UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Sandra Kovačević

Boks Dženkinsov model

-Master rad-

Mentor:
prof.dr Zagorka Lozanov-Crvenković

Novi Sad, 2016

Sadržaj

Uvod **3**

1 Uvod u analizu vremenskih serija **4**
1.1 Vrste i specifičnosti vremenskih serija 4
1.2 Ciljevi analize vremenskih serija 7
1.3 Osnovni pojmovi i oznake 8
1.4 Autokovarijaciona i autokorelaciona funkcija 11

2 Analiza linearnih vremenskih serija **14**
2.1 Autoregresioni AR modeli 16
2.1.1 Autoregresioni model prvog reda- AR(1) 17
2.1.2 Autoregresioni model reda p - AR(p) 20
2.2 Parcijalna autokorelaciona funkcija 21
2.3 Modeli pokretnih proseka 23
2.3.1 Modeli pokretnih proseka prvog reda- MA(1) 23
2.3.2 Modeli pokretnih proseka reda q- MA(q) 26
2.4 Autoregresioni modeli pokretnih proseka 27
2.4.1 ARMA(1,1) model 27

3 Autoregresioni modeli pokretnih proseka za integrisane vremenske serije (ARIMA modeli) **32**
3.1 Proces slučajnog hoda 34
3.2 ARIMA(0,1,1) 35
3.3 Testovi jediničnog korena 36
3.3.1 Diki-Fulerov test (DF) test 36

4 Boks Dženkinsov model **44**
4.1 Identifikacija modela 48
4.2 Ocenjivanje parametara modela 54
4.2.1 Metod običnih najmanjih kvadrata 54
4.2.2 Metod nelinearnih najmanjih kvadrata 56

4.3 Provera adekvatnosti modela 58

5 Primena Boks Dženkinsovog modela **62**

Zaključak **67**

Prilog **68**

Literatura **70**

Biografija **71**

Uvod

Analiza vremenskih serija predstavlja jednu od statističkih disciplina koja beleži najdinamičniji razvoj poslednjih decenija. Vremensku seriju definišemo kao familiju slučajnih promenljivih koje su uređene u odnosu na vremenske trenutke. Osnovni ciljevi analize vremenskih serija je pronalaženje modela kojim će se definisati zakonitosti u ponašanju posmatranog sistema, te predviđanje njegovog budućeg stanja na osnovu poznatih stanja u prošlosti i sadašnjosti. Boks-Dženkinsov model predstavlja sistematski pristup koji omogućava da na osnovu analize podataka izaberemo model koji na najbolji način opisuje kretanje vremenske serije

U prvom delu biće definisani osnovni pojmovi analize vremenskih serija kao što su stacionarnost vremenske serije, autokovarijaciona i autokorelaciona funkcija.

U drugom poglavlju prikazane su tri klase modela stacionarnih vremenskih serija: autoregresioni modeli, modeli pokretnih proseka i autoregresioni modeli pokretnih proseka.

Kako su često pretpostavke o stacionarnosti narušene u trećem poglavlju bavimo se izgradnjom autoregresionih integrisanih procesa pokretnih sredina (ARIMA) koji se koriste u analizi vremenskih serija kada je vremenska serija nestacionarna i diferenciranjem postižemo stacionarnost.

Centralno mesto rada predstavlja Boks-Dženkinsov model koji je zasnovan na klasi ARIMA modela. Ovaj pristup sastoji se iz tri faze: identifikacije modela, ocenjivanja parametara modela i provere adekvatnosti izabranog modela.

U poslednjem delu rada ćemo kroz praktičan primer objasniti postupak primene modela korišćenjem programskog paketa EVIEWS.

Glava 1

Uvod u analizu vremenskih serija

1.1 Vrste i specifičnosti vremenskih serija

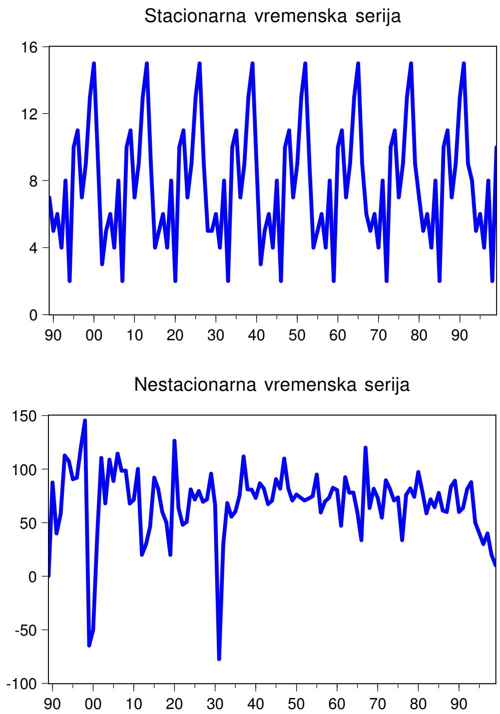
Predmet analize vremenskih serija predstavlja skup slučajnih promenljivih koje su najčešće uređene u odnosu na vreme, obično u jednakim vremenskim intervalima. Kažemo najčešće, jer takođe uređenje može postojati u odnosu na prostor i takve serije nazivamo prostornim. Statistička analiza vremenskih serija se znatno razlikuje u odnosu na klasičnu statističku analizu gde polazimo od skupa od n nezavisno i jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih, tj prostog slučajnog uzorka. Naime u analizi vremenskih serija posmatramo serije koje su uređene u odnosu na vreme, pa samim tim razmatramo skup opservacija koje su međusobno zavisne.

Jedna od osnovnih podela vremenskih serija jeste na prekidne i neprekidne. Razlika između ove dve serije ogleda se u načinu na koji registrujemo podatke. Pod neprekidnim vremenskim serijama smatramo one serije čije vrednosti postoje u svakom momentu, dok su sa druge strane prekidne poznate samo u određenim momentima (dnevno, mesečno, godišnje).

Sledeća važna podela vremenskih serija jeste na stacionarne i nestacionarne.

Definicija 1.1.1. *Vremenska serija je stacionarna ukoliko njena svojstva ostaju nepromenjena tokom vremena, pa samim tim ispoljava određeni obrazac koji nam služi kao osnova za predviđanje budućih vrednosti.*

Na sledećem grafiku dat je primer jedne stacionarne i nestacionarne vremenske serije.



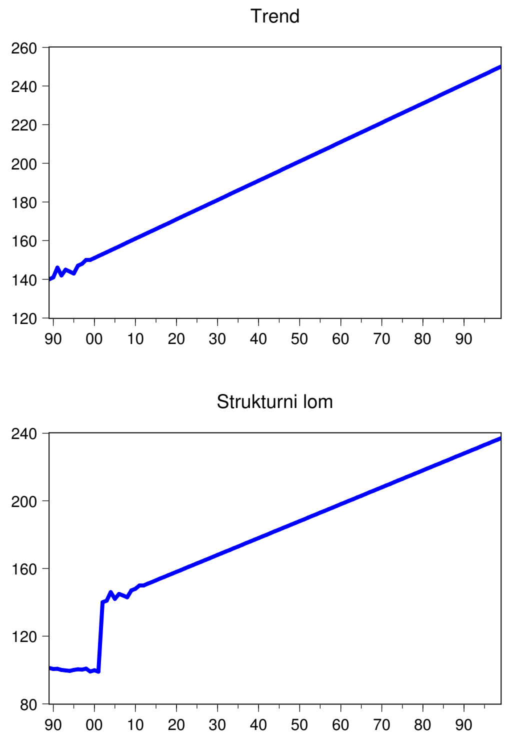
Slika 1.1: Grafik stacionarne i nestacionarne vremenske serije

U nastavku navodimo nekoliko karakterističnih odlika ekonomskih vremenskih serija.

1. **Trend**. Trend vremenske serije je usko povezan sa kretanjem vremenske serije jer se njime opisuje tendencija razvoja serije tokom dužeg vremenskog perioda. Osnovna podela trenda je na rastući i opadajući. Rastući trend ukazuje na rast vrednosti vremenske serije tokom vremena. Razlikujemo još i deterministički i stohastički trend. Trend je deterministički ukoliko možemo prognozirati njegove promene tokom vremena. Kod determinističkog trenda predviđamo vrednosti vremenske serije na osnovu raznih matematičkih funkcija kao što su: kvadratna, trigonometrijska ili linearne funkcije oblika a+bt, gde su a i b parametari dok je t oznaka za promenljivu trenda. U suprotnom trend je stohastički i zbog prisustva stohastičke komponente ne možemo predvideti ponašanje vremenske serije.

2. **Postojanje strukturnog loma.** Strukturni lom se javlja kao posledica određene pojave čiji se rezultat manifestuje u promeni kretanja

vremenske serije. Samim tim skup opservacija koje predstavljaju strukturni lom karakteriše nestandardno kretanje vremenske serije u odnosu na opservacije koje su prethodile pomenutoj pojavi. Primer strukturnog loma jesu posledice vremenske katastrofe kao što su poplave koje za rezultat imaju promene kretanja u spoljnotrgovinskoj razmeni, zaposlenosti i sl. Promene u kretanju vremenske serije može biti jednokratnog karaktera ili može dovesti do nepromenljivih, trajnih promena.

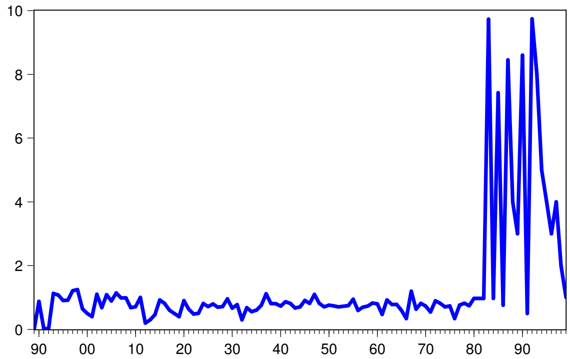


Slika 1.2: Primer vremenske serije sa trendom i primer strukturnog loma

3. **Sezonska komponenta.** Sezonske vremenske serije su kako im i samo ime kaže, vremenske serije koje karakteriše određeni obrazac u kretanju tokom godine- mesečno, kvartalno ili polugodišnje. Primer sezonske komponente pojavljuje se kod turističke sezone na moru koju karakteriše rast u julu, a pad u oktobru.

4. **Nestabilna varijansa**. Postojanje nestabilne varijanse se odražava u promeni varijabiliteta tokom vremena usled uticaja različitih informacija pozitivnog ili negativnog karaktera na tržište. Varijabilitet raste

sa pojavom negativne vesti. Tako na primer negativna informacija poput rata u nekoj od zemalja bogatih sirovom naftom utiče na rast cene nafte na tržištu, dok se obustava bombardovanja tretira kao pozitivna vest koja doprinosi padu cene nafte.



Slika 1.3: Primer vremenske serije sa nestabilnom varijansom

1.2 Ciljevi analize vremenskih serija

Analizom vremenskih serija nastojimo da opišemo i objasnimo posmatranu vremensku seriju, ali takođe i da predvidimo njeno buduće kretanje. Samim tim možemo da definišemo fundamentalne ciljeve u analizi vremenskih serija:

1. **Opisivanje vremenske serije.** Predstavlja prvu fazu u analizi vremenske serije. Značaj opisivanje vremenske serije ogleda se u tome što na taj način dolazimo do ključnih informacija o osobinama vremenske serije koje predstavljaju osnovu za dalju analizu. Na taj način određujemo da li je vremenska serija stacionarna ili ju je potrebno transformisati i sl.

2. **Objašnjenje.** Da bismo objasnili vremensku seriju, potrebno je da pronađemo odgovarajući model koji najbolje opisuje datu vremensku seriju i njenu putanju.

3. **Prognoziranje.** Krajnji cilj u analizi vremenskih serija predstavlja predviđanje na osnovu dobijenog modela. Da bi prognoza bila što relevantnija, u svakoj fazi koriste se razni kriterijumi na osnovu kojih testiramo koliko je izabrani model dobar za predviđanje i samim tim

bolji od konkurentskih. O spomenutim kriterijumima više ćemo navesti u četvrtoj glavi.

1.3 Osnovni pojmovi i oznake

U ovom poglavlju predstavićemo neke od osnovnih oznaka i veličina koje se koriste u analizi vremenskih serija. Međutim da bismo razumeli ove pojmove prvo navodimo neke od fudamentalnih definicija iz verovatnoće.

Definicija 1.3.1. *Neka je Ω skup svih mogućih ishoda nekog eksperimenta. Elemente ovog skupa obeležavamo sa ω i nazivamo elementarnim događajima.*

Definicija 1.3.2. *Podskup skupa elementarnih događaja definišemo kao slučajan događaj A.*

Definicija 1.3.3. *(Aksioma σ polja) Neka je $\mathcal{F}$ podskup partitivnog skupa $P(\Omega)$. $\mathcal{F}$ je σ polje nad Ω ako su zadovoljeni sledeći uslovi:*

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \ \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$
3. $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Definicija 1.3.4. *(Aksioma verovatnoće) Funkcija P koja preslikava skup $\mathcal{F} \mapsto [0,1]$ nazivamo* ***verovatnoćom*** *na prostoru $(\Omega,\mathcal{F})$, gde je $\mathcal{F}$ σ-polje nad skupom elementarnih događaja Ω, ako važi:*

1. $P(\Omega) = 1$,
2. *Ako $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$, i,j=1,2,... tada:*

$$P(\sum_{t=1}^{\infty} A_i) = \sum_{t=1}^{\infty} P(A_i).$$

Uređena trojka $(\Omega,\mathcal{F},P)$ naziva se ***prostor verovatnoća****.*

Definicija 1.3.5. *Preslikavanje $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ zove se slučajna promenljiva ako za svako $\mathcal{S} \in \mathcal{B}$ važi:*

$$X^{-1}(S) \in \mathcal{F}$$

gde je $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{R})$ Borelovo σ-polje.

Za stohastički proces X_t definišemo:

- Funkcija sredine procesa data je sa:

$$\mu = E(X_t),\, t \in T$$

- Disperziju procesa definišemo na sledeći način:

$$\sigma_t = E(X_t)^2 - E^2(X_t),\, t \in T$$

- Kovarijansa stohastičkog procesa:

$$\gamma_x(t,s) = cov(X_t, X_s) = E(X_t - E(X_t))(X_s - E(X_s)),\, t,s \in T$$

- Korelaciju stohastičkog procesa izražavamo na sledeći način:

$$\rho_x(t,s) = \frac{cov(X_t, X_s)}{\sqrt{var\,(X_t)\,var\,(X_s)}},\, t,s \in T$$

Neka je dat niz slučajnih promenljivih X_1,..,X_n. Vrednost vremenske serije u trenutku t obeležavamo sa X_t, gde je t oznaka za mesec, godinu i sl.

- Da bismo predvideli buduće vrednosti vremenske serije koristimo prognozu za h budućih perioda unapred na osnovu n opservacija X_1,..,X_n, u oznaci $\hat{X}_n(h)$.

- Grešku prognoze koja se javlja usled odstupanja između stvarne i predviđene vrednosti definišemo na sledeći način:

$$\hat{e}_n(h) = X_{n+h} \text{ - } \hat{X}_n(h)$$

- Pored navedenih oznaka, u analizi vremenske serije veoma često se koristi i operator docnje odnosno operator kašnjenja prvog reda definisan sa $LX_t = X_{t-1}$, koji predstavlja vrednost promenljive koja kasni jedan period u odnosu na sadašnji trenutak.

- Operator prve diference $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$ označava razliku između vrednosti vremenske serije u dva uzastopna vremenska trenutka. Operator diference reda k definišemo kao $\Delta_k X_t = X_t - X_{t-k}$ i često se koristi prilikom analize vremenskih serija koje opisuju mesečne, kvartalne ili godišnje promene u kretanju, tj kod vremenskih serija koje sadrže sezonsku komponentu.

Osnovni pojmovi u analizi vremenskih serija
Do definicije vremenske serije dolazimo na osnovu pojmova slučajne promenljive i stohastičkog procesa.

Definicija 1.3.6. *Skup mogućih ishoda nekog eksperimenta naziva se slučajna promenljiva.*

Neka je dat skup slučajnih promenljivih $X_t\,(w)$,$w \in \Omega$, $t \in$ T, gde je Ω oznaka za skup svih mogućih ishoda eksperimenta, dok je T skup indeksa. Da bismo definisali slučajan proces koji koristimo u daljoj analizi vremenskih serija za skup indeksa T biramo skup prirodnih brojeva T= N = $\{1, 2 \ldots\}$

Definicija 1.3.7. *Slučajni (stohastički) proces predstavlja kolekciju slučajnih promenljivih koje su uređene u odnosu na vreme.*

Definicija 1.3.8. *Familija slučajnih promenljivih koje su uređene u odnosu na vremenske trenutke nazivamo vremenskom serijom.*

Jedno od osnovnih svojstava vremenske serije jeste da li je ona stacionarna ili nestacionarna.

Definicija 1.3.9. *Stohastički proces X_t je **striktno (strogo) stacionaran** ako se prilikom transliranja u vremenu, za svaki podskup iz T i bilo koji prirodan broj $k \in T$, svojstva stohastičkog procesa ne menjaju tj za funkcije raspodele važi:*

$$F(X_{t_1},\ldots,X_{t_n}) = F(X_{t_1+k},\ldots,X_{t_n+k})$$

Definicija 1.3.10. *Stohastički proces X_t je **stacionaran u širem smislu** tj slabo stacionaran ako važe sledeće osobine:*

1. $E(X_t) = \mu = const$ *t=1,2,..*
2. $var(X_t) = E(X_t - \mu)^2 = const.$, *t=1,2,..*
3. *Kovarijansa između članova vremenske serije se ne menja prilikom transliranja u vremenu tj važi:* $cov(X_t, X_{t-k}) = \gamma_k$, *t= 1,2,.., k= 1,2,...*

Definicija 1.3.11. *Slabo stacionaran proces je ergodičan ako sa povećanjem obima uzorka aritmetička sredina jedne realizacije vremenske serije konvergira ka stvarnoj srednjoj vrednosti populacije, odnosno važi uslov:*

$$\bar{X} \xrightarrow{P} \mu, \quad T \to \infty$$

Najjednostavniji stacionarni, potpuno slučajan proces, predstavlja proces belog šuma. Sam naziv procesa belog šuma proizilazi iz spektralne analize bele svetlosti gde spektar bele svetlosti sadrži u jednakim merama svih sedam osnovnih boja.

Definicija 1.3.12. *Beli šum u oznaci e_t, t = 1,2,.. je niz slučajnih promenljivih koje su nekorelisane i sa sledećim osobinama:*

1. $E\left(e_t\right) = 0$
2. $var\left(e_t\right) = E(e_t)^2 = \sigma_e^2 = const.$, t = 1,2,...
3. $\operatorname{cov}\left(e_t, e_{t-k}\right) = E(e_t e_{t-k}) = 0$, t = 1,2,3,.. k = 1,2,...

1.4 Autokovarijaciona i autokorelaciona funkcija

Definicija 1.4.1. *Autokovarijacioni koeficijent na docnji k definisan je sa:*

$$\gamma_k = cov(X_t, X_{t-k}) = E(X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu), k = 1, 2, ... \tag{1.4.1}$$

Definicija 1.4.2. *Koeficijent korelacije između X_t i X_{t-k} nazivamo autokorelacioni koeficijent na docnji k:*

$$\rho_k = \frac{cov(X_t, X_{t-k})}{\sqrt{var\left(X_t\right) var\left(X_{t-k}\right)}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} k = 1, 2, .. \tag{1.4.2}$$

gde je autokorelaciona funkcija skup autokorelacionih koeficijenata uređenih u odnosu na vremenske trenutke.

Teorema 1.4.1. *Za stacionaran stohastički proces X_t sa autokovarijacionom γ_k i autokorelacionom funkcijom ρ_k važe sledeće osobine:*

1. $\gamma_0 = var\left(X_t\right)$ *iz čega sledi da* ρ_0=1.
2. *Simetričnost funkcije u odnosu na 0:* $\gamma_k = \gamma_{-k}$, $\rho_k = \rho_{-k}$.
3. $|\gamma_k| \leqslant \gamma_0$ *i* $|\rho_k| \leq 1$
4. *Matrica autokovarijacionih koeficijenata data je u sledećem obliku:*

$$\Gamma_k = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{k-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{k-2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ \gamma_{k-1} & \gamma_{k-2} & \cdots & \gamma_0 \end{bmatrix}$$

Definišimo matricu P_k čiji su elementi autokorelacione funkcije

$$P_k = \frac{1}{\gamma_0}\Gamma_k$$

Matrica P_k je pozitivno semidefinitna.

Dokaz.

1. Tvrđenje sledi na osnovu definicija autokorelacionog i autokovarijacionog koeficijenta na docnju reda 0.

2. $\gamma_k = cov(X_t, X_{t-k})$ gde na osnovu uslova stacionarnosti sledi da je:

$$cov(X_t, X_{t-k}) = cov(X_{t-k}, X_t) = \gamma_{-k}$$

3. Da bismo pokazali tvrdnju da je varijansa vremenske serije veća od apsolutne vrednosti autokovarijacionog koeficijenta uvedimo slučajnu promenljivu $Y = \lambda_1 X_t + \lambda_2 X_{t-k}$. Varijansa slučajne promenljive Y je jednaka:

$$var(Y) = var(\lambda_1 X_t + \lambda_2 X_{t-k}) = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\sigma^2 + 2\lambda_1\lambda_2\gamma_k \geq 0$$

za $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \Rightarrow \gamma_k \geqslant \gamma_0$

za $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ dobijamo $\sigma^2 \geq \gamma_k \Rightarrow \rho_k \leq 1$

4. Matrica autokorelacionih koeficijenata je pozitivno semidefinitna ako je determinanta matrice i svi njeni glavni minori pozitivni ili jednaki nuli. Na osnovu dokaza iz koraka 3. da je varijansa linearne kombinacije dve slučajne promenljive nenegativna, uopštenjem se dobija da je varijansa slučajne promenljive $\lambda_1 X_t + \lambda_2 X_{t-k} + \cdots + \lambda_k X_{t-k+1}$ nenegativna.

■

Ocena autokovarijacione i autokorelacione funkcije

Definicija 1.4.3. *Ocenu autokovarijacionog koeficijenta $\hat{\gamma}_k$, slabo stacionarne i ergodične vremenske serije X_1 ,..., X_T , definišemo pomoću sledećih ocena:*

1. $\hat{\gamma}_k = \frac{1}{T}\sum\limits_{t=k+1}^{T}\left(X_t - \bar{X}\right)\left(X_{t-k} - \bar{X}\right)$

2. $\hat{\gamma}_k = \frac{1}{T-k}\sum\limits_{t=k+1}^{T}\left(X_t - \bar{X}\right)\left(X_{t-k} - \bar{X}\right)$, *k = 1,2,..*

gde je $\bar{X}$ oznaka za sredinu vremenske serije.

Definicija 1.4.4. *Ocenu autokorelacionog koeficijenta u oznaci $\hat{\rho}_k$ dobijamo na sledeći način:*

$$\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0} = \frac{\sum\limits_{t=k+1}^{T}\left(X_t - \bar{X}\right)\left(X_{t-k} - \bar{X}\right)}{\sum\limits_{t=1}^{T}\left(X_t - \bar{X}\right)^2}, k = 0, 1, 2, ... \tag{1.4.3}$$

Uzorački korelogoram skraćeno **ACF** (engl. autocorrelation function) predstavlja grafički prikaz ocena autokorelacionih koeficijenata u odnosu na docnje.

Za testiranje valjanosti nulte hipoteze o odsustvu autokorelacije na docnji k protiv alternativne o prisustvu autokorelacije H_1: $\rho_k \neq 0$, k = 1,2,... testiramo da li ocena pripada intervalu **(-1.96/$\sqrt{T}$, -1.96/$\sqrt{T}$)**. Ukoliko ocena autokorelacionog koeficijenta ne pripada navedenom intervalu, na nivou značajnosti 5% odbacujemo nultu hipotezu.

Glava 2

Analiza linearnih vremenskih serija

U ovom poglavlju predstavićemo neke od osnovnih osobina linearnih vremenskih serija i modele kojim ih možemo predstaviti.

Definicija 2.0.5. *Vremenska serija X_t je linearna ako se može predstaviti na sledeći način:*

$$X_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j e_{t-j}, \quad \psi_0 = 1. \tag{2.0.1}$$

gde važi da je :

- *e_t je niz nekoreliranih slučajnih promenljivih sa istom raspodelom(najšešće normalnom),*
- *μ je očekivana vrednost od X_t.*

Voldova teorema razlaganja tvrdi da je prethodna specifikacija linearnog procesa dovoljna da obuhvati sve slabo stacionarne procese. Naime teorema kaže da svaku slabo stacionarnu vremensku seriju možemo predstaviti kao zbir dva međusobno nekorelisana procesa- determinističke i stohastičke komponente.

Determinističku komponentu možemo aproksimiritai nekom matematičkom funkcijom i predvideti na osnovu informacija iz prošlosti, dok nasuprot tome slučajnu komponentu ne možemo predvideti prema vrednostima iz prošlosti.

Teorema 2.0.2. *(**Voldova teorema razlaganja**) Stohastička komponenta slabo stacionarne vremenske serije X_t može se predstaviti u obliku linearnog procesa na sledeći način:*

$$X_t - \mu = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j e_{t-j}, \quad \psi_0 = 1 \tag{2.0.2}$$

- Determinističku komponentu vremenske serije čini njena srednja vrednost $\mu = E(X_t)$.
- e_t predstavlja proces belog šuma za koji važi:

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma^2, k = 0 \\ 0, k \neq 0 \end{cases} \tag{2.0.3}$$

$$\rho_k = \begin{cases} 1, k = 0 \\ 0, k \neq 0 \end{cases} \tag{2.0.4}$$

U nastavku određujemo očekivanu vrednost, autokovarijacionu i autokorelacionu funkciju linarnog procesa.

1. **Očekivanje:**

$$E(X_t) = E(\mu) + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j E(e_{t-j}) = \mu$$

2. **Varijansa:**

$$\begin{aligned} Var(X_t) &= E(X_t - \mu)^2 \\ &= E(e_t + \psi_1 e_{t-1} + \psi_2 e_{t-2} + \dots)^2 \\ &= E(e_t^2) + \psi_1 E(e_{t-1}^2) + \dots + 2\psi_1 E(e_t e_{t-1}) + 2\psi_2 E(e_t e_{t-2}) + \dots \\ &= \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2. \end{aligned}$$

3. **Autokovarijaciona funkcija:**

$$\begin{aligned} \gamma_k &= E(X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu) \\ &= E(e_t + \psi_1 e_{t-1} + \psi_2 e_{t-2} + \dots + \psi_k e_{t-k} + \dots)(e_{t-k} + \psi_1 e_{t-k-1} + \dots) \\ &= \sigma^2(\psi_k + \psi_1 \psi_{k+1} + \psi_2 \psi_{k+2} + \dots) \\ &= \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \psi_{k+i}. \end{aligned}$$

4. **Autokorelaciona funkcija:**

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{\infty} \psi_i \psi_{k+i}}{\sum\limits_{i=0}^{\infty} \psi_i^2}$$

Uslov stacionarnosti linearnog procesa izražavamo preko ψ pondera, kojih ima beskonačno mnogo. Samim tim da bi važio uslov stacionarnosti potrebno je pokazati da je γ_k konačno za svako k. Bez umanjenja opštosti pretpostavljamo da je $\mu = 0$:

$$|\gamma_k| = |E(X_t X_{t-k})| \leq |Var(X_t)Var(X_{t-k})|^{1/2} = \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2$$

Uslov stacionarnosti linearnog procesa: $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 < \infty$.

Na osnovu izvedenih karakteristika linearnog procesa zaključujemo:

1. Varijansa linearnog procesa predstavlja funkciju varijanse belog šuma i ψ pondera pri tome važi da je ona konačna kada je $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 < \infty$.

2. Autokovarijacioni koeficijent predstavlja funkciju varijanse belog šuma i ψ pondera.

3. Autokorelacioni koeficijent je izražen samo preko ψ pondera.

2.1 Autoregresioni AR modeli

Autoregresioni modeli predstavljaju jedan od načina za opisivanje slabo stacionarnih vremenskih serija. Kao što im i samo ime kaže, autoregresioni modeli predstavljaju modele sa regresijom na sopstvene vrednosti.

Definicija 2.1.1. *Autoregresioni model reda p definišemo na sledeći način:*

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + ... + \phi_p X_{t-p} + e_t \tag{2.1.1}$$

gde važi da je :

- e_t *proces belog šuma,*

- $\phi_1, ..., \phi_p$ *autoregresioni parametri.*

Iz definicije zaključujemo da je vrednost vremenske serije u trenutku t, linearna kombinacija p sopstvenih vrednosti u trenutcima $t-1, .., t-p$ plus deo procesa u trenutku t- e_t koji ne možemo da objasnimo preko datih vrednosti.

Posmatranom modelu reda p pridružimo karakterističnu jednačinu oblika:

$$g^p - \phi_1 g^{p-1} - \phi_2 g^{p-2} - .... - \phi_p = 0$$

gde su $g_1, ..., g_p$ rešenja (koreni) karakteristične jednačine.

Vremenska serija je stacionarna ako su svi koreni po modulu strogo manji od 1. Ukoliko postoji neko g_i po modulu jednako 1, takvu vremensku seriju smatramo nestacionarnom odnosno sa jediničnim korenima.

2.1.1 Autoregresioni model prvog reda- AR(1)

Definicija 2.1.2. *Autoregresioni proces prvog reda u oznaci AR(1) zapisujemo pomoću sledeće jednakosti:*

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + e_t \tag{2.1.2}$$

gde važi da je e_t proces belog šuma, ϕ_1 autoregresioni parametar.

AR(1) je linearan proces:

Na osnovu operatora kašnjenja prvog reda $LX_t = X_{t-1}$, AR(1) model možemo predstaviti na sledeći način:

$$(1 - \phi_1 L)X_t = e_t \Rightarrow X_t = \frac{e_t}{(1 - \phi_1 L)}$$

Korišćenjem uslova $|\phi_1| < 1$ izraz

$$\frac{1}{(1 - \phi_1 L)}$$

predstavlja zbir članova geometrijske progresije $(1 + \phi_1 L + \phi_1^2 L^2 + \phi_1^3 L^3 + ...)$:

$$\begin{aligned} X_t &= (1 + \phi_1 L + \phi_1^2 L^2 + \phi_1^3 L^3 + ...)e_t \\ &= e_t + \phi_1 e_{t-1} + \phi_1^2 e_{t-2} + \phi_1^3 e_{t-3} + \dots \\ &= e_t + \psi_1 e_{t-1} + \psi_2 e_{t-2} + \psi_3 e_{t-3} \dots \end{aligned}$$

Time smo pokazali da pri uslovu $|\phi_1| < 1$ i $\psi_j = \phi_1^j$, j=1,2,.. , autoregresioni model prvog reda je specijalan slučaj linearnog procesa.

Stacionarnost AR(1) procesa:

Rekurzijom od nazad, AR(1) model postaje:

$$\begin{aligned} X_t &= \phi_1(\phi_1 X_{t-2} + e_{t-1}) + e_t \\ &= \phi_1^2(\phi_1 X_{t-3} + e_{t-2}) + e_t + \phi_1 e_{t-1} \\ &= \dots \\ &= e_t + \phi_1 e_{t-1} + \phi_1^2 e_{t-2} + \dots . \end{aligned}$$

Na osnovu prethodno izvedenog dobijamo da je :

- ▷ $E(X_t) = 0$
- ▷ $var(X_t) = var(e_t + \phi_1 e_{t-1} + \phi_1^2 e_{t-2} + ...) = \sigma^2(1 + \phi_1^2 + \phi_1^4 + \phi_1^6 + ...)$

Kako važi da je varijansa linearnog procesa konačna za:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 < \infty$$

zaključujemo da će linearni proces dat sa vrednošću pondera $\psi_j = \phi_1^j$ konvergirati ako je $|\phi_1| < 1$ što je ujedno i uslov slabe stacionarnosti AR procesa prvog reda.

Na osnovu prethodnih zaključaka sledi da je varijansa slabo stacionarne vremenske serije:

$$var(X_t) = \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1^2}$$

Autokovarijaciona i autokorelaciona funkcija

Da bismo odredili autokovarijacionu i autokorealcionu funkciju, izraz

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + e_t$$

množimo sa X_{t-k}, $k \geq 0$ pa je očekivana vrednost jednaka:

$$E(X_t X_{t-k}) - \phi_1 E(X_{t-1} X_{t-k}) = E(e_t X_{t-k})$$

Kako smo ranije definisali, za autokovarijacioni koeficijent važi:

$$\gamma_k = cov(X_t, X_{t-k}) = E(X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu)$$

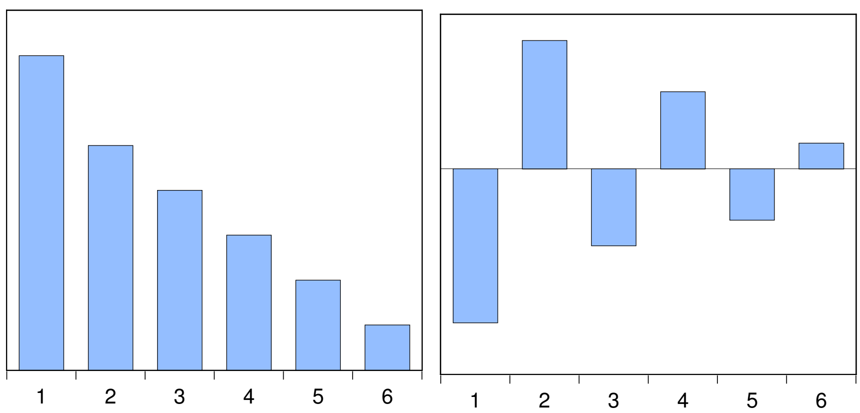
odnosno za slabo stacionarnu vremensku seriju ($E(X_t) = 0$) dobijamo da je koeficijent $\gamma_k = E(X_t X_{t-k})$, odakle sledi:

$$\begin{aligned}
\gamma_k &= E(X_t X_{t-k}) \\
&= E(e_t + \phi_1 e_{t-1} + \phi_1^2 e_{t-2} + \dots) \\
&(e_{t-k} + \phi_1 e_{t-k-1} + \phi_1^2 e_{t-k-2} + \dots) \\
&= \sigma^2 \phi_1^k (1 + \phi_1^2 + \phi_1^4 + \dots) \\
&= \frac{\sigma^2 \phi_1^k}{1 - \phi_1^2}.
\end{aligned}$$

Naposletku deljenjem prethodnog izraza sa γ_0 dobijamo diferencnu jednačinu koju koristimo za izračunavanje autokorelacione funkcije AR(1) procesa:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\dfrac{\sigma^2 \phi_1^k}{1 - \phi_1^2}}{\dfrac{\sigma^2}{1 - \phi_1^2}} = \phi_1^k, \quad \text{k=1,2,}\dots$$

U nastavku dajemo grafički prikaz autokorelacione funkcije AR(1) procesa za pozitivnu(a) i (b) negativnu vrednost ϕ_1 parametra.



(a) Vrednosti opadaju po eksponencijalnoj krivoj

(b) Vrednosti opadaju po oscilatorno eksponencijalnoj putanji

Slika 2.1: Autokorelacione funkcije AR(1) procesa

2.1.2 Autoregresioni model reda p - AR(p)

Autoregresioni model reda p ima sledeći oblik :

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + ... + \phi_p X_{t-p} + e_t \tag{2.1.3}$$

Stacionarnost AR(p) modela

Da bismo odredili uslov stacionarnosti autoregresionog procesa reda p polazimo od karakteristične jednačine:

$$g^p - \phi_1 g^{p-1} - \phi_2 g^{p-2} - .... - \phi_p = 0$$

Proces je stacionaran ako su koreni karakteristične jednačine po modulu manji od jedinice.

Autokovarijaciona i autokorelaciona funkcija

Polazimo od izraza (2.1.3) koji množimo sa X_{t-k} da bismo dobili da je očekivana vrednost jednaka:

$$E(X_t X_{t-k}) - \phi_1 E(X_{t-1} X_{t-k}) - .... - \phi_p E(X_{t-p} X_{t-k}) = E(e_t X_{t-k})$$

Odnosno neposredno sledi:

$$\gamma_k - \phi_1 \gamma_{k-1} - .... - \phi_p \gamma_{k-p} = E(e_t X_{t-k})$$

$$\gamma_k = \begin{cases} \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \cdots + \phi_p \gamma_{k-p} + \sigma^2, k = 0 \\ \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \cdots + \phi_p \gamma_{k-p}, \qquad k > 0 \end{cases} \tag{2.1.4}$$

Kako smo već naveli, autokovarijacioni koeficijent na rastojanju 0 je varijansa vremenske serije, pa dobijamo:

$$\gamma_0 = var(X_t) = \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1 \rho_1 - \cdots - \phi_p \rho_p}$$

Autokorelaciona funkcija za proces reda p definisana je sa:

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \cdots + \phi_p \rho_{k-p} \text{ , k>0.}$$

Prethodna relacija daje nam sistem od p jednačina koje nazivamo Yule-Walkerovim jednačinama:

$$\rho_1 = \phi_1 + \phi_2\rho_1 + \cdots + \phi_p\rho_{p-1}$$
$$\cdots$$
$$\rho_p = \phi_1\rho_{p-1} + \phi_2\rho_{p-2} + \cdots + \phi_p$$

Preko ovih jednačina uspostavljamo relaciju između koeficijenata AR(p) modela i p autokorelacionih koeficijenata. U nastavku dajemo matrični prikaz Yule-Walkerovih jednačina.

$$\begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{p-2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{bmatrix} \tag{2.1.5}$$

Iz navedenog zaključujemo da su parametri autoregresionog modela jednoznačno određeni skupom autokorelacionih koeficijenata.

2.2 Parcijalna autokorelaciona funkcija

U praktičnoj primeni često se nailazi na problem određivanja reda AR procesa. Parcijalna autokorelaciona funkcija predstavlja jedan od načina za određivanje reda autoregresionih modela. Njen značaj ogleda se u tome što predstavlja pokazatelj korelisanosti između dve promenljive nakon odstranjivanja uticaja ostalih članova vremenske serije.

Kao što smo prethodno definisali, autokorelacioni koeficijent na docnji k, kojim merimo korelaciju između X_t i X_{t-k} predstavljen je sa:

$$\rho_k = \frac{cov(X_t, X_{t-k})}{\sqrt{var\,(X_t)\,var\,(X_{t-k})}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}, \quad \text{k=1,2,..}$$

Parcijalni autokorelacioni koeficijent dobijamo eliminacijom uticaja članova vremenske serije X_{t-1} ,...,X_{t-k+1} na X_t i X_{t-k}.

Do vrednosti parcijalno autokorelacijonog keficijenta na docnji k dolazimo preko Yule-Walkerovih jednačina za autoregresiju k-tog reda:

$$X_t = \phi_{k1}X_{t-1} + \phi_{k2}X_{t-2} + ... + \phi_{kk}X_{t-k} + e_t$$

za $p = k$ i $\phi_i = \phi_{ii}$ i putem Cramerovog postupka rešavamo dobijeni sistem jednačina:

$k = 1 \Rightarrow \phi_{11} = \rho_1$

$$\text{za } k=2 \Rightarrow \phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}, \quad \text{za } k=3 \Rightarrow \phi_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

odnosno u opštem slučaju važi:

$$\phi_{kk} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-3} & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_1 & \rho_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-2} & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-3} & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} \tag{2.2.1}$$

Na osnovu prethodnih izraza, parcijalni autokorelacioni koeficijenti za AR procese dati su sa:

- AR(1): $\phi_{11} = \rho_1 = \phi_1$, $\phi_{kk} = 0$ za k>1.
- AR(2) $\phi_{11} = \rho_1 = \dfrac{\phi_1}{1-\phi_2}, \phi_{22} = \dfrac{\rho_2 - \rho_1^2}{1-\rho_1^2} = \phi_2$, $\phi_{kk} = 0$ za k>2.
- AR(p) $\phi_{kk} \neq 0$ za k=1,..,p , $\phi_{pp} = \phi_p$ za k=p, $\phi_{kk} = 0$ za k>p.

Zaključak: Parcijalni autokorelacioni koeficijenti su jednaki nuli za docnje veće od reda AR procesa. Značajna činjenica koju koristimo prilikom određivanja reda AR procesa jeste da parcijalni autokorelacioni koeficijent ϕ_{pp} kod AR(p) modela jednak je poslednjem autoregresionom koeficijentu ϕ_p

Na kraju navodimo interval poverenja za testiranje statističke značajnosti parcijalnih autokorelacionih koeficijenata. Naime Quenouille(Kveni) je pokazao da za procese reda p važi:

$$\sqrt{n}\hat{\phi}_{kk} : N(0,1)$$

odnosno interval poverenja izvodimo iz:

$$\alpha = P\{-c \leq \sqrt{n}\phi_{kk} \leq c\} = P\{-\tfrac{c}{\sqrt{n}} \leq \phi_{kk} \leq \tfrac{c}{\sqrt{n}}\}$$

gde je c kvantil reda $\frac{1+\alpha}{2}$, dok je n obim uzorka.

Konačno, na nivou značajnosti $\alpha = 95\%$ interval poverenja za ϕ_{kk} definišemo kao sledeći skup:

$$\left(-\tfrac{1.96}{\sqrt{n}}, \tfrac{1.96}{\sqrt{n}}\right)$$

2.3 Modeli pokretnih proseka

Naredna klasa modela koja ima široku primenu u modeliranju vremenskih serija jesu modeli pokretnih proseka. Naziv modela na engleskom jeziku je "Moving average models"pa se samim tim koristi skraćenica MA.

2.3.1 Modeli pokretnih proseka prvog reda- MA(1)

Definicija 2.3.1. *Proces X_t, $t \in T$ se naziva proces pokretnih proseka prvog reda ako je:*

$$X_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} \tag{2.3.1}$$

gde je

- *e_t proces belog šuma,*
- *θ_1 nepoznati parametar.*

Iz definicije MA procesa zaključujemo da je očekivana vrednost $E(X_t) = 0$.

1. Autokovarijaciona i autokorelacione funkcija

$$\gamma_k = E(X_t X_{t-k}) = E(e_t - \theta_1 e_{t-1})(e_{t-k} - \theta_1 e_{t-k-1})$$

$$\gamma_k = \begin{cases} (1+\theta_1^2)\sigma^2, & k=0 \\ -\theta_1\sigma^2, & k=1 \\ 0, & k>1 \end{cases} \tag{2.3.2}$$

Na osnovu definisanosti autokovarijacione funkcije dobijamo izraz za autokorelacionu funkciju:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \begin{cases} 1, & k=0 \\ -\dfrac{\theta_1}{1+\theta_1^2}, & k=1 \\ 0, & k>1 \end{cases} \tag{2.3.3}$$

► Autokorelaciona funkcija nije jedinstveno određena tj. procesi

$$X_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} \qquad \text{i} \qquad X_t = e_t - \frac{1}{\theta_1} e_{t-1}$$

imaju iste autokorelacione funkcije $\rho_1 = \dfrac{\theta_1}{1+\theta_1^2}$

► $-0.5 < \rho_k < 0.5$ za svako k vrednosti autokorelacione funkcije su ograničene.

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1}{1+\theta_1^2} \Rightarrow \quad \rho_1\theta_1^2 + \theta_1 + \rho_1 = 0 \Rightarrow \quad \theta_{1_{1/2}} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\rho_1^2}}{2\rho_1} \in \mathcal{R}$$

$$1 - 4\rho_1^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad |\rho_1| \leq 0.5$$

► Kako je MA(1) linearni proces sa konačnim očekivanjem i konačnim brojem parametara, i važi da je:

$$var(X_t) = var(e_t - \theta_1 e_{t-1}) = \sigma^2\,(1+\theta_1^2), \text{ tj.}$$

$$var(X_t) < \infty$$

dolazimo do zaključka da će proces pokretnih proseka uvek biti **slabo stacionaran**.

2. Invertibilnost

   Polazimo od MA(1) procesa $X_t = e_t - \theta_1 e_{t-1}$ koji je ekvivalentan jednakosti:

   $$e_t = X_t + \theta_1 e_{t-1}$$

   Ukoliko u poslednjoj jednakosti zamenimo $e_{t-1}, e_{t-2}, ...$ sa $X_{t-1}+\theta_1 e_{t-2}, X_{t-2}+\theta_1 e_{t-3}, ...$ dobijamo sledeći izraz:

   $$\begin{aligned} X_t &= e_t - \theta_1(X_{t-1} + \theta_1 e_{t-2}) \\ &= -\theta_1 X_{t-1} - \theta_1^2(X_{t-2} + \theta_1 e_{t-3}) + e_t \\ &= \dots \\ &= -\theta_1 X_{t-1} - \theta_1^2 X_{t-2} - \theta_1^3 X_{t-3} - \dots + e_t. \end{aligned}$$

   AR model beskonačnog reda dobijamo uvođenjem smene $\pi_j = -\theta_1^j$, j=1,2,... iz čega neposredno sledi **uslov invertibilnosti** tj ekvivalentnosti MA modela i stacionarnog AR modela:

   $$|\theta_1| < 1$$

   $$\Rightarrow \frac{1}{(1-\theta_1 L)} = (1 + \theta_1 L + \theta_1^2 L^2 + \dots)$$

3. Parcijalni autokorelacioni koeficijent

   Na osnovu definisanosti parcijalnog autokorelacionog koeficijenta (2.2.1) dobijamo da važi:

   $$\phi_{11} = \rho_1 = -\frac{\theta_1(1-\theta_1)^2}{(1+\theta_1^2)(1-\theta_1)^2} \qquad (2.3.4)$$

   odnosno za proizvoljno k:

   $$\phi_{kk} = -\frac{\theta_1^k(1-\theta_1)^2}{1-\theta_1^{2(k+1)}}, \quad k = 1, 2, 3... \quad \phi_{kk} \in (-0.5, 0.5) \qquad (2.3.5)$$

   Zaključak: Vrednost parcijalne autokorelacione funkcije za negativno θ_1 na prvoj docnji je pozitivna, a zatim naizmenično menja znak. Za pozitivno θ_1 vrednost parcijalne autokorelacione funkcije je negativna. Sa rastom kašnjenja parcijalni autokorelacioni koeficijenti opadaju.

2.3.2 Modeli pokretnih proseka reda q- MA(q)

Definicija 2.3.2. *Proces* X_t, $t \in T$ *se naziva proces pokretnih proseka reda q ako ga možemo predstaviti kao zbir članova procesa belog šuma u trenutcima* $t, t-1, \ldots, t-q$*:*

$$X_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \cdots - \theta_q e_{t-q}$$

gde je

- e_t *proces belog šuma,*
- $\theta_1, \ldots, \theta_q$ *nepoznati parametri.*

Uz uslov $\pi_1 = -\theta_1, \ldots, \pi_q = -\theta_q$ i $\pi_j = 0$ za j>q, na osnovu izraza za autokovarijacionu funkciju linearnog procesa dobijamo da važi:

$\gamma_0 = \sigma^2(1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta q^2)$

$\gamma_k = \sigma^2(-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \cdots + \theta_{q-k}\theta_q)$, $k = 1, 2, \ldots q$

$\gamma_k = 0$, k>q

U skladu sa prethodnim definišemo autokorelacionu funkciju:

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \dfrac{-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \cdots + \theta_{q-k}\theta_q}{1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2}, & k = 1, 2, \ldots, q \\ 0, & k > q \end{cases} \tag{2.3.6}$$

Važno svojstvo autokorelacione funkcije predstavlja njena definisanost nakon q docnji. Kako je autokorelaciona funkcija jednaka 0 nakon q docnji, ovu osobinu lako možemo da iskoristimo da bismo identifikovali red procesa.

Na kraju odeljka navodimo dualnost veze između MA(q) i AR(∞) modela.

1. Autoregresionom modelu konačnog reda odgovara MA model beskonačnog reda. Kao posledica javlja se sličnost u kretanju obične autokorelacione funkcije AR modela i parcijalne autokorelacione funkcije MA modela.

2. MA modelu konačnog reda odgovara AR model beskonačnog reda. Takođe javlja se sličnost u kretanju obične autokorelacione funkcije MA modela i parcijalne autokorelacione funkcije AR modela.

3. Za docnje veće od reda procesa autokorelaciona funkcija AR(p) procesa i parcijalna autokorelaciona funkcija MA(q) procesa lagano odumiru, dok su parcijalna autokorelaciona funkcija AR(p) procesa i autokorelaciona funkcija MA(q) procesa jednake 0.

2.4 Autoregresioni modeli pokretnih proseka

U prethodnim poglavljima sumirali smo autoregresione modele i modele pokretnih proseka kao načine za definisanje stacionarnih i invertibilnih procesa. Problem na koji nailazimo predstavljaju modeli koji zahtevaju korišćenje velikog broja koeficijenata što samim tim otežava rad i smanjuje efikasnost ocenjivanja samih modela. Kao odgovor na ovaj problem uvedena je nova klasa modela- autoregresioni modeli pokretnih proseka tj skraćeno ARMA modeli.

Definicija 2.4.1. *Proces $\{X_t, t \in T\}$ je ARMA(p,q) ako ga možemo definisati na sledeći način:*

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p)X_t = (1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \cdots - \theta_q L^q)e_t \quad (2.4.1)$$

gde je:

- *p red autoregresione komponente,*
- *q red komponente pokretnih proseka,*
- *e_t proces belog šuma.*

2.4.1 ARMA(1,1) model

Definicija 2.4.2. *Proces $\{X_t, t \in T\}$ definišemo kao ARMA(1,1) proces ako zadovoljava uslov:*

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} = e_t - \theta_1 e_{t-1} \quad (2.4.2)$$

gde leva strana jednakosti predstavlja AR komponentu ARMA modela reda p=1, dok je desna strana jednakosti jednaka MA komponenti reda q=1.

Polaznu jednakost (2.4.2) možemo da predstavimo i preko operatora docnje na sledeći način:

$$(1 - \phi_1 L)X_t = (1 - \theta_1 L)e_t \Rightarrow \Phi(L)X_t = \Theta(L)X_t$$

Pri tome polazimo od pretpostavke da polinomi AR i MA modela respektivno $\Phi(L)$ i $\Theta(L)$, nemaju zajedničkih faktora tj $\phi_1 \neq \theta_1$. U suprotnom bi dobili proces belog šuma.

