UNIVERZITET U NOVOM SADU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Sanja Stefanović

Hedžing unit-linked ugovora životnog osiguranja

Master rad

Novi Sad, 2012

Sadržaj

1. Uvod

Životno osiguranje predstavlja ugovor između osiguranika i osiguravajuće kompanije. Prema ugovoru osiguravač se obavezuje da isplati određenu sumu u slučaju nastanka osiguranog slučaja. Istovremeno, osiguranik se obavezuje da plaća premiju u jednakim intervalima ili kao ukupnu sumu.

Osnovna razlika između tradicionalnog i unit-linked životnog osiguranja je u mogućnosti odabira investicija. Kod unit-linked životnog osiguranja ponuđeni su razni fondovi u koje osiguranik može da ulaže svoje premije, koji se dalje investiraju u velikoj meri u akcije. Dakle, osiguranik odlučuje u koje fondove će ulagati i u kojoj razmeri. Stoga, prinos zavisi od investicionih odluka samog osiguranika. Unit-linked životno osiguranje predstavlja ugovor kod kojeg naknade osiguranja zavise od cene određene akcije. Posmatramo model koji opisuje neizvesnost tržišta i istovremeno portfolio osiguranika. Usled nekompletnosti potraživanja ne mogu da se hedžiraju u potpunosti putem razmene akcija i obveznica, sto znači da se deo rizika prebacuje na samog osiguranika.

Prinos unit-linked životnog osiguranja se može posmatrati kao vrsta opcije. Veliki broj životnih osiguranja sadrže opciju kao deo ugovora. Čest oblik ovakvog životnog osiguranja je upravo unit-linked životno osiguranje sa minimalnom zagarantovanom sumom. Otuda, pored mogućnosti ulaganja premija, postoji minimalna zagarantovana suma na datumu dospeća.

Osiguravajuća kompanija izdaje životna osiguranja sa naknadama vezanim za cenu određene akcije. Posmatraćemo u radu akciju i nerizičnu investiciju, kojima se trguje na finansijskom tržištu bez troškova transakcije. Osiguranik, izdavanjem ovakvih ugovora, izložen je finansijskom riziku, a naš cilj je da minimiziramo taj rizik. Ugovori osiguranja su okarakterisani kao finansijski derivati u modelu koji nije kompletan, tako da ne mogu da se repliciraju koristeći samofinansirajuću strategiju. Teorija minimizacije rizika za nekompletno tržište je data od strane Föllmer-Sondermann-a (1986) i dalje razvijena od strane Föllmer-Schweizer-a (1988) i zatim Scheweizer (1991, 1994, 1995) je ponovo pregledao i primenio nakon promene u meri. Takva formulacija obuhvata hedžing derivata koji se isplaćuju samo u fiksnim trenucima. Analiza opštijih derivata bi zahtevala produžetak teorije Föllmer-Sondermann-a.

Za cenu akcije se najčešće pretpostavlja da prati geometrijsko Brown-ovo kretanje, međutim, na tržištu često dolazi do skoka u vrednosti akcije. Stoga, pristupa se takvoj pojavi putem difuznog modela. Cena akcije može da skoči i zatim da prati geometrijsko Brown-ovo kretanje. Pojava skoka u ceni će biti objašnjena u radu putem shot-noise procesa. Radi se o slučaju kada je skok u ceni akcije dozvoljen, međutim, efekat takve pojave nestaje u toku vremena. Ovaj model opisuje tržište koje nije kompletno i samim tim martingalna mera nije jedinstvena. Iz tog razloga, nije moguće koristiti ekvivalentnu martingalnu meru za hedžing strategiju. Dodatni kriterijumi moraju da se odrede da bi se izabrala odgovarajuća mera.

Cilj rada je da se predloži hedžing strategija za unit-linked životna osiguranja na tržištu u kome postoji shot-noise. Strategije za minimizaciju rizika u ovom radu se dobijaju putem Föllmer-Schweizer minimalne martingalne mere. Potom je data G-K-W (Galtchouk–Kunita–Watanabe) dekompozicija u kojoj se koristi svojstvo minimalne martingalne mere. Na kraju, data je strategija lokalne minimizacije rizika koja se primenjuje nakon promene u meri. Hedžing strategija je data za dve vrste unit-linked modela u životnom osiguranju *pure endowment* (osiguranje za slučaj doživljenja) i *term insurance* (ograničeno životno osiguranje).

1.1. Opcije

Unit-linked ugovori životnog osiguranja sa minimalnom zagarantovanom sumom prate novčani tok koji odgovara onom od evropske prodajne opcije. Dakle, kod ovakvih ugovora osiguraniku u trenutku nastanka osiguranog slučaja sleduje minimalna osigurana suma, ako uložena sredstva nisu premašila tu sumu, a u suprotnom mu sleduju uložena sredstva. Minimalna osigurana suma je označena sa K, a sa S_t uložena sredstva. Zaključujemo da je tada zagarantovana suma $\max\{K, S_t\}$.

Evropska opcija je vrsta opcije koja pruža vlasniku pravo, ali ne i obavezu, da primi ili plati unapred određeni iznos koji zavisi od stanja na tržištu na unapred dogovoreni datum. Na primer, evropska kupovna opcija na rizičnu investiciju daje vlasniku pravo, ali ne i obavezu, da kupi aktivu po unapred određenoj ceni i unapred određenom datumu, dok evropska prodajna opcija daje pravo, ali ne i obavezu, vlasniku da proda aktivu po unapred određenoj ceni i unapred dogovorenom datumu.

Stoga, primećujemo da postoje sledeće vrste opcija:

- *call* (kupovna opcija);
- *put* (prodajna opcija).

Takođe, u zavisnosti od datuma izvršenja razlikujemo:

- evropska – može se izvršiti na datum dospeća;
- američka – može se izvršiti bilo kad do datuma dospeća i na sam datum dopeća.

Unapred određeni iznos se zove strajk cena, K, unapred dogovoreni datum za izvršenje evropske opcije se zove datum dospeća, T, a cena akcije u trenutku $t = T$ se zove spot cena, S_t. Cena koju investitor plaća za podlogu predstavlja premiju, P.

1.2. Unit-linked životna osiguranja

U ovom poglavlju ćemo opisati osnove unit-linked životnih osiguranja, razmotriti ovaj oblik ugovora kao opciju i uvesti određene oznake.

Tradicionalna aktuarska analiza životnog osiguranja se bavi izračunavanjem očekivane vrednosti raznih diskontovanih slučajnih novčanih tokova. Fundamentalan *princip ekvivalencije* kaže da diskontovane premije i naknade trebaju da budu izjednačene u proseku. Takođe, u bilo kom trenutku pre isteka ugovora, *rezerva* je definisana kao uslovna očekivana vrednost svih diskontovanih budućih naknada umanjenih za premije, uzimajući u obzir postojeće informacije.

Unit-linked osiguranje je oblik osiguranja kod koga osiguranik snosi rizik investicije. Premije se investiraju u nekoliko investicionih fondova koji se dalje investiraju, u velikom procentu, u akcije. Osiguraniku je čak i dozvoljeno da direktno investira u akcije. Stopa prinosa unit-linked životnih osiguranja se može posmatrati kao neka vrsta opcije na akciju. Mnoge osiguravajuće kompanije su davale garancije na ovu vrstu osiguranja tokom devedesetih godina, ne sluteći na rizik vezan za ovu vrstu produkta.

Pojam unit-linked se odnosi na način na koji su premije osiguranika investirane. Neto premije se investiraju na osnovu odluke osiguranika. Česta praksa je da se dopusti osiguraniku da izabere između određenih investicionih fondova. Neke osiguravajuće kompanije daju i mogućnost da se investira u pojedinačne akcije. Ovakvom konstrukcijom osiguranik snosi investicioni rizik, što znači da je odgovaran za gubitke. Dakle, ova vrsta životnog osiguranja ima veliki potencijal za profitabilnost jer je dobit bazirana na učešću u kapitalu umesto na fiksnim primanjima. Međutim, osiguranici moraju da budu spremni na gubitke u trenucima ekonomskog pada.

Tipično za unit-linked ugovore je što se rezerve ne spominju u smislu novca, već u smislu jedinica od nekoliko investicionih fondova ili akcija. Rezerve u terminima novca predstavljaju broj jedinica pomnoženih sa cenom svake jedinice. Ova rezerva se naziva *vrednost fonda*. Bruto premija se plaća u jednakim vremenskim intervalima do isteka ugovora osiguranja. Nakon odbitaka zbog troškova investiranja, administrativnih troškova i premije za rizik mortaliteta, slede investicione premije. Ova vrednost je najčešće određena faktorima kao što su visina premije, zagarantovani prinos, trošak i odbici mortaliteta, ali takođe mogu da budu egzogene. Pretpostavićemo da osiguranik investira u jedan investicioni fond ili akciju, tako da se možemo ograničiti na samo jedan proces cena akcije. Ovakva pretpostavka nije ograničavajuća. Pri čemu se rezultati mogu proširiti na investicije u više fondova i akcija.

Definisaćemo sada notacije vezane za unit-linked životna osiguranja i prikazaćemo vrednost ugovora kao put opciju. Neka je $t_0 = 0$ i neka su $t_i, i = 0, \dots, n-1$ trenuci vremena u kojima se premije P_i pripisuju rezervi. Kada se radi o premijama, misli se na investicione premije, stoga, troškovi i troškovi mortaliteta su uzeti u obzir. Neka je $T = t_n$, datum isteka ugovora i K, zagarantovan iznos prilikom isteka. Onda, u trenutku $t_i, i = 0, \dots, n-1$, osiguranik kupuje $\frac{P_i}{S_{t_i}}$ jedinica i svaka jedinica ima vrednost S_T prilikom isteka ugovora. Vrednost fonda (*fund value*) u trenutku isteka je $\mathrm{FV}_n = \sum_{i=0}^{n-1} P_i (\frac{S_T}{S_{t_i}})$. U svakom trenutku plaćanja, t_i, koji prethodi trenutku isteka vrednost fonda je data sa $\mathrm{FV}_i = \sum_{j=0}^{i-1} P_j (\frac{S_{t_i}}{S_{t_j}})$. Kako je osiguranik ima pravo na minimalni iznos K, zavisno od od toga da li je živ u trenutku T, isplata ugovora u trenutku isteka iznosi,

$$\max(\mathrm{FV_n}, K) = \max\left(\sum_{i=0}^{n-1} P_i \frac{S_T}{S_{t_i}}, K\right) = \left(\sum_{i=0}^{n-1} P_i \frac{S_T}{S_{t_i}}\right)^+$$

Stoga, vrednost ugovora sa minimalnom zagarantovanom sumom se može predstaviti put opcijom na $\left(\sum_{i=0}^{n-1} P_i \frac{S_T}{S_{t_i}}\right)$, koja se može tumačiti kao neka stohastička prosečna ponderisana cena jedinice (akcije) u trenutku isteka. Količina $\ln(\frac{S_T}{S_{t_i}})$ predstavlja logaritamski prinos investicije u toku perioda $[t_i, T]$. Ako je R minimalna stopa prinosa, onda osiguravajuće kompanije najčešće računaju zagarantovanu vrednost u trenutku T, prema formuli $\sum_{i=0}^{n-1} P_i(R)e^{R(T-t_i)}$. Ovde P_i zavisi od izbora R preko šeme za odbijanje troškova, stoga pišemo, $P_i(R)$.

Uvešećemo još oznaka, koje će nam biti korisne, kao što je verovatnoća da osoba starosti x doživi narednih k godina, tj. ${}_kp_x = \prod_{i=0}^{k-1} p_{x+i}$. Pri čemu sa p_x obeležavamo ${}_1p_x$. U tom slučaju, ${}_kp_x \cdot q_{x+k}$ označava verovatnoću da osoba sa x godina dočeka $x+k$-tu godinu života umre u toj godini. Da bi odredili *prirodnu premiju* (osiguranje na jednu godinu), posmatrajmo jedan ugovor o životnom osiguranju sa minimalnom zagarantovanom sumom za osiguranika starosti x koji traje T godina. Radi jednostavnosti pretpostavićemo da se osigurana suma isplaćuje na kraju k-te godine, odnosno, početkom $k+1$-e godine.

Prema principu ekvivalencije u aktuarstvu (sadašnja vrednost budućih obaveza osiguravača mora da bude jednaka sadašnjoj vrednsoti budućih obaveza osiguranika), jednokratna neto premija biće jednaka sadašnjoj vrednosti, odnosno, diskontovanoj vrednosti očekivanih budućih gubitaka.

Dakle, diskontovana vrednost budućih gubitaka kompanije, kada je u pitanju smrtni slučaj koji je nastao između $t = k$ i $t = k+1$ iznosi $K(1+i)^{-(k+1)}$. Pri čemu verovatnoća gubitka iznosi ${}_kp_x \cdot q_{x+k}$. Sada možemo dati raspodelu za diskontovani gubitak, *discounted future cost,*

$$DFC: \begin{pmatrix} K(1+i) & K(1+i)^{-2} & \dots & K(1+i)^{-T} \\ q_x & {}_1p_x \cdot q_{x+1} & \cdots & {}_{T-1}p_x \cdot q_{T-1} \end{pmatrix}$$

Tada je jednokratna neto premija, *single pure premium*, očekivanje prethodne promenljive,

$$SPP = E[DFC] = \sum_{k=1}^{T} K(1+i)^{-k}\,{}_{k-1}p_x \cdot q_{x+k-1}$$

Na osnovu prethodnog, odredimo prirodnu premiju, koja predstavlja slučaj kada bi osiguranik svake godine kupovao životno osiguranje sa različitim premijama. Za $T = 1$ dobijamo, $K(1+i)^{-1}q_x$, pri čemu bi ta premija sledeće godine iznosila $K(1+i)^{-1}q_{x+1}$, kada osiguranik ima $x+1$ -u godinu.

2.Binomni model kretanja cene akcije

Binomni model igra važnu ulogu u razumevanu teorije arbitražnog vrednovanja i teorije verovatnoće. Zasniva se na pojednostavljenju finansijskih instrumenata koji učestvuju u određivanju cene opcija, međutim, obuhvata značajne karakteristike za komplikovanije neprekidne modele. Stoga, uvodimo najpre diskretan model za određivanje cene opcije.

2.1. Binomni model za 1 period

Pretpostavke binomnog modela za 1 period obuhvataju:

- jedan udeo akcije se može podeliti u svrhu kupovine i prodaje;
- prilikom svake transakcije, cena akcije koju kupac plaća je jednaka iznosu koji prodavac dobija, odnosno nema troškova transakcije;
- kamatne stope prilikom pozajmljivanja i investiranja su jednake;
- za akciju postoji mogućnost da primi samo dve vrednosti u svakom trenutku.

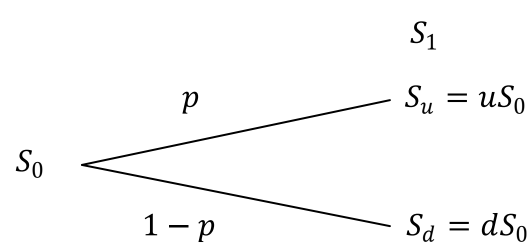
Posmatramo vremenski period od Δt. Za cenu akcije se pretpostavlja da prati jednostavan binomni model. Početna cena akcije u trenutku $t = 0$ je data sa S_0, a u svakom sledećem periodu cena akcije može da skoči za faktor u ili padne za faktor d.

Dakle postoje dve mogućnosti za vrednost akcije u trenutku $t = 1$, koju označavamo sa S_1:

- u slučaju rasta na tržištu vrednostakcijepostaje $S_1 = S_u = uS_0$
- u slučaju pada na tržištu vrednost akcije postaje $S_1 = S_d = dS_0$

gde su u i d konstante, $d \leq u$.

Označimo sa $0 < p < 1$ verovatnoću da cena akcije poraste a sa $1 - p$ verovatnoću da cena akcije padne.



Pravimo replikantni portfolio za prodajnu opciju, koji se sastoji od dve aktive, rizične i nerizične, odnosno akcije i obveznice, respektivno. Neka obveznica ima stopu prinosa R, što znači da ako smo investirali 1 novčanu jedinicu, naš prinos u trenutku $t = 1$ iznosiće $(1 + R)$

novčanih jedinica. Iznos koji je investiran u obveznicu obeležavamo sa η, a udeo u akciju sa ξ. Na taj način dobijamo uređeni par (η, ξ) koji predstavlja replikantni portfolio za prodajnu opciju u trenutku $t = 0$. Stoga, vrednost portfolia u trenucima 0 i 1,

$t = 0$	$t = 1$
$V_0^{(\eta,\xi)} = \eta + \xi S_0$	$V_1^{(\eta,\xi)} = \eta(1 + R) + \xi S_1$

gde su $V_0^{(\eta,\xi)}$ i $V_1^{(\eta,\xi)}$ vrednosti portfolia u početnom trenutku $t = 0$ i u trenutku $t = 1$, respektivno. Za $V_1^{(\eta,\xi)}$ primećujemo da su moguće vrednosti sledeće u zavisnosti od kretanja cene akcije,

$$V_1^{(\eta,\xi)}(u) = \eta(1 + R) + \xi S_u$$

$$V_1^{(\eta,\xi)}(d) = \eta(1 + R) + \xi S_d$$

Da bi mogli da odredimo cenu opcije uvodimo definiciju arbitraže, koja predstavlja mogućnost ostvarivanja profita bez početnog bogatstva. Pretpostavka da tržište ne dozvoljava arbitražu nije realna, međutim tržište vrlo brzo reaguje tako da je takva pojava vrlo kratkotrajna.

Definicija 2. 1. Arbitraža je moguća ako postoji portfolio (η, ξ) za koji važi sledeće:

(i) $V_0^{(\eta,\xi)} = 0$;
(ii) $V_1^{(\eta,\xi)}(u) \geq 0$ i $V_1^{(\eta,\xi)}(d) \geq 0$
(iii) $V_1^{(\eta,\xi)}(u) > 0$ ili $V_1^{(\eta,\xi)}(d) > 0$

Dakle, ako pretpostavimo da $V_1^{(\eta,\xi)}$ ne može da ima nenegativnu vrednost, ne postoji mogućnost arbitraže.

TEOREMA 2. 1.

Tržište ne dozvoljava arbitražu ako i samo ako je zadovoljena sledeća nejednakost,

$$d \leq 1 + R \leq u.$$

Dokaz.

Pretpostavimo suprotno, tj. da važi $1 + R < d$. Pokazujemo da je $\eta = -S_0$ i $\xi = 1$ jedna arbitražna strategija trgovanja. U trenutku $t = 0$ pozajmljujemo S_0 po nerizičnoj kamatnoj stopi R i kupujemo jednu akciju po ceni S_0. Stoga, važi da je $V_0^{(\eta,\xi)} = 0$, a u trenutku $t = 1$ vraćamo pozajmicu i prodajemo akciju i dobijamo sledeće vrednosti portfolia,

$$V_1^{(\eta,\xi)}(u) = -S_0(1 + R) + uS_0 = S_0(u - (1 + R))$$

$$V_1^{(\eta,\xi)}(d) = -S_0(1 + R) + dS_0 = S_0(d - (1 + R))$$

Pretpostavili smo da važi nejednakost $1 + R < d \leq u$ odakle dobijamo $V_1^{(\eta,\xi)}(u) > 0$ i $V_1^{(\eta,\xi)}(d) > 0$, odnosno da po prethodnoj definiciji postoji mogućnost arbitraže, što je kontradikcija sa pretpostvkom teoreme da nema arbitraže.

Slično, ako pretpostavimo da je $u < 1 + R$, kratko prodamo akciju po ceni S_0 u početnom trenutku i investiramo po nerizičnoj stopi R, odnosno, $(\eta, \xi) = (S_0, -1)$. U sledećem periodu ostvarujemo sledeće vrednosti,

$$V_1^{(\eta,\xi)}(u) = S_0(1 + R) - u\, S_0 = S_0((1 + R) - u)$$

$$V_1^{(\eta,\xi)}(d) = S_0(1 + R) - d\, S_0 = S_0((1 + R) - d).$$

Kako smo uzeli da je $d \leq u < 1 + R$, dobijamo da je $V_1^{(\eta,\xi)}(u) > 0$ i $V_1^{(\eta,\xi)}(d) > 0$. Ponovo dobijamo kontradikciju, zaključujemo da gornja nejednakost mora da važi.

■

Ako tržište ne dozvoljava arbitražu onda dva portfolia koja imaju istu krajnju vrednost moraju imati istu početnu vrednost.

Uvodimo pojam *kompletnosti tržišta* koji predstavlja važnu osobinu, jer u kompletnom tržištu svaki finansijski ugovor ima jedinstvenu *fer vrednost* (pod pretpostavkom odsustva arbitraže). Iz tog razloga, moguće je vrednovati razne ugovore na dosledan način i uzimajući u obzir vrednosti podloge jedna u odnosu na drugu. Pretpostavljamo da u modelu ne postoji mogućnost arbitraže i uvodimo pojam finansijskog derivata (*contingent claim*). *Finansijski derivat* predstavlja finansijski ugovor sa slučajnom isplatom, stoga je ugovor zavistan od slučajnog ishoda koji se desio u trenutku isplate.

Kažemo da portfolio replicira finansijski derivat kada postoji replikantni portfolio koji ima isti ishod kao dati finansijski derivat u svim stanjima. Dalje, kažemo da je tržište kompletno kada možemo da repliciramo bilo koji derivat koristeći postojeće hartije od vrednosti.

TEOREMA (Fundamentalna teorema vrednovanja) 2.2.

Pretpostavimo da tržište ne dozvoljava arbitražu. Za svaki derivat na tržištu postoji replikantni portfolio (η, ξ) (tržište je kompletno) ako i samo ako postoji jedinstvena *rizik-neutralna mera verovatnoće* Q.

