 20d$. Optimalno rešenje će biti da postavimo punk na 100 km od početne tačke.

Ako postavimo više punktova ili ako spremimo komplikovaniji plan za prelazak, opet ćemo potrošiti najmanje toliko goriva. Ovo je jedno od optimalnih rešenja.

Iz aspekta sprovođenja ovo nije jedino optimalno rešenje jer ako prilikom prvog puta natočimo samo 80 litara goriva onda u punktu možemo da ostavimo 60 litara. Ako drugom prilikom natočimo 50 litara goriva onda takođe možemo da stignemo do druge strane pustinje. Količina potrošenog goriva i mesto punkta je isti kao u prethodnom rešenju ali sprovođenje nije isto. Ovo nam ukazuje na to da ako količinu natočenog goriva smatramo kao promenljivu onda dobijamo nebrojivo mnogo optimalnih rešenja.

U drugom slučaju možemo videti da jedan punkt nije dovoljan jer on, s jedne strane ne može da bude više od 500 km udaljeni od početne tačke, a sa druge strane ne može biti udaljeniji više od 1000 km od suprotne strane pustinje. Ovako su nam potrebna bar dva punkta. Ako npr. prvi punkt postavimo na 300 km, a drugi na još 300 km od prvog onda možemo da postignemo da kod prvog punkta imamo 200 litara goriva ako pet puta odemo od starta do prvog punkta.

U isto vreme možemo odneti od ovoga punkta 80 litara goriva do drugog punkta (pre nego što se poslednji put vratimo do starta dva puta prelazimo put između dva punkta). Na ovaj način, ako natočimo 80 litara goriva na startu onda će kod drugog punkta u rezervoaru biti 20 litara i uz 80 litara goriva sa punkta imaćemo sasvim dovoljno da pređemo put.



Slika 10. ([7]) : Preko pustinje

Ovo naravno nije sasvim sigurno da bi bilo optimalno rešenje jer bismo potrošili 580 litara goriva. Jasno je da postavljanjem dva punkta drugi mora biti na 600 km od starta. Ako je prvi punkt na $100d_1$ udaljenosti od starta onda udaljenost između dva punkta moramo preći najmanje tri puta, a udaljenost između starta i prvog punkta najmanje pet puta. Ako ove udaljenosti pređemo više puta, povećava se i potrošnja i možemo da proverimo da li postoji mogućnost prelaska gde bismo prvi odeljak prešli pet puta, a drugi tri puta.

U ovom slučaju bismo potrošili najviše 300 litara goriva (jer tri puta krećemo od starta) i ceo put bismo prešli jedanput, prvih 600 km dva puta i prvih $100d_1$ dva puta. Ali ovako se ostvaruje nejednačina $280 + 20d_1 \leq 300$. Sa druge strane do prvog punkta stiže samo

$$2(100 - 20d_1) + 100 - 10d_1$$

goriva i to ne može biti ni manje od 100 niti više od 200.

Na osnovu toga nastaje nejednačina $2 \leq d_1 \leq 4$. Pošto se ona suprotstavlja nejednačini $d_1 \leq 1$ prelazak nije moguć pod ovim uslovima. Ako se prvi deo pređe sedam puta, drugi tri puta i treći jedanput onda do prvog punkta stiže najviše

$$3(100 - 20d_1) + 100 - 10d_1 \text{ litara goriva.}$$

To ćemo iskoristiti da bismo dva puta krenuli dalje, dakle

$$100 \leq 3(100 - 20d_1) + 100 - 10d_1 \leq 200.$$

Na osnovu ovoga je

$$\frac{20}{7} \leq d_1 \leq \frac{30}{7}.$$

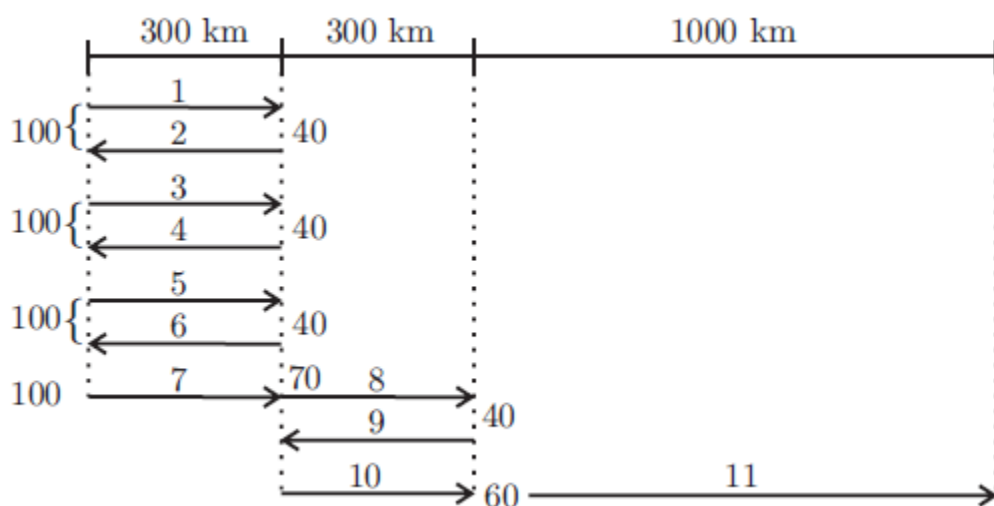
Sa druge strane., do drugog punkta možemo odneti $400 - 70d_1 - 30d_2$ litara goriva i da bismo mogli da krenemo odavde dalje ne bismo smeli da imamo manje od 100 litara. Na ovaj način dolazimo do sistema

$$7d_1 + 3d_2 = 30$$

$$d_1 + d_2 = 6$$

čije je rešenje $d_1 = d_2 = 3$.

Ono ispunjava uslov $\frac{20}{7} \leq d_1 \leq \frac{30}{7}$.



Slika 11. ([7]): Preko pustinje

Dakle, ovo izvođenje je moguće. Plan ovog sprovođenja prikazuje slika 17, sa tačno 400 litara goriva. Prethodno razmišljanje nam ukazu je na to da uz dva punkta sa manje goriva ne možemo preći preko pustinje. Ispitajmo slučaj i kada imamo tri punkta. U ovom slučaju ćemo poslednji stadijum puta preći samo jednom, a pretposlednji najmanje tri puta (jer moramo da postavimo poslednji punkt).

Drugi deo moramo preći bar pet puta (jer da bismo dva puta nastavili put moramo imati više od 100 litara goriva u drugom punktu) i prvi deo puta moramo preći bar sedam puta (jer na drugi punkt moramo odneti više od 200 litara goriva). Ako prvi deo puta pređemo više od sedam puta onda će celokupna potrošnja iznositi više od 400 litara, dakle druge mogućnosti i ne moramo da ispitujemo. U ovom slučaju četiri puta krećemo sa starta i tako je količina goriva koja je odatle poneta $300 + v$, gde je $0 < v \leq 100$.

Na prvi punkt stiže $300+v-70d_1$ litara goriva, na drugi $300+v-70d_1-50d_2$ litara, a na treći $300+v-70d_1-50d_2-30d_3$ litara. Na osnovu ovoga celokupna potrošnja $(300 + v)$ se može predstaviti na sledeći način: $70d_1 + 50d_2 + 30d_3 + 100$, tj. tražimo minimum.

U isto vreme moraju da se ispunjavaju i sledeće nejednačine (oni predstavljaju mogućnost da se od punktova može krenuti onoliko puta koliko želimo):

$$v \leq 70d_1 \leq 100 + v$$

$$100 + v \leq 70d_1 + 50d_2 \leq 200 + v$$

Pod ovim uslovima je potrošnja najmanja ako su

$$d_1 = \frac{v}{70},$$

$$d_2 = \frac{100}{50} = 2 \text{ i}$$

$$d_3 = \frac{100}{30} = 10/3.$$

Da bismo prešli ove udaljenosti moramo imati $300 + \frac{140}{3}$ litara goriva, dakle ovo predstavlja minimum koji je porteban da bi se put prešao.

Rešenje 2. zadatka:

Da bismo prešli udaljenost D , moramo imati dovoljno goriva na jednoj tački koja odgovara udaljenosti $D - 1000$. U tački $D - 1000 - \frac{1000}{3}$ moramo imati barem 200 litara goriva čak i onda ako naš punkt nije na ovoj tački jer pretposlednji deo puta moramo preći bar tri puta a preko prvog dela čak i više puta.

Na isti način u tački $D - 1000 - \frac{1000}{3} - \frac{1000}{5}$ moramo imati 300 litara, a na tački

$$D - 1000 \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1}$$

bar $100(n+1)$ litara goriva. Pošto opšti član niza

$$x_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1}$$

nije ograničen, može se preći i preko pustinje željene širine.

Istovremeno, ako je širina pustinje tačno $D = 1000 \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1}$ onda su udaljenosti između punktova (i među njih ubrajamo i početnu tačku i cilj) redom

$$\frac{1000}{2n+1}, \frac{1000}{2n-1}, \dots, \frac{1000}{5}, \frac{1000}{3}, 1000.$$

Ako je $D_n < D < D_{n+1}$ onda je dužina prvog dela puta $D - D_n$ i moramo je preći $(2n+3)$ puta i shodno tome najmanja potrebna količina goriva je $100(n+1) + (2n+3) \cdot (D - D_n)$.

3. Primena matematičkog modeliranja za infektivne bolesti

3.1. Uvod

Prvi matematičar koji se bavio zaraznim bolestima je bio **Danijel Bernuli**¹ koji je zahvaljujući svojoj studiji napisanoj 1766. godine važio za naučnika koji je bio korak ispred svog vremena. Bernouli je otkrio povezanost između vakcine protiv kravljih boginja i malih boginja. Njegov članak sadrži šokantne podatke o tadašnjoj smrtnoj stopi dece. U svom radu je ukazao na značaj vakcina oslanjajući se na matematičke modele. **Ronald Ros**², dobitnik Nobelove nagrade za svoju posvećenost u borbi protiv malarije na početku 20. veka, je isticao značaj primene matematičkih metoda, dok su njegove kolege **Kermak** i **Mekendrik** 1927. godine osmislili čuveni model SIR.

Modeliranje epidemioloških infektivnih bolesti je težak zadatak jer je nužno da se bolest prethodno temeljno prouči kako bi se određeni parametri (kao na primer verovatnoća oboljevanja zdrave osobe nakon stupanja u fizički kontakt sa obolelim) mogli proceniti. Jedan od instrumenata za određivanje ovih parametara je pregled obolelih – što u medicinskom smislu, što na osnovu njihovih socijalnih običaja (npr. da li se često nalaze u društvu nepoznatih ljudi ili se kreću isključivo u zatvorenijim krugovima itd.)

Za ovo je sve potrebno prikupiti što više saznanja o samoj bolesti tj. potrebno je “imati na raspolaganju” dovoljno pacijenata kako bi se došlo do što preciznijeg matematičkog opisa infekcije. Ukoliko ne raspolažemo sa dovoljno podataka, konstruišu se modeli koji zbog eventualno izostavljenih činjenica ne odgovaraju realnosti.

¹Švajcarski matematičar i fizičar po kom je Bernulijeva teorema dobila naziv.

² Roland Ros (Ronald Ross) je bio engleski lekar, entimolog, zaslužan za utvrđivanje veze između komaraca i malarije.

Ovaj deo rada se bavi opisom širenja pandemije u vremenu, kao i njenom analizom koristeći teoriju običnih diferencijalnih jednačina i druge analitičke termine i metode. U prva dva poglavlja su predstavljene dve opšte šeme modela kao i nekoliko konkretnih primera, dok se poglavlja koja ih prate bave daljom nadogradnjom ovih modela. Za izradu ovog poglavlja korišćena je literatura [14, 15, 16].

3.2. Modeli zaraznih bolesti i proces prenošenja

Osnovna reproduktivna stopa (R_0) je ključni epidemološki termin i ujedno neosporivo prvo i najdragocenije saznanje sa kojim je matematika doprinela teoriji analize epidemija.³

U opštoj definiciji stoji da R_0 određuje očekivani broj sekundarnih slučajeva koje zaražena jedinka tokom svog životnog ciklusa može da prouzrokuje. Izraz „sekundaran“ zavisi od konteksta, naime u epidemologiji se R_0 smatra brojem koji određuje koliko jedinki zaraženi organizam može da inficira tokom infektivnog ciklusa. Iz definicije sledi da ako je $R_0 < 1$, onda zaražena jedinka u proseku proizvodi manje od jedne novozaražene jedinice, što znači da će bolest (gledajući na duge staze) iz populacije.

Ukoliko je $R_0 > 1$, onda postoji opasnost da bolest izazove epidemiju među zdravom populacijom. $R_0 = 1$ je, znači, kritična vrednost koja se u matematici naziva bifurkacionom tačkom. Ovaj prag je najbitniji i najkorisniji element vezan za pojam R_0 ([14]).

Pretpostavimo da je $R_0 = c\beta$, da zaražena jedinka u kontakt stupa sa c (broj, komada) drugih jedinki i da je u slučaju svakog ovakvog stupanja u kontakt β verovatnoća infekcije. Naravno, ukoliko je p deo populacije imun, onda se od c kontakata u cp slučaju zarazna jedinka sreće sa imunom jedinkom, stoga je broj potencijalnih slučajeva infekcije $c - cp$. Ovaj broj pomnožen sa β daje „novi“ R_0 . Označimo ovo kao R_p tj.

$$R_p = \beta(c - cp) = R_0 - pR_0 = R_0(1 - p).$$

³ Doktorat holandskog profesora Heesterbeek-a je imao kratak naslov: R_0 (1992)

Na osnovu navedenih podataka, cilj je da se R_p drži na vrednosti nižoj od 1 što je istovremeno ekvivalent

$$1 - \frac{1}{R_0} < p.$$

Ova jednostavna formula određuje koji deo populacije treba da se učini imunim kako bi se izbeglo izbijanje epidemije (ovo nije isto što i nužna razmera vakcinisanih jedinki ukoliko učinkovitost vakcine⁴ nije stopostotna).

Kada je jedna populacija uopšteno zaštićena od određene bolesti (bez obzira što se to ne odnosi na svakog pojedinca u njoj), to nazivamo *imunitetom zajednice*⁵. Sledeća tabela sadrži nekoliko naziva ljudskih bolesti, procenu njihovog reprodukcijskog broja, kao i proporcionalnost neophodnog kritičnog imuniteta ([14]).

⁴Reč vakcina potiče od latinske reči *vacca* (krava). Edvard Džener je uočio da su mlekarice koje su preležale kravljе boginje razvile imunitet i kasnije nisu obolele od velikih boginja. Reč *immunis*, takođe latinskog porekla, je prvobitno značila oslobađanje od dužnosti služenja vojnog roka.

⁵Na engleskom: *herd immunity*

Bolest	Način prenošenja	R_0	$p = 1 - \frac{1}{R_0}$
Male boginje	putem vazduha	12-13	0,93
Veliki kašalj	putem kapljica	13-17	0,93-0,94
Difterija	putem pljuvačke	4-6	0,75-0,83
Varičela	putem kontakta sa obolelom osobom	9-10	0,89-0,9
Dečja paraliza		6	0,83
Rubeola	putem kapljica	6-7	0,83-0,86
Velike boginje	putem kapljica	3-5	0,67-0,8
Zauške	putem kapljica	4-7	0,75-0,86
Šarlahna groznica	putem kapljica	5-7	0,8-0,86
HIV/SIDA	putem telesnih tečnosti tokom seksualnog odnosa	2-5	-

Tabela 4. ([14]): Ljudskih bolesti sa podacima

Ne smemo zaboraviti da se kalkulacija koju ova tabela sadrži zasniva na pretpostavci da je populacija homogena (svi su identični) i da se jedinice mešaju nasumično. U svetu možemo naići na različite oblike heterogenosti. Za uključenje istih u kalkulacije potrebna je primena ozbiljnijih modela.

3.3. Prikaz jednostavnih epidemioloških modela i njihove praktične primene

Kermak i Mekendrik su se u svom radu 1927. osvrnuli na ponašanje infektivnih bolesti u vremenu. Njihova zapažanja su poslužila kao polazne tačke za matematičko modeliranje zaraznih bolesti. U ovom poglavlju će biti predstavljena dva osnovna modela. Za njihove potrebe jedinke naše populacije svrstavamo u sledeće kategorije ([15]):

- kategorija *S* onih jedinki koje su podložne infekciji (na engleskom: *susceptibles*);
- kategorija *E* onih jedinki koje same nisu infektivne (na engleskom: *exposed*);
- kategorija *I* inficiranih jedinki (na engleskom: *infectives*);
- kategorija *R* „odstanjenih“ tj. oporavljenih jedinki koje (više) nisu infektivne i ne mogu biti zaražene (na engleskom: *removed*).

Broj pripadnika pojedinih kategorija (u t vreme) ćemo obeležavati ovim slovima (npr. $S=S(t)$ itd.). Njihov zbir $S+E+I+R$ daje broj čitave populacije. Dva modela koje ćemo u nastavku predstaviti ne sadrže kategoriju *E*. Kategorija *R* obuhvata broj jedinki koje se nalaze u karantinu, imunizovanih jedinki ali u slučaju nekih modela se tu dodaje i broj umrlih. U grupi *I* se mogu naći i inficirane jedinke koje ne pokazuju nikakve simptome.

U tom slučaju je opasnost od infekcije izuzetno velika, stoga im možemo dodeliti novu kategoriju sa obeležjem *C* (na engleskom: *carrier*). U svakom slučaju kada se u okviru već postojeće kategorije određene jedinke po pitanju svoje inficiranosti vidno izdvajaju potrebno je generisati nove kategorije. Takva kategorija su polne prenosive bolesti kada je potrebno razdvojiti grupu muškaraca od grupe žena.

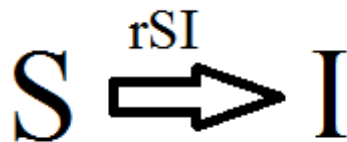
Klasičan model Kermak-Mekendrik (1927) kao i njegove varijacije zanemaruju niz mogućih podataka kao što su starosno doba, stepen infekcije, geografski položaj i slično. Ovi slučajevi međutim iz kruga običnih diferencijalnih jednačina prelaze u krug parcijalnih.

U ovom poglavlju su prikazana dva jednostavna modela Kermaka i Mekendrika. U slučaju prvog se pretpostavlja da bolest napreduje tolikom brzinom (u poređenju sa ljudskim životnim vekom) da stope rađanja i smrtnosti mogu da se zanemare.

Sledi prikaz razvoja infekcije kao i promena vezane za nju nastale u odgovarajućim vremenima $S(t)$ i $I(t)$. Pretpostavimo da se cela naša populacija sastoji od ove dve kategorije i da ne postoji period inkubacije. Iz toga sledi da je $S+I$ konstantan tj. da je $\dot{S} = -\dot{I}$ i da dobijamo sledeću korelaciju u kojoj je f funkcija infekcije :

$$\dot{S} = -f(S, I), \dot{I} = f(S, I).$$

U nastavku pretpostavljamo da je populacija u prostoru raspodeljena ravnomerno. Očigledno je da je $f(S, I)$ proporcionalan sa S i I , što znači da je $f(S, I) = rSI$, gde je $r > 0$ faktor proporcionalnosti. To se semantički može prikazati na sledeći način:



Slika 12.

Sledeći korak predstavlja analiza ponašanje zaraženih pojedinki u daljem period ([15]).

3.4. SIS model

Prvo ćemo predstaviti model SIS u kom se pacijenti oporavljaju bez imunizacije (kao što je slučaj sa tuberkulozom tj. TBC-om). Brzinu oporavka određujemo stopom $a > 0$. Na ovaj način proces infekcije možemo posmatrati kroz sledeću sliku:



Slika 13.

Pošto je i dalje $S+I=N$, stoga možemo da koristimo sledeće jednačine gde su $S_0, I_0 \geq 0$ početni uslov:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -rSI + aI, & \frac{dI}{dt} &= rSI - aI, \\ S(0) &= S_0, & I(0) &= I_0 \end{aligned} \quad (3.1).$$

U ovom slučaju kao i u kasnijim slučajevima pretpostavljamo da je veličina populacije u vremenu $t=0$ pozitivna (označimo ovo kao N) što je iz $S+I=N$ jednako sa $S(t)+I(t)$ (za sve $t \geq 0$). Naravno, ove jednačine se mogu tumačiti kao takve jedino kada su nenegativne tj. kada su i $S(t)$ i $I(t)$ manji od N .

Parametar a ima i detaljno značenje u slučaju da proces oporavka posmatramo posebno. Iz jednačine $I' = -aI$ se jasno vidi da je rešenje $I(t) = \text{const} e^{-at}$. (Možemo da pretpostavimo da je $I \neq 0$ jer se u populaciji trenutno ne postoje druge jedinice, a N smo već definisali kao pozitivnog.) Neka naša polazna pretpostavka bude da je $I(0)=I_0$, dakle da je iz $I(0) = \text{const} = I_0$

$$I(t) = I_0 e^{-at}.$$

Pošto je $I(t) = -aI(t)$, a f je u svojoj drugoj promenljivoj iz $x(t) = f(t, x(t))$ globalno Lipšicova konstanta ($|f(t, p_1) - f(t, p_2)| = |-ap_1 + ap_2| = a|p_1 - p_2|$), početna vrednost je na osnovu teoreme o globalnom rešavanju zadataka očigledna. Tada je $e^{-at} = I(t)/I_0$ relativna učestalost infektivnih jedinki u $t \geq 0$ vremenu u poređenju sa onim iz I_0 . Iz ovoga sledi da je vreme trajanja bolesti eksponencijalno raspodeljeno sa parametrom a , stoga je očekivano trajanje infekcije (iz formule očekivanog rezultata)

$$\frac{1}{a} = \int_0^{\infty} t a e^{-at} dt.$$

Reproduktivna stopa R_0 se u ovom modelu može definisati kao:

$$R_0 = \frac{rN}{a}, \quad (3.2)$$

gde je rN stopa infekcije, stoga R_0 izražava broj sekundarnih infekcija do kojih dolazi u jednom infektivnom intervalu (koji traje $1/a$ vremena).

Ako normalizujemo funkcije S i I – zarad relativne učestalosti upotrebe obeležja – i pogledajmo ih u $T=at$ vremenu. Neka bude

$$u(at) = \frac{S(t)}{N}, \quad v(at) = \frac{I(t)}{N}, \quad u_0 = \frac{S_0}{N}, \quad v_0 = \frac{I_0}{N}. \quad (3.3)$$

Tada su

$$\dot{u}(at) = a \frac{\dot{S}(t)}{N} \quad i \quad \dot{v}(at) = a \frac{\dot{I}(t)}{N},$$

dok je

$$\frac{\dot{S}}{N} = -\frac{rSI}{N} + \frac{aI}{N} = -rNu(at)v(at) + av(at) = -v(at)(rNu(at) - a).$$

Koristeći oznake (3.2), sistem (3.1) se može predstaviti na sledeći način:

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\tau} &= -(R_0 u - 1)v, & \frac{dv}{d\tau} &= (R_0 u - 1)v, \\ u(0) &= u_0, & v(0) &= v_0.\end{aligned}\quad (3.4)$$

Jasno je da je : $u_0 + v_0 = 1$

I da važi $\dot{u} + \dot{v} = 0$

I da iz prethodnog sledi: $u(\tau) + v(\tau) = u_0 + v_0 = 1$ za svaki $\tau \geq 0$.

Ako u jednačinu sistema (3.4) zamenimo $u=1-v$, onda

$$\frac{dv}{d\tau} = [(R_0 - 1) - R_0 v]v. \quad (3.5)$$

U slučaju da je $R_0 > 1$, možemo dati eksplicitno rešenje za ovu diferencijalnu jednačinu. (Radi jednostavnijeg rada, za τ takođe koristimo oznaku t . Ovo je diferencijalna jednačina koja ređva ja promenljive, a njen osnovni oblik je: $v(t)=h(v(t))$. U ovom slučaju je

$$h(p) = [(R_0 - 1) - R_0 p]p = R_0 p \left(\frac{R_0 - 1}{R_0} - p \right).$$

Koreni $h(v(t))$ su $v(t)=0$ (što u slučaju našeg modela i nije zanimljivo) i

$$v(t) = \frac{R_0 - 1}{R_0}.$$

Ova konstantna rešenja takođe dopunjuju navedenu diferencijalnu jednačinu ako je $v_0=0$ ili ako je

$$v(t) = \frac{R_0 - 1}{R_0}.$$

Pretpostavimo da $h(p)$ nema koren. Neka $G(t)$ bude 1, $H(p)$, jedna od primitivnih funkcija $\frac{1}{h(p)}$, tj.

$$G(t) = \int 1 dt = t,$$

$$H(p) = \int \frac{1}{h(p)} dp = \int \frac{1}{R_0 p (\frac{R_0 - 1}{R_0} - p)} dp.$$

$H(p)$ možemo izračunati razlaganjem na parcijalne razlomke:

$$\frac{1}{R_0 p (\frac{R_0 - 1}{R_0} - p)} = \frac{A}{R_0 p} + \frac{B}{\frac{R_0 - 1}{R_0} - p}$$

$$1 = A \frac{R_0 - 1}{R_0} - Ap + BR_0 p$$

$$BR_0 - A = 0, \quad A \frac{R_0 - 1}{R_0} = 1$$

$$A = \frac{R_0}{R_0 - 1}, \quad B = A \frac{1}{R_0 - 1}.$$

Odnosno:

$$H(p) = \int \frac{R_0}{(R_0 - 1)R_0 p} dp + \int \frac{1}{(R_0 - 1) \left(\frac{R_0 - 1}{R_0} - p \right)} dp =$$

$$\frac{1}{R_0 - 1} \left(\ln|p| - \ln \left| \frac{R_0 - 1}{R_0} - p \right| \right).$$

Tada je

$$(H \circ v)(t) = \frac{1}{h(v(t))} \dot{v}(t) = 1,$$

i integrisanjem dobijamo jednačinu $H(v(t)) = G(t) + \text{const}$. Stoga je

$$\frac{1}{R_0 - 1} \left(\ln(v(t)) - \ln \left| \frac{R_0 - 1}{R_0} - v(t) \right| \right) = t + \text{const}$$

$$\ln \left(\frac{v(t)}{\left| \frac{R_0 - 1}{R_0} - v(t) \right|} \right) = (R_0 - 1)(t + \text{const})$$

$$\frac{v(t)}{\left| \frac{R_0 - 1}{R_0} - v(t) \right|} = e^{(R_0 - 1)(t + \text{const})}.$$

Ako je

$$v(t) < \frac{R_0 - 1}{R_0},$$

onda je

$$v(t) = e^{(R_0 - 1)(t + \text{const})} \frac{R_0 - 1}{R_0} - e^{(R_0 - 1)(t + \text{const})} v(t),$$

tj.

$$v(t) = \frac{e^{(R_0-1)(t+const)} R_0 - 1}{R_0 [1 + e^{(R_0-1)(t+const)}]}.$$

Izračunajmo vrednost $const$ -e iz početne pretpostavke!

$$(R_0 + R_0 e^{(R_0-1)const}) v_0 = e^{(R_0-1)const} ((R_0 - 1))$$

$$e^{(R_0-1)const} = \frac{R_0 v_0}{R_0 (v_0 + 1) + 1}$$

$$const = \frac{1}{R_0 - 1} \ln \left(-\frac{R_0 v_0}{R_0 (v_0 + 1) + 1} \right).$$

Uvrsteći ovo u formulu $v(t)$ dobijamo da je

$$v(t) = \frac{e^{(R_0-1)t} (R_0 - 1) \left(-\frac{R_0 v_0}{R_0 (v_0 - 1) + 1} \right)}{R_0 [1 + e^{(R_0-1)t} \left(-\frac{R_0 v_0}{R_0 (v_0 - 1) + 1} \right)]}$$

$$v(t) = \frac{R_0 - 1}{R_0 [e^{-(R_0-1)t} \left(-\frac{R_0 (v_0 - 1) + 1}{R_0 v_0} \right) + 1]}$$

$$v(t) = \frac{v_0 (R_0 - 1) / R_0}{e^{-(R_0-1)t} \left(-\frac{R_0 (v_0 - 1) + 1}{R_0} \right) + v_0}.$$

Za v smo dobili sledeće:

$$v(t) = \frac{v_0 v^*}{e^{-(R_0-1)t} (v^* - v_0) + v_0}, \quad v^* = 1 - \frac{1}{R_0}. \quad (3.6)$$

Sličnim načinom rešavanja ako je

$$v(t) > \frac{R_0 - 1}{R_0},$$

onda je

$$v(t) = \frac{v_0 v^*}{v_0 - e^{-(R_0-1)t}(v^* - v_0)}, \quad v^* = 1 - \frac{1}{R_0}. \quad (3.7)$$

Ovde se ostvaruje samo Lipšicova konstanta, međutim i ovo je dovoljno za globalnu jasnoću. Pogledajmo zašto je tačno da je kompaktni skup

$$f(t, p) = [(R_0 - 1) - R_0 p]p$$

u p Lipšic. Pretpostavimo da je

$$[a, b] \subset [-K, K]$$

i tako je

$$|p_1 + p_2| \leq 2K, \text{ za svaki } p_1, p_2 \in [a, b].$$

Tada je

$$\begin{aligned} |f(t, p_1) - f(t, p_2)| &= |[(R_0 - 1) - R_0 p_1]p_1 - [(R_0 - 1) - R_0 p_2]p_2| \\ &= |(R_0 - 1)(p_1 - p_2) - R_0(p_1^2 - p_2^2)| \\ &\leq |p_1 - p_2|[(R_0 - 1) + R_0|p_1 + p_2|] \\ &\leq |p_1 - p_2|[(R_0 - 1) + R_0 2K]. \end{aligned}$$

Vidimo da ako je $t \rightarrow \infty$ onda se v na osnovu formula (3.6) i (3.7) kreće ka $v_0 v^* / v_0 = v^*$ (ako je $v_0 > 0$). Pošto je

$$(u, v) = (1 - v, v),$$

stacionarno rešenje (koje odgovara ravnotežnim tačkama):

$$(u^*, v^*) = \left(\frac{1}{R_0}, 1 - \frac{1}{R_0} \right).$$

Moramo naglasiti da je ovo takođe u saglasnosti sa konstantnim rešenjem. Pošto je stopa zaraznih pojedinaca (v) strogo pozitivna, u slučaju $R_0 > 1$ se (u^*, v^*) naziva epidemiološkom ravnotežnom tačkom (ako je $v=0$, onda nema smisla govoriti o epidemiji).

Takođe je bitno naglasiti da u slučaju $R_0 \leq 1$ takođe postoji eksplicitno rešenje za jednačinu (3.5). U slučaju $R_0 < 1$ je rešenje isto kao i u slučaju $R_0 > 1$. Ako je $R_0 = 1$, onda putem prethodno opisane metode dolazimo do

$$v(t) = \frac{v_0}{v_0 t + 1}.$$

Tu vidimo da je u slučaju $R_0 \leq 1$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0$$

stoga su ravnotežne tačke epidemiološke neutralnosti

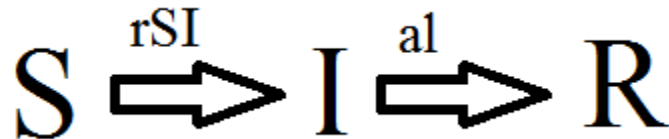
$$(\tilde{u}, \tilde{v}) = (1, 0).$$

Na ovaj način smo dokazali raniju pretpostavku po kojoj do izbijanja epidemije može doći isključivo ako zaražena jedinka inficira više od jedne druge jedinice, tj. ako je $R_0 > 1$. Stopa reprodukcije ovo svoju karakteristiku ne gubi ni kod upotrebe kompleksnijih modela ([16]).

3.5. SIR model

Osnovni model koji se bavi vremenom širenja epidemije je klasični Kermakov i Mekendrikov model poznatiji kao model SIR. Pretpostavljamo da bolest razvija imunitet u jedinki, a ove imunizirane jedinke (“odstranjene” ili oporavljene) svrstavamo u kategoriju koju označavamo sa R .

Ovoj kategoriji još pripadaju one jedinke za koje znamo da su inficirani i koje se smestaju u karantin, kao i umrli. Sledeće dve kategorije su: osetljivi koji se standardno označavaju sa S i grupa inficiranih (I). Razvoj bolesti možemo ilustrovati na sledeći način:



Slika 14.

Slično prethodnom slučaju, promena broja inficiranih $I(t)$ je proporcionalna sa brojem osetljivih $S(t)$ i sa brojem inficiranih $I(t)$ (sa $r>0$ činiocem proporcionalnosti). Naravno broj osetljivih $S(t)$ može da opada istom stopom, međutim u ovom slučaju raniji pacijenti ne mogu biti vraćeni u ovu grupu, već uvećavaju broj oporavljenih $R(t)$ stopom aI ($a>0$ je konstantna). Pretpostavimo da je vreme inkubacije zanemarljiva, i da zdrava jedinka koja biva inficirana odmah prelazi u kategoriju inficiranih.

Kao i ranije, i ovde pretpostavljamo da se pripadnici različitih kategorija mešaju ravnomerno, odnosno da je bilo koji spoj (kontakt) jedinki moguć u istoj meri. Model u tom slučaju opisuje sledeći sistem:

$$\frac{dS}{dt} = -rSI, \quad (3.8)$$

$$\frac{dI}{dt} = rSI - aI, \quad (3.9)$$

$$\frac{dR}{dt} = aI, \quad (3.10)$$

Ovde je $r > 0$ stopa infektivnosti, a $a > 0$ stopa odstanjivanja inficiranih. Naravno, bavimo se isključivo nenegativnim rešenjima S , I i R . Bez obzira što se radi o izuzetno jednostavnom modelu, pomoću njega smo došli do nekoliko bitnih informacija koje se odnose na epidemije.

Sistem uključuje konstantnost broja populacije jer sabiranjem jednačina (3.8) – (3.10):

$$\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = 0 \Rightarrow S(t) + I(t) + R(t) = N, \quad (3.11)$$

gde N označava veličinu populacije. Sistem diferencijalnih jednačina (3.8) - (3.10) možemo odrediti pomoću sledećih uslova:

$$S(0) = S_0 > 0, \quad I(0) = I_0 > 0, \quad R(0) = 0. \quad (3.12)$$

U slučaju infekcije (sa datim r , a , S_0 i I_0) ključno pitanje je da li se bolest širi; ukoliko da, kako se kreće razvoj epidemije u vremenu i, naravno, kada počinje da se povlači. Iz jednačine (3.9)

$$\begin{aligned} \left. \frac{dI}{dt} \right|_{t=0} &= I_0(rS_0 - a) > 0 \text{ ako } S_0 > \frac{a}{r} = \rho, \\ \left. \frac{dI}{dt} \right|_{t=0} &= I_0(rS_0 - a) < 0 \text{ ako } S_0 < \frac{a}{r} = \rho, \end{aligned} \quad (3.13)$$

Pošto je

$$\dot{S} \leq 0, \text{ a } S \leq S_0, \text{ za sve } t \geq 0.$$

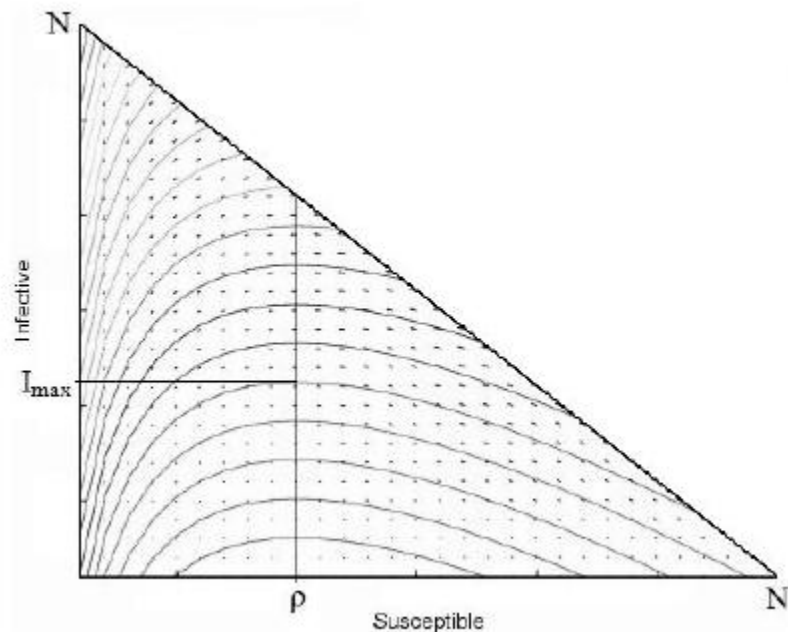
Znači pošto je $I \geq 0$, dobijamo da je u slučaju $S_0 < a/r$

$$\frac{dI}{dt} = I(rS - a) \leq 0, \text{ za svaki } t \geq 0. \quad (3.14)$$

U tom slučaju

$$I_0 > I(t) \rightarrow 0 \text{ ako je } t \rightarrow \infty,$$

tj. infekcija nestaje. S druge strane, ako je $S_0 > a/r$, onda $I(t)$ u početku (dok S ne pređe granicu a/r) raste i izbija epidemija. Epidemiju ovde podrazumevamo da je $I(t) > I_0$ tokom $t \geq 0$ vremena (Slika 19.).



Slika 15.

Slika 15. predstavlja faznu sliku osetljivih (S) i infektivnih (I) jedinki na osnovu sistema (3.8) - (3.10). Sa uslovom $R(0) = 0$ krive polaze od prave jednačine $S+I=N$ i do samog kraja ostaju u trouglu $0 < S + I \leq N$. (Pogledajmo situaciju pri pragu: ako je $S_0 > p$ onda dolazi do epidemije, dok u slučaju $S_0 < p$ nema epidemije.) Kritični parameter $p = a/r$ često nazivaju stopom relativnog oporavka (odstranjivanja)⁶, dok recipročnu vrednost ($\sigma = r/a$) nazivaju stopom kontakta⁷ infekcije.

⁶ na engleskom: relative removal rate

⁷ na engleskom: contact rate

U ovom modelu je, dakle, osnovna reproduktivna stopa:

$$R_0 = \frac{rS_0}{a}.$$

Slično SIS modelu, $1/a$ i ovde znači očekivano vremensko trajanje infekcije. Prethodni rezultat, koji dobijamo primenom R_0 , očekivano pokazuje da epidemija izbija u slučaju $R_0 > 1$.

Iz ovog modela možemo dobiti još korisnih analitičkih rezultata. Iz jednačina (3.8) – (3.9) (u slučaju $I \neq 0$):

$$\frac{dI}{dS} = -\frac{(rS - a)I}{rSI} = -1 + \frac{\rho}{S}, \quad \rho = \frac{a}{r}.$$

Singularnosti se nalaze na osi $I=0$. Integrisanjem obe strane zadnje jednačine (po S -u i koristeći početni uslov (3.12)) dobijamo da je

$$I + S - \rho \ln S = \text{const} = I_0 + S_0 - \rho \ln S_0. \quad (3.15)$$

Na početku, u trenutku izbijanje epidemije, želimo da znamo koliko će ozbiljna ona biti. Na osnovu (3.14) I svoj maksimum (I_{max}) uzima na tački $S = a/r = \rho$ (izvod je ovde nula). Iz jednačine (3.15) pored $S = \rho$

$$\begin{aligned} I_{max} &= \rho \ln \rho - \rho + I_0 + S_0 - \rho \ln S_0 \\ &= I_0 + S_0 - \rho + \rho \ln \left(\frac{\rho}{S_0} \right) \\ &= N - \rho + \rho \ln \left(\frac{\rho}{S_0} \right). \end{aligned}$$

Znamo, da ako je $S_0 > p$, I monotono raste počevši od I_0 , te dolazi do epidemije. Ako se I_0 nalazi blizu I_{max} , epidemija ne mora biti ozbiljna. Očigledno se vidi na slici 21. da ako je $S_0 < p$, onda I već od I_0 počinje da se smanjuje, što implicira da se zaraza neće širiti.

Pošto je mesto singularnih tačaka osa $I = 0$, I se na svakoj trajektoriji kreće ka 0 u slučaju $t \rightarrow \infty$. S se smanjuje na osnovu (3.8) jer je $\dot{S} < 0$, I pored $S \neq 0$. Iz jednačina (3.8) i (3.10) (sa oznakom $p = a/r$)

$$\frac{dS}{dR} = -\frac{S}{\rho}.$$

Na osnovu metode prikazane u SIS modelu (jedino) rešenje je:

$$S = S_0 e^{-\frac{R}{\rho}} \geq S_0 e^{-\frac{N}{\rho}} > 0, \quad (3.16)$$

znači

$$0 < \lim_{t \rightarrow \infty} S(t) \leq N.$$

Na osnovu *Slike 19.* se može videti da je

$$0 < \lim_{t \rightarrow \infty} S(t) \leq p.$$

Pošto je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = N - \lim_{t \rightarrow \infty} S(t).$$

Na osnovu toga iz rešenja (3.26)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = S_0 \exp\left(-\frac{\lim_{t \rightarrow \infty} R(t)}{\rho}\right) = S_0 \exp\left(-\frac{N - \lim_{t \rightarrow \infty} S(t)}{\rho}\right).$$

To znači da je $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t)$, pozitivni $0 < z < p$ koren sledeće jednačine:

$$S_0 e^{\frac{N-z}{p}} = z. \quad (3.17)$$

Tada je broj onih koji su tokom ukupnog trajanja epidemije bili zaraženi (označimo ovaj broj kao I_{total}) moguće izračunati pomoću sledeće formule:

$$I_{total} = I_0 + S_0 - \lim_{t \rightarrow \infty} S(t). \quad (3.18)$$

Ovde $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t)$, dobijamo iz jednačine (3.17). Jedna od najbitnijih posledica pojave opisane u ovom delu (naime $I(t) \rightarrow 0$ i $S(t) \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} S(t) > 0$), jeste da bolest ne nestaje iz populacije i da ne nestaju zdrave jedinke, već da se broj infektivnih jedinki približava nuli.

Kao što smo mogli da vidimo, širenje zaraze zavisi od veze između S_0 i p . U slučaju date bolesti relativna stopa odstranjivanja (p) zavisi od zajednice i određuje u kojoj će se populaciji razviti epidemija, a u kojoj ne. (Naravno, i S_0 ima svoju ulogu.) Na primer, ako je proporcija zdravih jedinki velika ali je stopa oporavka niska (recimo zbog nedostatka medicinske nege, zbog nepravilne izolacije infektivnih pojedinaca itd.), ondaće najverovatnije doći do izbijanja epidemije.

U praksi je najčešće teško odrediti do koliko novih infekcija dolazi sakog dana jer možemo da uzmemo u obzir jedino broj onih koji zatraže pomoć lekara ili na neki drugi način “saopštavaju” da su zaraženi. Medicinski zapisi broj zaraženih beleže kao zbir (recimo za određeni dan), stoga kako bismo mogli da primenimo predstavljeni model moramo da znamo i broj oporavljenih (za određeni vremenski period) tj. $R(t)$.

Na osnovu slika (3.10), (3.11) i (3.16) dobijamo jednačinu

$$\frac{dR}{dt} = aI = a(N - R - S) = a\left(N - R - S_0 e^{-\frac{R}{\rho}}\right), \quad R(0) = 0 \quad (3.19)$$

koju bez poznavanja parametara (a , r , S_0 i N) možemo da rešavamo isključivo analitički – što nije najlagodnije -, međutim u suprotnom je ovu diferencijalnu jednačinu moguće izračunati i numerički. Uglavnom nam nisu poznate vrednosti svih parametara i zbog toga moramo da koristimo najbolje moguće aproksimacije. U praksi, ukoliko epidemija nije raširila, količnik R/p mali (konkretno $R/p < 1$). Posle Kermaka i Mekendrika (1927) $e^{-R/p}$ aproksimirajmo kvadratno sa

$1 - \frac{R}{\rho} + \frac{(\frac{R}{\rho})^2}{2}$ i tako dolazimo do sledeće jednačine:

$$\frac{dR}{dt} = a\left[N - S_0 + \left(\frac{S_0}{\rho} - 1\right)R - \frac{S_0 R^2}{2\rho^2}\right]. \quad (3.20)$$

Ovo je diferencijalna jednačina koja razdvaja promenljive što znači da je rešavamo na sličan način kao i ranije u SIS modelu. Opšti oblik jednačine je:

$$\dot{x}(t) = h(x(t)), \quad gde$$

$$h(x(t)) = aN - aS_0 + a\left(\frac{S_0}{\rho} - 1\right)x(t) - \frac{aS_0}{2\rho^2}x(t)^2.$$

Zarad jednostavnosti neka je

$$h(y) = Ay^2 + By + C$$

gde su

$$A = -\frac{aS_0}{2p^2},$$

$$B = a\left(\frac{S_0}{\rho} - 1\right),$$

$$C = aN - aS_0.$$

Možemo da pretpostavimo da h nema koren, jer samo rešenje koje je podjednako nula (konstantno) zadovoljava početni uslov, koji se ostvaruje u slučaju $S_0 = N$, međutim onda ne možemo govoriti o epidemiji.

Stvaranjem jednačine

$$\frac{\dot{x}(t)}{h(x(t))} = 1,$$

i pošto integrisanjem obe njene strane dobijamo $x(t)$, neka $G(t)$ bude 1, $H(p)$ jedna od primitivnih funkcija $\frac{1}{h(p)}$ tj.

$$G(t) = \int 1 dt = t,$$

$$H(p) = \int \frac{1}{h(p)} dp = \int \frac{1}{Ax^2 + Bx + C} dp.$$

Imenilac integrala je:

$$\begin{aligned} Ax^2 + Bx + C &= A \left[x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{1}{4} \left(\frac{B}{A} \right)^2 \right] - \frac{A}{4} \left(\frac{B}{A} \right)^2 + C = A \left(x + \frac{B}{2A} \right)^2 + C - \frac{B^2}{4A} \\ &= \left(C - \frac{B^2}{4A} \right) \left[-\frac{A}{\frac{B^2}{4A} - C} \left(x + \frac{B}{2A} \right)^2 + 1 \right], \end{aligned}$$

znači da je

$$H(p) = \int \frac{1}{Ax^2 + Bx + C} dp = \frac{1}{C - \frac{B^2}{4A}} \int \frac{1}{1 - \frac{A}{\frac{B^2}{4A} - C} \left(p + \frac{B}{2A} \right)^2} dp = \frac{4A}{4AC - B^2} \operatorname{arth}(z),$$

gde je

$$z = \sqrt{\frac{4A^2}{B^2 - 4AC}} \left(p + \frac{B}{2A} \right).$$

Moramo imati na umu da je koren u ovom slučaju sasvim opravdan jer se radi o nenegativnom broju (A^2 i B^2 su nenegativni, a i S_0 su pozitivni), tako da je

$$A = -\frac{aS_0}{2p^2} < 0 \text{ i } N \geq S_0,$$

stoga je

$$C = aN - aS_0 \geq 0.$$

Posle Kermaka i Mekendrika (1927) možemo da pretpostavimo da je

$$\left| \sqrt{\frac{4A^2}{B^2 - 4AC}} \left(p + \frac{B}{2A} \right) \right| < 1,$$

tako i $\operatorname{arth}(z)$ ima smisla. Tada je

$$(H \circ x)(t) = \frac{1}{h(x(t))} \dot{x}(t) = 1,$$

a integrisanjem dobijamo jednačinu

$$H(x(t)) = G(t) + \operatorname{const.}$$

H je injektivan, stoga je

$$x(t) = H^{-1}(G(t) + \operatorname{const}),$$

tj. potrebno je izračunati H^{-1} :

$$H(p) := y = \frac{4A}{4AC - B^2} \operatorname{arth}(z)$$

$$\sqrt{\frac{4A^2}{B^2 - 4AC}} \left(p + \frac{B}{2A} \right) = z = \operatorname{th} \left(\frac{4AC - B^2}{4A} y \right)$$

$$H^{-1}(y) = p = \sqrt{\frac{B^2 - 4AC}{4A^2}} \left(\frac{4AC - B^2}{4A} y \right) - \frac{B}{2A}.$$

Iz toga sledi

$$\begin{aligned}
 x(t) &= H^{-1}(G(t) + \text{const}) \\
 &= \sqrt{\frac{B^2 - 4AC}{4A^2}} \operatorname{th} \left(\frac{4AC - B^2}{4A} (t + \text{const}) \right) - \frac{B}{2A} \\
 &= \frac{1}{2A} \left[\sqrt{B^2 - 4AC} \operatorname{th} \left(\frac{4AC - B^2}{4A} (t + \text{const}) \right) - B \right].
 \end{aligned}$$

Izračunajmo konstantu iz početnog uslova $x(0) = 0$:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2A} \left[\sqrt{B^2 - 4AC} \operatorname{th}(\text{const}) - B \right] &= 0 \\
 \text{const} &= \operatorname{arth} \left(\frac{B}{\sqrt{B^2 - 4AC}} \right).
 \end{aligned}$$

Upisivajući vrednosti brojeva A, B, C dobijamo da je

$$\begin{aligned}
 \varphi := \text{const} &= \operatorname{arth} \left(\frac{a \left(\frac{S_0}{\rho} - 1 \right)}{\sqrt{a^2 \left(\frac{S_0}{\rho} - 1 \right)^2 + 4 \frac{aS_0}{2\rho^2} (aN - aS_0)}} \right) \\
 &= \operatorname{arth} \left(\frac{\frac{S_0}{\rho} - 1}{\sqrt{\left(\frac{S_0}{\rho} - 1 \right)^2 + \frac{2S_0(N - S_0)}{\rho^2}}} \right).
 \end{aligned}$$

Stoga je

$$\begin{aligned}
x(t) &= -\frac{\rho^2}{aS_0} \left[\sqrt{a^2 \left(\frac{S_0}{\rho} - 1 \right)^2} \right. \\
&\quad \left. + 4 \frac{aS_0}{2\rho^2} (aN - aS_0) \operatorname{th} \left(\frac{-4 \frac{aS_0}{2\rho^2} (aN - aS_0) - a^2 \left(\frac{S_0}{\rho} - 1 \right)^2}{-4 \frac{aS_0}{2\rho^2}} t + \varphi \right) \right. \\
&\quad \left. - a \left(\frac{S_0}{\rho} - 1 \right) \right] \\
&= \frac{\rho^2}{S_0} \left[\sqrt{\left(\frac{S_0}{\rho} - 1 \right)^2 + \frac{2S_0(N - S_0)}{\rho^2}} \operatorname{th} \left(-\frac{\rho^2 a}{2S_0} \left(\frac{2S_0(N - S_0)}{\rho^2} + \left(\frac{S_0}{\rho} - 1 \right)^2 \right) t - \varphi \right) + \left(\frac{S_0}{\rho} - 1 \right) \right].
\end{aligned}$$

To znači da smo za R dobili da je

$$\begin{aligned}
R(t) &= \frac{\rho^2}{S_0} \left[\alpha \operatorname{th} \left(-\frac{\rho^2 \alpha^2 a}{2S_0} t - \varphi \right) + \left(\frac{S_0}{\rho} - 1 \right) \right]. \\
\alpha &= \sqrt{\left(\frac{S_0}{\rho} - 1 \right)^2 + \frac{2S_0(N - S_0)}{\rho^2}}, \\
\varphi &= \operatorname{arth} \left(\frac{\frac{S_0}{\rho} - 1}{\alpha} \right). \quad (3.21)
\end{aligned}$$

Kod rešenja koji je sličan SIS modelovom vidimo da se za h ostvaruje lokalna Lipšicova konstanta, znači da početni zadatak ima tačno jedno rešenje.

Od toga je

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{\rho^4 \alpha^3 a}{2S_0^2} \operatorname{sech}^2 \left(-\frac{\rho^2 \alpha^2 a}{2S_0} t - \varphi \right). \quad (3.22)$$

gde je $\operatorname{sech}(z) = 1/\operatorname{ch}(z)$ hiperbolični sekant. Ovaj rezultat može da se primeni ako je $R/p < 1$, a u suprotnom $R(t)$ treba izračunati iz prvobitne (3.19) jednačine.

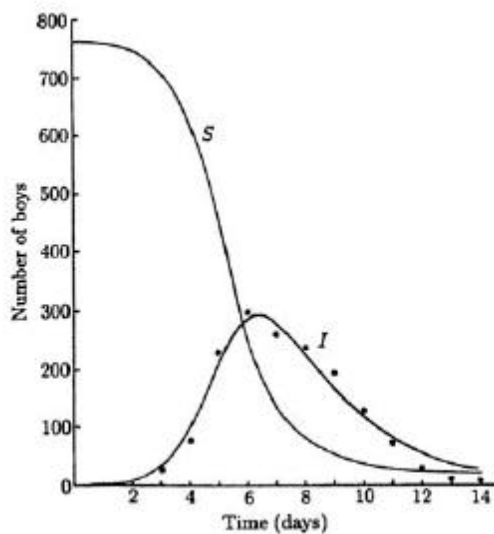
Model koji smo prikazali ćemo sada primeniti na dva primera: na slučaju gripa u jednoj britanskoj školi sa domom za učenike i na slučaju kuge u selu Eyam. (Korišćena literatura za izradu ovog dela rada [16].

3.6. Epidemija gripa u jednoj britanskoj školi

4. marta 1978. je British Medical Journal objavio članak o nesvakidašnjoj pojavi – u jednoj školi sa domom za učenike je 763 učenika zaraženo gripom. Od njih je 512 dece moralo da oстане na kućnom lečenju koje je trajalo od 22. januara do 4. februara. Zarazu je izazvao jedan dečak i on je zarazio sve svoje vršnjake.

Epidemija je bila prilično ozbiljna, stoga moramo da iskoristimo ceo sistem za opis situacije (nije dovoljno posmatrati slučaj iz perspektive Kermakovog i Mekendrikovog modela). Pošto ne možemo da primenimo analitički obrađene funkcije, rešenju moramo pristupiti numeričkom metodom (3.8) – (3.10). Grafikoni funkcija I i S koje smo dobili tokom postupka su prikazani na slici 22 (gde su parametri $N = 763$, $S_0 = 762$, $I_0 = 1$, $p = 202$ i $r = 2,18 \cdot 10^{-3}[1/dan]$). (•) označava stvarne podatke. Vidimo da je $S_0 < p$ i da je epidemija ozbiljna jer je R/p visok.

Raget (1982) je SIR model sa (3.8) - (3.10) primenio na slučaju epidemije kuge koja je pogodila selo Eyam u Engleskoj 1665-66. godine. Čim se bolest pojavila, meštani su postupili na način koji može da se tumači kao žrtva vredna poštovanja: zatvorili su granice sela kako se bolest ne bi raširila i na obližnja sela.



Slika 16.

Ovaj pokušaj je urodio uspehom, međutim selo je pretrpelo ogromnu štetu: od 350 stanovnika je do završetka epidemije preživelo svega 83. U ovom slučaju je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 83,$$

od početnog $S_0 = 350$. Raget je ukazao na način na koji možemo da odredimo parameter na osnovu raspoloživih podataka i etimologije bolesti. On je tvrdio da se u početku zaraza prostirala kao bubonska kuga (ovaj oblik bolesti prenose zaražene buve, stoga bilo koja životinja koju one ujedu može biti smatrana nosiocem), dok je završni udarac stanovništvu Eyam-a nanela plućna kuga (oblik bolesti koji već može da se prenosi sa čoveka na čoveka putem kapljica). Podaci koji su zabeleženi u selu i rešenje SIR modela (sa datim parametrima) pokazuju dobro slaganje, čak bolje od onog što pokazuje stohastički model koji je Raget osmislio ([16]).

3.7. Modeliranje polno prenosivih bolesti

Sve češća pojava polno prenosivih bolesti (sexually transmitted disease – STD) kao što su gonoreja, hlamidija, sifilis i, naravno, SIDA predstavlja najveći zdravstveni problem što u razvijenim državama, što u onim u razvoju. Polne bolesti se uglavnom razlikuju od drugih bolesti po tome što su prvobitno simptomatične za seksualno aktivne zajednice. Razlikuju se i po tome što je nosilac, dok se bolest još nije potpuno razvila, uglavnom asimptomatičan.

Treća bitna razlika u poređenju sa drugim bolestima je da se organizam ne imunizira (ili se manje imunizira) protiv polnih bolesti i zbog toga je nemoguće koristiti preventivnu zaštitu u obliku vakcina. Nedovoljno znanje koje posedujemo o socijalnim navikama koji karakterišu parametre prenošenja virusa takođe predstavlja ozbiljan problem kod ove grupe bolesti.

Iako su gonoreja, sifilis i SIDA poznate bolesti, o jednoj drugoj polno prenosivoj bolesti znamo jako malo – radi se o oboljenju koje prevazilazi čak i gonoreju: *chlamydia trachomatis*. Bolest se javlja kod pripadnika oba pola (ali je učestalija kod ženske populacije, javlja se čak kod 50 – 70% žena), i to u pratnji malobrojnih simptoma ili čak i bez ijednog simptoma. Pošto infekciju u većini slučajeva ne prati i savesna poseta pojedinca lekaru, kod velikog broja obolelih ne dolazi do postavljanja dijagnoze, stoga ni do lečenja.

Najveći rizik i posledica ovakvog ponašanja su dalje komplikacije. Kod žena može da rezultira pelvičnom inflamatornom bolešću (pelvic inflammatory disease – PID) koja izaziva bolove u stomaku, temperaturu i sterilitet. U slučaju trudnoće PID može biti izuzetno opasna jer pored ostalih komplikacija može izazvati prevremeni porođaj, vanmateričnu trudnoću itd. Netretirana gonoreja na primer može da dovede do slepila, PID-a, otkazivanja srca, i na kraju smrti. Još jednu veliku opasnost u slučaju polno prenosivih bolesti predstavlja vertikalno zarazivanje sa majke na novorođenče.

Problematična je i mutacija virusa i bakterija, kao i pojavljivanje novih oblika bolesti kao što je slučaj sa SIDOM i pojavom HIV2 virusa. Novu podvrstu gonoreje (*Neisseria gonorrhoeae*) su otkrili 1970-ih godina i pokazala se kao otporna na penicilin.

U ovom poglavlju rada će biti predstavljen jedan jednostavan, klasičan model za zarazne bolesti koji obuhvata najbitnije elemente koji se odnose na prenošenje polno prenosivih bolesti kod heteroseksualne populacije. Tu pre svega mislimo na bolesti kao što je gonoreja. Hitkot i Jork su 1984. u svom naučnom radu predstavili modele za širenje gonoreje i za njenu kontrolu koji se slažu sa stvarnim podacima u tolikoj meri, da su kao rezultat tako temeljnog rada započeli saradnju sa medicinskim osobljem.

U modelu pretpostavljamo da je populacija koju podvrgavamo analizi ravnomerna i da je karakteriše nasumično ponašanje; zbog što jednostavnog ishoda smo u obzir uzeli isključivo heteroseksualne parove. Populacija se sastoji od dve interaktivne kategorije muškaraca i žena, a infekcija sa jedinke predstavnika jedne kategorije prelazi na predstavnika druge kategorije. Ovo je unakrsni⁸ tip bolesti u okviru kojeg pripadnici iste kategorije ne predstavljaju međusobnu opasnost.

Kao kod svakog modela, i ovoj put pretpostavljamo da unutar određenih grupa u okviru populacije dolazi do homogenog mešanja. Po uzoru na Dica i Hadlera (1988) možemo da pretpostavimo da ponekad dolazi i do heterogenog mešanja, kao što je, na primer, slučaj kada prilikom susreta dve zaražene osobe nastupa „prelazni imunitet”.

Unakrsne infekcije u velikom podsećaju na malariju (koju prenose komarci određene vrste) ili bilhariju. Bilharija je bolest koju prouzrokuje nekoliko vrsta parazita krvnih sudova u tropskim i suptropskim predelima. One u ljudski organizam prodiru kroz kožu, potom se u krvnim sudovima razvijaju u zrele jedinke. Posle malarije je ovo sledeća najučestalija tropska bolest, u približno 70 zemalja (pretežno u Africi) živi 160-170 miliona zaraženih osoba. Najkarakterističniji simptom je da dečaci u pubertetu imaju krvavu mokraću.⁹

⁸na engleskom: criss-cross

⁹Bilhazioza je u drevnom Egiptu bila toliko rasprostranjena, da su verovali da prisustvo krvi u urinu dečaka znači isto što i menstruacija u slučaju devojčica. Dečaci koji nisu bili zaraženi su bili prava retkost i smatrani su izabranima od strane boga, stoga su morali da se zamonaše. Oni su verovatno bili imunizirani i stoga su i duže živeli.

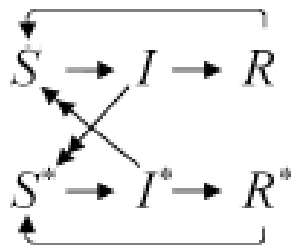
Pošto je inkubacioni period kod polno prenosivih bolesti (vremenski period tokom kojeg inficirana osoba postaje infektivna, npr. u slučaju gonoreje je to period od 3-7 dana) relativno kratak, slobodno možemo da ga zanemarimo. U prvom modelu muškarce delimo na tri grupe: S označava grupu zdravih, i grupu zaraženih, a R sadrži oporavljene (tj. „odstranjene”). Identične grupe kod žena označimo kao S^* , I^* i R^* .

Ako ne uzimamo u obzir da iz grupe „odstranjenih” neko može da se vrati u grupu zdravih, onda se proces infekcije može ilustrovati na sledeći način (dupla strelica ovde simbolizira međusobno dejstvo, a ne prelazak iz jedne grupe u drugu):



Slika 17.

Kao što smo gore napomenuli, oboleli od gonoreje ne mogu razviti imunitet, nakon lečenja pacijent može ponovo postati podložan infekciji. U tom slučaju Slika 18. vernije predstavlja modeliranje procesa bolesti ([16]).



Slika 18.

3.8. Modeliranje nastanka SIDE kao posledica HIV-a

HIV (na engleskom: Human Immunodeficiency Virus, na srpskom: virus humane imunodeficijencije) vodi do razvoja SIDE (na engleskom: AIDS – Acquired Immune Deficiency Syndrome, na francuskom: Syndrome d'immunodéficience acquise, na srpskom: sindrom stečene imunodeficijencije).

Seropozitivna tj. HIV pozitivna je ona osoba u čijoj krvi se može dokazati postojanje antitela koja prouzrokuje virus. Osobom obolelom od SIDE nazivamo onog pacijenta koji se zarazio HIV virusom i trenutno se već pojavljuju simptomi koji ukazuju na ovu bolest.

SIDA je „kuga” modernog doba. Na osnovu podataka Svetske zdravstvene organizacije (WHO), HIV je tokom svega dve decenije eksplozivnog „haranja” po svetu uspeo da zarazi 40 miliona ljudi. Na osnovu Republičkog epidemiološkog centra (Mađarska) na teritoriji Mađarske živi 1598 registrovanih osoba zaraženih HIV virusom.

Broj registrovanih bolesnika u Mađarskoj raste iz godine u godinu: ranije je bilo 60-70, a od 2005. godine broj novoregistrovanih zaraženih pacijenata je veći od 100. Realni podaci mogu biti i nekoliko puta veći od ovih brojki jer istraživanja UN pokazuju da u svetu svega 10% HIV pozitivnih ljudi za sebe zna da je zaraženo.

Osoba zaražena HIV-om virus nosi u svom organizmu, međutim u prvoj fazi ne pokazuje nikakve simptome. Najveća opasnost ove bolesti jeste činjenica da osoba možda ni ne zna da je HIV pozitivna, a može lako da zarazi druge. Period inkubacije nije određen – na osnovu zapisa mogu proći meseci, ponekad i godine između trenutka infekcije i finalnog stadijuma tj. pojavljivanja SIDE.

Ne znamo ni koliki deo populacije je trenutno seropozitivno, što znači da u stvari o parametrima koji određuju širenje ovog virusa znamo jako malo. Precizno praćenje rasta broja novozaraženih HIV pozitivnih ljudi dodatno otežavaju i socijalni problemi.

Nedostatak informacija stvara ogroman problem prilikom kreiranja efikasnih kontrolnih programa, da ne govorimo o zdravstvenoj nezi. Iako u razvijenim zemljama ova bolest pre svega ugrožava homoseksualnu populaciju, u zadnjem periodu se i u ovim državama beleži rast obolelih među heteroseksualnom populacijom.

Zbog ovoga se očekuje da će se i u razvijenim zemljama bolest uskoro proširiti na heteroseksualnu populaciju.

Na osnovu pouzdanih podataka o epidemiji Anderson, Medli, Mej i Džonson (1986) i Anderson (1988) su predstavili razne modele koji se baziraju na razne transmisivne aspekte. Podaci koje su dobili od SAD i Velike Britanije su ukazali na ozbiljnost i značaj epidemije. Međutim, zbog rasta broja podataka ovi modeli su prestali da daju realne rezultate. Ovo poglavlje će se baviti predstavljanjem dva jednostavna modela Andersona i njegovih saradnika (1986).

Ovi modeli su delom teorijski, ne uzimaju neke faktore u obzir koje međutim jedan realan model mora da sadrži. Ne uzimaju u obzir, na primer, mogućnost pojavljivanja novih vrsta virusa, što u današnje vreme može imati ozbiljne posledice.

Najveći problem vezan za ispitivanje bolesti svakako predstavlja nemogućnost konkretnog određivanja inkubacionog perioda, dok ovaj faktor ima ogroman uticaj na brzinu širenja bolesti ([16]).

4. Tušnadijev model

Kao što smo do sada videli, matematičko modeliranje ima veliki značaj u svakodnevnom životu, nezavisno od toga o kojoj se pojavi radi. Kao i modeli epidemioloških infektivnih bolesti, postoji jos nekoliko modela koji su do sada formirani. Jedan od takvih modela je veoma važan Tušnadijev model.

4.1. Uvod

Dinamika populacije modeluje promenu veličine i sastava bioloških populacija u vremenu. Koreni ove naučne oblasti dosežu u davnu prošlost; za jedan od najstarijih radova na temu dinamike populacije smatramo Fibonačijev model iz 1202. Fibonači u njemu ispituje rast populacije zečeva. Sredinom XVIII veka Danijel Bernuli¹⁰ je postavio model diferencijalne jednačine za ispitivanje širenja boginja. Ovaj model je kasnije usavršavao d'Alembert. Belgijski matematičar Pier Fransoa Verhulst je 1838. godine publikovao tzv. logističku jednačinu, koja služi za modeliranje rasta populacije.

Ako je veličina populacije dosta manja od sposobnosti okoline za održavanje, onda populacija praktično eksponencijalno raste i sve sporijem rastom se približava prema sposobnosti okoline za održavanje. 1920-ih godina je čuveni italijanski matematičar Vito Voltera tragao za modelom koji bi mogao da objasni zašto je slabiji ribolov prouzrokovao porast broja riba grabljivica u Jadranskom moru za vreme I svetskog rata [17, 18, 19, 20].

¹⁰ **Danijel Bernuli:** Sticao je znanje iz matematike i pripodnih nauka, predavao je matematiku, anatomiju, botaniku i fiziku. Proveo je nekoliko godina kao profesor matematike u Sankt Petersburgu, ali najveći deo njegove naučne karijere se odvijao na univerzitetu u Bazelu gde je držao predavanja iz medicine, astronomije i filozofije.

4.2. Dinamički sistemi

Do neke mere je moguće izračunati promenu prošlih i budućih stanja fizičkih, hemijskih, bioloških i ekonomskih procesa ako poznajemo njihovo sadašnje stanje i zakonitosti koje uslovljavaju njihov razvitak. Ukoliko se u proteklom vremenu ovi zakoni ne menjaju, onda ponašanje ovakvih sistema celokupno određuje njihovo početno stanje. Pojam dinamičkih modela je matematički model ovakvih determinističkih procesa. Pojam dinamičkih sistema je skup mogućih stanja i zakonitosti razvitka u funkciji vremena. Svako moguće stanje sistema označava po jednu tačku u skupu X koji se naziva nekim prostorom stanja.

Jedna tačka $x \in X$ ne opisuje samo trenutno stanje sistema nego određuje i njegov razvoj. Ugledajući se na tradicije iz klasične mehanike prostor stanja često nazivamo i faznim prostorom. Prelaz između različitih stanja daje jedno preslikavanje koje propisuje stanje u koje će sistem za vreme t preći iz prvobitnog stanja. Posle ovoga možemo dati tačnu definiciju pojma dinamičkih sistema:

Definicija 4.1 [21]: Neka su $X \subset \mathbb{R}^n$ i $Y \subset \mathbb{R}$. Par (X, π) možemo zvati dinamičkim sistemom ako preslikavanje $\pi : X \times Y \rightarrow X$ poseduje sledeće osobine:

- $\pi(x, 0) = x$ ako $x \in X$ (osobina početnog stanja),
- $\pi(\pi(x, t), s) = \pi(x, t + s)$ ako $x \in X$ i $t, s \in Y$ (osobina grupe)
- π je *neprekidna* na $X \times Y$.

X je *prostor stanja*, a Y označava vreme. Najčešće je $Y = \mathbb{R}$ ili $Y = \mathbb{Z}$. Ako je Y skup realnih brojeva, onda govorimo o neprekidnom dinamičkom sistemu, a ako je Y skup celih brojeva onda je reč o diskretnom dinamičnom sistemu.

Definicija 4.2 [21]: Neka $x \in X$ proizvoljan elemenat. U tom slučaju preslikavanje

$$\zeta_x : Y \rightarrow X, \text{ definisano sa}$$

$$\zeta_x : t \rightarrow \pi(x, t), t \in Y$$

nazivamo orbitalnom funkcijom ili kretanjem tačke x , a skup $\zeta_x(Y) \subseteq X$ nazivamo putanjom ili trajektorijom tačke x .

U daljem tekstu ćemo prikazati definicije haotičnog skupa, atraktora kao i definicije nekoliko pojmova koji se vezuju za temu koristeći monografiju [18].

Definicija 4.3 [21]: Neka je Λ kompaktan podskup $\mathbb{R}^m$. S obzirom na dinamički sistem $\pi(x, t)$ skup Λ smatramo invarijantom ako je $\pi(\Lambda, t) \subset \Lambda$ za sve $t \in Y$.

Definicija 4.4 [21]: Možemo reći da dinamički sistem $\pi(x, t)$ u velikoj meri zavisi od početnih uslova ako postoji $\varepsilon > 0$, sa osobinom da za bilo koje $x \in \Lambda$ i za bilo koju U okolinu x -a, možemo odrediti $y \in U$ i $t > 0$, za koje važi da je $|\pi(x, t) - \pi(y, t)| > \varepsilon$.

Definicija 4.5 [21]: Topološki tranzitivnim nazivamo invarijantni zatvoreni skup A , ako za bilo koje podskup ove $U, V \subset A$ postoji $t \in Y$, takvo da je $\pi(U, t) \cap V \neq \emptyset$.

Definicija 4.6 [21]: Kažemo da je invarijantni skup Λ haotičan, ako se ostvaruju sledeće tri osobine:

- $\pi(x, t)$ u velikoj meri zavisi od početnih podataka na Λ ,
- $\pi(x, t)$ topološki je tranzitivan na Λ ,
- $\pi(x, t)$ periodične putanje su guste u Λ .

Definicija 4.7 [21]: Neka je $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$. Kažemo da je podskup $A \subset \mathbb{R}^m$ atraktor, ako poseduje sledeće osobine:

- invarijantan je, tj. $F(A) = A$,
- gust je, tj. u A postoji početna tačka čija je putanja gusta u A .
- trajektorije koje kreću iz okoline A ostaju u okolini i asimptotski se približavaju ka A .

Definicija 4.8 [21]: Atraktor $A \subset X$ nazivamo specijalnim atraktorom ako je haotičan.

4.3. Model

Ćelije živih bića – izuzev veoma malog broja – sadrže jedro. U njima se skladišti genetički program u obliku hromozoma. Broj hromozoma varira po vrstama (čovjek ima 46 hromozoma). Jedna garnitura hromozoma potiče od majke, a druga od oca, dakle hromozomi se pojavljuju u parovima i prema tome oba člana jednog para nazivamo homolognim hromozomima.

Kada se jedna ovakva diploidna ćelija deli svako jedro se duplira svako jedro hromozoma se duplira i obe ćerke-ćelije dobijaju celu garnituru hromozoma. Organizam sadrži i haploidne ćelije, one sadrži samo polovinu od ovog broja hromozoma, po jedan iz svakog para: to su gameti. Ove ćelije nastaju od haploidnih tokom mejoze, kada se parovi hromozoma dele. Različiti parovi se nezavisno dele.

Prilikom oplodnje ovi parovi se sjedinjuju i broj hromozoma postaje prvobitan. Delove hromozoma koji određuju različite osobine nazivamo genima. Geni imaju više varijanti. Ove varijante nazivamo alelima, a mesto gena na hromozomima genskim lokusom. Kod haploidnih ćelija svaki gen ima po jedan alel, a kod diploidnih po dva. Genotip određuje konkretan par alela. Ako se dva alela podudaraju na paru hromozoma, onda je jedinka homozigotna. Ako su alela i različiti, radi se o heterozigotama.

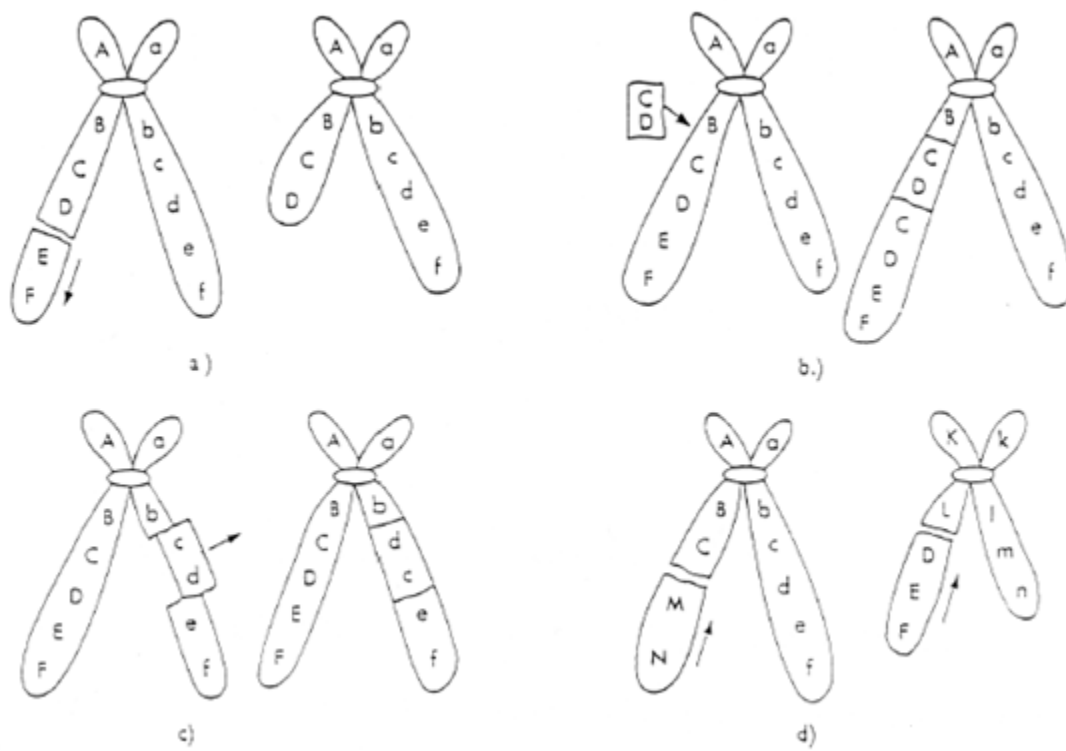
Promenu deljenja genotipa može prouzrokovati više faktora od kojih su najvažniji mutacija i selekcija. Selekcija znači da različiti genotipovi imaju različite šanse za dostizanje odraslog doba i za stvaranje potomstva. Uspeh nekog genotipa pokazuje fitnes¹¹, tj. genetska mera za prikazivanje uspeha u preživljavanju i razmnožavanju. Fitnes možemo da merimo na različite načine.

Najjednostavniji je Rajtov fitnes, koji ukazuje na očekivani broj potomaka. Mutacija je nenormalna promena u DNK. To znači da se geni nisu tačno „preslikali“. Mutacija se najčešće dešava tokom mejoze, neki alel se pretvara u neki drugi alel. Kad god se jedro ćelije preslikava može doći do greške. To, između ostalog može da prouzrokuje i nekakvo zračenje. Rezultat je ponekad koristan, a nekad je štetan, ali najčešće je neutralan.

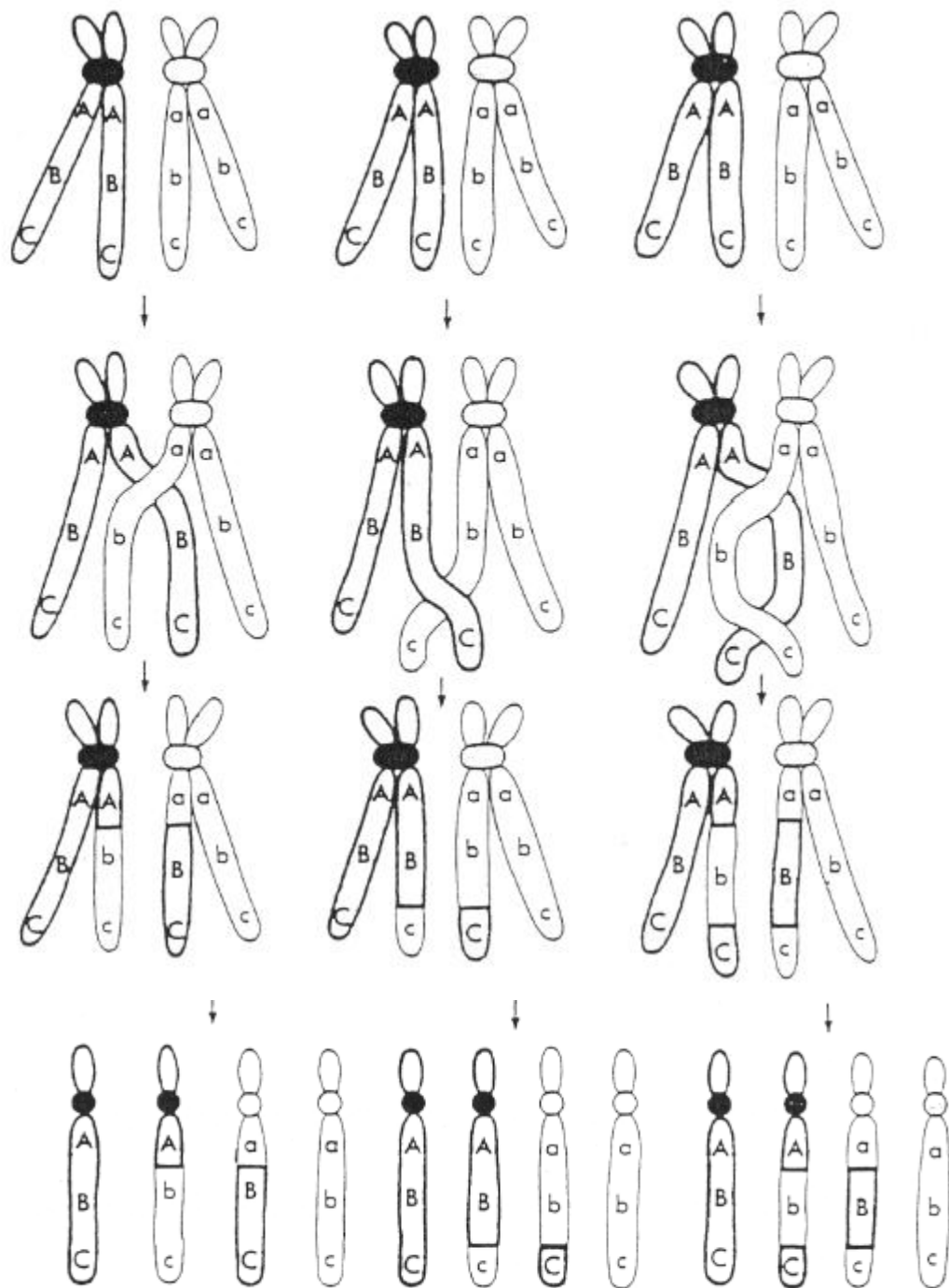
Greške pri preslikavanju uzrokuju rak, ali i nastanak vrsta je rezultat mutacija. Mutacijama se pripisuju i oni urođeni poremećaji čija se frekventnost pod uticajem selekcije posle nekoliko generacija može smanjiti do zanemarljivosti.

Rekombinacija ili prekštavanje se može dogoditi između homolognih hromozoma. Rekombinacija je kao i mutacija izvor genetske raznovrsnosti, samo što se ovde ne rađaju novi geni, nego nove genetske kombinacije: neki geni homolognih parova hromozoma menjaju svoja mesta. Naravno, ne mogu se menjati bilo koja dva gena, što su dva lokusa bliža jedan drugome verovatnije je da će njihove alele tokom mejoze ostati na istim hromozomima. Ovu verovatnoću izražava mera povezanosti [20].

¹¹ **Adaptivna vrednost (fitnes)** je broj reproduktivno zrelih potomaka jednog genotipa u odnosu na neki drugi genotip u istoj populaciji.



Slika 19.[21]: Vrste mutacije



Slika 20.[21]: Vrste rekombinacije

Modelirajmo matematički ove pojmove:

Neka m označava broj lokusa, a d broj alela. Tako se gamete mogu prikazati kao vektori d dimenzije, čiji su elementi alele.

$$V = (v_1, \dots, v_m)$$

Neka je mogući broj gameta $n = d_m$, označen sa $1, \dots, n$. Neka $x_i(r)$ bude razmera gamete i u generaciji r . Tada će $x_1 + \dots + x_n = 1$. Neka Γ označava skup genotipa. Tada će genotip $\gamma \in \Gamma$ biti matrica $m \times 2$, gde m označava broj lokusa, a 2 broj polova. Kolone su nezavisni, dok redovi ne moraju to biti. Mejoza je slučajno preslikavanje sa Γ u gametin prostor sa dimenzijom m .

Rezultat mutacije po Gaboru Tušnadiju¹² zavisi od gena oba roditelja na sledeći način [21]. Neka $w(i, j)$ označava fitnes ij genotipa ($0 \leq w(i, j) \leq 1$), i neka podela genotipa u jednoj generaciji bude $\{y_{ij}\}_{i,j=1}^n$. Ako uzmemo u obzir samo selekciju (a ne i mutaciju i rekombinaciju), dobijamo sledeći model selekcije:

$$y_{ij} = \frac{w(i, j)x_i x_j}{\sum_{p,q=1}^n w(p, q)x_p x_q}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

A sada uzmimo u obzir i rekombinaciju i mutaciju. Neka $M_{ij}(k)$ označava verovatnoću da od ćelije ij genotipa nastaje gamet tipa k . $M_{ij}(k)$ sadrži i rekombinaciju i mutaciju takođe [20].

Sada, posle mejoze ponovno deljenje gameta dobijamo na sledeći način:

$$x_k(r+1) = \sum_{i,j=1}^n y_{ij}(r) M_{ij}(k).$$

¹² **Gabor Tušnadi**: mađarski matematičar, član Mađarske Akademije. Naučna oblast teorija verovatnoće, statistika, bioinformatika.

Ako na mesto y_{ij} stavimo formulu koju smo dobili u modelu selekcije i uvedemo oznaku

$$a(i, j, k) = w(i, j) M_{ij}(k),$$

dobićemo sledeći model:

$$x_k(r + 1) = \frac{\sum_{i,j=1}^n a(i, j, k) x_i(r) x_j(r)}{\sum_{i,j,k=1}^n a(i, j, k) x_i(r) x_j(r)}.$$

Gabor Tušnadi je proučavao pitanja u vezi sa tačkom „zagušenja“ nizova koje su dobijene iteracijom preslikavanja, tj. da li u stvari postoji sistem koji ima više tačaka nagomilavanja. Napravio je jedan numerički eksperiment i došao je do zaključka da je retkost i to da je skup tačaka nagomilavanja neka kriva. U ovim slučajevima je skup tačaka nagomilavanja bio uvek isti, iz bilo koje tačke da se krene.

Tušnadi je naišao i na slučajeve u kojima se kriva raspala na dve zavisne komponente, a desilo se i da se skup tačaka nagomilavanja sastoji od konačnog broja tačaka. Ponekad bi stigao do tačke x , do koje nema konvergencije ako se krene iz drugih tačaka. Ali, u najvećem broju slučajeva ove nasumične potrage su vodile ka jednom preslikavanju sa fiksnom tačkom. Svaki pojedinačni gen daje na jednoj virtuelnoj skali neku vrednost [20].

Na kraju je, posle dugog traganja, došao do sledećeg četvorodimenzionalnog sistema:

$$a(2, 4, 1) = 1042$$

$$a(2, 4, 2) = 8, a(3, 4, 2) = 113$$

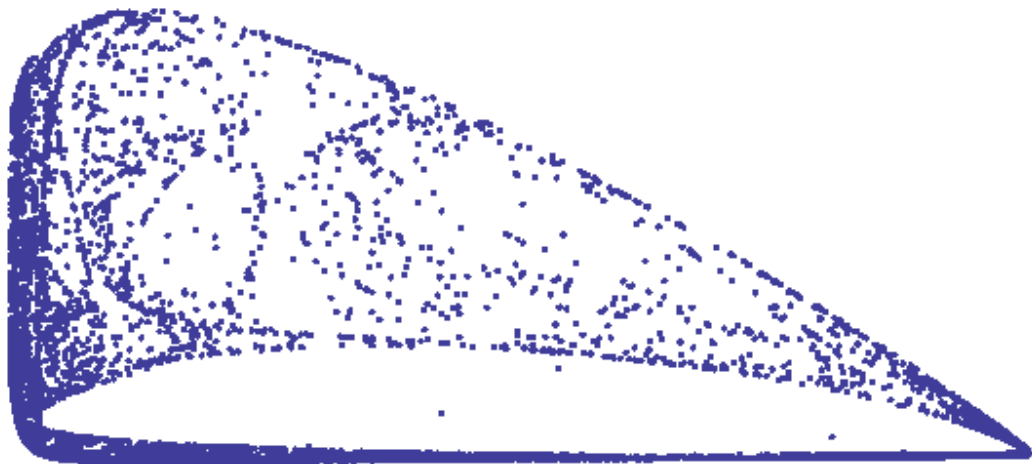
$$a(1, 2, 3) = 19, a(2, 3, 3) = 9$$

$$a(1, 3, 4) = 1078, a(2, 2, 4) = 414$$

Ovo znači da pored svakog i, j, k je $a(i, j, k) = a(j, i, k)$ i vrednost nespomenutih koeficijenata je 0. Dakle, naš sistem je sledeći:

$$x(r+1) = \begin{pmatrix} \frac{2084x_2x_4}{38x_1x_2 + 414x_2^2 + 2156x_1x_3 + 18x_2x_3 + 2100x_2x_4 + 226x_3x_4} \\ \frac{12x_2x_4 + 226x_3x_4}{38x_1x_2 + 414x_2^2 + 2156x_1x_3 + 18x_2x_3 + 2100x_2x_4 + 226x_3x_4} \\ \frac{38x_1x_2 + 18x_2x_3}{38x_1x_2 + 414x_2^2 + 2156x_1x_3 + 18x_2x_3 + 2100x_2x_4 + 226x_3x_4} \\ \frac{414x_2^2 + 2156x_1x_3}{38x_1x_2 + 414x_2^2 + 2156x_1x_3 + 18x_2x_3 + 2100x_2x_4 + 226x_3x_4} \end{pmatrix}.$$

Skup tačaka nagomilavanja ovog sistema nije jednodimenzionalan. Najverovatnije je dimenzija dva skupa tačaka nagomilavanja, i sada je ovaj sistem i pred običnim posmatračem postao haotičan.



Slika 21.[21]: Skup tačaka nagomilavanja Tušnadijevog sistema

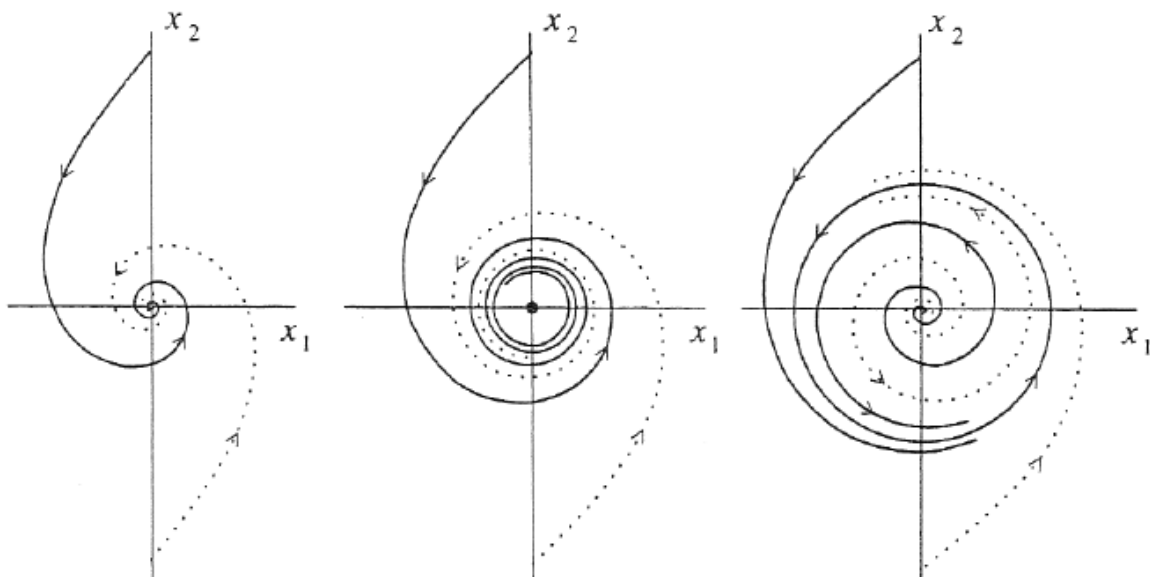
Ispitajmo kako se menja sistem ako menjamo neki koeficijent. U najvećem broju slučajeva ako samo malo promenimo vrednost jednog parametra onda se dinamika sistema, konstrukcija rešenja, ne menja i ovo nazivamo strukturalnim stabilitetom. Postoje, međutim, i slučajevi, kritične vrednosti parametara, kada se i na najmanju promenu parametara značajno menja dinamika, trajektorije se u mnogome razlikuju od parametara koji su iznad i ispod kritične vrednosti. Ova pojava se naziva bifurkacija. Ovo može da znači na primer i pojavu ravnotežnih stanja ili pojavu periodičnog rešenja, kao i njegov nestanak ili promenu stabilnosti.

Definicija 4.9 [21]: Dinamički sistemi (X_1, π_1) i (X_2, π_2) su topološki ekvivalentni, ako postoji homeomorfizam $h : X_1 \rightarrow X_2$, koji putanje prvog sistema preslikava na putanje drugog sačuvavši vremenski pravac.

Definicija 4.10 [21]: Posmatrajmo jedan dinamički sistem koji zavisi od parametara. Pojavu, kada tokom promene jednog parametra nastane topološki neekvivalentna fazna slika, nazivamo bifurkacijom. Vrednost parametra, na kojoj dolazi do bifurkacije nazivamo bifurkalnom ili kritičnom vrednošću.

Kažemo da je ravnotežno stanje hiperbolično, ako A nema sopstvenu vrednost u kompleksnoj ravni oko jediničnog kruga u okolini početka koordinatnog sistema.

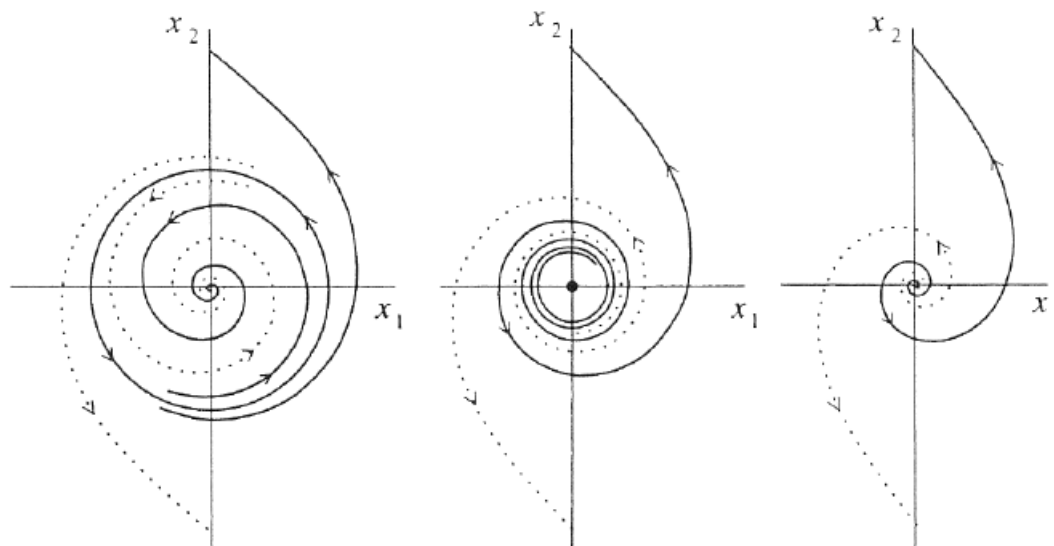
Ako iz stabilne fiksne tačke bifurkacije jedna stabilna zatvorena, invarijantna kriva, dok fiksna tačka postane nestabilna, govorimo o superkritičnoj Nejmark-Sakerovoj bifurkaciji. A kada iz nestabilne fiksne tačke bifurkacije jedna nestabilna zatvorena invarijantna kriva, dok fiksna tačka postane stabilna, govorimo o subkritičnoj Nejmark-Sakerovoj bifurkaciji.



Slika 22.[21]: Superkritična Neimark- Saker bifurkacija

Za parametar uzmimo koeficijent $p = a(2, 4, 2) = a(4, 2, 2) = 8$. Na Slici br 24, koja prikazuje sistem sa prvobitnim koeficijentima koji su dati od strane Tušnadija, dobro se vidi haotično ponašanje.

Slika br. 25 prikazuje globalni atraktor sistema, koji je nastao kod vrednosti parametra $p = 145$ i vidi se da je ovde atraktor stabilna fiksna tačka. Matematički dokaz za haotično ponašanje se još uvek čeka, ali ćemo pojavu koja nastaje povećavanjem vrednosti parametra prikazati.



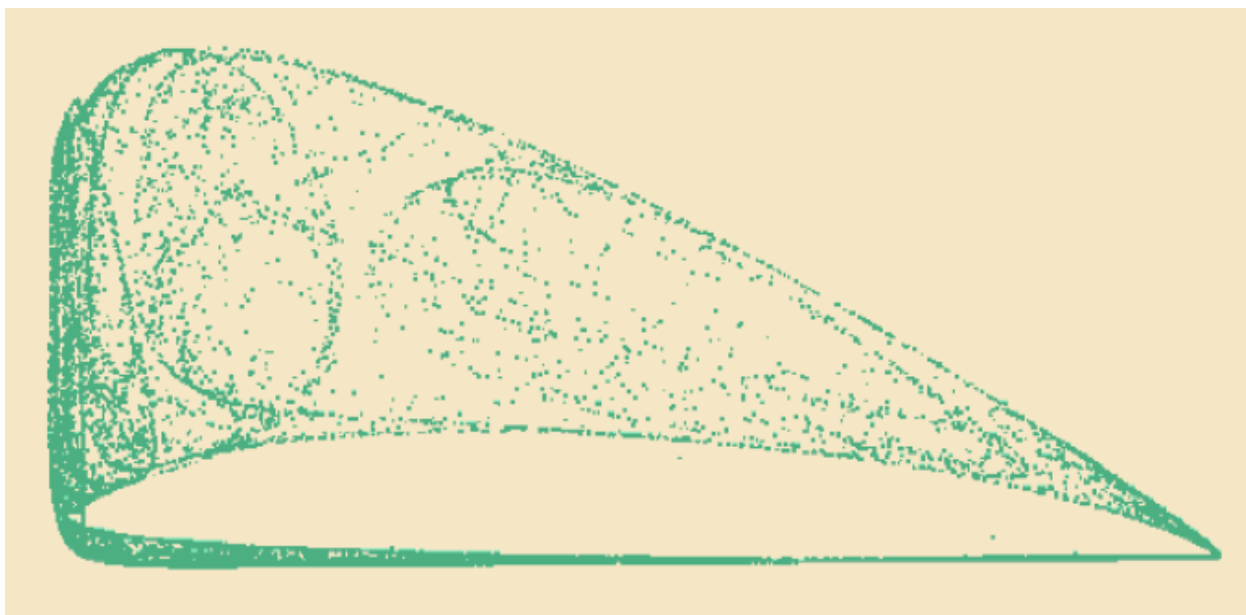
Slika 23.[21]: Subkritična Neimar-Saker bifurkacija

Slike koje su nastale pomoću programa prikazuju Neimark-Sakerovu bifurkaciju, jer je promenom parametra nastala iz stabilne fiksne tačke jedna zatvorena kriva. Pošto je zbir deljenja alela 1, sistem možemo redukovati na tri dimenzije.

Fazni prostor je četvorodimenzionalni simpleks, tj. tetraedar. Promenom vrednosti parametra p , sopstveni vrednosni u Jakobijevoj matrici prelazi preko jediničnog kruga. Ovom kompleksnom paru sopstveni vrednosti odgovara dvodimenzionalnom instabilne fiksne tačke. Kod $p = 139,455$ vrednosti parametra apsolutna vrednost dveju vrednosti je 1.

Da bismo dokazali da kod vrednosti ovog parametra dolazi do bifurkacije, moramo proveriti da sistem ispunjava neke uslove za sprečavanje izmena.

Teorema [20]: Tušnadijev sistem kod $p = 139,455$ vrednosti parametra prelazi preko Nejmark-Sakerove bifurkacije.



Slika 24.[21]: Atraktor Tušnadijev sistema za $p=8$



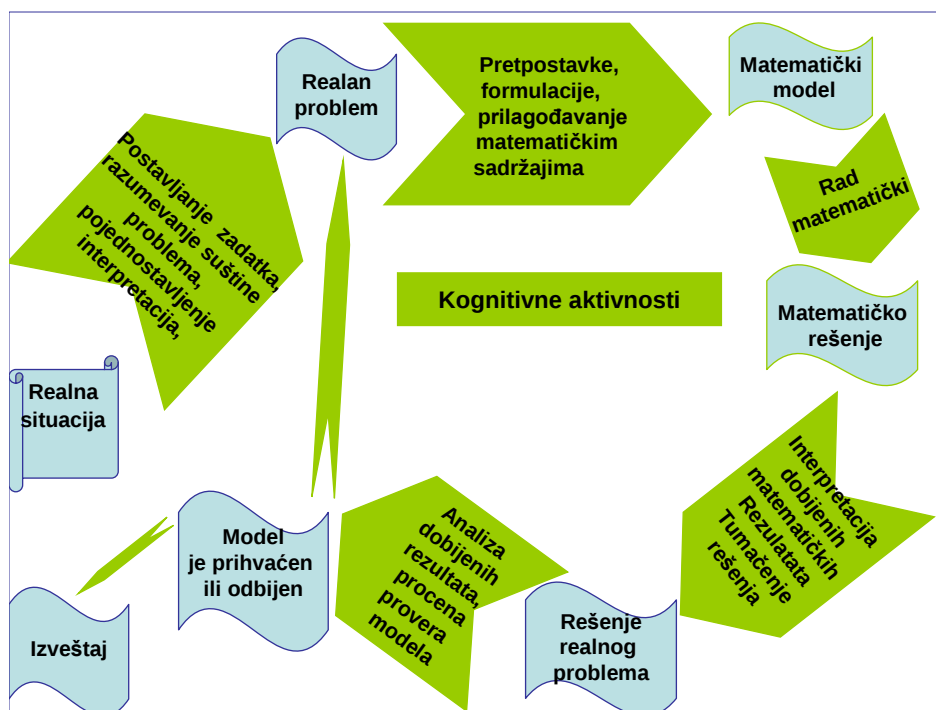
Slika 25.[21]: Atraktor Tušnadijev sistema za $p=135$

5. Zaključak

Osnovni cilj ovog master rada je da se upoznaju sa važnošću matematičkog modeliranja. Takođe je cilj rada da daje uvod u modeliranje kroz jednostavne primere iz svakodnevnog života. Ti primeri su povezani iz različitih naučnih oblasti.

U prvom delu rada, detaljnije je analizirano dva primera. Prvi primer je kretanje kugle nagibom različitog ugla, a drugi primer je kristalizacija natrijuma – acetata. Možemo reći da su primeri uzeti iz dve naučne oblasti, iz fizike i hemije. Kroz oba procesa su izvršena potrebna merenja da bismo stigli do modela. U toku te analize došla sam do diferencijalnih jednačina, što je bio i krajnji cilj.

Pomoću te jednačine lakše možemo predstaviti različite pojave. Nastavljajući pisanje rada, posle ovih primera opisano je malo teorijske osnove matematičkog modeliranja. Date su metode i vrste matematičkog modela. Posle teorijskog objašnjenja modeliranja sledi analiza dva primera, ovi primeri su interesanti iz matematike. Primer sa kutijicom “Finetti” i primer sa pustinjom, možemo dati učenicima i osnovne i srednje škole. Takvi zadaci su jako korisni za razvijanje uma i izbegavanje matematičkih šablona. Do rešenja možemo doći korak po korak pomoću merenja dimenzije kutije, ili crtanjem puta auta. Modeliranje u nastavi matematike je jako važno, kao što je na početku spomenuto, postoji didaktički krug. Šemu matematičkog modeliranja možemo predstaviti i pomoću Slike 26.



Slika 26 [22] : Krug modeliranja

Do glavnog dela rada stižemo tek u trećoj celini. U ovom delu rada dala sam nekoliko modela zaraznih bolesti i proces prenošenja. Cilj ovog poglavlja je da čitaoci priznaju da se matematičko modeliranje ne koristi samo za rešavanje raznih primera, već i za rešavanje kompleksnih problema iz života, kao što je u radu navedeno primer epidemije. U četvrtoj celini je analiziran još jedan model, do kog je došao Gabor Tušnadi. Napravio je jedan numerički eksperiment i došao je do zaključka da je retkost i to da je skup tačaka nagomilavanja neka kriva. U ovim slučajevima je skup tačaka nagomilavanja bio uvek isti, iz bilo koje tačke da se krene.

Matematičko modeliranje je kompleksan proces. Modeliranje je postupak dobijanja matematičkog opisa neke pojave koja se odvija u realnom svetu, kao što su na primer fizički, hemijski ili elektrotehnički procesi. Sa jedne strane, ovaj opis mora biti relativno jednostavan, a sa druge strane i dovoljno tačan, da bi odgovorio svojoj nameni koja je definisana od strane kreatora modela.

Primena modeliranja nije ograničena samo na tehničke procese (fizičke, hemijske, mehaničke, električke, itd.), već se ono koristi u različitim oblastima, kao što su ekonomija, biologija, sociologija, itd.

6.Literatura

- [1] Gábor Geda: Matematikai modellezés és számítógépes szimuláció
- [2] Mason, J., Modelling modelling: Where is the centre of gravity of-for-when teaching modelling? In J. Matos, W. Blum, K. Houston, S. Carreira (Eds.), *Modelling and mathematics education*, Chichester, UK: Horwood (2001).
- [3] Boaler, J., *Mathematical Modelling and New Theories of Learning, Teaching Mathematics and its Applications*, Vol. 20, Issue 3, 2001, p. 121-128.
- [4] Galbraith, P., Stillman, G., Brown, J., Edwards, I., Facilitating middle secondary modelling competencies. In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling (ICTMA12): Edu., eng. economics*, Chichester, UK: Horwood (2007), 130-140.
- [5] Ambrus Gabriella: Modellezési feladatok a matematika órán, *Matematika- Tanári Kincsestár*, B 1.2/5, 2007. december
- [6] Doerr, H., English, L., A modelling perspective on students' mathematical reasoning about data, *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(2) (2003), 110-136.
- [7] András Szilárd, Csapó Hajnalka, Nagy Örs, Sipos Kinga, Soós Anna, Szilágyi Judit: *Kíváncsiságvezérelt matematika tanítás*, Státus kiadó, Csíkszereda, 2010
- [8] Kaiser, G., Schwarz, B. *Mathematical modelling as bridge between school and university*, *ZDM*, 38 (2), (2006) 196-208.
- [9] Lamon, S. J., Parker, W. A., Houston, S. K. (Eds.), *Mathematical modelling: A way of life*, Chichester, UK: Horwood (2003).
- [10] Stillman, G., Brown, J., Challenges in formulating an extended modelling task at Year 9. In H. Reeves, K. Milton, & T. Spencer (Eds.), *Proc. 21. Conf. Austr. Assoc. Math. Teachers*. Adelaide: AAMT (2007).
- [11] Stillman, G., Galbraith, P., Towards constructing a measure of the complexity of applications tasks. S.J. Lamon, W. A. Parker, & S. K. Houston (Eds.), *Mathematical modelling: A way of life* (pp. 317-327). Chichester, UK: Horwood (2003).

- [12] Takači, A., Mathematical and simulation models of traffic flow, Proc. Appl. Math. Mech., GAMM 5, 633-634 (2005).
- [13] Takači, A., (ed.) Development of Computer-aided Methods in teaching mathematics and Science, Project 06SER02/02/003, (Takači Arpad), Proc.of School of Intensive courses in Novi Sad, April 4-8.(2008.)
- [14] Kermack, W. O., McKendrick, A. G. (1927): A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics. Proc. Roy. Soc. Lond., A115. 700_721.
- [15] Ragett, G., F. (1982): Modelling the Eyam plague. Bull. Inst. Math. and its Applic., 18. 221_226.
- [16] Prüy, J. W., Schnaubelt, R., Zacher, R. (2008): Infektionen. In: Mathematische Modelle in der Biologie. Mathematik Kompakt. Birkhäuser. 21- 42.
- [17] Artstein, Z., Limiting equations and stability of non-autonomous ordinary differential equations, Appendix to J. P. LaSalle, The Stability of Dynamical Systems, Regional Conference Series in Applied Mathematics, vol. 25, SIAM, Philadelphia, 1976.
- [18] Bacaër, N., A Short History of Mathematical Population Dynamics, Springer-Verlag, London, 2011.
- [19] Brauer, F., Castillo-Chávez, C., Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [20] Castillo-Chavez, C., Thieme, H. R., Asymptotically autonomous epidemic models, in: O. Arino, D. Axelrod, M. Kimmel and M. Langlais (Eds.), Mathematical Population Dynamics: Analysis and Heterogeneity, vol. 1: Theory of Epidemics, Wuerz Publishing Ltd., Winnipeg, Canada, 1995, pp. 33_50.
- [21] Dénes, A., Neimark_Sacker bifurcation in a discrete dynamical model of population genetics, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, Proc. 8th Coll. Qualitative Theory of Di_. Equ., No. 6. (2008)
- [22] Natalija Budinski: Učenje matematike preko modela iz realnog života, Teaching Mathematics and Statistics in Sciences HU-SRB/0901/221/088

Biografija



Silvia Šoš

Rođena sam 3.9.1988 u Senti. Osnovnu školu „Kokai Imre“ u Temerinu završila sam 2003. godine skroz odličnim uspehom, kao dobitnik Vukove diplome. Srednju školu završila sam u Bečeju, kaom ekonomski tehničar. Od oktobra 2007. godine bila sam redovan student Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, na Departmanu za matematiku i informatiku, smer Matematika finansija. Poslednji ispit položila sam u junskom roku 2011. godine i 11. jula 2011. godine odbranila sam završni rad.

Master studije Master matematičar – primenjena matematika, modul: matematika finansija upisala sam u oktobru 2011. godine, pored toga položila sam ispite psiholoških, pedagoških i metodičkih disciplina 30 bodova i 6 bodova prakse u ustanovi. Poslednji ispit položila sam u januarskom roku 2014.godine time sam stekla uslov za odbranu master rada.

Ključna dokumentacija

UNIVERZITET U NOVOM SADU

PRIRODNO – MATEMATIČKI FAKULTET

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Diplomski master rad

VR

Autor: Silvia Šoš

AU

Mentor: Prof. dr Arpad Takači

ME

Naslov rada: Didaktički aspekti matematičkog modeliranja

NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: srpski/ engleski

JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2014.

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, PMF, Trg Dositeja
Obradovića 4

MA

Fizički opis rada: (4/93/22/4/26)

FOR (*broj poglavlja/strana/lit.citata/tabela/slika/grafika/priloga*)

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Primenjena matematika

ND

Predmetne odrednice: model, modeliranje, diferencijalna jednačina

Ključne reči: (**PO, UDK**)

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta
Univerziteta u Novom Sadu

Važna napomena: nema

VN

Izvod (**IZ**):

U radu je opisano nekoliko realnih pojava iz oblasti hemije, fizike i matematike za koje su dati odgovarajući modeli. Uzevši u obzir da je modeliranje kompleksnih sistema u velikoj meri otežano bez upotrebe računara, rad će ilustrovati primenu nekoliko softverskih alata koji služe za prikupljenje, obradu i prikaz podataka dobijenih iz realnih sistema. Cilj ovog rada je da pruži osnovno znanje koje je potrebno za kreiranje matematičkih modela, da pokaže kako se dolazi do matematičkog modela u praksi, i da ukaže na to o kakvim karakteristikama realnog sistema moramo voditi računa da bi model bio tačan (apstrakcija realnog sistema). Takođe, cilj je da se pokaže važnost modeliranja sistema u nauci i tehnici uz ilustraciju korišćenja različitih programskih paketa u modeliranju.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 30.5.2014.

DP

Datum odbrane: Oktobar 2014.

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: dr Ljiljana Gajić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu,

Član: dr Ivana Štajner-Papuga, vanredni profesor na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu,

Mentor: dr Arpad Takači, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD

FACULTY OF SCIENCE KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents Code: Master's thesis

CC

Author: Silvia Šoš

AU

Mentor: prof. dr Arpad Takaçi

ME

Title: Didactic aspects of mathematical modeling

TI

Language of text: Serbian (Latin)

LT

Language of abstract: s/en

LA

Country of publication: Republic of Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2014.

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publ. place: Novi Sad

PP

Physical description: (4/93/22/4/26)

PD

Scientificfield: Mathematics

SF

Scientific discipline: Applied mathematics

SD

Subject key words: model, modeling, difference equals

SKW

Holding data: In the Library of Department of Mathematics and Informatics

HD

Note:

N

Abstract (**AB**):

This paper describes some real phenomena in chemistry, physics and mathematics that are given appropriate models. Given that the modeling of complex systems is largely hampered without the use of computers, the paper will illustrate the application of several software tools that are used for the exploitation, processing and display of data from real systems. The aim of this paper is to

provide the basic knowledge you need to create a mathematical model to show how there is a mathematical model in practice, and to point out what kind of characteristics of the real system must take into account that the model was accurate (an abstraction of the real system) . Also, the goal is to show the importance of modeling systems in science and technology to illustrate the use of various software packages for modeling.

Accepted by the Scientific Board on: Maj 30th, 2014

AS

Defended: Oktober, 2014

DE

Thesis defend board:

DB

President: PhD Ljiljana Gajić, Full Professor, Faculty of Natural Sciences,

Member: PhD Ivana Štajner-Papuga, Associate Professor, Faculty of Natural Sciences

Mentor: PhD Arpad Takaçi, Full Professor, Faculty of Natural Sciences.