1. <u>Stacionarnost i invertibilnost modela</u>:

   AR(1) i MA(1) su specijalni slučajevi ARMA(1,1) modela pa samim tim ARMA model ima slične osobine. Ukoliko ARMA(1,1) model prikažemo korišćenjem AR forme $\pi(L)X_t = e_t$ dobijamo da su π- ponderi dati sa:

   $$\pi(L) = (1 - \pi_1 L - \pi_2 L^2 - \dots) = \frac{1 - \theta_1 L}{1 - \phi_1 L}$$

   gde je

   $$(1 - \theta_1 L)(1 - \pi_1 L - \pi_2 L^2 - \dots) = (1 - \phi_1 L)$$

   tj. važi

   $$(1 - (\pi_1 + \theta_1)L - (\pi_2 - \pi_1\theta_1)L^2 - \dots) = (1 - \phi_1 L)$$

   Ukoliko u prethodnoj jednakosti izjednačimo koeficijente uz L dobijamo sledeće jednakosti:

   L: $\pi_1 L - \phi_1 L = -\theta_1 L \Rightarrow \pi_1 = \phi_1 - \theta_1$

   L^2: $\pi_2 L^2 - \theta_1\pi_1 L^2 = 0 \Rightarrow \pi_2 = \theta_1\pi_1 = \theta_1(\phi_1 - \theta_1)$

   $$\vdots$$

   odnosno u opštem slučaju:

   $$\pi_j = \theta_1^{j-1}(\phi_1 - \theta_1), j \geqslant 1$$

   Uslov stacionarnosti:

   Ako je $|\theta_1| < 1 \Rightarrow \pi$ ponderi konvergiraju,tj AR proces je stacionaran.

   Da bismo pokazali invertibilnost procesa polazimo od MA(1) modela:

   $$\psi(L)e_t = X_t$$

   gde su ψ ponderi dati sa:

   $$\psi(L) = (1 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \dots) = \frac{1 - \theta_1 L}{1 - \phi_1 L}$$

odnosno možemo da zapišemo u sledećem obliku:

$$(1-\phi_1 L)(1+\psi_1 L+\psi_2 L^2+\dots)=(1-\theta_1 L)$$

Izjednačavajući koeficijente sa leve i desne strane prethodne jednakosti, dobijamo relaciju:

$$\psi_j=\phi_1^{j-1}(\phi_1-\theta_1), j\geqslant 1 \tag{2.4.3}$$

Uslov invertibilnosti:

Ako je $|\phi_1|<1 \Rightarrow \psi$ ponderi konvergiraju,tj MA proces će biti invertibilan.

Kao posledica izraza (2.4.1.2) zaključujemo da ARMA(1,1) model je specijalan slučaj linearnog procesa i na osnovu njegovih parametara, a korišćenjem jednakosti (2.4.1.2) dobijamo parametre linearnog procesa.

2. Varijansa:

Polazimo od ARMA(1,1) modela koji množimo sa e_t:

$$X_t e_t=(\phi_1 X_{t-1}+e_t-\theta_1 e_{t-1})e_t$$

Uzimajući očekivanu vrednost dobijamo:

$$E(X_t e_t)=E(e_t^2)-\theta_1 E(e_{t-1}e_t)=E(e_t^2)=\sigma^2$$

Na osnovu prethodnog možemo da izvedemo varijansu ARMA(1,1) procesa :

$$\begin{aligned}var(X_t)&=var(\phi_1 X_{t-1}+e_t-\theta_1 e_{t-1})\\&=\phi_1^2 var(X_{t-1})+var(e_t)+\theta_1^2 var(e_{t-1})\\&+2\phi_1 cov(X_{t-1},e_t)-2\theta_1 cov(e_t,e_{t-1})-2\phi_1\theta_1 cov(X_{t-1},e_{t-1}).\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \gamma_0=\frac{1-2\phi_1\theta_1+\theta_1^2}{1-\phi_1^2}\sigma^2$$

Zaključujemo da varijansa ARMA(1,1) modela zavisi samo od parametara modela.

3. Autokovarijaciona funkcija:

Množeći ARMA(1,1) model sa X_{t-k} dobijamo:

$$X_t X_{t-k} = \phi_1 X_{t-1} X_{t-k} - \theta_1 e_{t-1} X_{t-k} + e_t X_{t-k}$$

gde je opšti oblik autokovarijacione funkcije:

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + E(e_t X_{t-k}) - \theta_1 E(e_{t-1} X_{t-k})$$

k=1:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \phi_1 \gamma_0 + E(e_t X_{t-1}) - \theta_1 E(e_{t-1} X_{t-1}) \\
&= \phi_1 \gamma_0 - \theta_1 \sigma^2 \\
&= \phi_1 \left[\frac{1 - 2\phi_1\theta_1 + \theta_1^2}{1 - \phi_1^2} \sigma^2 \right] - \theta_1 \sigma^2 \\
&= \left[\frac{\phi_1 - \phi_1^2\theta_1 + \phi_1\theta_1^2 - \theta_1}{1 - \phi_1^2} \sigma^2 \right] \\
&= \frac{(\phi_1 - \theta_1)(1 - \phi_1\theta_1)}{(1 - \phi_1^2)} \sigma^2.
\end{aligned}$$

k>1:

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} \tag{2.4.4}$$

4. Obična i parcijalna autokorelaciona funkcija:

Na osnovu izraza za autokovarijacionu funkciju izvodimo formulu za običnu autokorelacionu funkciju:

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \dfrac{(\phi_1 - \theta_1)(1 - \phi_1\theta_1)}{1 - 2\phi_1\theta_1 + \theta_1^2}, & k = 1 \\ \phi_1 \rho_{k-1} & k > 1 \end{cases} \tag{2.4.5}$$

Iz jednakosti (2.4.5) možemo da zaključimo da autokorelaciona funkcija ARMA(1,1) modela zavisi od parametara AR i MA modela na rastojanju 1, dok je za docnje veće od reda 1 ekvivalentna autokorelacionoj funkciji AR(1) modela.

Na kraju navodimo osobine autokorelacione i parcijalne autokorelacione funkcije ARMA(p,q) modela:

- Prvih q autokorelacionih koeficijenata zavisi od AR i MA komponenete.
- Za docnje veće od reda q, autokorelaciona funkcija se ponaša kao kod AR modela.
- Parcijalna autokorelaciona funkcija za docnje reda 1,2,...,p zavisi od parametara AR i MA modela.
- Za docnje veće od p, odnosno ako su docnje veće od reda AR komponente, parcijalni autokorelacioni koeficijenat karakteriše ponašanje koje je slično parcijalnoj autokorelacionoj funkciji kod MA modela.

Glava 3

Autoregresioni modeli pokretnih proseka za integrisane vremenske serije (ARIMA modeli)

U prethodnim poglavljima objasnili smo metode za definisanje stacionarnih vremenskih serija. Naime stacionarni stohastički proces odlikuje:

- Konstantnost sredine
- Konstantnost varijanse
- Autokovarijaciona funkcija zavisi samo od vremenskog intervala

Nestacionarne vremenske serije su serije sa vremenski zavisnim nivoom i/ili varijansom.

Stacionarnost vremenske serije možemo postići odgovarajućim transformacijama. Međutim da bi definisali odgovarajuću transformaciju potrebno je da odredimo uzrok nestacionarnosti procesa.

U skladu sa dugoročnim rastom (padom) tokom vremena, vremensku seriju možemo da definišemo pomoću sledeće dve klase modela:

1. *Trend-stacionarna klasa modela*:

$$X_t = \beta_0 + \beta_1 t + Z_t \quad t = 1, 2, .., \quad \beta_0, \beta_1 = const. \tag{3.0.1}$$

   Pod trend-stacionarnom klasom modela podrazumevamo modele koji se sastoje od dve komponente, funkcije linearnog trenda kojim je opisano determinističko kretanje i slučajne greške modela za koju pretpostavljamo da je stacionarna vremenska serija- Z_t. Stacionarnost postižemo eliminisanjem determinističke komponente.

2. Vremenske serije čije je kretanje tokom vremena potpuno slučajno nazivaju se *diferencno-stacionarne vremenske serije*:

$$(1-L)X_t = \beta + Z_t \text{ , t=1,2,.. , } \beta = const., \quad \phi\left(L\right) Z_t = \Theta\left(L\right) e_t$$

$$tj. \mathit{\Delta} X_t = \beta + Z_t \tag{3.0.2}$$

Diferencno-stacionarni procesi su procesi kod kojih stacionarnost postižemo diferenciranjem.

Definicija 3.0.3. *Vremenska serija X_t je integrisana reda d ako je diferenciranjem d puta transformišemo u stacionarnu vremensku seriju . Red integrisanosti d označavamo $X_t \sim I(d)$.*

Autoregresioni modeli pokretnih proseka za integrisane vremenske serije se koriste u analizi vremenske serije kada je data serija nestacionarna. Da bi postigli stacionarnost potrebno je da diferenciramo seriju.

Definicija 3.0.4. *ARIMA(p,d,q) model definišemo pomoću jednakosti:*

$$\phi\left(L\right)\left(1-L\right)^d X_t = \theta_0 + \Theta\left(L\right) e_t, \tag{3.0.3}$$

gde važi:

- $\phi\left(L\right) = \left(1 - \phi_1 L - ... - \phi_p L^p\right)$; $\Theta\left(L\right) = \left(1 - \theta_1 L - .... - \theta_q L^q\right)$.
- p je oznaka za red autoregresione komponete AR(p), dok q predstavlja red komponente pokretnih proseka u oznaci MA(q)
- e_t označava proces belog šuma

Koliko puta je potrebno diferenicrati seriju, odnosno red integrisanosti dat je sa d. Vrednost konstante θ_0 je povezana sa redom integrisanosti.

Vremenska serija menja svoja svojstva prilikom odabira određene vrednosti za red integrisanosti. Tako dobijamo sledeće osobine:

- d=0 tada imamo jedan stacionarni proces za koji važi

$$\theta_0 = \mu(1 - \phi_1 - ... - \phi_p),\ \mu = E(X_t)$$

- d>0 sledi da θ_0 označava postojanje determinističkog trenda

- Ukoliko za diferenciranu vremensku seriju procenimo da ne postoje indikcije o postojanju determinističkog trenda tada konstantu nećemo uključiti u model za prognoziranje.

Za vrednost parametra $\theta_0 = 0$, dobijamo ARIMA proces:

$$\phi\,(L)\,W_t = \Theta\,(L)\,e_t, \quad W_t = (1 - L)^d X_t$$

Za $d \geq 1$ važi:

$$X_t = S^d W_t \;,\; S = (1 + L + L^2 + \dots)$$

U skladu sa prethodnim zaključujemo da "integrisani" u nazivu ARIMA modela potiče od sumiranja stacionarnog procesa d puta.

U nastavku poglavlja navodimo dva primera ARIMA modela.

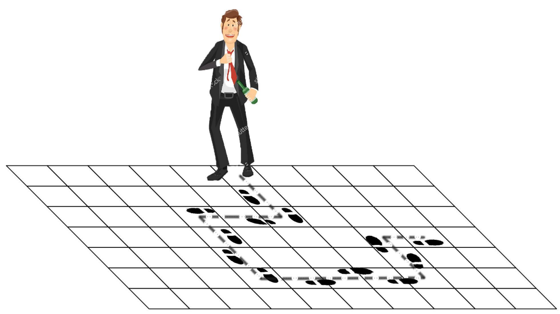
3.1 Proces slučajnog hoda

Proces slučajnog hoda (engl. random walk process) predstavlja najjednostavniji primer ARIMA modela gde za parametre p,d,q uzimamo vrednosti 0,1,0 respektivno. Na taj način dobijamo model definisan sledećom jednačinom:

$$X_t = X_{t-1} + e_t \tag{3.1.1}$$

Gore izložena jednakost odnosi se na *klasičan slučajan hod* gde je $X_0 = 0$.

Naziv slučajan hod proističe iz definisanosti samog procesa. Naime ponašanje ovog procesa podseća na pijanog čoveka, koji krivuda tokom kretanja i čije je kretanje nepredvidivo.



Ukoliko vremenska serija poseduje konstantni prirast označen sa $\beta > 0$ tada proces slučajnog hoda definišemo na sledeći način:

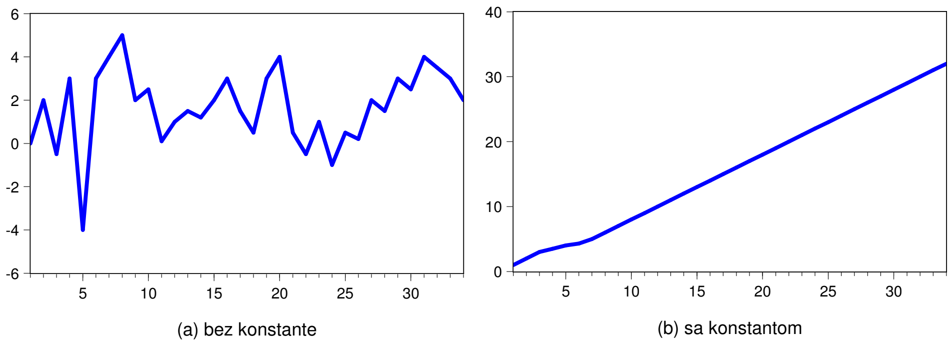
$$X_t = \beta + X_{t-1} + e_t \tag{3.1.2}$$

U tom slučaju X_t nazivamo procesom *slučajnog hoda sa konstantom*. Njegovim diferenciranjem dobijamo stacionarnu seriju, pa ga svrstavamo u grupu diferencno-stacionarnih procesa.

Za $\phi_1 = 1$ proces AR(1) svodi se na proces slučajnog hoda i autokorelaciona funkcija slučajnog hoda je neopadajuća. Parcijalna autokorelaciona funkcija je jednaka nuli na svim docnjama, osim prve docnje gde je blizu jedinice.

Diferenciranjem procesa slučajnog hoda dobijamo proces belog šuma čija je autokorelaciona funkcija jednaka nuli na svim docnjama.

Na osnovu grafika vremenske serije možemo da uočimo da li je proces slučajnog hoda sa konstantom ili bez kao što možemo da vidimo na sledećoj slici.



Slika 3.1: Proces slučajnog hoda

3.2 ARIMA(0,1,1)

Kada za parametre modela uzmemo vrednosti p=0, q=1 i d=1 dobijamo proces definisan sa:

$$X_t = X_{t-1} + e_t - \theta_1 e_{t-1}. \tag{3.2.1}$$

odnosno korišćenjem operatora docnje:

$$(1 - L)X_t = (1 - \theta_1 L)e_{t-1}, \quad |\theta_1| < 1. \tag{3.2.2}$$

Diferenciranjem ARIMA(0,1,1) procesa dobijamo stacionarni MA(1) proces. Samim tim obična i parcijalna autokorelaciona funkcija prvih diferenci imaju sve odlike kao kod pokretnih proseka prvog reda.

Za sve ARIMA modele sledi zajedničko svojstvo da vrednost autokorelacionih koeficijenata lagano odumire ka nuli, dok su parcijalni autokorelacioni koeficijenti su jednaki nuli na svim docnjama osim prve, gde teže jedinici.

Na sledeći način ARIMA proces predstavlja skup specijalnih slučajeva neki od prethodno razmatranih modela:

AR(p)	MA(q)	ARMA(p,q)	Beli šum	Slučajan hod
ARIMA(p,0,0)	ARIMA(0,0,q)	ARIMA(p,0,q)	ARIMA(0,0,0)	ARIMA(0,1,0)

3.3 Testovi jediničnog korena

Jedan od načina za određivanje reda diferenciranja jeste na osnovu običnog i parcijalnog uzoračkog korelograma. Kako ovaj pristup ne može u svim slučajevima da nam pomogne u donošenju odluke da li je seriju potrebno diferencirati ili ne, formalniji pristup koji se često koristi jeste testiranje prisustva jednog ili više jedniničnih korena.

Na osnovu testa jedniničnih korena možemo da odredimo:

- stacionarnost odnosno nestacionarnost vremenske serije
- U slučaju kada serija nije stacionarna određujemo broj jediničnih korena

3.3.1 Diki-Fulerov test (DF) test

Jedan od testova jediničnih korena jeste Diki-Fulerov test, nazvan po naučnicima koji su zaslužni za njegovo definisanje Diki i Fuleru.

Da bismo prikazali postupak testiranja jediničnih korena koristićemo autoregresione modele. Ograničenje na AR modele nije posebno restriktivno jer stacionarnost ARMA modela zavisi od AR komponenete.

Polazimo od autoregresionog modela prvog reda AR(1), i želimo da utvrdimo da li je vremenska serija X_t stacionarna:

$$X_t = \phi X_{t-1} + e_t$$

gde je e_t greška modela sa svojstvima belog šuma.

Kako putanje vremenske serije X_t zavisi od vrednosti parametra ϕ, za testiranje stacionarnosti koristimo sledeće hipoteze:

H_0: ϕ=1 $\Rightarrow$ X_t poseduje jedinični koren.
H_1: ϕ<1 $\Rightarrow$ X_t je stacionarna vremenska serija.

Da bismo testirali nultu hipotezu da je proces nestacionaran protiv alternativne, primenom metode običnih najmanjih kvadrata koristimo ocenu parametra ϕ za testiranje hipoteza na uzorku obima T:

$$\hat{\phi} = \frac{\sum\limits_{t=2}^{T} X_t X_{t-1}}{\sum\limits_{t=2}^{T} X_{t-1}^2} \tag{3.3.1}$$

odnosno njegove standardne greške ocene $s(\hat{\phi})$:

$$s(\hat{\phi}) = \sqrt{\frac{s^2}{\sum\limits_{t=2}^{T} X_{t-1}^2}}, \quad s^2 = \frac{\sum\limits_{t=2}^{T} X_t^2 - \hat{\phi} \sum\limits_{t=2}^{T} X_t X_{t-1}}{(T-1)-1}$$

Test-statistiku koju koristimo za testiranje hipoteza :

$$\tau = \frac{\hat{\phi} - 1}{s\left(\hat{\phi}\right)} \tag{3.3.2}$$

karakteriše t-odnos između ocene koeficijenata i njegove standardne greške koji su definisali Diki i Fuler. Fuler je pokazao da taj odnos nema standardan t-raspored ako je tačna nulta hipoteza.

Vrednost DF statistike poredimo sa kritičnom vrednošću. Nultu hipotezu prihvatamo kao tačnu u slučaju kada je vrednost test statistike veća od kritične vrednosti.

Ukoliko utvrdimo postojanje jediničnog korena tada nastavljamo postupak testiranja prve diference:

H_0 *tačna => serija ima bar dva jedinična korena i potrebno je daljim testiranjem druge diference testirati stacionarnost.*

H_0 *netačna => prva diferenca je stacionarna i vremenska serija ima jedan jedinični koren. Samim tim postupak testiranja je završen prihvatanjem alternativne hipoteze.*

Kao što ćemo pokazati u nastavku raznim modifikacijama DF statistike možemo da promenimo njen raspored.

1. Autoregresioni proces prvog reda možemo zapisati i kao sledeću jednakost:

$$X_t - X_{t-1} = (\phi - 1)X_{t-1} + e_t$$

$$\Delta X_t = (\phi - 1)X_{t-1} + e_t$$

   Smenom $\psi = \phi - 1$, AR(1) proces transformišemo na sledeći način:

$$\Delta X_t = \psi X_{t-1} + e_t \tag{3.3.3}$$

   Modifikacijom početnog modela testiranje se svodi na ispitivanje tačnosti hipoteza:

   H_0: $\psi = 0 \Rightarrow X_t$ ima jedan jedinični koren .

   H_1: $\psi < 0 \Rightarrow X_t$ je stacionarna vremenska serija.

   Kao i u slučaju polaznog modela izračunatu vrednost DF test statistike:

$$\tau = \frac{\hat{\psi}}{s\left(\hat{\psi}\right)} \tag{3.3.4}$$

   poredimo sa kritičnom vrednošću.

2. Uvođenjem konstante u model $E(X_t) = \mu$, menjamo raspored statistike i dobijamo modifikovani model:

$$X_t - \mu = \phi(X_{t-1} - \mu) + e_t$$

   Smenom $\beta_0 = \mu(1 - \phi)$ dobijamo novu jednačinu:

$$X_t = \beta_0 + \phi X_{t-1} + e_t,$$

$$\Delta X_t = \beta_0 + \psi X_{t-1} + e_t. \tag{3.3.5}$$

Testiramo nultu hipotezu o prisustvu jedničnog korena nasprem alternativne o stacionarnosti vremenske serija:

H_0: $\psi = 0 \Rightarrow X_t$ ima jedan jedinični koren .

H_1: $\psi < 0, \Rightarrow X_t$ je stacionarna vremenska serija.

DF test statistiku modifikovanog modela τ_μ poredimo sa kritičnom vrednošću.

3. Naredna modifikacija predstavlja uvođenje linearnog trenda čime dobijamo model gde se srednja vrednost vremenske serije menja u svakom momentu zavisno od kretanja $\mu + bt$:

$$X_t - \mu - bt = \phi[X_{t-1} - \mu - b(t-1)] + e_t \ ,$$

$$X_t = \mu(1-\phi) + b\phi + b(1-\phi)t + \phi X_{t-1} + e_t \ ,$$

$$X_t = \beta_0 + \beta_1 t + \phi X_{t-1} + e_t, \quad \beta_0 = \mu(1-\phi) + \phi b i \beta_1 = b(1-\phi). \tag{3.3.6}$$

Testiranja prisustva jedničnog korena vršimo preko hipoteza:

H_0: $\phi = 1 \Rightarrow X_t$ ima jedan jedninični koren sa konstantnim prirastom.

H_1: $\phi < 1 \Rightarrow X_t$ je trend-stacionarna vremenska serija.

Test statistiku τ_t kojom ocenjujemo zavisnost vremenske serije X_t od X_{t-1}, linearnog trenda i konstante dobijamo ocenom parametara modela:

$$\Delta X_t = \beta_0 + \beta t + \psi X_{t-1} + e_t. \tag{3.3.7}$$

U sledećoj tabeli dajemo prikaz različitih varijanti DF testa i modela koji ocenjujemo.

Kritične vrednosti za DF test statistike date u tabeli 3.3 izračunavamo korišćenjem jednakosti:

$$\beta_\infty + \frac{\beta_1}{T} + \frac{\beta_2}{T^2} \tag{3.3.8}$$

Tabela 3.1: DF test statistika

DF test statistika	E(X_t)	Model
τ	0	$\Delta X_t = \psi X_{t-1} + e_t$
τ_μ	μ	$\Delta X_t = \beta_0 + \psi X_{t-1} + e_t$
τ_t	$\mu + bt$	$\Delta X_t = \beta_0 + \beta t + \psi X_{t-1} + e_t$

4. Kod autoregresionih procesa višeg reda koriste se modifikacije prethodno navedenih modela. Polaznom modelu se dodaju promenljive ΔX_{t-1},...,ΔX_{t-K}, čime dobijamo model:

$$\Delta X_t = \beta_0 + \beta t + \varphi X_{t-1} + \delta_1 \Delta X_{t-1} + ... + \delta_k \Delta X_{t-k} + e_t \qquad (3.3.9)$$

U modifikovanom modelu $\delta_1, ..., \delta_k$ su oznake za parametre modela. **ADF(K)** predstavlja oznaku za **proširenu DF test statistiku** koju dobijamo iz prethodnog modela, i koriste se iste kritične vrednsti kao i kod DF test statistike.

Cilj je izabrati odgovarajuću vrednost parametra K, tj promenljivih ΔX_{t-i}, i= 1,...,K. Dobrim izborom vrednosti K osiguravamo da će autokorelacija biti eliminisana. Sa druge strane ukoliko odaberemo K veće od optimalne vrednosti parametra K, u model uključujemo nepotrebne parametre. Posledica odabira pogrešne vrednosti parametra K ogleda se u neopravdanom odbacivanju odnosno prihvatanju nulte hipoteze o prisustvu korena.

U toku izbora reda K možemo da koristimo tri strategije:

(a) Strategija od posebnog ka opštem ogleda se u proširivanju modela sve dok se ne utvrdi da je autokorelacija eliminisana. Prvo se dodaje ΔX_{t-1} , i ukoliko se na osnovu standardnog t-testa utvrdi njena značajnost, postupak se završava zaključkom da ADF(1) test statistika odgovarajuća, u suprotnom dodajemo sledeću promenljivu i nastavljamo testiranje.

(b) Strategija od opšteg ka posebnom ima suprotan pristup utvrđivanju reda K u odnosu na prethodno opisanu strategiju. Naime ovde polazimo od testiranja poslednje promenljive u nizu ΔX_{t-k} za koju proveravamo statističku značajnost. Ukoliko se utvrdi da je statistički značajna, zadržavamo sve prethodne promenljive u nizu i koristimo ADF(K) model. U suprotnom datu promenljivu izostavljamo iz modela i prelazimo na testiranje ΔX_{t-k+1}.

(c) Strategija izbora informacionih kriterijuma osigurava optimalni izbor broja parametara K. Informacioni kriterijum označavamo sa IC i definišemo kao funkciju:

$$IC(K) = Ln(s^2) + g(\frac{k+3}{T})$$

gde s^2 ocena varijanse slučajne greške zavisi od obima uzorka T i broja ocenjenih parametara (K+3). g predstavlja nenegativnu rastuću funkciju.

Tabela 3.2: Informacioni kriterijumi

Funkcija g	Informacioni kriterijum	Naziv modela
2	$Ln(s^2) + 2(\frac{k+3}{T})$	Akaikeov model (AIC)
lnT	$Ln(s^2) + lnT(\frac{k+3}{T})$	Švarcov model (BIC)
2lnlnT	$Ln(s^2) + 2lnlnT(\frac{k+3}{T})$	Hana-Kvinov model (HQ)

Sa rastom K dolazimo do:

- Smanjenja $Ln(s^2)$
- Povećanja $g(\frac{k+3}{T})$

Prethodni rezultat ukazuje nam na suprostavljene zahteve funkcije IC, gde sa jedne strane težimo preciznom ocenjivanju kroz povećavanje reda

K, dok sa druge strane nastojimo da obezbedimo ekonomičnost modela kroz manji broj parametara. Kako bi pokazali da se AIC kriterijumom možemo dovesti do izbora manjeg broja parametara u odnosu na optimalan broj, posmatrajmo sledeće nejednakosti:

Za dato K i $T \geqslant 8$ vrednost Švarcovog kriterijuma je veća od vrednosti AIC što samim tim znači da Švarcovim kriterijumom više kažnjavamo povećanje vrednosti parametra. Kako važi da $2lnlnT > 2$ za $T \geq 16$ dolazimo do konačnog zaključka:

$$\text{SC}>\text{HQC}>\text{AIC}$$

U praksi je najzastupljeniji Švarcov kriterijum.

Tabela 3.3: Kritične vrednosti DF test statistika

N	Model	Nivo značajnosti	β_∞	Greška ocene	β_1	β_2
1	Bez konstante	1%	-2.5658	0.0023	-1.960	-10.04
		5%	-1.9393	0.0008	-0.398	0.00
		10%	-1.6156	0.0007	-0.181	0.00
1	Bez trenda	1%	-3.4335	0.0024	-5.999	-29.25
		5%	-2.8621	0.0011	-2.738	-8.36
		10%	-2.5671	0.0009	-1.438	-4.48
1	Sa trendom	1%	-3.9638	0.0019	-8.353	-47.44
		5%	-3.4126	0.0012	-4.039	-17.83
		10%	-3.1279	0.0009	-2.418	-7.58
2	Bez trenda	1%	-3.9001	0.0022	-10.534	-30.03
		5%	-3.3377	0.0012	-5.967	-8.98
		10%	-3.0462	0.0009	-4.069	-5.73
2	Sa trendom	1%	-4.3266	0.0022	-15.531	-34.03
		5%	-3.7809	0.0013	-9.421	-15.06
		10%	-3.4959	0.0009	-7.203	-4.01
3	Bez trenda	1%	-4.2981	0.0023	-13.79	-46.37
		5%	-3.7429	0.0012	-8.352	-13.41
		10%	-3.4518	0.0010	-6.421	-2.79
3	Sa trendom	1%	-4.6676	0.0022	-18.492	-49.35
		5%	-4.1193	0.0011	-12.024	-13.13
		10%	-3.8344	0.0009	-9.188	-4.85
4	Bez trenda	1%	-4.6493	0.0023	-17.188	-59.20
		5%	-4.1000	0.0012	-10.745	-21.57
		10%	-3.8110	0.0009	-8.317	-5.19
4	Sa trendom	1%	-4.9695	0.0021	-22.504	-50.22
		5%	-4.4294	0.0012	-14.501	-19.54
		10%	-4.1474	0.0010	-11.165	-9.88
5	Bez trenda	1%	-4.9587	0.0026	-22.140	-37.29
		5%	-4.4185	0.0013	-13.641	-21.16
		10%	-4.1327	0.0009	-10.638	-5.48
5	Sa trendom	1%	-5.2497	0.0024	-26.606	-49.56
		5%	-4.7154	0.0013	-17.432	-16.50
		10%	-4.4345	0.0010	-13.654	-5.77
6	Bez trenda	1%	-5.2400	0.0029	-26.278	-41.65
		5%	-4.7048	0.0018	-17.120	-11.17
		10%	-4.4242	0.0010	-13.347	0.00
6	Sa trendom	1%	-5.5127	0.0033	-30.735	-52.50
		5%	-4.9767	0.0017	-20-833	-9.05
		10%	-4.6999	0.0011	-16.445	0.00

Glava 4

Boks Dženkinsov model

Planiranje predstavlja značajan faktor u raznim sferama poslovanja počev od biznisa preko industrije pa sve do državnih institucija i vlade. Osnovu buduće odluke čine očekivane vrednosti određenih promenljivih. Kako bismo uvideli značajnost planiranja, u nastavku teksta navodimo primer gde nam predviđanje može pomoći u planiranju i donošenju budućih odluka.

Primer 4.1 Kompanija X se bavi proizvodnjom kancelarijskog materijala, u svrhu veleprodaje. Da bi zadržala konkurentnost na tržištu kompanija treba da proizvodi i čuva određene količine materijala. Sa druge strane čuvanje inventara dovodi do povećanja rashoda i smanjenja profita. Cilj kompanije je da maksimizira profit i minimizira rashode. Da bi to ostvarili potrebno je da dobro procene očekivanu vrednost buduće prodaje, odnosno da urade prognozu prodaje na kojoj će se temeljiti njihove buduće odluke.

Sistematski pristup kojim iz široke klase ARIMA modela izdvajamo model koji na najbolji način opisuje kretanje određenog skupa podataka vremenske serije koncipirali su Boks i Dženkins.

Cilj modeliranja jeste da pronađemo odgovarajuću vezu između istorijskih podataka koje koristimo da bi izgradili model, i trenutnih vrednosti vremenske serije. Boks-Dženkinsov model se koristi samo kod većih primena. Naime usled kompleksnosti modela potrebno je uzorkovati ogromnu količinu podataka, minimum 50 perioda, da bi model dao odgovarajuću prognozu.

Model za prognoziranje često nije podvrgnut osnovnom kriterijumu **Da li je model dobar za primenu?** Da bismo izbegli grešku koja je česta u praksi navodimo principe koje model treba da ispuni da bi se smatrao dobrim:

1.***Ekonomičnost*** Pri izboru modela jedan od osnovnih kriterijuma kojim se vodimo jeste da je model ekonomičan, odnosno da sadrži mali broj koeficijenata. Uslov ekonomičnosti je posebno značajan kod kompleksnih modela, kao što je Boks Dženkinsov, koji zahtevaju veliku količinu podataka. Mnoge kompanije temelje svoje poslovanje na principu ekonomičnosti-pojednostavljivanjem procesa i uštedom u određenim sferama poslovanja, povećaće efikasnost poslovanja. Kako bismo ispunili uslov ekonomičnosti pri izboru modela, ukoliko imamo više modela sa istim osobinama, biramo uvek najjednostavniji.

2.*Identifikabilnost* Identifikabilnost je značajan faktor u interpetaciji modela. Za model se kaže da je neidentifikovan ako postoji čitav niz vrednosti saglasnih sa podacima. Pojam identifikacije ima drugačije značenje kod ekonometrijskih modela i u slučaju Boks Dženkisovog modela. Naime kao što ćemo videti i detaljnije objasniti u nastavku rada, kod Boks-Dženkinsa u fazi identifikacije biramo samo užu klasu ARIMA modela.

3.*Konzistentnost sa podacima* Na osnovu raznih testova za proveru da li je model adekvatan, može se utvrditi njegova konzistentnost sa podacima. Jedan od uslova koji model treba da zadovoljava da bi se smatrao dobrim modelom jeste da se dobro prilagođava podacima. Pored toga od modela se očekuje da ima male reziduale sa odlikama potpuno slučajnog procesa.

4.*Konzistentnost sa teorijom* Jedan od osnovnih principa koji pokazuje koliko je model dobar jeste njegova konzistentnost sa teorijom ali i zdravim razumom. Pod tim podrazmevamo da ako iz teorije proizilazi da znak koeficijenata treba da ima određeni predznak ili veličinu, dobijeni rezultati ocenjenog modela treba da su u saglasnosti sa tim zaključcima.

5.*Prihvatljivost podataka* Pod kriterijumom prihvatljivosti modela podrazumevamo da vrednosti koje model generiše treba da zadovoljavaju definiciona ograničenja. Da bismo približili ovaj princip navodimo primer:

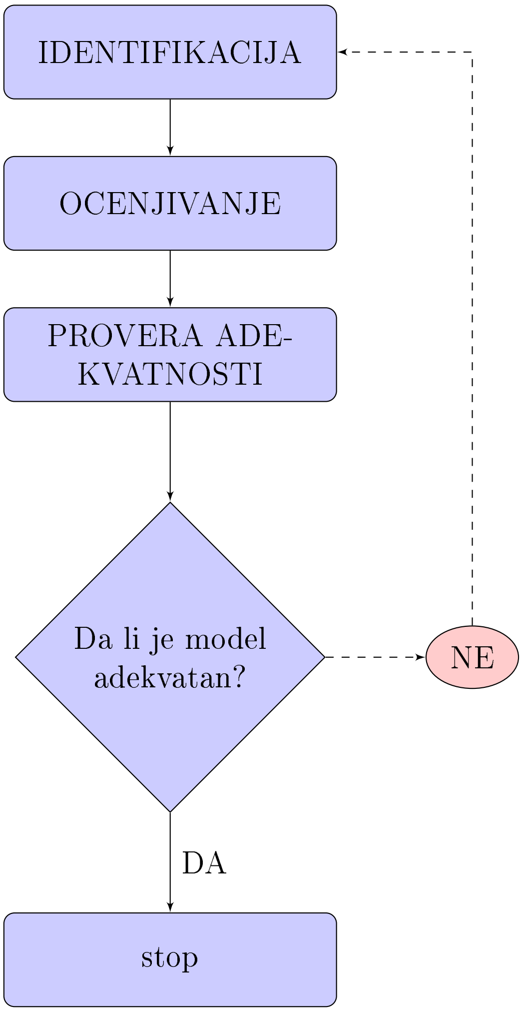
Primer 4.2 Posmatrajmo vremensku seriju koja opisuje kretanje učešča poreza na dohodak građana u ukupnim poreskim prihodima budžeta Republike Srbije. Iz poznatih definicionih ograničenja proizilazi da opservacije ove vremenske serije ne mogu uzeti vrednosti veće od 100, kao ni negativne vrednosti.

Kao što smo videli iz primera, da bi model bio prihvatljiv treba da ima nenegativne vrednosti i manje od 100, odnosno treba da zadovoljava određena ograničenja.

6. ***Uspešnost prognoziranja*** Jedan od ciljeva analize vremenskih serija jeste predviđanje budućeg ponašanja, odnosno razvoja posmatrane pojave. Stoga da bismo se osigurali da će naš model na dobar način predvideti buduće ponašanje, važno je da zadovoljava kriterijum uspešnosti prognoziranja. Šta podrazumevamo pod kriterijumom uspešnosti prognoziranja? Podrazumevamo da ***model vremenske serije daje precizne prognoze.*** Kako je navedeni kriterijum usko povezan sa konstantnošću koeficijenata modela, preciznost prognoze možemo proveriti na osnovu ponovnog ocenjivanja koeficijenata, van prvobitno korišćenog uzorka. Ukoliko dobijene ocene koeficijenata statistički značajno ne odstupaju od prvobitno dobijenih ocena, model možemo smatrati ***stabilnim.*** Model je uspešniji u prognoziranju i samim tim prihvatljiviji u odnosu na konkurente, ukoliko ima manju srednje kvadratnu grešku prognoze, dok su sve ostale karakteristike jednake.

7. ***Obuhvatnost*** Pod obuhvatnošću modela podrazumevamo modele kojima možemo da opišemo i objasnimo rezultate konkurentnog modela, odnosno konkurentski model ne možemo da iskoristimo u svrhu poboljšanja našeg modela. Važno je napomenuti da ukoliko je neki model obuhvatniji, da bismo se opredelile za njega on treba da zadovoljava i sve prethodne kriterijume dobrog modela. U suprotnom se opredeljujemo za konkurentski model.

Boks Dženkinsov pristup se sastoji iz tri faze:



Kao što možemo da zaključimo na osnovu slike, Boks-Dženkinsov model je iterativan, tj sastoji se iz trostepenog pristupa. Kako je pristup često sadržavao veliki stepen subjektivnosti, definisani su brojni testovi i kriterijumi koji u navedenim fazama davaju smernice za dalje odluke.

U fazi identifikacije testovi jedničnih korena i razni kriterijumi za izbor reda procesa pomažu prilikom odabira odgovarajućeg modela, usled čega je otklonjeno prisustvo subjektivnosti u datoj fazi. Prvo je potrebno izračunati autokorelacionu i parcijalnu autokorelacionu funkciju da bi mogli da identifikujemo odgovarajući model iz široke klase ARIMA modela. Nakon toga sledi ocena parametara na osnovu istorijskih podataka i reziduala.

Poslednji korak predstavlja provera adekvatnosti modela gde testiramo da li reziduali predstavljaju proces belog šuma i testiramo koliko su ocenjeni koeficijenti statistički značajni. Ukoliko postoji odstupanje, potrebno je napraviti modifikaciju modela i ponoviti trostepeni pristup Boks Dženkinsa sve dok ne dobijemo adekvatan model za datu vremensku seriju.
U nastavku rada dajemo detaljniji opis navedenih faza Boks-Dženkisovog modela.

4.1 Identifikacija modela

Prvi korak u iterativnom pristupu izbora odgovarajućeg modela predstavlja faza identifikacije modela. Ova faza je ujedno i najzahtevnija jer je potrebno izabrati odgovarajući model iz široke klase ARIMA modela. Kao kriterijum izbora koriste se ocenjene autokorelacione i parcijalne autokorelacione funkcije koje se porede sa svojim teoretskim vrednostima. Model kod kojega su ocenjene vrednosti najpribližnije teoretskima ulazi u uži izbor.

U fazi identifikacije modela mi dobijamo samo uži izbor ARIMA modela-kandidata za konačan model, koji će biti podvrgnuti daljem testiranju u narednim fazama.

Da bismo dobili užu klasu ARIMA modela, potrebno je dati odgovor na sledeća pitanja:

1. Da li je potrebno stablizovati varijansu?

Boks Dženkinsov pristup polazi od stacionarne vremenske serije gde su podaci predstavljeni u jednakim vremenskim intervalima. U zavisnosti od toga da lii je polazna serija stacionarna ili ju je potrebno transformisati da bi se postigla stacionarnost biramo odgovarajući ARMA odnosno ARIMA model.

Jedan od kriterijuma za izbor uže klase ARIMA modela možemo dobiti posmatranjem i analizom grafičkog prikaza vremenske serije. Na osnovu grafičkog prikaza možemo doći do važnih zaključaka o karakteristikama posmatrane vremenske serije. Predstavljanjem vrednosti grafički mozemo uočiti vezu između opservacija, tj na koji način su povezane, i samim tim pronaći odgovarajući obrazac.

Cilj analize grafika jeste da utvrdimo da li je serija stacionarna ili treba da izaberemo odgovarajuću transformaciju za postizanje stacionarnosti, a kao najčešće transformacije koriste se logaritamska za stabilizovanje varijanse i diferenciranje za postizanje stacionarnosti.

Stabilizovanje varijanse

Kada je proces nestacionaran u varijansi, potrebno je da odgovarajućon transformacijom stabilizujemo varijansu.

Posmatrajmo nestacionarnu vremensku seriju čija se varijansa menja sa promenom sredine serije:

$$Var(X_t) = ch(\mu_t) \tag{4.1.1}$$

gde smo sa c obeležili konstantu.

Da bismo stabilizovali varijansu potrebno je da odredimo funkciju f za koju će varijansa transformisane serije $f(X_t)$ biti konstantna.

$$f(X_t) \approx f(\mu_t) + f'(\mu_t)(X_t - \mu_t)$$

$$Var[f(X_t)] = [f'(\mu_t)]^2 Var(X_t) \approx c[f'(\mu_t)]^2 h(\mu_t)$$

Za postizanje stacionarnosti transformisane serije treba da je zadovoljen uslov:

$$f'(\mu_t) = \frac{1}{\sqrt{h(\mu_t)}} \tag{4.1.2}$$

Na osnovu koga dobijamo:

$$f(\mu_t) = \int \frac{1}{\sqrt{h(\mu_t)}} d\mu_t \tag{4.1.3}$$

U cilju stabilizovanja varijanse koristi se tzv. Box-Coxova transformacija, koja je za vremensku seriju X_t definisana izrazom:

$$X_t^\lambda = \begin{cases} \dfrac{X_t^\lambda - 1}{\lambda}, & \lambda \neq 0 \\ \\ log(X_t), & \lambda = 0 \end{cases} \tag{4.1.4}$$

Koeficijent transformacije λ dobijamo minimiziranjem sume kvadrata reziduala transformisane serije:

$$S(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} (X_t^\lambda - \mu^\lambda)^2 \to min$$

gde je μ^{λ} sredina transformisane serije.

Pri korišćenju Box-Coxove transformacije treba voditi računa o sledećem:

- Box-Coxova metoda definisana je samo za pozitivne vrednosti vremenskih serija. Dodavanjem konstante svim opservacijama postižemo pozitivnost pri čemu će korelaciona struktura ostati nepromenjena.
- Transformaciju za stabilizovanje varijanse treba sprovesti pre ma koje druge transformacije

2. Koliko puta je potrebno diferencirati seriju da bi postigli stacionarnost?

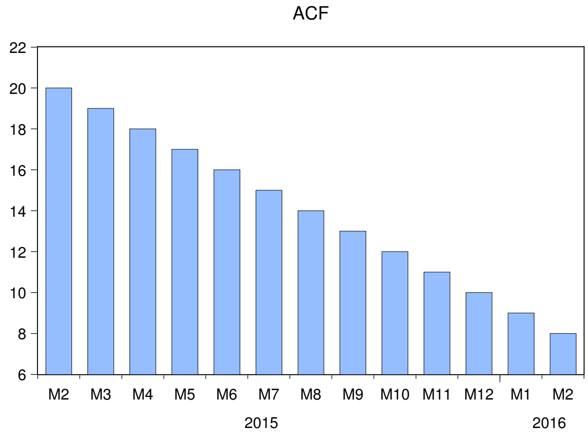
Prvo ćemo izvršiti transformaciju za stabilizovanje varijanse, a zatim diferencirati vremensku seriju. Razlog tome nalazi se u činjenici da opservacije diferencirane serije mogu biti sa negativnim predznakom.

Postoje dva načina na koje možemo da odredimo koliko je puta potrebno diferencirati seriju da bi se postigla stacionarnost:

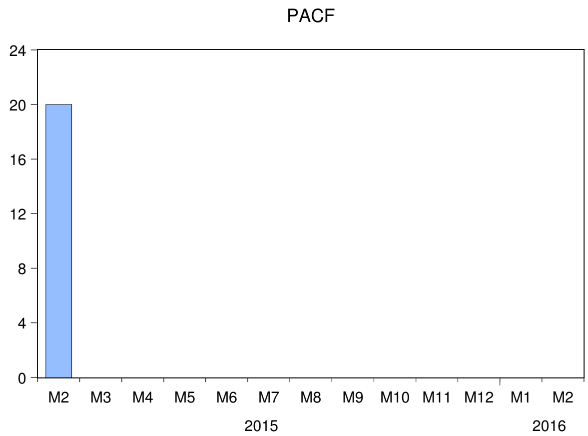
- **Obična i parcijalna autokorelaciona funkcija**. Najjednostavniji pristup određivanja stvarne vredosti d, odnosno reda diferenciranja, predstavlja grafički prikaz vremenske serije. Nedostatak ove metode određivanja reda diferenciranja ogleda se u tome što nekad ne možemo da procenimo da li je vremenska serija trend ili diferencno stacionarna. Da bi prevazišli nedostatak metode grafičkog prikaza, za različite diference vremenske serije vrši se ispitivanje uzoračke autokorelacione funkcije. koliko uzoračka autokorelaciona funkcija *lagano i skoro linearno opada* (slika 4.1) dok je parcijalna autokorelaciona funkcija je *presečena posle prve docnje* (slika 4.2), to nam je jasan indikator da je nestacionarna i da je potrebno diferencirati datu vremensku seriju

  U slučaju kada nismo u mogućnosti da utvrdimo na osnovu grafičkog prikaza da li serija poseduje trend(ili je on dosta mali) i samim tim ju je potrebno diferencirati, tada ćemo porediti korelogram vrednosti autokorelacione funkcije sa korelgoramom njenih diferenciranih vrednosti. Ukoliko diferencirana ACF ne odumire brže time zaključujemo da je polazna vremenska serija stacionarna i nije ju potrebno transformisati.

  Diferenciranje se preporučuje i u slučaju kada nismo u mogućnosti na osnovu grafičkog prikaza odrediti da li je zaista potrebno da izvršimo diferenciranja. Diferenciranjem dobijamo stacionarnu seriju, međutim ukoliko prekomerno diferenciramo seriju možemo dobiti model sa većim brojem koeficijenata.



Slika 4.1: Grafik autokorelacione funkcije



Slika 4.2: Grafik parcijalne autokorelacione funkcije

- **Test jediničnog korena**. Na osnovu testa jediničnog korena o kojem smo više naveli u delu 3.3, donosimo zaključak da li je seriju potrebno diferencirati ili ne.

3. Koliki je red autoregresione i komponente pokretnih proseka?

Da bismo odredili red autoregresione i komponente pokretnih proseka potrebno je da analiziramo grafike autokorelacione i parcijalne autokorelacione funkcije AR, MA i ARMA procesa, prethodno transformisanih u koraku 2. Do verovatnih vrednosti za p i q dolazimo tako što koristimo teorijska saznanja AR, MA i ARMA modela, kratko sumirana u tabeli 4.1.

Tabela 4.1: Obična i parcijalna autokorelaciona funkcija AR(p), MA(q), ARMA(p,q)

Model	**Obična autokorelaciona funkcija**	**Parcijalna autokorelaciona funkcija**
AR(p)	Vrednosti funkcije lagano odumiru ka nuli tokom vremena.	Ako je red procesa veći od p, parcijalna autokorelaciona funkcija je jednaka 0. U suprotnom vrednosti su različite od nule.
MA(q)	Opadaju tokom vremena i za red procesa veći od q jednake su nuli.	Vrednosti funkcije lagano odumiru ka nuli tokom vremena.
ARMA(p,q)	Vrednosti funkcije lagano odumiru ka nuli tokom vremena.	Vrednosti funkcije lagano odumiru ka nuli tokom vremena.

Kao što smo prethodno naveli jedan od načina za određivanje reda diferencirane serije sastoji se u korišćenju ocenjenih autokorelacionih funkcija gde poredimo izgled uzoračkih korelograma sa teorijskim.

Problem na koji nailazimo odnosi se na činjenicu da nekad nismo u mogućnosti na osnovu izgleda korelograma precizno odrediti red procesa, i samim tim je potrebno da predložimo dva ili više modela koji će ući u narednu fazu. Međutim usled velikog stepena subjektivnosti koji se javlja prilikom ovog načina određivanja reda procesa, nastojalo se razviti standardan obrazac određivanja reda serije putem korišćenja informacionih kriterijuma o kojima smo više naveli u delu 3.3.1.

Postupak se sastoji u minimiziranju funkcije informacionih kriterijuma:

$$IC(p,q) = Ln\hat{\sigma}^2_{p,q} + \frac{p+q}{n}g(n)$$

gde je ocena varijanse reziduala ARMA(p,q) modela- $\sigma^2_{p,q}$ dobijena metodom najveće verodostojnosti.

Do vrednosti p i q dolazimo minimiziranjem sledećih kriterijuma:

1. *Akaikeov informacioni kriterijum.*

$$AIC(p,q) = Ln\hat{\sigma}^2_{p,q} + 2\frac{p+q}{n} \tag{4.1.5}$$

2. *Bayesov informacioni kriterijum.*

$$BIC(p,q) = Ln\hat{\sigma}^2_{p,q} + \frac{p+q}{n} ln(n) \tag{4.1.6}$$

3. *Kriterijum konačne greške prognoziranja.*

$$FPE(p,q) = \frac{n+p+q}{n-p-q}\hat{\sigma}^2_{p,q} \tag{4.1.7}$$

4. Da li je potrebno u model uključiti slobodan član za d=1?

Konstantu uključujemo u model ako serija pokazuje prisustvo determinističkog trenda ili rasta. Prema Boks-Dženkinsu za d=1 konstantu uključujemo u model ako vremenska serija sadrži značajan trend.

- Jedan od načina da utvrdimo da li je potrebno uključiti slobodan član jeste grafički prikaz serije (Trend predstavlja dugoročnu tendenciju rasta-pada u kretanju vremenske serije).

- Drugi pristup ogleda se u testiranju statističke značajnosti srednje vrednosti prve diference vremenske serije. Stok-Votsonovim testom testiramo nultu hipotezu H_0:$E(\Delta X_t) = 0$ protiv alternativne da je slobodan član statistički značajan, korišćenjem t-testa. Ako je srednja vrednost prve diference vremenske serije jednaka nuli i sama konstanta je jadnaka nuli. Nasuprot tome ako je srednja vrednost prve diference vremenske serije različita od nule to označava da serija ima konstantu odnosno poseduje linearni trend.

Ukoliko je konstanta pozitivna to označava da je deterministički trend prisutan u seriji rastući, a u slučaju negativne konstante trend je opadajući.

4.2 Ocenjivanje parametara modela

Prilikom ocenjivanja parametara AR modela koristimo metod običnih najmanjih kvadrata. Ovaj metod daje pristrasne i nekozistentne ocene u slučaju ARMA modela, pa prilikom ocenjivanja parametara ARMA modela koristimo druge metode, najčešće metod nelinearnih najmanjih kvadrata. U nastavku rada dajemo kratak prikaz ovih metoda.

4.2.1 Metod običnih najmanjih kvadrata

Metod običnih najmanjih kvadrata se pokazao kao najefikasniji kod AR modela. Stoga da bismo objasnili kako dolazimo do ocena parametara modela posmatrajmo AR model prvog reda:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + e_t \tag{4.2.1}$$

Polazimo od modela sa stacionarnom vremenskom serijom X_t i očekivanom vrednošću nula, za koji pretpostavljamo da zadovoljava sledeće pretpostavke:

$$E(e_t) = 0 \tag{4.2.2}$$

$$var(e_t) = \sigma^2 \tag{4.2.3}$$

$$E(e_t e_{t-k}) = 0, k \neq, \tag{4.2.4}$$

$$E(X_{t-1} e_t) = 0 \tag{4.2.5}$$

$$e_t : N(0, \sigma^2) \tag{4.2.6}$$

Primenom metode običnih najmanjih kvadrata dobijamo ocenu autoregresionog parametra $\hat{\phi}_1$ za vrednosti vremenske serije X_0,.....,X_T:

$$\hat{\phi}_1 = \frac{\left(\sum\limits_{t=1}^{T} X_t X_{t-1}\right)}{\left(\sum\limits_{t=1}^{T} X_{t-1}^2\right)} \tag{4.2.7}$$

Iz prethodno definisane ocene i na osnovu pretpostavke (4.2.5) znamo da važi:

$$E(\hat{\phi}_1) = E\left(\frac{\sum\limits_{t=1}^{T} X_t X_{t-1}}{\sum\limits_{t=1}^{T} X_{t-1}^2}\right) = E\left(\frac{\sum\limits_{t=1}^{T} (\phi_1 X_{t-1} + e_t) X_{t-1}}{\sum\limits_{t=1}^{T} X_{t-1}^2}\right) =$$

$$= E\left(\phi_1 + \frac{\sum_{t=1}^{T} e_t X_{t-1}}{\sum_{t=1}^{T} X_{t-1}^2}\right) = \phi_1 + \frac{\sum_{t=1}^{T} E(e_t X_{t-1})}{\sum_{t=1}^{T} X_{t-1}^2}.$$

Odnosno dobijamo da ako je ispunjen uslov da je serija grešaka proces belog šuma, ocena parametara u AR modelu dobijena metodom običnih najmanjih kvadrata je **nepristrasna**:

$$E(\hat{\phi}_1) = \phi_1 \tag{4.2.8}$$

U nastavku pokazujemo **konzistentnost** date ocene.

Polazimo od varijanse:

$$var(\hat{\phi}_1) = E(\hat{\phi}_1 - E(\hat{\phi}_1))^2 = E(\hat{\phi}_1 - \phi_1)^2 \tag{4.2.9}$$

iz čega sledi jednakost:

$$E(\hat{\phi}_1 - \phi_1)^2 = E\left(\frac{\sum_{t=1}^{T} e_t X_{t-1}}{\sum_{t=1}^{T} X_{t-1}^2}\right)^2 = E\left(\frac{(e_1 X_0)^2 + \cdots + e_1 e_2 X_0 X_1 + \ldots}{\sum_{t=1}^{T} X_{t-1}^4}\right)$$

Na osnovu uslova (4.2.2)-(4.2.6) dobijamo:

$$var(\hat{\phi}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^{T} X_{t-1}^2} \tag{4.2.10}$$

Da bismo pokazali da se sa povećanjem veličine uzorka ocena parametra teži tom parametru, deljenjem izraza (4.2.10) sa T, dobijamo da sa porastom obima uzorka važi tvrđenje o konzistentnosti ocene:

$$var(\hat{\phi}_1) = \frac{\sigma^2/T}{\sigma^2/(1-\phi_1^2)} = \frac{1-\phi_1^2}{T} \to 0 \tag{4.2.11}$$

Ocena dobijena metodom najmanjih kvadrata ima asimptotski normalnu raspodelu:

$$\hat{\phi}_1 : N\left(\phi_1, \frac{1-\phi_1^2}{T}\right)$$

4.2.2 Metod nelinearnih najmanjih kvadrata

Ideja metode nelinearnih najmanjih kvadrata ogleda se u pronalaženju ocene $\hat{\theta}_1$ koja minimizira sumu kvadrata reziduala:

$$\sum_{t=1}^{T} \hat{e}_t^2 \tag{4.2.12}$$

U nastavku prikazujemo postupak nelinearnih najmanjih kvadrata kod MA modela prvog reda.

$$X_t = e_t - \theta_1 e_{t-1}$$

Za uzorak obima T obrazujmo niz slučajnih greški $e_1, ..., e_T$:

$$e_t = X_t + \theta_1 e_{t-1} \tag{4.2.13}$$

Izborom proizvoljne vrednosti $\theta_1 = \theta_1^* \in (-1, 1)$ formiramo seriju reziduala:

t=1: $\hat{e}_1 = X_1 + \theta_1^* \hat{e}_0$

$\vdots$

t=T: $\hat{e}_T = X_T + \theta_1^* \hat{e}_{T-1}$

Za početnu vrednost slučajne greške uzimamo vrednost $\hat{e}_0 = 0$. Konačno dobijamo vrednost rezidualne sume kvadrata::

$$S(\theta_1^*) = \sum_{t=1}^{T} \hat{e}_t^2 = \sum_{t=1}^{T} [e_t(\theta_1^*)]^2 \tag{4.2.14}$$

Nastavljamo postupak proizvoljnog izbora $\theta_1 \in (-1, 1)$ kako bi dobili novu vrednost za rezidualnu sumu kvadrata. Konačna ocena $\hat{\theta}_1$ po metodu najmanjih linearnih kvadrata je ona ocena koja minimizira funkciju (4.2.12).

U slučaju MA(q) ili ARMA(p,q) modela da bismo došli do odgovarajuće vrednosti za koju se postiže minimum koristimo jedan od algoritama numeričke optimizacije, kao što je Gauss-Newtonov. Postupak primene algoritma prikazujemo na MA(1) modelu.

Funkciju $e_t = e_t(\theta_1)$ aproksimiramo linearnom funkcijom nepoznatog koeficijenta θ_1 na osnovu Tejlorovog razvoja funkcije oko početne ocene θ_1^*:

$$e_t(\theta_1) \approx e_t(\theta_1^*) + (\theta_1 - \theta_1^*) \frac{de_t(\theta_1^*)}{d\theta_1} \tag{4.2.15}$$

Odnosno za polazni model (4.2.13) dobijamo:

$$\frac{de_t(\theta_1)}{d\theta_1} = \theta_1 \frac{de_{t-1}(\theta_1)}{d\theta_1} + e_{t-1}(\theta_1) \tag{4.2.16}$$

Iterativni postupak izbora najbolje ocene se nastavlja sve dok razlika u dve uzastopne iteracije nije manja od 0.0001.

Prilikom primene metode najmanjih linearnih kvadrata potrebno je odrediti početne vrednosti slučajne greške i početne vrednosti parametra θ_0. Kao što smo prethodno naveli, za početnu vrednost slučajne greške uzimamo 0, dok do početnih vrednosti parametara možemo doći primenom metode momenta. Dodatno kod ARMA modela javlja se problem izbora početnih vrednosti $X_0, X_1, ...$, koji prevazilazimo tako što za date vrednosti uzimamo aritmtičku sredinu raspoloživih opservacija.

Metod momenta

Metod momenta koristimo da bismo dobili početne ocene koeficijenata. U osnovi metode momenta nalazi se postupak izjednačavanja teorijskih momenata koji su funkcija nepoznatih koeficijenata sa realizovanim vrednostima uzoračkih momenata. U nastavku prikazujemo postupak metode momenta kod ARMA modela.

Posmatrajmo ARMA(1,1) model:

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} = e_t - \theta_1 e_{t-1} \tag{4.2.17}$$

Na osnovu autokorelacione funkcije (2.4.5) izvodimo ocenu za parametar ϕ_1. Naime kako je $\rho_2 = \phi_1 \rho_1$ prema metodu momenta ρ_1 izjednačavamo sa uzoračkim autokorelacionm koeficijentom na prvoj docnji r_1 pa dobijamo:

$$\hat{\rho}_1 = r_1 = \frac{\sum_{t=2}^{T} (X_t - \bar{X})(X_{t-1} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^{T} (X_t - \bar{X})^2},$$

$$\hat{\rho}_2 = r_2 = \frac{\sum_{t=3}^{T} (X_t - \bar{X})(X_{t-2} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^{T} (X_t - \bar{X})^2}.$$

Ocena parametra ϕ_1 data je sledećom jednakošću:

$$\hat{\phi}_1 = \frac{r_2}{r_1} \tag{4.2.18}$$

Do ocene za parametar θ_1 dolazimo rešavanjem kvadratne jednačine:

$$r_1 = \frac{(\hat{\phi}_1 - \theta_1)(1 - \hat{\phi}_1\theta_1)}{1 - 2\hat{\phi}_1\theta_1 + \theta_1^2} \tag{4.2.19}$$

4.3 Provera adekvatnosti modela

Poslednji korak u Boks-Dženkinsovom trostepenom pristupu predstavlja provera adekvatnosti modela. Jedan od osnovnih uslova koje dobar model treba da zadovoljava jeste ekonomičnost modela. Da bismo procenili da li smo izabrali najjednostavniji model koristimo informacione kriterijume. Pored toga da bismo smatrali da je naš model adekvatan potrebno je da proverimo da li su zadovoljene pretpostavke modela tj. da serija reziduala ima normalnu raspodelu i da su reziduali neautokorelisani.

Jarque Bera test

Jarque Bera test (u oznaci JB) koristi koeficijent asimetrije i koeficijent spljoštenosti reziduala za testiranje da li ocenjene veličine značajno odstupaju od normalne raspodele. Ocene koeficijenata asimetrije i spljoštenosti date su sledećim izrazima:

- Koeficijent asimetrije: $\hat{\alpha}_3 = \frac{\sum \hat{r}_t^3}{T}$
- Koeficijent spljoštenosti: $\hat{\alpha}_4 = \frac{\sum \hat{r}_t^4}{T}$

gde su $\hat{r}_t$ standardizovani reziduali.

JB test statistikom testiramo sledeće hipoteze:

H_0: Serija ima normalnu raspodelu ($\alpha_3 = 0, \alpha_4 = 3$).

H_1: Serija nije normalno raspodeljena.

Ukoliko je hipoteza H_0 tačna ocene koeficijenta asimetrije i koeficijenta spljoštenosti imaju normalne raspodele:

- $\hat{\alpha}_3 : N(0, \frac{6}{T}) \Rightarrow \sqrt{\frac{T}{6}}\hat{\alpha}_3 : N(0,1),$
- $\hat{\alpha}_4 : N(3, \frac{24}{T}) \Rightarrow \sqrt{\frac{T}{24}}(\hat{\alpha}_4 - 3) : N(0,1).$

Test veličina

$$JB = \left[\frac{\alpha_3^2}{6} + \frac{(\alpha_4 - 3)^2}{24}\right] \tag{4.3.1}$$

naziva se Jarque Bera test statistika.

Ako je nulta hipoteza tačna sledi da $JB : \lambda_2^2$, pa samim tim nultu hipotezu odbacujemo za JB veće od kritične vrednosti λ_2^2.

Test autokorelisanosti reziduala

Jedan od načina za testiranje prisustva autokorelacije je putem ocenjene uzoračke, obične i parcijalne autokorealcione funkcije. Ako su vrednosti autokorelacione funkcije unutar intervala **(-1.96/$\sqrt{T}$, -1.96/$\sqrt{T}$)** na nivou značajnosti 5% prihvatamo nultu hipotezu da su autokorelacioni koeficijenti jednaki nuli. Formalniji pristup testiranju autokorelasanosti reziduala predstavlja **Boks-Pirsova** (engl. Box-Pierce) test statistika koju objašnjavamo u nastavku.

Testiramo hipotezu da su svi autokorelacioni koeficijenti jednaki nuli:

$$H_0\text{: } \hat{\rho}_1 = \hat{\rho}_2 = \cdots = \hat{\rho}_k = 0$$

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum\limits_{t=k+1}^{T} \hat{e}_t\hat{e}_{t-k}}{\sum\limits_{t=1}^{T} \hat{e}_t^2} \tag{4.3.2}$$

Testiranje se izvodi na osnovu Boks-Pirsove statistike(u oznaci BP(K)):

$$BP(K) = T\sum_{k=1}^{K} \hat{\rho}_k^2 \tag{4.3.3}$$

Za tačnu nultu hipotezu važi da BP(K) statistika ima hi-kvadratnu raspodelu:

$$BP(K) : \lambda_{K-p-q}^2.$$

Ukoliko u modelu imamo i konstantu tada je potrebno da broj stepeni slobode umanjimo za 1.

Ljung i Boks su pokazali da za obime manjeg uzorka (već za n=100) aproksimacija hi-kvadratnom raspodelom dovodi do potcenjivanja postojanja autokorelacije. Samim tim uveli su modifikaciju BP statistike da raspored pod nultom hipotezom bude bliži hi-kvadratnoj raspodeli.

Ljung-Boksovom statistikom (u oznaci Q) testiramo hipotezu da su podaci nekorelisani protiv alternativne da nisu, primenom test statistike:

$$Q(K) = T(T+2)\sum_{k=1}^{K} \frac{\hat{\rho}_k^2}{T-k} : \lambda_{K-p-q}^2 \tag{4.3.4}$$

Za K se preporučuje jedna od sledećih alternativa:

$$K = \frac{T}{4}; \quad K = \sqrt{T}; \quad K = lnT.$$

Pored ovih metoda za testiranje adekvatnosti modela možemo se koristiti i sledećim:

1. Dodavanjem novih koeficijenata polaznom ocenjenom modelu dobijamo prošireni model. Polazni model smatramo adekvatnim ukoliko ocene dodatnih promenljivih nisu značajne, u suprotnom polazni model smatramo neadekvatnim.

   Prilikom uopštavanja ARMA(p,q) modela istovremenim dodavanjem AR i MA komponente javlja se problem prisustva zajedničkih faktora. Naime posmatrajmo ARMA(1,1) model:

   $$X_t - \phi_1 X_{t-1} = e_t - \theta_1 e_{t-1} \tag{4.3.5}$$

   Za t=t-1 i množenjem sa c i oduzimanjem od (4.3.5) dobijamo ARMA(2,2):

   $$X_t - (c+\phi_1)X_{t-1} + c\phi_1 X_{t-2} = e_t - (c+\theta_1)e_{t-1} + c\theta_1 e_{t-2} \tag{4.3.6}$$

   Polinomi AR i MA komponente sadrže zajednički element:

   $$(1-\phi_1 L)(1-cL) = 1-(c+\phi_1)L + c\phi_1 L^2 \tag{4.3.7}$$

   tj.

   $$(1-\theta_1 L)(1-cL) = 1-(c+\theta_1)L + c\theta_1 L^2 \tag{4.3.8}$$

samim tim koeficijenti ARMA(2,2) modela nisu jedinstveni kako je c proizvoljno. Posledica ovoga je nemogućnost identifikovanja i ocenjivanja modela ukoliko ne pretpostavimo da polinomi $\phi(L)$ i $\theta(L)$ ne sadrže zajedničke faktore.

Takođe tokom proširivanja modela sugeriše se proširenje u skladu sa rezultatima analize reziduala. Odnosno ako npr. MA(1) poseduje korelaciju na drugoj docnji, proširićemo prvo model na MA(2) a ne na ARMA(2,2).

2. Preciznost prognoze. Poslednji korak u proveri adekvatnosti modela jeste testiranje pokazatelja preciznosti. Naime za izabrane modele pored izračunavanja vrednosti informacionih kriterijuma, za odabir konačnog modela koristimo pokazatelje preciznosti prognoze date u tabeli 4.2.

   Ocenjujemo model do trenutka m, preostale vrednosti g=T-m koristimo za ocenu kvaliteta prognoze. Prognozirane vrednosti označavamo sa $\hat{X}_m(1), \ldots, \hat{X}_m(g)$ dok su stvarne vrednosti date sa $X_{m+1}, \ldots, X_{m+g}$.

Tabela 4.2: Pokazatelji preciznosti prognoze

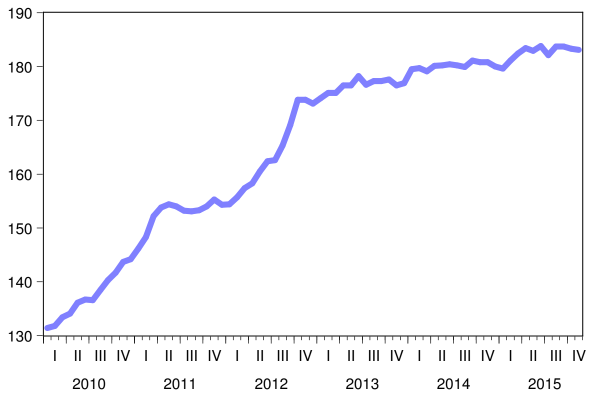
Koren srednje kvadratne greške	$\sqrt{\frac{1}{g}\sum_{j=1}^{g}(X_{m+j} - \hat{X}_m(j))^2}$
Srednja apsolutna greška prognoze	$\frac{1}{g}\sum_{j=1}^{g}\left\|X_{m+j} - \hat{X}_m(j)\right\|$
Srednja apsolutna procentualna greška prognoze	$\frac{100}{g}\sum_{j=1}^{g}\left\|\frac{X_{m+j} - \hat{X}_m(j)}{X_{m+j}}\right\|$

Glava 5

Primena Boks Dženkinsovog modela

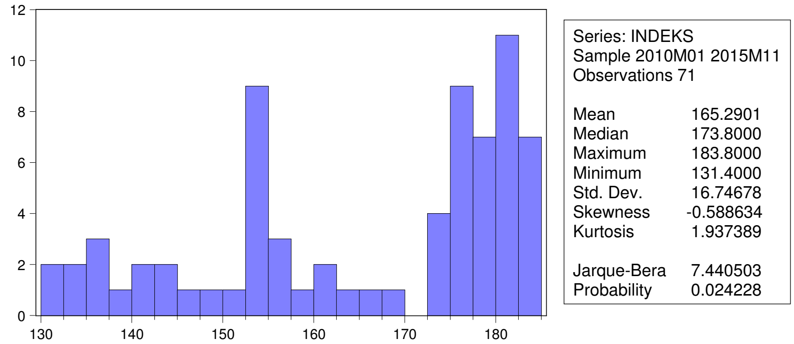
U ovom poglavlju primenom Boks Dženkinsove metodologije objasnićemo izbor odgovarajućeg modela. Posmatramo vremensku seriju indeks potrošačkih cena u Republici Srbiji.

Mesečno kretanje indeksa potrošačkih cena u periodu od januara 2010. do novembra 2015. dato je na slici 5.1.



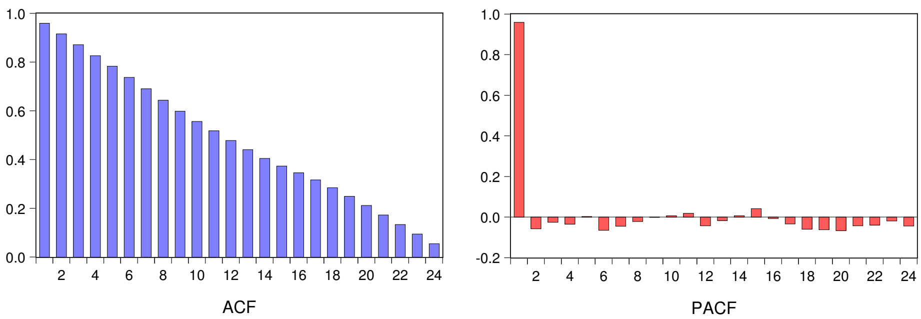
Slika 5.1: Kretanja indeksa potrošačkih cena

Na grafiku(slika 5.2) je prikazano mesečno kretanje indeksa potrošačkih cena u toku 71 meseci. Indeks se kretao u u intervalu od najnižeg 131.40 u toku januara 2010 do najviše 183.80 zabeležena u junu 2015. Srednja vrednost je 165.29, dok je standardno odstupanje 16.75.



Slika 5.2: Histogram kretanja indeksa potrošačkih cena

Za potrebe razvoja adekvatnog modela testiraćemo stacionarnost vremenske serije posmatranjem korelograma i primenom ADF testa.



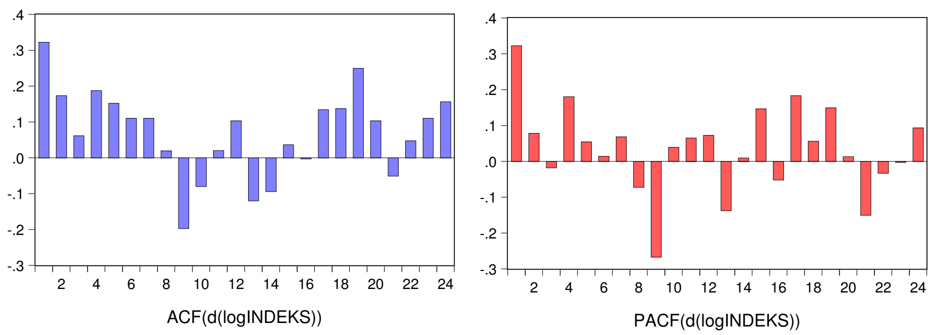
Slika 5.3: Obični i parcijalni korelogram polazne serije indeksa potrošačkih cena

Tabela 5.1: Rezultati ADF testa za stvarnu seriju podataka (INDEKS).

ADF test	Konstanta	Konstanta i trend	Bez konstante i trenda
INDEKS	-2.912972	-0.523386	2.837863
Krit. vrednost 1%	-3.527045	-4.094550	-2.598907
Krit. vrednost 5%	-2.903566	-3.475305	-1.945596
Krit. vrednost 10%	-2.589227	-3.165046	-1.613719

Na osnovu rezultata ADF testa (tabela 5.1) i korelograma (slika 5.3) možemo da zaključimo da serija nije stacionarna pa samim tim ne možemo da formiramo odgovarajući ARIMA model na osnovu stvarne serije podataka indeksa potrošačkih cena.

Za diferencirane podatke rezultati ADF testa za stvarnu i transformisanu seriju podataka ukazuju da je potrebno izvršiti diferenciranje kako bi dobili stacionarnu vremensku seriju. Stabilizacija varijanse je postignuta logaritmovanjem polazne serije.



Slika 5.4: Obični i parcijalni korelogram diferencirane logaritamski transformisane serije indeksa potrošačkih cena

Na osnovu analize korelograma prve diference logaritmovane serije predloženi su sledeći modeli čiji su koeficijenti statistički značajni i reziduali ispunjavaju osnovne pretpostavke modela:

- Primenom Jarque Bera testa za navedene modele je utvrđeno da zadovoljavaju uslov normalnosti reziduala.
- Reziduali ne pokazuju prisustvo autokorelacije i heteroskedastičnosti te samim tim nam mogu biti osnova za predviđanje budućeg kretanja indeksa potrošačkih cena.

Tabela 5.2: Predloženi modeli na bazi diferencirane logaritamski transformisane serije podataka d(log(INDEKS)).

	Model 1	Model 2	Model 3	Model 4	Model 5	Model 6	Model 7
AR(1)		✓	✓	✓	✓	✓	✓
AR(2)					✓		
AR(3)						✓	
AR(9)							✓
MA(1)	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
MA(2)			✓			✓	
MA(3)				✓			

Tabela 5.3: Vrednosti informacionih kriterijuma za predložene modele na bazi diferencirane logaritamski transformisane serije podataka.

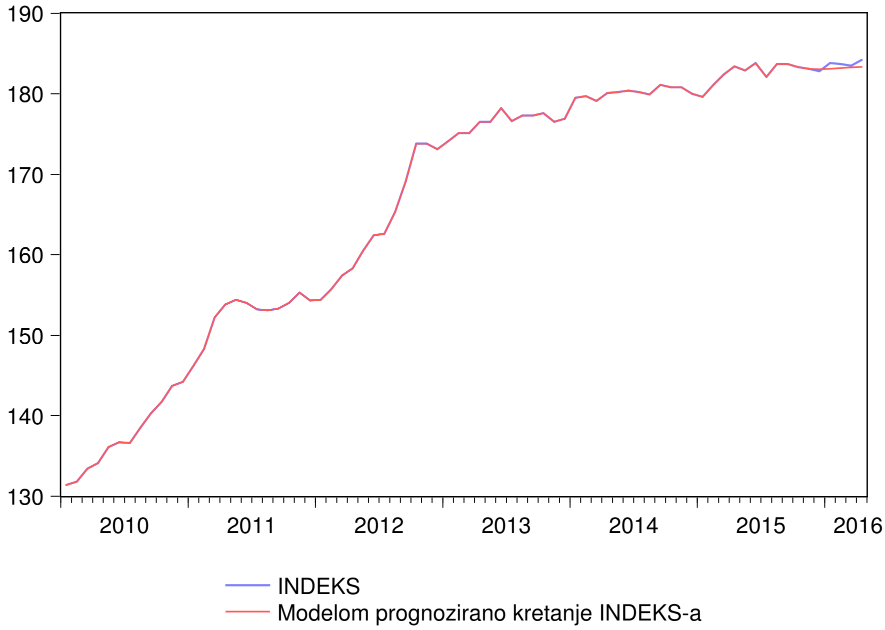
	MODEL 1	MODEL 2	MODEL 3	MODEL 4	MODEL 5	MODEL 6	MODEL 7
AIC	-8.622682	-8.616781	-8.607980	-8.698373	-8.596482	-8.594563	-8.633061
BIC	-8.558440	-8.519646	-8.478467	-8.601237	-8.465923	-8.430033	-8.529247

Tabela 5.4: Vrednosti pokazatelja preciznosti prognoze za predložene modele.

	MODEL 1	MODEL 2	MODEL 3	MODEL 4	MODEL 5	MODEL 6	MODEL 7
Koren srednje kvadratne greške prognoze	0.004957	0.002168	0.005266	0.001330	0.004349	0.003672	0.004527
Srednja apsolutna greška	0.004455	0.001848	0.004793	0.001196	0.003865	0.003237	0.003735
Srednja apsolutna procentualna greška prognoze	0.196762	0.081626	0.211677	0.052823	0.170708	0.142976	0.164951

Od predloženih modela izabran je model 4 bez konstante koja se pokazala statistički neznačajnom. Naime model 4 ima najmanju vrednost informacionih kriterijuma (tabela 5.3) u odnosu na preostale modele kao i najmanje vrednosti pokazatelja preciznosti prognoze (tabela 5.4).

Na slici 5.5 prikazano je predviđeno kretanje indeksa potrošačkih cena za period od decembra 2015. do aprila 2016.



Slika 5.5: Kretanja indeksa potrošačkih cena i predikcije dobijene na osnovu modela 4

Zaključak

Analiza vremenskih serija ima primenu u raznim naučnim oblastima počev od ekonomije pa sve do meterologije gde se koristi u kretanju temperature, brzini vetra i sl. Za razliku od regresionih modela gde kretanje jedne promenljive objašnjavamo preko jedne ili više promenljivih, kod ARIMA modela kretanje promenljive opisujemo njenim sopstvenim prošlim vrednostima i stohastičkim greškama iz prethodnog perioda.

U radu je predstavljen Boks-Dženkinsov pristup prognoziranja koji podrazumeva sprovođenje tri faze: identifikovanja, ocene parametara modela i provere adekvatnosti.

ARIMA modeli iako zahtevaju dosta iskustva u odabiru adekvatnog modela i koriste se samo kod većih uzoraka, široko su zastupljeni u analizi i predviđanju budućeg kretanja određene pojave naročito zbog svoje strukture koja obuhvata komponente autoregresionog modela(AR), modela pokretnih proseka(MA) kao i kombinaciju prethodna dva modela - ARMA model.

Na osnovu Boks-Dženkinsove metodologije analizom mesečnih podataka indeksa potrošačkih cena u periodu od 2010. do novembra 2015. predloženo je nekoliko modela, a na kraju korišćenjem pokazatelja preciznosti prognoze izabran je najadekvatniji model.

Prilog

U ovm delu prikazani su podaci o indeksu potrošačkih cena u Republici Srbiji za period od januara 2010. do aprila 2016.

Tabela 5.5: Podaci o indeksu potrošačkih cena

Period	Indeks	Period	Indeks
Jan-10	131.4	Okt-11	154.0
Feb-10	131.8	Nov-11	155.3
Mar-10	133.4	Dec-11	154.3
Apr-10	134.1	Jan-12	154.4
Maj-10	136.1	Feb-12	155.7
Jun-10	136.7	Mar-12	157.4
Jul-10	136.6	Apr-12	158.3
Avg-10	138.5	Maj-12	160.5
Sep-10	140.3	Jun-12	162.4
Okt-10	141.7	Jul-12	162.6
Nov-10	143.7	Avg-12	165.3
Dec-10	144.2	Sep-12	169.1
Jan-11	146.2	Okt-12	173.8
Feb-11	148.3	Nov-12	173.8
Mar-11	152.2	Dec-12	173.1
Apr-11	153.8	Jan-13	174.1
Maj-11	154.4	Feb-13	175.1
Jun-11	154.0	Mar-13	175.1
Jul-11	153.2	Apr-13	176.5
Avg-11	153.1	Maj-13	176.5
Sep-11	153.3	Jun-13	178.2

Period	Indeks	Period	Indeks
Jul-13	176.6	Dec-14	180.0
Aug-13	177.3	Jan-15	179.6
Sep-13	177.3	Feb-15	181.1
Okt-13	177.6	Mar-15	182.4
Nov-13	176.5	Apr-15	183.4
Dec-13	176.9	Maj-15	182.9
Jan-14	179.5	Jun-15	183.8
Feb-14	179.7	Jul-15	182.1
Mar-14	179.1	Avg-15	183.7
Apr-14	180.1	Sep-15	183.7
Maj-14	180.2	Okt-15	183.3
Jun-14	180.4	Nov-15	183.1
Jul-14	180.2	Dec-15	182.8
Avg-14	179.9	Jan-16	183.8
Sep-14	181.1	Feb-16	183.7
Okt-14	180.8	Mar-16	183.5
Nov-14	180.8	Apr-16	184.2

Literatura

[1] A.Pankratz. *Forecasting with Univariate Box-Jenkins models: Concepts and Cases.* John Wiley and Sons,Inc, 1983.

[2] Zlatko J.Kovačić. *Analiza vremenskih serija.* Univerzitet u Beogradu, Ekonomski fakultet, 1995.

[3] Zagorka Lozanov-Crvenković. *Statistika.* Novi Sad, 2012.

[4] R.A.Davis P.J. Brockwell. *Introduction to Time Series and forecasting.* 2nd edition, Springer-Verlag New York,Inc, 2002.

[5] Danijela Rajter-Ćirić. *Verovatnoća.* Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, 2009.

[6] George C.S. Wang. A guide to box-jenkins modeling. *The journal of business forecasting*, 27(1):19–28, 2008.

[7] W.W.S. Wei. *Time Series Analysis Univariate and Multivariate methods.* 2nd edition, Pearson Addison Wesley, 2006.

[8] A. Nojković Z. Mladenović. *Primenjena analiza vremenskih serija.* Centar za izdavačku delatnost Ekonomskog fakulteta u Beogradu, 2012.

Biografija

Sandra Kovačević rođena je 16. jula 1990. godine u Zagrebu. Završila je osnovnu školu "Vasa Stajić" u Novom Sadu 2005. godine i iste godine upisala je Gimnaziju "Jovan Jovanović Zmaj" u Novom Sadu, prirodno-matematički smer. Po završetku gimnazije, 2009. godine, upisala je osnovne akademske studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer Primenjena matematika, modul Matematika finansija. Osnovne studije završava 2012. godine sa prosekom 9,04. U oktobru iste godine upisala je master studije na istom smeru. Položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom master studija u junu 2015. godine i time stekla uslov za odbranu master rada.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Master rad
VR
Autor: Sandra Kovačević
AU
Mentor: prof. dr Zagorka Lozanov-Crvenković
MN
Naslov rada: Boks Dženkinsov model
NR
Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: s / e
JI
Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2016.
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad,
MA
Fizički opis rada: (6 glava, 75 strana, 11 tabela, 12 slike, 8 referenci, 1 prilog)
FO
Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Statističko modeliranje
ND
Ključne reči: statistika, vremenske serije, stohastički procesi, Boks Dženkinsov model
PO
UDK
Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
ČU
Važna napomena:
VN
Izvod: Ovaj rad bavi se Boks-Dženkinsovim modelom. Definisani su osnovni pojmovi vezani za slučajne procese kao što su stacionarnost, autokovarijaciona i autokorelaciona funkcija. Prikazani su modeli stacionarnih vremenskih serija: autoregresioni modeli (AR), modeli pokretnih proseka (MA) i autoregresioni modeli pokretnih proseka (ARMA), dok je u trećem poglavlju objašnjen autoregresioni integrisani procesi pokretnih sredina (ARIMA) koji predstavljaju osnovu za Boks-Dženkinsov model. Na kraju u petoj i šestoj glavi prikazan je Boks-Dženkinsov model i urađena je primena modela na indeksu potrošačkih cena korišćenjem programskog paketa EVIEWS.
IZ
Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 30.10.2014.
DP
Datum odbrane: Jul 2016.
DO
Članovi komisije:
KO
Predsednik: dr Danijela Rajter-Ćirić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Mentor: dr Zagorka Lozanov-Crvenković, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član: dr Ivana Štajner Papuga, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification umber:
INO
Document type: Monograph type
DT
Type of record: Textual printed material
TR
Contents Code: Master thesis
CC
Author: Sandra Kovačević
AU
Mentor: Zagorka Lozanov-Crvenković, Ph.D.
MN
Title: The Box Jenkins model
TI
Language of text: Serbian (Latin)
LT
Language of abstract: en / s
LA
Country of publication: Republic of Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2016.
PY
Publisher: Author's reprint
PU
Publ. place: Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
PP
Physical description: (6 chapters, 75 pages, 11 tables, 12 pictures, 8 references, 1 appendix)
PD

Scientific field: Mathematics
SF
Scientific discipline: Statistical Modeling
SD
Subject / Key words: statistic, time series, stochastic processes, The Box-Jenkins model
SKW
UC
Holding data: Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
HD
Note:
N
Abstract: This thesis deals with Box-Jenkins model. Some basic terms for stochastic processes are defined such as stationarity, correlation and autocorrelation function. The models of stationary time series are presented: autoregressive models (AR), moving-average models (MA) and autoregressive moving-average models (ARMA), while the third section explains autoregressive integrated moving average model (ARIMA), which is the basis for the Box-Jenkins model. At the end of thesis, in the fifth and sixth head is explained Box-Jenkins model and made the application of the model to the consumer price index using Eviews software package.
AB
Accepted by the Scientific Board on: 30.10.2014.
ASB
Defended: July 2016.
DE
Thesis defend board:
President: Danijela Rajter-Ćirić, Ph.D., full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Mentor: Zagorka Lozanov-Crvenković, Ph.D., full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member: Ivana Štajner Papuga, Ph.D., associate professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad