



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI
FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU
I INFORMATIKU



Sanja Ružičić

MODELI PROTOKA KRVU U ARTERIJAMA

Master rad

Mentor: dr Marko Nedeljkov

Novi Sad, 2015.

Predgovor

Razvoj kompjutera i programa nam omogućava da pravimo sve preciznije aproksimacije raznih fizičkih fenomena i situacija. Iako postoji veliki broj parcijalnih diferencijalnih jednačina koje su odavno poznate, veliki broj još uvek nije rešen, a neke se ni ne mogu rešiti, tako da njihovo rešavanje ili samo dokazivanje da rešenje postoji, predstavlja veliki izazov za sadašnje i buduće generacije naučnika, a pre svega matematičara. Bez dobro razvijenih kompjuterskih algoritama za rešavanje sistema PDJ, nalaženje dovoljno dobrih aproksimacija tih rešenja predstavlja skoro nemoguć izazov. Tako da se značajan akcenat stavlja na razvoj moćnih kompjuterskih programa koji će izračunati to rešenje.

Postoji veliki broj modela koji opisuju strukturu kroz koju krv teče i između različitih modela mogu postojati neuporedive razlike. Pre svega, jer model zavisi od vrste i građe krvnog suda, kao i od funkcije koju isti obavlja. Različiti modeli se koriste u zavisnosti od toga da li se radi o arteriji, velikoj ili maloj, venama ili kapilarima. Ti modeli nam omogućavaju da dobijemo aproksimaciju brzine protoka, pritiska u arteriji, deformacije u krvnom sudu. Mi smo u ovom radu pažnju posvetili protoku krvi kroz velike arterije. Postoji i značajna razlika između modela koji opisuju zdrav krvni sud i krvni sud kod koga je geometrija izmenjena, jer se u slučaju opisa protoka krvi (fluida) kroz zdravu i veliku arteriju krv može aproksimirati njutnovskim fluidom, što nije slučaj kada se radi o bolesnoj arteriji.

Zidovi velikih arterija se sastoje iz nekoliko slojeva, gde svaki ima drugačije mehaničke karakteristike. Tri glavna sloja su tunika intima, medija i adventicija, koji su razdvojeni tankom elastičnom laminom. Sve do nedavno, nisu postojali modeli i kompjuterski programi koji modeliraju protok krvi kroz višeslojnu arteriju ali je prethodnih godina ostvaren značaj napredak i u toj oblasti.

Naš cilj je bio da predstavimo različite modele koji opisuju protok krvi kroz arteriju i da damo numerički algoritam za rešavanje bar jednog od njih, a rezultate predstavimo grafički.

Na početku smo se ukratko osvrnuli na primenu matematičkog modeliranja u medicini kao i na neke mogućnosti i koristi koje modeliranje može da pruži u ovoj oblasti.

U prvom delu rada smo se osvrnuli na osnovne pojmove iz mehanike fluida, parcijalnih diferencijalnih jednačina, opisali smo osnove funkcionisanja kardiovaskularnog sistema kao i zakonitosti proticanja krvi kroz krvne sudove.

U drugom delu rada su predstavljeni modeli. Dva su modela protoka krvi kroz zdravu, veliku arteriju, pri čemu jedan pretpostavlja zid arterije koji se sastoji samo iz jednog sloja, dok drugi opisuje protok krvi kroz arteriju koja se modelira kao

struktura koja se sastoji iz dva sloja. Takođe, predstavili smo i model koji opisuje interakciju između protoka krvi i stenozne arterije što je izraz za suženu i tvrdu arteriju, stanje koje nastaje kao posledica taloženja masnih supstanci, holesterola i kalcijuma na zidovima arterije, što kao posledicu može imati i smrt.

U trećem delu rada smo predstavili numerički algoritam za rešavanje modela sa višeslojnom strukturom i ideju numeričkog algoritma za dobijanje rešenja kod jedno-i-po dimenzionalnog modela sa jednim slojem strukture koji se rešava jedno-dimenzionalnim tehnikama za dobijanje numeričkih rešenja, a ima karakteristike dvodimenzionalnog modela. Taj model smo zatim i rešili, a rezultate smo predstavili grafički.

Na kraju bih se zahvalila mentoru dr Marku Nedeljkovu na poverenju, podršci i svim savetima datim kako tokom izrade ovog rada, tako i tokom studiranja. Takođe, zahvalnost dugujem i članovima komisije, dr Danijeli Rajter-Ćirić i dr Srboljubu Simiću.

Novi Sad, jun 2015. godine

Sanja Ružičić

Sadržaj

1	Matematičko modeliranje u medicini	1
I	Osnovni pojmovi	4
2	Uvod u Mehaniku fluida	4
2.1	Osnovne karakteristike fluida	4
2.2	Ojlerove i Navije-Stoksove jednačine	7
2.3	ALE mapiranje	10
2.4	Merenje napona kod deformacija	13
3	Parcijalne diferencijalne jednačine	15
3.1	Klasifikacija PDJ drugog reda	17
3.2	Najznačajnije linearne PDJ	18
4	Prostori Soboljeva	22
4.1	Osnovne definicije	22
4.2	L^p i prostori Soboljeva	23
4.3	Pojam slabog rešenja	25
5	Kardiovaskularni sistem	27
5.1	Krv	27
5.2	Krvni sudovi	29
6	Zakovitosti proticanja krvi kroz krvne sudove	32
6.1	Brzina protoka krvi	32
6.1.1	Laminaran protok krvi i Puazejev zakon	33
6.2	Faktori koji utiču na protok krvi	35
6.3	Puls i njegovo registrovanje	37
II	Modeli	40
7	Model protoka krvi kroz jednoslojne arterije	40
7.1	Redukovane jednačine modela	43
7.1.1	Dvodimenzionalne redukovane jednačine	43
7.1.2	Jedno-i-po dimenzionalan redukovani model	46

8	Višeslojni FSI problem	49
8.1	Višeslojan 3D model	49
8.1.1	Jednačine modela	49
8.1.2	Veze između različitih fizičkih modela	52
8.1.3	Granični i početni uslovi	53
8.1.4	Glavni problem	55
8.2	Višeslojan 2D model	55
8.2.1	Postojanje slabog rešenja	58
9	Model sa aterosklerozom	60
9.1	Jednačine fluida	60
9.2	Model strukture	62
9.3	Interakcija između fluida i strukture	63
9.4	Rezultati	64
III	Numeričke simulacije	65
10	Numerički algoritam za rešavanje jednoslojnog modela	65
11	2D FSI problem sa višeslojnom strukturom	73
11.1	Primer	81
12	Zaključak	85
	Literatura	86
	Biografija	89
	Ključna dokumentacija	90

1 Matematičko modeliranje u medicini

Matematičko modeliranje u medicini i biologiji ima već dugu istoriju, jer su još drevni naučnici i filozofi pokušavali da opišu strukturu ljudskog tela, kao i vezu između različitih delova ljudskog organizma. Danas se ta opisivanja vrše kroz homeostazu, ravnotežu u ljudskom organizmu. Homeostaza predstavlja tendenciju sistema, naročito fiziološkog sistema (organizma), da održi unutrašnju stabilnost, zahvaljujući koordinisanom odgovoru organizma na situaciju koja bi mogla da poremeti normalne uslove ili funkcije u organizmu. Homeostaza je vrsta korektivnog mehanizma koji na primer održava nivo glukoze i potrebe organizma za glukozom i hormonima. Takođe, homeostaza održava temperaturu na optimalnom nivou kod sisara, koje su toplokrvne životinje i zahtevaju konstantu temperaturu. Isto tako, koncentracija vode u ćelijama i hemijska koncentracija mora da se održava na određenom nivou kako bi normalni životni procesi mogli da se odvijaju. Svi ovi procesi su neophodni kako bi telo moglo optimalno da funkcioniše tako da se svako odstupanje od ravnoteže momentalno ispravlja mehanizmom homeostaze. Ideja homeostaze je nastala iz ideje koju su imali drevni naučnici, kada je smatrano da svaka bolest predstavlja odstupanje od prvobitne ravnoteže u ljudskom organizmu. Moderan pristup koji ima za cilj da opiše funkcionisanje fizioloških sistema zasniva se na činjenici da živi sistemi nikada nisu u ravnoteži, jer na taj način ostvaruju interakciju sa okolinom i drugim živim sistemima. Takođe, modeli bi trebali da uzmu u obzir i mehanizme koje koriste živi sistemi (organizmi), kojima se sistem vraća u homeostazu. U slučaju velikih promena u samom sistemu, može se desiti da se sistem ne vrati u početnu homeostazu, već da pronade novu ravnotežu.

Danas, studije koje koriste matematičko modeliranje, a naročito matematičko modeliranje u medicini privlače značajnu pažnju i veliki deo sredstava odlazi upravo na tu stranu. U medicini, matematičko modeliranje može da donese značajan napredak u razvoju lekova ali i u unapređenju tehnologije u bolnicama, sportskoj medicini itd.

Postoje dva glavna pristupa u matematičkom opisivanju medicinskih fenomena. Prvi se odnosi na prikupljanje velikog broja podataka, a zatim i korišćenje modernih statističkih metoda i kompjuterskih sistema u analizi tih podataka kao i u korišćenju tih metoda u svrhu razvoja matematičkih modela. Malo je poznato da je termin *regresija* dobro poznat u statistici i nastao u devetnaestom veku kao rezultat ispitivanja nasleđivanja kod ljudskih organizama. Kod drugog pristupa postoji još dosta prostora za napredak, a on se sastoji u predikciji ponašanja sistema na osnovu već poznatih mehaničkih karakteristika tj. predstavljanju sistema modelima koji verodostojno opisuju njihove mehaničke karakteristike i ponašanje.

Opisuju se sistemi različite kompleksnosti, jer se neki sistemi mogu opisati jednostavnim modelima koji se mogu lako konstruisati i rešiti, ali postoje i veoma kompleksni modeli koji uzimaju u obzir veliki broj stvarnih procesa sa kojima je teško raditi [18].

Prethodnih decenija se matematičkom modeliranju protoka krvi kao i električne aktivnosti srca posvećuje velika pažnja. Pre svega, jer su kardiovaskularne bolesti jedan od glavnih uzroka smrti u razvijenom delu sveta. Jednačine koje opisuju protok krvi su već poznate u fizici i nazivaju se Navije-Stoksove jednačine, što omogućava naučnicima da više pažnje posvete opisivanju strukture kroz koju krv teče ali i razvoju efikasnih kompjuterskih programa za dobijanje dovoljno dobre aproksimacije protoka. Veoma je važno u model uključiti i interakciju između fluida i strukture, jer je razmena informacija između zida arterije i fluida (krvi) toliko značajna da svako odstupanje može da dovede to nestabilnog i nedovoljno preciznog rešenja. S obzirom da jedan kompjuterski program može da se primeni na grupu arterija ili grupu pacijenata sa istim osobinama, isti program se može iskoristiti kako bi se predvideo ishod operacije i pre nego što se ona izvede.

Dalje ćemo navesti nekoliko primera u kojima bi matematičko modeliranje moglo ili je već omogućilo značajan napredan u lečenju pacijenata.

1. Aneurizma predstavlja kesasto proširenje krvnog suda ispunjeno krvlju. Može se desiti da čovek ceo život živi sa aneurizmom, a da ni ne zna da je ima i da se nikakvi simptomi ne pojavljuju. Međutim, ako se manifestuje to je najčešće u formi pucanja zida krvnog suda i krvarenja. Najčešća lokacija za aneurizmu nalazi se u sistemu arterija koje se nalaze u samoj osnovi mozga. Taj sistem je poznat po nazivu *Vilisov krug* (*The Circle of Willis*). Iako 5 – 6% ljudske populacije živi sa bar jednom aneurizmom u Vilisovom krugu, te aneurizme su najčešće veoma male i postoji veoma mala šanse da će da puknu. Međutim, ukoliko se desi da ta aneurizma pukne, ishod je najčešće fatalan. Dve vrste tretmana se koriste ukoliko se takva aneurizma otkrije, ali su oba veoma rizična i ne garantuju uspeh. Zbog toga je hirurgu veoma značajna procena rizika, kao i procena kada će ta aneurizma da pukne. Takođe, veoma je značajan odabir odgovarajućeg tretmana koji treba sprovesti kao i tačna lokacija gde tretman treba primeniti. Hirurg ne može da bude siguran da je doneo pravu odluku sve dok se lično ne uveri u stanje pacijenta nakon što započne operaciju. Nekoliko velikih istraživačkih institucija radi na ovom problemu i postoji velika šansa da će u bliskoj budućnosti postojati kompjuterski program koji će odgovornom lekaru dati odgovor na sve nedoumice i koji će moći da predviti krajnji ishod i pre nego što se on desi (videti [2]).
2. Proces koagulacije krvi je veoma kompleksan proces i igra nezamenjivu ulogu u funkcionisanju živih organizama. Ta kompleksnost se ispoljava zbog kom-

pleksnosti same krvi, koja je fluid čije karakteristike i ponašanje još uvek nisu u potpunosti objašnjeni. Zatim, proces koagulacije je veoma osetljiv i mnoge spoljašnje i unutrašnje aktivnosti mogu da ga poremete. Takođe, postoji značajna razlika u procesu koagulacije između različitih vrsta živih organizama. Do sada je razvijeno dosta modela koji opisuju proces koagulacije krvi, kao i fenomene koji ga prate (videti [4]).

3. Još jedna veoma značajna primena matematičkog modeliranja u medicini, koja je još uvek u začeću je matematičko modeliranje kancera. Razlog zašto ova primena još uvek nije dovoljno razvijena je velika nepredvidivost ponašanja kancera. Modeliranje rasta kancera znači modeliranje ponašanja i evolucije bilion živih ćelija, gde treba obratiti pažnju ne samo na fizička svojstva tih ćelija (masa, brzina, temperatura), nego i na biološka kao što su reprodukcija, ciklus ćelije, komunikacija ... Ta svojstva određuju ponašanje celog kompleksa ćelija tako da neka mutacija u DNK ćelije može da izazove značajnu promenu ponašanja ćelije, a s obzirom da ćelije međusobno komuniciraju može da izazove promenu ponašanja velikog broja ćelija. Kao posledica toga, bilo koji slučajan događaj u ćeliji može da izazove promenu ponašanja celog tumora. Sve ovo prethodno navedeno pravi veliki zastoj u modeliranju tumora, jer je veoma teško predvideti ponašanje samog tumora i to matematički opisati (videti [17]). Ali, uzimajući u obzir ubrzan napredak u ovoj oblasti i uložena velika sredstva, verujemo da će se uskoro naći rešenje i za ovaj problem.
4. Danas postoje i modeli koji opisuju cirkulaciju krvi u mozgu koja je veoma kompleksan proces. U [5] je posebna pažnja posvećena autoregulaciji koja se definiše kao sposobnost mozga da održava protok krvi uprkos promeni spoljašnjih faktora. Ti faktori mogu biti pritisak, nivo ugljen-dioksida u krvi, nivo kiseonika u krvi, funkcionalna aktivnost mozga i mnogi drugi.
5. Razvijeni su i mnogi modeli koji na osnovu parametara vezanih za svakog pojedinačnog pacijenta, određuju miks lekova koje pacijent treba da primi kako bi terapija bila delotvorna. Posebno se izdvajaju oni koji određuju hemoterapiju kod lečenja pacijenata sa kancerom.

Deo I

Osnovni pojmovi

2 Uvod u Mehaniku fluida

Mehanika fluida je deo mehanike koji izučava zakone ravnoteže i kretanja tečnosti i gasova. Zajedno sa geometrijom i astronomijom, nauka o kretanju tečnosti spada u najstarije nauke kojima se čovek bavio. Poznati su kanali za navodnjavanje, nasipi za odbranu, veštačka jezera koji su napravljeni u Kini 5000 godina pre nove ere. Nešto kasnije su slični radovi izvedeni u Indiji, Egiptu i Mesopotamiji i mnogi od tih objekata su i danas u upotrebi. Mehanikom fluida su se bavili mnoge poznate istorijske ličnosti kao što su Arhimed (250 godina pre nove ere), Leonardo da Vinči (16. vek), Galileo (17. vek), Njutn, Ojler, Lagranž, Navije, Stoks itd [25].

2.1 Osnovne karakteristike fluida

Običaj u fizici je da se materijali dele u tri kategorije, čvrsti materijali, tečnosti i gasovi. Međutim, u mehanici fluida se posmatraju dve klase, fluidi i ne-fluidi (čvrsti materijali). Fluidi su materijali koje se neprestano deformišu pod uticajem spoljašnjih sila i predstavljaju zajednički naziv za tečnosti i gasove. Nije uvek moguće naći jasnu razliku između čvrstih materijala i fluida, jer postoje neki materijali, kao što su neke vrste polimera, koje poprimaju osobine i jednih i drugih ili one koje u zavisnosti od toga u kojim se uslovima nalaze, prelaze iz čvrstih materija u fluide ili obrnuto (boja, žele). Čvrste materijale možemo definisati kao materijale kod kojih se pozicija i oblik elemenata iz kojih se sastoje, malo menjaju ukoliko na njih deluje mala sila. Sa druge strane, fluide definišemo kao materije kod kojih se pozicija gradivnih elemenata veoma značajno menja, bez obzira na to koliko je mala sila koja deluje na njih. Gustina supstanci u tečnom stanju je obično mnogo veća od onih u gasovitom stanju ali se kao najznačajnija razlika između tečnosti i gasova može navesti stišljivost. Stišljivost je osobina fluida da pri promeni temperature i pritiska menja zapreminu. U slučaju gasova, svaku primetnu promenu pritiska prati i mnogo veća promena zapremine u odnosu na tečnosti. Poznati su slučajevi kada je ta promena zapremine približno ista i u slučaju gasova i u slučaju tečnosti [3, 33].

Gasovi se često posmatraju kao stišljivi fluidi, a tečnosti kao nestišljivi. Svi fluidi su stišljivi, ali se vrlo često usvaja aproksimacija da je fluid nestišljiv, posebno kod tečnosti.

Prilikom proučavanja protoka fluida, neophodno je obratiti pažnju na nekoliko

parametara. To su gustina, specifična težina, specifična gravitacija i viskoznost [32].

Gustina se definiše kao masa po jedinici zapremine neke supstance i označava se sa ρ . SI jedinica za gustinu je kg/m^3 , a uobičajena aproksimacija za gustinu krvi je $1060 kg/m^3$.

Specifična težina se definiše kao težina po jedinici zapremine supstance, a njena SI jedinica je N/m^3 .

Specifična gravitacija je odnos težine tečnosti na standardnoj, referentnoj temperaturi i težine vode i nema jedinicu.

Viskoznost je mera fluidnog otpora slobodnom tečenju. To je vrsta unutrašnjeg trenja odnosno otpor kojim se slojevi fluida suprotstavljaju kretanju jednih u odnosu na druge i analogna je trenju kod čvrstih tela.

Dva osnovna modela fluida su:

1. *Idealan fluid* je fluid kod koga je viskoznost zanemarljiva u odnosu na ostale sile koje determinišu kretanje fluida.
2. *Realan fluid* je fluid kod koga viskozne i elastične sile nisu zanemarljive.

Delovanje neke sile F na fluid se ispoljava kroz deformaciju d , tangencijalni, smicajni napon τ i naprezanje γ . Posmatrajmo liniju fluida u vremenu t . Ugao između linije fluida u vremenu t i linije fluida u $t + dt$ (nakon nekog vremena dt) se definiše kao naprezanje γ . Tangencijalni napon je povezan sa stopom naprezanja $\dot{\gamma}$ i veza između smicanja i naprezanja se ispoljava kroz viskoznost koja predstavlja nagib krive koju formiraju smicajni napon i stopa naprezanja.

Vršimo podelu fluida na *njutnovske* i *nenjutnovske*, gde su njutnovski fluidi oni koje karakteriše linearna veza između tangencijalnog napona i stope naprezanja. Ta veza se kod njutnovskih fluida može predstaviti na sledeći način

$$\tau = \eta \dot{\gamma},$$

gde τ predstavlja tangencijalni (smicajni) napon, $\dot{\gamma}$ stopu naprezanja, a η koeficijent dinamičke viskoznosti (viskoznost).

Kod nenjutnovskih fluida, veza između τ i $\dot{\gamma}$ nije linearna i njihova karakteristika je da se viskoznost menja sa stopom naprezanja, tj. nagib krive koju formiraju τ i $\dot{\gamma}$ nije konstantan [32]. Matematički modeli koji opisuju njutnovske fluide su jednostavniji, pa zato iako ni jedan realan fluid ne odgovara savršeno definiciji, za mnoge tečnosti i gasove pretpostavljamo da su njutnovski. Neki od primera su voda i vazduh. Važan primer nenjutnovskih fluida je krv.

Pri relativno sporom strujanju fluida kroz cev, formiraju se slojevi fluida takvi da su brzine delića iz istog sloja iste, dok se brzine slojeva razlikuju. Sa povećanjem

brzine dolazi do naglih fluktuacija i formiranja vrtloga. Taj fenomen je krajem 19. veka uočio engleski naučnik Ozbourn Rejnolds (*Osborne Reynolds*). On je pokazao da postoje dva različita režima strujanja: laminarno koje se veoma organizovano i pojavljuje se pri malim brzinama i turbulentno koje se javlja pri velikim brzinama, jer protok sa povećanjem brzine postaje neorganizovan. Između slojeva fluida koji se kreću različitim brzinama kod laminarnog strujanja deluju sile viskoznog (unutrašnjeg) trenja koje nastoje da izjednače brzine različitih slojeva.

Parametar koji je veoma značajan prilikom proučavanja protoka njutnovskih fluida je Rejnoldsov broj Re , koji predstavlja odnos inercijalnih i viskoznih sila, a jednak je

$$Re = \frac{2\rho u R}{\eta},$$

gde ρ predstavlja gustinu u kg/m^3 , R poluprečnik cevi kroz koju teče fluid u m , η viskoznost u $N s/m^2$, a u brzinu fluida u m/s . S obzirom da prilikom protoka fluida kroz cev, brzina nije konstantna, kod Rejnoldsovog broja se vrlo često koristi prosečna brzina kroz poprečni presek. Rejnoldsov broj nam pomaže da odredimo tranziciju između laminarnog i turbulentnog protoka. Laminarni protok se dešava u okolini u kojoj je $Re < 2000$, a turbulentni u okolini u kojoj je $Re > 4000$. Oblast u kojoj važi $2000 < Re < 4000$ predstavlja oblast prelaznog režima v [32].

U mehanici se često koristi i koeficijent kinematičke viskoznosti μ koji je jednak količniku koeficijenta dinamičke viskoznosti i gustine ρ tj.

$$\mu = \frac{\eta}{\rho}.$$

Karakteristika neviskoznog fluida je $\eta = 0$. U međunarodnom sistemu jedinica, jedinica za merenje (dinamičke) viskoznosti je $N s/m^2$, a jedinica za merenje kinematičke viskoznosti je m^2/s [25].

Prilikom kretanja fluida, pod uticajem površinskih i zapreminskih sila, može doći do deformacije, koja zavisi od vrste strujanja i reoloških karakteristika fluida. Reologija se bavi proučavanjem protoka fluida, deformacija i strujanja materijala, a viskozan protok je specijalan slučaj. Drugim rečima, reologija je deo mehanike koji izučava ponašanje tečnih, koloidnih i čvrstih sistema pod uticajem spoljašnjih sila. Njen osnovni zadatak je da utvrdi karakteristike fluida ili čvrste materije u odnosu na otpor koji ta materija pruža deformaciji pri promeni pritiska ili smicajnog napona. Viskoznost je rezultat unutrašnjeg trenja u fluidu, pa se i meri silom trenja koja se javlja pri kretanju. Aparat za merenje viskoznosti neke tečnosti, naročito lakova, ulja, i dr. naziva se reometar.

2.2 Ojlerove i Navije-Stoksove jednačine

Najčešći način da se opiše protok fluida je preko brzine fluida u nekoj tački $\mathbf{x}$ u vremenu t

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t).$$

Brzinu u $\mathbb{R}^3$ možemo predstaviti preko njene tri komponente u Dekartovom koordinatnom sistemu sa $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, gde $u_i = u_i(x_1, x_2, x_3, t)$, $i = 1, 2, 3$. Iako ni jedan protok ne može zaista biti dvodimenzionalan, vrlo se često usvaja aproksimacija u formi

$$\mathbf{u} = (u_1(x_1, x_2, t), u_2(x_1, x_2, t), 0),$$

gde je brzina $\mathbf{u}$ nezavisna od jedne prostorne promenljive i nema komponentu u tom pravcu.

Pre nego što predstavimo Ojlerove i Navije-Stoksove jednačine, uvešćemo osnovne oznake i operatore koji će biti korišćeni u nastavku rada.

Ubrzanje fluida (materijalni izvod) u nekoj tački označavamo sa $D\mathbf{u}/Dt$, a jednostavnom primenom pravila o izvodu složene funkcije dobija se

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3}.$$

Posmatramo vektor brzine $\mathbf{u} = (u_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_n(x_1, \dots, x_n))$ u $\mathbb{R}^n$ i uvodimo sledeće oznake:

Vektor $\partial \mathbf{u} / \partial t$ je jednak

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial t}, \dots, \frac{\partial u_n}{\partial t} \right)_{n \times 1}^T.$$

$\nabla \mathbf{u} = (\nabla u_1, \dots, \nabla u_n)$ je matrica data sa

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_n}{\partial x_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

i $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ je vektor

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \end{pmatrix}_{n \times 1},$$

Operator

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)_{n \times 1}^T$$

se naziva *Hamiltonov operator*.

Δ nazivamo *Laplasov operator* i predstavlja

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

Ojlerove jednačine koje opisuju kretanje fluida predstavljaju sistem kvazilinearnih hiperboličnih jednačina i mogu se primeniti na kretanje stišljivog i nestišljivog fluida. Ojlerove jednačine koje opisuju kretanje idealnog, stišljivog fluida u $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ imaju sledeći oblik

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} &= \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{u} &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

gde $\mathbf{u} = (u_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_n(x_1, \dots, x_n))$, $n = 2, 3$ predstavlja brzinu fluida, $\mathbf{g}$ gravitacionu silu koja deluje na jedinicu mase, p skalarnu funkciju pritiska, a ρ gustinu fluida. Prva jednačina predstavlja drugi Njutnov zakon kretanja, dok druga jednačina predstavlja jednačinu kontinuiteta koja opisuje Zakon održanja mase. Po drugom Njutnovom zakonu je ukupna sila F (površinske + zapreminske sile) jednaka ubrzanju čestice a sa masom m tj.

$$F = m a.$$

Po zakonu održanja mase u klasičnoj mehanici, masa neke čestice m se ne menja u toku vremena tj.

$$\frac{d}{dt} m = 0. \quad (2.2)$$

Kako masu neke čestice možemo izraziti pomoću gustine ρ i zapremine V sa

$$m = \rho V,$$

jednačina 2.2 se može napisati u obliku

$$V \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{dV}{dt} = 0, \quad (2.3)$$

pri čemu pretpostavljamo da se ρ i V menjaju u toku vremena. Može se pokazati da jednačina 2.3 dobija oblik

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{u} = 0,$$

što je oblik jednačine kontinuiteta koji mi koristimo u ovom radu [30].

U slučaju nestišljivog fluida, kada je gustina konstantna jednačina kontinuiteta dobija drugi oblik tako da važi

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial u_n}{\partial x_n} = 0.$$

Ojlerove jednačine koje opisuju kretanje nestišljivog fluida u $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ predstavljamo sa

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} &= \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0. \end{aligned}$$

Ojlerove jednačine za nestišljive fluide u skalarnom obliku u $\mathbb{R}^3$, pišemo na sledeći način

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} &= g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3}, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} &= 0, \end{aligned}$$

gde

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t) &= (u_1(x_1, x_2, x_3, t), u_2(x_1, x_2, x_3, t), u_3(x_1, x_2, x_3, t)), \\ p &= p(x_1, x_2, x_3, t) \text{ i} \\ \mathbf{g} &= (0, 0, -g)^T \text{ (videti [1]).} \end{aligned}$$

Protok nestišljivog njutnovskog fluida sa konstantnom gustinom ρ i konstantnim koeficijentom dinamičke viskoznosti η se opisuje Navije-Stoksovim jednačinama koje su date sa

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) &= \rho \mathbf{g} - \nabla p + \eta \Delta \mathbf{u}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Navije-Stoksove će biti od velikog značaja u nastavku rada, a može se primetiti da je razlika između Ojlerovih i Navije-Stoksovih jednačina u dodatku sa desne strane $\mu \Delta \mathbf{u}$, pri čemu $\mu = \eta / \rho$ predstavlja koeficijent kinematičke viskoznosti.

U slučaju kada se fluid kreće u ograničenoj oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, sa nepraznom granicom Γ , radi dobre definisanosti ovim jednačinama se moraju dodati odgovarajući granični i početni uslovi.

Cilindrične koordinate

Kako Dekartov sistem nije uvek najbolji za rešavanje problema, posebno onih iz mehanike fluida, pribegava se korišćenju nekih drugih koordinata. Česte su cilindrične koordinate. Ukoliko su Dekartove koordinate neke tačke M u prostoru date sa x, y i z , tada tačku M u $\mathbb{R}^3$ predstavljamo preko trojke (r, θ, z) na sledeći način

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z,$$

gde su r i θ polarne koordinate projekcije tačke M na xy - ravan, a z je rastojanje između xy - ravni i tačke M . Cilindrične koordinate iz Dekartovih dobijamo iz jednačina:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}, \quad z = z.$$

Cilindrične koordinate su veoma korisne kod problema koji obuhvataju simetričnost oko neke ose i u tom slučaju se z - osa uzima za osu simetrije.

2.3 ALE mapiranje

Pri proučavanju kretanja fluida razvijena su dva pristupa: *Ojlerov* i *Lagranžov* pristup. Protok fluida možemo zamisliti kao proces prenošenja ili mapiranja paketića sa jedne na drugu poziciju. Jedan od načina da se interpretira razlika između dva pristupa je da za određeni protok krvi postoji jedinstvena brzina fluida koja može biti predstavljena na dva različita načina, praćenjem specifičnih paketića fluida tokom protoka (Lagranžovim pristupom) ili posmatranjem kretanja paketića fluida i praćenjem brzine kroz fiksnu oblast (Ojlerovim pristupom). Prirodan način za praćenje protoka krvi je posmatranje trajektorija na paketić fluida. Poziciju jednog paketića ćemo predstaviti preko vektora (ξ, ψ, ω) , gde je ξ x - koordinata, ψ y - koordinata, a ω z - koordinata datog paketića. Ukoliko poziciju paketića u početnom trenutku $t = 0$ označimo sa $A = A(\alpha, \beta, \gamma)$, možemo da odredimo poziciju datog paketića u bilo kom vremenu t i na taj način dobijemo trajektoriju kretanja

$$\xi = \xi(A, t).$$

Trajektorija ξ je zavisna promenljiva opisana preko Lagranžovog pristupa za datu početnu poziciju A i vreme t koje su nezavisne promenljive. Posmatrajmo protok krvi, kao prenošenje paketića od startne pozicije A do neke pozicije ξ posle određenog vremena i neka za datu početnu poziciju postoji jedinstveno ξ . Promenljiva A je nezavisna, prostorna koordinata u Lagranžovom koordinatnom sistemu koji se još naziva i materijalni koordinatni sistem, jer je u njemu pozicija paketića fundamentalna, zavisna, prostorna promenljiva. Takođe, pretpostavićemo da je mapiranje od A do ξ neprekidno i jedinstveno i da susedni paketići ne mogu biti

razdvojeni, niti jedan paketić može zauzeti poziciju drugog. Uvedene pretpostavke znače da je posmatrano preslikavanje invertibilno, tj. moguće je pretvaranje Lagranžove prezentacije sistema u Ojlerovu i obrnuto:

$$\begin{array}{ccc} \xi = \xi(A, t) & \Longleftrightarrow & A = A(\xi, t) \\ \text{Lagranžov pristup} & & \text{Ojlerov pristup} \end{array}$$

Kod Lagranžovog pristupa pretpostavljamo da znamo početnu poziciju A (nezavisnu promenljivu) i posmatramo poziciju ξ kao zavisnu promenljivu, dok kod Ojlerovog pristupa uzimamo fiksnu poziciju $X = \xi$ kao nezavisnu promenljivu sa ciljem da dobijemo početnu poziciju A paketića koji se trenutno nalazi na uzetoj fiksnoj poziciji, pa A posmatramo kao zavisnu promenljivu. Lagranžov pristup koristimo ukoliko nam je cilj da posmatramo kretanje neke materije sa protokom fluida od izvora tj. početne pozicije do drugih delova domena. Međutim, može se primetiti da se Lagranžov pristup koristi pre svega kod problema posmatranja, a ne kod izračunavanja protoka fluida, gde ovaj pristup ima nedostataka. Npr. uzimanje uzorka u prostoru se ne može kontrolisati, jer će se paketići kretati zajedno sa protokom fluida, a ne tamo gde nama odgovara. Takođe, većina primena u inženjerstvu i kod geofizičkih fluida zahteva fiksni domen tj. korišćenje Ojlerovog pristupa. Daćemo jedan jednostavan primer u $\mathbb{R}$ [28]:

Primer 2.1 *Neka je data trajektorija kretanja paketića fluida u jednodimenzionalnom domenu sa prostornom promenljivom x na sledeći način*

$$\xi(\alpha, t) = \alpha \sqrt{1 + 2t},$$

gde α predstavlja početnu poziciju, $\alpha = \xi(t = 0)$. Na taj način dobijamo poziciju x posmatranog paketića u bilo kom trenutku, iako nije uobičajen slučaj kada nam je toliko informacija dato na način koji nam savršeno odgovara. Iz formule koja nam je data možemo izračunati brzinu posmatranog paketića koja predstavlja izvod trajektorije po vremenu i koju zovemo i Lagranžova brzina, ukoliko je α konstantno

$$\mathbf{V}(\alpha, t) = \frac{\partial \xi}{\partial t} = \alpha \frac{1}{\sqrt{1 + 2t}},$$

kao i ubrzanje koje je dato sa

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\alpha(1 + 2t)^{-3/2}.$$

Na osnovu toga, za date početne pozicije od nekoliko paketića možemo da dobijemo trajektorije i brzine iz prethodnih jednačina, što se može predstaviti grafički. Za razliku od Lagranžove brzine koja je data sa

$$\mathbf{V}(A, t) = \left. \frac{\partial \xi(A, t)}{\partial t} \right|_{A=\text{const}},$$

Ojlerova brzina koju definišemo na fiksnoj domenu je data sa

$$\mathbf{w}(x, t)|_{x=\xi(A, t)} = \mathbf{V}(A, t),$$

gde je x fiksna pozicija, a A je početna pozicija. Sada možemo da izvršimo transformaciju Lagranžove brzine u Ojlerovu, tako što ćemo iz jednačine elimisati α . Iz jednačine trajektorije koja je data na početku primera možemo izraziti α sa $\alpha(\xi, t) = \xi(1 + 2t)^{-1/2}$. Zamenom $\alpha(\xi, t)$ i x umesto ξ u jednačinu lagranžove brzine dobijamo Ojlerovu brzinu

$$\mathbf{w}(x, t) = x(1 + 2t)^{-1}.$$

Iako Ojlerov pristup dobro funkcioniše u slučaju kada posmatramo geometrijski fiksni domen kroz koji se kreće fluid, nailazimo na problem kada taj domen menja oblik tokom vremena. Jedan od najpoznatijih metoda koji se koriste da opišu interakciju između fluida i strukture je ALE metod (*Arbitrary Lagrangian Eulerian method*). ALE metod opisuje kretanje proizvoljnih delova mreže (paketića) kroz referentni domen uzimajući u obzir kretanje svih tačaka.

Slučaj kada posmatramo model kretanja fluida kroz pokretnu oblast $\Omega_F(t)$, koja zavisi od vremena, može da prouzrokuje mnoge probleme [4]. Na primer, aproksimacija prvog izvoda

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \approx \frac{\mathbf{u}(t^{n+1}, \cdot) - \mathbf{u}(t^n, \cdot)}{t^{n+1} - t^n},$$

nije dobro definisana, jer $\mathbf{u}(t^{n+1}, \cdot)$ i $\mathbf{u}(t^n, \cdot)$ nisu definisani na istom domenu. Kao način da se prevaziđe taj problem je mapiranje domena $\Omega_F(t)$ na fiksni, referentni domen Ω_F preko ALE mapiranja

$$\mathcal{A} : \Omega_F \longrightarrow \Omega_F(t).$$

ALE mapiranje nam je potrebno pre svega zbog numeričkog rešavanja jednačina. Neophodno nam je da transformišemo izvod po vremenu brzine fluida $\mathbf{u}$ pomoću pravila za izvod složene funkcije na sledeći način:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} |_{\Omega_F} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{u},$$

gde je

$$\mathbf{w} = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}$$

brzina strukture. Na taj način, Navije-Stoksove jednačine koje treba rešiti numerički možemo preko ALE formulacije napisati na sledeći način

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} |_{\Omega_F} + (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p &= \mu \Delta \mathbf{u}, \text{ na } \Omega_F(t) \times (0, T), \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \text{ na } \Omega_F(t) \times (0, T). \end{aligned}$$

2.4 Merenje napona kod deformacija

Najčešće korišćena veličina prilikom merenja napona je Košijev tenzor napona. Košijev tenzor napona σ se definiše kao površinska sila koja deluje unutar materijala. To je sila koja deluje na jedinicu površine trenutnog, deformisanog domena pa se zbog toga naziva i *pravi napon*. Kada je deformacija mala nema značajne razlike između referentne i deformisane konfiguracije, pa Košijev tenzor napona predstavlja razuman način za izračunavanje sile koja deluje na jedinicu površine. Međutim, u slučaju velikih deformacija, neophodno je napraviti razliku između referentne i deformisane (trenutne) konfiguracije. Postoji više načina za izračunavanje sile koja deluje na neku površinu. Često se koriste Prvi i Drugi Piola-Kirhofov tenzor napona.

Prvi Piola-Kirhofov tenzor napona $\mathbf{S}$ odgovara sili koja deluje u sadašnjoj konfiguraciji na površinu koja odgovara referentnoj (nedeformisanoj) konfiguraciji, dok se drugi Piola-Kirhofov tenzor napona $\mathbf{\Pi}$ takođe posmatra u odnosu na nedeformisanu konfiguraciju ali nema odgovarajuću fizičku interpretaciju. Prednost drugog Piola-Kirhofovog tenzora napona je u tome što je simetričan što ga u nekim slučajevima čini boljom opcijom za primenjivanje od prvog Piola-Kirhofovog tenzora.

Kako bismo objasnili odnos između prvog Piola-Kirhofovog tenzora $\mathbf{S}$ i drugog Piola-Kirhofovog tenzora $\mathbf{\Pi}$ definisaćemo deformaciju na sledeći način: Za svaku tačku $x \in \Omega_S$ koja pripada nedeformisanom, referentnom domenu Ω_S , deformacija je mapiranje φ kojim se svaka tačka $x \in \Omega_S$ preslikava u tačku $\varphi(x) = x + \mathbf{d}(x)$, pri čemu $\mathbf{d}$ predstavlja pomeraj tačke x . Gradijent te deformacije ćemo označiti sa $\mathbf{F} = \nabla \varphi$. Važi

$$\mathbf{F} = \nabla \varphi = \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right]_{i,j} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{d} = \mathbf{I} + \left[\frac{\partial d_i}{\partial x_j} \right]_{i,j},$$

gde sa $\mathbf{I}$ označavamo jediničnu matricu.

Upravo nam gradijent deformacije $\mathbf{F}$ omogućava da napravimo vezu između prvog i drugog Piola-Kirhofovog tenzora napona tako da važi

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}\mathbf{\Pi}.$$

Prvi Piola-Kirhofov tenzor napona predstavljamo u obliku

$$\mathbf{S} = \mu(\nabla \mathbf{d} + (\nabla \mathbf{d})^T) + \lambda \operatorname{div} \mathbf{d} \mathbf{I},$$

gde λ i μ predstavljaju Lamove konstante, dok je $\mathbf{I}$ jedinična matrica. $\mathbf{S}$ nije simetričan što ga čini nezgodnim za korišćenje prilikom modelovanja svojstava materijala ali je zato savršen za opisivanje nekih fizičkih zakona. Za razliku od prvog,

drugi Piola-Kirhofov tenzor jeste simetričan što ga čini pogodnijim za korišćenje prilikom opisivanja fizičkih svojstava materijala (videti [19]).

Takođe, drugi Piola-Kirhofov tenzor napona se može predstaviti kao funkcija od Grin-Lagranžovog tenzora deformacije¹ $\mathbf{E}$ kojeg definišemo preko gradijenta deformacije $\mathbf{F}$

$$\mathbf{E} := \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) := \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{d} + \nabla \mathbf{d}^T + \nabla \mathbf{d} \nabla \mathbf{d}^T).$$

S obzirom da $\mathbf{E}$ sadrži kvadratni član, u slučaju malog gradijenta deformacije, vezu između naprezanja i gradijenta deformacije možemo aproksimirati linearnim izrazom koji predstavlja simetrični gradijent deformacije $D(\mathbf{d})$

$$\mathbf{E} \approx \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{d} + \nabla \mathbf{d}^T) = D(\mathbf{d}).$$

Jedan način da se $\mathbf{\Pi}$ predstavi kao funkcija od $\mathbf{E}$ je preko *Saint Venant-Kirchhoff*-og modela gde važi

$$\mathbf{\Pi}(\mathbf{E}) = \lambda(\text{tr } \mathbf{E})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E} \text{ (videti [4])}.$$

¹Pored naziva Grin-Lagranžov tenzor deformacije se za E koristi i naziv *Green-St. Venant* tenzor deformacije.

3 Parcijalne diferencijalne jednačine

Parcijalne diferencijalne jednačine (PDJ) su jednačine koje sadrže funkciju od dve ili više promenljivih i neke od njenih parcijalnih izvoda. Pre definicije, uvešćemo notaciju za izvode koju ćemo koristiti u ovom poglavlju.

Neka je data funkcija $u : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, U je otvoren i $x \in U$.

1. Pod uslovom da limes postoji definišemo parcijalni izvod funkcije u u tački x

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h},$$

gde je $e_i \in \mathbb{R}^n$ jedinični vektor sa jedinicom na i -toj komponenti. Pisaćemo

$$u_{x_i} := \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Slično ćemo označavati

$$u_{x_i x_j} := \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, u_{x_i x_j x_k} := \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}, itd.$$

2. (a) Vektor oblika $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, pri čemu je svaka komponenta α_i , $i = 1, \dots, n$ nenegativan ceo broj nazivamo *multi-indeksom* reda

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

- (b) Za dati multi-indeks α definišemo

$$D^\alpha u(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n} u,$$

- (c) Za k , koji je nenegativan ceo broj, sa

$$D^k u(x) := \{D^\alpha u(x) \mid |\alpha| = k\}$$

označićemo skup svih parcijalnih izvoda reda k .

- (d) Ako $D^k u(x)$ posmatramo kao tačku u $\mathbb{R}^{n^k}$, važiće:

$$|D^k u| = \left(\sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u|^2 \right)^{1/2}$$

(e) Za $k = 1$, Du ćemo predstaviti u vidu vektora

$$Du = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$$

koji nazivamo *gradijent*.

Za $k = 2$, D^2u će biti matrica iz $\mathbb{R}^{n \times n}$ koju nazivamo *hesijan* i koja je data sa

$$D^2u = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{i=1, \dots, n, j=1, \dots, n}.$$

3. $\Delta u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} = \text{tr}(D^2u)$ je *Laplasijan* funkcije u .

Definicija 3.1 Izraz oblika

$$F(D^k u(x), D^{k-1} u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0, \quad x \in U, \quad k \geq 1, \quad k \in \mathbb{Z}$$

nazivamo parcijalnom diferencijalnom jednačinom k -tog reda, pri čemu je funkcija

$$F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \dots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.1)$$

data, a funkcija $u : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je nepoznata.

Rešiti PDJ znači pronaći funkciju u iz jednačine 3.1, pod uslovom da funkcije zadovoljavaju određene granične uslove. Međutim, nije uvek moguće pronaći rešenje.

Definicija 3.2 Postoje sledeći oblici Parcijalnih diferencijalnih jednačina:

1. PDJ 3.1 je *linearna* ako je oblika

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x),$$

za funkcije a_α , $|\alpha| \leq k$ i f koje su date. Pritom, ako je $f \equiv 0$, kažemo da je PDJ homogena.

2. PDJ 3.1 je *semi-linearna* ako je oblika

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) D^\alpha u + a_0(D^{k-1}u, \dots, Du, u, x) = 0.$$

3. PDJ 3.1 je *kvazi-linearna* ako je oblika

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(D^{k-1}u, \dots, Du, u, x) D^\alpha u + a_0(D^{k-1}u, \dots, Du, u, x) = 0.$$

4. PDJ 3.1 je *nelinearna* ako zavisi nelinearno od izvoda najvišeg reda.

Sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina predstavlja kolekciju više PDJ sa više nepoznatih funkcija.

Definicija 3.3 Izraz oblika

$$\mathbf{F}(D^k \mathbf{u}(x), D^{k-1} \mathbf{u}(x), \dots, D\mathbf{u}(x), \mathbf{u}(x), x) = \mathbf{0}, x \in U, k \geq 1, k \in \mathbb{Z}$$

nazivamo *sistemom parcijalnih diferencijalnih jednačina k -tog reda*, pri čemu je funkcija

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^{mn^k} \times \mathbb{R}^{mn^{k-1}} \times \dots \times \mathbb{R}^{mn} \times \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}^m$$

data, a funkcija

$$u : U \rightarrow \mathbb{R}^m, U \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbf{u} = (u^1, \dots, u^m)$$

je nepoznata.

3.1 Klasifikacija PDJ drugog reda

Neka je data PDJ:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + a_1u_x + a_2u_y + a_0u = 0. \quad (3.2)$$

To je linearna jednačina drugog reda sa dve nezavisne promenljive i 6 konstanti.

Teorema 3.1 Linearnim transformacijama na nezavisnim promenljivim, jednačina 3.2 se može redukovati na jedan od tri sledeća oblika:

1. *Elipitična*: Ako je $a_{12}^2 < a_{11}a_{22}$, može se redukovati na oblik

$$u_{xx} + u_{yy} = d, \text{ gde } d = d(x, y, u, u_x, u_y).$$

2. *Hiperbolična*: Ako je $a_{12}^2 > a_{11}a_{22}$, može se redukovati na oblik

$$u_{xx} - u_{yy} = d, \text{ gde } d = d(x, y, u, u_x, u_y).$$

3. *Parabolična*: Ako je $a_{12}^2 = a_{11}a_{22}$, može se redukovati na oblik

$$u_{xx} = d, \text{ gde } d = d(x, y, u, u_x, u_y),$$

osim ako $a_{11} = a_{12} = a_{22}$.

3.2 Najznačajnije linearne PDJ

Predstavićemo četiri fundamentalna tipa linearnih PDJ za koje postoji eksplicitno rešenje.

1. Transportna jednačina

Transportna jednačina sa konstantnim koeficijentima je verovatno najjednostavnija linearna parcijalna diferencijalna jednačina i data je sa:

$$u_t + b \cdot Du = 0, \text{ na } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \text{ (homogeni oblik)},$$

gde je b fiksni vektor u $\mathbb{R}^n$ i $b = (b_1, \dots, b_n)$, funkcija $u : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $u = u(x, t)$ je nepoznata, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ je tačka u prostoru, a $t \geq 0$ vreme, a $Du = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$ je gradijent funkcije u u odnosu na prostornu promenljivu x .

Početni uslov je dat sa $u = g$ na $\mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$, gde je funkcija $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ data.

Na isti način možemo definisati *nehomogeni oblik* početnog problema sa:

$$\begin{aligned} u_t + b \cdot Du &= f, \text{ na } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u &= g, \text{ na } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{aligned}$$

gde je funkcija $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ poznata. Rešenje tako definisanog nehomogenog početnog problema je dato sa:

$$u(x, t) = g(x - tb) + \int_0^t f(x + (s - t)b, s) ds, \quad x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0.$$

2. Laplasova jednačina

Jedna od najznačajnijih parcijalnih diferencijalnih jednačina je Laplasova jednačina:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} = 0$$

ili Poasonova jednačina:

$$-\Delta u = -\sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} = f,$$

pri čemu $x \in U$ i funkcija $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ je nepoznata, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je dati otvoren skup i funkcija $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ je data. Laplasova jednačina ima veliku primenu u opisivanju raznih fizičkih procesa (za detaljnije videti [16]).

Teorema 3.2 (*Rešenje Poasonove jednačine*). Neka su zadovoljeni sledeći uslovi:

- $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$,
- $-\Delta u = f$ na $\mathbb{R}^n$.

Tada je sa

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y) dy,$$

gde

$$\Phi(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x| & n = 2 \\ (n(n-2)\alpha(n)|x|^{n-2})^{-1} & n \geq 3, \end{cases}$$

i $\alpha(n)$ predstavlja zapreminu jednične lopte u $\mathbb{R}^n$, dato rešenje Poasonove jednačine u $\mathbb{R}^n$.

3. Toplotna jednačina

Toplotna jednačina je jednačina oblika:

$$u_t - \Delta u = 0 \text{ ili } u_t - \Delta u = f \text{ (nehomogena),}$$

gde $t > 0$, $x \in U$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otvoren skup, $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ je nepoznata, $f : U \times [0, t) \rightarrow \mathbb{R}$ je data, a $\Delta u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}$

Definicija 3.4 Fundamentalno rešenje Toplotne jednačine je dato sa:

$$\Phi(x) := \begin{cases} (4\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n, t < 0 \end{cases}$$

Funkcija Φ ima singularitet u $(0, 0)$ i zadovoljava:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, t) dx = 1, \text{ za svako } t > 0.$$

Rešenje početnog (homogenog) problema Toplotne jednačine:

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0, \text{ na } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u &= g, \text{ na } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{aligned}$$

je dato sa

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0.$$

4. Talasna jednačina

Talasna jednačina je data sa:

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \text{ ili } u_{tt} - \Delta u = f \text{ (nehomogena),}$$

gde $t > 0$, $x \in U$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otvoren skup, $u : U \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ je nepoznata, $f : U \times [0, t) \rightarrow \mathbb{R}$ je data, a $\Delta u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}$.

Talasna jednačina je uprošćen model za vibraciju žice ($n = 1$), membrane ($n = 2$) ili elastičnog tela ($n = 3$). U takvoj fizičkoj interpretaciji funkcija $u(x, t)$ predstavlja neku deformaciju tačke x u vremenu $t \geq 0$, što će biti od značaja u daljem radu.

Rešenje za $n = 1$ (D'alambertova formula)

Posmatramo početni problem za jednodimenzionalnu (homogenu) talasnu jednačinu:

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0, \text{ na } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u &= g, u_t = h, \text{ na } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{aligned}$$

pri čemu su funkcije g i h date i želimo da izrazimo rešenje tj. funkciju u upravo preko funkcija g i h . Važno je napomenuti da u slučaju kada u predstavlja deformaciju, u_t predstavlja brzinu.

Rešenje prethodno definisanog početnog problema, poznato je kao *D'alambertova formula* (*d'Alembert's formula*) koja je data sa

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

Rešenje za $n = 3$ (Kirhofova formula)

Posmatramo početni problem u $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= 0, \text{ na } \mathbb{R}^3 \times (0, \infty), \\ u &= g, u_t = h, \text{ na } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\}. \end{aligned}$$

Neka je $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$ rešenje tog početnog problema. Posle određenih transformacija, može se pokazati da je rešenje početnog problema u tri dimenzije dato *Kirhofovom* (*Kirchhoff*) *formulom*:

$$u(x, t) = \int_{\partial B(x, t)} th(y) + g(y) + Dg(y) \cdot (y - x) dS(y), \quad x \in \mathbb{R}^3, t > 0,$$

gde $B(x, t)$ predstavlja loptu u $\mathbb{R}^3$ sa centrom u x i poluprečnikom $t > 0$.

Rešenje za $n = 2$ (Poissonova formula)

neka je dat početni problem u $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= 0, \text{ na } \mathbb{R}^2 \times (0, \infty), \\ u &= g, u_t = h, \text{ na } \mathbb{R}^2 \times \{t = 0\}, \end{aligned}$$

Može se pokazati da rešenje početnog problema u $\mathbb{R}^2$, uz pretpostavku da ono zadovoljava uslov $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \times [0, \infty))$ i uz korišćenje prethodno navedene Kirkohove formule ima oblik:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{B(x, t)} \frac{tg(y) + t^2h(y) + tDg(y) \cdot (y - x)}{(t^2 + |y - x|^2)^{1/2}} dy, \quad x \in \mathbb{R}^2, t > 0. \quad (3.3)$$

Formula 3.3 naziva se *Poissonova (Poisson) formula*.

Detaljniji opis i analiza ovih jednačina dati su u [16].

4 Prostori Soboljeva

Ovo poglavlje predstavlja kratak pregled osnovnih pojmova, definicija i teorema iz Topologije i L^p i prostora Soboljeva. Za detaljnije videti [20, 23].

4.1 Osnovne definicije

Definicija 4.1 *Neka je $A \subset X$ i skup X je otvoren. $x \in X$ je atherentna tačka skupa A ako i samo ako za svaki skup U koji je okolina tačke x važi*

$$U \cap A \neq \emptyset.$$

Skup svih atherentnih tačaka naziva se atherencija (zatvorenje) skupa A i označava se sa $\bar{A}$. $\bar{A}$ je najmanji zatvoren nadskup skupa A .

Definicija 4.2 *Za dati skup $X \neq \emptyset$ preslikavanje $d : X^2 \rightarrow [0, \infty)$ je metrika na skupu X ako i samo ako za sve $x, y, z \in X$ važi*

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Tada je (X, d) metrički prostor.

Definicija 4.3 *Niz $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ u X je Košijev niz ako i samo ako*

$$(\forall \epsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \geq n_0) \text{ važi } d(x_n, x) < \epsilon.$$

Definicija 4.4 *Skup X sa metrikom d je kompletan metrički prostor ako i samo ako svaki Košijev niz u X konvergira.*

Definicija 4.5 *Dat je vektorski prostor X nad poljem $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$. Preslikavanje $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$ je norma na X ako i samo ako za svako $x, y \in X$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$ važi*

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Tada je $(X, \|\cdot\|)$ normiran vektorski prostor.

Teorema 4.1 Normiran vektorski prostor X sa normom $\|\cdot\|$ je Banahov ako i samo ako je X sa metrikom $d(x, y) = \|x - y\|$ kompletan metrički prostor.

Definicija 4.6 Dat je vektorski prostor X nad poljem $\mathbb{R}$.

Preslikavanje $(\cdot | \cdot) : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je skalarni proizvod na X ako i samo ako za svako $x, y, z \in X$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ važi

1. $(x | x) \geq 0$
2. $(x | x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $(x | y) = (y | x)$
4. $(\alpha x | y) = \alpha(x | y)$
5. $(x + y | z) = (x | z) + (y | z)$.

Tada je $(X, (\cdot | \cdot))$ Prethilbertov prostor.

Definicija 4.7 Prethilbertov prostor $(X, (\cdot | \cdot))$ je Hilbertov prostor ako i samo ako je kompletan u odnosu na metriku $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x - y | x - y)}$.

4.2 L^p i prostori Soboljeva

Najpre ćemo uvesti neke osnovne pojmove:

- Sa Ω ćemo označiti otvoren podskup od $\mathbb{R}^n$,
- Ako $S \subset \mathbb{R}^n$, sa $\bar{S}$ ćemo označiti zatvorenje skupa S u $\mathbb{R}^n$,
- Pisaćemo $S \subset\subset \mathbb{R}^n$ ukoliko važi $\bar{S} \subset \mathbb{R}^n$ i $\bar{S}$ je kompaktan (ograničen) podskup skupa $\mathbb{R}^n$
- $C^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}_0$ predstavlja skup funkcija koje su definisane nad Ω i imaju neprekidne sve izvode zaključno sa redom m .

Definicija 4.8 Nosač neprekidne funkcije $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ označavamo sa $\text{supp } f$, a on predstavlja atherenciju skupa $\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$.

Definicija 4.9 Podskup $C_0^m(\Omega)$ skupa $C^m(\Omega)$ predstavlja skup funkcija čiji su nosači kompakti u Ω ($\text{supp } f$ je ograničen i $\text{supp } f \subset \Omega$) tj.

$$C_0^m(\Omega) = \{u \in C^m(\Omega) : \text{supp } f \subset\subset \Omega.\}$$

Skup $C^\infty(\Omega)$ nazivamo prostor test funkcija.

Definicija 4.10 Neka je data funkcija u definisana skoro svuda na Ω . $u \in L^1_{loc}$ ako je u lokalno integrabilna na Ω i $u \in L^1(A)$, za svaki merljiv skup $A \subset \subset \Omega$.

Sada možemo da definišemo željene prostore:

Definicija 4.11 $L^p(\Omega)$ predstavlja prostor merljivih kompleksnih funkcija u definisanih na Ω za koje važi

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty.$$

$L^p(\Omega)$ je vektorski prostor.

$$\|u\|^p = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

je norma u $L^p(\Omega)$ za $1 \leq p < \infty$.

Teorema 4.2 $L^p(\Omega)$ za $1 \leq p \leq \infty$ je Banahov prostor, a $L^2(\Omega)$ je Hilbertov prostor.

Definicija 4.12 Neka je m nenegativan ceo broj, a $1 \leq p \leq \infty$. Prostor $H^{m,p}(\Omega)$ naziva se Prostor Soboljeva i definiše se sa

$$H^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^{\alpha}u \in L^p(\Omega) \text{ za } 0 \leq \alpha \leq m\},$$

gde je

$$D^{\alpha}u := \frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

i α predstavlja multi-index $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

$H^{m,p}$ je vektorski prostor nad poljem $\mathbb{C}$ pa možemo uvesti normu

$$\begin{aligned} \|u\|_{p,m,\Omega} &:= \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^{\alpha}u\|_p^p \right)^{1/p}, \text{ za } 1 \leq p < \infty, \\ \|u\|_{m,\infty} &:= \max_{0 \leq \alpha \leq m} \|D^{\alpha}u\|_{\infty}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Uobičajeno je da se Ω izostavlja ukoliko važi $\Omega = \mathbb{R}^n$. Takođe, p se izostavlja ukoliko je $p = 2$, pa tada umesto $H^{m,2}$ pišemo H^m .

Definicija 4.13 Zatvorenje prostora $C_0^{\infty}(\Omega)$ u $H^{m,p}(\Omega)$ u odnosu na normu 4.1 je prostor $H_0^{m,p}(\Omega)$.

Važi $H^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

Teorema 4.3 Prostor $H^{m,p}(\Omega)$ je Banahov za $p \geq 1$, $m \in \mathbb{N}_0$, a prostor $H^{m,2}(\Omega)$ je Hilbertov.

Takođe, prostor $H_0^{m,p}(\Omega)$ je Banahov za $p \geq 1$, $m \in \mathbb{N}_0$, a prostor $H_0^{m,2}(\Omega)$ je Hilbertov.

Teorema 4.4 Važi $H_0^{m,p}(\mathbb{R}^n) = H^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ za $1 \leq p < \infty$.

4.3 Pojam slabog rešenja

Za dati problem parcijalnih diferencijalnih jednačina kažemo da je **dobro definisan** ako su zadovoljena sledeća tri uslova:

1. problem ima rešenje (*postojanje rešenja*)
2. to rešenje je jedinstveno (*jedinstvenost*)
3. rešenje neprekidno zavisi od podataka datih u problemu tj. svaka mala promena u uslovima dovodi do male promene u jedinstvenom rešenju (*stabilnost*).

Neke od ovih uslova je teško postići, a tu se pre svega misli na jedinstvenost rešenja, jer postoje mnogi sistemi PDJ kod kojih se ne može očekivati jedinstvenost dobijenog rešenja.

Za neku parcijalnu diferencijalnu jednačinu k – og reda kažemo da ima *klasično rešenje* ako je ono najmanje k puta neprekidno-diferencijabilno. Rešiti PDJ u klasičnom smislu znači zapisati klasično rešenje te jednačine tako da ono zadovoljava uslove (1)–(3) ili bar pokazati da to rešenje postoji. Mnogo tipovi parcijalnih diferencijalnih jednačina se mogu rešiti u klasičnom smislu ali se isto tako mnogi ne mogu rešiti. Zato se u mnogim slučajevima mora odustati od traženja glatkog rešenja, ali je zato poželjno da rešenje zadovoljava uslove (1)–(3) tj. da problem bude dobro definisan. Kod takvih problema za koje ne postoji klasično rešenje, a dobro su definisani tražimo *slabo rešenje*. Jedan od primera problema koji se ne mogu rešiti u klasičnom smislu su Zakoni održanja (za detaljnije videti [16, 23, 31]).

Kako ne postoji jedinstvena definicija slabog rešenja mi ćemo na primeru pokušati da što bliže približimo pojam slabog rešenja.

Primer 4.1 *Uzmimo PDJ jednačinu prvog reda u divergentnom obliku koja je oblika*

$$a(t, x)\partial_t f(u) + b(t, x)(\operatorname{div} g(u)) + c(t, x)h(u) + d(t, x) = 0,$$

gde je $u = u(t, x)$ nepoznata funkcija. Neka je to jednodimenzionalna homogena talasna jednačina

$$u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) = 0, \text{ na } (0, \infty) \times \mathbb{R}, \quad (4.2)$$

takva da važi

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(t, x) = u_0(x), \text{ skoro svuda na } \mathbb{R}$$

i granični uslovi postoje skoro svuda. Kao što je već navedeno, (klasično) rešenje jednodimenzionalne homogene talasne jednačine sa početnim uslovima

$$u = g, u_t = h, \text{ na } \mathbb{R} \times \{t = 0\}$$

je dato D'alambertovom formulom

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

Ukoliko funkcije g i h nisu bar $g \in C^2(\mathbb{R})$ i $h \in C^1(\mathbb{R})$, klasično rešenje nema smisla. Međutim, to može biti slabo rešenje.

Neka je $\phi \in C_0^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R})$ proizvoljna test funkcija koja ima kompaktan nosač što znači da važi

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(t, x) = 0,$$

što je bitno prilikom korišćenja parcijalne integracije. Množenjem jednačine 4.2 sa test funkcijom i integraljenjem iste dobijamo

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u_{tt}(t, x)\phi(t, x) - u_{xx}(t, x)\phi(t, x)) dx dt = 0.$$

Može se pokazati da važi

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u(t, x)(\partial_{tt}\phi(t, x) - \partial_{xx}\phi(t, x)) dx dt = 0. \quad (4.3)$$

Svaka funkcija u koja zadovoljava relaciju 4.3, za proizvoljnu test funkciju ϕ , predstavlja slabo rešenje jednodimenzionalne talasne (homogene) jednačine². Na taj način dobijamo slabo rešenje koje ne mora da bude glatko, nego je dovoljno da bude lokalno integrabilno tj. $u \in L_{loc}^1$. Takođe, svako C^k , $k \geq 2$ rešenje od 4.2, istovremeno zadovoljava i relaciju 4.3 (što se može pokazati parcijalnom integracijom), pa je samim tim ono slabo. Međutim, slabo rešenje talasne jednačine 4.2 ne mora da zadovoljava D'alambertovu formulu.

Napomena 1 Ukoliko posmatramo prostore Soboljeva, klasična rešenja nazivamo *jakim*.

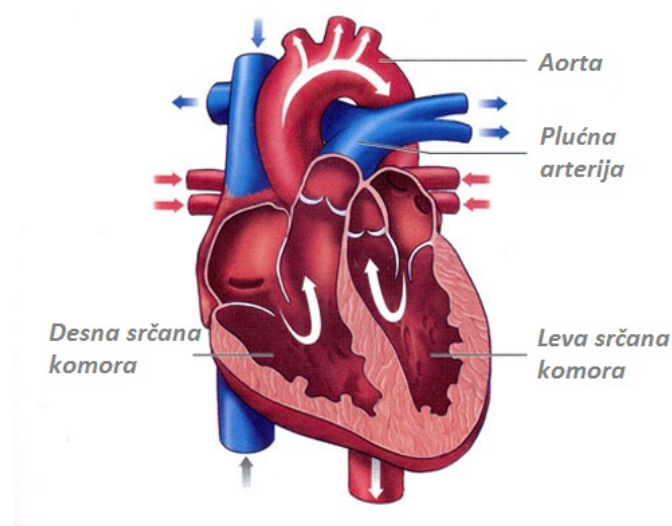
Napomena 2 Za prostore Soboljeva $H^{m,p}(\Omega)$ i funkcije $u, v \in H^{m,p}(\Omega)$, uslov $u = v$ na granici $\partial\Omega$, za dati početni problem važi ako i samo ako $u-v \in H_0^{m,p}(\Omega)$.

²Na isti način se može pokazati da neka funkcija jeste slabo rešenje sistema PDJ

5 Kardiovaskularni sistem

Kardiovaskularni (krvni vaskularni) sistem predstavlja zatvoren sistem krvnih sudova kroz koji protiče krv. Odgovoran je za transport materija po celom telu i kao takav povezuje sve ćelije tela, jer transportuje hranljive materije, vodu i kiseonik u ćelije, a uzima otpad koji proizvode ćelije (npr. ugljen-dioksid). Kardiovaskularni sistem čine srce, krvni sudovi (arterije, kapilari, vene) i limfni sudovi.

Srce je šuplji mišićni organ čija je funkcija da pumpa krv i čija je unutrašnjost jednom uzdužnom pregradom podeljena na dve polovine, levu i desnu. Obe polovine se sastoje iz pretkomore i komore, koje međusobno komuniciraju putem posebnih otvora. Iz srčanih komora polaze arterijski krvni sudovi kroz koje teče krv ka periferiji.



Slika 5.1: Srce

(Slika preuzeta sa sajta <http://www.trcanje.rs/trening/poboljsanje-sportskih-mogucnosti/>)

5.1 Krv

Krv je tečnost koja neprekidno kruži kardiovaskularnim sistemom, a sastoji se iz krvnih ćelija i plazme. Većinu krvnih ćelija proizvodi koštana srž, sunderasto tkivo koje ispunjava koštane šupljine. Postoji tri vrste krvnih ćelija:

- *Crvena krvna zrnca* ili eritrociti koji sadrže hemoglobin koji prenosi kiseonik iz pluća u druge delove tela. Procenat krvi koji čine crvena krvna zrnca se

u medicini naziva *hematokrit*. Normalne vrednosti hematokrita se kreću oko 45% za muškarce i oko 40% za žene.

- *Bela krvna zrnca* ili leukociti čija uloga je borba protiv infekcija. Leukociti kontrolišu imunitet i mogu uništavati viruse i ćelije raka (T-limfociti), stvaraju antitela (B-limfociti), bore se protiv infekcija, uništavaju bakterije i uklanjaju oštećeno tkivo (Neutrofili), Monociti zajedno sa limfocitima učestvuju u zaštiti organizma od bakterijskih mikroorganizama i infekcija.
- *Krvne pločice* ili trombociti koji zgrušavaju krv i sprečavaju krvarenje.

Krvna plazma je tečni deo krvi koji sadrži vodu, belančevine i mineralne soli i još preko sto različitih materija. Ona prenosi materije važne za život kao i antitela koja stvaraju otpornost prema bolestima, hormone koji regulišu razne funkcije tela i ugljen-dioksid iz tkiva i pluća.

Krv vrši mnogo značajnih funkcija za organizam, a neke od njih su:

1. *Respiratorna funkcija*. Kiseonik iz vazduha ulazi krv i vezuje se za hemoglobin pa se zatim transportuje zajedno sa glukozom, aminokiselinama i mastima do tkiva. Na taj način, u normalnim uslovima 1 litar krvi predaje vazduhu 40ml ugljen-dioksida.
2. *Nutritivna uloga*. Glukoza, aminokiseline, masti se transportuju putem krvi do svih organa i tkiva koji ih koriste.
3. *Regulatorna uloga*. Vitamini, minerali, hormoni, produkti organizma, tkivni produkti, hemijski aktivne materije se prenose putem krvi i regulišu aktivnost određenih organa i omogućavaju uticaj jednih organa na druge kao i prilagođavanje aktivnosti pojedinih organa potrebama organizma.
4. *Ekskretorna i detoksikaciona uloga*. Krv transportuje iz ćelija produkte njihovog metabolizma do pluća, bubrega, jetre i sl.
5. *Odbrambena uloga*. Ova uloga se ostvaruje preko belih krvnih zrnaca i antitela, a podrazumeva zaštitu od infekcija, stranih agenasa i sopstvenih tumorskih ćelija transportom imunoglobulina i ćelija imunog sistema.
6. *Termoregulaciona uloga*. Organizmi sa stalnom telesnom temperaturom imaju mehanizme za održanje temperature tela, bez obzira na spoljašnju. Kao glavni izvor toplote javljaju se oksidacioni procesi u ćelijama koji se odvijaju u jetri i mišićima. Kada krv prolazi kroz organe ona prima toplotu i raznosi je do onih delova tela u kojima je proizvodnja toplote mala ili do kože preko koje se višak toplote predaje spoljašnjoj sredini.

7. *Regulacija osmotskog pritiska, hemostaza (sprečavanje krvarenja zgrušavanjem), održavanje acido-bazne ravnoteže...*

5.2 Krvni sudovi

Krvni sudovi se, prema različitim kriterijumima, mogu podeliti u više vrsta, a dva osnovna kriterijuma za podelu su građa krvnog suda i njegove funkcije.

Na osnovu strukturnih karakteristika, krvni sudovi se mogu klasifikovati u tri osnovne kategorije: arterije, vene i kapilari. Krvni sudovi se ponašaju kao elastična tela koja pod različitim okolnostima menjaju volumen, odnosno dimenzije. U zidu krvnih sudova postoje elastični elementi, elastin i kolagen, koji obezbeđuju elastičnost. Pod uticajem sile, odnosno pritiska koji krv vrši na zidove krvnog suda, njegovi elastični elementi se istežu. Za to istezanje se ne troši biohemijska energija, već se jedan tip energija pretvara u drugi. Međutim, u krvnim sudovima se odvija aktivan proces, *kontrakcija mišića*, tokom kojeg se troši biohemijska energija. Za kontrakciju mišića su zaslužni glatki mišići čijom aktivnošću se menja radijus krvnog suda. Glatki mišići se nalaze u svim krvnim sudovima, izuzev venula i kapilara [15].

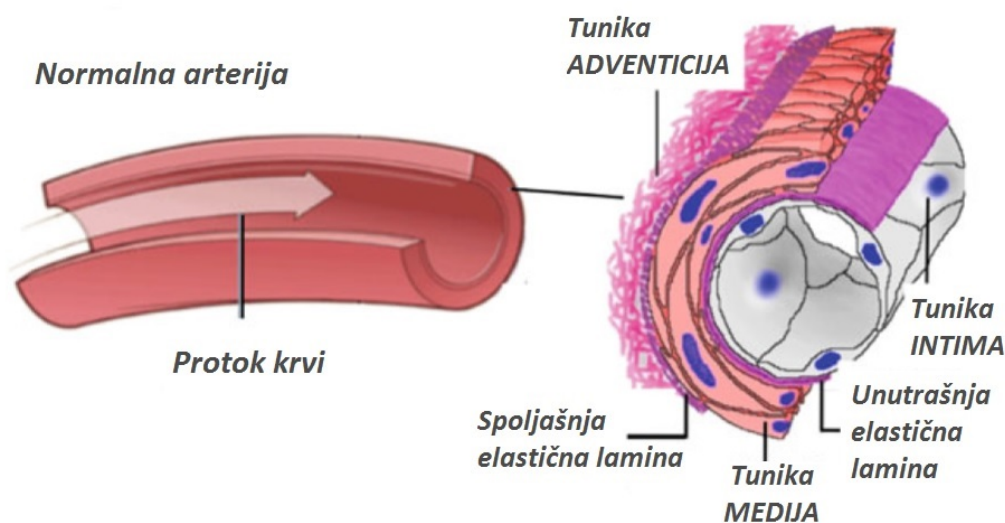
Arterije su krvni sudovi kroz koje se krv sa hranljivim materijama i kiseonikom odvodi iz srca prema tkivima. One se idući prema tkivima (periferiji), granaju na sve manje i manje grane. Najmanje grane nazivamo arteriole koje zatim prelaze u kapilare, najmanje krvne sudove. Od venskog dela kapilara polaze najsitnije vene koje nazivamo venule i koje postaju sve veće da bi nastali veliki venski sudovi koji se ulivaju u srčane pretkomore i kroz koje krv dolazi u srce. Prethodno opisan sistem krvnih sudova predstavlja krvotok. Arterije imaju izražen, deblji mišićni sloj od zidova vena pa su zidovi arterije deblji i elastičniji. Kapilari su mali ali funkcionalno veoma važni krvni sudovi, koji se nalaze između arterijskog i venskog sistema i spajaju najmanje arterijske i venske sudove. Kroz zidove kapilara se vrši razmena materija između krvi i tkiva. Zavisno od funkcije koju obavlja, krvotok delimo na:

- Mali (plućni) krvotok koji omogućava oksigenaciju koja se odvija u plućima
- Veliki (sistemski) krvotok koji sprovodi razmenu materija koja se odvija u tkivima.

Pa tako, u ljudskom telu razlikujemo dva tipa arterija. To su sistemske arterije koje nose krv bogatu kiseonikom od srca do drugih delova organizma, a vraćaju krv bogatu ugljen-dioksidom nazad u srce. Za razliku od sistemskih, plućne arterije nose krv bogatu ugljen-dioksidom od srca do pluća i vraćaju krv bogatu kiseonikom nazad u srce.

Komponentne i slojevi u krvnom sudu

Vaskularni zid se sastoji iz *endotela*, *mišićnog tkiva* i *vezivnog tkiva*. Količina i raspored ovih tkiva su pod uticajem mehaničkih faktora, a sva tkiva su prisutna u različitim proporcijama u vaskularnom zidu i imaju različite uloge.



Slika 5.2: Građa arterije, (Slika preuzeta iz rada *Fluid-Structure Interaction and Biomedical Applications* [4])

Iako svi krvni sudovi određenog poluprečnika imaju brojne zajedničke karakteristike, isti tip krvnog suda može imati značajne strukturne varijacije. Takođe, razlika između različitih tipova krvnih sudova često nije potpuno jasna, jer je prelaz iz jednog tipa krvnog suda u drugi postepen. Krvni sudovi se obično sastoje iz tri tipa slojeva ili *tunika*:

1. Tunika INTIMA

Intima se sastoji od jednog sloja endotelnih ćelija ispod koga se nalazi subendotelni sloj rastresitog vezivnog tkiva koje sadrži retke glatke mišićne ćelije. U arterijama je intima odvojena od medije unutrašnjom elastičnom laminom koja je spoljašnja komponenta intime. Unutrašnja elastična lamina je sastavljena od elastina i ima otvore koji omogućavaju razmenu supstanci koje hrane vaskularni zid (Slika 5.2). Kod zdravih osoba je intima veoma tanka pa je njen doprinos mehaničkim svojstvima arterije beznačajan. Međutim, sa godinama intima postaje deblja i čvršća pa se njena svojstva moraju uzeti

u obzir. Promene u komponentama intime se najčešće povezuju sa bolešću poznatom kao *ateroskleroza*.

2. Tunika MEDIJA

Media je središnji sloj koji se sastoji iz koncentričnih slojeva spiralno raspoređenih glatkih mišićnih ćelija. Između ovih ćelija se nalaze određene količine elastičnih vlakana, lamela, kolagena tipa III, proteoglikana i glikoproteina. U većim arterijama medija poseduje tanju spoljašnju elastičnu laminu koja je odvaja od adventicije. Medija je najznačajni sloj kod zdravih arterija, bar kada je reč o mehaničkim svojstvima.

3. Tunika ADVENTICIJA

Adventicija je spoljašnji sloj koji se sastoji iz ćelija koje proizvode elastin i kolagen. Adventicijalni sloj se postepeno stapa sa vezivnim tkivom organa kroz koji sud protiče. U uslovima visokog pritiska vlakna kolagena se istegnu što prouzrokuje da adventicija očvrstne, što sprečava pucanje arterije.

Veliki sudovi poseduju sudove sudova (*vasa vasorum*), arteriole, kapilare i venule koji se granaju u adventiciji i spoljašnjem delu medije [12].

6 Zakonitosti proticanja krvi kroz krvne sudove

6.1 Brzina protoka krvi

Merenje protoka je veoma važno u fiziološkim istraživanjima i medicinskoj dijagnostici. Nama je ovde od najvećeg značaja merenje protoka krvi. Merenje protoka krvi se vrši pri operacijama nakon čega se određuje količina krvi koje srce istisne u jednom otkucaju ili u određenom vremenskom intervalu (merenje srčanog *output-a*). Brzina protoka krvi u pojedinim delovima cirkulacije je neujednačena i ona zavisi od brojnih faktora.

Protok krvi kroz krvne sudove može biti *laminaran* i *turbulentan*. Prilikom modeliranja protoka krvi mora se uzeti u obzir da u krvnim sudovima, naročito u onim manjeg radijusa, krv protiče različitom brzinom i brzina zavisi od udaljenosti čestice krvi od središta krvnog suda. To se može objasniti činjenicom da se krv sastoji iz tankih slojeva i da na svaki od njih deluje pritisak, tako da je brzina protoka mnogo veća u sredini suda nego uz njegov zid. Laminarni protok krvi nastaje zato što se molekuli koji dodiruju zid suda ne kreću ili se kreću sporije, jer na njih deluje sila adhezije. Sila adhezije je međumolekularna sila koja deluje između različitih vrsta molekula, što u slučaju protoka krvi znači delovanje između zida krvnog suda i čestica krvi. Postoji i sila kohezije koja je sila koja deluje između istovrsnih molekula. Sila adhezije slabi idući prema centru suda, a brzina se usled toga povećava. Ukoliko krv naiđe na neku prepreku, kao što je izbočina ateromaznih naslaga (aterosklerozni plak), laminarni protok prelazi u turbulentni i krv tada ne protiče samo duž krvnog suda, nego i popreko, pa se povećava otpor pri njenom proticanju. Na taj način nastaje vrtloženje krvi [15].

Protok tečnosti je definisan jednačinom

$$Q = \frac{dV}{dt},$$

gde je dV zapremina tečnosti (krvi) koja protekne u vremenu dt . Promena zapremina u jedinici vremena je veličina koja je u matematici i fizici poznata kao fluks. Prethodnu jednačinu možemo da izrazimo i kao

$$Q = S \frac{dl}{dt} = Su,$$

ukoliko zapreminu posmatramo kao količinu krvi koja protekne u krvnom sudu i koja pređe put dl u vremenu dt i gde je S površina ukupnog poprečnog preseka određene kategorije krvnih sudova, a u brzina protoka krvi. Na taj način, protok krvi Q opisujemo brzinom protoka krvi u i najčešće se i meri brzina protoka krvi, a ne sam protok. S obzirom da je protok Q konstantan, možemo zaključiti da brzina protoka krvi zavisi od poprečnog preseka površine S kroz koju krv protiče

i to tako što veći poprečni presek znači manju brzinu krvi i obrnuto. Na primer, površina poprečnog preseka svih kapilara u telu je oko 1 000 puta veća od površine poprečnog preseka aorte. Zato je najuže mesto u cirkulaciji upravo aorta, pa je u njoj protok krvi najbrži. U aorti i većim arterijama se brzina kreće u granicama od 0.3 do 0.5 m/s (videti [15]). Pored brzine protoka krvi, merimo i pritisak.

6.1.1 Laminaran protok krvi i Puazejev zakon

Posmatramo protok krvi kroz krvni sud, kao što je arterija. Oblik krvnog suda možemo poistovetiti sa cilindričnom cevčicom poluprečnika R i dužine L . Brzina protoka krvi je najveća u okolini ose simetrije krvnog suda i opada sa porastom rastojanja r od ose simetrije, sve dok brzina u ne postane 0 na zidu krvnog suda. Tu vezu između brzine u i rastojanja od ose simetrije r , koja je poznata kao **Zakon laminarnog protoka**, opisao je francuski fizičar Puazej (*Jean-Louis-Marie Poiseuille*) 1840. godine. Zakon laminarnog protoka je dat sa

$$u = \frac{\Delta P}{4\eta L}(R^2 - r^2), \quad r \in [0, R], \quad (6.1)$$

gde ΔP predstavlja razliku pritiska na krajevima cevi, a η viskoznost krvi. Ukoliko su ΔP i L konstante, brzina u zavisi samo od $r \in [0, R]$. Prosečna promena brzine prilikom kretanja od tačke $r = r_1$ prema $r = r_2$ se može napisati kao

$$\frac{\Delta u}{\Delta r} = \frac{u(r_2) - u(r_1)}{r_2 - r_1}.$$

Ukoliko pustimo $\Delta r \rightarrow 0$ dobićemo gradijent brzine

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta r} = \frac{\partial u}{\partial r}.$$

Koristeći jednačinu 6.1 dobijamo

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\Delta P r}{2\eta L}.$$

Primer 6.1 (BRZINA PROTOKA KRVİ)

Posmatramo jednu od najmanjih ljudskih arterija. Tada možemo uzeti sledeće vrednosti

$$\eta = 0.027, \quad R = 0.008 \text{ cm}, \quad L = 2 \text{ cm} \quad \text{i} \quad \Delta P = 0.04 \text{ N/cm}^2.$$

Iz jednačine 6.1 dobijamo izraz za brzinu protoka

$$u = \frac{0.04}{4 \cdot 0.027 \cdot 2} (0.000064 - r^2) \approx 0.185(6.4 \cdot 10^{-5} - r^2).$$

Neka je $r = 0.002$ cm. U delu arterije koji odgovara rastojanju od 0.002 cm od ose simetrije krv protiče brzinom

$$\begin{aligned} u(0.002) &\approx 0.185(6.4 \cdot 10^{-5} - 0.4 \cdot 10^{-5}) = 0.185 \cdot 6 \cdot 10^{-5} \\ &= 1.11 \cdot 10^{-5} = 1.11 \text{ cm/s}. \end{aligned}$$

Gradijent brzine je tada jednak

$$\left. \frac{du}{dr} \right|_{r=0.002} = -\frac{0.04 \cdot 0.002}{2 \cdot 0.027 \cdot 2} \approx 74 \text{ (cm/s)/cm}.$$

Kako bi izračunali protok krvi Q (fluks) izdelićemo poluprečnik cilindrične cevi na manje intervale, jednake dužine koju ćemo označiti sa Δr . Neka je ta podela data sa $r_1, r_2, \dots$. Tada će površina prstena sa unutrašnjim poluprečnikom r_{i-1} i spoljašnjim poluprečnikom r_i biti približno jednaka

$$A_i = r_i^2 \pi - r_{i-1}^2 \pi = \pi(r_i^2 - r_{i-1}^2) = \pi(r_i - r_{i-1})(r_i + r_{i-1}) \approx 2\pi r_i \Delta r.$$

Ako je Δr malo, brzina kroz prsten je skoro konstantna pa je možemo aproksimirati sa $u(r_i)$. Tada će protok krvi u jedinici vremena kroz prsten biti približno jednak $Q_i \approx 2\pi r_i \Delta r u(r_i)$ pa ukupan protok krvi u jedinici vremena aproksimiramo sa

$$Q \approx \sum_{i=1}^n 2\pi r_i u(r_i) \Delta r.$$

Kako se brzina povećava idući ka centru krvnog suda i aproksimacija će biti bolja sa povećanjem n . Pa važi

$$\begin{aligned} Q &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 2\pi r_i u(r_i) \Delta r = \int_0^R 2\pi r u(r) dr \\ &= \int_0^R 2\pi r \frac{\Delta P}{4\eta L} (R^2 - r^2) dr = \frac{\Delta P}{2\eta L} \int_0^R (R^2 r - r^3) dr \\ &= \frac{R^4 \Delta P}{8\eta L} \end{aligned}$$

Jednačina

$$Q = \frac{R^4 \Delta P}{8\eta L} \quad (6.2)$$

se naziva **Puazejev zakon** koji se još može izraziti kao odnos između gradijenta pritiska ΔP i perifernog otpora R_p koji nastaje kao rezultat trenja koje se razvija kao rezultat protoka krvi [29]. Važno je napomenuti da Puazejev zakon važi samo u slučaju laminarnog protoka kada je Rejnoldsov broj Re manji od 2000, jer inače protok postaje turbulentan i Puazejev zakon se u tom slučaju ne može primeniti.

6.2 Faktori koji utiču na protok krvi

Kao što je već rečeno, protok krvi se može definisati kao zapremina krvi koja prođe kroz deo krvnog suda u određenom vremenskom intervalu. Za kretanje krvi kroz sistem krvnih sudova zaslužan je gradijent pritiska. Na primer, kod sistemske cirkulacije, postoji veza između početnog i završnog dela sistemske cirkulacije, a gradijent pritiska od $13.3 kPa$ generiše leva komora. Međutim, krvni sudovi pružaju otpor krvnoj struji koji se naziva periferni otpor.

Za razjašnjavanje procesa koji nastaju u toku proticanja krvi kroz sistem krvnih sudova se često primenjuju *zakoni hidraulike* koji, međutim važe za idealne tečnosti koje protiču kroz krute cevi. Zbog toga treba imati u vidu da krvni sudovi nisu krute cevi već elastični sudovi čiji se prečnik menja u zavisnosti od stanja organizma. Takođe postoji kompleksan odnos između protoka krvi i potreba organizma za hranljivim molekulima.

Prema zakonima hidraulike, protok krvi (tečnosti) kroz krvne sudove (cevi) zavisi od dva osnovna faktora:

1. *razlike pritiska na početku i na kraju krvnog suda*, $\Delta P = P_1 - P_2$ i
2. *otpora R_p koji trpi krv pri prolasku kroz krvni sud zbog svoje viskoznosti (η) i trenja o zidove suda.*

Protok krvi kroz krvne sudove se može izraziti *Puazejevom* jednačinom

$$Q = \frac{\Delta P}{R_p}.$$

Iz jednačine se može zaključiti da se sa povećanjem gradijenta pritiska, povećava i protok krvi, dok povećanje otpora smanjuje protok. Kako periferni otpor, R_p , zavisi od sledećih faktora:

- dimenzije suda (cevi), odnosno njegove dužine (L) i poluprečnika (R) i
- viskoznosti krvi (η),

možemo ga izračunati i formulom

$$R_p = K\eta \frac{L}{R^4},$$

gde je K konstanta za tečnost pri datoj temperaturi i njena vrednost se menja zavisno od promene temperature (sa porastom temperature se povećava i obrnuto).

Pod normalnim fiziološkim uslovima se ne menjaju dužina krvnog suda i viskoznost krvi. Zbog toga će radijus krvnog suda biti glavni faktor koji određuje brzinu protoka krvi. Na primer, ako se radijus krvnog suda poveća za samo 1% smanjuje se otpor, a protok krvi se povećava za oko 100%.

Kao što je već rečeno, u normalnim uslovima se viskoznost krvi ne menja. Međutim, svaka promena *hematokrita* i *telesne temperature* utiče na viskoznost krvi, a samim tim i na periferni otpor, odnosno protok krvi. Poznato je da ukoliko je veći hematokrit to je veće i trenje slojeva krvi, a to trenje određuje viskoznost krvi. Na primer, kada je hematokrit povećan i do 70%, viskoznost krvi se povećava 10 puta, pa kao posledica krv otežano protiče kroz krvne sudove i time opterećuje srce. Međutim, uočeno je da je uticaj viskoznosti na protok krvi izražen samo u većim krvnim sudovima u kojima krv ima svojstva njutnovskih fluida. U krvnim sudovima manjeg radijusa, kao što su na primer kapilari, krv nema odlike njutnovskih fluida i u njima se viskoznost može zanemariti. Ta pojava se naziva *anomalija viskoznosti krvi* i uočena je *in vitro* uslovima, ali još uvek nije pronađeno zadovoljavajuće objašnjenje ove pojave *in vivo*.

In vitro je izraz za eksperimentalnu biološku studiju koja se sprovodi u izolovanim uslovima na komponentama nekog organizma. Nasuprot njoj, *in vivo* je izraz za studiju koja se sprovodi na živim organizmima u normalnim uslovima.

Za očekivati je da će veoma mala viskoznost u krvnim sudovima malog radijusa omogućiti brži protok krvi usled smanjenog otpora. Međutim, zna se da je protok krvi najsporiji baš u kapilarima jer je potrebno vreme da se izvrši razmena molekula hrane i gasova, tečnosti i ekskreta između krvi i ćelija što je osnovna funkcija kapilara. Ipak, zbog smanjene viskoznosti, može se pretpostaviti da krv u kapilarima protiče lakše nego što bi proticala kada bi viskoznost bila veća.

Kako temperatura takođe utiče na viskoznost krvi, ona utiče i na otpor i brzinu protoka krvi. Promena temperature je obrnuto srazmerna promeni viskoznosti, pa tako svako sniženje temperature tela za 1°C povećava viskoznost krvi za 2%.

Pored navedenih faktora, na protok krvi utiče i tzv. *transmuralni pritisak*, a to je naročito izraženo u krvnim sudovima manjeg radijusa. Transmuralni pritisak predstavlja razliku između pritiska koji vlada unutar krvnog suda i pritiska izvan krvnog suda od strane tkiva koje ga okružuje. Pri kontrakciji mišića se protok krvi u krvnim sudovima privremeno prekida zbog toga što je spoljašnji pritisak viši od pritiska unutar krvnog suda. Na primer, to je slučaj u skeletnim mišićima tokom snažne kontrakcije, odnosno velikog naprezanja.

Iako proticanje krvi kroz krvne sudove podleže zakonima hidraulike, postoje značajna odstupanja od ovih fizičkih zakona. Tako na primer, u kapilarima odnos između pritiska i protoka krvi nije linearan kao kod krutih cevi. Prilikom snižavanja

pritiska u kapilaru će prestati proticanje krvi kroz njega pre nego što pritisak padne na nulu. Pritisak pri kome krv u kapilarima prestaje da protiče naziva se *kritični pritisak zatvaranja* [15].

6.3 Puls i njegovo registrovanje

U normalnim uslovima čovekovo srce se kontrakuje u proseku 70-75 puta u minuti. Ovde pod normalnim uslovima podrazumevamo situaciju kada je čovek zdrav i nije pod stresom. Usled kontrakcija leva srčana komora stvara pritisak koji je pulsativan. A istovremeno se dešava i oscilovanje zida aorte i arterija. To ritmičko oscilovanje zida arterija u toku srčanog ciklusa naziva se *arterijski puls* i prenosi se duž arterija u vidu pulsnog talasa. Brzina pulsnog talasa je veća od brzine protoka krvi za oko 14-20 puta i direktno je proporcionalna veličini pritiska koji krv vrši na zid arterije i njenoj debljini. Zbog toga su pulsne oscilacije najizraženije u aorti i arterijama većeg radijusa. Pulsiranje koje se pojavljuje u venama koje su anatomske bliže srcu naziva se *venski puls*. To pulsiranje u venama potiče od promene pritiska do kojih dolazi u desnoj pretkomori.

Zid arterije pulsira tokom vremena kako krv teče kroz nju. Protok krvi kroz arteriju je posledica razlike između pritiska prilikom ulaska i izlaska iz arterije kao i delovanja sila na elastični/viskoelastični zid arterije. Srce pulsativno izbacuje krv samo za vreme sistole komora ali se ipak ćelije kontinualno snabdevaju krvlju, što je neophodan uslov života ćelija i organizma u celini, jer svaki čak i kratkotrajan zastoj krvotoka izaziva smrt jedinke. Međutim, energija srčanog mišića deponovana u zidu aorte pokreće krv kroz krvne sudove i za vreme diastole komora i to zahvaljujući elastičnosti aorte. Na taj način se održava stalan protok krvi kroz tkiva između dve sistole. Naime, krv se u toku sistole leve komore ubacuje u aortu i vrši pritisak na njene zidove, zbog čega se zidovu rastežu, jer su elastični. Na taj način se jedan deo kinetičke energije srca prenosi na krv, koja zatim deluje na zid aorte koji se rasteže i kinetička energija se pretvara u potencijalnu energiju rastegnuto delo aorte. Za vreme diastole leve komore, prošireni početni deo aorte, po prestanku dejstva sile (krvi), nastoji da se vrati u početno stanje, kao i svako elastično telo. Istovremeno se potencijalna energija koja je bila deponovana u zidu aorte pretvara u kinetičku koja pokreće krv u njen sledeći segment. Opisan postupak obezbeđuje kontinualni protok krvi [15, 27].

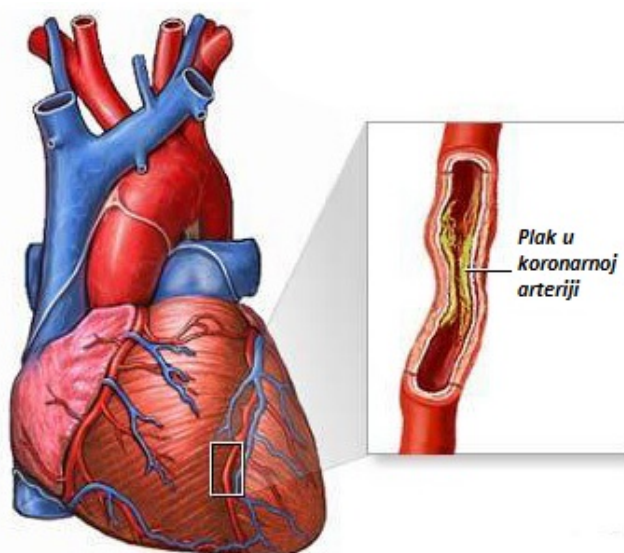
Interakcija između krvi i elastičnog/viskoelastičnog zida, prethodno opisana, je u matematici poznata kao problem interakcije fluida i strukture (FSI problem).

Krvni pritisak

Zahvaljujući elastičnosti zida aorte, omogućen je ne samo kontinualni protok krvi, već i održavanje krvnog pritiska u aorti na relativno visokom nivou. Krvni pritisak je pritisak koji krv vrši na zidove krvnih sudova kroz koje protiče. Kako krv struji kroz krvne sudove koji se razlikuju po strukturi, tj. imaju više ili manje elastičnih i mišićnih elemenata i funkciji, krvni pritisak se može kategorisati na osnovu toga kroz koji od krvnih sudova protiče. Tako razlikujemo arterijski krvni pritisak, kapilarni krvni pritisak i venski krvni pritisak. Od posebnog značaja su arterijski sistolni i dijastolni krvni pritisak.

- *Sistolni arterijski krvni pritisak* je najviši pritisak izmeren u aorti i arterijama većeg radijusa za vreme sistole komora. Kod mladih i zdravih osoba normalna vrednost sistolnog arterijskog krvnog pritiska iznosi oko 16 kPa .
- *Dijastolni arterijski krvni pritisak* je najniži pritisak izmeren u aorti i arterijama većeg radijusa za vreme dijastole komora. Kod mladih i zdravih osoba normalna vrednost sistolnog arterijskog krvnog pritiska iznosi oko 11 kPa .

Razlika između vrednosti sistolnog i dijastolnog pritiska naziva se *pulsni pritisak* i njegova vrednost je oko 5 kPa [15].



Slika 6.1: Plak u koronarnoj arteriji

(Slika preuzeta sa sajta <http://www.mojezdravlje.ba/novost/37313/Angina-pectoris->)

Kako su bolesti srca jedan od glavnih uzroka bolesti, istraživanje protoka krvi kroz ljudski kardiovaskularni sistem je veoma značajno. Bolest koronarnih arterija je obično izazvana aterosklerozom, koja nastaje kao posledica taloženja masnih supstanci, holesterola, pa čak i kalcijuma na unutrašnjoj površini zida arterija što dovodi do stvaranja plaka(naslaga). Koronarne arterije su arterije koje srce snabdevaju krvlju. Taloženje supstanci dovodi do sužavanja arterija, što nazivamo stenozom, koja potom dovodi do smanjenja snabdevanja srčanog mišića krvlju i kiseonikom. Nedostatak krvi i kiseonika je potencijalno ozbiljan problem, a posebno može da se ispolji prilikom fizičkog napora. U slučaju kada se koronarna arterija potpuno zatvori dolazi do infarkta srca. Generalno, postoje dva tipa plaka, tvrd i mek. Tvrd plak je stabilan i uzrokuje očvršćavanje i zadebljanje zida arterije. Dok je mek plak veoma nestabilan i uzrokuje pucanje zidova i stvaranje ugrušaka što dovodi do zatvaranja protoka krvi kroz arterije (videti [22]). Ceo kompleksan proces koji dovodi do srčanih bolesti još uvek nije u potpunosti objašnjen i još uvek se ne zna direktan uzrok tih bolesti. Međutim, poslednjih godina je učinjen veliki napredak u kliničkim ispitivanjima i u matematičkom modelovanju kardiovaskularnog sistema.

Deo II

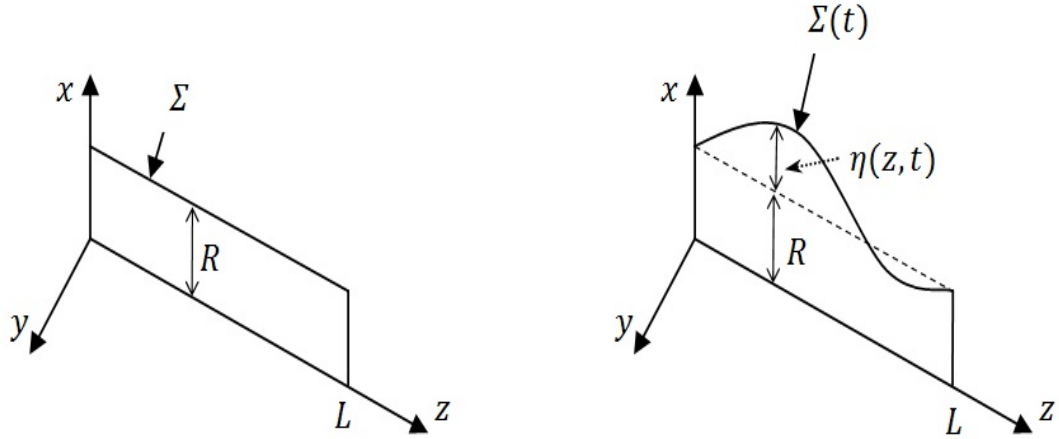
Modeli

7 Model protoka krvi kroz jednoslojne arterije

Cilj ovog modela³ je da opiše protok krvi u velikim sistemskim arterijama. Koristićemo linearan model za viskoelastične membrane kako bismo opisali ponašanje zida. Pretpostavićemo da se zid ponaša kao homogena, izotropna, viskoelastična membrana debljine h i sa radijalnom deformacijom $\eta(z, t)$. Arteriju ćemo modelirati kao simetričan cilindar. Referentni cilindar, koji se ne menja sa vremenom, ćemo oznaciti sa Ω (vidi Sliku 7.1), što preko cilindričnih koordinata možemo predstaviti kao

$$\Omega = \{(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : r \in (0, R), \theta \in (0, 2\pi), z \in (0, L)\}.$$

z je osa simetrije cilindra, L je dužina cilindra, R je referentni poluprečnik, a r i



Slika 7.1: Skica referentnog domena Ω (levo) i deformisanog domena $\Omega(t)$ (desno)

θ su polarne koordinate. Bočnu granicu referentnog cilindra koja predstavlja zid arterije ćemo označiti sa Σ

$$\Sigma = \{(R \cos \theta, R \sin \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : r \in (0, R), \theta \in (0, 2\pi), z \in (0, L)\}.$$

³Model opisan u ovom poglavlju zasnovan je na modelu predstavljenom u [8]

Zbog naprezanja zid arterije se pomera tokom vremena, pa tako posmatramo cilindar koji se deformiše tokom vremena, tako da poluprečnik obuhvata i deformaciju $\eta(z, t)$ u odnosu na referentnu konfiguraciju. Taj novi domen koji se menja sa vremenom možemo označiti sa $\Omega(t)$

$$\Omega(t) = \{(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : r \in (0, R + \eta(z, t)), \theta \in (0, 2\pi), z \in (0, L)\}.$$

Zid cilindra koji se menja kroz vreme predstavljamo sa

$$\Sigma(t) = \{((R + \eta(z, t)) \cos \theta, (R + \eta(z, t)) \sin \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : r \in (0, R), \theta \in (0, 2\pi), z \in (0, L)\}.$$

Kretanje zida arterije opisujemo preko drugog Njutnovog zakona uz pretpostavku nulte uzdužne deformacije preko jednačine⁴

$$f_r = h\rho_s \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \frac{Eh}{1 - \sigma^2} \frac{1}{R^2} \eta + p_{ref} \frac{\eta}{R} + \frac{hC_v}{R^2} \frac{\partial \eta}{\partial t},$$

koja opisuje dinamičku ravnotežu aktivnih i inercijalnih sila. f_r predstavlja radijalnu komponentu spoljašnje sile koja deluje na tanku membranu, p_{ref} predstavlja referentni pritisak, pritisak na kojem je deformacija od referentne konfiguracije jednaka nuli, ρ_s je gustina zida (strukture), E je Jangov modul elastičnosti, σ je Poasonov odnos. C_v je konstanta viskoznosti koja je uz pretpostavku elastične membrane jednaka 0 tj. $C_v = 0$, dok kod pretpostavke o viskoelastičnim svojstvima membrane koristimo $C_v \neq 0$.

Jangov modul elastičnosti E je veličina koja meri čvrstinu elastičnog materijala i koja se koristi za klasifikaciju materijala. Jangov modul elastičnosti se može definisati kao odnos između normalnog napona i uzdužne dilatacije. Tačno određivanje modula elastičnosti obavlja se u laboratorijskim uslovima na bazi preciznog merenja sile i njome izazvane deformacije. Da bi se tačno odredio Jangov modul elastičnosti neophodno je poznavanje još nekih svojstava materijala. Jedno takvo svojstvo je Poasonov odnos σ koja predstavlja odnos poprečne i uzdužne dilatacije nekog materijala. Uticaj Poasonovog odnosa je najveći prilikom protoka fluida u uslovima visokog pritiska kada naprezanja materijala dovode do deformacije. U slučaju velikih arterija i aorte, Jangov modul elastičnosti E se kreće između 10^5 i 10^6 Pa, a Poasonov odnos σ ima vrednost oko 0.5.

Protok krvi kroz srednje i velike sistemske arterije modeliramo uz pomoć Navije-Stoksovih jednačina za nestišljive, viskozne njutnovske fluide.

Brzinu fluida označavamo sa $\mathbf{u}(r, z, t) = (u_r(r, z, t), u_z(r, z, t))$, a pritisak sa $p(r, z, t)$. Navije-Stoksove jednačine ćemo predstaviti preko cilindričnih koordinata sa

⁴Jednačinu videti u [8]

$$\rho_F \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} = \mu \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right) \quad (7.1)$$

$$\rho_F \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \quad (7.2)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_r}{r} = 0, \quad (7.3)$$

gde je μ koeficijent dinamičke viskoznosti fluida, a ρ_F je gustina fluida.

Pritom koristimo sledeće *granične uslove*:

- **Ulazni granični uslovi** ($z = 0$)

$$\begin{aligned} p + 0.5\rho_F u_z^2 &= P_0(t) + p_{ref}, \\ u_r &= 0 \text{ (fluid ulazi paralelno sa osom simetrije),} \\ \eta &= 0 \text{ (nema deformacije na ulazu)} \end{aligned}$$

- **Izlazni granični uslovi** ($z = L$)

$$\begin{aligned} p + 0.5\rho_F u_z^2 &= P_L(t) + p_{ref}, \\ u_r &= 0 \text{ (fluid ulazi paralelno sa osom simetrije),} \\ \eta &= 0 \text{ (nema deformacije na izlazu).} \end{aligned}$$

Početni uslovi su dati sa

$$\begin{aligned} \eta = \frac{\partial \eta}{\partial t} &= 0, \\ u &= 0, \end{aligned}$$

što nam zajedno sa graničnim uslovima i jednačinama koje opisuju protok fluida i ponašanje strukture daje dobro definisan problem koji ima rešenje i može se rešiti numerički.

Interakciju između fluida i strukture opisujemo uz pomoć sledećih uslova:

- Čestice krvi se praktično lepe sa zid arterije što utiče da se one kreću istom brzinom kao zid

$$\begin{aligned} u_r(R + \eta(z, t), z, t) &= \frac{\partial \eta(z, t)}{\partial t}, \text{ na } \Sigma(t) \\ u_z(R + \eta(z, t), z, t) &= 0, \text{ na } \Sigma(t). \end{aligned}$$

- Zbir ukupnih sila koje deluju sa zida na fluid je suprotan silama koje deluju od fluida na zid

$$f_r = ((p - p_{ref})\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{D}(\mathbf{u}))\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_r \left(1 + \frac{\eta}{R}\right) \times \sqrt{1 + (\partial_z \eta)^2}, \text{ na } \Sigma(t),$$

gde je $\mathbf{D}(\mathbf{u}) = 0.5(\nabla \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{u})^T$ simetrični gradijent brzine, $\mathbf{n}$ je vektor normalan na $\Sigma(t)$, a $\mathbf{e}_r$ je jedinični vektor u pravcu r .

Na prethodno opisan način predstavljen je problem simetričnog protoka nestišljivog, viskoznog fluida kroz cilindričan domen, a rešavanje tog problema znači rešavanje Navije - Stoksovih jednačina datih sa 7.1-7.3 na cilindričnom domenu $\Omega(t)$, zajedno sa opisanim početnim i graničnim uslovima.

Rešavanje prethodno predstavljenog modela nije nimalo lak zadatak, pa se pribegava raznim uprošćavanjima modela. Jedna od najvećih prepreka u rešavanju problema je činjenica da su jednačine fluida nelinearne, kao i to što je oblik domena $\Omega(t)$ nepoznat i zavisi od rešenja.

Mi ćemo dalje predstaviti uprošćene, redukovane modele koji se baziraju na analizi bezdimenzionalne forme promenljivih. Fizička veličina je bezdimenzionalna ako joj vrednost ne zavisi od izbora sistema jedinica.

7.1 Redukovane jednačine modela

7.1.1 Dvodimenzionalne redukovane jednačine

Jedan od načina da se uproste ove jednačine je svođenje modela na bezdimenzionalnu formu kako bismo sve promenljive sveli na istu skalu i uveli parametar ϵ . Važno je napomenuti da rešavanje jednačina u bezdimenzionalnoj formi dovodi do bezdimenzionalnih rešenja pa treba voditi računa da se te veličine na kraju, korišćenjem veze koju ćemo sledeće navesti, vrata u dimenzionalnu formu.

Dakle, sledeće ćemo uvesti bezdimenzionalne nezavisne promenljive $\tilde{r}$, $\tilde{z}$ i $\tilde{t}$ sa

$$r = R\tilde{r}, \quad z = L\tilde{z}, \quad t = \frac{1}{\omega}\tilde{t},$$

pri čemu je dobijeno da ω ima oblik:

$$\omega = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{1}{\rho_F} \left(\frac{hE}{R(1 - \sigma^2)} + p_{ref} \right)}$$

tako što je $1/\omega$ određeno preko frekvencija oscilacija zida krvnog suda koje su prouzrokovane talasima nastalim usled pritiska u fluidu [10]. Bezdimenzionalnu brzinu $\tilde{\mathbf{u}}$, deformaciju $\tilde{\eta}$ i pritisak $\tilde{p}$ uvodimo na sledeći način

$$\mathbf{u} = V\tilde{\mathbf{u}}, \quad \eta = \Xi\tilde{\eta}, \quad p = \rho_F V^2 \tilde{p},$$

gde važi

$$2V = \frac{\mathcal{P}}{\sqrt{\rho_F}} \left(\sqrt{\frac{hE}{R(1-\sigma^2)}} + p_{ref} \right)^{-1},$$

$$2\Xi = \mathcal{P}R \left(\frac{hE}{R(1-\sigma^2)} + p_{ref} \right)^{-1}.$$

Koeficijenti V i Ξ su izračunati u [9] pri čemu koeficijent V meri brzinu dok koeficijent Ξ meri deformaciju. Važi

$$\mathcal{P}^2 = \sup_{z,t} |\hat{p}|^2 + \left(\sup_z \int_0^t |\hat{p}_t| d\tau \right)^2 + T \int_0^t |P_L(\tau) - P_0(\tau)|^2 d\tau,$$

$$\hat{p}(t) = \frac{P_L(t) - P_0(t)}{L} z + P_0(t),$$

gde $\mathcal{P}$ predstavlja normu koja meri ulazni $P_0(t)$ i izlazni pritisak $P_L(t)$, gradijent pritiska kao i prosečan pritisak tokom jednog srčanog ciklusa.

Takođe, ceo sistem jednačina ćemo izvesti sa ϵ^2 tačnošću, pri čemu $\epsilon \ll 1$, tako da ćemo veličine $\mathbf{u}$, η i p aproksimirati sa

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= V(\tilde{\mathbf{u}}^0 + \epsilon \tilde{\mathbf{u}}^1 + \dots), \\ \eta &= \Xi(\tilde{\eta}^0 + \epsilon \tilde{\eta}^1 + \dots), \\ p &= \rho_F V^2(\tilde{p}^0 + \epsilon \tilde{p}^1 + \dots), \end{aligned}$$

što znači da ćemo sve članove počev od onih sa ϵ^2 zanemariti. Dalje će važiti

•

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}} = 0,$$

što znači da važi $\tilde{p} = \tilde{p}^0 + \epsilon \tilde{p}^1$, tj. $\tilde{p} = \tilde{p}(\tilde{z}, \tilde{t})$.

• $\tilde{u}_r^0 = 0$ tj. $u_r = V(\epsilon \tilde{u}_r^1 + \dots)$ dok $u_z = V(\tilde{u}_z^0 + \epsilon \tilde{u}_z^1 + \dots)$.

Može se pokazati da dvodimenzionalni FSI problem opisan preko ϵ^2 aproksimacije na skaliranom domenu $\tilde{r} \in (0, 1)$, $\tilde{z} \in (0, 1)$, $\tilde{t} > 0$, ima oblik:

• *Jednačine fluida*

$$\begin{aligned} Sh \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}_z \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{z}} + \tilde{u}_r \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} &= \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{r}} \right) \right], \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{r} \tilde{u}_r) + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} (\tilde{r} \tilde{u}_z) &= 0, \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}} &= 0. \end{aligned}$$

Struhalov⁵ i Reynoldsov broj su dati sa

$$Sh = \frac{L\omega}{V} \text{ i } Re = \frac{\rho_F V R^2}{\mu L}.$$

- *Bočni granični uslovi* dati za $\tilde{z} \in (0, 1), \tilde{t} > 0$ su

$$\begin{aligned} \tilde{p} - \tilde{p}_{ref} &= \frac{1}{\rho_F V^2} \left[\left(\frac{Eh}{(1 - \sigma^2)R} + p_{ref} \right) \frac{\Xi}{R} \tilde{\eta} + \frac{h}{R} C_V \omega \frac{\Xi}{R} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{t}} \right] \\ (\tilde{u}_r, \tilde{u}_z)|_{(1, \tilde{z}, \tilde{t})} &= \left(\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{t}}|_{(\tilde{z}, \tilde{t})}, 0 \right). \end{aligned}$$

- *Ulazni/izlazni granični uslovi:*

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}|_{(z=0, \tilde{t})} &= 0, \quad \tilde{p}|_{(z=0, \tilde{t})} = \frac{P_0(\tilde{t}) + p_{ref}}{\rho_F V^2}, \\ \tilde{\eta}|_{(z=L, \tilde{t})} &= 0, \quad \tilde{p}|_{(z=L, \tilde{t})} = \frac{P_L(\tilde{t}) + p_{ref}}{\rho_F V^2}, \\ \tilde{u}_r|_{1, z=0, \tilde{t}} &= 0, \\ \tilde{u}_r|_{1, z=L, \tilde{t}} &= 0, \end{aligned}$$

- *Početni uslovi:*

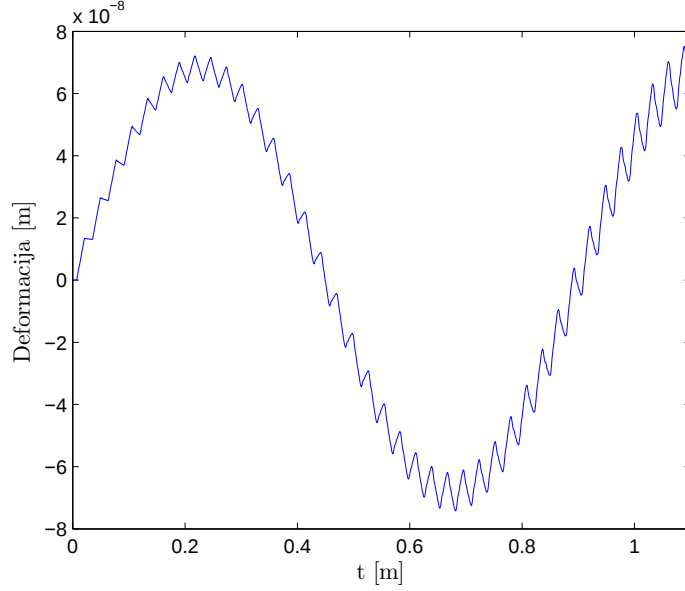
$$\tilde{u}|_{(\tilde{r}, \tilde{z}, 0)} = 0, \quad \tilde{\eta}|_{(\tilde{z}, 0)} = 0.$$

Pri tome će ϵ^2 aproksimacija brzine, pritiska i deformacije imati oblik:

$$\begin{aligned} u_r^\epsilon &= \epsilon V(\tilde{u}_r + \mathcal{O}(\epsilon^2)), \quad u_z^\epsilon = V(\tilde{u}_z + \mathcal{O}(\epsilon^2)), \\ p^\epsilon &= \rho_F V^2(\tilde{p} + \mathcal{O}(\epsilon^2)), \\ \eta^\epsilon &= \Xi(\tilde{\eta} + \mathcal{O}(\epsilon^2)). \end{aligned}$$

Jednačine fluida u ovako redukovanom dvodimenzionalnom modelu su nelinearne i definisane na domenu $\Omega(t)$ koji je ograničen pokretnom strukturom čija lokacija zavisi od rešenja pa je samim tim i dalje problem pronalaženja numeričkog rešenja veoma kompleksan. Jednačine se mogu dodatno uprostiti jednodimenzionalnim modelom, koji međutim ima dosta nedostataka. Kao jedan od nedostataka se može navesti činjenica da jednodimenzionalni model proizvodi talase koji nisu prisutni u originalnom problemu (vidi Sliku 7.2). Jedan od načina da se prevaziđe taj problem je uvođenje jedno-i-po dimenzionalnog problema koji obuhvata 2D model, ali ima specifičnu formu koja omogućava korišćenje jednodimenzionalnih tehnika za dobijanje numeričkih rešenja.

⁵Struhalov broj se koristi kod periodičnog protoka



Slika 7.2: Prikaz talasa koje proizvodi jednodimenzionalno rešenje

7.1.2 Jedno-i-po dimenzionalan redukovani model

Kako bi redukovane jednačine bile opravdane uvodimo sledeće pretpostavke:

1. Domen je cilindar sa malim odnosom između poluprečnika i dužine tj. $\epsilon = R_{max}/L \ll 1$,
2. Uzdužna deformacija je zanemarljiva,
3. Radijalna deformacije nije previše velika tj. $\delta := \Xi/R \leq \epsilon$,
4. Poluprečnik referentne oblasti se sporo menja tj. $R'(z) \leq \epsilon$ što nam omogućava da koristimo $R = R(z)$,
5. Reynoldsov broj Re je mali tj. $Re \approx 800$,
6. Parcijalni izvodi po z od bezdimenzionalnih promenljivih su $O(1)$.

Radi jednostavnijeg zapisa uvešćemo sledeći zapis dimenzionalnih promenljivih

$$\begin{aligned} u_z &= u_z^{0,0} + u_z^{0,1} + u_z^{1,0}, \quad u_r = u_r^{0,1} \\ \eta &= \eta^{0,0} + \eta^{0,1}, \\ p &= p^{0,0} + p^{0,1}, \end{aligned}$$

tako da važi npr. $u_z = u_z^{0,0} + u_z^{0,1} + u_z^{1,0} = V(\tilde{u}_z^{0,0} + \delta\tilde{u}_z^{0,1} + \epsilon\tilde{u}_z^{1,0} + O(\epsilon^2))$. Uz sve pretpostavke prethodno navedene, redukovane jedno-i-po dimenzionalne jednačine sa sporo varijajućim referentnim poluprečnikom R imaju oblik:

Nulta aproksimacija:

Naći $(\eta^{0,0}, u_z^{0,0})$ tako da:

$$\frac{\partial \eta^{0,0}}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^R r u_z^{0,0} dr = 0, \quad (7.4)$$

$$\rho_F \frac{\partial u_z^{0,0}}{\partial t} - \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z^{0,0}}{\partial r} \right) = - \frac{\partial p^{0,0}}{\partial z}, \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned} u_z^{0,0}|_{r=0} \text{ je ograničeno, } & u_z^{0,0}|_{r=R} = 0, & u_z^{0,0}|_{t=0} = 0, \\ \eta^{0,0}|_{t=0} = 0, & p^{0,0}|_{z=0} = P_0, & p^{0,0}|_{z=L} = P_L, \end{aligned}$$

gde

$$p^{0,0} = \left(\frac{Eh}{(1-\sigma^2)R} + p_{ref} \right) \frac{\eta^{0,0}}{R} + \frac{hC_v}{R^2} \frac{\partial \eta^{0,0}}{\partial t}.$$

δ korekcija:

Naći $(\eta^{0,1}, u_z^{0,1})$

$$\frac{\partial \eta^{0,1}}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^R r u_z^{0,1} dr = - \frac{1}{2R} \frac{\partial}{\partial t} (\eta^{0,0})^2, \quad (7.6)$$

$$\rho_F \frac{\partial u_z^{0,1}}{\partial t} - \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z^{0,1}}{\partial r} \right) = - \frac{\partial p^{0,1}}{\partial z}, \quad (7.7)$$

$$\begin{aligned} u_z^{0,1}|_{r=0} \text{ je ograničeno, } & u_z^{0,1}|_{r=R} = -\eta^{0,0} \frac{\partial u_z^{0,0}}{\partial r} \Big|_{r=R}, & u_z^{0,1}|_{t=0} = 0, \\ \eta^{0,1}|_{t=0} = 0, & \eta^{0,1}|_{z=0} = 0, & \eta^{0,1}|_{z=L} = 0, \end{aligned}$$

gde

$$p^{0,1} = \left(\frac{Eh}{(1-\sigma^2)R} + p_{ref} \right) \left(\frac{\eta^{0,1}}{R} - \left(\frac{\eta^{0,0}}{R} \right)^2 \right) + \frac{hC_v}{R^2} \left(\frac{\partial \eta^{0,1}}{\partial t} - \frac{\eta^{0,0}}{R} \frac{\partial \eta^{0,1}}{\partial t} \right).$$

ϵ korekcija

Naći $(u_r^{1,0}, u_z^{1,0})$

$$u_r^{1,0}(r, z, t) = \frac{1}{r} \left(R \frac{\partial \eta^{0,0}}{\partial t} + \int_r^R \xi \frac{\partial u_z^{0,0}}{\partial z}(\xi, z, t) d\xi \right), \quad (7.8)$$

$$\rho_F \frac{\partial u_z^{1,0}}{\partial t} - \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z^{1,0}}{\partial r} \right) = -\rho_F \left(u_r^{1,0} \frac{\partial u_z^{0,0}}{\partial r} + u_z^{0,0} \frac{\partial u_z^{0,0}}{\partial z} \right), \quad (7.9)$$

$$u_z^{1,0}|_{r=0} \text{ je ograničeno, } u_z^{1,0}|_{r=R} = 0, \quad u_z^{1,0}|_{t=0} = 0.$$

Konačno rešenje

$$u_z = u_z^{0,0} + u_z^{0,1} + u_z^{1,0}, \quad u_r = u_r^{1,0}, \quad (7.10)$$

$$\eta = \eta^{0,0} + \eta^{0,1}. \quad (7.11)$$

Prva jednačina u sva tri problema predstavlja Zakon održanja mase, a druga jednačina odgovara drugom Njutnovom zakonu kretanja. Originalni granični uslovi koji su bili definisani na domenu koji zavisi od vremena, u ovom redukovanom modelu su modifikovani i definisani na fiksnom domenu oblika cilindra sa poluprečnikom R .

U slučaju modela sa elastičnom membranom, za vrednost viskozne konstante se uzima 0 tj. $C_v = 0$.

Redukovan model prethodno predstavljen opisuje glavne karakteristike protoka krvi kroz velike arterije i može se primeniti na one delove vaskularnog sistema koji podrazumeva aksijalnu simetriju. Model je detaljnije predstavljen u [8], a numeričke simulacije izvedene na osnovu tog modela su se pokazale jednostavnim i brzim, jer zahtevaju samo tehnike za rešavanje jednodimenzionalnih problema ali sa druge strane uzimaju u obzir neke efekte koji su prisutni u dvodimenzionalnom protoku fluida. Na ovom modelu je moguće izvršiti mnoga uopštenja i modifikacije kako bi se obuhvatile još neke pojave koje ovde nisu uzete u obzir. Bez obzira na to, i u ovakvoj formi daje veliku tačnost dobijenog rešenja što ga čini još boljim aparatom za otkrivanje raznih patologija kardivaskularnog sistema.

Koristeći programski paket *Matlab* mi smo numerički rešili ovaj problem, a rezultati kao i ideja algoritma su dati u poglavlju 10.

8 Višeslojni FSI problem

Posmatramo problem interakcije fluida sa višeslojnom strukturom, gde se struktura sastoji iz dva sloja, tankog i debelog sloja. Protok fluida(krvi) ćemo modelirati uz pomoć Navije-Stoksovih jednačina za nestišljive, viskozne, njutnovske fluide. Aproksimacija protoka krvi sa njutnovskim fluidom je dobra ukoliko posmatramo protok u velikim i zdravim arterijama, kao što su aorta i koronarne arterije. Tanak sloj strukture ćemo modelirati uz pomoć cilindričnih Koiterovih jednačina za elastične ljuske (*eng. Koiter shell equations*), a deblji sloj strukture uz pomoć jednačina linearne elastičnosti. Tanak strukturni sloj se nalazi između fluida i debelog strukturnog sloja i ima ulogu interfejsa koji ima masu. Dobićemo problem⁶ koji se sastoji iz tri različita fizička modela:

- Modela koji opisuje protok krvi
- Modela koji opisuje elastodinamiku tankog sloja
- Modela koji opisuje elastodinamiku debelog sloja

U slučaju interakcije između krvi i kardiovaskularnog tkiva, gde imamo slučaj da je gustina strukture (arterijskih zidova) približno jednaka gustini fluida (krvi), veza između fluida i strukture je značajna i nelinearna. To znači da oblast kojom se kreće fluid nije fiksna i određuje je oblik strukture. To je činjenica kojoj je poklanja dosta pažnje u istraživanju problema interakcije između fluida i strukture, a to je naročito slučaj kod interakcije između krvi i kardiovaskularnog tkiva.

8.1 Višeslojan 3D model

8.1.1 Jednačine modela

Tanak strukturni sloj modeliramo uz pomoć redukovanih jednačina linearne viskoelastičnosti. Posmatramo cilindričnu oblast debljine h , dužine L , sa unutrašnjim poluprečnikom R . Vršimo parametrizaciju preko cilindričnih koordinata tako da konfiguraciju membrane predstavljamo na sledeći način:

$$\Gamma = \{x = (R \cos \theta, R \sin \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : \theta \in (0, 2\pi), z \in (0, L)\}.$$

Neka je vektor koji predstavlja deformaciju zida strukture dat sa

$$\eta(t, z, \theta) = (\eta_z(t, z, \theta), \eta_\theta(t, z, \theta), \eta_r(t, z, \theta)).$$

⁶Problem opisan u ovom poglavlju zasnovan je na modelima iz [4] i [11]

Ukoliko pretpostavimo da deformacija strukture ne zavisi od θ , vektor deformacije će tada imati oblik

$$\eta(t, z) = (\eta_z(t, z), \eta_r(t, z)),$$

sa odgovarajućim graničnim uslovima

$$\eta(0) = \partial_z \eta(0) = \eta(L) = \partial_z \eta(L) = 0.$$

Takođe, radi jednostavnosti, pretpostavićemo simetriju u odnosi na z – osu. Model tankog strukturnog sloja tada na $\Gamma \times (0, T)$ ima oblik

$$\rho_K h \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \mathcal{L}_{el}(\eta) + \mathcal{L}_{vis} \frac{\partial \eta}{\partial t} = f,$$

gde je ρ_K gustina zida, h je debljina tankog strukturnog sloja, a f sila koja deluje na strukturu. Izraz $\rho_K h \partial^2 \eta / \partial t^2 \neq 0$ znači da interfejs između fluida i strukture ima masu. $\mathcal{L}_{el}$ je operator koji modelira elastična svojstva zida i može biti i linearan i nelinearan i dat je sa

$$\mathcal{L}_{el}(\eta) = \begin{pmatrix} -C_2 \frac{\partial \eta_r}{\partial z} - C_3 \frac{\partial^2 \eta_z}{\partial z^2} \\ C_0 \eta_r - C_1 \frac{\partial^2 \eta_r}{\partial z^2} + C_2 \frac{\partial \eta_z}{\partial z} + C_4 \frac{\partial^4 \eta_r}{\partial z^4} \end{pmatrix}, \quad (8.1)$$

$\mathcal{L}_{vis}$ je linearni operator koji modelira viskoelastična svojstva zida i dat je sa

$$\mathcal{L}_{vis} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \begin{pmatrix} -D_2 \frac{\partial^2 \eta_r}{\partial t \partial z} - D_3 \frac{\partial^3 \eta_z}{\partial t \partial z^2} \\ D_0 \frac{\partial \eta_r}{\partial t} - D_1 \frac{\partial^3 \eta_r}{\partial t \partial z^2} + D_2 \frac{\partial^2 \eta_z}{\partial t \partial z} + D_4 \frac{\partial^5 \eta_r}{\partial t \partial z^4} \end{pmatrix}. \quad (8.2)$$

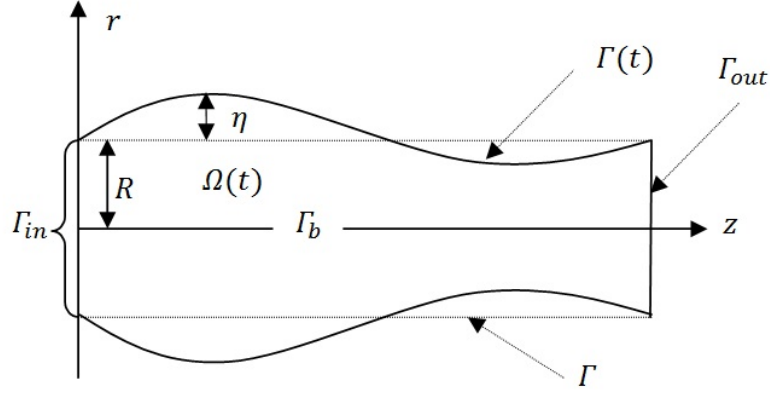
Važi:

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{hE}{R^2(1-\sigma^2)} \left(1 + \frac{h^2}{12R^2}\right), & C_1 &= \frac{h^3}{6} \frac{E\sigma}{R^2(1-\sigma^2)}, & C_2 &= \frac{h}{R} \frac{E\sigma}{1-\sigma^2}, \\ C_3 &= \frac{hE}{1-\sigma^2}, & C_4 &= \frac{h}{12} \frac{E}{1-\sigma^2}, \\ D_0 &= \frac{h}{R^2} C_v \left(1 + \frac{h^2}{12R^2}\right), & D_1 &= \frac{h^3}{6} \frac{D_v}{R^2}, & D_2 &= \frac{hD_v}{R} \\ D_3 &= hC_v, & D_4 &= \frac{h^3}{12} C_v, \end{aligned}$$

i

$$C_v = \frac{E_v}{1 - \sigma_v^2}, \quad D_v = \frac{E_v \sigma_v}{1 - \sigma_v^2}.$$

i E je Jangov modul elastičnosti, σ je Poasonov odnos, dok su odgovarajući viskoelastični koeficijenti E_v i σ_v .

Slika 8.1: Skica domena $\Omega_F(t)$ sa oznakama

Debeo strukturni sloj ćemo modelirati uz pomoć jednačina linearne elastičnosti. Definisaćemo vektor deformacije od referentnog domena $\mathbf{d} = \mathbf{d}(t, x)$. Referentni domen Ω_S predstavlja cilindar poluprečnika R , dužine L i debljine H

$$\Omega_S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in (0, L), R < \sqrt{x^2 + y^2} < R + H\}.$$

Pretpostavićemo da je debeo sloj elastične strukture:

- *homogen* tj. svojstva materijala ne zavise od x
- *izotropan* tj. odgovor materijala na deformaciju je isti u svim pravcima.

Takođe ćemo pretpostaviti da je $\nabla d \ll 1$. Jednačine linearne elastičnosti predstavljamo na sledeći način

$$\begin{aligned} \rho_S \partial_{tt} \mathbf{d} &= \operatorname{div} \mathbf{S}, \text{ na } \Omega_S \times (0, T), \\ \mathbf{S} &= \mu(\nabla \mathbf{d} + (\nabla \mathbf{d})^T) + \lambda(\operatorname{div} \mathbf{d})\mathbf{I}, \end{aligned}$$

gde je ρ_s gustina debelog sloja strukture, $\mathbf{S}$ je prvi Piola-Kirhofov tenzor napona, λ i μ su Laméove konstante, a $\mathbf{I}$ je jedinična matrica. Odnos između $\mathbf{S}$ i $\mathbf{d}$ zavisi od karakteristika materijala koji se posmatra.

Protok nestišljivog, viskoznog fluida ćemo modelirati uz pomoć Navije-Stoksovih jednačina. One su definisane na cilindričnom domenu $\Omega_F(t)$ koji se menja sa vremenom (vidi Sliku 8.1) i dat je sa

$$\Omega_F(t) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in (0, L), \sqrt{x^2 + y^2} < (R + \eta(t, \theta, z))\},$$

gde je $R + \eta(t, \theta, z)$ poluprečnik deformisanog domena i pretpostavljamo da je samo radijalna komponenta vektora deformacije različita od 0 tj.

$$\eta = (\eta_r, \eta_\theta, \eta_z) = (\eta_r, 0, 0) = \eta \mathbf{e}_r.$$

$\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_r(\theta, z)$ je jedinični vektor u r pravcu.

Navije-Stoksove jednačine za nestišljiv, viskozan fluid na $\Omega_F(t)$, gde $t \in (0, T)$ su date sa

$$\begin{aligned} \rho_F(\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) &= \operatorname{div} \sigma, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \end{aligned}$$

gde ρ_F predstavlja gustinu fluida, $\mathbf{u}$ brzinu fluida, dok je $\sigma = -p\mathbf{I} + 2\mu_F \mathbf{D}(\mathbf{u})$ Košijev tenzor napona za fluide, μ_F je koeficijent dinamičke viskoznosti.

$$\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})$$

predstavlja simetrični gradijent brzine $\mathbf{u}$. Ove jednačine su date preko Dekartovih koordinata, za razliku od jednačina strukture koje su date preko cilindričnih koordinata. Bočna granica cilindra koja odgovara interfejsu između fluida i strukture je data sa

$$\Gamma(t) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in (0, L), \sqrt{x^2 + y^2} = (0, R + \eta(t, \theta, z))\}.$$

Ulaznu i izlaznu granicu domena fluida ćemo označiti redom sa Γ_{in} i Γ_{out} .

8.1.2 Veze između različitih fizičkih modela

Kako imamo tri različita fizička modela koji opisuju tri različita fizička procesa koji su uzajamno povezani, neophodno je da opišemo veze između svi njih kako bismo dobili dobro definisan matematički problem. Vezu između fluida, tankog i debelog strukturnog sloja opisujemo uz pomoć dva uslova koji objašnjavaju tu vezu:

1. **Kinematičkog uslova povezanosti** koji opisuje vezu između kinematičkih svojstava, kao što je brzina. Uslov glasi

$$\begin{aligned} \partial_t \eta(t, \theta, z) \mathbf{e}_r(\theta, z) &= \mathbf{u}(t, R + \eta(t, \theta, z), \theta, z), & (\text{neprekidnost brzine}) \\ \eta(t, \theta, z) \mathbf{e}_r(\theta, z) &= \mathbf{d}(t, R, \theta, z), & (\text{neprekidnost deformacije}) \end{aligned} \tag{8.3}$$

gde je $\mathbf{e}_r(\theta, z)$ jedinični vektor u r pravcu.

2. **Dinamičkog uslova povezanosti** koji opisuje sile koje se pojavljuju na interfejsu između različitih fizičkih modela i u ovom slučaju predstavlja drugi Njutnov zakon kretanja, što znači da je proizvod mase i ubrzanja na interfejsu $\Gamma(t)$ jednak zbiru svih sila koje deluju na ili sa interfejsa $\Gamma(t)$. Uslov glasi

$$\rho_K h \partial_{tt} \eta + \mathcal{L}_{el}(\eta) + \mathcal{L}_{vis} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -J(\sigma \mathbf{n})|_{(t, R+\eta, \theta, z)} \cdot \mathbf{e}_r + \mathbf{RS}|_{(t, R, \theta, z)} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r. \quad (8.4)$$

$J = J(t, \theta, z) = \sqrt{(1 + (\partial_z \eta)^2)(R + \eta)^2 + \partial_\theta \eta^2}$ predstavlja Jakobijan funkcije koja obuhvata transformacije Ojlerovih u Lagranžove koordinate i cilindričnih u Dekartove koordinate.

$\mathbf{R}$ je Jakobijan transformacije cilindričnih u Dekartove koordinate gde $r = R$. $\mathbf{n}$ koji posmatramo na $(t, R + \eta, \theta, z)$ predstavlja spoljašnji jedinični vektor normalan na deformisan interfejs $\Gamma(t)$.

U slučaju kada posmatramo model sa samo jednim strukturnim slojem i to debelim, dinamički uslov povezanosti se značajno menja, jer više nemamo tanak sloj sa masom pa on sada izgleda:

$$J(\sigma \mathbf{n})|_{(t, R+\eta, \theta, z)} \cdot \mathbf{e}_r + \mathbf{RS}|_{(t, R, \theta, z)} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r = 0, \text{ na } \Gamma \times (0, T).$$

8.1.3 Granični i početni uslovi

Ulazni i izlazni granični uslovi za fluid

Pokazaćemo dva moguća primera za ulazne i izlazne granične uslove:

- Uslovi koji se koriste kod dokaza o postojanju rešenja

$$\begin{aligned} p + 0.5\rho_F |\mathbf{u}|^2 &= P_{in/out}(t), & \text{na } \Gamma_{in/out}, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_z \mathbf{e}_z, \end{aligned} \quad (8.5)$$

gde je $P_{in/out} \in L_{loc}^2$ poznat, a $\mathbf{e}_z$ je spoljašnji jedinični vektor normalan na $\Gamma_{in/out}$. Posmatramo slučaj gde je fluid ulazi i izlazi iz domena normalno na ulaznu i izlaznu granicu.

- Uslovi koji se koriste kod numeričkih simulacija:

$$\begin{aligned} \sigma \mathbf{n}|_{\Gamma_{in}} &= P_{in}(t), \\ \sigma \mathbf{n}|_{\Gamma_{out}} &= P_{out}(t). \end{aligned} \quad (8.6)$$

Ulazni i izlazni granični uslovi za strukturu• *Tanka struktura*

$$\eta(t, r, \theta, 0) = \eta(t, r, \theta, L) = 0, r \in (0, R), \theta \in (0, 2\pi), t \in (0, T), \quad (8.7)$$

tj. u krajnjim tačkama nema pomeraja tankog sloja strukture i

$$\eta_z(t, r, \theta, 0) = \eta_z(t, r, \theta, L) = 0, r \in (0, R), \theta \in (0, 2\pi), t \in (0, T). \quad (8.8)$$

• *Debela struktura*

$$\mathbf{d}(t, r, \theta, 0) = \mathbf{d}(t, r, \theta, L) = 0, r \in (R, R + H), \theta \in (0, 2\pi). \quad (8.9)$$

Spoljašnji granični uslovi

Pretpostavićemo da na spoljašnju granicu debelog sloja strukture

$$\Gamma_{ext} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in (0, L), x^2 + y^2 = (R + H)^2\}$$

deluje spoljašnji pritisak P_e

$$\mathbf{S}\mathbf{e}_r = -P_e \mathbf{e}_r, \text{ na } \Gamma_{ext} \quad (8.10)$$

Početni uslovi

Početne brzine, kao i početni pomeraji su dati sa

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(0, \cdot) &= \mathbf{u}_0, \\ \eta(0, \cdot) &= \eta_0, \quad \partial_t \eta(0, \cdot) = v_0, \\ \mathbf{d}(0, \cdot) &= \mathbf{d}_0, \quad \partial_t \mathbf{d}(0, \cdot) = \mathbf{V}_0, \end{aligned}$$

gde pretpostavljamo da pripadaju sledećim prostorima

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0 &\in L^2(\Omega_F(0)), \\ \eta_0 &\in H_0^1(0, 1), \quad v_0 \in L^2(0, 1), \\ \mathbf{V}_0 &\in L^2(\Omega_S), \quad \mathbf{d}_0 \in H^1(\Omega_S). \end{aligned}$$

8.1.4 Glavni problem

Konačno, problem prethodno izložen, koji opisuje interakciju između fluida i strukture koja se sastoji iz više slojeva je dat sa:

Pronaći $\mathbf{u}, p, \eta$ i $\mathbf{d}$ tako da važi

$$\left. \begin{aligned} \rho_F(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) &= \operatorname{div} \sigma \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ na } \Omega_F(t), t \in (0, T),$$

$$\rho_S \partial_{tt} \mathbf{d} = \operatorname{div} \mathbf{S} \text{ na } \Omega_S \times (0, T),$$

$$\left. \begin{aligned} \partial_t \eta \mathbf{e}_r &= \mathbf{u}|_{R+\eta}, \\ \eta \mathbf{e}_r &= \mathbf{d}|_R, \\ \rho_K h \partial_{tt} \eta + \mathcal{L}_{el}(\eta) + \mathcal{L}_{vis} \frac{\partial \eta}{\partial t} &= -J(\sigma \mathbf{n})|_{R+\eta} \cdot \mathbf{e}_r + \mathbf{RS}|_R \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r \end{aligned} \right\} \text{ na } \Gamma \times (0, T).$$

$\sigma, \mathbf{S}, \mathcal{L}_{el}, \mathcal{L}_{vis}$ su definisani ranije. Treba naznačiti da su u ovakvoj formulaciji jednačine fluida i debelog sloja strukture date u Dekartovim koordinatama, dok su jednačine koje opisuju elastodinamiku tankog sloja date preko cilindričnih koordinata. Jednačine fluida su date preko Ojlerovog pristupa, a jednačine struktura preko Lagranžovog pristupa. Ovako definisan problem obuhvata celu klasu problema, koji se na razne načine mogu prilagoditi i uprostiti. Mi ćemo prikazati uprošćenu dvodimenzionalnu verziju ovog problema.

8.2 Višeslojan 2D model

Model koji sledi predstavlja uprošćenje modela iz potpoglavlja 8.1, jer su jednačine koje opisuju model date u $\mathbb{R}^2$, a model se zasniva na modelu iz [4].

FLUID:

Protok nestišljivog, viskoznog fluida modeliramo uz pomoć dvodimenzionalnih Navije-Stoksovih jednačina

$$\left. \begin{aligned} \rho_F(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) &= \operatorname{div} \sigma \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ na } \Omega_F(t), t \in (0, T),$$

gde ρ_F predstavlja gustinu fluida, $\mathbf{u}$ brzinu fluida, $\sigma = -p\mathbf{I} + 2\mu_F \mathbf{D}(\mathbf{u})$ je Košijev tenzor napona za fluide, p je pritisak, μ koeficijent dinamičke viskoznosti i $\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})$ je simetrični gradijent od $\mathbf{u}$.

$$\Omega_F(t) = \{(z, r) \in \mathbb{R}^2 : z \in (0, L), r \in (0, R + \eta(t, z))\}$$

je cilindrični domen fluida dužine L i sa poluprečnikom $r = R$.

$$\Gamma(t) = \{(z, r) \in \mathbb{R}^2 : z \in (0, L), r = R + \eta(t, z)\}$$

je interfejs između fluida i strukture. Bez ograničenja opštosti posmatraćemo samo gornju polovinu cilindra, pri čemu ćemo osu simetrije označiti sa Γ_b (vidi Sliku 8.1).

TANAK SLOJ STRUKTURE:

Elastodinamiku elastičnog tankog sloja modeliramo uz pomoć jednodimenzionalne talasne jednačine

$$\rho_K h \partial_{tt} \eta = c^2 \partial_{zz} \eta + f, z \in (0, L), t \in (0, T),$$

gde je η vektor vertikalne deformacije, ρ_K je gustina tanke strukture, h je debljina strukture i f je vertikalna sila koja deluje na strukturu. Tako zadata talasna jednačina je specijalni slučaj prethodno navedenih jednačina za tanak sloj.

DEBEO SLOJ STRUKTURE:

Elastodinamiku debelog sloja modeliramo uz pomoć jednačina linearne elastičnosti

$$\begin{aligned} \rho_S \partial_{tt} \mathbf{d} &= \operatorname{div} \mathbf{S}, \text{ na } \Omega_S, t \in (0, T), \\ S &= \mu(\nabla \mathbf{d} + (\nabla \mathbf{d})^T) + \lambda(\operatorname{div} \mathbf{d}) \mathbf{I}, \end{aligned} \quad (8.11)$$

gde je ρ_S gustina debelog sloja strukture, $\mathbf{S}$ je prvi Piola-Kirhofov tenzor napona, λ i μ su Laméove konstante, a $\mathbf{I}$ je jedinična matrica, $\mathbf{d}(t, z, r) = (d_z(t, z, r), d_r(t, z, r))$ je strukturalna deformacija debelog sloja u tački $(z, r) \in \Omega_s$ i u vremenu t . Deformisan domen Ω_S u t označavamo sa $\Omega_S(t)$. Važi

$$\Omega_S = (0, L) \times (R, R + H).$$

Pregled parametara korišćenih u ovom modelu dat je u Tabeli 8.1.

POVEZANOST IZMEĐU FLUIDA I SLOJEVA STRUKTURE

Uslovi 8.3 i 8.4 u slučaju dvodimenzionalnog modela dobijaju jednostavniju formu:

- *Kinematički uslov povezanosti*

$$\begin{aligned} (\partial_t \eta(t, z), 0) &= \mathbf{u}(t, z, R + \eta(t, z)), & (\text{neprekidnost brzine}) \\ (\eta(t, z), 0) &= \mathbf{d}(t, z, R), & (\text{neprekidnost deformacije}) \end{aligned} \quad (8.12)$$

- *Dinamički uslov povezanosti*

$$\rho_S h \partial_{tt} \eta = c^2 \partial_{zz} \eta - J(t, z)(\sigma \mathbf{n})|_{(t, z, R + \eta(t, z))} \cdot \mathbf{e}_r + \mathbf{S}|_{(t, z, R)} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r. \quad (8.13)$$

$J(t, z) = \sqrt{(1 + (\partial_z \eta(t, z))^2)}$ predstavlja Jakobijan transformacije Ojlerovih u Lagranžove koordinate, dok se u ovoj verziji Jakobijan transformacije cilindričnih u Dekartove koordinate ne pojavljuje jer su i jednačine fluida i strukture pisane u Dekartovim koordinatama.

Tabela 8.1: PARAMETRI

NAZIV	OZNAKA	JEDINICA	VREDNOST
KRV			
Gustina	ρ_F	kg/m^3	$1.1 \cdot 10^3$
Koeficijent dinamičke viskoznosti	μ_F	kg/ms	1,050
TANAK STRUKTURNI SLOJ (AORTA I VELIKE ARTERIJE)			
Poluprečnik kanala	R_K	m	$0.006 - 0.012$
Dužina kanala	L	m	$0.065 - 0.2$
Debljina zida	h	m	$1 - 2 \cdot 10^{-3}$
Gustina zida	ρ_K	kg/m^3	$1.1 \cdot 10^3$
Jangov modul elastičnosti	E	Pa	$10^5 - 10^6$
Lame-ova konstanta	μ_K	$dyne/cm^2$	$5.75 \cdot 10^5$
Lame-ova konstanta	λ_K	$dyne/cm^2$	$1.7 \cdot 10^6$
DEBEO STRUKTURNI SLOJ			
Poluprečnik	R	cm	0.5
Gustina zida	ρ_S	g/cm^3	1.1
Debljina zida	h_S	cm	0.1
Lame-ova konstanta	μ_S	$dyne/cm^2$	$5.75 \cdot 10^5$
Lame-ova konstanta	λ_S	$dyne/cm^2$	$1.7 \cdot 10^6$

GRANIČNI I POČETNI USLOVI

- *Ulazni i izlazni granični uslovi*

$$\begin{aligned} p + 0.5\rho_F |\mathbf{u}|^2 &= P_{in/out}(t), & \text{na } \Gamma_{in/out}, \\ \mathbf{u}_r &= 0, \end{aligned} \quad (8.14)$$

pri čemu je $P_{in/out} \in L^2_{loc}(0, \infty)$ dato i predstavlja dinamički pritisak koji se javlja zbog kretanja fluida.

- *Donja granica*

Sledeći uslov uvodimo zbog pretpostavke simetrije u odnosu na z - osu

$$\mathbf{u}_r = \partial_r \mathbf{u}_z = 0, \text{ na } \Gamma_b.$$

- *Granični uslovi u krajnjim tačkama*

$$\eta(t, 0) = \eta(t, L) = 0,$$

$$\mathbf{S}\mathbf{e}_r = -P_e \mathbf{e}_r, \text{ na } \Gamma_{ext},$$

gde je P_e spoljašnji pritisak, a Γ_{ext} spoljašnja granica debelog sloja strukture data sa

$$\Gamma_{ext} = \{(z, r) \in \mathbb{R}^2 : z \in (0, L), r = R\},$$

$$\mathbf{d}(t, 0, r) = \mathbf{d}(t, L, r) = 0, r \in (R, H).$$

- *Početni uslovi*

$$\mathbf{u}(0, \cdot) = \mathbf{u}_0,$$

$$\eta(0, \cdot) = \eta_0, \quad \partial_t \eta(0, \cdot) = v_0,$$

$$\mathbf{d}(0, \cdot) = \mathbf{d}_0, \quad \partial_t \mathbf{d}(0, \cdot) = \mathbf{V}_0,$$

gde pretpostavljamo da pripadaju sledećim prostorima

$$\mathbf{u}_0 \in L^2(\Omega_F(0)),$$

$$\eta_0 \in H_0^1(0, 1), \quad v_0 \in L^2(0, 1),$$

$$\mathbf{V}_0 \in L^2(\Omega_S), \quad \mathbf{d}_0 \in H^1(\Omega_S),$$

i zadovoljavaju sledeće uslove

$$(\eta_0(z), 0) = \mathbf{d}_0(z, R),$$

$$\eta_0(0) = \eta_0(L) = v_0(0) = v_0(L) = 0,$$

$$\mathbf{d}_0(0, \cdot) = \mathbf{d}_0(L, \cdot) = \mathbf{V}_0(0, \cdot) = \mathbf{V}_0(L, \cdot) = 0,$$

$$R + \eta_0(z) > 0, z \in [0, l]$$

8.2.1 Postojanje slabog rešenja

Za 2D model dat u prethodnom poglavlju sa parametrima datim sa $R = L = \lambda = \mu = \rho_K = \rho_S = 0$ i $P_e = 0$ je dokazano postojanje slabog rešenja (videti [11]), *Glavna teorema* je data sa:

Teorema 8.1 (GLAVNA TEOREMA ([11]))

Neka su početni podaci dati sa:

$$v_0 \in L^2(0, 1), \mathbf{u}_0 \in L^2(\Omega_{\eta_0}), \mathbf{V}_0 \in L^2(\Omega_S), \mathbf{d}_0 \in H^1(\Omega_S) \text{ i } \eta_0 \in H_0^1(0, 1)$$

i takvi da važi $1 + \eta_0(z) > 0, z \in [0, 1]$ i neka su zadovoljeni sledeći uslovi:

$$(\eta_0(z), 0) = \mathbf{d}_0(z, R),$$

$$\eta_0(0) = \eta_0(L) = v_0(0) = v_0(L) = 0,$$

$$\mathbf{d}_0(0, \cdot) = \mathbf{d}_0(L, \cdot) = \mathbf{V}_0(0, \cdot) = \mathbf{V}_0(L, \cdot) = 0,$$

$$R + \eta_0(z) > 0, z \in [0, l].$$

Neka još $P_{in}, P_{out} \in L^2_{loc}(0, \infty)$. Tada postoji $T > 0$ i slabo rešenje $(\mathbf{u}, \eta, \mathbf{d})$ problema navedenog u poglavlju 8.1 na intervalu $(0, T)$, tako da su sledeće ocene energije zadovoljene

$$E(t) + \int_0^t D(r)dr \leq E_0 + C(\|P_{in}\|_{L^2(0,t)}^2 + \|P_{out}\|_{L^2(0,t)}^2), \quad t \in [0, T],$$

gde C zavisi samo od koeficijenata u problemu, E_0 je kinetička energija u početnim uslovima, a $E(t)$ i $D(t)$ su dati sa:

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega_F)}^2 + \frac{1}{2}\|\partial_t \eta\|_{L^2(\Omega_S)}^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{d}\|_{L^2_{\Omega_S}}^2 + \frac{1}{2}(\|\partial_z \eta\|_{L^2(0,1)}^2 + a_S(\mathbf{s}, \mathbf{d})), \\ D(t) &= \|\mathbf{D}(\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega_\eta(t))}^2. \end{aligned}$$

Takođe, jedno od sledeća dva tvrđenja je tačno:

$$\begin{aligned} &T = \infty \text{ ili} \\ &\lim_{t \rightarrow T} \min_{z \in [0,1]} (1 + \eta(z)) = 0. \end{aligned}$$

Dokaz teoreme 8.1 kao i definicija slabog rešenja problema mogu se videti u [11].

9 Model sa aterosklerozom

Sada ćemo prezentovati model⁷ koji opisuje interakciju između protoka krvi i stenozne arterije. Stenoza se odnosi na stanje u krvnom sudu u kojem je nemogućen nesmetan protok krvi. Ateroskleroza je stanje u arteriji koje karakteriše očvršćavanje, sužavanje i zatvaranje krvnog suda, koje nastaje taloženjem supstanci poput holesterola, ćelijskog otpada i kalcijuma sa unutrašnje strane zida arterije što dovodi do stvaranja čepa koji se naziva plak. Ukoliko plak u potpunosti blokira protok krvi u arteriji, dolazi do srčanog udara. Takođe, ateroskleroza može da izazove i šlog. Neki od faktora koji se povezuju sa aterosklerozom su povišen nivo holesterola i triglicerida u krvi, visok krvni pritisak, pušenje...

Protok krvi kroz zdrave arterije se uglavnom može modelirati sa njutnovskim fluidom. Međutim, u slučaju kada je geometrija arterije izmenjena, moraju se koristiti kompleksniji modeli tj. moraju se razviti reološki modeli koji će što bliže stvarnosti definisati viskoznost, kao funkciju od tenzora $\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla^T\mathbf{u})$, odnosno od $\mathbf{S}(\mathbf{u})$ koji predstavlja drugu invarijantu tenzora naprezanja i koji je definisan sa

$$(\mathbf{S}(\mathbf{u}))^2 = 2 \sum_{i,j} \mathbf{D}(\mathbf{u})_{ij} \mathbf{D}(\mathbf{u})_{ji}.$$

U slučaju zdrave arterije mehanička svojstva unutrašnjeg sloja arterije koji se naziva *tunika intima* ne dolaze do izražaja i mogu se zanemariti, što nije slučaj kada je reč o obolelim arterijama, jer tada intima postaje kruća i deblja pa se njena mehanička svojstva moraju uzeti u obzir, što za posledicu ima značajne promene u modelu, a jedna takva promena je definisanje viskoznosti koja nije konstantna veličina nego zavisi od tenzora naprezanja.

9.1 Jednačine fluida

Nestišljivi njutnovski fluidi zadovoljavaju zakon

$$\sigma(\mathbf{u}, p) = 2\mu\mathbf{D}(\mathbf{u}) - p\mathbf{I},$$

gde $\mathbf{u}$ predstavlja brzinu fluida, p pritisak i μ koeficijent dinamičke viskoznosti. Iako se dugo verovalo da je to zakon koji važi za sve fluide, pokazano je da postoje fluidi koji ne zadovoljavaju taj zakon i to je klasa nenjutnovskih fluida, a fluide koji zadovoljavaju zakon

$$\sigma(\mathbf{u}, p) = 2\mu(\mathbf{S}(\mathbf{u}))\mathbf{D}(\mathbf{u}) - p\mathbf{I}$$

nazivamo generalizovani njutnovski fluidi.

⁷Model opisan u ovom poglavlju zasnovan je na modelu predstavljenom u [6]

Krv se može modelirati koristeći Korijev zakon (*Carreau law*) koji predstavlja izraz za izračunavanje koeficijenta dinamičke viskoznosti koji zavisi od $\mathbf{S}(\mathbf{u})$ i koji je dat sa

$$\mu = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty)(1 + (\lambda \mathbf{S}(\mathbf{u}))^2)^{(n-1)/2}, \quad (9.1)$$

pri čemu se protok krvi modelira uz pomoć Navije-Stoksovih jednačina. Konstanta n određuje vrstu fluida, tako da u slučaju $n = 1$ imamo njutnovske fluide koji ne zavise od $\mathbf{S}(\mathbf{u})$. λ je vremenska konstanta. Kako bi se opisao protok krvi kao nenjutnovskog fluida u [6] su iskorišćene sledeće vrednosti konstanti iz modela

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 0.0456 Pa \cdot s, \\ \mu_\infty &= 0.0032 Pa \cdot s, \\ \lambda &= 10.03 s, \\ n &= 0.344. \end{aligned}$$

U slučaju kada $n = 1$ dobija se koeficijent dinamičke viskoznosti $\mu = \mu_0 = 0.0456 Pa \cdot s$ koji odgovara njutnovskim fluidima. Za iste vrednosti konstanti μ se u slučaju nenjutnovskih fluida može aproksimirati sa $0.0035 Pa \cdot s$ (videti [6]).

Posmatraćemo oblast protoka krvi Ω_F kroz stenoznu arteriju. Neka je Ω_F otvoren ograničen domen koji predstavlja deo cilindrične obolele arterije. Granične oblasti koje odgovaraju zidu arterije ćemo označiti sa Γ_{ω_1} i Γ_{ω_2} , dok ćemo sa Γ_{in} i Γ_{out} označiti ulazne i izlazne (veštačke) granice, tako da važi

$$\begin{aligned} \partial\Omega_F &= \Gamma_{in} \cup \Gamma_{\omega_1} \cup \Gamma_{\omega_2} \cup \Gamma_{out}, \\ \Gamma_{in} \cap \Gamma_{\omega_1} \cap \Gamma_{\omega_2} \cap \Gamma_{out} &= \emptyset \end{aligned}$$

Takođe, pretpostavićemo da ne postoje sile koje deluje na fluid i strukturu, što pre svega znači da ćemo ignorisati efekte koje gravitacija ima na fluid i strukturu.

Sada možemo da definišemo problem sa nepoznatom brzinom $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ i pritiskom p definisanim na $\Omega_F \times (0, T)$ tako da važi

$$\begin{aligned} \rho_F \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) - \operatorname{div}(2\mu(\mathbf{S}(\mathbf{u}))\mathbf{D}(\mathbf{u})) + \nabla p &= 0, \text{ na } \Omega_F \times (0, T) \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \text{ na } \Omega_F \times (0, T) \end{aligned}$$

Granični uslovi na $\partial\Omega_F$ su dati sa

$$\begin{aligned} 2\mu(\mathbf{S}(\mathbf{u}))\mathbf{D}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} - p\mathbf{n} &= \mathbf{h}, & \text{ na } \Gamma_{in} \times (0, T), \\ 2\mu(\mathbf{S}(\mathbf{u}))\mathbf{D}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} - p\mathbf{n} &= 0, & \text{ na } \Gamma_{out} \times (0, T), \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= 0, & \text{ na } \Gamma_{\omega_1} \times (0, T), \\ 2\mu(\mathbf{S}(\mathbf{u}))\mathbf{D}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} - p\mathbf{n} &= \mathbf{g}, & \text{ na } \Gamma_{\omega_1} \times (0, T), \\ \mathbf{u} &= 0, & \text{ na } \Gamma_{\omega_2} \times (0, T), \end{aligned}$$

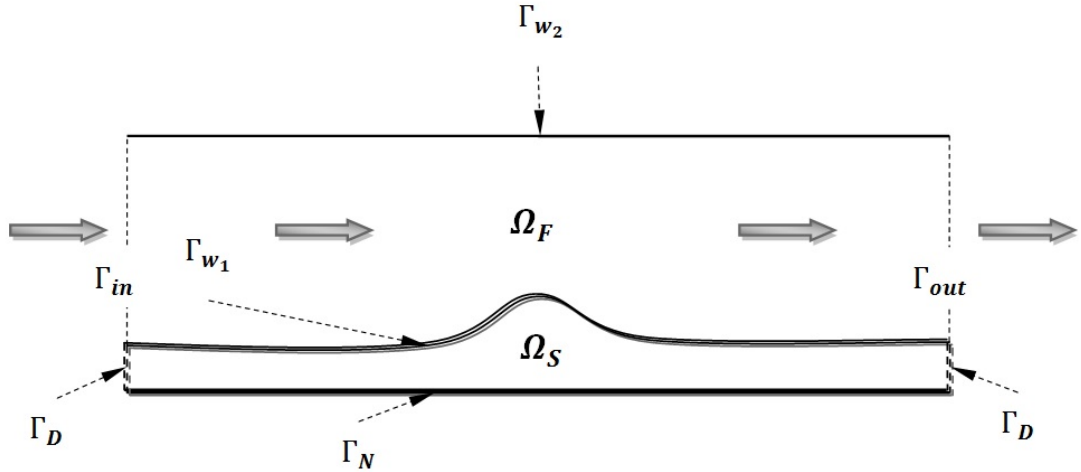
a početni sa:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0, \text{ za } t = 0 \text{ na } \Omega_F,$$

gde je $\mathbf{n}$ spoljašnji normalan vektor.

9.2 Model strukture

Vaskularni zidovi imaju veoma značajne uloge, a njihova priroda je veoma kompleksna, pa je veoma teško napraviti model koji tačno opisuje njihove mehaničke karakteristike, jer se zidovi sastoje iz više slojeva, gde svaki ima različite mehaničke karakteristike. Ukoliko strukturi pripišemo nelinearna izotropna i hiperelastična materijalna svojstva, što je moguće, jer se ona u suštini sastoji iz vode, jedan način da opišemo karakteristike strukture je upotreba *St. Venant Kirchhoff* modela koji je generalizacija linearnog modela za velike deformacije, i to u slučaju hiperelastičnih materijala. Pritom ćemo za opis dinamike koristiti Lagranžov pristup, gde sa Ω_S označavamo datu referentnu konfiguraciju materijala koja ne zavisi od vremena. Kretanje strukture objašnjavamo pomoću vektora deformacije $\eta : \Omega_S \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$, sa granicama $\partial\Omega_S = \Gamma_D \cup \Gamma_{w_1} \cup \Gamma_N$, gde je Γ_{w_1} deo granice koja je zajednička domenima fluida i strukture, tj. deo na kojem se ostvaruje interakcija između fluida i strukture, Γ_N je deo u kontaktu sa spoljašnjosti i pretpostavićemo da je struktura odsečena na granicama Γ_D (Slika 9.1). Modelu odgovara interpretacija zida arterije kao jednoslojne strukture.



Slika 9.1: Konfiguracija ateroskleroznog plaka

Model za strukturu tada glasi:

Treba pronaći vektor deformacije $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ tako da važi

$$\begin{aligned} \rho_S \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \operatorname{div}((\mathbf{I} + \nabla \eta) \mathbf{\Pi}(\eta)) &= 0, & \text{na } \Omega_S \times (0, T), \\ \eta &= 0, & \text{na } \Gamma_D \times (0, T), \\ ((\mathbf{I} + \nabla \eta) \mathbf{\Pi}(\eta)) \mathbf{n} &= 0, & \text{na } \Gamma_N \times (0, T), \\ \eta(x, 0) &= \eta_0(x), & \text{na } \Omega_S, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= \dot{\eta}_0(x), & \text{na } \Omega_S, \end{aligned}$$

gde je $(\mathbf{I} + \nabla \eta) \mathbf{\Pi}(\eta)$ prvi Piola-Kirhofov tenzor napona, $\mathbf{\Pi}$ je drugi Piola-Kirhofov tenzor napona, $\mathbf{I} + \nabla \eta$ je tenzor gradijenta deformacije, a $\mathbf{I}$ je jedinična matrica. Označićemo sa $\mathbf{E}$ *Green-St. Venant* tenzor deformacije

$$\mathbf{E}(\eta) = \frac{1}{2}(\nabla \eta + (\nabla \eta)^T + (\nabla \eta)^T \nabla \eta).$$

U slučaju *St. Venant-Kirchhoff* modela, drugi Piola-Kirhofov tenzor napona linearno zavisi od $\mathbf{E}$ tj. važi

$$\mathbf{\Pi} = \lambda_S \operatorname{str}(\mathbf{E}(\eta)) \mathbf{I} + 2\mu_S \mathbf{E}(\eta),$$

gde su

$$\lambda_S = \frac{\sigma E}{(1 - 2\sigma)(1 + \sigma)} \text{ i } \mu_S = \frac{E}{2(1 + \sigma)}$$

Lameove konstante, E je Jangov modul elastičnosti i σ Poasonov odnos.

9.3 Interakcija između fluida i strukture

Interakcija između fluida i strukture se ostvaruje na interfejsu između dve površi, pa uslove povezanosti definišemo na granici Γ_{ω_1} . Imamo dva uslova:

- Neprekidnost brzine:

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \text{ na } \Gamma_{\omega_1} \times (0, T).$$

- Zbir svih sila koje deluju na interfejs Γ_{ω_1} i sa interfejsa jednak je 0 tj.

$$-(2\mu(\mathbf{S}(\mathbf{u}))\mathbf{D}(\mathbf{u}) - p\mathbf{I}) \mathbf{n} = \mathbf{\Pi}(\eta) \mathbf{n}, \text{ na } \Gamma_{\omega_1} \times (0, T).$$

Ovako definisan problem ima slabo rešenje i može se rešiti numerički (videti [6]).

9.4 Rezultati

Kako je za određivanje trenja koje se ispoljava na zidovima krvnih sudova potrebno uvesti mnoge pretpostavke i aproksimacije, često se dešava da rešenje značajno odstupa od stvarnosti. To trenje se može odrediti rešavanjem jednačina koje opisuju brzinu protoka krvi. Kako rešenje ne bi značajno odstupalo od stvarnosti i kako bi ta aproksimacija bila što tačnija, vrlo su značajne pretpostavke koje se uvode, a koje se posebno odnose na strukturu posmatranog krvnog suda. Krv je generalno nenjutnovski fluid ali se u slučaju zdravih i velikih sistemskih arterija može aproksimirati njutnovskim fluidima, što nije slučaj kada je reč o, na primer, arteriolama, venama, kapilarima ili arterijama sa izraženom stenozom. U slučaju nenjutnovskih fluida koeficijent pravca krive koja opisuje trenje se poklapa sa koeficijentom viskoznosti fluida i zavisi od pritiska, temperature i stope naprezanja. Za razliku od nenjutnovskih, viskoznost kod njutnovskih fluida ne zavisi od stope naprezanja.

U [6] su upoređeni rezultati između modela za njutnovske fluide i modela za nenjutnovske fluide u slučaju fiksnog i pokretnog zida.

U slučaju fiksnog zida, može se uočiti malo odstupanje rezultata dobijenih koristeći svojstva njutnovskih i nenjutnovskih fluida. Isti slučaj je i kada je u pitanju kruta struktura krvnog suda pa je u tom slučaju korišćenje svojstava fiksnog zida prihvatljivo u modelu. Međutim, u slučaju pokretnog zida maksimum krive njutnovskog modela mnogo premašuje maksimum krive nenjutnovskog modela, što se može očekivati jer viskoznost dobijena u slučaju njutnovskog fluida odgovara minimalnoj vrednosti viskoznosti koja odgovara nenjutnovskom fluidu (vidi formulu 9.1). U slučaju propustljivog zida, napon u području stenozе je mali u poređenju sa slučajem kada je u pitanju kruta struktura zida.

Krvne sudove nazivamo krutim (*rigid*) kada je onemogućena interakcija između krvi i zida, dok su krvni sudovi propustljivi (*compliant*) ukoliko postoji interakcija između zida i strukture.

Numerički rezultati su pokazali da nenjutnovski model značajno potcenjuje napon u području plaka, što znači da predviđa manji rizik od rupture (pucanja) plaka od onog koji je zaista prisutan, dok je, sa druge strane, njutnovski model mnogo manje predvidljiv od nenjutnovskog. Takođe, rezultati pokazuju značajne razlike u dobijenim deformacijama strukture, jer njutnovski model predviđa veću deformaciju strukture od one koja bi trebala biti. Može se izvesti zaključak da je u slučaju krute strukture korišćenje oba modela prihvatljivo, ali zato u slučaju pokretnog zida postoje značajne razlike između dva modela i njutnovski model slabije predviđa rizik od rupture u odnosu na nenjutnovski model.

Razvijeno je više modela koji se bave protokom krvi kroz stenoznu arteriju. Kao još jedan primer možemo navesti [22] gde je pored predstavljenih modela, urađena i uporedna analiza 3 različita modela.

Deo III

Numeričke simulacije

10 Numerički algoritam za rešavanje jednoslojnog modela

U ovom poglavlju objasnićemo numerički postupak za rešavanje FSI jednoslojnog modela predstavljenog u poglavlju 7 koji se zasniva na modelu iz [8].

Da bi se problem (7.4)-(7.11) rešio numerički treba ga napisati u drugom obliku:

1. Nulta aproksimacija

Naći $(\eta^{0,1}, u_z^{0,1})$ tako da zadovoljavaju sistem:

$$\frac{\partial^2 \eta^{0,0}}{\partial t^2} - \frac{R}{2\rho_F} \frac{\partial^2 p^{0,0}}{\partial z^2} = -\frac{\mu}{\rho_F} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_z^{0,0}}{\partial r} \Big|_{r=R}, \right) \quad (10.1)$$

$$\rho_F \frac{\partial u_z^{0,0}}{\partial t} - \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z^{0,0}}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p^{0,0}}{\partial z}, \quad (10.2)$$

sa početnim i graničnim uslovima:

$$\begin{aligned} u_z^{0,0}|_{r=0} \text{ je ograničeno, } & u_z^{0,0}|_{r=R} = 0, & u_z^{0,0}|_{t=0} = 0, \\ \eta^{0,0}|_{t=0} = 0, & p^{0,0}|_{z=0} = P_0, & p^{0,0}|_{z=L} = P_L, \end{aligned}$$

i $p^{0,0}$ koje je dato sa

$$p^{0,0} = \left(\frac{Eh}{(1-\sigma^2)R} + p_{ref} \right) \frac{\eta^{0,0}}{R} + \frac{hC_v}{R^2} \frac{\partial \eta^{0,0}}{\partial t}.$$

2. δ korekcija

Naći $(\eta^{0,1}, u_z^{0,1})$ tako da zadovoljavaju sistem

$$\frac{\partial^2 \eta^{0,1}}{\partial t^2} - \frac{R}{2\rho_F} \frac{\partial^2 p^{0,1}}{\partial z^2} = -\frac{\mu}{\rho_F} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_z^{0,1}}{\partial r} \Big|_{r=R}, \right) - \frac{1}{2R} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\eta^{0,0})^2 \quad (10.3)$$

$$\rho_F \frac{\partial u_z^{0,1}}{\partial t} - \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z^{0,1}}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p^{0,1}}{\partial z}, \quad (10.4)$$

sa početnim i graničnim uslovima:

$$\begin{aligned} u_z^{0,1}|_{r=0} \text{ je ograničeno, } & u_z^{0,1}|_{r=R} = -\eta^{0,0} \frac{\partial u_z^{0,0}}{\partial r} \Big|_{r=R}, & u_z^{0,1}|_{t=0} = 0, \\ \eta^{0,1}|_{t=0} = 0, & \eta^{0,1}|_{z=0} = 0, & \eta^{0,1}|_{z=L} = 0, \end{aligned}$$

i $p^{0,1}$ koje je dato sa

$$p^{0,1} = \left(\frac{Eh}{(1-\sigma^2)R} + p_{ref} \right) \left(\frac{\eta^{0,1}}{R} - \left(\frac{\eta^{0,0}}{R} \right)^2 \right) + \frac{hC_v}{R^2} \left(\frac{\partial \eta^{0,1}}{\partial t} - \frac{\eta^{0,0}}{R} \frac{\partial \eta^{0,1}}{\partial t} \right).$$

3. ϵ korekcija

Na osnovu rezultata dobijenih iz prethodna dva sistema naći $(u_r^{1,0}, u_z^{1,0})$ tako da zadovoljavaju

$$u_r^{1,0}(r, z, t) = \frac{1}{r} \left(R \frac{\partial \eta^{0,0}}{\partial t} + \int_r^R \xi \frac{\partial u_z^{0,0}}{\partial z}(\xi, z, t) d\xi \right), \quad (10.5)$$

$$\rho_F \frac{\partial u_z^{1,0}}{\partial t} - \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z^{1,0}}{\partial r} \right) = -\rho_F \left(u_r^{1,0} \frac{\partial u_z^{0,0}}{\partial r} + u_z^{0,0} \frac{\partial u_z^{0,0}}{\partial z} \right), \quad (10.6)$$

sa početnim i graničnim uslovima

$$u_z^{1,0}|_{r=0} \text{ je ograničeno, } u_z^{1,0}|_{r=R} = 0, \quad u_z^{1,0}|_{t=0} = 0.$$

4. Konačno rešenje tada ima oblik

$$\begin{aligned} u_z &= u_z^{0,0} + u_z^{0,1} + u_z^{1,0}, \quad u_r = u_r^{1,0}, \\ \eta &= \eta^{0,0} + \eta^{0,1}. \end{aligned}$$

Jednačine 10.1 i 10.3 u prva dva sistema predstavljaju jednodimenzionalne talasne (hiperbolične) jednačine po z i t , a dobijaju se tako što se prva jednačina u sistemu diferencira po t , a zatim se u nju umetne druga jednačina koja predstavlja jednodimenzionalnu toplotnu (paraboličnu) jednačinu po r i t .

To ćemo pokazati za prvi sistem, dok se drugi dokazuje analogno. U prvobitnom obliku sistem je dat sa

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta^{0,0}}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^R r u_z^{0,0} dr &= 0, \\ \rho_F \frac{\partial u_z^{0,0}}{\partial t} - \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z^{0,0}}{\partial r} \right) &= -\frac{\partial p^{0,0}}{\partial z}, \end{aligned}$$

Diferenciranjem prve jednačine po t dobijamo

$$\frac{\partial^2 \eta^{0,0}}{\partial t^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^R r \frac{\partial u_z^{0,0}}{\partial t} dr = 0,$$

dok se $\partial u_z / \partial t$ može izraziti iz druge jednačine na sledeći način

$$\frac{\partial u_z^{0,0}}{\partial t} = \mu \frac{1}{r \rho_F} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z^{0,0}}{\partial r} \right) - \frac{1}{\rho_F} \frac{\partial p^{0,0}}{\partial z}.$$

Sada prva jednačina dobija oblik

$$\frac{\partial^2 \eta^{0,0}}{\partial t^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^R r \left(\mu \frac{1}{r \rho_F} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z^{0,0}}{\partial r} \right) - \frac{1}{\rho_F} \frac{\partial p^{0,0}}{\partial z} \right) dr = 0.$$

Koristeći pretpostavku iz modela da pritisak $p = p(z, t)$ ne zavisi od r , dobijamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta^{0,0}}{\partial t^2} + \frac{1}{R} \mu \frac{1}{\rho_F} \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial u_z^{0,0}}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^R \frac{r}{\rho_F} \frac{\partial p^{0,0}}{\partial z} dr &= 0, \\ \frac{\partial^2 \eta^{0,0}}{\partial t^2} + \mu \frac{1}{\rho_F} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_z^{0,0}}{\partial r} \Big|_{r=R} \right) - \frac{1}{R \rho_F} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial p^{0,0}}{\partial z} \int_0^R r dr &= 0, \\ \frac{\partial^2 \eta^{0,0}}{\partial t^2} + \frac{\mu}{\rho_F} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_z^{0,0}}{\partial r} \Big|_{r=R} \right) - \frac{R}{2 \rho_F} \frac{\partial^2 p^{0,0}}{\partial z^2} &= 0, \end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati.

Prva dva sistema rešavamo numerički koristeći FEM metod (*Metod konačnih elemenata*) koji koristi aproksimacije ispod navedene i *Matlab* programski paket. Treći sistem se rešava direktno koristeći vrednosti dobijene iz prethodna dva sistema. Mi ćemo ovde predstaviti samo numerički postupak za rešavanje parabolične jednačine iz prvog sistema pa ćemo zbog jednostavnijeg zapisa koristiti samo oznaku u umesto $u_z^{0,0}$, kao i η i p umesto $\eta^{0,0}$ i $p^{0,0}$. Posmatramo funkcije

- $u(r, z, t)$ za $0 \leq r \leq R$, $0 \leq z \leq L$ i $0 \leq t \leq T$,
- $\eta(z, t)$ za $0 \leq z \leq L$ i $0 \leq t \leq T$,
- $p(z, t)$ za $0 \leq z \leq L$ i $0 \leq t \leq T$ koju dobijamo preko funkcije $\eta(z, r)$.

Vršimo diskretizaciju vremena t i prostornih promenljivih r i z na sledeći način

$$\Delta t = \frac{T}{s}, \quad \Delta r = \frac{R}{n+1}, \quad \Delta z = \frac{L}{m+1},$$

gde je

$$\begin{aligned} t_k &= k \Delta t, \quad 0 \leq k \leq s, \\ r_i &= i \Delta r, \quad 0 \leq i \leq n+1, \\ z_j &= j \Delta z, \quad 0 \leq j \leq m+1. \end{aligned}$$

Uvodimo oznake

$$\begin{aligned} u_{i,j}^k &= u(r_i, z_j, t_k), \\ \eta_j^k &= \eta(z_j, t_k), \\ p_j^k &= p(z_j, t_k). \end{aligned}$$

Koristimo sledeće aproksimacije izvoda⁸

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_{i,j}^k}{\partial t} &= \frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\Delta t} + o(\Delta t), \\
\frac{\partial^2 u_{i,j}^k}{\partial t^2} &= \frac{u_{i,j}^{k+1} - 2u_{i,j}^k + u_{i,j}^{k-1}}{\Delta t^2} + o(\Delta t^2), \\
\frac{\partial u_{i,j}^k}{\partial r} &= \frac{u_{i,j}^k - u_{i-1,j}^k}{\Delta r} + o(\Delta r), \\
\frac{\partial^2 u_{i,j}^k}{\partial r^2} &= \frac{u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k}{\Delta r^2} + o(\Delta r^2), \\
\frac{\partial \eta_j^k}{\partial t} &= \frac{\eta_j^{k+1} - \eta_j^k}{\Delta t} + o(\Delta t), \\
\frac{\partial \eta_j^k}{\partial t^2} &= \frac{\eta_j^{k+1} - 2\eta_j^k + \eta_j^{k-1}}{\Delta t^2} + o(\Delta t^2), \\
\frac{\partial \eta_j^k}{\partial z} &= \frac{\eta_j^k - \eta_{j-1}^k}{\Delta z} + o(\Delta z), \\
\frac{\partial \eta_j^k}{\partial z^2} &= \frac{\eta_{j+1}^k - 2\eta_j^k + \eta_{j-1}^k}{\Delta z^2} + o(\Delta z^2).
\end{aligned}$$

POSTUPAK:

U $(k+1)$ – oj iteraciji, se najpre jednačina

$$\rho_F \frac{\partial u_z^{0,0}}{\partial t} - \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z^{0,0}}{\partial r} \right) = - \frac{\partial p^{0,0}}{\partial z},$$

rešava, gde se izračunava $u_z^{0,0}$ po r i t za svako j , $0 \leq j \leq m+1$, koristeći vrednosti za η_j^k iz prethodne iteracije. Zatim se iz jednačine

$$\frac{\partial^2 \eta^{0,0}}{\partial t^2} - \frac{R}{2\rho_F} \frac{\partial^2 p^{0,0}}{\partial z^2} = - \frac{\mu}{\rho_F} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_z^{0,0}}{\partial r} \Big|_{r=R} \right),$$

traži $\eta^{0,0}$ po z i t , gde se koriste vrednosti za

$$\frac{\partial u_z^{0,0}}{\partial r} \Big|_{r=R}$$

dobijene u istoj toj iteraciji.

Toplotnu PDJ diskretizujemo na sledeći način

$$\frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\Delta t} = \frac{\mu}{\rho_F} \frac{u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k}{\Delta r^2} + \frac{\mu}{r_i \rho_F} \frac{u_{i,j}^k - u_{i-1,j}^k}{\Delta r} - \frac{1}{\rho_F} \frac{p_j^{k-1} - p_{j-1}^{k-1}}{\Delta z},$$

⁸Korišćenje navedenih aproksimacija nije jedini izbor i isključivo je izbor autora ovog rada.

gde važi

$$p_j^k = A\eta_j^k + B\frac{\eta_j^{k+1} - \eta_j^k}{\Delta t},$$

gde je

$$A = \frac{Eh}{(1 - \sigma^2)R^2} + \frac{p_{ref}}{R}, \quad B = \frac{hC_v}{R^2},$$

pri čemu su vrednosti parametara date u Tabeli 10.1.

Sledi

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{k+1} = & u_{i-1,j}^k \frac{\mu\Delta t}{\rho_F\Delta r^2} \left(1 - \frac{1}{i}\right) + u_{i,j}^k \left[1 + \frac{\Delta t\mu}{\rho_F\Delta r^2} \left(\frac{1}{i} - 2\right)\right] \\ & + u_{i+1,j}^k \frac{\mu\Delta t}{\rho_F\Delta r^2} - \frac{\Delta t}{\rho_F} \frac{p_j^{k-1} - p_{j-1}^{k-1}}{\Delta z}, \end{aligned}$$

pri čemu koristimo početne uslove

$$u_{i,j}^0 = 0, \quad \text{za sve } 0 \leq i \leq n+1 \text{ i } 0 \leq j \leq m+1$$

i granične uslove

$$u_{0,j}^k = a, \quad u_{n+1,j}^k = 0, \quad \text{za sve } 0 \leq j \leq m+1 \text{ i } 0 \leq k \leq s+1, \quad a < \infty.$$

Dalje, kreiramo tridijagonalnu matricu

$$S_1 = [s(i, j)]_{n \times n}$$

sa elementima na glavnoj dijagonali koji su jednaki

$$s(i, i) = 1 + \frac{\Delta t\mu}{\rho_F\Delta r^2} \left(\frac{1}{i} - 2\right),$$

dok su elementi ispod i iznad glavne dijagonale jednaki

$$s(i, i-1) = \frac{\mu\Delta t}{\rho_F\Delta r^2} \left(1 - \frac{1}{i}\right), \quad s(i, i+1) = \frac{\mu\Delta t}{\rho_F\Delta r^2}.$$

Vrednosti $u_{i,j}^{k+1}$ za sve $0 \leq i \leq n+1$ dobijamo na sledeći način,

$$U_j^{k+1} = S_1 U_j^k - \frac{\Delta t}{\rho_F} P_j^{k-1}, \quad 0 \leq j \leq m+1,$$

gde je

$$U_j^{k+1} = \begin{bmatrix} u_{1,j}^{k+1} \\ u_{2,j}^{k+1} \\ \vdots \\ u_{n,j}^{k+1} \end{bmatrix}, \quad U_j^k = \begin{bmatrix} u_{1,j}^k \\ u_{2,j}^k \\ \vdots \\ u_{n,j}^k \end{bmatrix},$$

dok je P_j^{k-1} vektor dimenzije $n \times 1$ sa svim elementima jednakim

$$\frac{p_j^{k-1} - p_{j-1}^{k-1}}{\Delta z}.$$

Pri tome treba voditi računa o graničnim uslovima koji se moraju dodati u okviru još jednog vektora u vidu prvog i poslednjeg člana tog vektora, ali će u ovoj jednačini ti članovi biti jednaki 0 pa nema potrebe dodavati još jedan vektor. Treba napomenuti da, iako su svi elementi tog dodatnog vektora koji uzima u obzir granične uslove, jednaki 0, to ne mora da znači da je vrednost brzine na krajevima jednaka nuli. Takva situacija objašnjava uslov da je $u|_{r=0}$ ograničeno, jer zbog člana koji bi trebao da stoji uz tu vrednost, a jednak je 0, ta vrednost ni ne figuriše u numeričkom rešavanju ove jednačine.

Hiperbolična jednačina se rešava analognim postupkom, gde se koriste vrednosti $u_{i,j}^{k+1}$ dobijene u istoj toj iteraciji.

Sistem smo numerički rešili koristeći podatke date u Tabeli 10.1.

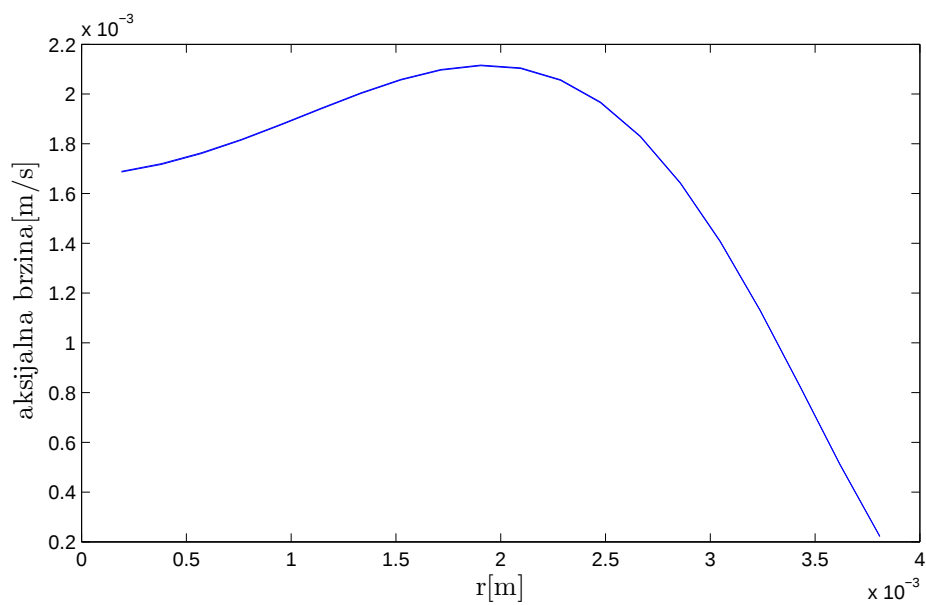
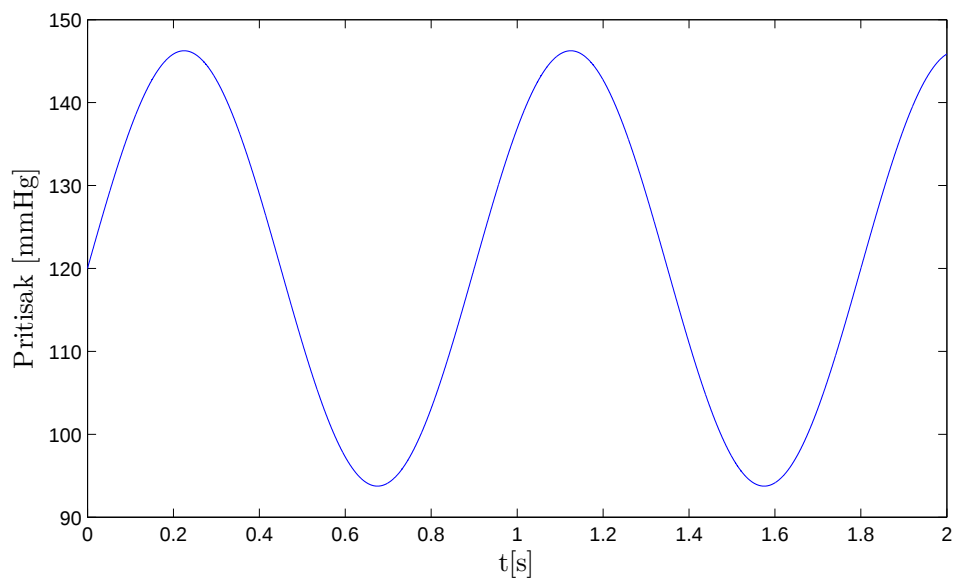
Tabela 10.1: PODACI KORIŠĆENI U ALGORITMU

Naziv	Oznaka	Vrednost (Jedinica)
Dužina referentnog kanala	L	0.13 (m)
Poluprečnik referentnog kanala	R	0.004 (m)
Debljina tankog elastičnog sloja	h	0.001 (m)
Gustina fluida	ρ_F	1050 (kg/m ³)
Viskoznost	μ	$3.5 \cdot 10^{-3}$ (kg/m s)
Jangov modul elastičnosti	E	$1.3 \cdot 10^6$ (Pa)
Poasonov odnos	σ	0.35
Viskozna konstanta	C_v	10^3 (Pa)
Ulazni pritisak	P_0	0 (Pa)
Izlazni pritisak	P_L	$3500 \sin(2\pi t/T_1)$ (Pa)
Referentni pritisak	p_{ref}	120 (mmHg)
Trajanje srčanog ciklusa	T_1	0.9 (s)

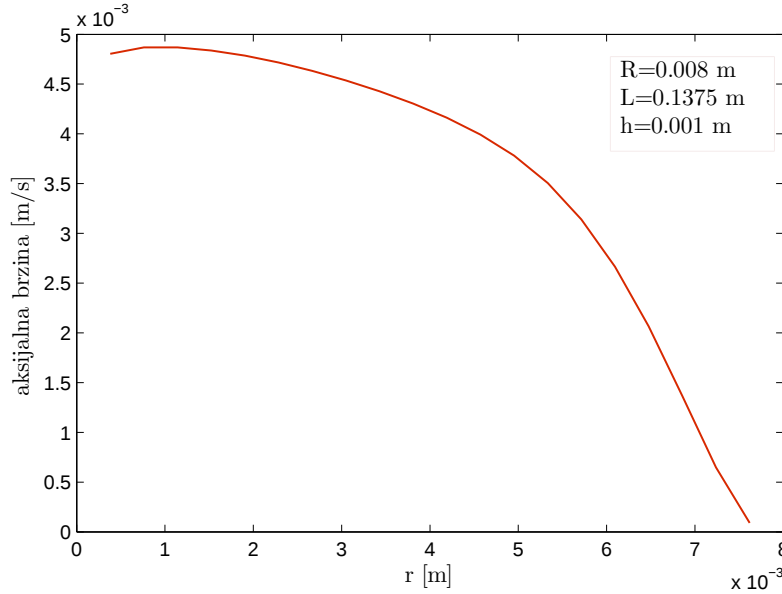
Pritom, koristili smo sledeće korake diskretizacije:

$$\begin{aligned}\Delta r &= 1.9 \cdot 10^{-4}, \\ \Delta z &= 3.2 \cdot 10^{-3}, \\ \Delta t &= 10^{-3}.\end{aligned}$$

Dobijeni rezultati predstavljeni su na graficima ispod.

Slika 10.1: Promena aksijalne brzine u zavisnosti od r , za $t = 2\text{ s}$ 

Slika 10.2: Pritisak na izlazu iz arterije



Slika 10.3: Aksijalna brzina za model elastične membrane

Na Slici 10.1 prikazana je promena aksijalne komponentne brzine $u_z(r)$ u zavisnosti od udaljenosti od zida arterije. Za $r = 0.004\text{ m}$, što odgovara položaju uz sam zid arterije, brzina je skoro jednaka nuli, jer se uz sam zid arterije čestice krvi praktično lepe za zid arterije i njihova brzina je približno jednaka brzini zida. Brzina je najveća oko ose simetrije kada je $r = 0$, jer je tada sila adhezije koja deluje na krv najslabija, što omogućava brži protok krvi. Na Slici 10.2 prikazana je promena pritiska na izlazu iz arterije, pri čemu je pritisak dat u mmHg ⁹. Može se videti da je kriva pritiska periodična i da period odgovara jednom srčanom ciklusu (otkucaju) koji je u našem primeru jednak $T_1 = 0.9\text{ s}$.

U slučaju modela sa elastičnom membranom za vrednosti parametara $R = 0.008\text{ m}$, $L = 0.1375\text{ m}$, $h = 0.001\text{ m}$ i viskozne konstante $C_v = 0$, pri čemu vrednosti ostalih parametara odgovaraju vrednostima datim u Tabeli 10.1, mogu se uočiti razlike u aksijalnoj brzini protoka (vidi Sliku 10.3).

⁹ mmHg je jedinica za merenje pritiska i važi $1\text{mmHg} \approx 133.332\text{ Pa}$

11 2D FSI problem sa višeslojnom strukturom

U narednom delu rada, predstavimo FSI problem sa višeslojnom strukturom u $\mathbf{R}^2$ koji je predstavljen u podpoglavlju 8.2 i zasniva se na modelu iz [4]. Za dati problem je u [11] dokazano postojanje slabog rešenja što znači da se problem može rešiti numerički. U ovom poglavlju ćemo predstaviti numerički algoritam za njegovo rešavanje.

Definicija problema

Posmatramo protok nestišljivog, viskoznog fluida kroz dvodimenzionalni kanal oblika cilindra koji je obložen sa dva sloja zida koji je podložen deformaciji (tankim i debelim slojem). Pritom, tanki sloj strukture ima ulogu interfejsa sa masom između fluida i strukture. Kao i ranije, posmatraćemo samo gornju polovinu simetričnog domena. U Tabeli 11.2 su definisane veličine korišćene u modelu, a u Tabeli 11.3 osnovni parametri gde su z i r Dekartove koordinate.

Tabela 11.1: DEFINICIJE DOMENA

Referentni domen za fluid	$\Omega_F = \{(z, r) 0 < z < L, 0 < r < R\}$
Deformisan domen za fluid	$\Omega_F(t) = \{(z, r) 0 < z < L, 0 < r < R + \eta(t, z)\}$
Referentni domen za strukturu	$\Omega_S = \{(z, r) 0 < z < L, R < r < R + H\}$
Referentna bočna granica	$\Gamma = \{(z, r) z \in (0, L), r = R\}$
Bočna granica	$\Gamma(t) = \{(z, r) z \in (0, L), r = R + \eta(z, t)\}$
Ulazna granica	$\Gamma_{in} = \{0\} \times (0, R)$
Izlazna granica	$\Gamma_{out} = \{L\} \times (0, R)$
Spoljašnja granica	$\Gamma_{ext} = \{R + H\} \times (0, L)$

Protok nestišljivog, viskoznog fluida modeliramo uz pomoć dvodimenzionalnih Navije-Stoksovih jednačina

$$\left. \begin{aligned} \rho_F(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) &= \operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}, p) \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ na } \Omega_F(t), t \in (0, T).$$

Spoljašnja granica fluida je ograničena sa tankim zidom podložnim deformaciji, za koji ćemo pretpostaviti da je linearno elastičan, pa ćemo **elastodinamiku tankog zida** modelirati uz pomoć Koiterovog modela za elastičnu membranu koji je dat

sa

$$\rho_K h \frac{\partial^2 \eta_z}{\partial t^2} - C_2 \frac{\partial \eta_r}{\partial z} - C_1 \frac{\partial \eta_z}{\partial z^2} = f_z, \quad \text{na } \Gamma \times (0, T), \quad (11.1)$$

$$\rho_K h \frac{\partial^2 \eta_r}{\partial t^2} + C_0 \eta_r + C_2 \frac{\partial \eta_z}{\partial z} = f_r, \quad \text{na } \Gamma \times (0, T), \quad (11.2)$$

gde je

$$C_0 = \frac{hE}{R^2(1-\sigma^2)}, \quad C_1 = \frac{hE}{1-\sigma^2}, \quad C_2 = \frac{hE\sigma}{R(1-\sigma^2)}.$$

Elastodinamiku debelog zida modeliramo uz pomoć jednačina linearne elastičnosti kojima je za razliku od jednačine 8.11 dodat član $\gamma \mathbf{d}$ kako bi se uzeo u obzir napon koji se javlja u zidovima krvnog suda kao posledica suprotstavljanja pritisku koji deluje na zid krvnog suda i čiji efekti su izgubljeni u prelazu iz 3D u 2D model

$$\rho_S \frac{\partial^2 \mathbf{d}}{\partial t^2} + \gamma \mathbf{d} = \operatorname{div} \mathbf{S}(\mathbf{d}), \quad \text{na } \Omega_S \times (0, T).$$

Tabela 11.2: PREGLED OSNOVNIH VELIČINA

Brzina fluida	$\mathbf{u} = (u_z, u_r)$
Pritisak fluida	$p = (p_z, p_r)$
Košijev tenzor napona za njutnovske fluide	$\sigma(\mathbf{u}, p) = -p\mathbf{I} + 2\mu_F \mathbf{D}(\mathbf{u})$
Simetrični gradijent funkcije $\mathbf{u}$	$\mathbf{D}(\mathbf{u}) = (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})/2$
Prvi Piola-Kirhofov tenzor napona	$\mathbf{S}(\mathbf{d}) = 2\mu \mathbf{D}(\mathbf{d}) + \lambda(\operatorname{div} \mathbf{d})\mathbf{I}$
Deformacija tanke strukture	$\eta(z, t) = (\eta_z(z, t), \eta_r(z, t))$
Deformacija debele strukture	$\mathbf{d} = (d_z, d_r)$
Sila	$f = (f_z, f_r)$
Spoljašnji vektor normalan na Γ_{in}	$\mathbf{n}_{in}$
Spoljašnji vektor normalan na Γ_{out}	$\mathbf{n}_{out}$
Spoljašnji vektor normalan na Γ_{ext}	$\mathbf{n}_{ext}$

Granični uslovi su dati sa

$$\begin{aligned} \sigma \mathbf{n}_{in} &= -p_{in}(t) \mathbf{n}_{in} & \text{na } \Gamma_{in} \times (0, T), \\ \sigma \mathbf{n}_{out} &= -p_{out}(t) \mathbf{n}_{out} & \text{na } \Gamma_{out} \times (0, T), \end{aligned}$$

Tabela 11.3: PREGLED PARAMETARA

Dužina referentnog kanala	L
Širina referentnog kanala	$2R$
Debljina tankog elastičnog sloja	h
Debljina debljeg elastičnog sloja	H
Gustina fluida	ρ_F
Viskoznost fluida	μ_F
Gustina tanke strukture	ρ_K
Gustina debele strukture	ρ_S
Lameove konstante	λ i μ
Jangov modul elastičnosti	E
Poasonov odnos	σ

$$\frac{\partial u_z}{\partial r}(z, 0, t) = 0, \quad u_r(z, 0, t) = 0, \quad \text{za } r = 0, \quad \text{na } (0, L) \times (0, T),$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(0, r, t) &= \mathbf{d}(L, r, t) = 0 && \text{na } [R, R + H] \times (0, T), \\ \mathbf{S}\mathbf{n}_{ext} \cdot \mathbf{n}_{ext} &= 0 && \text{na } \Gamma_{ext} \times (0, T) \\ d_z &= 0 && \text{na } \Gamma_{ext} \times (0, T) \end{aligned}$$

Početni uslovi su dati sa

$$\mathbf{u} = 0, \quad \eta = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0, \quad \mathbf{d} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} = 0, \quad \text{za } t = 0.$$

Interakciju između fluida i višeslojnog omotača opisujemo pomoću kinematičkih i dinamičkih graničnih uslova:

Neprekidnost brzine:

$$\mathbf{u}(z + \eta_z(z, t), R + \eta_r(z, t), t) = \frac{\partial \eta}{\partial t}(z, t), \quad \text{na } (0, L) \times (0, T),$$

Neprekidnost deformacije:

$$\eta(z, t) = \mathbf{d}(z, R, t), \quad \text{na } (0, L) \times (0, T).$$

Balans sila:

$$f = \mathbf{S}\mathbf{e}_r|_{\Gamma} - \mathbf{J}\sigma\mathbf{n}|_{\Gamma(t)} \quad \text{na } (0, L) \times (0, T),$$

gde je sila $f = (f_z, f_r)$ data jednačinama 11.1 i 11.2, J je Jakobijan transformacije iz Ojlerovog pristupa u Lagranžov, $\mathbf{n}$ je spoljašnji vektor normalan na deformisan domen fluida, a $\mathbf{e}_r$ vertikalni jedinični vektor.

ALE Mapiranje

Koristićemo ALE mapiranje, koje je definisano u podpoglavlju 2.3, kako bismo prevazišli problem koji imamo zbog domena koji nije fiksni, već se menja sa vremenom tj. deformiše se i kako bismo rešili problem koji imamo sa prvim izvodom koji nije definisan u slučaju kada domen nije fiksni. ALE mapiranje $\mathcal{A}$ mapira referentni domen Ω_F na postojeći domen $\Omega_F(t)$ na sledeći način

$$\begin{aligned}\mathcal{A} : \Omega_F &\rightarrow \Omega_F(t) \subset \mathbf{R}^2, \\ \mathbf{x} &= \mathcal{A}(\mathbf{x}) \in \Omega_F(t), \text{ za } \mathbf{x} \in \Omega_F.\end{aligned}$$

ALE mapiranje ćemo definisati kao harmoničko proširenje granice (vidi [4]) na sledeći način

$$\begin{aligned}\Delta \mathcal{A} &= 0, \text{ u } \Omega_F, \\ \mathcal{A}|_{\Gamma} &= \eta, \\ \mathcal{A}|_{\partial\Omega_F/\Gamma} &= 0.\end{aligned}$$

Da bismo Navije-Stoksov problem zapisali u ALE formulaciji koristimo pravilo za izvod složene funkcije

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} |_{\Omega_F} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{w} = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t},$$

pri čemu $\mathbf{w}$ predstavlja brzinu domena. Sada Navije-Stoksove jednačine imaju oblik

$$\begin{aligned}\rho_F \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} |_{\Omega_F} + (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \nabla \mathbf{u} \right) &= \operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}, p), \text{ na } \Omega_F(t) \times (0, T), \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \text{ na } \Omega_F(t) \times (0, T).\end{aligned}$$

Problem koji opisuje strukture ostaje isti, jer su jednačine definisane na referentnom, fiksnom domenu, Ω_S i Γ .

Šema razdvajanja

Za rešavanje sistema numerički nam je potrebna šema razdvajanja, koju ćemo sada predstaviti. Najpre ćemo problem napisati kao sistem prvog reda u vremenu:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + A(\Phi) &= 0, \text{ u } (0, T), \\ \Phi(0) &= \Phi_0,\end{aligned}$$

gde je A operator iz Hilbertovog prostora u sebe koji možemo razdvojiti sa $A = A_1 + A_2$ ili uopšteno sa

$$A = \sum_{i=1}^I A_i.$$

Šemu primenjujemo tako što uzimamo $\Delta t > 0$ kao korak diskretizacije. Pritom, uvodimo sledeću notifikaciju

$$\begin{aligned} t^n &= n\Delta t, \\ \Phi^n &= \Phi(t^n), \\ \Phi^0 &= \Phi_0. \end{aligned}$$

Zatim, za $n \geq 0$ izračunavamo Φ^{n+1} rešavajući

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} + A_i(\Phi_i) &= 0, \text{ u } (t^n, t^{n+1}), \\ \Phi_i(t^n) &= \Phi^{n+(i-1)/I}, \end{aligned}$$

nakon čega uzimamo $\Phi^{n+i/I} = \Phi_i(t^{n+1})$ za $i = 1, \dots, I$. Vrednost rešenja i -tog problema u $t = t^{n+1}$ uzimamo kao početnu vrednost za $(i+1)$ -i problem na (t^n, t^{n+1}) . Ovakva šema primenjena na FSI problem bi obuhvatala predstavljanje operatora A kao sumu dva operatora koji su dati sa

- A_1 : Problem vezan za debeo sloj strukture
- A_2 : Problem fluida sa odgovarajućim graničnim uslovima.

Takva šema funkcioniše tako što se prvo rešava problem strukture na intervalu (t^n, t^{n+1}) sa odgovarajućim početnim uslovima dobijenim iz prethodnog koraka. Zatim se rešava problem vezan za fluid na istom intervalu (t^n, t^{n+1}) ali sa početnim podacima upravo dobijenim u prvom koraku.

Tačnost šeme se može dodatno poboljšati razdvajanjem paraboličnog od hiperboličnog dela FSI problema, razdvajanjem pod-problema A_2 na dva problema, problem koji ne obuhvata rasipanje i na Stoksov problem, nezavisan od vremena. Tada operator A pišemo kao $A = A_1 + A_2(a) + A_2(b)$ tako da šema razdvajanja obuhvata tri koraka

- A_1 : Pod-problem vezan za strukturu
- $A_2(a)$: Stoksov problem za fluide, nezavisan od vremena
- $A_2(b)$: Fluid i ALE pod-problem

Međutim, nije svako razdvajanje takvo da će dovesti do stabilne, konvergentne šeme. Kao jedan od načina da se poboljša tačnost, koristi se kinematička β -šema povezanosti (u daljem tekstu β -šema) koja se bazira na još jednom razdvajanju:

$$\sigma \mathbf{n} = \sigma \mathbf{n} + \beta p \mathbf{n} - \beta p \mathbf{n}, \beta \in [0, 1].$$

Prvi deo napona, $I = \sigma \mathbf{n} + \beta p \mathbf{n}$ posmatramo u okviru pod - problema vezanog za fluid, dok drugi deo, $II = -\beta p \mathbf{n}$ posmatramo kao deo problema strukture. U [7] je pokazano da kako β raste od 0 do 1 i tačnost šeme raste. Kako bi se primenila šema FSI sistem moramo napisati kao sistem prvog reda, a pre toga ćemo uvesti sledeću notaciju:

- $\mathbf{v}_r := \mathbf{u}|_{\Gamma(t)}$, iz čega sledi da za $\mathbf{v}$ definisano na Γ važi $\partial_t \eta = \mathbf{v} = (v_z, v_r)$ i $\mathbf{v}$ predstavlja brzinu tankog sloja strukture
- $\mathbf{V} := \partial \mathbf{d} / \partial t$, gde $\mathbf{V}$ predstavlja brzinu debelog sloja strukture.

Šema je data sa:

PROBLEM A_1 : Elastodinamički problem strukture

U ovom koraku se rešava problem debelog sloja strukture zajedno sa elastodinamikom membrane i koristi se deo $II - \beta p \mathbf{n}$ dobijen iz β -šeme pri čemu koristimo pritisak p dobijen u prethodnom koraku n iz dela problema vezanog za fluid.

U ovom koraku se brzina fluida $\mathbf{u}$ i pritisak fluida p ne menjaju tako da važi

$$\mathbf{u}^{n+1/3} = \mathbf{u}^n, p^{n+1/3} = p^n.$$

Problem vezan za strukturu glasi: Pronaći $\eta, \mathbf{d}, \mathbf{v}$ i $\mathbf{V}$ tako da za $t \in (t^n, t^{n+1})$

- na $\Omega_S \times (t^n, t^{n+1})$ važi

$$\begin{aligned} \rho_S \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \gamma \mathbf{d} &= \operatorname{div} \mathbf{S}(\mathbf{d}), \\ \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} &= \mathbf{V}, \end{aligned}$$

- na $\Gamma \times (t^n, t^{n+1})$ važi

$$\begin{aligned}\rho_K h \frac{\partial v_z}{\partial t} - C_2 \frac{\partial \eta_r}{\partial z} - C_1 \frac{\partial^2 \eta_z}{\partial z^2} + \mathbf{S} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_z &= J^n \beta p^n \mathbf{n}|_{\Gamma(t)} \cdot \mathbf{e}_z, \\ \rho_K h \frac{\partial v_r}{\partial t} + C_0 \eta_r + C_2 \frac{\partial \eta_z}{\partial z} + \mathbf{S} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r &= J^n \beta p^n \mathbf{n}|_{\Gamma(t)} \cdot \mathbf{e}_r, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= \mathbf{v}, \\ \eta &= \mathbf{d}|_{\Gamma}, \\ \mathbf{V}|_{\Gamma} &= \mathbf{v},\end{aligned}$$

- i da su zadovoljeni granični uslovi na $\Gamma_{ext} \times (t^n, t^{n+1})$

$$\begin{aligned}\mathbf{d}|_{z=0} = \mathbf{d}|_{z=L} = 0 \text{ i } d_z &= 0, \\ \mathbf{n}_{ext}^s \cdot \mathbf{S} \mathbf{n}_{ext}^s &= 0.\end{aligned}$$

- Početni uslovi su dati sa

$$\begin{aligned}\mathbf{d}(t^n) &= \mathbf{d}^n, & \eta(t^n) &= \eta^n, \\ \mathbf{v}(t^n) &= \mathbf{v}^n, & \mathbf{V}(t^n) &= \mathbf{V}^n.\end{aligned}$$

Nakon rešavanja postavljamo

$$\mathbf{d}^{n+1/3} = \mathbf{d}(t^{n+1}), \eta^{n+1/3} = \eta(t^{n+1}), \mathbf{v}^{n+1/3} = \mathbf{v}(t^{n+1}), \mathbf{V}^{n+1/3} = \mathbf{V}(t^{n+1}).$$

Nakon što je izračunata nova pozicija za strukturu, kao i domen fluida, računamo ALE mapiranje $\mathcal{A}^{n+1}$ na sledeći način

$$\begin{aligned}\Delta \mathcal{A}^{n+1} &= 0, \text{ na } \Omega_F, \\ \mathcal{A}^{n+1}|_{\Gamma} &= \eta^{n+1}, \\ \mathcal{A}^{n+1}|_{\Omega_F/\Gamma} &= 0.\end{aligned}$$

Nakon toga možemo da izračunamo brzinu domena $\mathbf{w}$

$$\mathbf{w}^{n+1} = \frac{\partial \mathcal{A}^{n+1}}{\partial t}.$$

PROBLEM $A_2(a)$: Stoksov problem

U ovom koraku rešavamo Stoksov problem na (t^n, t^{n+1}) koji ne zavisi od vremena. Problem rešavamo na fiksnom domenu $\Omega_F(t^n)$ koji je određen preko pozicije strukture u (t^{n-1}, t^n) . Sada se pozicija strukture, kao i brzina debelog sloja strukture ne menjaju tako da važi

$$\eta^{n+2/3} = \eta^{n+1/3}, \mathbf{d}^{n+2/3} = \mathbf{d}^{n+1/3}, \mathbf{V}^{n+2/3} = \mathbf{V}^{n+1/3}.$$

Koristimo pritisak p^n dobijen u (t^{n-1}, t^n) .

Stoksov problem tada glasi: *Pronaći $\mathbf{u}, p$ i $\mathbf{v}$ tako da za $t \in (t^n, t^{n+1})$*

- na $\Omega_F(t^n) \times (t^n, t^{n+1})$ važi

$$\begin{aligned} \rho_F \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} |_{\Omega_F} &= \operatorname{div} \sigma, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \end{aligned}$$

- na $\Gamma \times (t^n, t^{n+1})$ važi

$$\begin{aligned} \rho_K h \frac{\partial(\mathbf{u}|_{\Gamma(t)})}{\partial t} + \mathbf{J}(\sigma \mathbf{n}|_{\Gamma(t)} + \beta p^n \mathbf{n}|_{\Gamma(t)}) &= 0, \\ \mathbf{v} &= \mathbf{u}|_{\Gamma(t)}, \end{aligned}$$

- i da su zadovoljeni granični uslovi

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_z}{\partial r}(z, 0, t) &= u_r(z, 0, t) = 0, & \text{na } (0, L), \\ \mathbf{u}(0, R, t) &= \mathbf{u}(L, R, t) = 0, \\ \sigma \mathbf{n}_{in} &= -p_{in}(t) \mathbf{n}_{in}, & \text{na } \Gamma_{in}, \\ \sigma \mathbf{n}_{out} &= -p_{out}(t) \mathbf{n}_{out}, & \text{na } \Gamma_{out}. \end{aligned}$$

- Početni uslovi su dati sa

$$\mathbf{u}(t^n) = \mathbf{u}^n, \mathbf{v}(t^n) = \mathbf{v}^{n+1/3}.$$

Nakon rešavanja postavljamo vrednosti na

$$\mathbf{u}^{n+2/3} = \mathbf{u}(t^{n+1}), p^{n+2/3} = p(t^{n+1}), \mathbf{v}^{n+2/3} = \mathbf{v}(t^{n+1}).$$

PROBLEM $A_2(b)$: Fluid i ALE problem

Sada rešavamo problem definisan na fiksnom domenu $\Omega(t^n)$, gde koristimo brzinu domenu izračunatu u problemu A_1 . U ovom koraku se ne menjaju deformacija strukture, brzina debelog sloja strukture, brzina tankog sloja strukture i pritisak pa važi

$$\eta^{n+1} = \eta^{n+2/3}, \mathbf{d}^{n+1} = \mathbf{d}^{n+2/3}, \mathbf{V}^{n+1} = \mathbf{V}^{n+2/3}, \mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^{n+2/3}, p^{n+1} = p^{n+2/3}.$$

Problem sada glasi: *Pronađi $\mathbf{u}$ takvo da za $t \in (t^n, t^{n+1})$ važi*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\Omega_F} + (\mathbf{u}^{n+2/3} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla \mathbf{u} &= 0, & \text{na } \Omega_F \times (t^n, t^{n+1}) \\ \mathbf{u} &= \mathbf{v}^{n+2/3}, & \text{na } \Gamma \times (t^n, t^{n+1}), \end{aligned}$$

sa ulaznim i izlaznim graničnim uslovima

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}^{n+2/3} \text{ na } \Gamma^{n+2/3} \\ \Gamma^{n+2/3} &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{x} \in \partial\Omega_F(t^n), (\mathbf{u}^{n+2/3} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \mathbf{n} < 0\} \end{aligned}$$

i početnim uslovom $\mathbf{u}(t^n) = \mathbf{u}^{n+2/3}$. Nakon izračunavanja postavljamo

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}(t^{n+1}).$$

Nakon rešavanja problema A_1 , $A_2(a)$, i $A_2(b)$ za $t \in (t^n, t^{n+1})$ povećavamo n za 1 ($n = n + 1$) i vraćamo se ponovo na problem A_1 .

11.1 Primer

Posmatraćemo uprošćen višeslojan FSI problem koji zadovoljava sledeće pretpostavke

1. Problem vezan za fluid je definisan na fiksnom, referentnom domenu poluprečnika R i dužine L pri čemu pretpostavljamo da je veza između fluida i strukture linearna.
2. Ulazni pritisak p_{in} je konstantan, a za izlazni važi $p_{out} = 0$ što znači da je gradijent pritiska konstantan.
3. Samo radijalna komponenta deformacije tankog i debelog sloja strukture je različita od nule što znači da će model tankog strukturalnog sloja sada imati oblik:

$$\rho_K h \frac{\partial^2 \eta_r}{\partial t^2} + C_0 \eta_r = f_r,$$

a debelog strukturalnog sloja oblik:

$$\rho_S \frac{\partial^2 d_r}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 d_r}{\partial z^2} + (\mu + \lambda) \frac{\partial^2 d_r}{\partial r^2}.$$

Uslovi povezanosti i fluida i višeslojne strukture su dati sa

$$\begin{aligned} f_r &= p + (\lambda + \mu) \frac{\partial d_r}{\partial r}, & \text{na } \Gamma \times (0, T), \\ \frac{\partial \eta_r}{\partial t} &= u_r, & \text{na } \Gamma \times (0, T), \\ \eta_r &= U_r, & \text{na } \Gamma \times (0, T), \end{aligned}$$

Za razliku od većine, ovaj problem se može rešiti analitički. Ukoliko posmatramo protok krvi kroz fiksni cilindar, konstantna promena pritiska je data preko Zakona o laminarnom protoku koji je definisan u podpoglavlju 6.1

$$u_z^e(z, r) = u_z^e(r) = \frac{p_{in} - p_{out}}{2\mu_F L} (R^2 - r^2), \quad u_r^e = 0,$$

a pritisak fluida je linearan unutar kanala

$$p^e(z, r) = p^e(z) = \frac{p_{out}z + p_{in}(L - z)}{L}, \quad z \in (0, L), \quad r \in (0, R).$$

Radijalne deformacije tankog i debelog strukturalnog sloja su date sa

$$\eta_r^e(z) = \frac{p^e(z)}{C_0}, \quad d_r^e(z, r) = d_r^e(z) = \eta_r^e(z).$$

Na osnovu parametara datih u tabeli skiciran je grafik (Slika 11.1) koji prikazuje promenu aksijalne brzine u_z^e u zavisnosti od r gde se jasno vidi da je na $r = 0$ brzina najveća, a što se više približavamo zidu arterije, brzina se smanjuje.

Dati problem se može rešiti numerički koristeći sledeće

početne uslove ($t = 0$)

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= 0, \\ p &= p_{out}, \\ \eta_r &= 0, \\ d_r &= 0 \end{aligned}$$

i granične uslove

$$\begin{aligned} \eta_r|_{z=0} &= d_r|_{z=0} = \frac{p_{in}}{C_0}, \quad \forall t > 0 \\ \eta_r|_{z=L} &= d_r|_{z=L} = \frac{p_{out}}{C_0} = 0, \quad \forall t > 0, \end{aligned}$$

Tabela 11.4: PARAMETRI KORIŠĆENI U PRIMERU

Naziv	Oznaka	Vrednost (Jedinica)
Dužina referentnog kanala	L	6 (cm)
Poluprečnik referentnog kanala	R	0.5 (cm)
Debljina tankog elastičnog sloja	h	0.02 (cm)
Debljina debljeg elastičnog sloja	H	0.1 (cm)
Gustina fluida	ρ_F	1 (g/cm ³)
Dinamička viskoznost	μ_F	0.35 (g/cm s)
Gustina tanke strukture	ρ_K	1.1 (g/cm ³)
Lame-ova konstanta	λ_K	$4.29 \cdot 10^6$ (dyne/cm ³)
Lame-ova konstanta	μ_K	$1.07 \cdot 10^6$ (dyne/cm ³)
Gustina debele strukture	ρ_S	1.1 (g/cm ³)
Lame-ova konstanta	λ_S	$4.29 \cdot 10^6$ (dyne/cm ³)
Lame-ova konstanta	μ_S	$1.07 \cdot 10^6$ (dyne/cm ³)
Jangov modul elastičnosti	E	10^5 (Pa)
Poasonov odnos	σ	0.35
Ulazni pritisak	p_{in}	250 (dyne/cm ²)
Izlazni pritisak	p_{out}	0 (dyne/cm ²)

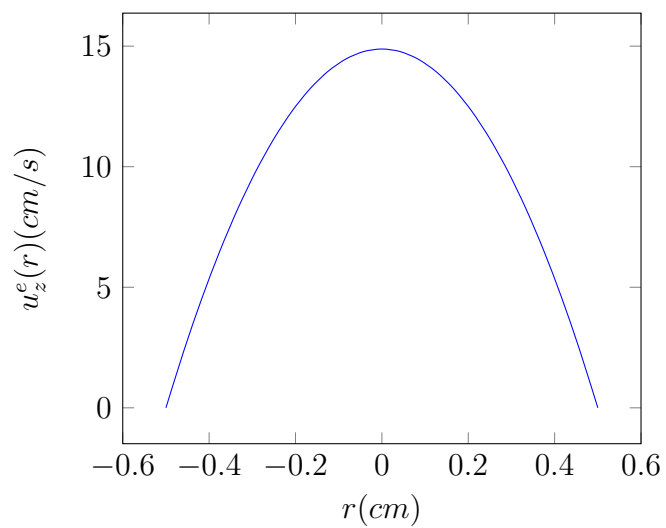
gde je

$$C_0 = \frac{hE}{R^2(1 - \sigma^2)},$$

i konstanta E predstavlja Jangov modul elastičnosti, a σ Poasonov odnos.

U [4] je na navedeni problem primenjena numerička šema za $\beta = 1$, sa korakom $\Delta t = 10^{-5}$ i korišćene su vrednosti parametara datih u Tabeli 11.4. Dobijeni rezultati su upoređeni sa rešenjem datim preko Puazejevog zakona. Dostignuta je tačnost manja od 0.08% tj. dobijene su sledeće relativne greške

$$\begin{aligned} \frac{\|u^e - u\|_{L^2(\Omega_F)}}{\|u^e\|_{L^2(\Omega_F)}} &= 7.78 \cdot 10^{-4} \\ \frac{\|p^e - u\|_{L^2(\Omega_F)}}{\|p^e\|_{L^2(\Omega_F)}} &= 1.17 \cdot 10^{-4} \\ \frac{\|\eta_r^e - \eta_r\|_{L^2(0,L)}}{\|u^e\|_{L^2(0,L)}} &= 3.82 \cdot 10^{-5} \\ \frac{\|d_r^e - d_r\|_{L^2(\Omega_S)}}{\|d_r^e\|_{L^2(\Omega_S)}} &= 3.82 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$



Slika 11.1: Zavisnost aksijalne brzine $u_z^e(r)$ od r

S obzirom da je razmatran problem veoma uprošćen, može se reći da su rezultati zadovoljavajući i da se šema dobro ponaša.

12 Zaključak

Interakcija između matematike, biologije i medicine kao i interesovanje matematičara za probleme u ovoj oblasti poslednjih godina ubrzano raste. Pored velikog praktičnog značaja koje to interesovanje može da donese, na ovaj način se doprinosi značajnoj popularizaciji matematike kao nauke, jer tako studenti drugih nauka, pre svega biologije, koja se smatra nematematičkom naukom mogu da se uvere u prednosti saradnje različitih nauka i budu svesni napretka koji može da se ostvari.

Problemi koji opisuju interakciju između fluida i strukture (FSI) imaju veliku primenu. U ovom radu je akcenat stavljen na probleme protoka krvi kroz arterije koje se sastoje iz više slojeva, gde svaki ima različite mehaničke karakteristike što problem čini još kompleksnijim. Činjenica da je gustina strukture (zida arterije) približno jednaka gustini krvi, čini interakciju između kardiovaskularnog tkiva i krvi veoma značajnom, jer u tom slučaju domen fluida nije fiksiran i menja se sa vremenom što utiče na aproksimaciju prvog izvoda koja u tom slučaju nije dobro definisana. Način da se to prevaziđe je korišćenje ALE mapiranja koje je definisano u ovom radu. Činjenica je da postoji mnogo modela koji opisuju ovaj problem. Mogu se pronaći modeli u 1D, 2D, 3D, modeli koji opisuju arteriju kao jednoslojnu strukturu, ili kao višeslojnu, koji posmatraju slučajeve potpuno zdrave ili defektne arterije i mnogi drugi. Mnoge ideje su još u začeću.

Mi smo se odlučili da predstavimo tri modela koja bi što više mogla da dočaraju tu različitost. Tako jedan model analizira arteriju kao jednoslojnu strukturu, predstavlja je u 2D ali koristi jednodimenzionalne tehnike za rešavanje problema. Drugi model vrši aproksimaciju zida arterije kao dvoslojne strukture i daje opis nove metode za rešavanje tog modela, dok treći model posmatra slučaj defektne arterije što dovodi do novih pretpostavki koje se moraju obuhvatiti u modelu. Rešavanjem prvog modela u programskom paketu *Matlab* uverili smo se koliko su pretpostavke u modelu, početni i granični uslovi ali i koraci diskretizacije značajni i koliko samo malo odstupanje od dozvoljenih veličina i pokušaj da se uštedi na vremenu i memoriji mogu da dovedu do nestabilnog rešenja.

Veliki broj stručnjaka i istraživačkih centara radi na modelima protoka krvi kroz kardiovaskularno tkivo i konstantno se pojavljuju novi, unapređeni modeli koji opisuju ovaj problem. To su modeli koji nisu samo teorijske prirode i koji bi trebali da značajno unaprede medicinske tehnike u lečenju pacijenata, kao i da omogućе sigurnije operacije sa mnogo jasnijim ishodom ili da omogućе detektovanje problema pre nego što se on pojavi.

Literatura

- [1] Acheson D. J., *Elementary Fluid Dynamics*, Oxford University Press, New York, (2005)
- [2] Alnaes M.S., Isaksen J., Mardal K-A., Romner B., Morgan M., Ingebrigtsen T., *Computation Of Hemodynamics in the Circle of Willis*, Stroke, 38(9):2500-5, (2007)
- [3] Batchelor G. K., *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, (2000)
- [4] Bodnár T., Galdi P. G., Nečasová Š., *Fluid-Structure Interaction and Biomedical Applications*, Birkhäuser (2014)
- [5] Baigent S., Banaji M., Delpy D., Tachtsidis I., *A physiological model of cerebral blood flow control*, Mathematical Biosciences 194, 125–173, (2005)
- [6] Boujena S., El Khatib N., Kafi O., *A 2D mathematical model of blood flow and its interactions in an atherosclerotic artery*, Math. Model. Nat. Phenom. 9 (2014), no. 6, 46-68.
- [7] Bukač M., Čanić S., Glowinski R., Tambača J., Quaini A., *Fluid-structure interaction in blood flow allowing non-zero longitudinal structure displacement*, J. Comput. Psys. 235, 515-541 (2013)
- [8] Čanić S., Guidoboni G., Hartley C. J., Mikelić A., Rosenstrauch, D., Tambača J., *Blood Flow in Compliant Arteries: An Effective Viscoelastic Reduced Model, Numerics, and Experimental Validation*, Annals of Biomedical Engineering, April 2006, Volume 34, Issue 4, pp 575-592
- [9] Čanić S., Mikelić A., Lamponi D., Tambača J., *Self-consistent effective equations modeling blood flow in medium-to-large compliant arteries*, SIAM J. Multisc. Anal. Simul. 3(3), 559-596, (2005)
- [10] Čanić S., Mikelić A., Tambača J., *A two-dimensional effective model describing fluid-structure interaction in blood flow: Analysis, simulation and experimental validation*, Comptes Rendus Mech. Acad. Sci. Paris 333, 867-883, (2005)
- [11] Čanić S., Muha B., *Existence of a Weak Solution to a Nonlinear Fluid-Structure Interaction Problem Modeling the Flow of an Incompressible, Viscous Fluid in a Cylinder with Deformable Walls*, Arch. Rational Mech. Anal. 207 (2013), 919-968.

- [12] Carneiro J., Junqueira L. C., *Osnovi histologije*, Data Status, Beograd (2005)
- [13] Chen G.-Q., Osborne D., Qian Z., *The Navier-Stokes Equations with the kinematic and vorticity boundary conditions on non-flat boundaries*, Acta Mathematica Scientia (2009), 29B(4):919–948.
- [14] Cowin C. S., Humphrey D. J., *Cardiovascular Soft Tissue Mechanics*, Kluwer Academic Publishers, United States of America, (2001)
- [15] Davidović V., *Uporedna fiziologija I*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd (1997)
- [16] Evans C.L., *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, University of California (2010)
- [17] Karper T.K., *Mathematical modeling in medicine-Prospects of lifesaving technology*, CAS, Oslo, (2010)
- [18] Karpov V.A., *Mathematical modeling in medicine*, Institute of Biochemistry and Physiology of Microorganisms, Russia
- [19] Kelly P., *Solid mechanics Part III*, University of Auckland, Auckland, (2011)
- [20] Kurilić M., *Osnovi opšte topologije*, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, (1998)
- [21] Lelović V. S., *Konstitutivne jednačine za pesak i njihova primena u numeričkoj analizi ponašanja trakastog temelja*, doktorska disertacija, Univerzitet u Beogradu, Beograd, (2012)
- [22] Lukačova-Medvid'ová M., Rusnáková G., Hundertmark-Zaušková A., *Kinematic splitting algorithm for fluid-structure interaction in hemodynamics*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 265 (2013) 83-106.
- [23] Nedeljkov M., *Parcijalne diferencijalne jednačine*, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, (2004)
- [24] Obradović B., *Mehaničke operacije: I deo*, Tehnološko-Metaluruški fakultet, Beograd (2005)
- [25] Obradović N., Voronjeg K., *Mehanika fluida*, Građevinska knjiga, Beograd (1960)
- [26] Olsen-Kettle L., *Numerical solution of partial differential equations*, The University of Queensland

- [27] Petrović V., *Uporedna fiziologija: I deo*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd (1991)
- [28] Price J., *Lagrangian and Eulerian Representations of Fluid Flow: Kinematics and the Equations of Motion*, Woods Hole Oceanographic Institution, Woods Hole (2006)
- [29] Stewart J., *Calculus*, Sixth Edition (2007)
- [30] Stojanović S. *Mehanika fluida*, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad (2002)
- [31] Strauss A. W., *Partial Differential Equations: An Introduction*, Brown University (2008)
- [32] Waite L., *Biofluid Mechanics in Cardiovascular systems*, McGraw-Hill, United States of America, (2006)
- [33] White M. F., *Viscous Fluid Flow*, McGraw-Hill, Inc., United States of America, (1991)
- [34] www.bhsrce.ba/web/index.php?option=com_content&view=article&id=71&Itemid=60&lang=en
- [35] www.biologija.rs/krvni_sistem.html
- [36] <https://bundeln.wordpress.com/2013/04/25/uloga-krvi-i-limfe/>
- [37] <http://savremenisport.com/teorija-sporta/sportska-medicina/12/398/kardiovaskularni-sistem>
- [38] www.stetoskop.info/Koronarna-bolest-lecenje-savremene-bolesti-srca-3507-s3-content.htm

Biografija



Sanja Ružičić je rođena 30.04.1991. godine u Novom Sadu. Završila je Osnovnu školu "Svetozar Miletić" u Titelu 2006. godine. Iste godine je upisala Gimnaziju "Jovan Jovanović Zmaj" u Novom Sadu i kao nosilac Vukove diplome završila je prirodno-matematički smer. Osnovne studije Primjenjene matematike, modul Finansijska matematika na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu upisuje 2010. godine i završava ih 2013. godine sa prosekom 10,00.

Iste godine u Novom Sadu upisuje master studije Primjenjene matematike, modul Finansijska matematika. Položila je sve ispite predviđene planom i programom master studija u februarском roku 2015. godine, sa prosečnom ocenom 10,00. Dve godine je bila stipendista Fonda za mlade talente.

Novi Sad, jun 2015. godine

Sanja Ružičić

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUCNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Master rad

VR

Autor: Sanja Ružičić

AU

Mentor: dr Marko Nedeljkov

MN

Naslov rada: Modeli protoka krvi u arterijama

NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: srpski/engleski

JI

Zemlja publikovanja: Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2015

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (12/100/38/6/6/5/0)
(broj poglavlja/strana/lit. citata/tabela/slika/grafika/priloga)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Parcijalne diferencijalne jednačine
ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: Parcijalne diferencijalne jednačine, Kardiovaskularni sistem, Protok krvi, Modeli protoka krvi, FSI, Navije-Stoksove jednačine, Jednačine linearne elastičnosti, Numerički algoritmi
PO

UDK

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod:

Glavni zadatak ovog master rada je predstavljanje modela protoka krvi u velikim arterijama, pretpostavljajući da arterija ima oblik cilindra. Modeliranje protoka krvi u arterijama je veliki izazov, jer se zidovi arterija sastoje iz tri glavna sloja: intime, medije i adventicije, gde svaki sloj ima različite mehaničke karakteristike ali i zbog činjenice da je interakcija između krvi i kardiovaskularnog tkiva nelinearna i veoma značajna.

Na početku rada smo upoznali čitaoca sa mogućnostima trenutne i buduće primene matematičkog modeliranja u medicini. Zatim smo dali kratak opis osnovnih pojmova iz mehanike fluida, parcijalnih diferencijalnih jednačina, kardiovaskularnog sistema i naveli smo glavne činjenice vezane za protok krvi u krvnim sudovima. U drugom delu radu smo predstavili tri različita modela protoka krvi u velikim arterijama. U prvom i drugom modelu smo posmatrali protok nestišljivog, viskoznog fluida (krvi) koji se modelira uz pomoć Navije-Stoksovih jednačina. U prvom modelu smo analizirali problem u kojem pretpostavljamo da se struktura (zidovi arterije) sastoji iz jednog sloja, dok drugi model posmatra interakciju između flu-

ida i strukture gde se struktura sastoji iz dva sloja, tankog i debelog. Pritom smo imali u vidu da je veza između fluida i struktura nelinearna i da u slučaju interakcije između fluida i struktura domen fluida nije fiksni i da ga određuje pozicija strukture. Treći model analizira stenozu koja predstavlja sužavanje arterije, gde se Navije-Stoksove jednačine moraju modifikovati kako bi obuhvatile ponašanje nenjutnovskog fluida, jer se u slučaju stenozе krv mora aproksimirati nenjutnovskim fluidom. U trećem delu rada smo dali numerički algoritam za rešavanje jednodimenzionalnog modela koji je dat u sedmom poglavlju. Rezultati dobijeni implementacijom numeričkog algoritma u programskom paketu Matlab su dati u desetom poglavlju.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 20.01.2015.

DP

Datum odbrane: jul 2015.

DO

Članovi komisije:

KO

- | | |
|-------------|---|
| Predsednik: | dr Danijela Rajter-Ćirić, redovni profesor,
Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu |
| Član: | dr Marko Nedeljkov, redovni profesor,
Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu,
mentor |
| Član: | dr Srboljub Simić, redovni profesor,
Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu |

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORD DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Content Code: Master's thesis

CC

Author: Sanja Ružičić

AU

Mentor: Marko Nedeljkov, Ph.D.

MN

Title: Models of blood flow in arteries

TI

Language of text: Serbian

LT

Language of abstract: English

LA

Country of publication: Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2015

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publication place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: (12/100/38/6/6/5/0)
(number of sections/pages/references/tables/pictures/graphs/appendices)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific Discipline: Partial Differential Equations
SD

Subject/Key words: Partial Differential Equations, Cardiovascular system, Blood flow, Models of blood flow, FSI, Navier-Stokes equations, Equation of linear elasticity, Numerical algorithms
SKW

UC

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract:

The focus of this thesis is on modeling blood flow in large arteries assuming cylindrical geometry. Modeling blood flow in arteries is a major challenge because the arterial walls are composed of three main layers: the intima, media and adventitia, each with different mechanical characteristics. Study of the problems with the interaction between blood flow and cardiovascular tissue remains to be a challenge due to their strong nonlinearity and multi-physics nature.

At the beginning of the thesis we introduced the reader with a perspective on current and future applications of mathematical modeling in medicine. Then, we gave brief overview of the theory of fluid mechanics, partial differential equations, cardiovascular system and we presented the main facts about blood flow in blood vessels. In the second part we proposed three different models of blood flow in large arteries. In the first two models we were considering the flow of an incompressible, viscous fluid (blood) which is modeled by the Navier-Stokes equations. In the first model we were considering a problem in which the structure (arterial walls) consisted of only one layer, while the second model considers the

multi-layered-structure interaction in which the structure consists of two layers, thin and a thick layer. The coupling between the fluid and structure is highly nonlinear and must be considered. Also, we had in mind that in this case of fluid-structure interaction the fluid domains is not fixed and its location is determined by the location of the structure. The third model deals with the stenosis which is the narrowing of the artery, where Navier-Stokes equations must be reformulated to have the non-Newtonian behavior, because the blood must be considered as non-Newtonian fluid. In the third part we gave numerical algorithm for solving One-and-a-half dimensional model, presented in the seventh section. The results obtained by implementing numerical algorithm in the programming software Matlab are presented in the tenth section.

AB

Accepted by the Scientific Board on: 20.01.2015.

ASB

Defended: jul 2015.

DE

Thesis defend board:

DB

- President: Danijela Rajter-Ćirić Ph.D., full professor,
Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
- Member: Marko Nedeljkov Ph.D., full professor,
Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
mentor
- Member: Srboljub Simić Ph.D., full professor,
Faculty of Technical Sciences, University of Novi Sad