U slučaju binomnog modela za jedan period potrebno je da sistem jednačina,

$$\eta(1 + R) + \xi S_0 u = P_u$$

$$\eta(1 + R) + \xi S_0 d = P_d$$

ima jedinstveno rešenje po η i ξ, da bi postojala jedinstvena mera Q. Stoga, možemo zaključiti da mora da važi da je $d < u$, jer u suprotnom bi sistem imao beskonačno mnogo rešenja. Dakle, mora da postoji bar jedan znak stroge nejednakosti u $d \leq 1 + R \leq u$.

■

Da bi naš potrfolio replicirao prodajnu opciju, njegova vrednost mora biti jednaka vrednosti prodajne opcije na kraju perioda. U tom slučaju cena opcije mora da bude jednaka prvobitnoj vrednosti portfolia da bismo izbegli mogućnost arbitraže.

U tu svrhu, određujemo vrednost prodajne opcije na akciju koja se kreće prema binomnom modelu. Označićemo sa $P_u = \max\{K - S_u, 0\} = (K - S_u)^+$ vrednost prodajne opcije ako je došlo do rasta na tržištu, dok ćemo sa $P_d = \max\{K - S_d, 0\} = (K - S_d)^+$ označavati vrednost prodajne opcije u slučaju pada na tržištu. Naša strategija (η, ξ) treba da bude takva da zadovoljava sledeće jednačine prihoda, u $t = 1$, a zapisujemo ih preko inicijalne cene akcije,

$$\eta(1+R) + \xi S_0 u = P_u$$

$$\eta(1+R) + \xi S_0 d = P_d.$$

Rešavanjem ovih jednačina dobijamo

$$\xi S_0 = \frac{P_u - P_d}{u - d}, \ \eta = \frac{uP_d - dP_u}{(1+R)(u-d)} \tag{2.1}$$

Pošto su sada njihove krajnje vrednosti jednake, znači da su i početne vrednosti jednake. Dakle, premija prodajne opcije na akciju čija se cena kreće po binomnom stablu je jednaka vrednosti portfolia u početnom trenutku,

$$\eta + \xi S_0 = P_0.$$

Ubacivanjem u prethodnu jednačinu izračunate vrednosti za η i ξdobijamo sledeće,

$$\eta + \xi S_0 = \frac{P_u q + P_d(1-q)}{(1+R)} \tag{2.2}$$

gde je $q = \frac{1+R-d}{u-d}$. Napomenimo da je $0 < q < 1$ kako je $d < 1 + R < u$.

Vrednosti koje smo dobili u formuli (2.1) nam govore da je potrebno uložiti $\frac{P_u - P_d}{u-d}$ novčanih jedinica u akciju i $\frac{uP_d - dP_u}{(1+R)(u-d)}$ n.j. u obveznicu, gde predznak ovih vrednosti označava da li je u pitanju duga ili kratka pozicija (pozitivan za dugu a negativan za kratku poziciju). Količina $\xi = \frac{P_u - P_d}{S_0(u-d)}$ pored toga što označava broj akcija predstavlja i osetljivost cene opcije na cenu akcije. Iz tog razloga se najčešće zove delta, a metoda kojom se konstruiše porfolio koji savršeno hedžira profit od opcije se naziva *delta hedžing*.

Primetimo sledeće:

(i) Kako je $0 < q < 1$ možemo posmatrati $\{q, 1-q\}$ kao meru verovatnoće vezanu za pad ili rast na tržištu. Zaključujemo iz (2.1) da je cena opcije jednaka diskontovanom prihodu od opcije pod merom verovatnoće $\{q, 1-q\}$;

(ii) Pod merom verovatnoće $\{q, 1-q\}$ akcija i obveznica imaju isti očekivani dobitak $1 + R$;

(iii) Nove verovatnoće q i $1-q$ ne zavise od mere verovatnoće $\{p, 1-p\}$ niti od prihoda od opcije, zavise samo od dobitka od akcije i obveznice.

Mera verovatnoće $\{q, 1-q\}$ se naziva rizik-neutralna mera ili Q-mera, dok je $\{p, 1-p\}$ fizička mera ili P-mera.

Ako posmatramo evropsku prodajnu opciju, uz pretpostavku da je $S_0 d < K < S_0 u$,

$$P_u = 0 \text{ i } P_d = K - S_0 d.$$

Stoga, pošto važi $P_u - P_d < 0$ i $uP_d - dP_u = u(K - S_0 d) > 0$, znači da je naša hedžing strategija kratka pozicija u akciji a duga kod obveznice.

TEOREMA 2. 3.

Neka je $d < 1 + R < u$ tada je cena prodajne opcije u početnom trenutku jednaka rizik-neutralnom očekivanju njene diskontovane vrednosti,

$$P_0 = E^Q\left(\frac{1}{1+R} P_1\right)$$

Dokaz.

Sledi direktno iz (2.2).

■

2.2. Binomni model za više perioda

Sada proširujemo naše rezultate iz modela sa jednim periodom na više perioda. Opet pretpostavljamo da postoje nerizična i rizična aktiva, odnosno obveznica i akcija. Radi jednostavnosti uzimamo da je dužina svakog perioda trgovanja 1. Kao i u prethodnom modelu, postoje dve mogućnosti za svaki period trgovanja: da cena akcije raste za fiksnu stopu u ili da cena akcije pada za fiksnu stopu d, tako da je $d < 1 + R < u$, a verovatnoće ovih događaja su p i $1-p$, respektivno.

Posmatramo periode od $0, 1, \ldots, n$. Neka je $k = 0, 1, \ldots, n$, tada u poslednjem posmatranom trenutku n cena akcije može da ima k skokova i $n-k$ padova. Dakle, cena akcije u tom slučaju postaje $S_0 u^k d^{n-k}$, a verovatnoća da cena primi ovu vrednost je $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Slično kao u binomnom modelu za 1 period dobijamo da je premija prodajne opcije na akciju, koja se kreće prema binomnom modelu, jednaka diskontovanoj očekivanoj vrednosti opcije nakon n perioda,

$$P_0 = \frac{1}{(1+R)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} (K - S_0 u^k d^{n-k})^+ \tag{2.3}$$

gde je $q = \frac{1+R-d}{u-d}$ rizik-neutralna verovatnoća.

3.Stohastički procesi

3.1. Pretpostavke iz teorije verovatnoće

Da bismo mogli da uvedemo stohastičke procese, kojima ćemo definisati kretanje cene akcije, podsetimo se definicija iz teorije verovatnoće.

Aksioma $\boldsymbol{\sigma}$-algebre. Podskup $\mathcal{F}$ partitivnog skupa $P(X)$ sa osobinama je *σ-algebra* nad Ω ako važi sledeće:

(i) $X \in \mathcal{F}$;
(ii) $X \in \mathcal{F} \Longrightarrow \Omega \setminus X \in \mathcal{F}$;
(iii) $A_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$.

Uređeni par $(X,\ \mathcal{F})$ sa prethodnim osobinama je *merljiv prostor*. Elementi skupa $\mathcal{F}$ su *merljivi skupovi*.

Definicija 3.1. *Borel-ova σ-algebra* je najmanja σ-algebra koja sadrži zatvorene skupove proizvoljnog topološkog prostora X. Označavamo sa $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$ Borelovu σ-algebru na skupu realnih brojeva.

Borel-ova σ-algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sadrži sve skupove koji se dobijaju kao konačne ili prebrojive unije ili preseci familije intervala $[a,b)$, $a,b \in \mathbb{R}$, kao i skupove koji se dobijaju uzimanjem komplemenata.

Definicija 3.2. Neka je $(X,\ \mathcal{F})$ merljiv prostor i neka je dat niz disjunktnih $A_1, A_2, ...$ skupova iz $\mathcal{F}$. *Mera* je funkcija $\mu: A \to [0,\infty]$ tako da, tada za sve $i \neq j$,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Prostor verovatnoće je uređena trojka $(X,\ \mathcal{F},\mu)$. Ako je ispunjen uslov $\mu(X) < \infty$ onda je μ *konačna mera*, a ako važi $\mu(X) = 1$ tada je u pitanju *prostor verovatnoća* koji se najčešće označava sa $(\Omega,\ \mathcal{F}, P)$. Dok se mera sa ovakvom osobinom naziva *mera verovatnoće*.

Definicija 3.3. Neka je dat prostor $(X,\ \mathcal{F},\mu)$. Mera verovatnoće je *σ-konačna* ako postoje disjunktni skupovi $A_1, A_2, ..., A_n$, tako da za sve i,

(i) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = X$;
(ii) $\mu(A_i) < \infty$.

Odnosno, X je prebrojiva unija disjunktnih skupova, od kojih je svaki merljiv i ima konačnu meru.

Prostor verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prikazuje slučajan eksperiment ili kolekciju eksperimenata koju pokušavamo da analiziramo. Skup Ω je skup svih mogućih ishoda datog eksperimenta ili skup elementarnih događaja, gde ishode označavmo sa $\omega \in \Omega$. Merljivi skupovi iz $\mathcal{F}$ se nazivaju događajima, a P je mera verovatnoće. Slučajna promenljiva je merljiva funkcija $X: \Omega \to S$, gde je najčešće $S = \mathbb{R}$.

Definicija 3.4. Skup funkcija $f: X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ sa osobinom $\int_X |f|^P d\mu < \infty$, i u kojem identifikujemo funkcije jednako skoro svuda, sa operacijama sabiranja i množenja, predstavlja vektorski prostor $\boldsymbol{L}^P$.

Ako za slučajnu promenljivu X kažemo da pripada prostoru $\boldsymbol{L}^P = \boldsymbol{L}^P(\Omega, \mathcal{F}, P)$, to znači $E[X^P] < \infty$, ima konačni p-ti momenat. Specijalno, za $p = 2$, $\boldsymbol{L}^2$ je *Hilbertov prostor* i važi za skalarni proizvod $\langle X, Y \rangle = E[XY],\ X, Y \in \boldsymbol{L}^2$.

Definicija 3.5. Neka su $(X, \mathcal{F})$ i $(Y, \mathcal{H})$ prostori sa σ-algebrama. Proizvod σ-algebri $\mathcal{F} \otimes \mathcal{H}$ je σ-algebra na proizvodu $X \times Y$ koju generišu skupovi oblika $A \times B$, $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{H}$.

TEOREMA 3.1.

Neka su $(X, \mathcal{F}, \mu)$ i $(Y, \mathcal{H}, \nu)$ prostori sa σ-algebrama $\mathcal{F}$ i $\mathcal{H}$ i σ-konačnim merama μ i ν. Postoji jedinstvena mera η na $G = \mathcal{F} \otimes \mathcal{H}$ tako da važi,

$$\eta(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$$

za sve $A \times B$, $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{H}$.

■

Očekivanje slučajne promenljive X, iz skupa realnih brojeva, je data sa:

$$E[X] = \int_{\Omega} X\, dP.$$

Dok je *distribucija* slučajne promenljive X mera verovatnoće koja se dobija kada se mera verovatnoće P prikazuje na realnoj pravoj,

$$\mu(\mathrm{A}) = P\{X \in A\}, \quad A \in B(\mathbb{R}).$$

Gde je $\{X \in B\}$ drugi način da izrazimo $\{\omega \in \Omega: X(\omega) \in A\}$.

Definicija 3.6. Uslovno očekivanje slučajne promenljive X iz prostora $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ za datu σ-algebru $\mathcal{H}$ je skoro sigurno jedinstveno određena $\mathcal{H}$-merljiva slučajna promenljiva $\mathrm{E}[X|\mathcal{H}]$ za koju važi $\int_A E[X|\mathcal{H}]dP = \int_A XdP$, za svako $\mathrm{A} \in \mathcal{H}$.

Propozicija 3.1. Uslovno očekivanje ima sledeće osobine:

(i) $E[aX + bY|\mathcal{H}] = aE[X|\mathcal{H}] + bE[Y|\mathcal{H}]$, linearnost;
(ii) $E\big[E[X|\mathcal{H}]\big] = E[X]$;
(iii) $E[XY|\mathcal{H}] = XE[Y|\mathcal{H}]$, ukoliko je X $\mathcal{H}$-merljivo;
(iv) $E[X|\mathcal{H}] = E[X]$, ukoliko je X nezavisno od $\mathcal{H}$;
(v) $E[E[X|\mathcal{H}]|G] = E[X|G]$, za $G \subset \mathcal{H}$.

Definicija 3.7. Dve mere verovatnoće P i Q definisane nad istim prostorom verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F})$ su *ekvivalentne*, u oznaci $P \sim Q$, ako važi $P(A) = 0 \Leftrightarrow Q(A) = 0$, za sve $A \in \mathcal{F}$, odnosno ako imaju iste skupove mere nula.

TEOREMA (Radon-Nikodym) 3.2.

Neka su P i Q ekvivalentne mere verovatnoće na prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$. Tada postoji nenegativna slučajna promenljiva Z takva da važi,

$$Q(A) = \int_A Z dP\,, \qquad A \in \mathcal{F}.$$

Gde se Z zove Radon-Nikodymov izvod od Q u odnosu na P. Iz prethodne jednakosti sledi da za svaku slučajnu promenljivu X iz prostora $(\Omega, \mathcal{F})$ važi sledeće,

$$E^Q[X] = E^P\left[X \frac{dQ}{dP}\right]$$

Neka je $(\Omega,\ \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća. Podsećamo se da $\mathcal{F}$ sadrži sve moguće događaje i predstavlja sve informacije iz prostora verovatnoća.

3.2. Pretpostavke iz stohastičke analize

Definicija 3.10. *Filtracija na prostoru verovatnoća* $(\Omega,\ \mathcal{F}, P)$ je familija σ-algebri $\{\mathcal{F}_t : t \in [0,T]\}$ koja ispunjava uslov:

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}, \qquad \text{za sve } 0 \leq s < t < \infty.$$

Dakle, σ-algebra $\mathcal{F}_t$ predstavlja sve dostupne informacije do trenutka t, uključujući i t. Dok $\mathcal{F}_s$ ne sadrži više informacija od $\mathcal{F}_t$, što odražava činjenicu da kako vreme prolazi više informacija nam je dostupno.

Na opštem nivou stohastički proces predstavlja familiju slučajnih promenljivih definisanih na istom prostoru verovatnća.

Definicija 3.11. *Realan stohastički proces*, $\{S_t: t \in \Theta\}$, je familija realnih slučajnih promenljivih definisanih na istom prostoru verovatnoća $(\Omega, \ \mathcal{F}, P)$, gde je $\Theta = [0, T]$ ili $\Theta = \mathbb{R}^+$ parametarski skup.

Za svako $t \in \Theta$, $S_t(\cdot)$ je jedna realna slučajna promenljiva. Za svako $\omega \in \Omega$, funkcija $t \to S_t(\omega)$ se zove *trajektorija* ili *realizacija procesa*. Ukoliko je trajektorija stohastičkog procesa neprekidna funkcija, onda se radi o *neprekidnom stohastičkom procesu*.

U radu ćemo nadalje koristiti parametarski skup $\{0\,, 1, \dots, T\}$ jer predstavlja vreme od kupovine opcije do njenog dopeća, odnosno, vreme od početka ugovora do njegovog isteka.

Definicija 3.12. Za proces $\{S_t: t \in [0, T]\,\}$ kažemo da je *adaptiran* filtraciji $\{\mathcal{F}_t: t \in [0, T]\,\}$ ako je za svako $t \in [0, T]$ slučajna promenljiva S_t je $\mathcal{F}_t$-merljiva, tj. $\sigma(S_t) \subseteq \mathcal{F}_t$.

Prethodno znači da je cena aktive u trenutku t sadržana kao deo informacija $\mathcal{F}_t$ koje su nam dostupne u trenutku t. Sada, definišimo pojam martingala, najpre u diskretnom slučaju,

Definicija 3.13. Neka je $(\Omega, \ \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća i $\{M_t: t = 0,1,2, \dots\,\}$ stohastički proces, pri čemu je $E[|M_t|] < \infty$, adaptiran filtraciji $\{\mathcal{F}_t\}$. Dati proces je *martingal* u meri verovatnoća P ako važi,

$$E[M_{t+1}|\mathcal{F}_t] = M_{\boldsymbol{t}}.$$

Intuitivno prethodna jednačina znači da uzimajući u obzir trenutne informacije, do trenutka t, ne možemo da predvidimo vrednost M_{t+1}.

Neke osnovne osobine slede iz same definicije martingala:

(i) za svako t, $E[M_t] = M_0$, odnosno, očekivanje martingala je konstantno u toku vremena;
(ii) za svaku slučajnu promenljivu X na $\mathcal{F}_t$, gde je $E[|Y|] < \infty$, stohastički proces $\{M_t = EY\mathcal{F}t$ je martingal.

Stohastički proces može biti martingal u odnosu na jedan skup informacija, a da ne poseduje odgovarajuće osobine u odnosu na drugi. Međutim, osobina martingala je očuvana za slučaj $F_s \subset F_t, \ s < t,$

$$E[M_{t+1}|F_s] = E[E[M_{t+1}|F_t]|F_s] = E[M_t|F_s] = M_t.$$

Definicija martingala se može iskazati i drugačije, finansijskim rečnikom. Ako je $\{M_t: t \in [0, T]\,\}$ proces bogatstva investitora, onda osobina martingala označava da je očekivanje budućeg bogatstva jednak trenutnom bogatstvu.

U finansijama često postoji zahtev da proces diskontovanih cena bude martingal za dati prostor verovatnoća. Ukoliko proces ne poseduje odgovarajuće osobine u datom prostoru, potrebno je pronaći ekvivalentnu meru za koju važi da je proces martingal. Takva mera verovatnoće se često naziva martinglna mera.

Definicija 3.14. Neka je $(\Omega, \ \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća i neka je $X = \{X_t: t \in [0, T]\}$ stohastički proces adaptiran filtraciji $\{\mathcal{F}_t: t \in [0, T]\}$. Tada je X *predvidljiv proces* ako je X_{t+1} $\mathcal{F}_t$-merljiv za svako t.

3.3. Geometrijsko-Brown-ovo kretanje

Model geometrijskog Brown-ovog kretanja se dobija kada se u binomnom modelu za više perioda pusti da broj koraka n u inervalu $[0,t]$ teži beskončnosti, $n \to \infty$. Pri tome je cena opcije data sa (2.3). Podelimo interval $[0,t]$ u n jednakih intervala, tada je dužina perioda $\Delta = \frac{t}{n}$ i $\Delta \to 0$ kada $n \to \infty$. Za cenu akcije, odnosno podloge, kažemo da prati geometrijsko Brown-ovo kretanje sa driftom μ i volatilnošću σ ako je za sve nenegativne vrednosti s i t količnik $\frac{S_{t+s}}{S_s}$ slučajna promenljiva koja je nezavisna od cena do trenutka s i ako važi da slučajna promenljiva,

$$\ln \frac{S_{t+s}}{S_s} : \mathrm{N}(\mu, \sigma^2 t)$$

Parametar μ označava očekivani prinos akcije jer se može pokazati iz osobina normalne raspodele da $E[S(t)] = S(0)e^{\mu t}$, tj. cena akcije raste eksponencijalno po konstantnoj stopi μ. Konstanta σ je mera rizičnosti akcije, a σ^2 je jednako varijansi log-prinosa po jedinici vremena,

$$\sigma^2 = \frac{\mathrm{Var}[\log\{S_t\} - \log\{S_0\}]}{t}$$

Ukoliko uzmemo za parametre u i d specijalno $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta}}$ i $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta}}$. U tom slučaju rizik-neutralna verovanoća iznosi $q = \frac{1+r\Delta-d}{u-d}$ jer su u pitanju mali vremenski intervali. Tada možemo napisati, na osnovu Tejlor-ovog razvoja za eksponencijalnu funkciju,

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta}} \approx 1 + \sigma\sqrt{\Delta} + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta}} \approx 1 - \sigma\sqrt{\Delta} + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta$$

odakle dobijamo,

$$q = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{\sigma}(r - \frac{\sigma^2}{2})\sqrt{\Delta}\right] = \frac{1}{2}(1 + \frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\Delta})$$

gde je $\mu = r - \frac{\sigma^2}{2}$.

Pokažimo da cena akcije prati geometrijsko Brown-ovo kretanje, odnosno da slučajna promenljiva $\ln\frac{S_t}{S_0} : \mathrm{N}(\mu t, \sigma^2 t)$. Neka je X_i diskretna slučajna promenljiva sa raspodelom,

$$X_i : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

tada važi po binomnom modelu,

$$S_t = S_0 u^{\sum_{i=1}^{n} X_i} d^{n - \sum_{i=1}^{n} X_i}$$

tj.

$$\ln\frac{S_t}{S_0} = n\ln d + \sum_{i=1}^{n} X_i \ln\left(\frac{u}{d}\right) = -\frac{\sigma t}{\sqrt{\Delta}} + 2\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\sigma\sqrt{\Delta}$$

$$E\left(\ln\frac{S_t}{S_0}\right) = -\frac{\sigma t}{\sqrt{\Delta}} + 2\sigma\sqrt{\Delta}np = \mu t$$

$$D\left(\ln\frac{S_t}{S_0}\right) = 4\sigma^2\Delta nq(1-p) \approx \sigma^2 t, n \to \infty$$

4. Modeli u neprekidnom vremenu

U vremenski neprekidnim modelima finansijskih tržišta agentima je dozvoljeno da trguju neprekidno, ne samo u diskretnim vremenskim periodima. Stoga, cene se modeliraju kao procesi u neprekidnom vremenu, koji su najčešće stohastički. Kako se trgovina na modernim finansijskim tržištima može obavljati u vrlo kratkim vremenskim intervalima, ovaj model je logična aproksimacija stvarnog tržišta. Razlog za korišćenje ovakvog modela jeste taj što on pruža mogućnost da se modelira kompleksna dinamika cena, uz mali broj parametara u modelu koji često imaju intuitivno objašnjenje. Sa druge strane, diskretni model sa više perioda ubrzo postaje težak za praćenje.

4.1. Brown-ovo kretanje

Osnovni neprekidni model je vođen slučajnim procesom koji se zove *Brown-ovo kretanje*, odnosno *Wiener-ov proces*, čija je vrednost u trenutku t je označena sa $W(t)$. Najpre definišimo proces kao graničnu vrednost diskretnog modela:

$$W(t_{k+1}) = W(t_k) + z(t_k)\sqrt{\Delta t}, \quad W(0) = 0$$

gde su $z(t_k)$ standardne normalne nezavisne promenljive (sa očekivanjem 0 i disperzijom 1). Zaključujemo da su razlike $W(t_{k+1}) - W(t_k)$ su normalno raspodeljene promenljive sa očekivanjem 0 i disperzijom 1. Uopšteno, za $k < l$,

$$W(t_l) - W(t_k) = \sum_{i=k}^{l-1} z(t_i)\sqrt{\Delta t}$$

Sledi da $W(t_l) - W(t_k)$ je normalno raspodeljena promenljiva sa 0 očekivanjem i $t_l - t_k$ varijansom, gde se proces W zove slučajan hod[1].

U slučaju kada pustimo da Δt teži 0, može da se pokaže da proces slučajnog hoda konvergira ka procesu Brown-ovog kretanja, koji se takođe označava sa W i ima sledeće osobine,

Definicija 4. 1. Stohastički proces $\{W(t): t \in \Theta \}$ je *Brown-ovo kretanje (Wiener-ov proces)* ako važi:

(i) $W_t - W_s$ ima normalnu raspodelu sa očekivanjem 0 i varijansom $t - s$, za $s < t$;
(ii) Proces W ima nezavisne priraštaje: za svaki izbor tačaka $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, slučajne promenljive $W_{t_2} - W_{t_1}, W_{t_3} - W_{t_2}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ su nezavisne, odnosno, proces ima nezavisne priraštaje;
(iii) Trajektorije $W_0 = 0$ skoro sigurno;
(iv) $\{W_t; t \geq 0\}$ su skoro sigurno neprekidne funkcije po t.

Uslov pod (i) kaže da očekivana vrednost $[W(t + \Delta t) - W(t)]^2$ se ponaša kao Δt, za malo $\Delta t > 0$. Ako posmatramo W kao proces cena, uslov pod (ii) kaže da promena cene sutra je nezavisna od promene cene danas. Pod (iii) služi radi jednostavnosti, da proces bude jednak nuli. Uprkos neprekidnosti procesa, uslov pod (iv) znači da realizacija Brown-ovog kretanja nije nigde diferencijablna. Na ovakvo ponašanje procesa ukazuje sledeće očekivanje,

$$E\left[\left(\frac{W_s - W_t}{t - s}\right)^2\right] = \frac{1}{t - s}$$

koje teži beskonačnosti kada s teži ka t.

Sada ćemo dati definiciju martingala u neprekidnom slučaju, koja je vrlo slična definiciji u diskretnom slučaju.

Defincija 4.2. Neprekidan stohastički proces $\{X_t: t \geq 0\}$ na prebrojivom skupu S *je proces Markov-a* ako za svako $t_{k+1} > t_k > \cdots > t_0$ i $B \subset S$ je ispunjena *osobina Markov-a,*

$$P[X(t_{k+1}) \in B | X(t_k), \dots, X(t_0)] = P[X(t_{k+1}) \in B | X(t_k)]$$

Definicija 4. 3. Neka je $M(t)$ stohastički proces u neprekidnom vremenu u prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$, gde je $\{\mathcal{F}_t: t \geq 0\}$ odgovarajuća filtracij. Proces $M(t)$ je martingal ako je $E[|M(t)|] < \infty$, $t \geq 0$, i za sve $s > t$ važi,

$$E[M_s | \mathcal{F}_t] = M(t)$$

Ekvivalentne definicije su:

$$E[M_s - M_t | \mathcal{F}_t] = 0$$

i

---

[1]Slučajan hod u jedno-dimenzionalnom slučaju je niz $\{S_n\}$ takav da je $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$, gde su slučajne promenljive $X_1, X_2, \dots$ jednake 1 ili -1 sa verovatnoćom 50% i $S_0 = 0$. Ako uzmemo slučajan hod sa jako malim koracima, teže 0, dobićemo aproksimaciju Wiener-ovog procesa. Ova pretpostavka u finansijskoj teoriji izražava cene akcije prema slučajnom hodu, stoga cene ne mogu da se predvide.

$$E\left[\frac{M_s}{M_t}|\mathcal{F}_t\right] = 1, \text{ako je } M_t > 0$$

Kao u diskretnom slučaju, imamo,

(i) Za svako t, $E[M_t] = M_0$, tj. očekivanje martingala je konstantno u toku vremena;
(ii) Za svaku slučajnu promenljivu Y na $\mathcal{F}_T$, gde je $E[|Y|] < \infty$, stohastički proces $M_t = E[Y|\mathcal{F}_t]$, $0 \leq t \leq T$ je martingal;
(iii) Ako martingal M_t ima nezavisne priraštaje, onda $E[M_s|M_t] = M_t$, tj. filtracija $\mathcal{F}_T$ se može zameniti onom generisanom sa M_t.

Može se pokazati da je Brown-ovo kretanje proces Markov-a (raspodela budućih vrednosti, zavisi samo od sadašnje vrednosti, a ne od prošlosti). Dakle, koristeći prethodno, osobine uslovnog očekivanja i činjenice da je $W_t - W_s$ nezavisno u odnosu na W_s, dobijamo sledeće,

$$E[W_t|W_s] = E[W_t - W_s|W_s] + E[W_s|W_s] = E[W_t - W_s] + W_s$$
$$= W_s$$

Odnosno, očekivana vrednost budućeg ishoda Brown-ovog kretanja, uslovljena prošlim i sadašnjim informacijama, je jednaka sadašnjoj vrednosti. Dakle, zadovoljena je osobina martingala. Moguća interpretacija ove osobine je da je najbolja procena buduće vrednosti Brown-ovog kretanja njegova sadašnja vrednost.

Definicija 4.4. Stohastički proces $\{\dot{W}_t : t \in \Theta\}$ je *Brown-ovo kretanje sa driftom μ i volatilnoću σ* ako važi:

(i) $\dot{W}_t - \dot{W}_s$ ima normalnu raspodelu sa očekivanjem $\mu(t-s)$ i varijansom $\sigma^2(t-s)$, za $s < t$;
(ii) Proces $\dot{W}$ ima nezavisne priraštaje: za svaki izbor tačaka $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, slučajne promenljive $\dot{W}_{t_2} - \dot{W}_{t_1}$, $\dot{W}_{t_3} - \dot{W}_{t_2}$, ... , $\dot{W}_{t_n} - \dot{W}_{t_{n-1}}$ su nezavisne, odnosno, proces ima nezavisne priraštaje;
(iii) $\dot{W}_0 = 0$ skoro sigurno;
(iv) $\{\dot{W}_t : t \geq 0\}$ su skoro sigurno neprekidne funkcije po t.

Može se pokazati, na osnovu osobina normalne rasodele, sledeće

$$\dot{W}_t = \mu t + \sigma W_t.$$

Definicija 4.5. Neka je $\{W_t : t \in [0, T]\}$ Brown-ovo kretanje adaptirano filtraciji $\mathcal{F}_t$, $\sigma \in \mathbb{R}$. *Eksponencijalni martingal* koji odgovara λ je dat sa,

$$Z(t) = e^{\lambda W_t - \frac{\lambda^2}{2}t}$$

što predstavlja specijalan slučaj geometrijskog Brown-ovog kretanja.

TEOREMA 4.1.

Proces Z_t, adaptiran filtraciji $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ je martingal.

Dokaz. Za $0 \leq s \leq t$,

$$E[Z_t|\mathcal{F}_s] = E\left[e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2 t}{2}}|\mathcal{F}_s\right] = E[e^{\sigma W_t}|\mathcal{F}_s]e^{-\frac{\sigma^2 t}{2}} = E\left[e^{\sigma(W_t - W_s) + \sigma W_s}|\mathcal{F}_s\right]e^{-\frac{\sigma^2 t}{2}}$$
$$= E\left[e^{\sigma(W_t - W_s)}|\mathcal{F}_s\right]e^{\sigma W_s}e^{-\frac{\sigma^2 t}{2}}$$

kako je, na osnovu očekivanja lognormalne raspodele,

$$E\left[e^{\sigma(W_t - W_s)}|\mathcal{F}_s\right] = E\left[e^{\sigma(W_t - W_s)}\right] = e^{\frac{1}{2}\sigma^2(t-s)}$$

važi,

$$E[Z_t|\mathcal{F}_s] = e^{\frac{1}{2}\sigma^2(t-s)}e^{\sigma W_s}e^{-\frac{\sigma^2 t}{2}} = e^{\sigma W_s - \frac{\sigma^2 s}{2}} = Z_s$$

■

Primer 4.1.1. Neka je $W(t)$ Brown-ovo kretanje, definišemo funkcije Brown-ovog kretanja koji su martingali:

(i) $M_1(t) = W^2(t) - t$;
(ii) $M_2(t) = W^3(t) - 3tW(t)$;
(iii) $M_3(t) = e^{\lambda W_t - \frac{\lambda^2}{2}t}$.

Dakle, treba da pokažemo da su ispunjeni uslovi,

(i) $W_s^2 - W_t^2 = [W_s - W_t]^2 + 2[W_s - W_t]W_t$,

stoga, za svako $s > t$,

$$E[W_s^2 - W_t^2|W_t)] = E[(W_s - W_t)^2|W_t] + 2E[(W_s - W_t)W_t|W_t]$$

Kako W_t ima nezavisne priraštaje,

$$E[(W_s - W_t)^2|W_t] = E[(W_s - W_t)^2] = s - t$$

i

$$E[(W_s - W_t)W_t|W_t] = W_t E[W_s - W_t|W_t] = W_t E[W_s - W_t] = 0$$

dakle,

$$E[(W_s^2 - s) - (W_t^2 - t)|W_t] = 0$$

odnosno, $M_1(t)$ je martingal.

(ii) Sličnim postupkom pokazujemo za $M_2(t)$, koristimo identitet,

$$\begin{aligned}[W_s^3 - 3sW_s] - [W_t^3 - 3tW_t)] \\ &= [W_s - W_t]^3 + 3[W_s - W_t]^2 W_t + 3[W_t^2 - s][W_s - W_t] \\ &- 3(s-t)W_t\end{aligned}$$

pošto je raspodela $W_s - W_t$ simetrična oko 0, svi njeni neparni momenti iznose 0. Odatle je $E[(W_s - W_t)^3] = 0$. Uslovno očekivanje drugog člana iznosi $3(s-t)W_t$ a uslovno očekivanje trećeg člana je 0. Sledi,

$$E[(W_s^3 - 3sW_s) - (W_t^3 - 3tW_t)|W_t] = 0$$

tj. $M_2(t)$ je martingal.

(iii) Već smo pokazali u teoremi 4.1.

TEOREMA 4. 2

Neka je $W(t)$ neprekidan stohastički proces na prostoru verovatnoća $(\Omega,\ \mathcal{F}, P)$. Tada su ekvivalentna tvrđenja:

(i) $W(t)$ je Brown-ovo kretanje u meri verovatnoće P;
(ii) $W(t)$ i $W^2(t) - t$ su martingali u meri verovatnoće P.

U prethodnim primerima smo pokazali da važi smer (i) ⇒ (ii)

■

Definicija 4. 6. Stohastički proces $\{S_t : t \in [0,T]\}$ prati *aritmetičko Brown-ovo kretanje* sa driftom μ i volatilnošću σ je rešenje stohastičke diferencijalne jednačine sa konstantnim parametrima,

$$dS_t = \mu dt + \sigma dW_t,$$

sa graničnom vrednošću $S_0 = s_0$, gde je $\{W_t : t \in [0,T]\}$ Wiener-ov proces. .

Direktnom integracijom dobijamo,

$$S_t = s_0 + \mu t + \sigma W_t,$$

tj. S_t ima normalnu raspodelu, sa očekivanjem $s_0 + \mu t$ i varijansom $\sigma^2 t$.

U prethodnom odeljku je data osnova za definisanje cene akcije modelu kao geometrijsko Brown-ovo kretanje na diskretnom modelu, u nastavku dajemo njegovu matematičku definiciju.

Definicija 4. 7. Za stohastički proces $\{S_t : t \in [0,T]\}$ se kaže da prati *geometrijsko Brown-ovo kretanje* sa driftom μ i volatilnošću σ ako zadovoljava sledeću stohastičku diferencijalnu jednačinu,

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

sa graničnom vrednošću $S_0 = s_0$.

Rešenje ove stohastičke diferencijalne jednačine može se dobiti direktnom primenom Itô-ve leme o kojoj će biti reč u nastavku.

Napomena 4. 1. Aritmetičko Brown-ovo kretanje se može koristiti za modeliranje prinosa, dok se geometrijsko Brownovo kretanje koristi za modeliranje cena.

4.2. Difuzni procesi i stohastički integrali

Brown-ovo kretanje samo po sebi ne prati dovoljno dobro kretanje raznih procesa cene podloge. Uzimajući ovo u obzir, uopštavamo pristup iz prethodne glave koristeći procese sledećeg oblika,

$$X_{t_{k+1}} = X_{t_k} + \mu\big(t, X_{t_k}\big)\Delta t + \sigma(t, X_{t_k})\sqrt{\Delta t}\, z_{t_k}, \qquad X_0 = x$$

pri čemu z_{t_k} označava nezavisne promenljive sa standardnom normalnom raspodelem, dok su μ i σ determinističke funkcije vremenske promenljive t i promenljive x.

Kada pustimo da $\Delta t \to 0$, dobijamo

$$X_t = x + \int_0^t \mu(u, X_u) + \int_0^t \sigma(u, X_u) dW_u$$

što možemo predstaviti u sledećem obliku,

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \qquad X_0 = x$$

Dobijeni izraz je stohastička diferencijalna jednačina, za proces X, koji se zove *proces difuzije*. Parametar μ se zove *drift*, a σ *difuzna funkcija* procesa X. Ukoliko član dW ne bi postojao, u pitanju bi bila obična diferencijalna jednačina. Ovo su korisna sredstva u modeliranju cene podloge. Brown-ovo kretanje će u tom slučaju predstavljati nesigurnost u vezi budućih cena.

Definicija 4. 8. Neka je dat prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Neka je W_t stohastički proces adaptiran filtraciji $\mathcal{F}_t$, a Y_t lokalno dvaput-integrabilan proces adaptiran istoj filtraciji, tada sa,

$$\int_0^t Y_u dW_u$$

označavamo *Itô-v integral*.

Često se koristi svojstvo, da pod određenim uslovima koje ispunjava Y, Itô-v integral je martingal. Prethodni integral je moguće definisati za proces Y tako da Y_t bude poznato ukoliko su poznate prošle i sadašnje vrednosti W_u, $u \leq t$, Brown-ovog kretanja. Kažemo da je proces Y adaptiran informacijama generisanim Brown-ovim kretanjem.

Uvodimo najvažnije osobine Itô-vog integrala:

TEOREMA 4. 3.

Neka je Y proces adaptiran informacijama koji su dati Brown-ovim kretanjem. Neka je $T > 0$ dato vremensko ograničenje. Pretpostavljamo,

$$E\left[\int_0^T Y_u^2\, du\right] < \infty$$

tada je, za sve $t \leq T$, proces

$$M_t := \int_0^t Y_u dW_u$$

dobro definisan. Štaviše, proces je martingal sa očekivanjem 0 i varijansom $E\left[\int_0^T Y_u^2\, du\right]$. Dakle, za sve $s < t$,

$$E\left[\int_0^t Y_u dW_u\right] = 0$$

$$E\left[\int_0^t Y_u dW_u \middle| W_u, 0 \leq u \leq s\right] = \int_0^s Y_u dW_u$$

$$E\left[\left(\int_0^t Y_u dW_u\right)^2\right] = E\left[\int_0^t Y_u^2 du\right]$$

Da bi pojasnili pojam stohastičkog integrala, možemo posmatrati Y kao portfolio proces koji ne obuhvata šta će se desiti u budućnosti, zbog čega imamo uslov da je Y_t određen informacijama do trenutka t. Takođe, M_t možemo posmatrati kao odgovarajući *proces dobitka*. Kako je $E[M_t] = 0$, objašnjavamo tako što ako investiramo u proces W sa očekivanjem 0, onda naš dobitak takođe ima očekivanje 0.

U opštem slučaju, *proces bogatstva* investitora u neprekidnom vremenu može biti predstavljen stohastičkom diferencijalnom jednačinom. Deo stohastičke diferencijalne jednačine koji sadrži Itô-v integral nam ukazuje da postoji rizična komponenta procesa bogatstva, zbog kojeg ne znamo da li će vrednost investicije u rizičnu aktivu porasti ili opasti. Međutim, svojstvo martingala znači da ova komponenta ima očekivanje 0.

Pokazaćemo na diskretnom slučaju ideju za teoremu. Ako posmatramo diskretan proces dobitka,

$$M(t_l) := \sum_{j=0}^{l-1} Y(t_j)\left[W(t_{j+1}) - W(t_j)\right], \qquad M(0) = 0$$

na osnovu osobina uslovnog očekivanja imamo, za sve $k < l$,

$$E\left[\sum_{j=k}^{l} Y(t_l)\left(W(t_{j+1}) - W(t_j)\right)\right] = \sum_{j=k}^{l} E\left[E\{Y(t_j)(W(t_{j+1}) - W(t_j))|W(0), \dots, W(t_j)\}\right]$$

$$= \sum_{j=k}^{l} E\left[Y(t_j)E(W(t_{j+1}) - W(t_j))\right] = 0 \tag{4.1}$$

Dakle, $E[M(t_l)] = 0$, za sve t_l. Sada, koristeći jednačinu (4.1), pokazujemo svojstvo martingala,

$$\begin{aligned} &E[M(t_l)|W(0), \dots, W(t_k)] \\ &= E\left[\sum_{j=0}^{k-1} Y(t_j)(W(t_{j+1}) - W(t_j)\,|W(0), \dots, W(t_k)\right] \\ &+ E\left[\sum_{j=k}^{l-1} Y(t_j)(W(t_{j+1}) - W(t_j))\,|W(0), \dots, W(t_k)\right] \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} Y(t_j)(W(t_{j+1}) - W(t_j)) + E\left[\sum_{j=k}^{l-1} Y(t_j)(W(t_{j+1}) - W(t_j))\right] = M(t_k) \end{aligned}$$

Varijansu pokazujemo koristeći dva perioda,

$$\begin{aligned} &E\left[\left\{Y(t_0)\left(W(t_1) - W(t_0)\right) + Y(t_1)\left(W(t_2) - W(t_1)\right)\right\}^2\right] \\ &= E\left[Y^2(t_0)\left(W(t_1) - W(t_0)\right)^2\right] + E\left[Y^2(t_1)\left(W(t_2) - W(t_1)\right)^2\right] \\ &+ E\left[Y(t_0)Y(t_1)\left(W(t_1) - W(t_0)\right)\left(W(t_2) - W(t_1)\right)\right] \end{aligned}$$

Dalje, možemo napisati,

$$\begin{aligned} E\left[Y^2(t_1)\left(W(t_2) - W(t_1)\right)^2\right] &= E\left[E\left\{Y^2(t_1)\left(W(t_2) - W(t_1)\right)^2|W(t_0), W(t_1)\right\}\right] \\ &= W\left[Y^2(t_1)E\left\{\left(W(t_2) - W(t_1)\right)^2\right\}\right] = E[Y^2(t_1)\Delta t] \end{aligned}$$

pri čemu analogno dobijamo i izraz za prvu komponentu sa desne strane jednakosti. Poslednja komponenta je 0, kao u izrazu (4.1).

$$\begin{aligned} &E[Y(t_0)Y(t_1)(W(t_1) - W(t_0))(W(t_2) - W(t_1))] \\ &= E\left[Y(t_0)Y(t_1)\left(W(t_1) - W(t_0)\right)E\left(W(t_2) - W(t_1)\right)\right] = 0 \end{aligned}$$

Koristeći prethodne izraze i uopštavanjem procesa na više od dva perioda, dobijamo,

$$E[M^2(t_l)] = E\left[\sum_{j=0}^{l-1} Y^2(t_j)\Delta t\right]$$

što odgovara integralu u neprekidnom modelu datom u teoremi.

∎

Važan instrument u stohastičkom računu je Itô-va teorema, jer predstavlja produžetak pravila diferenciranja u standardnom računu. Intuitivno, u standardnom računu kada posmatramo kako nezavisna promenljiva utiče na vrednost zavisne promenljive, prvi izvod je dovoljan da se oceni taj (lokalni) uticaj. Međutim, u našem slučaju kada nezavisna promenljiva zavisi od Brown-ovog kretanja moramo uzeti u obzir uticaj drugog izvoda. Razlog je u tome što ne znamo kako će se Brown-ovo kretanje promerati u toku sledećeg vremenskog intervala.

TEOREMA (Itô-va) 4.4.

Neka je $u = u(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ neprekidna funkcija definisana na $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ i neka su svi parcijalni izvodi $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_{x_i} = \frac{\partial y}{\partial x_i}$, $u_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, za $i, j = 1,2, \dots, n$, neprekidni na $[0, T] \times \mathbb{R}^n$. Neka je dato n stohastičkih procesa $\{S_i(t): t \in [0. T]\}$ sa diferencijalima,

$$dS_i(t) = F_i dt + G_i dW_t, \quad i = 1,2, \dots., n$$

gde je W_t Brown-ovo kretanje. Tada stohastički proces $Y_t = u(t, S_1(t), S_2(t), \dots, S_n(t))$ ima stohastički diferencijal,

$$dY_t = \left(u_t + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} F_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_{x_i x_j} G_i G_j\right) dt + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} G_i dW_t$$

Specijalno, za $n = 1$,

$$du(t, S_t) = \left(u_t + u_x F + \frac{1}{2} u_{xx} G^2\right) dt + u_x G dW_t$$

∎

Takođe, koristimo sledeća neformalna pravila:

$$dt \cdot dt = 0, \quad dt \cdot dW, \quad dW \cdot dW = dt$$

pri čemu poslednja jednakost potiče iz činjenice da su male promene kvadrata u W na datom intervalu $[0, t]$ približno t. Iz ovih neformalnih pravila sledi,

$$dS \cdot dS = (\mu dt + \sigma dW) \cdot (\mu dt + \sigma dW) = \sigma^2 dt \tag{4.2}$$

Postoji potreba za ovakvim pravilom jer S_t možemo posmatrati kao proces cene akcije, a $u(t, S_t)$ kao cenu opcije na akciju. Itô-va teorama nam daje vezu između njih.

Prisećamo se sada da stohastički proces $\{S_t : t \in [0, T]\}$ prati geometrijsko Brown-ovo kretanje sa driftom μ i volatilnošću σ ako zadovoljava sledeću stohastičku diferencijalnu jednačinu,

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Rešavanjem ove jednačine uz pomoć Itô-ve teoreme ćemo dobiti izraz za proces cene akcije. Za početak, možemo zapisati prethodnu jednačinu na sledeći način,

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

korišćenjem Itô-ve teoreme i (4.2) znamo,

$$\begin{aligned} d[\ln S_t] &= \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2}\frac{1}{{S_t}^2} {dS_t}^2 = \frac{1}{S_t}(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) - \frac{1}{2}\frac{1}{{S_t}^2}(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t)^2 \\ &= \mu dt + \sigma dW_t - \frac{1}{2}\sigma^2 dt = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dW_t \end{aligned}$$

odnosno,

$$\ln S_t - \ln S_0 = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t$$

$$\ln S_t = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t + \ln S_0$$

i dobijamo izraz za proces cena akcije,

$$S(t) = S_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t}$$

Dakle, dati proces prati geometrijsko Brown-ovo kretanje sa driftom μ i volatilnošću σ, pri čemu je S_0 poznata početna vrednost. Proces cena možemo zapisati u obliku stohastičke diferencijalne jednačine ili u obliku procesa.

4.3. Polumartingali

U ovom odeljku uvodimo neprekidne polumartingale i posmatramo njihove osnovne osobine, koje će nam biti potrebne u daljem radu.

Posmatraćemo prostor verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sa filtracijom $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t : 0 \leq t \leq T\}$. Filtracija je rastuća i familija desno-neprekidnih podskupova σ-algebri od $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$, odnosno $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ za sve $0 \leq s \leq t \leq T$ i $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$ za sve $0 \leq t \leq T$.

Ovde su stohastički procesi $\{X_t : 0 \leq t \leq T\}$ neprekidni sa desne strane za $0 \leq t \leq T$ sa levom granicom za $0 \leq t \leq T$. Pretpostavljamo da je proces X_t adaptiran filtraciji $\mathbf{F}$.

Definicija 4.6. Neka je X neprekidan stohastički proces na prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, adaptiran filtraciji $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$, tada je X *predvidljiv proces* ako je X_t jedan $\mathcal{F}_{t-}$-merljiv proces za svako t. (sa – označavamo levu granicu)

Definicija 4.7. Proces X ima *konačnu varijaciju* ako ima ograničenu varijaciju na svakom konačnom intervalu skoro sigurno.

Definicija 4.8. *Vreme zaustavljanja (stopping time)* je slučajna promenljiva $T : \Omega \to [0, \infty]$ takva da $(T \leq t) \in \mathcal{F}_t$ za sve $t \geq 0$.

Kažemo da je T konačan ako se preslikava u $\mathbb{R}^+$, a da je T ograničen ako se preslikava u ograničen podskup od $\mathbb{R}^+$. Ako je X stohastički proces i T je vreme zaustavljanja, označavamo sa X^T proces $X_t^T = X_{T \wedge t}$ i zovemo X^T proces zaustavljen u trenutku T. Štaviše, definišemo σ-algebru vremena zaustavljanja $\mathcal{F}_T$ u trenutku T tako da, $\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F} : A \cap (T \leq t) \in \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0\}$. Dakle, $\mathcal{F}_T$ je σ-algebra, a ako je T konstanta, σ-algebra vremena zaustavljanja je ista kao filtracija σ-algebre, u smislu da je $\{A \in \mathcal{F} : A \cap (s \leq t) \in \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0\} = \mathcal{F}_s$.

Definicija 4.9. Kažemo da rastući niz vremena zaustavljanja koja teži skoro sigurno u beskonačnost je lokalizujući niz. Tada možemo reći da je M *neprekidni lokalni martingal* ako je neprekidan i adaptiran i postoji lokalizujuži niz $\{T_n\}$ takav da je M^{T_n} neprekidni martingal za sve n.

Definicija 4.10. Stohastički proces $\{X_t : 0 \leq t \leq T\}$ definisan na prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}, P)$ je *polumartingal* ako se može zapisati na sledeći način, $X = X_0 + M + A$, pri čemu je X_0 $\mathcal{F}_0$-merljiva slučajna promenljiva, M je neprekidan lokalni martignal sa početnom vrednošću 0, A je ograničen proces varijacije sa početnom vrednošću 0.

Lema 4.1. Neka je $\{X_t : 0 \leq t \leq T\}$ polumartingal. Ako su $X = Z_0 + M + A$ i $X = Y_0 + N + B$ dva načina za dekompoziciju procesa X_t, gde su Z_0 i Y_0 $\mathcal{F}_0$-merljivi, M i N su neprekidni lokalni martingali, a A i B su procesi konačne varijacije. Tada su Z_0 i Y_0 jednaki, a M i N se ne mogu razlikovati, takođe, A i B se ne mogu razlikovati.

Definicija 4.11. *Doléans-Dade eksponencijal*, ili stohastički eksponencijal, polumartingala X je rešenje stohastičke diferencijalne jednačine $dY_t = Y_t dX_t$, sa početnim uslovom $Y_0 = 1$ i označava se sa $\mathcal{E}(X)$. Za svaki polumartingal X, ovaj eksponencijal se dobija koristeći Itovu lemu za polumartingale,

$$Y_t = \exp\left(X_t - X_0 - \frac{1}{2}[X]_t\right) \prod_{s \leq t} (1 + \Delta X_s) \exp\left(-\Delta X_s + \frac{1}{2}\Delta X_s^2\right), \quad t \geq 0$$

Pri čemu je $[X]_t = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \left(X_{t_k} - X_{t_{k-1}}\right)^2$ *kvadratna varijacija*. A $\Delta X_s = X_s - X_{s-}$, skok od X u trenutku s.

Napomena 4. 2. Càdlàg konačna varijacija (svuda desno-neprekidna i ima leve granice svuda) procesa X ima kvadratnu varijaciju koja je jednaka sumi kvadrata skokova od X. Data je sa $[X]_t = \sum_{0\le s\le t} (\Delta X_s)^2$.

Ako je $X_t = \mu t + \sigma B_t$ Brown-ovo kretanje, tada Doléans-Dade eksponencijal je geometrijsko Brown-ovo kretanje. Za svaki neprekidan polumartingal X, korišćenjem Itô-ve leme, pri čemu je $f(Y) = \log(Y)$, dobijamo,

$$d\log(Y) = \frac{1}{Y} dY - \frac{1}{2Y^2} dY = dX - \frac{1}{2} d[X]$$

dakle dobijamo rešenje,

$$Y_t = e^{\left(X_t - X_0 - \frac{1}{2}[X]_t\right)}, \quad t \ge 0$$

Doléans-Dade eksponencijal je koristan kada je X lokalni martingal. Tada je, $\mathcal{E}(X)$, takođe lokalni martingal, pri čemu $\exp(X)$ nije.

5. Girsanov-a teorema

Girsanov-a teorema predstavlja ključan rezultat u stohastičkom računu. Uopšteno govoreći, Girsanov-a teorema kaže da za dato rešenje stohastičke diferencijalne jednačine možemo da prilagodimo verovatnoću svake putanje procesa tako da Itô-v proces pod odgovarajućom novom merom verovatnoće ima određeni drift.

Ova teorema ima mnoge primene u teoriji vrednovanja opcija. Vrednovanje opcija često zahteva nalaženje mere verovatnoće pod kojom proces cena hartije od vrednosti ima isti prinos kao račun tržišta novca ili proces po našem izboru. Stoga, Girsanov-a teorema je korisna u pronalaženju takve mere verovatnoće.

U teoriji stohastičkih procesa Girsanov-a teorema je značajna jer daje ključan rezultat da ukoliko je Q neprekidna mera u odnosu na P, onda je svaki P-polumartingal takođe i Q-polumartingal. U teoriji verovatnoće, Girsanov-a teorema opisuje kako se stohastički procesi menjaju kada se prvobitna mera promeni u ekvivalentnu meru verovatnoće. Teorema je posebno značajna u teoriji matematike finansija jer pokazuje kako da se promeni fizička mera, koja opisuje verovatnoću da podloga uzme određenu vrednost, u rizik-neutralnu meru. Ova procedura se pokazuje vrlo korisnom prilikom vrednovanja derivata.

TEOREMA (Girsanov) 5.1.

Neka je $\{W_t : t \in [0,T]\}$ Brown-ovo kretanje na prostoru verovatatnoća $(\Omega,\ \mathcal{F}, P)$, gde je $\mathcal{F}_t$, $t \in [0,T]$, odgovarajuća filtracija, i neka je $b(t)$, $t \in [0,T]$, stohastički proces adaptiran ovoj filtraciji, za koji važi,

$$E^P\left(e^{\frac{1}{2}\int_0^T b_t^2 dt}\right) < \infty \tag{5.1}$$

Definišemo realnu funkciju $Q(\cdot)$ tako da za sve $A \in \mathcal{F}$,

$$Q(A) = E[I_A Z_b(T)] = \int_A Z_b(T)\, dP \tag{5.2}$$

gde je,

$$Z_b(T) = \exp(\int_0^T b_t dW_t - \frac{1}{2}\int_0^T b_t^2 dt)$$

Tada je Q mera verovatnoće na $(\Omega,\ \mathcal{F})$, koja je ekvivalentna meri P. Odnosno, $Z_b(T)$ je Radon-Nikodym-ov izvod Q u odnosu na P, a stohastički proces

$$\widetilde{W}(t) = -\int_0^t b_s ds + W_t\,, \quad t \in [0,T]$$

je Brown-ovo kretanje u meri verovatnoće Q.

Napomena 5. 1. Pre nego što dokažemo daćemo intuitivno objašnjenje teoreme. Desna strana izraza, $-\int_0^t b_s ds + W_t$, predstavlja stohastički proces sa unapred određenim driftom $\int_0^t b_s ds$ u prvobitnoj meri P, kako W_t ima drift 0 u meri P. Da bi nestao drift, prilagođavamo verovatnoću svake putanje u skladu sa (5.2), pri čemu A možemo posmatrati kao putanju do trenutka T. Tačnije, Radon-Nikodym-ov izvod $Z_b(T)$ je faktor kojim prilagođavamo i nova putanja verovatnoće, $Q(A)$, jednaka je proizvodu $Z_b(T)A$ i staroj meri verovatnoće $P(A)$.

Dokaz.

Definišemo stohastički proces,

$$Z_b(t) = \exp(\int_0^t b_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t b_s^2 ds)$$

Proces je martingal u meri P, što možemo pokazati,

$$dZ_b(t) = -b(t)Z_b(t)dW_t + \frac{1}{2}b^2(t)Z_b(t)dt = -b(t)Z_b(t)dW_t$$

Kako je $Z_b(0) = e^0 = 1$ i $Z_b(t)$ je martingal, važi da je $E[Z_b(t)] = 1$ za svako $t \geq 0$. Stoga,

$$Q(\Omega) = E[Z_b(t)] = Z_b(0) = 1$$

Iz definicije (5.2) se može videti da je nenegativna i aditivna na $\mathcal{F}$, odnosno, da je Q zaista mera verovatnoće na $(\Omega, \mathcal{F})$. Kako je $Z_b(t)$ uvek konačna i pozitivna, mere verovatnoće Q i P su ekvivalentne, što možemo pokazati,

$$P(A) = 0 \xRightarrow{Z_b(T)>0} Q(A) = \int_A Z_b(T)dP = 0$$

$$Q(A) = 0 \Rightarrow \int_A Z_b(T)dP = 0 \xRightarrow{Z_b(T)>0} P(A) = 0$$

Takođe važi da je $E^P[X] = E^Q[Z_T X]$, možemo demonstrirati na slučaju kada je $X = I_A$, tj. indikator slučajna promenljiva

$$E^Q[X] = Q(A) = \int_A Z_T dP = \int_\Omega Z_T I_A dP = E(Z_T X)$$

Sada, pokažimo da je $\widetilde{W}(t)$ Brown-ovo kretanje u meri verovatnoće Q. Znamo iz odeljka o Brown-ovom kretanju da je $\widetilde{W}(t)$ Brown-ovo kretanje ako i samo ako za svaki realan broj λ važi da je,

$$Z_\lambda(t) = e^{\lambda \widetilde{W}(t) - \frac{1}{2}\lambda^2 \mathrm{t}}$$

martingal. Treba da pokažemo da za sve $s > t$,

$$E[Z_\lambda(s)|\mathcal{F}_t] = Z_\lambda(t)$$

Za svako $A \in \mathcal{F}_t$, važi,

$$\int_A E^Q[Z_\lambda(s)|\mathcal{F}_t]dQ$$

$$= \int_A E^Q[Z_\lambda(s)|\mathcal{F}_t]Z_b(T)dP$$

$$= \int_A E[E^Q(Z_\lambda(s)|\mathcal{F}_t)Z_b(T)|\mathcal{F}_t]dP = \int_A E^Q[Z_\lambda(s)|\mathcal{F}_t]Z_b(T)dP$$

Sa druge strane,

$$\int_A E^Q[Z_\lambda(s)|\mathcal{F}_t]dQ = \int_A Z_\lambda(s)dQ = \int_A Z_\lambda(s)Z_b(T)dP = \int_A E[Z_\lambda(s)Z_b(T)|\mathcal{F}_t]\,dP$$
$$= \int_A E[E(Z_\lambda(s)Z_b(T)|\mathcal{F}_s)|\mathcal{F}_t]\,dP = \int_A E[Z_\lambda(s)Z_b(s)|\mathcal{F}_t]dP$$

Kako su $E^Q[Z_\lambda(s)|\mathcal{F}_t]Z_b(T)$ i $E[Z_\lambda(s)Z_b(s)|\mathcal{F}_t]$ slučajne promenljive u odnosu na $\mathcal{F}_t$, sledi iz jedinstvenosti uslovnog očekivanja da važi,

$$E^Q[Z_\lambda(s)|\mathcal{F}_t]Z_b(T) = E[Z_\lambda(s)Z_b(s)|\mathcal{F}_t] \tag{5.3}$$

Sada pokažimo da je $Z_\lambda(s)Z_b(t)$ martingal u meri P. Kako je,

$$Z_\lambda(t) = \exp(\lambda W_t - \lambda \int_0^t b_s ds - \frac{1}{2}\lambda^2 t)$$

i

$$Z_b(t) = \exp(\int_0^t b_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t b_s^2 ds)$$

$$Z_\lambda(t)Z_b(t) = \exp\left(\int_0^t [\lambda + b_s]\,dW_s - \frac{1}{2}\left[\lambda^2 t + 2\lambda \int_0^t b_s ds + \int_0^t b_s^2 ds\right]\right)$$
$$= \exp\left(\int_0^t [\lambda + b_s]dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t [\lambda + b_s]^2 ds\right)$$

odnosno, $Z_\lambda(t)Z_b(t)$ je eksponencijalni martingal, gde je $b_t^* = \lambda + b_t$ u meri P. Tada je $Z_\lambda(t)Z_b(t)$ martingal i važi,

$$E[Z_\lambda(s)Z_b(s)|\mathcal{F}_t] = Z_\lambda(t)Z_b(t)$$

Iz (5.3) sledi,

$$E^Q[Z_\lambda(s)|\mathcal{F}_t]Z_b(t) = E[Z_\lambda(s)Z_b(s)|\mathcal{F}_t] = Z_\lambda(t)Z_b(t)$$

Kako je $Z_b(t)$ strogo pozitivno, imamo,

$$E^Q[Z_\lambda(s)|\mathcal{F}_t] = Z_\lambda(t)$$

Dakle, $Z_\lambda(t)$ je martingal u meri verovatnoća Q. Zaključujemo da je stohastički proces $\widetilde{W}(t)$ Brown-ovo kretanja u meri verovatnoća Q.

■

5.1. Druga verzija Girsanov-e teoreme

Na osnovu dokaza Girsanov-e teoreme možemo da donesemo još zaključaka. Najpre, važi da je, za svako t, slučajna promenljiva $Z_b(t)$ Radon-Nikodym-ov izvod mere P u odnosu na meru Q na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F})$. Drugim rečima, $Z_b(t)$ je faktor kojim prilagođavamo putanje do trenutka t. Dalje, znamo iz definicije $\widetilde{W}(t)$ da važi

$$d\widetilde{W}(t) = -b(t)dt + dW(t) \tag{5.4}$$

Kako je,

$$Z_b^{-1}(t) = \exp\left(-\int_0^t b_s dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t b_s^2 ds\right)$$

ubacivanjem umesto $dW(s)$, $b(s)ds + d\widetilde{W}(s)$, dobijamo da inverzni proces $Z_b^{-1}(t)$ možemo zapisati na sledeći način,

$$Z_b^{-1}(t) = \exp\left(-\int_0^t b_s d\widetilde{W}_s - \frac{1}{2}\int_0^t b_s^2 ds\right)$$

Budući da je $\widetilde{W}(t)$ Brown-ovo kretanje u meri verovatnoća Q , $Z_b^{-1}(t)$ je eksponencijalni martingal u meri verovatnoća Q. Odatle je $Z_b(t)$ martingal u meri P a $Z_b^{-1}(t)$ martingal u meri Q. Ova osobina se često koristi kada treba da promenimo meru verovatnoća Q i vratimo u meru P i obratno.

Posmatrajmo sada stohastičku diferencijalnu jednačinu u novoj meri Q,

$$dX = \alpha(t,X)dt + \sigma(t,X)dW, \quad 0 \le t \le T \tag{5.5}$$

Dobijamo sledeće, na osnovu (5.4),

$$dX = \alpha(t,X)dt + \sigma(t,X)\left[b_t dt + d\widetilde{W}_t\right] = [\alpha(t,X) + \sigma(t,X)b_t]dt + \sigma(t,X)d\widetilde{W}_t$$

Dakle, u novoj meri verovatnoća Q, stohastička diferencijalna jednačina ima novi drift $\alpha(t,X) + \sigma(t,X)b_t$, ali istu volatilnost $\sigma(t,X)$. Proizilazi iz prethodnog druga verzija Girsanov-e teoreme.

TEOREMA 5. 2.

Neka je $X(t)$ rešenje stohastičke diferencijalne jednačine (5.5), gde je $\sigma(t,X)$ pozitivna funkcija. Takođe, neka je $\beta(t,X)$ neprekidna funkcija takva da je,

$$\frac{\beta(t,X) - \alpha(t,X)}{\sigma(t,X)}$$

ograničeno. Tada, postoji mera verovatnoće Q u kojoj je $X(t)$ rešenje sledeće stohastičke diferencijalne jednačine,

$$dX = \alpha(t,X)dt + \sigma(t,X)d\widetilde{W}$$

pri čemu je $\widetilde{W}(t)$ Brown-ovo kretanje u meri Q. Štaviše, Radon-Nikodym-ov izvod od Q u odnosu na P iznosi,

$$\frac{dQ}{dP} = \exp\left(\int_0^T b_t\, dW_t - \frac{1}{2}\int_0^T b_t^2 dt\right)$$

gde je,

$$b(t) = \frac{\beta\big(t, X(t)\big) - \alpha(t, X(t))}{\sigma(t, X(t))}$$

■

Druga verzija Girsanov-e teoreme predstavlja važan rezultat za neprekidne finansijske modele. Često moramo da pronađemo meru verovatnoće za koju rizična hartija ima određeni drift, a ovaj slučaj Girsanov-e teoreme nam omogućava da pronađemo takvu meru.

5.2. Rizik-neutralna mera

Rizik-neutralna mera, ekvivalentna martingalna mera ili Q-mera je mera verovatnoće koja proizilazi iz pretpostavke da je trenutna vrednost svih aktiva jednaka očekivanoj diskontovanoj budućoj vrednosti tih aktiva nerizičnom kamatnom stopom. Kako cena aktive zavisi značajno od rizika, neophodno je izračunatu očekivanu vrednost tih aktiva prilagoditi tom riziku. Da bi odredili cenu derivata, prvo prilagođavamo verovatnoće budućih ishoda tako da ne uključuju efekat rizika, a zatim određujemo očekivanje pod prilagođenim verovatnoćama, koje se nazivaju rizik-neutralne verovatnoće.

U ovom odeljku izvodimo rizik-neutralnu meru za proces cena akcije, prvo definišimo rizik neutralnu meru za naš model,

Definicija 5.1. *Rizik-neutralna mera* je mera Q koja je ekvivalentna meri P u kojoj su sve diskontovane cene aktive martingali.

Dakle, posmatramo sledeći proces cena akcije, koja prati geometrijsko Brown-ovo kretanje,

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dW(t)$$

pri čemu označavamo sa $\tilde{S}(t)$ proces diskontovanih cena akcije,

$$\tilde{S}(t) = e^{-rt}S(t)$$

Nalazimo sada diferencijalnu jednačinu za diskontovani proces cena akcije za konstantnu nerizičnu kamatnu stopu,

$$\begin{aligned} d[e^{-rt}S(t)] &= -re^{-rt}S_t dt + e^{-rt}dS_t = e^{-rt}(-rS_t dt + dS_t) \\ &= e^{-rt}(-rS_t dt + \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) = e^{-rt}\big((\mu - r)S_t dt + \sigma dW_t\big) \\ &= e^{-rt}\sigma S_t\left(\frac{\mu - r}{\sigma}dt + dW_t\right) \end{aligned}$$

Treba da dobijemo meru Q, tako da je Q ekvivalentno meri P i $\tilde{S}(t)$ je martingal u meri Q. Prethodnu diferencijalnu jednačinu za cenu akcije možemo napisati na sledeći način,

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = rdt + (\mu - r)dt + \sigma dW_t = rdt + \sigma\left(\frac{\mu - r}{\sigma}dt + dW_t\right)$$

Sada možemo da primenimo Girsanov-u teoremu, pri čemu je,

$$b(t) = \frac{\mu - r}{\sigma}$$

$\mathcal{F}_t$-merljiv, jer su μ, r i σ $\mathcal{F}_t$-merljivi. Brown-ovo kretanje dobija sledeći oblik,

$$\widetilde{W}(t) = \frac{\mu - r}{\sigma}t + W_t$$

diferenciranjem dobijamo,

$$d\widetilde{W}(t) = dW_t + \frac{\mu - r}{\sigma}dt$$

Stoga, dobijamo sledeći izraz za proces diskontovanih cena,

$$d[e^{-rt}S(t)] = \sigma e^{-rt}S_t d\widetilde{W}_t$$

koji predstavlja martingal u novoj meri Q.

Ovim postupkom smo definisali rizik-neutralnu meru Q u kojoj cena akcije zadovoljava jednačinu,

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = rdt + \sigma d\widetilde{W}_t$$

pri čemu je $\widetilde{W}_t$ Brown-ovo kretanje u meri Q.

6. Black-Scholes model

Model koji nam daje formulu za vrednost opcije sadrži mali broj parametara koji opisuju osnovu cene podloge. Uvođenje više parametara bi značilo da možemo bolje da prilagodimo model podacima u stvarnom svetu. Međutim, više parametara takođe znači manje preciznosti u njihovom određivanju i više poteškća u analitičkom i numeričkom istraživanju modela i procesa cena. Štaviše, takav model će sa manje sigurnosti pratiti stvarni svet, dok korišćenje dovoljnog broja parametara može da odgovara bilo kom skupu istorijskih podataka, iako ne služi dobro za predviđanje budućih ishoda podloge.

Glavno ekonomsko opravdanje za korišćenje Brown-ovog kretanja u ovom modelu jeste pretpostavka slučajnog hoda, koja obezbeđuje da se cena kreće potpuno slučajno. Najpre uvodimo pretpostavke modela.

Pretpostavljamo da se tržište sastoji od: prostora verovatnoće $(\Omega,\ \mathcal{F}, P)$, Brown-ovog kretanja $\{W_t: t \in [0,T]\}$ i filtracije $\{\mathcal{F}_t: t \in [0,T]\}$ na tom prostoru, rizične aktive, tj. akcije $S(t)$, nerizične aktive, tj. obveznice $B(t)$, i konačnog vremenskog trenutka T, odnosno datuma dospeća.

Pretpostavke modela su:

- nema troškova transakcije;
- aktiva ne plaća dividende;
- nema arbitraže;
- tržište je kompletno;
- moguće je neprekidno trgovati aktivama;
- dozvoljena je kratka prodaja;
- nerizična kamatna stopa je konstantna;
- cena akcije prati geometrijsko Brown-ovo kretanje.

Dakle, imamo nerizičnu aktivu B koja predstavlja obveznicu ili račun u banci. Pretpostavljamo da važi sledeće za proces obveznice,

$$dB_t = rB_t dt, \quad B_0 = 1$$

gde je $r > 0$ konstanta, bezrizična kamatna stopa. Rešavanjem diferencijalne jednačine dobijamo,

$$B(t) = e^{rt}$$

Kažemo da je aktiva nerizična, pošto ne sadrži stohastičku komponentu, tj. u njenoj diferencijalnoj jednačini nema Brown-ovog kretanja. Buduća vrednost aktive je poznata, kao što je slučaj u stvarnosti sa obveznicom kod koje ne postoji mogućnost neizvršenja novčanih obaveza. Takođe, postoji rizična aktiva, predstavljena akcijom. Cena akcije zadovoljava sledeći Black-Scholes model:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad S_0 = s$$

kada bi konstanta $\sigma > 0$ bila blizu nuli, akcija bi se ponašala kao nerizična investicija, tj. kao bankovni račun ili obveznica sa kamatnom stopom μ. Rešavanjem stohastičke diferencijalne jednačine dobijamo formulu za cenu akcije u modelu,

$$S(t) = S(0)e^{\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma W_t}$$

Definicija 6.1. Tržišna strategija je uređeni par (η, ξ) adaptiranih procesa takvih da važi,

$\int_0^T |\eta_t| dt < \infty$ skoro sigurno, $E\left(\int_0^T \xi_t^2 dt\right) < \infty$, $\int_0^T \xi_t^2 S_t^2 dt < \infty$ skoro sigurno.

Pri čemu $\xi(t)$ nazivamo *procesom portfolia*. Pretpostavlja se da agent ne zna ništa o budućnosti, pa je $\xi(t)$ određen informacijama do trenutka t. Drugi uslov znači da je $\int_0^t \xi(u)dW(u)$ dobro definisani proces martingala. Takav portfolio se naziva *dopustiv portfolio*. Razlog za uvođenje klase strategija leži u mogućnosti neprekidnog trgovanja zbog čega dolazi do strategija koje rezultiraju u arbitraži čak i u normalnim uslovima tržišta, stoga se takve strategije ne uzimaju u obzir. U tom slučaju vrednost portfolia u trenutku t predstavlja stohastički proces,

$$V_t^{(\eta,\xi)} = \eta(t)B(t) + \xi(t)S(t)$$

Definicija 6.2. Tržišna strategija (η, ξ) je *samofinansirajuća* ako važi,

$$dV_t^{(\eta,\xi)} = \eta(t)dB(t) + \xi(t)dS(t)$$

Definicija 6.3. Tržišna strategija (η, ξ) je *dopustiva* ako je samofinansirajuća i ako njena diskontovana vrednost,

$$\widetilde{V}_t^{(\eta,\xi)} = \frac{dV_t^{(\eta,\xi)}}{B(t)} = \eta(t) + \xi(t)\frac{S(t)}{B(t)}$$

zadovoljava sledeće,

(i) $\widetilde{V}_t^{(\eta,\xi)} \geq 0$, za sve $t \in [0, T]$;
(ii) $E\left[\widetilde{V}_t^{(\eta,\xi)^2}\right] < \infty$, za sve $t \in [0, T]$.

Definicija 6.4. Finansijski derivat H se može *hedžirati*, ako postoji dopustiva strategija (η, ξ), takva da važi,

$$H = V_T^{(\eta,\xi)}$$

Prema prethodnom zaključujemo da hedžing derivata predstavlja investiranje u portfolio koji replicira krajnji novčani tok tog derivata.

TEOREMA 6.1. U modelu Black-Scholes-a derivat oblika $H = h(S_T)$ je moguće hedžirati i njegova vrednost u trenutku t iznosi,

$$V_t = V_t^{(\eta,\xi)} = E^Q\left[e^{-(T-t)}h(S_T)\middle|\mathcal{F}_t\right]$$

U nastavku izvodimo izraz za vrednost opcije, a kako je vrednost opcije funkcija koja zavisi od cene akcije, možemo primeniti Itô-vu formulu na vrednost portfolia,

$$
\begin{aligned}
dV(S_t,t) &= \frac{\partial V(S_t,t)}{\partial S_t}dS_t + \frac{\partial V(S_t,t)}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V(S_t,t)}{\partial S_t^2}dS_t dS_t \\
&= \frac{\partial V(S_t,t)}{\partial S_t}(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) + \frac{\partial V(S_t,t)}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V(S_t,t)}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2 dt
\end{aligned}
$$

Sređivanjem dobijamo sledeću stohastičku diferencijalnu jednačinu,

$$dV(S_t,t) = \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + dW_t + \left(\mu S_t \frac{\partial V(S_t,t)}{\partial S_t} + \frac{\partial V(S_t,t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V(S_t,t)}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2\right)dt$$

Neka je sada,

$$\Pi(t) = V(S_t,t) - \Delta S_t$$

portfolio koji sadrži jednu opciju i $-\Delta$ akcija. Posmatramo promenu u vrednosti portfolia u trenutku dt,

$$d\Pi(t) = dV(S_t,t) - \Delta dS_t$$

gde za Δ pretpostavljamo da ostaje konstantna. Znajući stohastičke diferencijalne jednačine koje zadovoljavaju $V(S_t,t)$ i S_t, dobijamo sledeću stohastičku diferencijalnu jednačinu za vrednost portfolia,

$$
\begin{aligned}
d\Pi(t) = \sigma S_t &\left(\frac{\partial V(S_t,t)}{\partial S_t} - \Delta\right)dW_t \\
&+ \left(\mu S_t \frac{\partial V(S_t,t)}{\partial S_t} + \frac{\partial V(S_t,t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V(S_t,t)}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2 - \mu\Delta S_t\right)dt
\end{aligned}
$$

Neka je $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$, sledi,

$$d\Pi(t) = \left(\frac{\partial V(S_t,t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V(S_t,t)}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2\right)dt$$

Novac investiran u vrednosti $\Pi(t)$ u banku po nerizičnoj kamatnoj stopi r zadovoljava sledeće,

$$d\Pi(t) = r\Pi(t)dt$$

Na osnovu pretpostavke da nema arbitraže možemo izjednačiti prethodne jednačine i sređivanjem dobijamo Black-Scholes parcijalnu diferencijalnu jednačinu,

$$\frac{\partial V(S_t,t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V(S_t,t)}{\partial S_t^2} + r\frac{\partial V(S_t,t)}{\partial S_t}S_t - rV(S_t,t) = 0$$

čije uslove treba odrediti da bi rešenje bilo jedinstveno. U trenutku $t = T$, vrednost prodajne opcije je,

$$P(S(T),T) = \max\{K - S(T), 0\}$$

Ako je $S(t) = 0$ u nekom trenutku, cena akcije se neće menjati stoga je,

$$P(0,T) = K$$

pri čemu diskontovanjem po nerizičnoj kamatnoj stopi dobijamo prvi granični uslov po prostornoj promenljivoj,

$$P(0,t) = Ke^{-r(T-t)}$$

Kada pustimo $S(t) \to \infty$, dobijamo drugi granični uslov po prostornoj promenljivoj, odnosno $\lim_{S(t)\to\infty}(S(t),t) = 0$. Black-Scholes diferencijalna jednačina predstavlja linearnu parcijalnu diferencijalnu jednačinu paraboličnog tipa, sa graničnim uslovima,

$$P(S(T),T) = \max\{K - S(T), 0\}$$

$$P(0,t) = Ke^{-r(T-t)}$$

$$\lim_{S(t)\to\infty}(S(t),t) = 0$$

Rešenje za evropsku prodajnu opciju dobijamo kada se posle transformacije primeni rešenje za jednačinu provođenja toplote iz fizike ($u_t = Ku_{xx}$, gde je $u(x,t)$),

$$P(S(t),t) = -S(t)\Phi(-d_1) + Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2)$$

pri čemu je Φ funkcija normalne $(0,1)$ raspodele i,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

7. Shot-noise procesi i minimalna martingalna mera

Ovde ćemo predstaviti model cena akcije koji obuhvata shot-noise efekat. Otuda, pojava skoka u ceni je dozvoljena, međutim efekat takve pojave opada u toku vremena. Ovakav model opisuje nekompletno tržište, tako da martingalna mera nije jedinstvena. Izvodićemo minimalnu martingalnu meru preko neprekidnih metoda.

Prvo definišimo procese koji će nam biti značajni u daljem radu i pojam minimalne martingalne mere. U nastavku ćemo dati postavku za uopšten shot-noise proces, pri čemu analiziramo model u neprekidnom vremenu i izvešćemo minimalnu martingalnu meru. Martingalne mere su značajne za vrednovanje derivata i finasijskih aktiva. Dakle, ove cene se u stvari dobijaju kao očekivanje diskontovanih novčanih tokova u trenutku dospeća u odgovarajućoj meri.

7.1. Poason-ov i Cox-ov proces

Poasonov proces je najvažniji proces prebrojavanja, ima sličnu poziciju za procese prebrojavanja kao Wiener-ov proces za procese difuzije.

Definicija 7.1. *Poason-ov proces* $\{N(t): t \geq 0\}$ je stohastički proces koji prebrojava koliko puta se desio neki događaj do trenutka t, a ima sledeće dodatne osobine:

(i) $N(0) = 0$;
(ii) proces je stacionaran sa nezavisnim priraštajima;
(iii) $P[N(t) = n] = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0,1,2 \ldots$

Gde poslednja osobina znači da broj događaja u intervalu dužine t ima Poason-ovu raspodelu sa parametrom λt.

Definicija 7.2. Neka je $(X, \mathcal{F})$ prostor sa σ-algebrom $\mathcal{F}$ i konačnom merom μ. Slučajna mera N na $(X, \mathcal{F})$ je Poasonova sa parametrom μ ako važi:

(i) za svako A iz $\mathcal{F}$, slučajna promenljiva $N(A)$ ima Poasonovu rapodelu sa parametrom $\mu(A)$;
(ii) ako se skupovi $A_1, \ldots, A_n$ iz $\mathcal{F}$ ne seku, slučajne promenljive $N(A_1), \ldots, N(A_n)$ su nezavisne, za sve $n \geq 2$.

Definicija 7.3. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća sa datom filtracijom $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t: t \geq 0\}$ i neka je λ nenegativan realan broj. Proces prebrojavanja N je Poason-ov proces sa *intenzitetom* λ adaptiran filtraciji **F** ako zadovoljava sledeće uslove:

(i) N je adaptiran filtraciji **F**;
(ii) za sve $s \leq t$ slučajna promenljiva $N_t - N_s$ je nezavisna od $\mathcal{F}_s$;
(iii) za sve $s \leq t$ uslovna raspodela $N_t - N_s$ je data sa,

$$P[N_t - N_s | \, \mathcal{F}_s] = e^{-\lambda(t-s)}\frac{\lambda^n (t-s)^n}{n!}, \quad n = 0,1,2 \ldots$$

Možemo neformalno definisati uslovnu verovatnoću skoka u jedinici vremena,

$$\frac{P[dN_t | \mathcal{F}_{t-}]}{dt}$$

pri čemu je dN određen sa, $dN_t = N_t - N_{t-} = N_t - N_{t-dt}$, a σ-algebra $\mathcal{F}_{t-}$ je definisana sa, $\mathcal{F}_{t-} = \bigvee_{0 \leq s < t} \mathcal{F}_s$. Primećujemo da priraštaj dN_t ima dve moguće vrednosti, $dN_t = 0$ ili $dN_t = 1$

u zavisnosti od toga da li se događaj desio u trenutku t. Stoga, možemo zapisati uslovnu verovatnoću skoka kao očekivanu vrednost,

$$P[dN_t = 1|\mathcal{F}_{t-}] = E^P[dN_t = 1|\mathcal{F}_{t-}]$$

Pretpostavimo sada da je N Poason-ov proces sa intenzitetom λ, i da predstavlja realan broj blizu nule. Onda imamo,

$$P[N_t - N_{t-h} = 1|\mathcal{F}_{t-}] = e^{-\lambda h}\lambda h$$

proširivanjem eksponencijalne funkcije imamo,

$$P[N_t - N_{t-h} = 1|\mathcal{F}_{t-}] = \lambda h \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda h)^n}{n!}$$

kada pustimo da $h \to dt$,

$$P[dN_t = 1|\mathcal{F}_{t-}] = \lambda dt, \text{ ili } E^P[dN_t = 1|\mathcal{F}_{t-}] = \lambda dt$$

Iz ove neformalne definicije, dolazimo do jednostavnijeg oblika formule koji ima značajnu intuitivnu vrednost. Parametar λ možemo interpretirati kao *uslovni intenzitet skoka*. Drugim rečima, λ predstavlja (uslovni) broj skokova u jedinici vremena.

Cox-ov proces, ili duplo stohastički Poason-ov proces, igra važnu ulogu u teoriji procesa i njihovoj primeni. Kod Cox-ovog procesa se pretpostavlja da je funkcija intenziteta stohastička funckija. Ovaj proces obezbeđuje fleksibilnost tako što dopušta da funkcija intenziteta ne samo zavisi od vremena, već i dozvoljavajući da bude stohastički proces. Proces λ_t se koristi da generiše drugi proces N_t ponašajući se kao intenzitet tog procesa. Dakle, u pitanju je Poason-ov proces koji zavis od λ_t, koji je takođe stohastički. Intiutivna ideja Cox-ovog procesa je jednostavna, i grubo je možemo opisati na sledeći način:

1. posmatramo fiksirani slučajni proces λ na prostoru verovatnoća Ω;
2. fiksiramo jednu trajektoriju od λ, recimo onu koja odgovara ishodu $\omega \in \Omega$;
3. za fiksirano ω, preslikavanje $t \to \lambda_t(\omega)$ je deterministička funkcija vremena;
4. konstruišemo, za fiksirano ω, proces prebrojavanja N koji predstavlja Poasonov proces sa funkcijom intenziteta $\lambda(\omega)$;
5. ponavljamo postupak za sve $\omega \in \Omega$;

Dakle, zavisno od čitave λ-trajektorije, proces N je Poason-ov sa određenom λ-trajektorijom kao funkcijom intenziteta. Sledi matematička definicija Cox-ovog procesa,

Definicija 7.4. Neka je dat prostor verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, koji sadrži proces prebrojavanja N kao i nenegativan proces λ. Kažemo da je N *Cox-ov proces* sa procesom intenziteta λ ako relacija,

$$E\left[e^{iu(N_t - N_s)}|\mathcal{F}_s^{\,N} \vee \mathcal{F}_\infty^{\,\lambda}\right] = e^{\Lambda_{s,t}(e^{iu}-1)}$$

važi za sve $s < t$, gde je

$$\Lambda_{s,t} = \int_s^t \lambda_u du$$

7.2. Minimalna martingalna mera

Osnovna ideja minimalne martingalne mere je prvo korišćena kao tehnička podrška za lokalnu minimizaciju rizika. Tačnije, strategija za lokalnu minimizaciju rizika za dati finansijski derivat H je preuzeta odatle i integrisana u klasičnu Galtchouk-Kunita-Watanabe dekompoziciju od H u meri $\hat{P}$. Minimalna martingalna mera je pronašla i druge primene i postala vrlo korišćena, posebno u modelima sa neprekidnim procesima cena.

Neka je $S = \{S_t\}$ stohastički proces na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathbf{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ koji modelira diskontovane cene aktive kojima se trguje na tržištu. *Ekvivalentna lokalna martingalna mera* za S je mera verovatnoće Q koja je ekvivalentna prvobitnoj meri P tako da je S lokalni Q-martingal.

Ako je S nenegativan polumartingal u meri Q, fundamentalna teorema vrednovanja kaže da ekvivalentna lokalna martingalna mera Q za S postoji ako i samo ako S zadovoljava uslov odsustva arbitraže. Na osnovu Girsanov-e teoreme, S je onda u meri P polumartingal sa zapisom $S = S_0 + M + A$, gde je M lokalni P-martingal i A adaptirani proces sa konačnom varijacijom. Kažemo da S zadovoljava strukturni uslov ako je M lokalno dva puta integrabilan u meri P i A ima oblik $A = \int d\langle M\rangle\, \lambda$ za predvidljiv proces λ takav da rastući proces $\int \lambda' d\langle M\rangle \lambda$ je konačne vrednosti.

Definicija 7.5. Neka S zadovoljava strukturni uslov. Ekvivalentna minimalna martingalna mera $\hat{P}$ za proces S sa dva puta integrabilnom, u meri P, *gustinom* $\frac{d\hat{P}}{dP}$ se naziva *minimalnom martingalnom merom* za S ako je $\hat{P} = P$ na $\mathcal{F}_0$ i ako je svaki lokalni P-martingal L koji je lokalno P-dvaput-integrabilan i P-ortogonalan u odnosu na M je takođe lokalni $\hat{P}$-martingal.

Neka S zadovoljava strukturni uslov. Za svaku ekvivalentnu minimalnu martingalnu meru Q za S, gde je $\frac{dQ}{dP} \in \boldsymbol{L}^2(P)$, proces gustine ima sledeći oblik,

$$L^Q := \frac{dQ}{dP}\Big|_{\mathcal{F}} = L_0^Q \mathcal{E}\left(-\int \lambda dM + E^Q\right)$$

gde je E^Q lokalan P-dvaput-integrabilan lokalni P-martingal. Ako minimalna martingalna mera $\hat{P}$ postoji, onda je $\hat{L}_0 = 1$ i $E^{\hat{P}} \equiv 0$, a proces gustine je dat stohastičkim eksponencijalom

$$\hat{L} = \mathcal{E}\left(-\int \lambda dM\right) = \exp\left(-\int \lambda dM - \frac{1}{2}\int \lambda' d\langle M\rangle \lambda\right) \prod (1 - \lambda' \Delta M) \exp\left(\lambda' \Delta M + \frac{1}{2}\left(\lambda' \Delta M\right)^2\right)$$

Prednost ovakvog eksplicitnog zapisa je u tome što je moguće odrediti minimalnu martingalnu meru $\hat{P}$ i proces gustine $\hat{L}$ direktno iz M i λ, koji potiču iz kanoničke dekompozicije od S. Dolazimo do uslova postojanja minimalne martingalne mere:

(i) $\hat{L}$ je strogo pozitivna, što važi ako i samo ako $\lambda^{\prime}\Delta \mathrm{M} < 1$, odnosno svi skokovi od $\int \lambda dM$ su strogo ispod 1;
(ii) lokalni P-martingal $\hat{L}$ je pravi P-martingal;
(iii) $\hat{L}$ je P-dvaput-integrabilan.

Uslov (i) automatski je zadovoljen (na svakom konačnom vremenskom intervalu) ako je S, stoga i M, neprekidan. Međutim, uslov najčešće ne važi ako S sadrži skokove u vrednosti. Uslovi (i) i (ii) ne moraju da važe čak i kada je zadovoljeno pod (i) i kada postoji neki ekvivalentna lokalna minimalna martingalna mera za S sa P-dvaput-integrabilnom gustinom.

Prvobitni cilj ovog postpuka je bio da $\hat{P}$ pretvori S u (lokalni) martingal, imajući minimalni uticaj na ukupnu martingalnu strukturu. Do određene granice, naziv „minimalna“ martingalna mera dovodi do pogrešnih zaključaka jer mera $\hat{P}$ na početku nije bila definisina u smislu da minimizira u ekvivalentnoj lokalnoj martingalnoj meri. Međutim, ako je S neprekidan, Föllmer i Schweizer su pokazali da $\hat{P}$ minimizira,

$$Q \to H(Q|P) - E^{Q}\left[\int_{0}^{\infty} \lambda_u^{\prime}\, d\langle M\rangle_u \lambda_u\right]$$

nad svim ekvivalentnim lokalnim martingalnim merama Q za S. Dalje, Schweizer je pokazao da ukoliko je S neprekidan, onda $\hat{P}$ minimizira $H(P|Q)$ nad svim ekvivalentnim lokalnim martingalnim merama Q za S, ali ne važi u slučaju kada S sadrži skokove. Pod daljim ograničavajućim uslovima dobijeni su rezultati za druge osobine minimiziranja sa $\hat{P}$ od strane nekoliko autora. Uopšten rezultat pod pretpostavkom strukturnog uslova ipak nije dostupan.

7.3. Postavka modela shot-noise procesa

Posmatrajmo niz jednako raspodeljenih realnih slučajnih promenljivih η^i, $i = 1,2,\ldots$ sa vrednostima u $\mathbb{R}^d$ i niz nezavisnih Brown-ovih kretanja B^i, $i = 1,2,\ldots$. Neka je $\{\lambda_t : t \geq 0\}$ pozitivan proces (nazvan *hazard process*), takav da je $P\left[\int_0^T \lambda_t dt < \infty\right] = 1$ za fiksno T. Neka je $\widetilde{N}$ standardni Poason-ov proces nezavisan od η^i, B^i i λ. Definišemo $\Lambda_t := \int_0^t \lambda_s ds$ i skup $N_t := \widetilde{N}_{\Lambda_t}$. Tada je N Cox-ov proces sa intenzitetom λ. Obeležavamo vreme skoka sa τ_i.

Definicija 7.6. Neka su $a: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $b: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$ glatke funkcije, i neka je proces J^i, $i = 1,2,\ldots$ dat sa jedinstvenim rešenjem za stohastičke diferencijalne jednačine,

$$J^i(t) = J^i(0) + \int_0^t a\big(s, J^i(s), \eta^i\big)ds + \int_0^t b(s, J^i(s), \eta^i)dB^i(s) \tag{7.1}$$

gde su $J^i(0)$ jednako raspodeljene realne promenljive. Tada je,

$$Y_t := \sum_{i=1}^{N_t} J^i(t - \tau_i) \tag{7.2}$$

uopšteni *shot-noise proces*. Da bi skratili zapis, pišemo $a_t^i := a(t - \tau_i, J^i(t - \tau_i), \eta^i)$ i $b_t^i := b(t - \tau_i, J^i(t - \tau_i), \eta^i)$.

Napominjemo specijalne slučajeve $(7.1.)$:

1. procesi J^i su oblika $U_i h(t)$ sa jednako rapodeljenim U_i i determinističkom diferencijabilnom funkcijom h, gde pretpostavljamo da $h(0) = 1$, tada,
$$J^i(t) = U_i + \int_0^t U_i h'(s)ds$$
Predstavlja specijaln slučaj, pri čemu je $b \equiv 0$, $\eta^i = U_i = J^i(0)$ i $a\big(s, J, \eta^i\big) = \eta^i h'(s)$. Važan specijalan slučaj za h je $h(t) = e^{-at}$, u kom slučaju se radi o procesu Markov-a.
2. U prethodnom primeru parametar a (*decay parameter*) je bio fiksiran, što možemo proširiti tako da bude slučajan. Posmatrajmo diferencijabilnu funkciju $h: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gde je $h(0) = 1$ i $J^i(t) = U_i h(t, \tilde{\eta}^i)$, pri čemu su $\tilde{\eta}^i$ jednako raspodeljene slučajne promenljive. Pretpostavljamo da je,
$$J^i(t) = U_i + \int_0^t U_i h'(s, \tilde{\eta}^i)ds$$
U ovom slučaju je $\eta^i = (U_i, \tilde{\eta}^i)$ i izbor a i b je očigledan. Pretpostavljaćemo da investitor posmatra η^i u i-tom skoku τ_i od N. Opadanje se dešava slučajno, ali ako se desi skok, buduća vrednost za a je poznata.
3. Do sada je b uvek bio 0. U ovom primeru ćemo posmatrati efekat *stohastičkog šuma*. Ako se desi neki događaj iznenadno investitori mogu da reaguju drastično iz različitih razloga. Kako vreme prolazi, dolazi se do dodatnih informacija tako da se tržište vraća do razumnog stanja. Da bi ovakav efekat obuhvatili pretpostavljamo srednju tendenciju (*mean reversion*) efekta šuma. Neka je,
$$J^i(t) = J^i(0) + \int_0^t k\left(\tilde{\eta}^i - J^i(s)\right)ds + \int_0^t \sigma dB^i(s)$$
Intuitivno, ovo znači da proces Y skoči gore za $J^i(0)$ u τ_i i dolazi do difuzije do nivoa $Y(\tau_{i-}) + \tilde{\eta}^i$. Takođe, dolazi do eksponencijalnog opadanja volatilnosti nakon skoka tako da je obuhvaćen efekat vraćanja. U slučaju da važi uslov da je J^i nenegativan, možemo uzeti $b(t, J, \eta) = \sigma\sqrt{J}$, tako da je,

$$dJ^i(t) = k\left(\theta - J^i(t)\right)dt + \sigma\sqrt{J^i(t)}dB^i(t)$$

Najvažniji alat za dobijanje minimalne martingalne mere je predstavljanje priraštaja od Y preko polumartingala,

$$Y_{t+\Delta} - Y_t = \sum_{i=1}^{N_t}\left(J^i(t+\Delta-\tau_i) - J^i(t-\tau_i)\right) + \sum_{i=N_t}^{N_{t+\Delta}}\left(J^i(t+\Delta-\tau_i) - J^i(t-\tau_i)\right)$$

kada pustimo $\Delta \to 0$,

$$dY_t = \sum_{i=1}^{N_{t-}} dJ^i(t-\tau_i) + d\left(\sum_{i=1}^{N_t} J^i(0)\right)$$

ako označimo $m_1 := E[J^1(0)]$ dobijamo zapis polumartingala,

$$\begin{aligned} dY_t &= \sum_{i=1}^{N_{t-}} a_t^i dt + \sum_{i=1}^{N_{t-}} b_t^i dB_t^i + d\left(\sum_{i=1}^{N_t} J^i(0)\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{N_{t-}} a_t^i + \lambda_t m_1\right)dt + \sum_{i=1}^{N_{t-}} b_t^i dB_t^i + d\left(\sum_{i=1}^{N_t} J^i(0) - \int_0^t \lambda_s m_1\, ds\right) \end{aligned} \tag{7.3}$$

gde su poslednje dve komponente lokalni martingali.

7.4. Model cena akcije

U ovom odeljku ćemo posmatrati model cena akcije koji se zasniva na prethodno uvedenom uopštenom shot-noise procesu. Najpre, pokazujemo kako da dodamo shot-noise efekat standardnom modelu cena akcije. Pretpostavljamo da je $\tilde{S}_t$ stohastički proces cene akcije. Dakle, može da bude geometrijsko Brown-ovo kretanje. Uzimamo sledeće,

$$S_t = \tilde{S}_t e^{Y_t} \tag{7.4}$$

Model koji je Altman (2006) predstavio pretpostavlja sledeće,

$$S_t = S_0 e^{\left[\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t-\sigma B_t\right]} \prod_{i=1}^{N_t}(1+U_i h(t-\tau_i)) = S_0 e^{\left[\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t-\sigma B_t\right]} e^{\sum_{i=1}^{N_t}\ln(1+U_i h(t-\tau_i))}$$

što je specijalan slučaj (7.4) sa J^i koji iznosi,

$$J^i(t) = \ln(1 + U_i) + \int_0^t \frac{U_i h'(s)}{1 + U_i h(s)} ds$$

pri čemu je $\tilde{a}_t \equiv \mu + \frac{\sigma^2}{2}$, $\tilde{b}_t \equiv \sigma$.

Uopšten shot-noise proces koji smo posmatrali do sada se ne ponaša kao proces Markov-a. Za $J^i(t) = U_i h(t)$ postoje važni specijalni slučajevi tako da to bude proces Markov-a. Na primer, klasična difuzija skoka je dobijena za $h \equiv 1$. Takođe, proces je proces Markov-a ako je $h(x + y) = h(x)h(y)$, odnosno, h je oblika e^{-ax}. Tada, shot-noise proces uzima sledeći oblik,

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} U_i h(t - \tau_i) = h(t) \sum_{i=1}^{N_t} U_i h(-\tau_i)$$

Ovaj proces je deterministički između vremena skoka, sa brzinom h' i skokovima u trenucima τ_i. Štaviše, kako su pokazali Gaspar i Schmidt (2005), jedini način da proces bude Markov-ski jeste da važi, $h(t) = e^{-at}$.

■

8. Rizik-minimizirajuća strategija

Black-Scholes formula za vrednovanje opcija je dovela do opštih hedžing metoda za finansijske derivate na kompletnom finansijskom tržištu. Na takvom tržištu, svaka strategija može da se replicira putem samofinansirajućeg dinamičkog portfolia koji koristi samo postojeće aktive, u tom smislu takav finansijski derivat je *suvišan*. Na nekompletnom tržištu rizične aktive su *nesuvišne*, nose sa sobom *unutrašnji rizik* i svaka strategija portfolia koja generiše takav zahtev sadrži u sebi slučajan proces *kumulativnih troškova*. Uvedena je mera rizičnosti R, u smislu uslovne greške kvadrata proseka, koji su uveli Föllmer i Sondermann. Posebno, rizik-minimizirajuća strategija je *prosečno-samofinansirajuća*, odnosno, proces troškova je martingal.

U slučaju kada je proces cena martingal u osnovnoj meri verovatnoća P, postojanje i jedinstvenost R-minimizirajuće strategije je dokazana od strane Föllmer-a i Sondermann-a. U našem modelu, posmatramo nekompletno tržište gde se za proces cena pretpostavlja da je polumartingal u meri P. Cilj nam je da analiziramo rizičnost finansijkih derivata koje su nesuvišne i da modifikujemo pristup od Föllmera i Sondermanna, pošto korišćenje Kunita-Watanabe tehnike ne može direktno da se promeni u slučaju polumartingala.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća sa filtracijom $\{\mathcal{F}_t : t \in [0, T]\}$ koji zadovoljava uslove desne-neprekidnosti i kompletnosti. Neka je $T \in \mathbb{R}$ fiksiran trenutak dospeća, pretpostavljamo još da je $\mathcal{F}_0$ trivijalno i da $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. Neka je sada $X = \{X_t : t \in [0, T]\}$ polumartingal sa dekompozicijom,

$$X = X_0 + M + A$$

takva da je $M = \{M_t : t \in [0, T]\}$ dvaput-integrabilan martingal, gde je $M_0 = 0$ i $A = \{A_t : t \in [0, T]\}$ predvidljiv proces sa konačnom varijacijom $|A|$, gde je $A_0 = 0$. Martingal M ima proces varijanse $\langle M \rangle$ u meri P.

Definicija 8.1. *Strategija trgovanja* φ je par procesa $\xi = \{\xi_t : t \in [0, T]\}$ i $\eta = \{\eta_t : t \in [0, T]\}$ koji zadovoljavaju sledeće osobine:

(i) ξ je predvidljiv proces;
(ii) Proces $\int_0^t \xi_u dX_u$, $t \in [0, T]$, je polumartingal iz klase $\boldsymbol{S}^2$;
(iii) η je adaptiran filtraciji;
(iv) Proces $V(\varphi)$ je definisan sa $V_t(\varphi) := \xi_t X_t + \eta_t$, $t \in [0, T]$ je desno-neprekidan i zadovoljava $V_t(\varphi) \in \boldsymbol{L}^2(P)$, $t \in [0, T]$,

Uslov integrabilnosti pod (ii) je ekvivalentan nejednakosti,

$$E\left[\int_0^T \xi_u^2 d\langle M \rangle_u + \left(\int_0^T |\xi_u| d|A|_u\right)^2\right] < \infty$$

Proces $V(\varphi)$ je *proces vrednosti* od φ, a desno-neprekidni dvaput-integrabilni proces $C(\varphi)$ je definisan sa,

$$C_t(\varphi) := V_t(\varphi) - \int_0^t \xi_u dX_u, \quad t \in [0, T]$$

i predstavlja (kumulativni*) proces troškova* od φ.

Defincija 8.2. Strategija je *samofinansirajuća* ako i samo ako važi,

$$V_t(\varphi) = V_0(\varphi) + \int_0^t \xi_u dX_u$$

Za strategiju φ kažemo da je *prosečno-samofinansirajuća* ako je $C(\varphi)$ martingal.

Proces X je model za evoluciju cene rizične investicije (akcije), pretpostavljamo i da postoji nerizična investicija (obveznica) čija je vrednost 1 u svim trenucima, da bi izbegli komplikovanije notacije. Strategija trgovanja se tumači kao dinamički portfolio akcije i obveznice: u trenutku t, imamo ξ_t akcija i η_t je iznos investiran u obveznice, jasno da je $V_t(\varphi)$ vrednost portfolia. Formula za $C_t(\varphi)$ označava činjenicu da se kumulativni troškovi do trenutka

t jednaki trenutnoj vrednosti portfolia umanjenom za akumulirane dobitke od trgovanja. Uslov da je ξ predvidljiv proces nam govori da moramo da odredimo broj akcija pre nego što nam je poznato sledeće pomeranje cene. Sa druge strane η je adaptiran proces, što nam daje dodatnu slobodu da prilagođavamo vrednost portfolia na željeni nivo.

Finansijski derivat H modelira novčani tok u trenutku T nekog finansijskog instrumenta. Najprostiji primer je dat preko evropske put opcije, sa fiksiranom strajk cenom $K \in \mathbb{R}$,

$$H = (K - X_T)^+$$

Ovakav derivat ima specijalan oblik $H = h(X_T)$ za neku funkciju h. Uopštavanjem, H može da zavisi od cele evolucije procesa cena do trenutka T. Primer takve opcije, je put opcija na prosečnu vrednost akcije,

$$H = \left(\frac{1}{T} \int_0^T X_u du - X_T \right)^+$$

Sada dajemo matematičku definiciju finansijskog derivata.

Definicija 8.3. $H \in \boldsymbol{L}^2(P)$ je *finansijski derivat* sa dospećem T ako je $\mathcal{F}_t$-merljiva i opisuje novčani tok u trenutku T.

Mi ćemo se fokusirati na strategije koje su H-*dopustive*, tj.

$$V_T(\varphi) = H$$

kaže se da φ *generiše* H.

Definicija 8.4. Finansijski derivat H je *dostižan* (*attainable*) ako je oblika,

$$H = H_0 + \int_0^T {\xi_u}^* dX_u$$

pri čemu je H_0 konstanta ξ^* zadovoljava uslov sa početka.

TEOREMA 8.1.

Neka je H finansijski derivat. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) postoji samofinansirajuća H-dopustiva strategija φ;
(ii) postoji H-dopustiva strategija φ, gde je $R_0(\varphi) = 0$;
(iii) postoji H-dopustiva strategija φ, gde je $R_t(\varphi)$, $t \in [0, T]$;
(iv) H je dostižan.

Dokaz.

Kako su (i), (ii) i (iii) jasno ekvivalentni, pokažimo da je (i) ekvivalentno sa (iv). Iz (i) znamo,

$$H = V_T(\varphi) = C_T(\varphi) + \int_0^T \xi_u dX_u = C_0(\varphi) + \int_0^T \xi_u dX_u$$

preko (iv) možemo definisati $\varphi = (\xi^*, \eta)$ tako da,

$$V_t(\varphi) = H_0 + \int_0^t \xi_u{}^* dX_u\,, \quad t \in [0, T]$$

■

Dostižan derivat H ima specijalne osobine. Najpre, ono je nerizično u smislu da, ako počnemo sa neslučajnom početnom vrednošću $C_0(\varphi) = H_0$ i potom koristimo samofinansirajuću strategiju, možemo da repliciramo isti novčani tok određen sa H. U našem idealizovanom modelu neprekidnog trgovanja, H i φ su ekvivalentni. To znači da je cena od H jedinstveno određena i mora da bude H_0 da ne bi postojala mogućnost arbitraže.

Arbitražni argument koji obezbeđuje da H_0 bude fer cena opcije u ovom modelu je isti kao što su predložili Black i Scholes, pri čemu su oni koristili akciju i opciju da naprave porfolio koji zarađuje po nerizičnoj stopi prinosa. Potom je ideja generalizovana (Harrison i Pliska) na slučaj kompletnog tržišta i dostižnih finansijskih derivata. Međutim, ovi doprinosi su se odnosili samo na dostižne finansijske derivate, koji mogu da se repliciraju koristeći već postojeće aktive, tj. akciju i obveznicu. Odavde, Föllmer i Sondermann su počeli i uveli proces $R(\varphi)$ i formulisali problem optimizacije, koji će biti objašnjen u daljem tekstu.

Primetimo da H-dopustiva strategija uvek postoji: možemo uzeti $\xi \equiv 0$ i $\eta = 0$, sem za $\eta_T = H$. Dopustive strategije dozvoljavaju da se generiše finansijski derivat, ali samo po nekom definisanom trošku $C_T(\varphi)$. Posebno, za dostižne derivate, $C_T(\varphi) = C_0(\varphi) = V_0(\varphi)$ je poznato u trenutku 0.

Kao rezultat dopustive strategije minimiziraju *proces uslovne greške kvadrata proseka*,

$$R_t(\varphi) := E^P\left[\left(C_T(\varphi) - C_t(\varphi)\right)^2 | \mathcal{F}_t\right], \quad t \in [0, T]$$

definisan kao desno-neprekidna verzija. Dakle, $R_t(\varphi)$ je jednostavno ulsovna varijansa celokupnog troška $C_T(\varphi)$, data informacijama do trenutka t, ako je strategija φ prosečno-samofinansirajuća.

Za svaku dopustivu strategiju φ imamo,

$$C_T(\varphi) = V_T(\varphi) - \int_0^T \xi_u dX_u = H - \int_0^T \xi_u dX_u$$

stoga,

$$R_0(\varphi) = E^P\left[\left(C_T(\varphi) - C_0(\varphi)\right)^2\right] = E^P\left[\left(H - \int_0^T \xi_u dX_u - C_0(\varphi)\right)^2\right]$$

tako je $R_0(\varphi)$ minimiziran za $C_0(\varphi) = E[H](= E[C_T(\varphi)])$. Dakle, treba da izaberemo ξ tako da minimiziramo varijansu $\mathrm{E}[(C_T(\varphi) - E[C_T(\varphi)])^2]$. Ovaj kriterijum ne proizvodi jedinstvenu strategiju, ali opisuje čitavu klasu strategija koje minimiziraju srednju kvadratnu grešku.

Glavni razlog za korišćenje mere verovatnoće P u definisanju $R_t(\varphi)$ jeste što P služi da modelira subjektivno verovanje prodavca opcije. Optimalna strategija se opisuje u okviru minimalne martingalne mere, što ukazuje na robustnost prethodne formule i odgovarajuće optimalne strategije u ekvivalentnoj meri. Međutim, ovaj rezultat je od značaja samo ako je analiza urađena u meri P, jer kada bi $R_t(\varphi)$ definisali u martingalnoj meri onda bi robusnost važila samo po definiciji.

Konstrukcija strategije se zasniva na korišćenju G-K-W dekompozicije. Proces vrednosti V se definiše sa,

$$V_t^P = E[H|\mathcal{F}_t]$$

pri čemu je V^P martingal u meri P, G-K-W dekompozicija nam dozvoljava da napišemo V_t^P jedinstveno u obliku,

$$V_t^P = E[H] + \int_0^t \xi_u^H dX_u + K_t^H$$

gde je $K^H = \{K_t^H : t \in [0,t]\}$ martingal u meri P, K^H i X su ortogonalni i $\xi_u^H \in \boldsymbol{L}^2(P)$ je predviljiv proces, dva puta integrabilan. Koristeći ortogonalnost martingala L^H i X i $V_T^P = H$, Föllmer i Sondermann su dokazali,

TEOREMA (Föllmer-Sondermann) 8.2.

Dopustiva strategija $\varphi = (\xi, \eta)$ ima minimalnu varijansu,

$$E\left[\left(C_T^\varphi - E\left[C_T^\varphi\right]\right)^2\right] = E[(K_T^H)^2]$$

ako i samo ako $\xi = \xi^H$.

■

Štaviše, broj obveznica u trenutku 0 je određen tako da inicijalna vrednost portfolia iznosi $E[H]$, tj.

$$\eta_0 = E[H] - \xi_0 X_0$$

tada $R_0(\varphi) = E\left[\left(C_T^\varphi - E\left[C_T^\varphi\right]\right)^2\right]$. Otuda, varijansa se interpretira kao minimalni rizik. Tačniji rezultat se dobija ako pogledamo dopustive strategije, tj. $V_T(\varphi) = H$, tako što minimiziramo preostali rizik, definisan sa $R_t(\varphi)$ u bilo kom trenutku t. Takve strategije su rizik-minimizirajuće. Fiksiramo dopustivu strategiju φ. Kada posmatramo preostali rizik $R_t(\varphi)$ u nekom trenutku vremena t, samo dopustive strategije $\tilde{\varphi}$ koje se poklapaju sa φ u intervalu $[0,t)$ se mogu porediti. Ovaj uslov obezbeđuje da procesi troškova imaju jednaku vrednost $C_t(\varphi) = C_t(\tilde{\varphi})$. U tom slučaju je strategija $\tilde{\varphi}$ dopustivi nastavak od φ u trenutku t.

Definicija 8.5. Neka je $\varphi = (\xi, \eta)$ strategija trgovanja i $t \in [0,T)$. *Dopustivi nastavak od φ od trenutka t* je strategija trgovanja $\tilde{\varphi} = (\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ koja zadovoljava,

$$\tilde{\xi}_s = \xi_s \text{ za } s \leq t$$

$$\tilde{\eta}_s = \eta_s \text{ za } s \leq t$$

i

$$V_T(\tilde{\varphi}) = V_T(\varphi)$$

Rizik-minimizirajuća strategija, za proces rizika $\{R_t(\varphi): t \in [0,T]\}$ je data sa sledećom teoremom,

TEOREMA (Föllmer-Sondermann) 8.3.

Postoji jedinsvena dopustiva rizik-minimizirajuća strategija $\varphi = (\xi, \eta)$ data sa,

$$(\xi_t, \eta_t) = (\xi_t^H, V_t^P - \xi_t^H X), \quad t \in [0,T]$$

a odgovarajući proces rizika je $R_t(\varphi) = E[(C_T^H - C_t^H)^2 | \mathcal{F}_t]$

Proces rizika koji odgovara rizik-minimizirajućoj strategiji se takođe naziva proces *unutrašnjeg rizika*.

■

Definicija 8.5. Strategija trgovanja je R*-minimizirajuća* ako za svako $t \in [0,T)$ i za svaki dopustivi nastavak $\tilde{\varphi}$ od φ od trenutka t važi,

$$R_t(\tilde{\varphi}) \geq R_t(\varphi)$$

ekvivalentno

$$R_t(\varphi + \Delta) - R_t(\varphi) \geq 0$$

za svaku prihvatljivu varijaciju Δ od φ, od trenutka t.

Ukoliko diskontovane rizične investicije nisu martingali, nego samo polumartingali, teorija minimizacije rizika se ne može primeniti. Iz tog razloga, Schweizer je uveo koncept *lokalne minimizacije rizika*.

9. Portfolio osiguranja i finansijsko tržište

U ovom poglavlju ćemo uvesti portfolio osiguranja za dve vrste unit-linked životnih osiguranja i definisaćemo finansijsko tržište, koje ćemo dalje koristiti u poslednjoj glavi prilikom izvođenja lokalne hedžing strategiju unit-linked životnih osiguranja.

9.1. Portfolio osiguranja

Posmatraćemo l_x pojedinanca, pri čemu su svi x godina starosti, u tom slučaju su životni vekovi pojedinaca međusobno nezavisni i jednako rapodeljeni. Prethodno možemo opisati tako što predstavimo preostali životni vek svakog pojedinca kao niz $T_1, \dots, T_{l_x}$ nezavisnih, nenegativnih, slučajnih promenljivih definisanih na $(\Omega_2, \mathbf{H}, \{\mathcal{H}_t : t \in [0,T]\}, P_2)$. Neka je data funkcija *stope neuspeha* μ_{x+t} (stopa kojom preživeli do određenog trenutka t neće uspeti da prežive do sledećeg trenutka vremena), funkciju preživljavanja definišemo sa,

$$
{}_tp_x = P_2[T_1 > t] = \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+\tau} d\tau\right)
$$

Uvodimo proces $N_t^I = \sum_{l=1}^{l_x} 1(T_l \le t)$ koji preborojava broj smrti u grupi. Neka je $\mathbf{H} = \{\mathcal{H}_t : t \in [0,T]\}$ filtracija generisana sa N^I, odnosno, $\mathcal{H}_t = \sigma\{N_u^I : u \le t\}$. Proces prebrojavanja (Poason-ov proces) $\{N_t^I : t \in [0,T]\}$ je càdlàg proces (desno-neprekidan sa levim granicama) i H-Markov proces pošto su slučajne promenljive životnog veka $\{T_l : l = 1, \dots, l_x\}$ nezavisne i jednako rapodeljene. Intenzitet procesa prebrojavanja λ se može definisati na sledeći način,

$$
E[dN_t^I | \mathcal{H}_{t-}] = (l_x - N_{t-}^I)\mu_{x+t} dt := \lambda_t dt
$$

Proces $M^I = \{M_t^I : t \in [0,T]\}$, koji je dat sa $M_t^I = N_t^I - \int_0^t \lambda_u du$, definiše martingal $\langle M^I \rangle_t = \int_0^t \lambda_u du$.

Znamo da su unit-linked životna osiguranja je ugovori kod kojih naknade zavise od cena akcija kojima se trguje. Predstavićemo dve osnovne vrste unit-linked životnog osiguranja: *pure endowment* (osiguranje za slučaj doživljenja) i *term insurance* (ograničeno životno osiguranje). Kod osiguranja za slučaj doživljenja osiguranik je plaćen u trenutku T ako je živ u datom trenutku. Iznos koji se plaća je oblika $g(S_T)$ za datu neprekidnu funkciju g određena ugovorom. Otuda, finanskijski derivat $g(S_T)$ zavisi od cene rizične aktive u trenutku T. Možemo dati primere funkcija, kao $g(s) = s$, $g(s) = K$ sa konstantom $K \ge 0$ i $g(s) = \max(s, K)$, koje su poznate u literaturi kao *čist unit-linked*, *determinističke naknade* i *unit-linked sa zagarantovanom sumom* $K \ge 0$, respektivno. Obaveza osiguravajuće kompanije prema svakom osiguraniku je data sa $H_l = 1(T_l > T)g(S_T)$. Celokupan portfolio osiguravajuće kompanije je dat sa,

$$H_T = g(S_T)\sum_{l=1}^{l_x}(T_l > T) = g(S_T)(l_x - N_T^I) \tag{9.1}$$

gde $(l_x - N_T^I)$ predstavlja broj preživelih na kraju osiguravajućeg perioda.

U slučaju ograničenog životnog osiguranja, osigurani iznos dospeva odmah nakon smrti, pre trenutka T. Stoga, funkcija osiguranja je zavisna od vremena $g(t, S_t)$. Prema definiciji ugovora, isplate mogu da se dese u svakom trenutku intervala $[0, T]$. Obaveze osiguravača prema opisanom portfoliu su date sledećom formulom,

$$H_T = \sum_{l=1}^{l_x} g(T_l, S_{T_l})1(T_l \leq T) = \sum_{l=1}^{l_x}\int_0^T g(u, S_u)d1(T_l \leq u) = \int_0^t g(u, S_u)dN_u^I \tag{9.2}$$

Ostali ugovori osiguranja se mogu dobiti kombinacijom prethodna dva ugovora. Na primer, osiguranje kod kojeg se osigurani iznos plaća u trenutku smrti osiguranika ili u trenutku dospeća (*endowment insurance*), koji god slučaj se desi prvi, ima vrednost koja se dobija sabiranjem (9.1) i (9.2).

9.2. Finansijsko tržište

Neka je $(\Omega_1, \mathbf{G}, \{G_t : t \in [0, T]\}, P_1)$ prostor verovatnoća koji predstavlja finansijsko tržište i neka je $(\Omega_2, \mathbf{H}, \{\mathcal{H}_t : t \in [0, T]\}, P_2)$ prostor verovatnoća koji predstavlja portfolio osiguranja. Neka prostor $(\Omega, \mathbf{F}, \{\mathcal{F}_t : t \in [0, T]\}, P)$ označava proizvod prethodna dva nezavisna prostora verovatnoće. Pretpostavljamo da spomenuti prostori verovatnoća zadovoljavaju uslove desne neprekidnosti i kompletnosti. Vreme do isteka ugovora za oba modela je konačan pozitivan broj $T \in \mathbb{R}$. Premije se plaćaju kao jednokratna premija na početku.

Koristimo prethodnu definiciju opšteg shot-noise procesa, gde su $J^i(t)$ i Y_t dati sa (7.1) i (7.2). Međutim, posmatraćemo poseban slučaj kada je $J^i(t) = U_i h(t)$ sa nezavisnim slučajnim promenljivama $\{U_i\}$ i determinističku diferencijabilnu funkciju $h(\cdot)$. Klasična difuzija skokova se dobija ako uzmemo da je $h \equiv 1$. Štaviše, u pitanju je proces Markov-a ako važi $h(s+t) = h(s)h(t)$, odnosno, h je oblika e^{-at}. U tom slučaju shot-noise proces dobija sledeći oblik:

$$Y_t = \sum_{i=1}^{M_t} U_i h(t - \tau_i) = e^{-at}\sum_{i=1}^{M_t} U_i h(-\tau_i)$$

U radu ćemo posmatrati ovaj specijalan slučaj. Ovakav proces, se ponaša deterministički između vremena skoka. Takođe, jedini način da proces ispunjava uslov Markov-a jeste da definišemo h na ovaj način.

U nastavku razmatramo model cena akcije koji koristi prethodno definisani shot-noise proces. Dakle, dodajemo shot-noise efekat standardnom modelu cena akcije. Pretpostavljamo da je $\tilde{S}$ stohastički proces cena akcije. Uzimamo da je $\tilde{S}$ geometrijsko Brown-ovo kretanje oblika,

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t \tilde{a}_t dt + \tilde{S}_t \tilde{b}_t dB_t$$

Dok sa,

$$S = \tilde{S}_t e^{Y_t}$$

označavamo proces cena akcije kada učestvuje i shot-noise efekat. Pretpostavićemo radi jednostavnosti da je kamatna stopa obveznice 0.

10. Hedžing unit-linked životnih osiguranja

Na kompletnom tržištu, postoji jedinstvena mera, koja je ekvivalentna kanoničkoj meri i obezbeđuje da proces diskontovanih cena bude martingal, u tom slučaju na finansijski derivat može u potpunosti da se primeni hedžing strategija. Sa druge strane, kako ne postoji jedinstvena martingalna mera na tržištu koje nije kompletno, nije moguće koristiti ekvivalentnu martingalnu meru za hedžing strategiju. Dodatni kriterijumi moraju da se odrede da bi izabrali odgovarajuću martingalnu meru. U izvođenju hedžing strategije za unit-linked životna osigurnja koristićemo Föllmer-Schweizer minimalnu martingalnu meru, koja predstavlja martingalnu meru koja najmanje utiče na strukturu modela. Odgovarajuća hedžing strategija se naziva *hedžing strategija (lokalne) minimizacije rizika*.

Teorija minimizacije rizika za nekompletno tržište je uvedena od strane Föllmer-Schweizer, a konstrukcija strategije se bazira na primeni Galtchouk-Kunita-Watanabe dekompozicije.

10.1. G-K-W dekompozicija

Posmatrajmo prostor verovatnoća $(\Omega, \mathbf{F}, \{F_t : t \in [0,T]\}, P)$. Označavamo sa Q_1 minimalnu martingalnu meru od P_1, a ekvivaletna martingalna mera Q se koristi kao oznaka za meru proizvoda Q_1 i P_2 za naš kombinovani model. Sa $E[\cdot]$ i $E^Q[\cdot]$ označavamo očekivanja u meri P i Q, respektivno. U ovom odeljku ćemo izvesti G-K-W dekompoziciju u minimalnoj martingalnoj meri Q u nekoliko koraka.

(1) Najpre, pretpostavimo da proces cena akcije, pre nego što uvedemo u njega shot-noise proces, prati geometrijsko Brown-ovo kretanje,

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t \tilde{a}_t dt + \tilde{S}_t \tilde{b}_t dB_t$$

sa determinističkim funkcijama $\tilde{a}_t$ i $\tilde{b}_t$, pri čemu je B_t Brown-ovo kretanje adaptirano filtraciji G_t. Ekvivaletno, važi,

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_0 \exp\left(\int_0^t \tilde{b}_s dB_s + \int_0^t (\tilde{a}_s - \frac{1}{2}\tilde{b}_s{}^2)\, ds\right)$$

(2) U sledećem koraku ćemo uvesti *Poason-ovu slučajnu meru* da bi opisali shot-noise procese. Uveli smo formulu za uopšten shot-noise proces, pri čemu posmatramo specijalan slučaj $J^i(t) = U_i h(t)$ sa nezavisnim, jednako rapodeljenim, slučajnim promenljivama $\{U_i\}$ i determinističkom diferencijabilnom funkcijom $h(t) = e^{-at}$, koja nam daje proces Markov-a.

Definicija 10.1. *Poason-ova slučajna mera* $N(dt, dx)$ sa intenzitetom $dt\nu(dx)$ je data sa,

$$\sum_{i=1}^{M_t} U_i = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} xN(ds, dx)$$

gde je $\nu(dx) = \tilde{\lambda}G(dx)$, a $G(dx)$ raspodela od U_i.

Iz prethodnog dalje imamo,

$$Y_t = \sum_{i=1}^{M_t} U_i e^{-a(t-\tau_i)} = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{-a(t-s)} xN(ds, dx) = e^{-at} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{as} xN(ds, dx)$$

primenjivanjem Itô-ve formule na Y_t dobijamo,

$$dY_t = -aY_t dt + \int_{\mathbb{R}} xN(dt, dx)$$

(3) Sada dodajemo shot-noise proces Y_t procesu cena akcije $\tilde{S}_t$, u tom slučaju proces cena akcije je,

$$S_t = \tilde{S}_t e^{Y_t} = S_0 e^{X_t}$$

pri čemu X_t definišemo na sledeći način,

$$dX_t := \left(\tilde{a}_t - \frac{1}{2}\tilde{b}_t^2 - aY_t\right) dt + \tilde{b}_t dB_t + \int_{\mathbb{R}} xN(dt, dx)$$

Neka je $M(dt, dx) = N(dt, dx) - dt\nu(dx)$ kompenzovana Poason-ova slučajna mera. Prema Itô-voj formuli, važi,

$$
\begin{aligned}
dS_t &= S_{t-}\left[\tilde{b}_t dB_t + (\tilde{a}_t - aY_t)dt + \int_{\mathbb{R}} (e^x - 1)N(dt,dx)\right] \\
&= S_{t-}\left(\left[\tilde{a}_t - aY_t + \int_{\mathbb{R}} (e^x - 1)\nu(dx)\right]dt + \tilde{b}_t dB_t + \int_{\mathbb{R}} (e^x - 1)N(dt,dx)\right) \\
&= dW_t + dA_t
\end{aligned}
$$

gde je,

$$W_t = \int_0^t \tilde{b}_s S_{s-} dB_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (e^x - 1)\, S_{s-} M(ds,dx)$$

martingal u meri P_1, a

$$A_t = \int_0^t \left[\tilde{a}_s - aY_s + \int_{\mathbb{R}} (e^x - 1)\nu(dx)\right] S_{s-} ds$$

je predvidljiv proces sa konačnom varijacijom.

(4) U nastavku ćemo izvesti minimalnu martingalnu meru Q_1 prvobitne mere P_1. Mera Q_1 se može opisati svojom gustinom $Z_t = \frac{dQ_1}{dP_1}|_{\mathcal{F}_t}$. Model koji smo opisali zadovoljava osobinu Markov-a, a za modele Markov-a ekvivalentna mera verovatnoće se može opisati *Girsanov-om gustinom*:

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_{s-} G_s dB_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} Z_{s-} h(s,x) M(ds,dx)$$

pri čemu $G(\cdot)$ i $h(\cdot,\cdot)$ treba odrediti. U meri Q_1, $\tilde{B}_t = B_t - \int_0^t G_s ds$ je Brown-ovo kretanje, a $M_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} xM(ds,dx)$ je čist kvadratni proces skoka sa kompenzovanom merom $\tilde{\nu}(dt,dx) = dt\ \tilde{\nu}_t(dx)$, gde je $\tilde{\nu}_t(dx) = h(t,x)\nu(dx)$.

U sledećem koraku odredimo $G(\cdot)$ i $h(\cdot,\cdot)$ tako da Q_1 bude minimalna martingalna mera. Primetimo da,

$$
\begin{aligned}
dS_t = S_{t-}\Bigg(&\left[\tilde{a}_t + \tilde{b}_t G_t - aY_t + \int_{\mathbb{R}} (e^x - 1)\big(1 + h(t,x)\big)\nu(dx)\right]dt + \tilde{b}_t d\tilde{B}_t \\
&+ \int_{\mathbb{R}} (e^x - 1)\widetilde{M}(dt,dx)\Bigg)
\end{aligned}
\tag{10.1}
$$

gde je,

$$\widetilde{M}(dt,dx) = M(dt,dx) - dt\tilde{\nu}_t(dx)$$

Prema definiciji minimalne martingalne mere, S_t mora da bude lokalni martingal u meri Q_1. Povrh toga, S_t je lokalni martingal u meri Q_1 ako i samo ako je prvi član u jednačini (10.1) jednak 0, odnosno,

$$\tilde{a}_t + \tilde{b}_t G_t - aY_t + \int_{\mathbb{R}} (e^x - 1)\big(1 + h(t,x)\big)\nu(dx) = 0$$

Potom nađimo još jednačinu koju $G(\cdot)$ i $h(\cdot,\cdot)$ treba da zadovoljavaju.

(5) Pretpostavljamo sledeće,

$$dZ_t = \gamma_t Z_{t-}\left[\tilde{b}_t dB_t + \int_{\mathbb{R}} (e^x - 1)M(dt,dx)\right]$$

tj.

$$G_t = \gamma_t \tilde{b}_t, \quad h(t,x) = \gamma_t(e^x - 1) \tag{10.2}$$

Razmotrimo jedan $\boldsymbol{L}^2$ martingal u meri P_1, u oznaci N, koji je ortogonalan martingalu W od S_t, tako da je $\langle N, W\rangle = 0$. Odatle je $\langle N, Z\rangle = 0$, što implicira da je N Q_1-lokalni martingal. Prema definiciji minimalne martingalne mere, ako važi (10.2), Q_1 je minimalni martingalna mera od P_1. Minimalna martingalna mera može da se odredi putem $G(\cdot)$ i $h(\cdot,\cdot)$ koristeći prethodne dve jednačine. Potom možemo da izvedemo minimalnu martingalnu meru.

(6) Poslednji korak nam daje G-K-W dekompoziciju. Dakle, neka je $F(t,S_t) = E^Q[g(S_T)|\mathcal{F}_T]$ jedinstvena cena pod, pretpostavkom odsustva arbitraže, u trenutku t finansijskog derivata $g(S_T)$. Neka je $F_x(t,x)$ parcijalni izvod od $F(t,x)$. Prema Itô-voj formuli i $F(t,S_t)$ je martingal u meri Q, imamo sledeće,

$$\begin{aligned} dF(t,S_t) &= F_x(t,S_{t-})S_{t-}\tilde{b}_t d\tilde{B}_t \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \big[F\big(t, S_{t-} + S_{t-}(e^x - 1)\big) - F(t, S_{t-)}\big]\widetilde{M}(dt,dx) = F_x(t,S_{t-})S_{t-}\,\tilde{b}_t d\tilde{B}_t \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} [F(t, S_{t-}e^x) - F(t,S_{t-})]\,\widetilde{M}(dt,dx) \end{aligned} \tag{10.3}$$

Pretpostavljamo da $F(t,S_t)$ zadovoljava sledeću diferencijalnu jednačinu,

$$dF(t,S_t) = \xi_t dS_t + dK_t$$

pri čemu ξ_t i K_t treba odrediti, a važi da je K_t ortogonalan u odnosu na S_t. U tom slučaju dobijamo,

$$d < S. \,, \quad F(\cdot, S.) >_t = \xi_t d < S \,, \quad S >_t = \xi_t S_{t-}^2 \left[\tilde{b}_t^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^x - 1)^2 h(t,x) \nu(dx) \right] dt \quad (10.4)$$

Dodatno, koristeći (10.3) imamo još jedan izraz za $d < S. \,, \; F(\cdot, S.) >_t$

$$d < S. \,, \quad F(\cdot, S.) >_t$$
$$= \left[F_x(t, S_{t-}) S_{t-}^2 \tilde{b}_t^2 + \int_{\mathbb{R}} S_{t-}(e^x - 1) \left(F(t, S_{t-}e^x) \right. \right.$$
$$\left. \left. - F(t, S_{t-}) \right) h(t,x) \nu(dx) \right] dt \quad (10.5)$$

Treba izjednačiti formule (10.4) i (10.5), stoga važi,

$$\xi_t = \frac{1}{k_t} F_x(t, S_{t-}) \tilde{b}_t^2 + \frac{1}{k_t S_{t-}} \int_{\mathbb{R}} [F(t, S_{t-}e^x) - F(t, S_{t-})](e^x - 1) h(t,x) \nu(dx)$$

takođe,

$$dK_t = dF(t, S_t) - \xi_t dS_t$$

gde je,

$$k_t = \tilde{b}_t^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^x - 1)^2 h(t,x) \nu(dx)$$

Iz gornjeg izvođenja sledi teorema.

TEOREMA 10. 1.

Dekompozicija G-K-W od $F(t, S_t)$ je data sledećim izrazom,

$$F(t, S_t) = F(0, S_0) + \int_0^t \xi_s dS_s + K_t$$

pri čemu su ξ_t i K_t dati prethodnim formulama.

■

10.2. Lokalna strategija minimizacije rizika

Dosadašnje rezultate primenjujemo na unit-linked životna osiguranja. Nakon izvođenja dekompozicije procesa vrednosti, sada možemo odrediti rizik-minimizirajuću strategiju i odgovarajući proces rizika za dva tipa osiguranja: osiguranje u slučaju doživljenja i ograničeno osiguranje.

10.2.1. Osiguranje u slučaju doživljenja

Posmatrajmo prvo slučaj osiguranja za slučaj doživljenja. Iz nezavisnosti finansijskog tržišta i portfolia osiguranja, V_t^* je dato sa,

$$V_t^* = E^Q[H_T|\mathcal{F}_t] = E^Q[g(S_T)(l_x - N_T^I)|\mathcal{F}_t] = E^Q[(l_x - N_T^I)|\mathcal{F}_t]E^Q[g(S_T)|\mathcal{F}_t]$$
$$= E^Q\left[\sum_{l=1}^{l_x} 1(T_l > T)|\mathcal{F}_t\right] F(t,S_t) = (l_x - N_T^I)_{T-t}p_{x+t}F(t,S_t)$$

U formuli $E^Q[(l_x - N_T^I)|\mathcal{F}_t] = (l_x - N_T^I)_{T-t}p_{x+t}$ predstavlja broj preživelih pojedinaca u trenutku dospeća T. Korišćenjem G-K-W dekompozicije za $F(t,S_t)$ iz teoreme dobijamo G-K-W dekompoziciju procesa vrednosti V_t^*.

TEOREMA 10. 2.

Kod osiguranja za slučaj doživljenja proces V^* ima sledeću G-K-W dekompoziciju:

$$V_t^* = V_0^* + \int_0^t (l_x - N_{s-}^I)\ {}_{T-s}p_{x+s}\xi_s dS_s + K_t^H$$

pri čemu je

$$K_t^H = \int_0^t (l_x - N_{s-}^I)_{T-s}p_{x+s} dK_t - \int_0^t F(s,S_s)_{T-s}p_{x+s} dM_s^I$$

dok su ξ_t i K_t dati u prethodnim formula, a K_t i M_t^I su ortogonalne u odnosu na S_t.

Dokaz.

Koristeći teoremu (10.1) i Itô-vu formulu, teorema se dokazuje direktno.

■

Proces V_t^* se može tumačiti kao proces tržišne vrednosti celokupnog porfolia ugovora osiguranja za slučaj doživljenja. Posebno, početna vrednost $V_0^* = l_x\ {}_Tp_xF(0,S_0)$ se prirodno postavlja kao izbor za jednoktratnu premiju čitavog portfolia. Ovakav izbor jednokratne premije odgovara aktuarskom principu ekvivalencije (premije i naknade treba da budu u proseku izjednačene), ali u martingalnoj meri Q.

Koristeći teoremu (10.2), možemo izvesti strategiju minimizacije rizika i proces rizika za osiguranje u slučaju doživljenja.

TEOREMA 10.3.

Jedinstvena strategija minimizacije rizika $\varphi^* = (\xi^*, \eta^*)$ u meri Q za osiguranje u slučaju doživljenja je data sa:

$$\xi_t^* = (l_x - N_{t-}^I)_{T-t}p_{x+t}\xi_t\,, \quad \eta_t^* = (l_x - N_t^I)_{T-t}p_{x+t}F(t, S_t) - \xi_t^* S_t\,, \quad t \in [0, T]$$

Proces rizika je dat izrazom, $R_t(\varphi^*) = E^Q[(K_T^H - K_t^H)^2 | \mathcal{F}_t]$.

■

Ilustrovaćemo naš rezultat preko primera.

Primer 10.1. Pretpostavljamo da osiguranik treba da dobije vrednost akcije u trenutku dospeća, od osiguravajuće kompanije. U tom slučaju funkcija ugovora ima jednostavan oblik, $g(s) = s$. Stoga je $F(t, S_t) = S_t$. Proces vrednosti je $V_t^* = (l_x - N_t^I)_{T-t}p_{x+t}S_t$, sa početnom vrednošću $V_0^* = l_x\, {}_T p_x S_0$. Jednostavnim računum dobijamo dalje $\xi_t \equiv 0$, $K_t \equiv 0$. Strategija minimizacije rizika je,

$$(\xi_t^*, \eta_t^*) = ((l_x - N_{t-}^I)_{T-t}p_{x+t}\,, (N_{t-}^I - N_t^I)_{T-t}p_{x+t}S_t), \quad t \in [0, T] \qquad (10.6)$$

dok je proces rizika sledeći,

$$R_t(\varphi^*) = E^Q[(K_T^H - K_t^H)^2 | \mathcal{F}_t] = E^Q\left[\left(-\int_t^T {}_{T-s}p_{x+s}S_s dM_s^I\right)^2 \middle| \mathcal{F}_t\right]$$

$$= (l_x - N_t^I)_{T-t}p_{x+t}\int_t^T E^Q[(S_s)^2 | \mathcal{F}_t]_{T-s}p_{x+s}\mu_{x+s}ds$$

Strategija minimizacije rizika data sa (10.6) zavisi od procesa cena akcije S_t i od portfolia osiguranja. Strategija se može interpretirati na sledeći način: u svakom trenutku t, osiguravajuća kompanija treba da drži određen broj akcija, koje odgovaraju očekivanom broju preživelih pojedinaca. Iz razloga što broj akcija zavisi od predvidljivog procesa ξ_t^*, treba izvršiti određene promene u portfoliu svaki put kada se desi smrt da bi važila jednakost $V_t^* = V_t^\varphi$ za sve t. Dakle, prethodno rečeno je opisano preko adaptiranog procesa η_t^*, koji označava iznos koji treba da bude isplaćen od strane osiguravajuće kompanije u vezi sa posmatranom smrću.

Primer 10.2. Posmatrajmo sada unit-linked životno osiguranja sa minimalnom zagarantovanom sumom K. Neka je $K = 0$, kao u prethodnom primeru. Pokazaćemo rezultat kada shot-noise proces nije uključen (za konkretan izbor shot-noise procesa, možemo koristiti numeričke metode, kao na primer, Monte-Carlo simulaciju za numeričko rešenje). Koristeći činjenicu da je $g(s) = \max(s, K) = K + (s - K)^+$, proces $F(t, S_t)$ se može proceniti koristeći dobro poznatu Black-Scholes formulu,

$$F(t, S_t) = E^Q[K + (S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t] = K + \left[S_t \Phi(z_t) - K\Phi\left(z_t - \tilde{b}_t\sqrt{T-t}\right)\right]$$
$$= K\Phi\left(-z_t + \tilde{b}_t\sqrt{T-t}\right) + S_t\Phi(z_t)$$

pri čemu je $\Phi(\cdot)$ normalna raspodela i

$$z_t = \frac{\log\left(\frac{S_t}{K}\right) + \frac{\tilde{b}_t^2}{2}(T-t)}{\tilde{b}_t\sqrt{T-t}}$$

Tada je $V_t^* = (l_x - N_t^I)_{T-t}p_{x+t}F(t, S_t)$ sa početnom vrednošću $V_0^* = l_{x\,T}p_x F(0, S_0)$.

Iz ovih jednostavnih primera možemo dati numeričke rezultate. Dakle, rekli smo da je prirodno uzeti da jednokratna premija bude proces vrednosti V_0^*. Kako je V_0^* proporcionalan veličini portfolia l_x, razmatramo portfolio osiguranja koji se sastoji od 2 pojedinca sa istim bojem godina, odnosno, $l_x = 2$. Neka osigurani imaju $x = 50$ godina i fiksiramo termin ugovora da bude $T = 15$ godina. Koristićemo sledeću funkciju neuspeha, $\mu_{x+t} = 0{,}0005 + 0{,}000075858 \times 1{,}09144^{x+t}$. Pri čemu uzimamo da je zakon mortaliteta, uslovna verovatnoća ${}_{15}p_{50}$ da osiguranici prežive još 15 godina ako znamo da imaju 50 godina jeste $0{,}8879$. Uzećemo, radi jednostavnosti, $S_0 = 1$ i $\tilde{b}_t \equiv b$. Prikazujemo početnu vrednost procesa vrednosti u tabeli, za različite izbore volatilnosti $\tilde{b}$ akcije i zagarantovano K.

$\tilde{b}$			0,15			0,25			0,35	
K		0	0,5	1	0	0,5	1	0	0,5	1
V_0^*	*g(s)=s*	1,7758	1,7758	1,7758	1,7758	1,7758	1,7758	1,7758	1,7758	1,7758
	g(s)=max*(s,K)*	1,7758	1,7515	2,1613	1,7758	1,902	2,4359	1,7758	2,0488	2,667

U tabeli su prikazani primeri 1 i 2. U primeru pod 2 početna vrednost zavisi ne samo od $\tilde{b}$ nego i od K, vidi se da je V_0^* je rastuća funkcija od $\tilde{b}$ i K.

10.2.2. Ograničeno osiguranja

Preostalo nam je da pokažemo rezultat i za ograničeno životno osiguranje. Funkcija $F(t, S_t)$ u ovom slučaju postaje $F^{gu}(t, S_t)$, tako da je $F^{gu}(t, S_t) = E^Q[g(u, S_u)|\mathcal{F}_t]$ jedinstvena cena pod pretpostavkom odsustva arbitraže, u trenutku t, derivata $g(u, S_u)$. Tada ξ_t postaje $\xi_t(u)$ i K_t postaje $K_t(u)$. Iz nezavisnosti finansijskog tržišta i portfolia osiguranja, proces vrednosti je sledeći,

$$V_t^* = E^Q[H_T|\mathcal{F}_t] = E^Q\left[\int_0^T g(u,S_u)dN_u^I \middle| \mathcal{F}_t\right] = \int_0^t g(u,S_u)dN_u^I + E^Q\left[\int_t^T g(u,S_u)dN_u^I \middle| \mathcal{F}_t\right]$$
$$= \int_0^t g(u,S_u)dN_u^I + \int_t^T F^{gu}(t,S_t)(l_x - N_t^I)_{u-t}p_{x+t}\mu_{x+t}du$$

TEOREMA 10.4.

Jedinstvena strategija minimizacije rizika $\varphi^* = (\xi^*, \eta^*)$ u meri Q za ograničeno osiguranje je data sa,

$$\xi_t^* = (l_x - N_{t-}^I)\int_t^T {}_{u-t}p_{x+t}\mu_{x+u}\xi_t(u)du, \quad t \in [0,T]$$

$$\eta_t^* = \int_0^t g(u,S_u)dN_u^I + (l_x - N_t^I)\int_t^T F^{gu}(t,S_t)_{u-t}p_{x+t}\mu_{x+u}du - \xi_t^* S_t, \quad t \in [0,T]$$

Dokaz.

Koristeći istu metodu kao teorema (10.2), možemo dokazati teoremu.

■

11. Zaključak

U radu je kao glavni cilj data hedžing strategija ugovora životnog osiguranja. Pri čemu pretpostavljamo da tržište nije kompletno, odnosno, da su skokovi u vrednosti akcije dozvoljeni. Pored toga, efekat takve pojave može brzo da nestane i onda cena akcije prati geometrijsko Brown-ovo kretanje, a skokovi u vrednosti akcije su obuhvaćeni shot-noise procesom.

Za početak su uvedeni unit-linked produkti životnog osiguranja i sličnost sa evropskom prodajnom opcijom. Zatim su objašnjeni diskretni modeli kretanja cene akcije i pretpostavke teorije verovatnoće i stohastičke analize. Nakon toga smo mogli da prikažemo neprekidni slučaj i objasnimo Brown-ovo kretanje za modeliranje cena. Otuda smo objasnili difuzne procese i stohastičke integrale, među kojima je važan rezultat Itô-va teorema i polumartingali koji su od značaja za hedžing strategiju. Potom Girsanov-a teorema koja nam daje vrlo važan rezultat prelaza iz jedne mere verovatnoće u drugu. U nastavku je dat Black-Scholes model vrednovanja cene opcije odakle su i potekle hedžing strategije.

Uvedeni su shot-noise procesi da bi mogli da obuhvatimo skok u ceni akcije, nakon čega su date osnove rizik-minimizirajuće strategije koju su uveli Föllmer i Sondermann. Ovakva strategija se zaniva na minimalnoj martingalnoj meri, kao i strategija predstavljena u radu. Potom su predstavljeni portfolio osiguranja, model tržišta i na samom kraju je data lokalna hedžing strategija za dve vrste unit-linked ugovora, a konstrukcija ovih strategija se zasniva na Galtchouk-Kunita-Watanabe dekompoziciji. Lokalnu hedžing strategiju je predložio Schweizer kao nastavak na Föllmer-Sondermann rizik-minimizirajuću strategiju u slučaju kada diskontovane rizične investicije nisu martingali, već polumartingali.

Dakle, na kompletnom tržištu postoji jedinstvena, rizik-neutralna mera, tako da je finansijski derivat hedžiran u potpunosti. Ovde je predstavljen slučaj tržišta koje nije kompletno i predstavljeni su dodatni kriterijumi da bi se pronašla odgovarajuća mera. U pitanju je minimalna martingalna mera, koja ima minimalan uticaj na model, a odgovarajuća hedžing strategija je rizik-minimizirajuća.

Kako shot-noise proces nije neprekidan, rizik-minimizirajuća strategija u novoj meri ne mora da bude lokalno rizik-minimizirajuća strategija u prvobitnoj meri. Dakle, ostaje nerešen problem kako pronaći lokalnu rizik-minimizirajuću hedžing strategiju u prvobitnoj meri kada cena akcije dopušta skokove.

LITERATURA

1) Bi Junna, Guo Junyi: Hedging Unit-linked Life Insurance Contracts in a Financial Market Driven by Shot-noise Processes, School of Mathematical Sciences, Nankai University, People's Republic of China: 18.9.2009;

2) Cvitanić Jakša, Zapatero Fernando: Introduction to the Economics and Mathematics of Financial Markets, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, England: 2004;

3) Föllmer Hans, Schweizer Martin: The Minimal Martingale Measure, Homboldt Universität zu Berlin, Germany, ETH Zürich, Switzerland: 20.5.2010;

4) Kurz Annette: Pricing of Equity-linked Life Insurance Policies with an Asset Value Guarantee and Periodic Premiums, University of Mannheim, Germany;

5) Lin X. Sheldon: Introductory Stochastic Analysis for Finance and Insurance, University of Toronto Department of Statistics: 2006;

6) Møller Thomas: Risk-minimizing Hedging Strategies for Unit-Linked Life Insurance Contracts, Laboratory of Actuarial Mathematics, University of Copenhagen: 1998;

7) Schmidt Thorsten, Stute Winfried: Shot-noise Processes and the Minimal Martingale measure, Department of Mathematics, University of Leipzig, Germany: 24.3.2007;

8) Schrager David F., Pelsser Antoon A.J.: Pricing Rate of Return Guarantees in Regular Premium Unit-linked Insurance, The Netherlands Department of Quantitative Economics; University of Amsterdam: 13.7.2004;

9) Shreve Steven E.: Stochastic Calculus and Finance: 6.10.1997;

10) Schweizer Martin: Option Hedging for Semimartingales, Universitat Bonn Institut fur Angewandte Mathematik, West Germany: 1993;

11) Vellekoop M.H., Kamp A.A. Vd, Post B.A.: Pricing and Hedging Guaranteed Returns on Mix Funds, The Netherlands: 23.12.2005.

KRATKA BIOGRAFIJA

Rođena sam 18.8.1988. godine u Novom Sadu. Sa nepunih 4 godine sam se preselila u Izrael gde sam pohađala osnovnu školu „Ahavat Cion“ u Tel Aviv-u, na hebrejskom jeziku, od prvog do trećeg razreda, a zatim „American International School“ u Tel Aviv-u, na engleskom jeziku, od četvrtog do sedmog razreda. Osmi razred sam završila u Novom Sadu, nakon čega sam upisala Gimnaziju „Svetozar Marković“ u Novom Sadu. Godine 2006. sam upisala studije matematika finansija na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, koje sam završila u septembru 2010. godine sa prosečnom ocenom 9.19. Iste godine na istom fakultetu sam upisala master studije primenjena matematika, modul matematika finansija. Zaključno sa junskim ispitnim rokom 2011. godine, položila sam sve predviđene ispite sa prosečnom ocenom 9.50. U periodu od juna do decembra 2011. sam radila kao volonter u banci Intesa, departman za makroekonomska istraživanja. Decembra 2011. godine sam upisala master studije na Ekonomskom fakultetu u Beogradu, smer IMQF (International Master’s in Quantitative Finance).

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj: **RBR**	
Identifikacioni broj: **IBR**	
Tip dokumentacije: **TD**	monografska dokumentacija
Tip zapisa: **TZ**	tekstualni štampani materijal
Vrsta rada: **VR**	master rad
Autor: **AU**	Sanja Stefanović
Mentor: **ME**	dr Dora Seleši
Naslov rada: **NR**	Hedžing unit-linked ugovora životnog osiguranja
Jezik publikacije: **JP**	srpski (latinica)
Jezik izvoda: **JI**	s/en
Zemlja publikovanja: **ZP**	Republika Srbija
Uže geografsko područje: **UGP**	Vojvodina
Godina: **GO**	2012

Izdavač: autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: 11 poglavlja / 64 strane / 11 lit. citata / 2 tabele
FOR

Naučna oblast: matematika
NO

Naučna disciplina: primenjena matematika
ND

Predmetne odrednice, ključne reči (**PO**, **UDK**): unit-linked životno osiguranje, ekvivalentna martingalna mera, Girsanov-a teorema, shot-noise procesi, minimalna martingalna mera, rizik-minimizirajuća strategija, G-K-W dekompozicija, lokalna hedžing strategija

Čuva se: U biblioteci za matematiku i informatiku
ČS

Važna napomena:
VN

Izvod (**IZ**): Cilj rada je da se predloži hedžing strategija za unit-linked životna osiguranja na tržištu u kome postoji shot-noise. Strategije za minimizaciju rizika u ovom radu se dobijaju putem Föllmer-Schweizer minimalne martingalne mere. Potom je data G-K-W (Galtchouk–Kunita–Watanabe) dekompozicija u kojoj se koristi svojstvo minimalne martingalne mere. Na kraju, data je strategija lokalne minimizacije rizika koja se primenjuje nakon promene u meri. Hedžing strategija je data za dve vrste unit-linked modela u životnom osiguranju pure endowment (osiguranje za slučaj doživljenja) i term insurance (ograničeno životno osiguranje).

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 6.10.2011
DP

Datum odbrane: **2012

DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik:	dr Nataša Krejić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član:	dr Danijela Rajter-Ćirić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Mentor:	dr Dora Seleši, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Serial number: **SNO**	
Identification number: **INO**	
Document type: **DT**	monograph type
Type of record: **TR**	printed text
Contents code: **CC**	master’s thesis
Author: **AU**	Sanja Stefanović
Mentor: **ME**	dr Dora Seleši, Assistant Professor
Title: **TI**	Hedging of Unit-Linked Life Insurance Contracts
Language of text: **LT**	Serbian (Latin)
Language of abstract: **LA**	s/en
Country of publication: **CP**	Republic of Serbia
Locality of publication: **LP**	Vojvodina
Publication year: **PY**	2012
Publisher: **PU**	author’s reprint

Publication place: **PP** — Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4

Physical description: **PD** — 11 chapters / 64 pages / 13 references / 2 tables

Subject, key words (**SKW**): unit-linked life insurance contracts, equivalent martingale measure, Girsanov theorem, shot-noise proces, minimal martingale measure, risk-minimising strategy, G-K-W decomposition, local hedging strategy

Holding data: **HD** — Library of the Department of Mathematics and Informatics

Note: **N**

Abstract (**AB**): The main goal of this thesis is to propose a hedging strategy for unit-linked life insurance contracts in a financial market driven by shot-noise. The risk-minimizing strategy is given by Föllmer-Schweizer minimal martingale meaure. Afterwards, the G-K-W (Galtchouk–Kunita–Watanabe) decomposition is given which uses the minimal martingale property. Finally, we derive the local risk-minimizing strategy which is used after a change in measure. The hedging strategy is explained for two types of unit-linked life insurance contracts: pure endowment and term insurance.

Accepted on Scientific board On: **AS** — 6.10.2011

Defended: **DE** — **2012

Thesis Defend board: **DB**

President: dr Nataša Krejić, Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Member: dr Danijela Rajter-Ćirić, Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Mentor: dr Dora Seleši, Associate Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad