UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI
FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Sandra Gužvanj

PRIMENA ORTOGONALNIH POLINOMA U STOHASTIČKOJ ANALIZI

- Master rad-

Mentor:
dr Dora Seleši

Novi Sad, 2015.

Sadržaj

1 Uvod

Tema master rada su ortogonalni polinomi, i njihove primene a stohastičkoj analizi. Rad se sastoji iz tri dela.

U prvom delu biće reč o osnovnim matematičkim pojmovima i definišemo ortogonalne polinome. Navešćemo nekoliko teorema vezano za nule ortogonalnih polinoma, i navešćemo teoremu o rekurzivnoj relaciji tih polinoma. Posebno ćemo analizirati Hermitove, Legendreove, Charlierove, Laguerreove i Jacobijeve polinome. Svaki od ovih polinoma precizno definišemo, i dajemo formule, pomoću kojih ih možemo izračunati.

Drugi deo se sastoji od osnovnih pojmova stohastičke analize. Prvo definišemo verovatnoću, prostor verovatnoće, slučajne promenljive, pa stohastičke procese. Biće reč o lancima Markova, o procesima rađanja i umiranja, Poasonovom procesu i Braunovom kretanju. Posle toga bavimo se stohastičkom integracijom u odnosu na Braunovo kretanje. Za to ćemo pokazati i par primera.

Zadnji deo ovog rada je primena ortogonalnih polinoma koji su spomenuti u drugom delu u vezi stohastičkih pojmova. Prvo pokazujemo kako ih možemo koristiti kod procesa rađanja i umiranja, i kod slučajnog hoda, kada želimo da izračunamo verovatnoće prelaza kod ovih procesa. Druga primena je u stohastičkoj integraciji. Ovde pokazujemo kao se računa stohastički integral u odnosu na Braunovo kretanje pomoću Hermitovih polinoma, a pomoću Charlierovih polinoma kako računamo stohastički integral u odnosu na Poasonov proces. Treća primena je aproksimacija raspodele slučajne promenljive pomoću ortogonalnih polinoma. Prvo definišemo jaku i slabu polinomnu ekspanziju, pa ćemo ih pokazati na primerima.

2 Ortogonalni polinomi

2.1 Osnovne definicije

Pre definicije ortogonalnih polinoma moramo definisati neke osnovne matematičke pojmove.

Definicija 2.1. *Za dati skup $X \neq \emptyset$ preslikavanje $d : [0, \infty)$ je metrika na skupu X ako i samo ako za sve $x, y, z \in X$ važi*

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Tada je (X, d) metrički prostor.

Definicija 2.2. *Niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ u (X, d) je Košijev niz ako i samo ako*

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(n, m \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon).$$

Definicija 2.3. *Metrički prostor (X, d) je kompletan ako i samo ako je svaki Košijev niz u X konvergentan.*

Definicija 2.4. *Dat je vektorski prostor X nad poljem $\mathbb{R}$. Preslikavanje $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ je norma na X ako i samo ako za svako $x, y \in X$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ važi*

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Tada je $(X, \|\cdot\|)$ normiran vektorski prostor.

Teorema 2.1. *Normiran vektorski prostor X sa normom $\|\cdot\|$ je Banahov ako i samo ako je X sa metrikom $d(x, y) = \|x - y\|$ kompletan metrički prostor.*

Definicija 2.5. *Neka je $(X, +, \cdot, \mathbb{R})$ vektorski prostor. Preslikavanje $\langle\cdot, \cdot\rangle : X^2 \to \mathbb{R}$ je skalarni proizvod na prostoru X ako i samo ako za svako $x, y, z \in X$, sve $\alpha \in \mathbb{R}$ važi:*

1. $\langle x, x\rangle \geq 0$
2. $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
4. $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$
5. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.

Tada je $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ unitaran prostor.

Definicija 2.6. *Unitaran prostor $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ je Hilbertov prostor ako i samo ako je kompletan u odnosu na metriku $d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$.*

Definicija 2.7. *Neka je $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ unitaran prostor. Vektori $x, y \in X$ su ortogonalni ako i samo ako $\langle x, y\rangle = 0$.*

Na osnovu ovih pojmova možemo precizno definisati šta su ortogonalni polinomi.

Definicija 2.8. *Kažemo da su polinomi $P_0, P_1(x), P_2(x), ..., P_n(x)$ ortogonalni u odnosu na meru $\mu(x)$ na intervalu (a,b), ako*

$$\langle P_i(x), P_j(x)\rangle = \int_a^b P_i(x)P_j(x)d\mu(x) = c_i^2\delta_{ij}, \tag{1}$$

gde c_i konstanta, a δ_{ij} je Kronekerov delta simbol. Ako je mera μ apsolutno neprekidna sa funkcijom gustine $\rho(x)$ u odnosu na Lebegovu meru, onda (1) postaje

$$\langle P_i(x), P_j(x)\rangle = \int_a^b P_i(x)P_j(x)\rho(x)dx = c_i^2\delta_{ij},$$

a ako je diskretna onda (1) prima oblik

$$\langle P_i(x), P_j(x)\rangle = \sum_{x=a}^{b} P_i(x)P_j(x)\rho(x).$$

Funkciju $\rho(x)$ koja je pozitivna i integrabilna na (a,b) nazivamo težinskim faktorom ili gustinom ukoliko je $\int_a^b \rho(x)dx = 1$.

2.2 Osobine ortogonalnih polinoma

U ovom delu ćemo pokazati kao izgleda rekurzivna relacija između ortogonalnih polinoma, i navešćemo dve teoreme vezane za nule ovih polinoma.
Prvo primetimo da su ortogonalni polinomi linearno nezavisni. Takođe oni čine bazu vektorskog prostora $L^2((a,b);\rho)$ to jest svaka funkcija

$$f \in L^2((a,b);\rho) = \{f : (a,b) \to \mathbb{R} | \int_a^b |f(x)|^2\rho(x)dx < \infty\}$$

može da se prikaže u obliku

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i P_i(x); x \in (a,b),$$

gde je

$$d_i = \frac{\langle f, P_i\rangle}{c_i^2} = \frac{\int_a^b f(x)P_i(x)\rho(x)dx}{c_i^2}, i = 0, 1, 2, ...$$

i c_i su dati u (1).

Teorema 2.2. *Neka je $\rho(x)$ funkcija težine na intervalu (a,b), i neka su $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x), \ldots$ ortogonalni polinomi u odnosu na datu funkciju težine oblika*

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0.$$

Tada postoje nizovi $\{\lambda_n\}$ i $\{\delta_n\}$, takvi da za $n = 1, 2, \ldots$ važi rekurzivna formula

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} P_{n+1}(x) = (x - \lambda_n) P_n(x) - \frac{a_{n-1}}{a_n} \delta_n P_{n-1}(x),$$

i za nizove važi

$$\delta_n = \frac{\|P_n\|^2}{\|P_{n-1}\|^2}, \lambda_n = \frac{\langle xP_n(x), P_n(x)\rangle}{\|P_n\|^2}.$$

Dokaz.
Kako je $xP_n(x)$ polinom $(n+1)$-og stepena, možemo ga napisati u obliku

$$xP_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} c_k P_k(x),$$

gde je

$$c_k = \frac{\langle xP_n(x), P_k(x)\rangle}{\|P_k(x)\|^2}.$$

Kako je P_n ortogonalno na sve polinome do stepena $n-1$, važi sledeća jednakost:

$$\langle xP_n(x), P_k(x)\rangle = \langle P_n(x), xP_k(x)\rangle = 0, k = 0, 1, 2, \ldots, n-2.$$

Dakle, $c_k = 0$ za $k \leq n-2$ pa je

$$xP_n(x) = c_{n+1}P_{n+1}(x) + c_n P_n(x) + c_{n-1}P_{n-1}(x).$$

Upoređujući koeficijente uz članove x^{n+1} u polinomima $P_{n+1}(x)$ i $xP_n(x)$, dobijamo da je $a_n = c_{n+1}a_{n+1}$. Odavde sledi da je

$$c_{n+1} = \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

Ovo iskoristimo, i dobijamo da

$$c_{n-1} = \frac{\langle xP_n(x), P_{n-1}(x)\rangle}{\|P_{n-1}(x)\|^2} = \frac{\langle P_n(x), xP_{n-1}(x)\rangle}{\|P_{n-1}(x)\|^2} =$$
$$= \frac{1}{\|P_{n-1}(x)\|^2} \left\langle P_n(x), \frac{a_{n-1}}{a_n} P_n(x) + q(x) \right\rangle,$$

gde je $q(x)$ polinom stepena najviše $(n-1)$. Odavde sledi, zbog ortogonalnosti da je

$$c_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{\|P_n(x)\|^2}{\|P_{n-1}(x)\|^2}.$$

I na kraju,

$$c_n = \frac{\langle xP_n(x), P_n(x)\rangle}{\|P_n(x)\|^2}.$$

$\diamond$

U daljem tekstu ćemo formulisati tvrđenje o nulama ortogonalnih polinoma.

Teorema 2.3. *Neka je P_n ortogonalni polinom na intervalu (a, b). Tada P_n ima n različitih realnih nula na intervalu (a, b), i polinomi P_n i P_{n+1} nemaju iste nule.*

Teorema 2.4. *Neka su $x_1 < x_2 < ... < x_n$ nule ortogonalnog polinoma P_n na intervalu (a, b) i $x_0 = a$ i $x_{n+1} = b$. Tada na svakom intervalu $[x_i, x_{i+1}], i = 0, 1, ..., n$ postoji samo jedna nula polinoma P_{n+1}.*

2.3 Neki specijalni ortogonalni polinomi

Postoji jako puno tipova ortogonalnih polinoma. U sledećem delu ćemo predstaviti neke od tih, koje ćemo koristiti u ovom radu.

Mnogi problemi primenjene matematike dolaze od diferencijalne jednačine

$$s(x)y'' + \tau(x)y' + \lambda y = 0, \tag{2}$$

gde je $s(x)$ polinom najviše drugog stepena, $\tau(x)$ polinom najviše prvog stepena, a λ je konstanta. Ukoliko je λ oblika

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{1}{2}n(n-1)s'',$$

tada diferencijalna jednačina (2) ima partikularno rešenje $y(x) = y_n(x)$, koje je polinom n-tog stepena. Ovi polinomi su ortogonalni i zadovoljavalju uslov:

$$\int_a^b y_m(x)y_n(x)\rho(x) = d_n^2\delta_{nm}, -\infty \leq a < b \leq \infty.$$

Funkcija težine $\rho(x)$ zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$(s(x)\rho(x))' = \tau(x)\rho(x). \tag{3}$$

U zavisnosti od toga, kako izgleda funkcija $s(x)$, gornja jednačina (3) ima 5 različitih rešenja. Funkcija težine ortogonalnih polinoma $\rho(x)$ je i funkcija gustine neke raspodele. Ovde ćemo navesti rešenje diferencijalne jednačine (2), i to da koja raspodela odgovara tim polinomima.

- Funkcija $s(x)$ je konstantna. Neka je $s(x) = 1$. Tada je funkcija težine $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$. Ova funkcija je funkcija gustine normalne raspodele $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$. Tada je $\tau(x) = -2x$ i $\lambda_n = 2n$. Polinomi, koji zadovoljavalju jednačinu (2) su *Hermitovi polinomi*, i označavamo ih sa $H_n(x)$.

- Funkcija $s(x)$ je linearna. Neka je $s(x) = x$ i $\tau(x) = -x + \alpha + 1$. Tada funkcija težine $\rho(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}x^\alpha e^{-x}$. Ova funkcija gustine odgovara Gamma raspodeli $\Gamma(\alpha, 1)$. Tada $\lambda_n = n$ i polinomi koji zadovoljavaju jednačinu (2) su Generalizovani Laguerreovi polinomi, i označavamo ih sa $L_n^{(\alpha)}$. Za $\alpha = 0$ dobijamo Laguerreove polinome, i označavamo sa $L_n(x)$.

- Funkcija $s(x)$ je kvadratna sa pozitivnom diskriminantom. Ako uzmemo $s(x) = 1 - x^2$ i $\tau(x) = -(\alpha + \beta + 2)x + \beta - \alpha$, tada je funkcija težine $\rho(x) = (1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta$. Dalje, $\lambda_n = n(n + \alpha + \beta + 1)$, i polinomi, koje dobijamo kao rešenje differencijalne jednačine su Jacobijevi polinomi, i koristimo $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ kao oznaku za te polinome. Ovi polinomi su ortogonalni na intervalu $(-1, 1)$ ako su parametri $\alpha, \beta > -1$.

- Funkcija $s(x)$ je kvadratna, a determinanta je 0. Tada, posle affine transformacije dobijamo da funkcija težine $\rho(x) = Cx^{-\alpha}e^{-\frac{\beta}{x}}$. Ako je $\rho(x)$ definisana na intervalu $(0, +\infty)$, i $\alpha > 1$ i $\beta \geq 0$, onda je $\rho(x)$ integrabilna. Tada je $s(x) = x^2$ i $\tau(x) = (2 - \alpha)x + \beta$. Ti polinomi, koje ovako dobijamo su Besselovi polinomi.

- Funkcija $s(x)$ je kvadratna, a diskriminanta negativna. Ovako dobijeni plinomi su Romanovskijevi polinomi. Tada je funkcija težine $\rho(x) = C(1 + x^2)^{-\alpha}$ $e^{\beta arctg(x)}$, gde je C konstanta. Ovi polinomi su ortogonalni na intervalu $(-\infty, \infty)$ u odnosu na funkciju težine $\rho(x)$.

Sad ćemo uvesti diskretne ortogonalne polinome, ali pre toga moramo definisati Pochhammerov simbol, hipergeometrične redove i diferencni operator unapred i unazad.

Definicija 2.9. *Pochhammerov simbol označavamo sa $(a)_n$ i definišemo kao:*

$$(a)_n = \begin{cases} 1, & \text{ako } n=0; \\ a(a+1)\dots(a+n-1), & \text{ako } n=1,2,3,\dots. \end{cases}$$

Pochhammerov simbol možemo napisati preko Gama funkcije,

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}, n > 0.$$

Definicija 2.10. *Hipergeometrične redove označavamo sa ${}_pF_q$ i definišemo kao:*

$${}_pF_q(a_1, ..., a_p; b_1, ..., b_q; z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a_1)_j...(a_p)_j}{(b_1)_j...(b_q)_j} \frac{z^j}{j!},$$

gde $b_i \neq 0, -1, -2, ..., i = 1, ..., q$.

Primer 2.1. ${}_0F_0$ su eksponencijalni redovi, ${}_1F_0$ su binomialni redovi a ${}_2F_1$ su Gaussovi hipergeometrični redovi.

Možemo analizirati konvergenciju ovog reda.

- Ako $p \leq q$ onda ${}_pF_q$ apsolutno konvergira za $|z| < \infty$

- Ako $p = q + 1$ onda ${}_pF_q$ apsolutno konvergira za $|z| < 1$ i divergira za $|z| > 1$. Kada je $\sum_{i=1}^{q} b_i > \sum_{i=1}^{p} a_i$, red je konvergentan i za $|z| = 1$.

- Ako $p > q + 1$ onda ${}_pF_q$ divergira za $\forall z \neq 0$

Definicija 2.11. *N-tu parcijalnu sumu hipergeometričnog reda označavamo sa* ${}_p\widetilde{F}_q$ *i definišemo kao:*

$$ {}_p\widetilde{F}_q(a_1, ..., a_p; b_1, ..., b_q; z) = \sum_{j=0}^{N} \frac{(a_1)_j...(a_p)_j}{(b_1)_j...(b_q)_j} \frac{z^j}{j!}, $$

gde $b_i \neq 0, -1, -2, ..., i = 1, ..., q$.

Definicija 2.12. *Diferencni operator unapred označimo sa* $\Delta f(x)$ *i definišemo na sledeći način:*

$$ \Delta f(x) = f(x+1) - f(x) $$

Definicija 2.13. *Diferencni operator unazad označimo sa* $\nabla f(x)$ *i definišemo na sledeći način:*

$$ \nabla f(x) = f(x) - f(x-1) $$

Analogno jednačini (2) imamo diferencnu jednačinu, odakle dobijamo još četiri tipova ortogonalnih polinoma. Ta jednačina je

$$ s(x)\Delta\nabla y(x) + \tau(x)\Delta y(x) + \lambda y(x) = 0, \tag{4} $$

gde je $s(x)$ polinom najviše drugog stepena, $\tau(x)$ polinom najviše prvog stepena, a λ konstanta. Koristeći definiciju 2.12 i definiciju 2.13 dobijamo sledeće:

$$ (s(x) + \tau(x))y(x+1) - (2s(x) + \tau(x))y(x) + s(x)y(x-1) = -\lambda y(x). $$

Ako ponovo λ ima specijalan oblik

$$ \lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{1}{2}n(n-1)s'', $$

gornja diferencna jednačina (4) ima partikularno rešenje $y(x) = y_n(x)$, koja je polinom n-tog stepena, ako ne postoji drugi polinom manjeg stepena, koji zadovoljava ovu jednačinu. Ovi polinomi su ortogonalni, i zadovoljavalju uslov:

$$ \sum_{x=a}^{b} y_m(x)y_n(x)\rho(x) = d_n^2\delta_{nm}, $$

dok diskretna težinska mera $\rho(x)$ zadovoljava diferencnu jednačinu

$$ \Delta(s(x)\rho(x)) = \tau(x)\rho(x). \tag{5} $$

Ovu jednačinu možemo napisati na sledeći način:

$$ \frac{\rho(x+1)}{\rho(x)} = \frac{s(x) + \tau(x)}{s(x+1)}. $$

Sad ćemo analizirati rešenje diferencne jednačine, kao što smo radili kod diferencijalne jednačine.

I Neka je $s(x)$ kvadratni polinom. Tada rešenje diferencne jednačine (4) su Hahnovi polinomi

$$Q_n(x;\alpha,\beta,N) = {}_3\widetilde{F}_2(-n, n+\alpha+\beta+1, -x; \alpha+1, -N; 1).$$

Ovi polinomi su ortogonalni u odnosu na funkciju gustine

$$\rho(x) = \binom{N}{x} \frac{(\alpha+1)_x(\beta+1)_{N-x}}{(\alpha+\beta+2)_N}, x = 0, 1, ..., N,$$

koja odgovara hipergeometrijskoj raspodeli.

II Neka je $s(x)$ polinom prvog stepena. Tada posmatramo tri slučaj:

$$s(x) + \tau(x) = \begin{cases} m(\gamma + x) \\ m(\gamma - x) \\ m \end{cases},$$

gde m i γ pozitivne konstante. Tada jednačina (5) ima sledeće rešenje:

$$\rho(x) = \begin{cases} C\left(\frac{m}{(m+1)}\right)^x \frac{(\gamma)_x}{x!} \\ \frac{Cm^x}{x!\Gamma(\gamma+1-x)} \\ \frac{Cm^x}{x!} \end{cases}.$$

1. U prvom slučaju

   $$\mu = \frac{m}{m+1}, C = (1-\mu)^\gamma, 0 < \mu < 1, \gamma > 0.$$

   Tada je funkcija težine

   $$\rho(x) = (1-\mu)^\gamma \mu^x \frac{(\gamma)_x}{x!}.$$

   Ovo odgovara Pascalovoj raspodeli $\mathcal{P}a(\gamma,\mu)$. Odgovarajući polinomi su Meixnerovi polinomi, sa oznakom $M_n(x;\gamma,\mu)$, i ortogonalni su na intervalu $(0,\infty)$.

2. U drugom slučaju

   $$\gamma = N, m = \frac{p}{1-p}, 0 < p < 1, C = (1-p)^N N!.$$

   Tada je funkcija težine

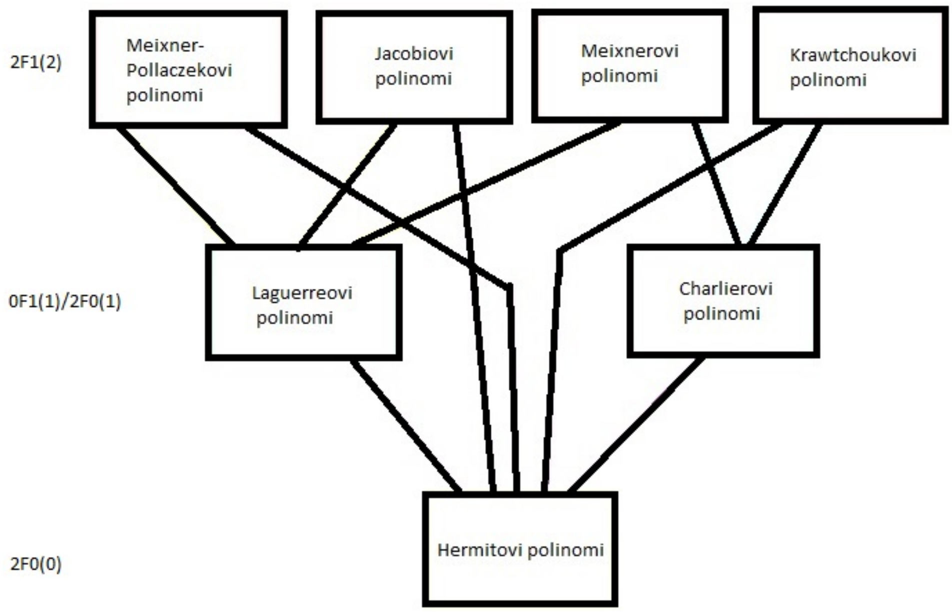
   $$\rho(x) = \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x},$$

   koja odgovara binomialnoj raspodeli $\mathcal{B}(N,p)$. Tada polinomi, koje dobijamo su Krawtchoukovi polinomi, označimo ih sa $K_n(x;N,p)$ i ortogonalni su na intervalu $(0,N)$.

3. Treći slučaj je kad
$$m = \mu, C = e^{-\mu}.$$
Tada je funckija težine
$$\rho(x) = e^{-\mu}\frac{\mu^x}{x!}.$$
Ova funkcija odgovara Poasonovoj raspodeli $\mathcal{P}(\mu)$, odgovarajući polinomi su Charlierovi polinomi sa oznakom $C_n(x;\mu)$, i ortogonalni su na intervalu $(0,\infty)$.

III Kad $s(x) = 1$, tj. konstantna, taj slučaj nas ne interesuje, zato što iz ovog slučaja ne dobijamo nove polinome.

Ove ortogonalne polinome, koje smo dobili kao rešenje diferencijalne i diferencne jednačine, možemo svrštati u hijerarhijsku šemu hipergeometrijskih polinoma, u kojoj se niže klase mogu dobiti odgovarajućim graničnim procesima. Na sledećoj slici je prikazana ova hijerarhija ortogonalnih polinoma.



U sledećem tabelu ćemo prikazati kako sledi iz jednog polinoma drugi.

Jacobijevi $\rightarrow$ Laguerrovi	$\lim_{\beta\to\infty} P_n^{\alpha,\beta}\left(1-\frac{2x}{\beta}\right) = L_n^{\alpha}(x)$
Jacobijevi $\rightarrow$ Hermiteovi i	$\lim_{\alpha\to\infty} \alpha^{-n/2} P_n^{\alpha,\alpha}\left(\frac{x}{\sqrt{\beta}}\right) = H_n(x)/(2^n n!)$
Laguerreovi $\rightarrow$ Hermiteovi	$\lim_{\alpha\to\infty}(\frac{2}{\alpha})^{n/2} L_n^{\alpha}\left(\sqrt{2\alpha}x+\alpha\right) = (-1)^n H_n(x)/n!$
Charlierovi $\rightarrow$ Hermiteovi	$\lim_{a\to\infty}(2a)^{n/2} C_n\left(\sqrt{2a}x+a,a\right) = (-1)^n H_n(x)$

U sledećim poglavljama ćemo malo detaljnije predstaviti neke specijalne ortogonalne polinome, koji smo videli u ovom delu. Prvo ih definišemo, pa navodimo Rodriguesovu formulu za ortogonalne polinome, funkciju generatrisu za ortogonalne polinome, rekurzivnu formulu za te polinome,i grfički ćemo prikazati prvih nekoliko polinoma.

2.4 Hermitovi polinomi

Hermitovi polinomi imaju dva ekvivalentna oblika. Jedan tip koriste većinom u fizici, a drugi u verovatnoći. Oni se razlikuju samo u konstanti. Ovde ćemo prikazati oba tipa.

2.4.1 Hermitovi polinomi

Definicija 2.14. *Polinomi $H_0(x), H_1(x), H_2(x), ..., H_n(x), ...$ su Hermitovi polinomi, ako su ortogonalni u odnosu na funkciju težine $\rho(x) = e^{-x^2}$ na intervalu $(-\infty, +\infty)$.*

Skalarni proizvod dva Hermitova polinoma je

$$\langle H_i(x), H_j(x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H_i(x)H_j(x)e^{-x^2}dx = 2^i\sqrt{\pi}i!\delta_{ij}, i \neq j.$$

Rodriguesova formula za Hermitove polinome je:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}.$$

Funkcija generatrise za ove polinome je:

$$g(x,t) = e^{-t^2+2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!}, n = 0, 1, 2, ...$$

Teorema 2.5. *Hermitovi polinomi zadovoljavaju sledeću rekurentnu relaciju*

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x),$$

sa početnim vrednostima $H_0 = 1$ i $H_1 = 2x$.

Dokaz. Diferenciramo funkciju koja generiše Hermitove polinome $g(x,t)$ po t,

$$\frac{\partial g(x,t)}{\partial t} = 2(x-t)g(x,t).$$

$$2(x-t)\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} nH_n(x)\frac{t^{n-1}}{n!}.$$

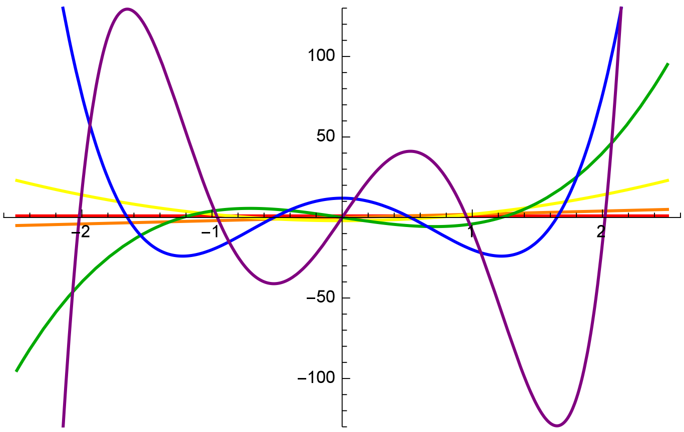
Upoređujemo koeficijente uz $\frac{t^n}{n!}$, i dobijamo traženu relaciju. $\diamond$

Primer 2.2. Prvih 5 Hermitovih polinoma su:

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = 2x$$
$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$
$$H_3(x) = 8x^3 - 12x$$
$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$$
$$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$$

Na sledećoj slici su prikazani prvih 5 Hermitovih polinoma.



2.4.2 Stohastički normalizovani Hermitovi polinomi

Definicija 2.15. *Polinomi $\widehat{H}_0(x), \widehat{H}_1(x), \widehat{H}_2(x), ..., \widehat{H}_n(x), ...$ su stohastički normalizovani Hermitovi polinomi, ako su ortogonalni u odnosu na funkciju težine $\rho(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ na intervalu $(-\infty, +\infty)$.*

Skalarni proizvod dva Hermitova polinoma je

$$\langle \widehat{H}_i(x), \widehat{H}_j(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{H}_i(x)\widehat{H}_j(x)e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi}i!\delta_{ij}, i \neq j.$$

Rodriguesova formula za Hermitove polinome je:

$$\widehat{H}_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Funkcija generatrise za ove polinome je:

$$g(x,t) = e^{-\frac{t^2}{2}+tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{H}_n(x)\frac{t^n}{n!}.$$

Teorema 2.6. *Hermitovi polinomi zadovoljavaju sledeću rekurentnu relaciju*

$$\widehat{H}_{n+1}(x) = x\widehat{H}_n(x) - n\widehat{H}_{n-1}(x),$$

sa početnim vrednostima $\widehat{H}_0 = 1$ *i* $\widehat{H}_1 = x$.

Dokaz. Diferenciramo funkciju koja generiše Hermitove polinome $g(x,t)$ po t,

$$\frac{\partial g(x,t)}{\partial t} = (x-t)g(x,t).$$

$$(x-t)\sum_{n=0}^{\infty} \widehat{H}_n(x)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} n\widehat{H}_n(x)\frac{t^{n-1}}{n!}.$$

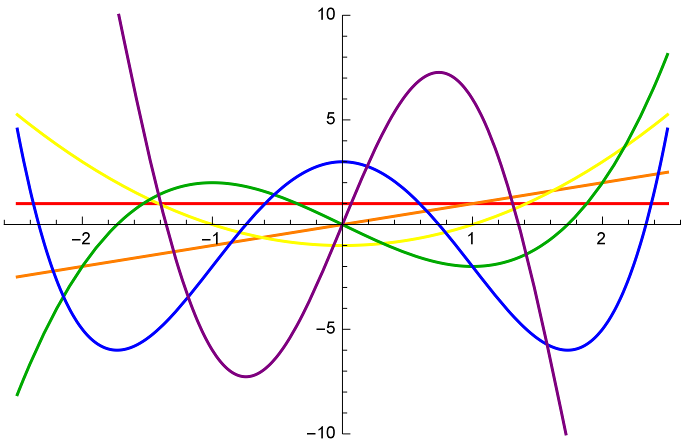
Upoređujemo koeficijente uz $\frac{t^n}{n!}$, i dobijamo traženu relaciju. $\diamond$

Primer 2.3. Prvih 5 Hermitovih polinoma su:

$$\widehat{H}_0(x) = 1$$

$$\widehat{H}_1(x) = x$$
$$\widehat{H}_2(x) = x^2 - 1$$
$$\widehat{H}_3(x) = x^3 - 3x$$
$$\widehat{H}_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3$$
$$\widehat{H}_5(x) = x^5 - 10x^3 + 15x$$

Na sledećoj slici su prikazani prvih 5 Hermitovih polinoma.



2.5 Legendreovi polinomi

Definicija 2.16. *Polinomi $P_0(x), P_1(x), P_2(x), ..., P_n(x), ...$ su Legendreovi polinomi, ako su ortogonalni u odnosu na funkciju težine $\rho(x) = 1$ na intervalu $[-1, 1]$.*

Skalarni proizvod dva Legendreova polinoma je

$$\langle P_i(x), P_j(x) \rangle = \int_{-1}^{1} P_i(x)P_j(x)dx = \frac{2}{2i+1}\delta_{ij}, i \neq j.$$

Rodriguesova formula za Legendreove polinome je:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, n = 0, 1, 2, ...$$

Funkcija generatrise za ove polinome je:

$$g(x, u) = \frac{1}{\sqrt{1-2xu+u^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)u^n, |u| < 1.$$

Teorema 2.7. *Legendreovi polinomi zadovoljavaju sledeću rekurentnu relaciju*

$$P_{n+1}(x) = \frac{(2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)}{n+1},$$

sa početnim vrednostima $P_0 = 1$ i $P_1 = x$.

Dokaz. Diferenciramo fukciju $g(x, u)$ po u,

$$\frac{\partial}{\partial u}g(x, u) = \frac{x-u}{1-2xu+u^2}g(x, u),$$

odavde dobijamo da

$$(x-u)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)u^x = (1-2xu+u^2)\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)u^{n-1}.$$

Uporedimo koeficijente uz u^n pa dobijamo da

$$xP_n(x) - P_{n-1}(x) = (n+1)P_{n+1}(x) - 2xnP_n(x) + (n-1)P_{n-1}(x)$$

$$(2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x).$$

◇

Primer 2.4. Prvih 5 Legendreovih polinoma su:

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

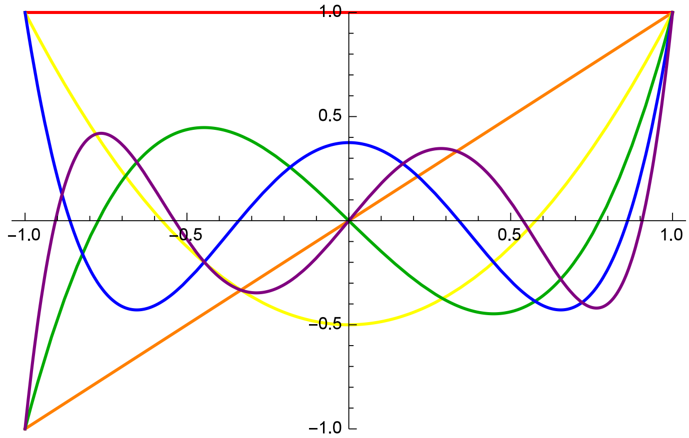
$$P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}$$

$$P_3(x) = \frac{5x^3 - 3x}{2}$$

$$P_4(x) = \frac{35x^4 - 30x^2 + 3}{8}$$

$$P_5(x) = \frac{63x^5 - 70x^3 + 15x}{8}$$

Ovi polinomi su prikazani na sledećoj slici.



2.6 Charlierovi polinomi

Definicija 2.17. *Polinomi $C_0(x,a), C_1(x,a), C_2(x,a), ..., C_n(x,a), ...$ su Charlierovi polinomi, ako su ortogonalni u odnosu na funkciju težine $\rho(x) = \frac{a^x}{x!}e^{-a}$ na intervalu $(0, +\infty)$.*

Rodriguesova formula za Charlierove polinome je:

$$C_n(x) = \frac{x!}{a^x}\Delta^n \left(\frac{a^{x-n}}{(x-n)!}\right), n = 0, 1, 2, ...$$

Funkcija generatrise za ove polinome je:

$$g(x,t) = e^t \left(1 - \frac{t}{a}\right)^x = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x,a)\frac{t^n}{n!}, |t| < a.$$

Teorema 2.8. *Charlierovi polinomi zadovoljavaju sledeću rekurentnu relaciju*

$$C_{n+1}(x) = \frac{(a+n-x)C_n(x) - nC_{n-1}(x)}{a},$$

sa početnim vrednostima $C_0 = 1$ i $C_1 = x$.

Primer 2.5. Prvih 5 Charlierovih polinoma sa funkcijom težine $\rho(x) = \frac{1}{e}\frac{1}{x!}$ su:

$$C_0(x,1) = 1$$

$$C_1(x,1) = x$$

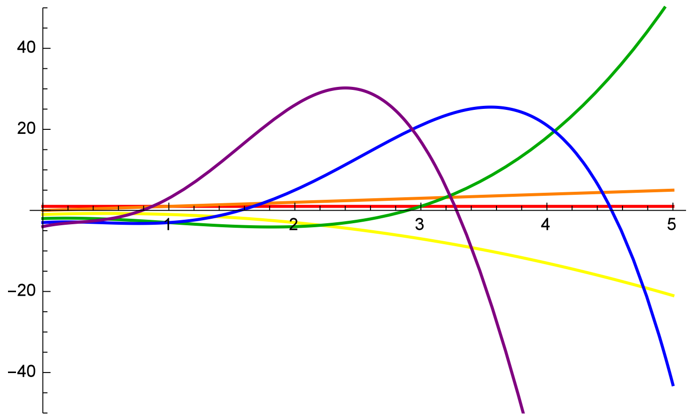
$$C_2(x,1) = -x^2 + x - 1$$

$$C_3(x,1) = x^3 - 3x^2 + x - 2$$

$$C_4(x,1) = -x^4 + 6x^3 - 7x^2 + 2x - 3$$

$$C_5(x,1) = x^5 - 10x^4 + 27x^3 - 18x^2 + 7x - 4$$

Na slici su prikazani prvih 5 Charlierovih polinoma sa funkcijom gustine $\rho(x) = \frac{1}{e}\frac{1}{x!}$



2.7 Laguerreovi polinomi

Definicija 2.18. *Polinomi $L_0(x), L_1(x), L_2(x), ..., L_n(x), ...$ su Laguerre-ovi polinomi, ako su ortogonalni u odnosu na funkciju težine $\rho(x) = e^{-x}$ na intervalu $(0, +\infty)$.*

Skalarni proizvod dva Laguerreova polinoma je

$$\langle L_i(x), L_j(x)\rangle = \int_0^{\infty} L_i(x)L_j(x)e^{-x}dx = \frac{\Gamma(i+1)}{i!}\delta_{ij}, i \neq j.$$

Rodriguesova formula za Laguereove polinome je:

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}), n = 0, 1, 2, ...$$

Funkcija generatrise za ove polinome je:

$$g(x,t) = \frac{1}{1-t}e^{-\frac{xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\frac{t^n}{n!}, |t| < 1.$$

Teorema 2.9. *Laguerre-ovi polinomi zadovoljavaju sledeću rekurentnu relaciju*

$$L_{n+1}(x) = \frac{(2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x)}{(n+1)}.$$

Primer 2.6. Prvih 5 Laguerreovih polinoma su:

$$L_0(x) = 1$$

$$L_1(x) = 1 - x$$

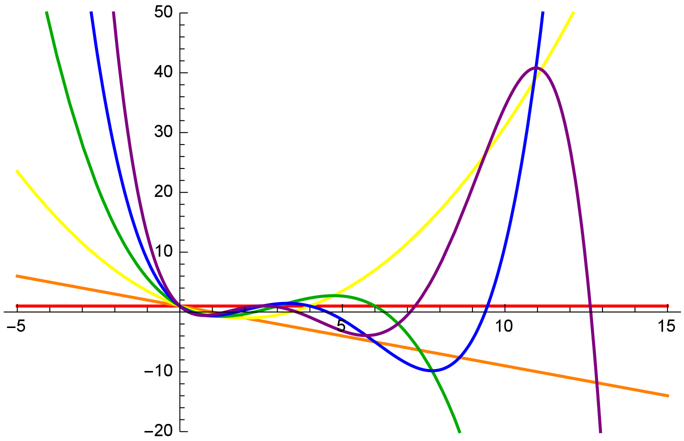
$$L_2(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + 1$$

$$L_3(x) = -\frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} - 3x + 1$$

$$L_4(x) = \frac{x^4}{24} - \frac{2x^3}{3} + 3x^2 - 4x + 1$$

$$L_5(x) = -\frac{x^5}{120} + \frac{5x^4}{24} - \frac{5x^3}{3} + 5x^2 - 5x + 1$$

Prvih 5 Lagguereovih polinoma su:



2.8 Jacobijevi polinomi

Definicija 2.19. *Polinomi* $P_0^{(\alpha,\beta)}(x), P_1^{(\alpha,\beta)}(x), P_2^{(\alpha,\beta)}(x), ..., P_n^{(\alpha,\beta),\cdots}(x)$ *su Jacobijevi polinomi, ako su ortogonalni u odnosu na funkciju gustine* $\rho(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ *na intervalu* $(-1, 1)$.

Skalarni proizvod dva Jacobijeva polinoma je

$$\langle P_i^{(\alpha,\beta)}(x), P_j^{(\alpha,\beta)}(x)\rangle = \int_{-1}^{1} P_i^{(\alpha,\beta)}(x) P_j^{(\alpha,\beta)}(x) dx =$$

$$= \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2i+\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(i+\alpha+1)\Gamma(i+\beta+1)}{\Gamma(i+\alpha+\beta+1)i!} \delta_{ij}, i \neq j.$$

Rodriguesova formula za Jacobijeve polinome je:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n}\left((1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\right), n = 0, 1, 2, ...$$

Funkcija generatrise za ove polinome je:

$$g(x,t) = 2^{\alpha+\beta} R^{-1}(1+t+R)^{-\beta}(1-t+R)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) t^n, |t| < 1, |x| < 1,$$

gde je $R = \sqrt{1-2xt+t^2}$

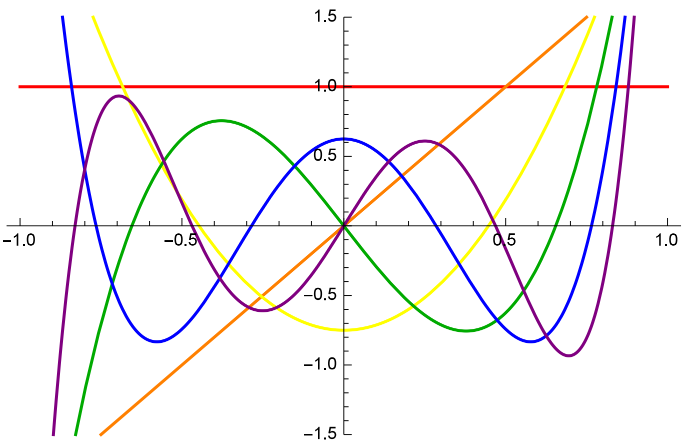
Teorema 2.10. *Jacobijevi polinomi zadovoljavaju sledeću rekurentnu relaciju*

$$2n(n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)P_n^{(\alpha,\beta)}(x) =$$
$$= (2n+\alpha+\beta-1)((2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)x+\alpha^2-\beta^2)P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)$$
$$-2(n+\alpha-1)(n+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)P_{n-2}^{(\alpha,\beta)}(x).$$

Primer 2.7. Prvih 5 Jacobijevih polinoma su:

$$P_0^{(1,1)}(x) = 1$$
$$P_1^{(1,1)}(x) = 1 + x$$
$$P_2^{(1,1)}(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} + 1$$
$$P_3^{(1,1)}(x) = \frac{x^3}{6} + x^2 + \frac{11x}{6} + 1$$
$$P_4^{(1,1)}(x) = \frac{x^4}{24} + \frac{5x^3}{12} + \frac{35x^2}{24} + \frac{25x}{12} + 1$$
$$P_5^{(1,1)}(x) = \frac{x^5}{120} + \frac{x^4}{8} + \frac{17x^3}{24} + \frac{15x^2}{8} + \frac{137x}{60} + 1$$

Na slici su prikazani prvih 5 Jacobijevih polinoma sa parametrima $\alpha = 1$ i $\beta = 1$



Na slici se vidi, da ovi polinomi imaju sličan oblik kao Legendreovi polinomi. To je zato što su oni uopštenje Legendreovih polinoma, za $\alpha = 0$ i $\beta = 0$ dobijamo Legendreove polinome.

3 Osnovni pojmovi stohastičke analize

U ovom delu ćemo se baviti sa teorijom verovatnoće, stohastičkim procesima i stohastičkom integracijom.

3.1 Osnovni pojmovi teorije verovatnoće

Skup svih mogućih ishoda nekog eksperimenta označavaćemo sa Ω. Elemente skupa Ω nazivamo elementarnim događajima i označavaćemo ih sa ω. Slučajan događaj A je podskup skupa elementarnih događaja Ω. On se sastoji od onih elementarnih događaja ω koji imaju svojstvo kojim se događaj A definiše. Označimo sa $\mathcal{F}$ klasu događaja kod nekog eksperimenta. Drugim rečima, $\mathcal{F}$ je podskup partitivnog skupa od $\Omega, \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Prirodno je zahtevati da ova klasa bude zatvorena u odnosu na operacije komplemantiranja, prebrojive unije i preseka. Taj zahtev formulišemo u sledećoj definiciji koja se zove još i aksiomatika σ-polja.

Definicija 3.1. *Podskup $\mathcal{F}$ partitivnog skupa $\mathcal{P}(\Omega)$ je σ-polje ili σ-algebra nad Ω ako važe uslovi:*

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$

(ii) *ako $A \in \mathcal{F}$, onda $\overline{A} \in \mathcal{F}$,*

(iii) *ako $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$, onda $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.*

Neke od osobina σ-polja $\mathcal{F}$ koje slede direktno iz definicije su:

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$.
2. Ako $A_1, ..., A_n \in \mathcal{F}$, onda $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$.
3. Ako $A_1, ..., A_n \in \mathcal{F}$, onda $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$.
4. ako $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$, onda $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Primer 3.1. Borelova σ-algebra $\mathcal{B}_n$ je najmanja σ-algebra koja sadrži sve otvorene podskupove u $\mathbb{R}^n$.

Definicija 3.2. *Neka je Ω skup elementarnih događaja i $\mathcal{F}$ σ-polje nad Ω. Funkcija $P : \mathcal{F} \mapsto [0,1]$ se zove verovatnoća na prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ ako zadovoljava uslove*

(i) $P(\Omega) = 1$,

(ii) *Ako $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, ...,$ onda*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Prostor verovatnoća je uređena trojka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gde je Ω skup svih elementarnih događaja, $\mathcal{F}$ je σ-polje nad Ω, a P je verovatnoća na $(\Omega, \mathcal{F})$.

Definicija 3.3. *Preslikavanje $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ je slučajna promenljiva ako za inverzno preslikavanje važi $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{B}_n$, ili ekvivalentno, ako je X $\mathcal{F}$-merljivo.*

Definicija 3.4. *Očekivanje $E(X)$ slučajne promenljive X definiše se sa*

$$E(X) = \int_\Omega x(\omega) dP(\omega).$$

Specijalno, ako je X diskretna slučajna promenljiva

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p(x_k),$$

i ono postoji ako i samo ako

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| p(x_k) < \infty.$$

Može se pokazati da je, za apsolutno neprekidnu slučajnu promenljivu X, sa gustinom $\varphi_X(x)$, očekivanje

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi_X(x),$$

i ono postoji ako gornji integral apsolutno konvergira, odnosno, ako

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|\varphi_X(x) < \infty.$$

Sad ćemo definisati više vrsta konvergencije slučajnih promeljivih.

Definicija 3.5. *Niz slučajnih promenjivih $X_1, X_2, ...$ konvergira u verovatnoći ka slučajnoj promenljivoj X, $X_n \xrightarrow{p} X$ ako, za svako $\varepsilon > 0$,*

$$P\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} \to 0, n \to \infty.$$

Teorema 3.1. *Ako je $g(x), x \in \mathbb{R}$ neprekidna funkcija i ako*

$$X_n \xrightarrow{p} X, n \to \infty,$$

tada

$$g(X_n) \xrightarrow{p} g(X), n \to \infty,$$

Definicija 3.6. *Niz slučajnih promenljivih $X_1, X_2, ...$ konvergira u raspodeli ka slučajnoj promeljivoj X,$X_n \xrightarrow{r} X$, kad $n \to \infty$, ako niz odgovarajućih funkcija raspodele $F_{X_1}(x), F_{X_2}(x), ...$ kompletno konvergira ka fukciji raspodele slučajne promenljive X, $F_X(x)$, (što znači da konvergira za svako $x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ za koje je $F_X(x)$ neprekidna funkcija.)*

Teorema 3.2. *Ako niz slučajnih promenljivih $X_1, X_2, ...$ konvergira u verovatnoći ka slučajnoj promenljivoj X, kad $n \to \infty$, onda taj niz konvergira i u raspodeli ka X, kad $n \to \infty$.*

Obrnuto ne važi.

Definicija 3.7. *Niz slučajnih promenjivih $X_1, X_2, ...$ konvergira u srednje-kvadratnom ka slučajnoj promenljivoj X, ako je $E(X_n^2) < \infty$ za sve $n \in \mathbb{N}$ i $E(|X_n - X|^2) \to 0$. To označimo sa*

$$X_n \xrightarrow{L^2} X, n \to \infty.$$

Teorema 3.3. *Ako niz slučajnih promenljivih konvergira u srednje-kvadratnom, onda konvergira i u verovatnoći.*

3.2 Stohastički procesi

Zamislimo da u svakom vremenskom trenutku iz intervala I posmatramo neku karakteristiku X određenog fizičkog sistema i neka je ta karakteristika slučajna veličina. Dakle, $X(t)(t \in I$ je fiksirano) je jedna slučajna promenljiva. Tada na skup svih slučajnih promenljivih $\{X(t), t \in I\}$ možemo gledati kao na slučajnu veličinu koja se menja u vremenu, tj. kao na slučajnu funkciju vremena. Tako dolazimo do pojma stohastičkog procesa.

Definicija 3.8. *Stohastički proces je familija slučajnih promenljivih $\{X(t), t \in I\}$, gde je I takozvani parametarski skup stohastičkog procesa.*

Napomena 3.1.

- *$\{X(t), t \in I\}$ moraju biti definisane na istom prostoru verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.*
- *Za fiksirano $t \in I$ dobijamo slučajnu promenljivu na prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, a za fiksirano $\omega \in \Omega$ dobijamo funkciju vremena, koju zovemo trajektorija stohastičkog procesa.*

3.3 Lanci Markova

U definiciji stohastičkog procesa smo naglasili da je to familija slučajnih promenljivih $\{X(t), t \in I\}$, gde je I parametarski skup. U slučaju kada je I prebrojiv, stohastički proces zovemo nizom ili lancem slučajnih promenljivih. Posmatramo proces $\{X_n, n = 0, 1, 2, ...\}$ sa konačnim ili prebrojivim skupom vrednosti. Skup vrednosti, tj. skup stanja će biti $S = \{x_1, x_2, ...\}$.

Definicija 3.9. *Niz slučajnih promenljivih sa istim skupom stanja $\{x_1, x_2, ...\}$ se zove lanac Markova ako za proizvoljno $r \in \mathbb{N}$ i $n > k_1 > k_2 > ... > k_r$ važi tzv. Markovsko svojstvo:*

$$P(X_n = x_n | X_{k_1} = x_{k_1}, X_{k_2} = x_{k_2}, ..., X_{k_r} = x_{k_r}) = P(X_n = x_n | X_{k_1} = x_{k_1}),$$

tj. verovatnoća da se proces nađe u stanju x_n u trenutku n zavisi samo od stanja u sadašnjem trenutku k_1 a ne od stanja u prošlim trenucima $k_2, ..., k_r$.

Kod ovih procesa interesovaće nas verovatnoće prelaza iz jednog u drugo stanje, tj verovatnoće prelaza.

Definicija 3.10. *Verovatnoća prelaza iz i-tog u j-to stanje u jednom koraku je*

$$p_{i,j}^{n,n+1} = P(X_{n+1} = x_j | X_n = x_i)$$

Ako gore navedene verovatnoće ne zavise od n kažemo da je lanac homogen.

Definicija 3.11. *Matrica prelaza za jedan korak je*

$$P = [p_{ij}] = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Definicija 3.12. *Verovatnoća prelaza iz i-tog u j-to stanje u n koraka je*

$$p_{i,j}(n) = P(X_{m+n} = x_j | X_m = x_i)$$

Definicija 3.13. *Matrica prelaza u n koraka je*

$$P_n = [p_{ij}(n)]$$

Od izuzetnog značaja su jednačine Čepmen-Kolmogorova, koje ćemo pokazati u sledećoj teoremi.

Teorema 3.4. *Neka su $p_{i,j}(n) = P(X_{m+n} = x_j | X_m = x_i)$ verovatnoće prelaza u n koraka. Tada važi sledeće:*

$$p_{ij}(n+m) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}(n) p_{kj}(m).$$

Dokaz.

$$P(X_{n+m} = j | X_0 = i) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X_{n+m} = j, X_n = k | X_0 = i) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(X_{n+m} = j | X_n = k, X_0 = i) P(X_n = k | X_0 = i) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{kj}(m) p_{ik}(n)$$

◇

Posledica 3.1. *Matrica prelaza u n koraka P_n je matrica prelaza za jedan korak na n-ti stepen P^n.*

Primer 3.2. Markov lanac čiji skup stanja dat sa $i = ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...$ se zove slučajan hod ako za neke $p, q \in (0, 1)$ i $r \in [0, 1]$ matrica prelaza izgleda:

$$P = \begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

i $q_j + r_j + p_j = 1, j = 1, 2, ...$ Naziv slučajan hod proizilazi od toga što na ovaj proces možemo gledati kao na model šetnje po ravnoj liniji, gde u svakom trenutku vremena činimo ili korak u desno sa verovatnoćom p_j ili korak u levo sa verovatnoćom q_j ili ostanemo u istom mestu sa verovatnoćom $r_j, j = 1, 2, ...$

U nastavku ćemo pretpostaviti da lanac Markova ima konačno mnogo stanja $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Sa $p_i(n)$ ćemo označavati verovatnoću da u trenutku n sistem bude u i-tom stanju, tj $p_i(n) = P(X_n = x_i)$. Za fiksirano n dobićemo

$$X_n : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_m \\ p_1(n) & p_2(n) & \cdots & p_m(n) \end{pmatrix}$$

Za $n = 0$ dobićemo $p_n(0)$ takozvanu početnu verovatnoću. Početni vektor tada izgleda na sledeći način:

$$p(0) = \begin{pmatrix} p_1(0) & p_2(0) & \cdots & p_m(0) \end{pmatrix}$$

Analogno,

$$p(k) = \begin{pmatrix} p_1(k) & p_2(k) & \cdots & p_m(k) \end{pmatrix}.$$

Tada jednačine Čepmen-Kolmogorova možemo napisati pomoću gornje notacije:

$$p(k) = p(0)P^k.$$

Ako $p(k)$ ne zavisi od k kažemo da je lanac stacionaran.

Definicija 3.14. *Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da matrica $P_{n_0} = P^{n_0}$ ima sve pozitivne elemente kažemo da je odgovarajući lanac Markova sa matricom prelaza P ergodičan.*

Za ergodične lance postoje za svako i verovatnoće $p_j^* = lim_{n\to\infty} p_{ij}(n)$ koje zovemo finalnim ili graničnim verovatnoćama. To znači da iz bilo kojeg stanja posle dovoljno dugo vremena sistem završi u stanju j sa verovatnoćom p_j^*. Kod ovih lanaca finalne verovatnoće dobijamo iz sistema $p^* = p^*P$ i $\sum_{j=1}^{m} p_j^* = 1$.

Definicija 3.15.

- *Stanje x_j je dostižno iz stanja x_i ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da $p_{ij}(n_0) > 0$.*
- *Stanje x_j je absorbujuće ako je $p_{jj} = 1$.*
- *Stanje x_j je povratno ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da $p_{jj}(n_0) > 0$.*

3.4 Procesi rađanja i umiranja

Procesi rađanja i umiranja su takvi lanci Markova, kojima je parametarski skup I neprekidan, a skup stanja $S = \{x_1, x_2, ...\}$ prebrojiv ili konačan, i stanje uvek se za 1 povećava ili za 1 smanje. Ovo ćemo precizno formulisati u sledećoj definiciji.

Definicija 3.16. *Procesi rađanja i umiranja $\{X_t, t \in [0, \infty)\}$ su takvi lanci Markova, kojima je skup stanja $S = \{-1, 0, 1, 2...\}$ i zadovoljava sledeće uslove:*

(i) $P(X_{s+h} = i + 1|X_s = i) = \lambda_i h + \mathfrak{o}(h), h \to 0, i \in S$

(ii) $P(X_{s+h} = i - 1|X_s = i) = \mu_i h + \mathfrak{o}(h), h \to 0, i \geq 0$

(iii) $P(X_{s+h} = i|X_s = i) = 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + \mathfrak{o}(h), h \to 0, i \in S$

(iv) $P(X_s = j|X_s = i) = \delta_{ij}$

(v) $P(X_{s+t} = -1|X_s = -1) = 1; P(X_{s+t} = i|X_s = -1) = 0, t \geq 0, i \neq -1$

$$\mu_0 \geq 0, \lambda_0 > 0, \lambda_i > 0, \mu_i > 0, i \geq 1$$

Parametri λ_i i μ_i se nazivaju parametri rađanja i umiranja redom. Označimo sa π_n potencijalne koeficijente, koje definišemo na sledeći način:

$$\pi_i = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_i}, i \geq 1$$

i $\pi_0 = 1$.

3.5 Poasonovi procesi

Pre definisanja Poasonovog procesa moramo definisati proces prebrajanja.

Definicija 3.17. *Stohastički proces $\{X_t, t \geq 0\}$ je proces prebrajanja ako X_t predstavlja broj događaja koji su se pojavili do trenutka t, uključujući i trenutak t.*

Procesi prebrajanja moraju zadovoljati sledeće osobine:

(i) $X_t \geq 0, t \geq 0$

(ii) X_t ima celobrojne vrednosti

(iii) $s < t \Rightarrow X_s \leq X_t$

(iv) $X_t - X_s$ predstavlja broj događaja koji se dese u intervalu $(s, t]$

Definicija 3.18. *Proces prebrajanja $\{X_t, t \geq 0\}$ se zove Poasonov proces sa stopom rasta $\lambda, \lambda > 0$ ako*

(i) $X_0 = 0$

(ii) *Proces ima nezavisne priraštaje*

(iii) *Broj događaja u proizvoljnom vremenskom intervalu dužine t ima Poasonovu raspodelu sa srednjom vrednošću λ, $X_{s+t} - X_s : \mathcal{P}(\lambda t)$:*

$$P(X_{s+t} - X_s = n) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, t \geq 0, n = 0, 1, 2, ...$$

Uslov (iii) znači da raspodela broja događaja koji se pojavljuje u bilo kom intervalu zavisi samo od dužine tog intervala.
Specijalno za $s = 0$ posmatrajmo $X_t - X_0 = X_t$. Tada

$$P(X_t = n) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!},$$

odavde sledi da $X_t : \mathcal{P}(\lambda t)$.
Uslov (iii) iz Definicije 3.18 se često u praksi teško proverava pa samim tim korišćenjem isključivo ove definicije često nećemo biti sigurni da li je dobro da modeliramo Poasonovim procesom. Zbog toga uvodimo ekvivalentnu definiciju Poasonovog procesa.

Definicija 3.19. *Stohastički proces $\{X_t, t \geq 0\}$ se zove Poasonov proces sa stopom rasta $\lambda, \lambda > 0$ ako*

(i) $X_0 = 0$

(ii) *Proces ima nezavisne i stacionarne priraštaje*

(iii) $P(X_h = 1) = \lambda h + \mathfrak{o}(h), h \to 0$

(iv) $P(X_h \geq 2) = \mathfrak{o}(h), h \to 0$

Teorema 3.5. *Poasonov proces je proces Markova.*

Dokaz. Neka je $\{X_t, t \geq 0\}$ Poasonov proces sa stopom rasta λ i neka je $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n < t_{n+1} < ...$ i neka su $b_1, b_2, ..., b_n, b_{n+1}, ...$ realni brojevi takvi da $b_1 \leq b_2 \leq ... \leq b_n \leq b_{n+1} \leq ....$ Treba da pokažemo sledeće:

$$P(X_{t_{n+1}} = b_{n+1} | X_0 = 0, X_{t_1} = b_1, ..., X_{t_n} = b_n) = P(X_{t_{n+1}} = b_{n+1} | X_{t_n} = b_n).$$

$$P(X_{t_{n+1}} = b_{n+1} | X_0 = 0, X_{t_1} = b_1, ..., X_{t_n} = b_n) =$$

$$= \frac{P(X_0 = 0, X_{t_1} = b_1, ..., X_{t_n} = b_n, X_{t_{n+1}} = b_{n+1})}{P(X_0 = 0, X_{t_1} = b_1, ..., X_{t_n} = b_n)} =$$

$$= \frac{P(X_{t_1} - X_{t_0} = b1 - 0, X_{t_2} - X_{t_1} = b_2 - b_1, ..., X_{t_{n+1}} - X_{t_n} = b_{n+1} - b_n)}{P(X_{t_1} - X_{t_0} = b1 - 0, X_{t_2} - X_{t_1} = b_2 - b_1, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}} = b_n - b_{n-1})} =$$

$$= \frac{P(X_{t_1} - X_{t_0} = b1 - 0)P(X_{t_2} - X_{t_1} = b_2 - b_1)...P(X_{t_{n+1}} - X_{t_n} = b_{n+1} - b_n)}{P(X_{t_1} - X_{t_0} = b1 - 0)P(X_{t_2} - X_{t_1} = b_2 - b_1)...P(X_{t_n} - X_{t_{n-1}} = b_n - b_{n-1})} =$$

$$= P(X_{t_{n+1}} - X_{t_n} = b_{n+1} - b_n) = P(X_{t_{n+1} = b_{n+1}} | X_{t_n} = b_n).$$

$\diamond$

3.6 Braunovo kretanje

Definicija 3.20. *Stohastički proces* $\{B_t, t \geq 0\}$ *je Braunovo kretanje ako zadovoljava:*

(i) $B_0 = 0$

(ii) *Prireštaji su nezavisni, tj za sve* $0 < t_1 < t_2 < .... < t_n < ...$ *važi da su* $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, ..., B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ *nezavisne slučajne promenljive*

(iii) $B_t - B_s : \mathcal{N}(0, t-s), t > s$

Ako u (iii) specijalno uzimamo $s = 0$ dobijamo $B_t - B_0 = B_t : \mathcal{N}(0, t)$.
Trajektorije Braunovog kretanja su funkcije neograničene varijacije, stoga nije moguće definisati klasičan Lebeg-Stiltjesov integral po trajektoriji Braunovog kretanja. Više o toga biće u sledećem poglavlju.

3.7 Stohastička integracija

Analiza stohastičkih dinamičkih sistema često dovodi do diferencijalne jednačine oblika:

$$\begin{cases} dX_t = b(X_t, t)dt + B(X_t, t)dB_t \\ X_0 = \widetilde{X_0} \end{cases}$$

odnosno ako jednačinu gore zapišemo u integralnom obliku:

$$X_t = \widetilde{X_0} + \int_0^t b(X_s, s)ds + \int_0^t B(X_s, s)dB_s.$$

Naš zadatak je da definišemo integral $\int_0^t GdB$ za što širu klasu stohastičkih procesa G. Da bi definisali stohastički integral prvo moramo definisati neke osnovne pojmove.

Definicija 3.21. **(i)** *σ-algebra* $\mathcal{B}_t = \mathcal{F}\{B_s, 0 \leq s \leq t\}$ *zove se istorija Braunovog kretanja do trenutka* t.

(ii) *σ-algebra* $\mathcal{B}_t^+ = \mathcal{F}\{B_s - B_t, s \geq t\}$ *zove se budućnost Braunovog kretanja posle trenutka* t.

Definicija 3.22. *Familija* $\mathcal{U}(\cdot)$ *σ-algebri iz* $\mathcal{F}$ *se zove neanticipirajuća σ-algebra ako*

(i) $\mathcal{U}(t) \supseteq \mathcal{U}(s); 0 \leq s \leq t$

(ii) $\mathcal{U}(t) \supseteq \mathcal{B}_t, t \geq 0$

(iii) $\mathcal{U}(t)$ *je nezavisno od* $\mathcal{B}_t^+, \forall t \geq 0$

Definicija 3.23. *Stohastički proces* $G(t)$ *je neanticipirajući ako je za svako* $t \geq 0$ $G(t)$ $\mathcal{U}(t)$*-merljivo.*

Definicija 3.24. *Stohastički proces* $G(t) = G(t, \omega)$ *je progresivno merljivo ako neanticipirajuća i zajedničko merljivo po* t *i po* ω.

Definicija 3.25. $\mathbb{L}^2(0,T)$ *je prostor progresivno merljivih stohastičkih procesa G koji imaju osobinu da je*

$$E(\int_0^T G^2 dt) < \infty$$

Definicija 3.26. $\mathbb{L}^1(0,T)$ *je prostor progresivo merljivih stohastičkih procesa F koji imaju osobinu da je*

$$E(\int_0^T |F| dt) < \infty$$

Definicija 3.27. *Stohastički proces $G \in \mathbb{L}^2(0,T)$ je step proces (stepenašni proces) ako postoji particija $P\{0 = t_0 < t_1 < ... < t_m = T\}$ tako da $G(t) = G_k, t_k \leq t < t_{k+1}, k = 0, 1, ..., m-1$*

Definicija 3.28. *Neka je $G \in \mathbb{L}^2(0,T)$ step proces. Tada je*

$$\int_0^T G dB := \sum_{k=0}^{m-1} G_k (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})$$

Itov stohastički integral step procesa G.

Teorema 3.6. *Za sve konstante $a, b \in \mathbb{R}$ i za sve step procese $G, H \in \mathbb{L}^2(0,T)$ važi:*

(i) $\int_0^T (aG + bH) dB = a \int_0^T G dB + b \int_0^T H dB$

(ii) $E(\int_0^T G dB) = 0$

(iii) $E((\int_0^T G dB)^2) = E(\int_0^T G^2 dt)$

Dokaz.

(i) Sledi iz definicije

(ii) $G(t) = G_k, t_k < t < t_{k+1}, k = 0, 1, ..., m-1$ Tada je

$$E(\int_0^T G dB) = E(\sum_{k=0}^{m-1} G_k (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})) = \sum_{k=0}^{m-1} E(G_k (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} E(G_k) E(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})) = 0,$$

pošto je G_k nezavisno od $B_{t_{k+1}} - B_{t_k}$ i $B_{t_{k+1}} - B_{t_k} : \mathcal{N}(0, t_{k+1} - t_k)$. Ova nezavisnost sledi jer je G_k $\mathcal{U}(t_k)$-merljivo a $B_{t_{k+1}} - B_{t_k}$ predstavlja jedan deo budućnosti.

(iii)

$$E((\int_0^T G dB)^2) = \sum_{k,j=0}^{m-1} E(G_j G_k (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}))$$

Posmatrajmo slučaj kad $j < k$. Tada $B_{t_{k+1}} - B_{t_k}$ nezavisno od $G_j G_k (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})$. Tada kao kod (ii) dobijamo $E((\int_0^T GdB)^2) = 0$.

Analogno, kad $j > k$ dobijamo $E((\int_0^T GdB)^2) = 0$.

U slučaju kad $k = j$

$$E((\int_0^T GdB)^2) = \sum_{k,j=0}^{m-1} E(G_j G_k (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} E(G_k^2 (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2) = \sum_{k=0}^{m-1} E(G_k^2) E((B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} E(G_k^2)(t_{k+1} - t_k)^2) = E(\sum_{k=0}^{m-1} G_k^2 (t_{k+1} - t_k)^2)) = E(\int_0^T G^2 dt).$$

$\diamond$

Želimo da za proizvoljan $G \in \mathbb{L}^2(0,T)$ definišemo $\int_0^T GdB$. To radimo tako, da aproksimiramo progresivno merljive procese step procesima. Može se pokazati, da se svaki $G \in \mathbb{L}^2(0,T)$ može aproksimirati nizom step procesa $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ u smislu srednje-kvadratne konvergencije :

$$E(\int_0^T (G - G_n)^2 dt) \to 0, n \to \infty.$$

Dalje važi da je niz integrala step procesa $\{\int_0^T G_n dB\}_{n \in \mathbb{N}}$ Košijev.
Konačno, definišemo

$$\int_0^T GdB := lim_{n \to \infty} \int_0^T G_n dB.$$

Osobine Itovog itegrala koji su važele za step procese, važe i u opštem slučaju.

Teorema 3.7. *Za sve konstante $a, b \in \mathbb{R}$ i za sve procese $G, H \in \mathbb{L}^2(0,T)$ važi:*

(i) $\int_0^T (aG + bH)dB = a \int_0^T GdB + b \int_0^T HdB$

(ii) $E(\int_0^T GdB) = 0$

(iii) $E((\int_0^T GdB)^2) = E(\int_0^T G^2 dt)$

(iv) $E((\int_0^T GdB)(\int_0^T HdB)) = E(\int_0^T GHdt)$

Sad ćemo definisati stohastički diferencijal pomoću stohastičkog integrala, i polse ćemo formulisati dve važne teoreme za stohastičkog diferencijala.

Definicija 3.29. *Kažemo da stohastički proces X_t dat sa relacijom*

$$X_t = X_0 + \int_0^T f(s)ds + \int_0^T G(s)dB_s$$

ima stohastički diferencijal i to je upravo

$$dX_t = f(t)dt + G(t)dB_t.$$

Teorema 3.8 (**1. Itova teorema**). *Neka je $u = u(t, x_1, x_2, ..., x_d)$ neprekidna na $[t_0, T]$, definisana na $[t_0, T] \times \mathbb{R}^d$ sa neprekidnim parcijalnim izvodima $u_t, u_{x_i}, u_{x_i x_j}$, $i, j = 1, 2, ..., d$. Dalje neka je dato d jednodimenzionalnih stohastičkih procesa X_i, $i = 1, 2, ..., d$ svojim diferencijalima $dX_i(t) = f_i(t)dt + G_i(t)dB_t$, $i = 1, 2, ..., d$ u odnosu na isto Braunovo kretanje B_t. Tada stohastički proces $Y_t = u(t, X_1(t), ..., X_d(t))$ ima stohastički diferencijal i on je dat sa*

$$dY_t = u_t dt + \sum_{i=1}^{d} u_{x_i} dX_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} u_{x_i x_j} dX_i dX_j.$$

U ovoj teoremi za $d = 1$ ako umesto diferencijale $dX_i(t)$ zamenimo $f_i(t)dt + G_i(t)dB_t$ dobijamo sledeću teoremu.

Teorema 3.9 (**2. Itova teorema**). *Neka je $u = u(t, x)$ neprekidna funkcija definisana na $[t_0, T] \times \mathbb{R}$ sa neprekidnim parcijalnim izvodima u_t, u_x, u_{xx}. Neka je stohastički proces X_t dat svojim stohastičkom diferencijalom $dX_t = f(t)dt + G(t)dB_t$. Tada stohastički proces $Y_t = u(t, X_t)$ ima stohastički diferencijal i on je dat sa*

$$dY_t = (u_t + u_x f(t) + \frac{1}{2} u_{xx} G^2(t))dt + u_x G(t)dB_t.$$

Primer 3.3. Pokažimo da

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{B_t^2 - t}{2}.$$

Prvo napišemo ovo u ekvivalentan oblik,

$$B_t dB_t = d\left(\frac{B_t^2 - t}{2}\right).$$

Koristimo Itovu-teoremu za $Y = \frac{X_t^2 - t}{2}$, gde $X_t = B_t$. Tada

$$dY = (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2})dt + B_t dB_t.$$

Primer 3.4. Pokažimo da

$$\int_0^t 3(B_s^2 - s)dB_s = B_t^3 - 3tB_t.$$

Prvo napišemo ovo u ekvivalentan oblik,

$$3(B_t^2 - t)dB_t = d(B_t^3 - 3tB_t).$$

Koristimo Itovu-teoremu za $Y = X_t^3 - 3tX_t$, gde $X_t = B_t$. Tada

$$dY = (-3B_t + \frac{1}{2} 6B_t)dt + (3B_t^2 - 3t)dB_t.$$

4 Primena ortogonalnih polinoma u stohastičkoj analizi

4.1 Procesi rađanja i umiranja i ortogonalni polinomi

Neka je dat proces $\{X_t, t \geq 0\}$, proces rađanja i umiranja sa skupom stanja $S = \{-1, 1, 0, 2, ...\}$ i parametrima λ_i, μ_i, kao u definiciji 3.16. Za analizu ovih procesa koristićemo takozvane polinome rađanja i umiranja $\{Q_n(x), n \geq 0\}$. Ovi polinomi zadovoljavalju rekurzivu relaciju

$$-xQ_n(x) = \mu_n Q_{n-1}(x) - (\lambda_n + \mu_n)Q_n(x) + \lambda_n Q_{n+1}(x), n \geq 0,$$

sa početnim vrednostima $Q_{-1}(x) = 0$ i $Q_0(x) = 1$.

Teorema 4.1. *Verovatnoća prelaza iz i-tog u j-to stanje kod procesa rađanja i umiranja $\{X_t, t \geq 0\}$ data je sa:*

$$P(X_t = j | X_0 = i) = \pi_j \int_0^\infty e^{-xt} Q_i(x) Q_j(x) d\phi(x), i, j = 0, 1, 2, ..., t \geq 0,$$

gde je ϕ funkcija gustine sa nosačem u $[0, \infty)$.

Ako uzmemo $t = 0$ u gornjoj teoremi onda se može pokazati da su polinomi $\{Q_n, n \geq 0\}$ ortogonalni u odnosu na težinsku funkciju $\phi(x)$.

Primer 4.1 (M/M/∞ redovi čekanja). M/M/∞ je primer redova čekanja sa skupom stanja $S = \{0, 1, 2, ...\}$ gde svako stanje sistema opisuje trenutačni broj klijenata koje treba uslužiti. Pri tome, klijenti pristižu sa stopom rasta λ prema Poasonovoj raspodeli i prebacuju sistem iz stanje i u stanje $i + 1$, a vreme opsluživanja svakog klijenta prati eksponencijalnu raspodelu sa parametrom μ tako da je stopa prelaska iz stanja i u stanje $i - 1$ jednka sa $i\mu$. (Uvek postoji dovoljan broj servera tako da se svaki klijent trenutačno opslužuje).
U ovom primeru parametar rađanja $\lambda_n = \lambda$ a parametar umiranja je $\mu_n = n\mu$, gde λ i μ pozitivne konstante. Tada $\pi_j = \frac{(\lambda/\mu)^j}{j!}, j \geq 0$ a polinomi rađanja i umiranja zadovoljavalju sledeću rekurziju:

$$0 = n\mu Q_{n-1}(x) + (x - \lambda - n\mu)Q_n(x) + \lambda Q_{n+1}(x), n \geq 0, \tag{6}$$

i $Q_0(x) = 1$ i $Q_{-1}(x) = 0$.
Jednakost (6) delimo sa μ i dobijamo

$$0 = nQ_{n-1}(x) + \left(\frac{x}{\mu} - \frac{\lambda}{\mu} - n\right) Q_n(x) + \frac{\lambda}{\mu} Q_{n+1}(x), n \geq 0,$$

tada ova rekurzija odgovara rekurziji Chralierovog polinoma, tj

$$Q_n(x) = C_n(\frac{x}{\mu})$$

sa funkcijom težine $e^{\lambda/\mu} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}, n = 0, 1, 2, ...$ To znači da verovatnoću prelaza iz i-tog u j-to stanje možemo izračunati pomoću Charlierovog polinoma.

Primer 4.2 (Linerani model procesa rađanja i umiranja). U ovom primeru uzimamo parametre rađanja i umiranja da budu: $\lambda_n = (n+\beta)\lambda$ i $\mu_n = n\mu$, gde $\lambda, \mu, \beta > 0$. Tada $\pi_j = \frac{(\beta)_j}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j, j = 0,1,2,...$ Ovde možemo posmatrati 3 različita slučaja.
1. Slučaj, $\lambda < \mu$. Tada su polinomi rađanja i umiranja Meixnerovi polinomi

$$Q_i(x) = M_i\left(\frac{x}{\mu-\lambda}; \beta, \frac{\lambda}{\mu}\right), i = 0,1,2,...$$

i funkcija težine odgovara verovatnoći diskretne raspodele

$$\rho_n = \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^\beta \frac{(\beta)_n}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n, n = 0,1,2,...$$

skoncentrisane u tačkama $(\mu-\lambda)n, n = 0,1,2,...$ *2. Slučaj,* $\lambda > \mu$. Tada su polinomi rađanja i umiranja ponovo Meixnerovi polinomi

$$Q_i(x) = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^i M_i\left(\frac{x}{\lambda-\mu} - \beta; \beta, \frac{\mu}{\lambda}\right), i = 0,1,2,...$$

i funkcija težine odgovara verovatnoći diskretne raspodele

$$\rho_n = \left(1-\frac{\mu}{\lambda}\right)^\beta \frac{(\beta)_n}{n!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n, n = 0,1,2,...$$

skoncentrisane u tačkama $(n+\beta)(\mu-\lambda)n, n = 0,1,2,...$
3. Slučaj, $\lambda = \mu$. U ovom slučaju dobijamo Laguerreove polinome

$$Q_i(x) = \frac{i!}{(\beta)_i} L_i^{(\beta-1)}(\frac{x}{\lambda}), n \geq 0.$$

Tada su ovi polinomi su ortogonalni u $[0,\infty)$ sa funkcijom gustine Gama raspodele

$$\rho(x) = \frac{1}{\lambda^\beta \Gamma(\beta)} x^{\beta-1} e^{-\frac{x}{\lambda}}, x > 0.$$

4.2 Slučajan hod i ortogonalni polinomi

Neka je $\{X_n, n = 0,1,2,...\}$ slučajan hod sa matricom prelaza

$$P = \begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Pretpostavimo da $p_j > 0, r_j \geq 0, q_j > 0$ i $p_j + r_j + q_j = 1,\ j \geq 1$. Kao i kod procesa rađanja i umiranja koristimo polinome $\{Q_j, j = 0,1,...\}$. Ovi polinomi se zove polinomi slučajnog hoda i zadovoljavalju rekurzivnu relaciju

$$xQ_j(x) = q_j Q_{j-1}(x) + r_j Q_j(x) + p_j Q_{j+1}(x), j \geq 0,$$

sa početnim uslovima $Q_0(x) = 1$ i $Q_{-1}(x) = 0$.
Koristimo sledeću notaciju:

$$\pi_0 = 1, \pi_j = \frac{p_0 p_1 \cdots p_{j-1}}{q_1 q_2 \cdots q_j}, j \geq 1.$$

Teorema 4.2. *Postoji jedinstvena Borelova mera ϕ na intervalu $[-1, 1]$ takva da su polinomi Q_n ortogonalni u odnosu na težinu ϕ na $[-1, 1]$. Verovatnoća prelaza iz i-tog u j-to stanje kod slučajnog hoda $\{X_n, n \geq 0\}$ data je sa:*

$$P(X_{m+n} = j | X_m = i) = \pi_j \int_{-1}^{1} x^n Q_i(x) Q_j(x) d\phi(x), i, j = 0, 1, 2, ..., n \geq 0.$$

4.3 Primena ortogonalnih polinoma u stohastičkoj integraciji

U ovom delu bavićemo se stohastičkom integracijom pomoću ortogonalnih polinoma. Ali pre toga moramo ponoviti neke osnovne pojmove klasične teorije integrala. Znamo da u klasičnoj teoriji Rimanovog integrala važi formula:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

gde je F bilo koja primitivna funkcija za f na $[a, b]$.
Sad ćemo izračunati neke određene integrale. Dati su polinomi

$$p_n(x) = \frac{x^n}{n!}, n \geq 0.$$

Ovi polinomi zadovoljavaju pravilo

$$\int_0^t p_n(x)dx = p_{n+1}(t)$$

i

$$\int_0^t \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_1} dt_0 \cdots dt_{n-1} dt_n = p_{n+1}(t).$$

Integracija eksponencijalne funkcije e^x je

$$\int_0^t e^x dx = e^t - e^0 = e^t - 1.$$

Postoji relacija između eksponencijalne funkcije i polinoma.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x).$$

Pokazaćemo da postoje analogne formule sa ovim lepim osobinama i za stohastičku integraciju.

4.3.1 Stohastička integracija u odnosu na Braunovo kretanje B_t

Teorema 4.3. *Važi*

$$\int_0^t \widetilde{H}_{n-1}(B_s, s)dB_s = \frac{\widetilde{H}_n(B_t, t)}{n}, n = 1, 2, 3, ...$$

gde su $\widetilde{H}_n(x, t) = (t)^{\frac{n}{2}} \widehat{H}_n(\frac{x}{\sqrt{t}})$ *Hermitovi polinomi sa parametrom t, a* $\widehat{H}_n(x)$ *su stohastički Hermitovi polinomi.*

Dokaz. Integralnu jednačinu možemo napisti na ekvivalentan način

$$d\widetilde{H}_n(B_t,t) = n\widetilde{H}_{n-1}(B_t,t)dB_t.$$

Ovu stohastičku diferencijalnu jednačinu rešavamo pomoću teoreme 3.9, i za to treba da znamo parcijalne izvode za $\widetilde{H}_n(x,t)$. To ćemo precizno formulisati u sledećim lemama.

Lema 4.1.

$$\widetilde{H}_{n+1}(x,t) = x\widetilde{H}_n(x,t) - tn\widetilde{H}_{n-1}(x,t).$$

Dokaz.

$$\widetilde{H}_{n+1}(x,t) = t^{\frac{n+1}{2}}\widehat{H}_{n+1}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = t^{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\widehat{H}_n\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - n\widehat{H}_{n-1}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\right) =$$

$$= t^{\frac{n}{2}}\sqrt{t}\frac{x}{\sqrt{t}}\widehat{H}_n\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - nt^{\frac{n-1}{2}}t\widehat{H}_{n-1}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) =$$

$$= x\widetilde{H}_n(x,t) - tn\widetilde{H}_{n-1}(x,t).$$

◇

Hermitove polinome sa parametrom t možemo napisati i u obliku

$$\widetilde{H}_n(x,t) = (-t)^n e^{\frac{x^2}{2t}}\frac{d^n}{dx^n}e^{-\frac{x^2}{2t}}.$$

Ova formulacija je važna zbog izračunavanja parcijalnih izvoda.

Lema 4.2.

$$\frac{\partial}{\partial x}\widetilde{H}_n(x,t) = n\widetilde{H}_{n-1}(x,t).$$

Dokaz.

$$\frac{\partial}{\partial x}\widetilde{H}_n(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left((-t)^n e^{\frac{x^2}{2t}}\frac{d^n}{dx^n}e^{-\frac{x^2}{2t}}\right) =$$

$$= (-t)^n\left(\frac{t}{x}e^{\frac{x^2}{2t}}\frac{d^n}{dx^n}e^{-\frac{x^2}{2t}} + e^{\frac{x^2}{2t}}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}e^{-\frac{x^2}{2t}}\right) =$$

$$= \frac{x}{t}\widetilde{H}_n(x,t) - \frac{1}{t}\widetilde{H}_{n+1}(x,t) =$$

$$= \frac{1}{t}\widetilde{H}_{n+1}(x,t) + n\widetilde{H}_{n-1}(x,t) - \frac{1}{t}\widetilde{H}_{n+1}(x,t) = n\widetilde{H}_{n-1}(x,t).$$

◇

Lema 4.3.

$$\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{H}_n(x,t) = -\frac{1}{2}n(n-1)\widetilde{H}_{n-2}(x,t).$$

Dokaz.
$$\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{H}_n(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left((-t)^n e^{\frac{x^2}{2t}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2t}}\right) =$$

$$= n(-t)^{n-1} e^{\frac{x^2}{2t}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2t}} - (-t)^n e^{\frac{x^2}{2t}} \frac{x^2}{2t^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2t}} + (-t)^n e^{\frac{x^2}{2t}} \frac{1}{2t^2} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left(x^2 e^{-\frac{x^2}{2t}}\right) \quad (7)$$

Koristimo Leibnizovu formulu

$$\frac{d^n}{dx^n}(fg) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}(x)$$

dobijamo da

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2t}} = x^2 \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2t}} + 2nx \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-\frac{x^2}{2t}} + (n-1)n \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

Ubacimo ovo u (7)

$$\frac{n}{t}\widetilde{H}_n(x,t) - \frac{nx}{t}\widetilde{H}_{n-1}(x,t) + \frac{n(n-1)}{2}\widetilde{H}_{n-2}(x,t)$$

Koristimo lemu 4.1

$$\frac{n}{t}(x\widetilde{H}_{n-1}(x,t) - (n-1)t\widetilde{H}_{n-2}(x,t)) - \frac{nx}{t}\widetilde{H}_{n-1}(x,t) + \frac{n(n-1)}{2}\widetilde{H}_{n-2}(x,t) =$$

$$= -\frac{1}{2}n(n-1)\widetilde{H}_{n-2}(x,t).$$

◇

Sad se vraćamo na dokaz teoreme 4.3. Na osnovu teoreme 3.9 je

$$d\widetilde{H}_n(B_t,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{H}_n(B_t,t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\widetilde{H}_n(B_t,t)\right)dt + \frac{\partial}{\partial x}\widetilde{H}_n(B_t,t)dB_t =$$

Parcijalne izvode znamo iz leme 4.2 i leme 4.3.

$$= \left(-\frac{1}{2}n(n-1)\widetilde{H}_{n-2}(B_t,t) + \frac{1}{2}n(n-1)\widetilde{H}_{n-2}(B_t,t)\right)dt + n\widetilde{H}_{n-1}(B_t,t)dB_t$$

I konačno
$$d\widetilde{H}_n(B_t,t) = n\widetilde{H}_{n-1}(B_t,t)dB_t.$$

◇

Primer 4.3. Želimo da izračunamo integral $\int_0^t B_s dB_s$. Uzmemo $H_1(x) = x$ i $H_2(x) = x^2 - 1$. Tada $\widetilde{H}_1(x,t) = \sqrt{t}\frac{x}{\sqrt{t}} = x$ i $\widetilde{H}_2(x,t) = t\left(\frac{x^2}{t} - 1\right) = x^2 - t$. Tada je integral

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{B_t^2 - t}{2}.$$

Primer 4.4. Želimo da izračunamo integral $\int_0^t (B_s^2 - s)dB_s$. Uzmemo $H_2(x) = x^2 - 1$ i $H_3(x) = x^3 - 3x$. Tada $\widetilde{H}_2(x,t) = t\left(\frac{x^2}{t} - 1\right) = x^2 - t$ i $\widetilde{H}_3(x,t) = \sqrt{t^3}\left(\frac{x^3}{\sqrt{t^3}} - 3\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = x^3 - 3tx$. Tada je integral

$$\int_0^t (B_s^2 - s)dB_s = \frac{B_t^3 - 3tB_t}{3}.$$

Funkcija generatrisa za Hermitove polinome je zadata sa:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{H}_n(x;t)\frac{z^n}{n!} = e^{\frac{-tz^2}{2} + zx}$$

Uzmemo ovo, da bismo izrazili stohastički analogon eksponencijalne funkcije

$$Y(B_t, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\widetilde{H}_n(B_t;t)}{n!} = e^{-\frac{t}{2} + B_t}$$

Tada je integral eksponencijalne funkcije:

$$\int_0^t Y(B_s, s)dB_s = Y(B_t, t) - Y(B_0, 0) = Y(B_t, t) - 1.$$

4.3.2 Stohastička integracija u odnosu na Poasonov poces

Stohastički proces $\{N_t, t \geq 0\}$ je Poasonov proces sa parametrom $\lambda = 1$, ako N_t ima Poasonovu raspodelu sa parametrom t, tj. $\mathcal{P}(t)$. Pošto $E(N_t) = t \neq 0$ mi ćemo se baviti sa kompenzovanim Poasonovim procesom $M_t = N_t - t$. Charlierovi polinomi su ortogonalni polinomi u odnosu na funkciju gustine Poasonove raspodele $\mathcal{P}(t)$. Funkcija generatrisa za ove polinome je:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x;t)\frac{z^n}{n!} = e^z\left(1 - \frac{z}{t}\right)^x.$$

Teorema 4.4.

$$\int_0^t \widetilde{C}_n(N_{s-}; s)dM_s = \frac{\widetilde{C}_{n+1}(N_t; t)}{n+1},$$

gde je $\widetilde{C}_n(x;t)$ je normalizovan oblik (vodeći koeficijent je jednak jedinici) Charlierovog polinoma.

Dokaz. Dokazaćemo malo opštije tvrđenje. tj.

$$\int_0^t Y(N_{s-}, s, \omega)dM_s = \frac{Y(N_t, t, \omega) - 1}{\omega},$$

gde je

$$Y(X, t, \omega) = e^{-t\omega}(1+\omega)^X = \sum_{m=0}^{\infty} \widetilde{C}_m(X;t)\frac{\omega^m}{m!}.$$

Sa τ_i označimo vreme i-tog skoka u Poasonovom procesu $\{N_t, t \geq 0\}$. Stavimo da je $\tau_0 = 0$. Važi

$$N_{\tau_i -} = \lim_{s \to \tau_i, s < \tau_i} N_s = i - 1, i \geq 1.$$

Tada imamo

$$\int_0^t Y(N_{s-}, s, \omega) dM_s = \int_0^t e^{-s\omega}(1+\omega)^{N_{s-}} dN_s - \int_0^t e^{-s\omega}(1+\omega)^{N_{s-}} ds =$$

$$= \sum_{i=1}^{N_t} e^{-\tau_i \omega}(1+\omega)^{N_{\tau_i -}} - \sum_{i=1}^{N_t} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} e^{-s\omega}(1+\omega)^{N_{s-}} ds - \int_{\tau_{N_t}}^{t} e^{-s\omega}(1+\omega)^{N_{s-}} ds =$$

$$= \sum_{i=1}^{N_t} e^{-\tau_i \omega}(1+\omega)^{i-1} - \sum_{i=1}^{N_t} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} e^{-s\omega}(1+\omega)^{i-1} ds - \int_{\tau_{N_t}}^{t} e^{-s\omega}(1+\omega)^{N_t} ds =$$

$$= \sum_{i=1}^{N_t} e^{-\tau_i \omega}(1+\omega)^{i-1} + \sum_{i=1}^{N_t} (1+\omega)^{i-1} \left(\frac{e^{-\tau_i \omega} - e^{-\tau_{i-1}\omega}}{\omega} \right) + (1+\omega)^{N_t} \left(\frac{e^{-t\omega} - e^{-\tau_{N_t}\omega}}{\omega} \right) =$$

$$= \frac{e^{-t\omega}(a+\omega)^{N_t} - 1}{\omega} = \frac{Y(N_t, t, \omega) - 1}{\omega}.$$

$\diamond$

4.4 Aproksimacija pomoću ortogonalnih polinoma

4.4.1 Aproksimacija vektora iz separabilnog Hilbertovog prostora

Teorema 4.5. *Neka je H separabilan Hilbertov prostor i $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ ortonormirana baza tog prostora. Tada svako $x \in H$ možemo zapisati u obliku*

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i,$$

gde su ovi koeficijenti x_i dati sa formulom $x_i = \langle x, e_i \rangle$. Na osnovu Parsevalovog identiteta važi $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$. Tada važi

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right\|^2 \to 0, n \to \infty.$$

Na primer za prostor H možemo uzeti

$$L^2(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty\}$$

Takođe možemo uzeti prostor

$$L^2(\mathbb{R}, \mu) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 d\mu < \infty\},$$

gde je $d\mu = e^{-x^2} dx$ Gausova mera. Bazu ovog prostora čine Hermitovi polinomi, za koje važi

$$\langle H_i, H_j \rangle = \begin{cases} 0, & \text{i} \neq \text{j}; \\ 2^i i! \sqrt{\pi}, & \text{i=j}. \end{cases}$$

Ako normiramo Hermitove polinome, dobijamo ortonormiranu bazu

$$h_i = \frac{H_i}{\|H_i\|} = \frac{H_i}{\sqrt{2^i i! \sqrt{\pi}}}, i = 0, 1, 2, ...$$

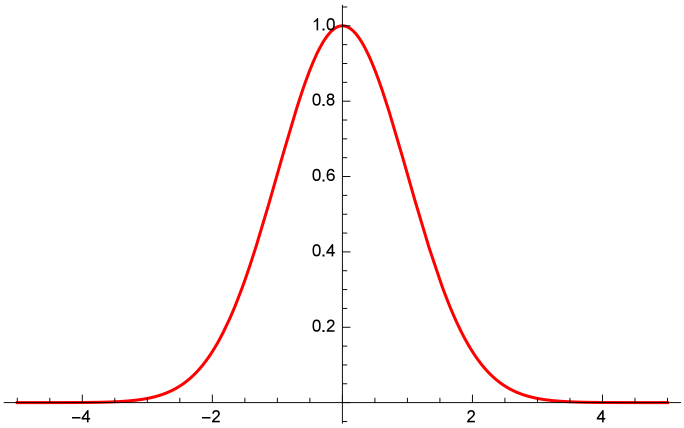
Tada svaku funkciju $f \in L^2(\mathbb{R}, \mu)$ možemo zapisati u obliku

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i h_i(x).$$

Koeficijente f_i računamo formulom

$$f_i = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) h_i(x) e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{H_i(x)}{\sqrt{2^i i! \sqrt{\pi}}} e^{-x^2} dx, i = 0, 1, 2, ...$$

Primer 4.5. Posmatrajmo funkciju $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \in L^2(\mathbb{R}, \mu)$. Grafik ove funkcije izgleda ovako.



U programskom paketu *Mathematica* smo izračunali aproksimacije, odnosno parcijalne sume $f(x,n) = \sum_{i=0}^{n} f_i h_i(x)$. Na primer za $n = 1,2,3,4,5$ su

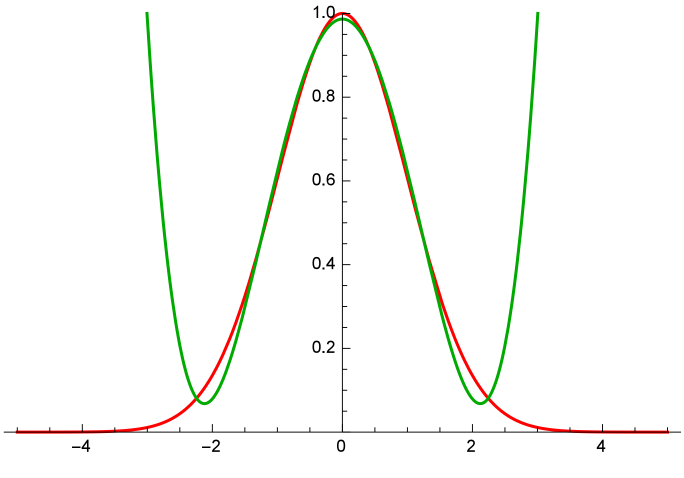
$$f(x,1) = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

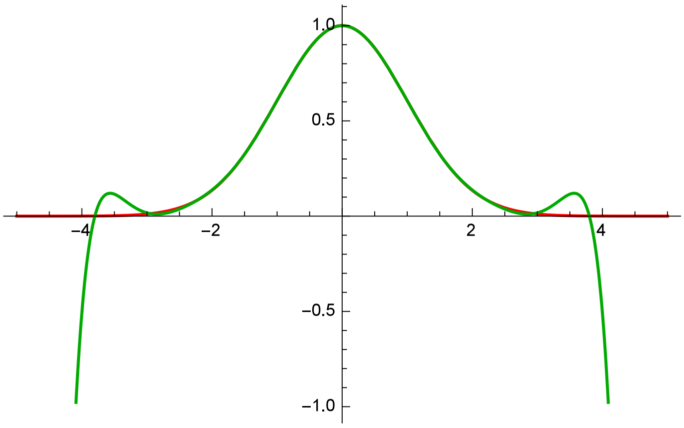
$$f(x,2) = \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{-2+4x^2}{6\sqrt{6}}$$

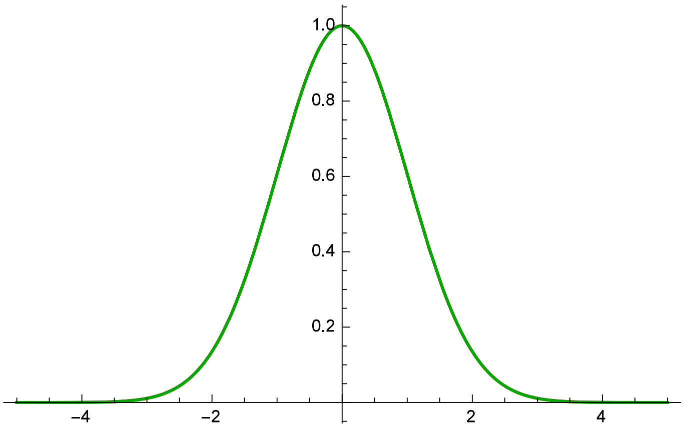
$$f(x,3) = \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{-2+4x^2}{6\sqrt{6}}$$

$$f(x,4) = \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{-2+4x^2}{6\sqrt{6}} + \frac{12-48x^2+16x^4}{144\sqrt{6}}.$$

Na sledećim slikama su prikazane aproksimacije za $n = 5, 10$ i 50.

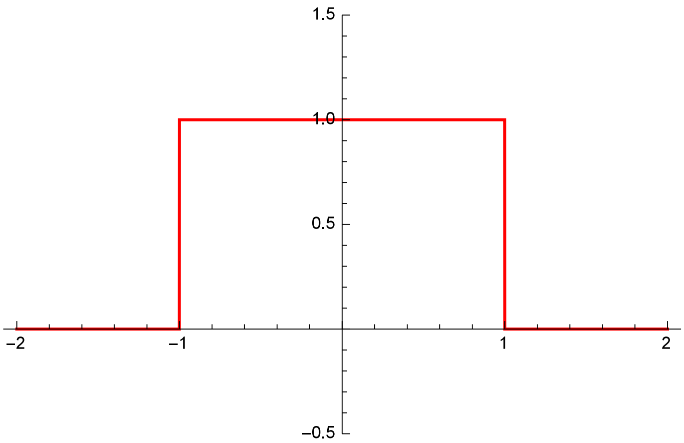






Vidimo da već 10 sabiraka dobro aproksimira funkciju, a za 50 originalna funkcija i aproksimacija se poklapaju.

Primer 4.6. Posmatrajmo funkciju $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{x} \in \text{[-1,1]}; \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$ Grafik ove funkcije ovako izgleda.



I ovaj primer smo izračunali u programskom paketu *Mathematica*. Parcijalne sume $f(x, n) = \sum_{i=0}^{n} f_i h_i(x)$ za $n = 1, 2, 3, 4, 5$ su

$$f(x, 1) = \text{erf}(1) = 0.842701$$

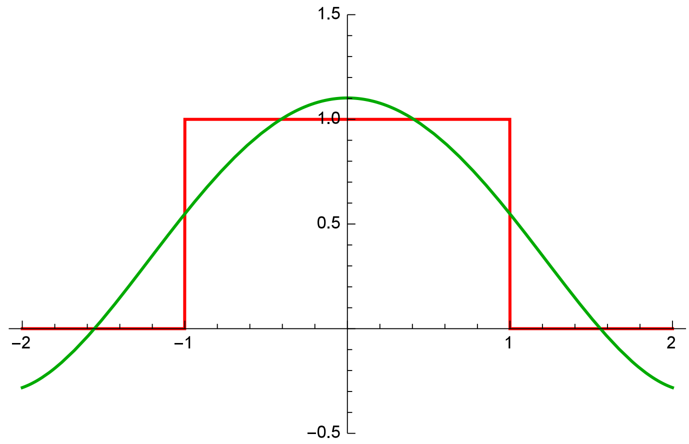
$$f(x,2) = \operatorname{erf}(1) - \frac{4x^2-2}{2e\sqrt{\pi}}$$

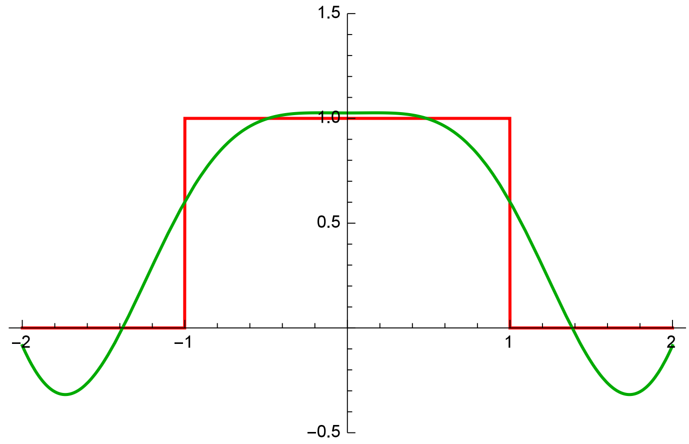
$$f(x,3) = \operatorname{erf}(1) - \frac{4x^2-2}{2e\sqrt{\pi}}$$

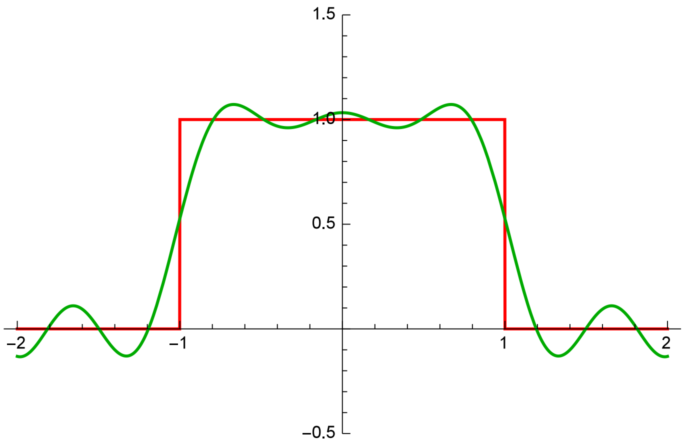
$$f(x,4) = \operatorname{erf}(1) - \frac{4x^2-2}{2e\sqrt{\pi}} + \frac{16x^4-48x^2+12}{48e\sqrt{\pi}}$$

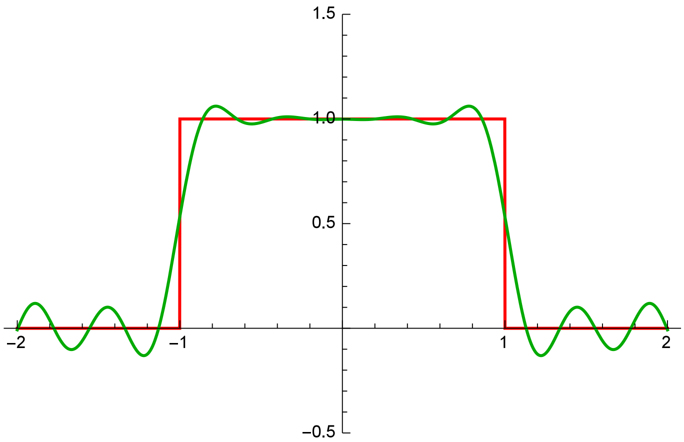
$$f(x,5) = \operatorname{erf}(1) - \frac{4x^2-2}{2e\sqrt{\pi}} + \frac{16x^4-48x^2+12}{48e\sqrt{\pi}}$$

Na sledećim slikama su prikazane aproksimacije za $n = 5, 10, 50$ i 100.









U ovom primeru originalna funkcija i aproksimacija se ne poklapaju, ali vidimo da kako povećavamo n aproksimacija postaje bolja, i kad $n \to \infty$ aproksimacija će težiti ka originalnoj funkciji u $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ normi.

4.4.2 Aproksimacija raspodele slučajne promenljive

Sad ćemo analizirati slučaj kad uzmemo prostor $H = \mathbb{L}^2(\Omega)$, prostor slučajnih promenljivih sa konačnom disperzijom. Preciznije,

$$\mathbb{L}^2(\Omega) = \{Z : \Omega \to \mathbb{R} | E(Z^2) < \infty\},$$

gde je

$$E(Z^2) = \int_\Omega |Z(\omega)|^2 dP(\omega) = \int_\mathbb{R} |z|^2 dF_Z(z).$$

Baza ovog prostora su ortogonalni polinomi koji zadovoljavalju sledeće

$$E(\Phi_m(Z)\Phi_n(Z)) = \gamma_n \delta_{mn}, m, n \in \mathbb{N}, \tag{8}$$

gde je

$$\gamma_n = E(\Phi_n^2(Z)), n \in \mathbb{N}.$$

Kada je Z apsolutno neprekidna slučajna promenljiva, tada funkcija gustine postoji, i $dF_Z(z) = \rho(z)dz$ a ortogonalnost možemo napisati na sledeći način:

$$E(\Phi_m(Z)\Phi_n(Z)) = \int \Phi_m(z)\Phi_n(z)\rho(z)dz = \gamma_n \delta_{mn}, m, n \in \mathbb{N}.$$

Analogno, kada je Z diskretna slučajna promenljiva, tada ortogonalnost ovako izgleda:

$$E(\Phi_m(Z)\Phi_n(Z)) = \sum_i \Phi_m(z_i)\Phi_n(z_i)\rho_i = \gamma_n \delta_{mn}, m, n \in \mathbb{N}.$$

Ali u oba slučaja koristićemo notaciju:

$$E(f(Z)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dF_Z(z).$$

$\Phi_m(z)$ su ortogonalni polinomi sa funkcijom težine $\rho(z)$, koja je istovremeno i funkcija gustine odnosno raspodela verovatnoća slučajne promenljive Z. U sledećoj tabeli su prikazane raspodele za odgovarajuće ortogonalne polinome.

Raspodela slučajne promenljive Z	Polinomna baza Φ	Nosač
Normalna	Hermitovi polinomi	(∞, ∞)
Gamma	Laguerreovi polinomi	$[a, \infty)$
Beta	Jacobijevi polinomi	$[a, b]$
Uniformna	Legendreovi polinomi	$[a, b]$
Poasonova	Charlierovi polinomi	$\{0, 1, 2, ...\}$
Binomna	Krawtchoukovi polinomi	$\{0, 1, 2, ..., N\}$
Negativna binomna	Meixnerovi polinomi	$\{0, 1, 2, ...\}$

Primer 4.7. Neka je $Z : \mathcal{N}(0, 1)$. Tada je funkcija gustine

$$\rho(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}.$$

Relacija (8) tada definiše stohastičke Hermitove polinome $\{\widehat{H}_m(Z)\}$, i baza je

$$\widehat{H}_0(Z) = 1, \widehat{H}_1(Z) = Z, \widehat{H}_2(Z) = Z^2 - 1, \widehat{H}_3(Z) = Z^3 - 3Z, ...$$

Primer 4.8. Neka je $Z : \mathcal{U}(-1,1)$ uniformno raspodeljeno na intervalu $(-1,1)$. Tada je funkcija gustine $\rho(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{z} \in \text{[-1,1];} \\ 0, & \text{z} \neq \text{[-1,1].} \end{cases}$. Relacija (8) tada definiše Legendreove polinome $\{P_m(Z)\}$, i baza je

$$P_0(Z) = 1, P_1(Z) = Z, P_2(Z) = \frac{3}{2}Z^2 - \frac{1}{2}, ...$$

Iz relacije (8) vidimo, da ortogonalne polinome možemo uzeti kao bazu, kada želimo da aproksimiramo neku funkciju, koja zavisi od poznate slučajne promenljive Z. To ćemo ovde definisati.

Definicija 4.1. *Neka je Z slučajna promenljiva sa poznatom raspodelom i $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ merljiva funkcija. Nosač slučajne promeljive Z je I_Z. Jaka polinomna ekspanzija je $f_N(Z) \in \mathbb{P}_N(Z)$, gde je $\mathbb{P}_N(Z)$ prostor polinoma do stepena N, za koji važi*

$$\|f(Z) - f_N(Z)\| \to 0, N \to \infty.$$

Za jaku polinomnu ekspanziju možemo uzeti ortogonalnu projekciju. Tada

$$f_N = \sum_{k=0}^{N} \widehat{f}_k \Phi_k(Z), \widehat{f}_k = \frac{1}{\gamma_k} E(f(Z)\Phi_k(Z)),$$

gde su $\Phi_k(Z)$ ortogonalni polinomi, a γ_k je norma k-tog ortogonalnog polinoma. Postojanja i konvergencija ove projekcije sledi direktno iz klasične teorije aproksimacije, tj.

$$\|f - f_N\| \to 0, N \to \infty, \tag{9}$$

gde je norma $\|\cdot\|$ definisana kao L^2-norma na prostoru $L^2(I_Z), I_Z \subseteq \mathbb{R}$ snabvedenog merom dF_z.

$$\|f\|^2 = \int_{I_Z} |f(x)|^2 dF_Z(x) = E(f^2(Z)).$$

Kada polinomna ekspanzija f_N konvergira u normi (9), tada f_N konvergira ka funkciji f u verovatnoći, tj. $f_N(Z) \xrightarrow{p} f(Z), N \to \infty$, što implicira konvergeniju u raspodeli, tj $f_N(Z) \xrightarrow{r} f(Z), N \to \infty$.
Ovo ćemo prikazati na jednom primeru.

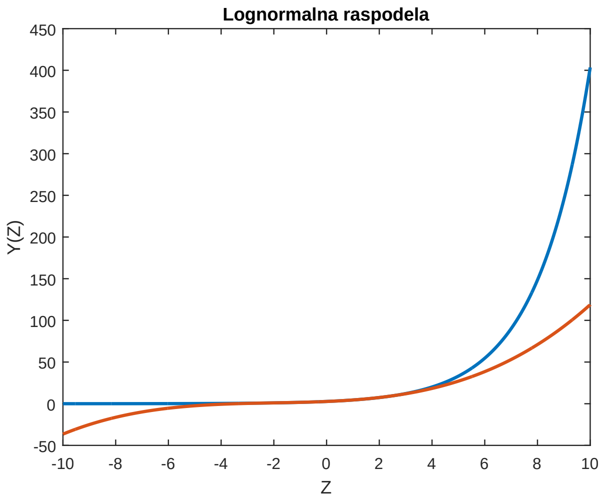
Primer 4.9. Neka je $Y = e^X$, gde $X : \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Tada Y ima lognormalnu raspodelu. Funkcija gustine ove raspodele je

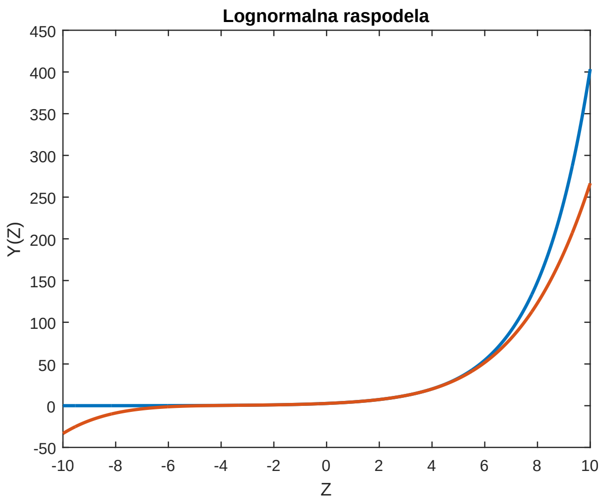
$$\rho_Y(y) = \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(y)-\mu)^2}{2\sigma^2}}, y \geq 0$$

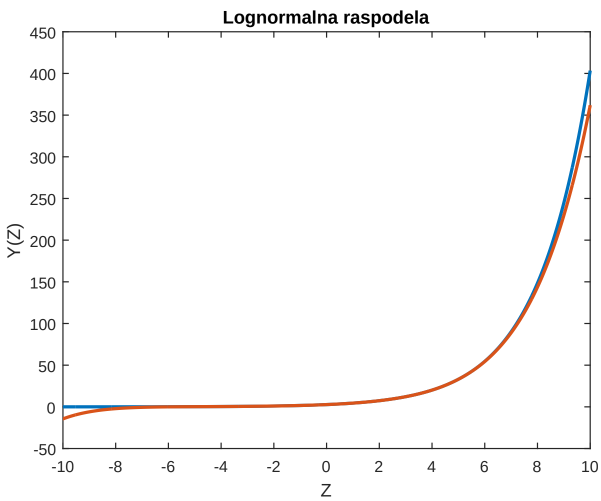
Uzmimo slučajnu promenljivu $Z : \mathcal{N}(0,1)$. Tada $X = \mu + \sigma Z$ i $Y = f(Z) = e^{\mu}e^{\sigma Z}$. Za bazu uzmemo Hermitove polinome. Tada jaka polinomna ekspanzija ima oblik

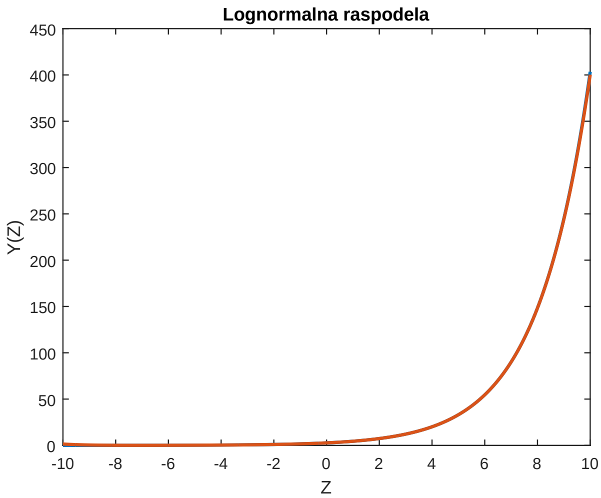
$$Y_N(Z) = e^{\mu + (\sigma^2/2)} \sum_{k=0}^{N} \frac{\sigma^k}{k!} H_k(Z).$$

U programskom paketu MatLab smo izračunali ove ekspanzije za $N = 3, 5, 7, 10$. Na sledećem grafiku su one prikazane.


Lognormalna raspodela
Y(Z)
Z


Lognormalna raspodela
Y(Z)
Z


Lognormalna raspodela
Y(Z)
Z



Vidimo da ova polinomna ekspanzija dobro aproksimira originalnu raspodelu, a već za $N = 10$ ekspanzija i originalna raspodela se poklapaju.

Kada je u pitanju jaka polinomna ekspanzija, mi znamo informacije i o funkciji f i o raspodeli slučajne promenljive Z, i znamo kako izgleda raspodela za $f(Z)$. Ali ponekad mi ne znamo ove informacije, tj. ne znamo zavisnost između f i Z. I u ovom slučaju možemo napraviti nekakvu aproksimaciju, ali konvergencija će biti slaba. Ovo ćemo sad preciznije definisati.

Definicija 4.2. *Neka je Y data slučajna promenljiva, čiju raspodelu znamo, i neka je Z slučajna promenljiva iz skupa raspodeli koje određuje neku familiju ortogonalnih polinoma. Slaba polinomna ekspanzija je $Y_N \in \mathbb{P}_N$, gde je $\mathbb{P}_N(Z)$ prostor polinoma do stepena N, za koju važi da Y_N konvergira ka Y u slabom smislu, tj. u verovatnoći.*

Iz jake polinomne ekspanzije sledi slaba polinomna ekspanzija, dok obrnuto ne mora da važi. Slaba polinomna ekspanzija nije jedinstvena.
Ako znamo raspodelu za Y, ali ne znamo tačno funkcionalnu zavisnost između Y i Z tada ne možemo koristiti ortogonalnu projekciju. Tj. za N-tu parcijalnu sumu od polinomne ekspanzije

$$Y_N = \sum_{k=0}^{N} a_k \Phi_k(Z),$$

gde su koeficijenti dati sa

$$a_k = \frac{1}{\gamma_k} E(Y\Phi_k(Z)), k = 0, 1, ..., N, \tag{10}$$

ne znamo izračunati, pošto ne znamo na koji način Y zavisi od Z. Da bi to mogli izračunati trebaće nam sledeća teorema.
Pomoću niza realizacija uniformne $\mathcal{U}(0, 1)$ raspodele, može se u opštem slučaju dobiti niz realizacija slučajne promenljive X sa proizvoljnom raspodelom. Ovo se bazira na sledećem tvrđenju.

Teorema 4.6. *Neka slučajna promenljiva X ima uniformnu $\mathcal{U}(0,1)$ raspodelu i neka je funkcija raspodele F neprekidna i strogo rastuća. Tada slučajna promenljiva $Y = F^{-1}(X)$ ima funkciju raspodele F.*

Dokaz. Kako je F neprekidna i strogo rastuća, postoji inverzna funkcija $F^{-1} : [0,1] \to \mathbb{R}$. Tada je

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(F^{-1}(X) < y) = P(X < F(y)) = F(y).$$

$\diamond$

Raspodela slučajne promenljive Y je $F_Y : I_Y \to [0,1]$, a za Z je $F_Z : I_Z \to [0,1]$. Tada $U = F_Y(Y) = F_Z(Z) \sim \mathcal{U}(0,1)$. Slučajne promenljive tada možemo na sledeći način izraziti: $Y = F_Y^{-1}(U)$ i $Z = F_Z^{-1}(U)$. Sad možemo (10) zapisati u ekvivalentom obliku

$$a_k = \frac{1}{\gamma_k} E_U(F_Y^{-1}(U)\Phi_k(F_Z^{-1}(U))) = \frac{1}{\gamma_k} \int_0^1 F_Y^{-1}(u)\Phi_k(F_Z^{-1}(u))du. \tag{11}$$

U gornjoj jednakosti umesto $Y = F_Y^{-1}(U)$ možemo koristiti i $Y = F_Y^{-1}(F_Z(Z))$, i u tom slučaju (11) postaje

$$a_k = \frac{1}{\gamma_k} E_Z(F_Y^{-1}(F_Z(Z))\Phi_k(Z)) = \frac{1}{\gamma_k} \int_{I_Z} F_Y^{-1}(F_Z(Z))\Phi_k(Z)dF_Z(Z).$$

Konvergencija slabe polinomne ekspanzije sledi iz sledećeg tvrđenja.

Teorema 4.7. *Neka je Y slučajna promenljiva sa funkcijom raspodele $F_Y = P(Y \leq y)$ i $E(Y^2) < \infty$. Neka je Z slučajna promenljiva sa funkcijom raspodele $F_Z = P(Z \leq z)$ i $E(|Z|^{2m}) < \infty, \forall m \in \mathbb{N}$ tako da baza polinomne ekspanzije je $\Phi_m(Z)$ i važi $E_Z(\Phi_m(Z)\Phi_n(Z)) = \gamma_n \delta_{mn}, \forall m,n \in \mathbb{N}$. Neka je*

$$Y_N = \sum_{k=0}^{N} a_k \Phi_k(Z), \tag{12}$$

gde su

$$a_k = \frac{1}{\gamma_k} E_Z(F_Y^{-1}(F_Z(Z))\Phi_k(Z)), k = 0, 1, ..., N. \tag{13}$$

Tada Y_N konvergira u verovatnoći ka Y. Takođe, Y_N konvergira i u raspodeli ka Y.

Dokaz. Neka je

$$\widetilde{Y} \triangleq G(Z) = F_Y^{-1}(F_Z(Z)),$$

gde $G \triangleq F_Y^{-1} \circ F_Z : I_Z \to I_Y$. $\widetilde{Y}$ ima istu raspodelu kao i Y, tj. $F_{\widetilde{Y}} = F_Y$ i $\widetilde{Y} =^p Y$ i $E(\widetilde{Y}^2) < \infty$. Odavde sledi da

$$E(\widetilde{Y}^2) = \int_{I_Y} y^2 dF_Y(y) = \int_0^1 (F_Y^{-1}(u))^2 du = \int_{I_Z} (F_Y^{-1}(F_Z(z)))^2 dF_Z(z) < \infty.$$

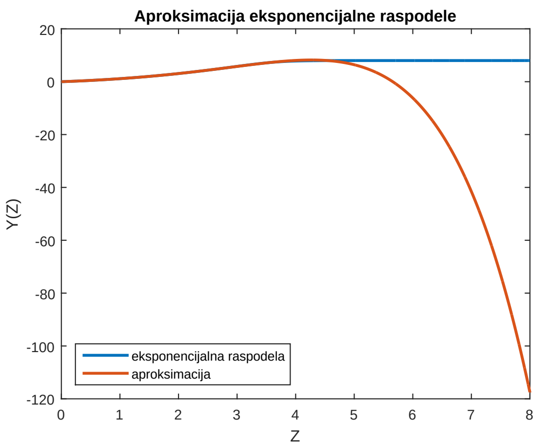
Dalje, $\widetilde{Y} = G(Z) \in \mathbb{L}^2(I_Z)$. Kako (12) i (13) određuju ortogonalnu projekciju od $\widetilde{Y}$, Y_N konvergira jako (u srednje-kvadratnom) ka $\widetilde{Y}$, što implicira konvergenciju u verovatnoći, što dalje implicira konvergenciju u raspodeli. $\diamond$

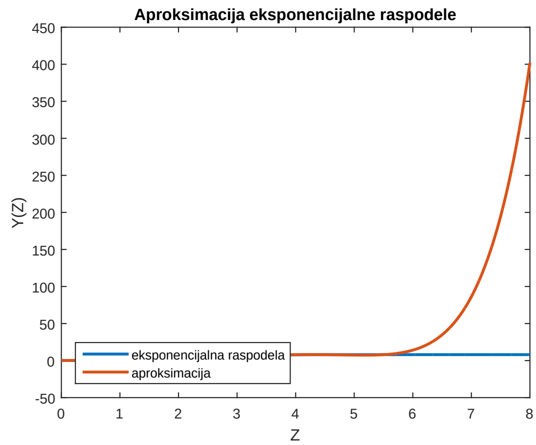
Ovo ćemo pokazati na primerima.

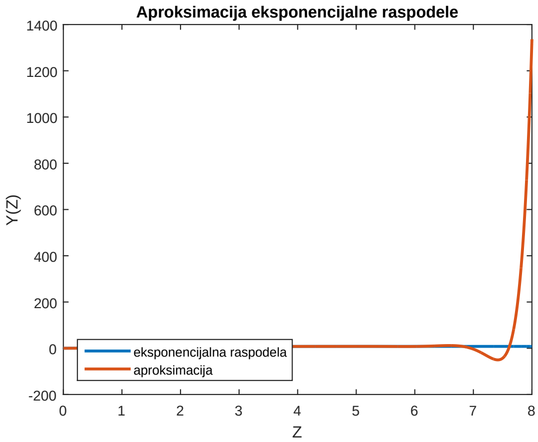
Primer 4.10. Neka je Y slučajna promenljiva sa Beta raspodelom. Tada je funkcija gustine

$$\rho(y) = C(1-y)^{\alpha}(1+y)^{\beta}, y \geq 0,$$

za normalizirajuću konstantu $C > 0$. Tada ako uzmemo za bazu Jacobijeve polinome, onda imamo jaku polinomnu ekspanziju. Ovo smo već videli kako se računa, pa zato uzmimo neku drugu bazu. Na primer uzmimo Hermitove polinome za bazu. U ovom slučaju imamo slabu polinomnu ekspanziju. Tada moramo numerički aproksimirati (11). Na sledećim grafikonima su prikazane ove polinomne ekspanzije za $n = 5, 7, 15$.





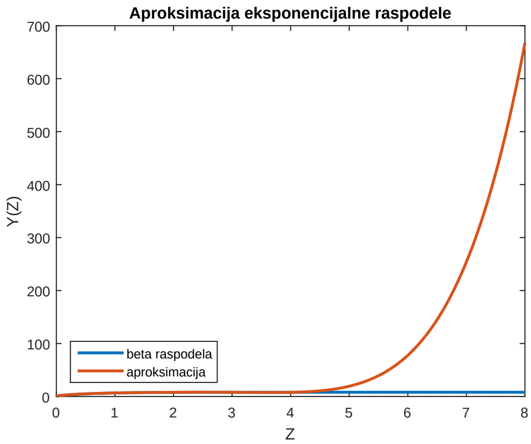


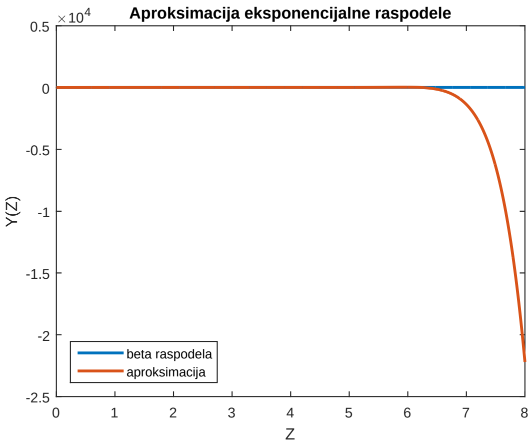
Iz grafikona vidimo da kad povećavamo n aproksimacija postaje bolja.

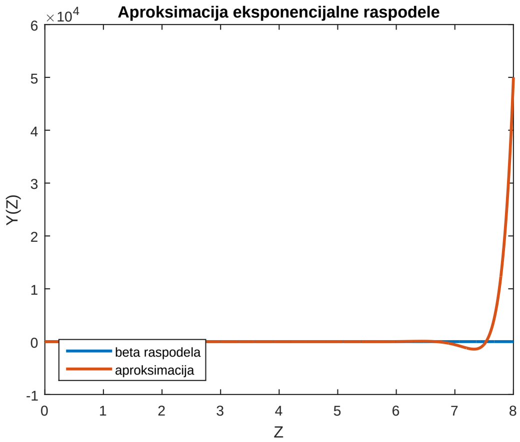
Primer 4.11. Neka je Y slučajna promenljiva sa eksponencijalnom raspodelom. Tada funkcija gustine

$$\rho(y) = e^{-y}, y \geq 0.$$

Uzmemo Hermitove polinome za bazu. U ovom slučaju imamo slabu polinomnu ekspanziju. Tada moramo numerički aproksimirati (11). Na sledećim grafikonima su prikazane ove polinomne ekspanzije za $n = 5, 10, 15$.







Iz grafikona vidimo da kad povećavamo n aproksimacija postane bolja.

Ovi primeri pokazuju da i slaba polinomna aproksimacija daje dovoljno dobre rezultate.

5 Zaključak

Cilj ovog master rada je bio da primenimo ortogonalne polinome u stohastičkoj analizi. Prva primena se odnosila na izračunavanje verovatnoće prelaza iz i-tog u j-to stanje kod procesa rađanja i umiranja. Tamo smo videli da se u tim verovatnoćama pojavljuju ortogonalni polinomi.

Druga primena, analogno prvoj, je bila izračunavanje verovatnoće prelaza iz i-tog u j-to stanje kod slučajnog hoda.

Treća primena je bila primena ortogonalnih polinoma u teoriji stohastičke integracije. Pomoću Hermitovih polinoma lako se izračunava integral u odnosu na Braunovo kretanje. Za integrale u odnosu na Poasnov procesa moramo koristiti Charlierove polinome.

Zadnja primena je bila aproksimacija raspodele slučajne promenljive pomoću ortogonalnih polinoma. Prvo smo pokazali kako se aproksimiraju vektori iz separabilnog Hilbertovog prostora. Za slučajne promenljive iz prostora promenljivih sa konačnom varijansom postoje dve polinomne ekspanzije, koje smo koristili: jaka i slaba polinomna ekspanzija. Za jaku polinomnu ekspanziju možemo koristiti ortogonalnu projekciju. Kod slabe polinomne ekspanzije ne znamo vezu između slučajne promenljive koju aproksimiramo i slučajne promenljive koja se poljavljuje u bazi polinomne ekspanzije. Zato moramo drugačije računati ovu ekspanziju. Ovo smo pokazali i na primerima, za koje smo smo koristili programski paket MatLab.

Zaključak ovog rada je da pomoću ortogonalnih polinoma lakše računamo neke verovatnoće stohastičkog procesa, i možemo zadati formule za stohastičke integrale, i na kraju pomoću ovih polinoma možemo aproksimirati raspodelu slučajne promenljive, samo treba na pogodan način izabrati optimalnu polinomnu bazu za datu raspodelu.

Literatura

[1] Ferenc Bartha, *Óravázlatok a Matematikai Módszerek a Fizikában 2. előadásokhoz*

[2] I.S. Gradshteyu, I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Seriers and Products*, 2007

[3] Mourad E.H. Ismail , *Classical an Quantum Orthogonal Polynomials in One Variable*, Cambridge University Press, 2005

[4] Kiyosi Itô, *Multiple Wiener Integral*,Journal of the Mathematical Society of Japan Vol. 3, No. 1, May, 1951.

[5] Dunham Jackson, *Fourier Series and Orthogonal Polynomials*, The Mathematical Association of America, 1941

[6] G. Kewlani, J. Crawford, K. Iagnemma, *A polynomial chaos approach to the analysis of vehicle dynamics under uncertainty*

[7] Kurilić M., *Osnovi opšte topologije*, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 1998

[8] Wuan Luo, *Wiener Chaos Expansion and Numerical Solutions of Stochastic Partial Differential Equations*, In Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Doctor of Philosophy, California Institute of Technology Pasadena, California

[9] Nedeljkov M.,*Parcijalne diferencijalne jednačine*, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 2004

[10] Anthony O'Hagan, *Polynomial Chaos: A Tutorial and Critique from a Statisticians Perspective*

[11] Nicolas Privault, Wim Schoutens, *Krawtchouk Polynomials and Iterated Stochastic Integration*

[12] Danijela Rajter-Ćirić, *Verovatnoća*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, Novi Sad, 2009

[13] Giovanni Sansone, *Orthogonal Functions*, Dover Publications, New York, 1991

[14] Wim Schoutens, *Stohastic Processes and Orthogonal Polynomials*, Springer, New York, 2010

[15] Gábor Szegő, *Orthogonal Polynomials*, American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 1939

[16] Piyush. M. Tagade, Han-Lim Choi,*A Generalized Polynomial Chaos-Based Method for Efficient Bayesian Calibration of Uncertain Computational Models*, Inverse Problems in Science and Engineering Vol. 00, No. 00, Month 200x, 120

[17] Dongbin Xiu, *Numerical Methods for Stohastic Computations*, Princeton University Press, Princeton and Oxford, New Jersey, 2010

Appendix

U ovom appendixu biće predstavljeni svi kodovi koje smo koristili u *Mathematici* i u MatLabu.
Sledeći kodovi smo koristili za izcrtavanje ortogonalnih polinoma.

```
H[0, x_] = 1;
H[1, x_] = x;
H[n_, x_] := x*H[n-1, x] - (n-1)*H[n-2, x]
Table[H[n, x], {n, 0, 5}]
{1, x, -1 + x^2, -2 x + x (-1 + x^2), -3 (-1 + x^2) + x (-2 x + x (-1 + x^2)), -4 (-2 x + x (-1 + x^2)) + x (-3 (-1 + x^2) + x (-2 x + x (-1 + x^2)))}

Plot[Evaluate[Table[H[n, x], {n, 0, 5}]], {x, -2.5, 2.5}, PlotRange → {-10, 10}, PlotStyle → {Red, Orange, Yellow, Darker[Green], Blue, Purple}]
```

```
Plot[Evaluate[Table[LaguerreL[n, x], {n, 0, 5}]], {x, -5, 15}, PlotRange → {-20, 50},
 PlotStyle → {Red, Orange, Yellow, Darker[Green], Blue, Purple}]
```

```
Plot[Evaluate[Table[JacobiP[n, 1, 1, x], {n, 0, 5}]], {x, -1, 1}, PlotRange → {-1.5, 1.5},
 PlotStyle → {Red, Orange, Yellow, Darker[Green], Blue, Purple}]
```

```
Plot[Evaluate[Table[HermiteH[n, x], {n, 0, 5}]], {x, -2.5, 2.5}, PlotRange → {-130, 130},
 PlotStyle → {Red, Orange, Yellow, Darker[Green], Blue, Purple}]
```

```
Charlier[n_, x_] = (-1)^n*n!*LaguerreL[n, -1 - x, x]*(-1)
(-1)^(1+n) n! LaguerreL[n, -1 - x, x]

(-1)^(1+n) n! LaguerreL[n, -1 - x, x]
(-1)^(1+n) n! LaguerreL[n, -1 - x, x]

Plot[Evaluate[Table[Charlier[n, x], {n, 0, 5}]], {x, 0, 5}, PlotRange → {-150, 170},
 PlotStyle → {Red, Orange, Yellow, Darker[Green], Blue, Purple}]
```

Ove kodove smo koristili kod primera (4.5) i kod primera (4.6) za aproksimaciju vektora iz separabilnog Hilbertovog proostora.

```
f[x_] := e^(-x^2/2)

kf[n_] := Integrate[(f[x]*HermiteH[n, x])/E^x^2, {x, -Infinity, Infinity}]/(2^n*n!*Sqrt[Pi])

h[x_, n_] := Sum[kf[i]*HermiteH[i, x], {i, 0, n}]
```

```
h[x, 5]
```

$$\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{-2+4x^2}{6\sqrt{6}} + \frac{12-48x^2+16x^4}{144\sqrt{6}}$$

$$\text{Plot}\left[\left\{f[x], \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{-2+4x^2}{6\sqrt{6}} + \frac{12-48x^2+16x^4}{144\sqrt{6}}\right\}, \{x, -5, 5\}, \text{PlotRange} \to \{0, 1\}, \text{PlotStyle} \to \{\text{Red}, \text{Darker[Green]}\}\right]$$

```
h[x, 10]
```

$$\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{-2+4x^2}{6\sqrt{6}}+\frac{12-48x^2+16x^4}{144\sqrt{6}}-\frac{-120+720x^2-480x^4+64x^6}{5184\sqrt{6}}+\left(1680-13440x^2+13440x^4-3584x^6+256x^8\right)/\left(248832\sqrt{6}\right)-\left(-30240+302400x^2-403200x^4+161280x^6-23040x^8+1024x^{10}\right)/\left(14929920\sqrt{6}\right)$$

```
Plot[{f[x], Sqrt[2/3] - (-2 + 4 x^2)/(6 Sqrt[6]) + (12 - 48 x^2 + 16 x^4)/(144 Sqrt[6]) - (-120 + 720 x^2 - 480 x^4 + 64 x^6)/(5184 Sqrt[6]) +
   (1680 - 13440 x^2 + 13440 x^4 - 3584 x^6 + 256 x^8)/(248832 Sqrt[6]) -
   (-30240 + 302400 x^2 - 403200 x^4 + 161280 x^6 - 23040 x^8 + 1024 x^10)/(14929920 Sqrt[6])}, {x, -5, 5},
 PlotStyle → {Red, Darker[Green]}]

Plot[{f[x], h[x, 50]}, {x, -5, 5}, PlotStyle → {Red, Darker[Green]}]

g[x_] := If[-1 ≤ x ≤ 1, 1, 0]

kf[n_] := Integrate[(g[x]*HermiteH[n, x])/E^x^2, {x, -Infinity, Infinity}]/(2^n*n!*Sqrt[Pi])

h[x_, n_] := Sum[kf[i]*HermiteH[i, x], {i, 0, n}]

h[x, 5]
```

$$-\frac{-2+4x^2}{2e\sqrt{\pi}}+\frac{12-48x^2+16x^4}{48e\sqrt{\pi}}+\mathrm{Erf}[1]$$

```
Plot[{g[x], -(-2 + 4 x^2)/(2 e Sqrt[π]) + (12 - 48 x^2 + 16 x^4)/(48 e Sqrt[π]) + Erf[1]}, {x, -2, 2}, PlotRange → {-0.5, 1.5}, PlotStyle → {Red, Darker[Green]}]

Plot[{g[x], h[x, 10]}, {x, -2, 2}, PlotRange → {-0.5, 1.5}, PlotStyle → {Red, Darker[Green]}]

Plot[{g[x], h[x, 50]}, {x, -2, 2}, PlotRange → {-0.5, 1.5}, PlotStyle → {Red, Darker[Green]}]

Plot[{g[x], h[x, 100]}, {x, -2, 2}, PlotRange → {-0.5, 1.5}, PlotStyle → {Red, Darker[Green]}]
```

Ove kodove smo koristili za izcrtavanje jake i slabe aproksimacije slučajne promenljive.

```
function strong1
LW = 'linewidth';FS = 'fontsize'; MS = 'markersize';
z = chebfun('z',[-10 10]);
N=10;H=[1,z];
for n = 1:N-1
    H(:,n+2) = z.*H(:,n+1) - n*H(:,n);
end
rho = exp(-z.^2/2);  rho = rho/sum(rho);  % Gustina Normalne raspodele
w = exp(-z.^2/4);  w = w/sqrt(sum(w.^2));  % koren iz gustine
HW = repmat(w,[1 N+1]).*H;
G = HW'*HW
mu = 1; sigma = 0.5;  y = exp(mu+sigma*z);
rhs = (repmat(rho,[1 N+1]).*H)' * y;  %skalarni proizvod za y i H_n
c = rhs ./ diag(G)                     %resi normalne jednacine
clf, plot([y,H*c],LW,2), title('Lognormalna raspodela')
xlabel('Z'), ylabel('Y(Z)')
end
```

```
function weak1
LW = 'linewidth'; FS = 'fontsize'; MS = 'markersize';
N = 15;
FY = chebfun(@(y) 1-exp(-y),[0 8]);
z = chebfun('z', [0 8] );
w = exp(-z.^2/4) / sqrt(sum(exp(-z.^2/2)));  %kvadratni koren iz funkcije gustine
FZ = cumsum( w.^2 );                         % raspodela za Z
FY = (FY-FY(0))/(FY(8)-FY(0));
FZ = (FZ-FZ(0))/(FZ(8)-FZ(0));
FYinv = inv(FY);  % inverz
y = FYinv(FZ);
T = chebpoly(0:N,[0 8]);
WT = repmat(w,[1 N+1]).*T;  wy = w.*y;
c = WT \ wy
clf, plot([y,T*c],LW,2)
title('Aproksimacija eksponencijalne raspodele')
xlabel('Z'), ylabel('Y(Z)')
legend('eksponencijalna raspodela','aproksimacija','Location','southwest')

end
```

```
function weak2
LW = 'linewidth'; FS = 'fontsize'; MS = 'markersize';
N = 15;
FY =  chebfun(@(y) 1-y^2,[0 8]);
z = chebfun('z', [0 8] );
w = exp(-z.^2/4) / sqrt(sum(exp(-z.^2/2)));  % kvadratni koren iz funkcije gustine
FZ = cumsum( w.^2 );                         % raspodela za Z
FY = (FY-FY(0))/(FY(8)-FY(0));
FZ = (FZ-FZ(0))/(FZ(8)-FZ(0));
FYinv = inv(FY);  % inverz
y = FYinv(FZ);
T = chebpoly(0:N,[0 8]);
WT = repmat(w,[1 N+1]).*T;  wy = w.*y;
c = WT \ wy
clf, plot([y,T*c],LW,2)
title('Aproksimacija eksponencijalne raspodele')
xlabel('Z'), ylabel('Y(Z)')
legend('beta raspodela','aproksimacija','Location','southwest')
end
```

Biografija

Sandra Gužvanj je rođena 27.03.1991. godine u Apatinu. Završila je Osnovnu školu "Jožef Atila" u Kupusini 2006. godine. Iste godine je upisala Gimnaziju "Gimnazija sa domom učenika za talentovane učenike Bolyai" u Senti. Osnovne studije Primenjene matematike, modul Matematika Finansija na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu upisuje 2010. godine i završava ih 2013. godine sa prosekom 9,71.Iste godine u Novom Sadu upisuje master studije Primenjene matematike, modul Matematika Finansija. Položila je sve ispite predviđene planom i programom master studija u junskom roku 2015. godine, sa prosečnom ocenom 9,54. Učestvovala je dva puta na konferenciji "Vojvođanska Mađarska Naučna Konferencija". Bila je u zimskoj školi "Non-standard Forms of Teaching Mathematics and Physics: Experimental and Modeling Approach", Szeged-Novi Sad, 30.1.2015-8.2.2015 godine. Od 8.3.2015 do 2.5.2015 bila je u Segedinskom Univerzitetu na razmeni studenata. Bila je u Innsbrucku od 6.7.2015 do 10.7.2015 godine na matematičkom modeliranju "Innsbruck Modelling Week 2015". Dve godine je bila stipendista Fonda za mlade talente.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Master rad
VR
Autor: Sandra Gužvanj
AU
Mentor: dr Dora Seleši
MN

Naslov rada: Primena ortogonalne polinome u stohastičkoj analizi
NR

Jezik publikacije: srpski(latinica)
JP
Jezik izvoda: srpski/engleski
JI
Zemlja publikovanja: Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2015.
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Novi Sad, Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4
MA
Fizički opis rada: 5/64/17/2/1/25/1
(broj poglavlja/strana/lit. citata/tabela/slika/grafika/priloga)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO
Naučna disciplina: Analiza i verovatnoća
ND
Predmetna odrednica/Ključne reči: Ortogonalne polinome, Stohastički procesi, Lanci Markova,Procesi rađanja i umiranja, Poasonov proces, Braunovo kretanje, Stohastička integracija, Polinomna ekspanzija
PO

UDK:
Čuva se: u biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Novi Sad
ČU
Važna napomena:
VN
Izvod: Tema master rada su ortogonalni polinomi, i njihove primene a stohastičkoj analizi. Rad se sastoji iz tri dela.U prvom delu biće reč o osnovnim matematičkim pojmovima i definišemo ortogonalne polinome. Navešćemo nekoliko teorema vezano za nule ortogonalnih polinoma, i navešćemo teoremu o rekurzivnoj relaciji tih polinoma. Posebno ćemo analizirati Hermitove, Legendreove, Charlierove, Laguerreove i Jacobijeve polinome. Svaki od ovih polinoma precizno definišemo, i dajemo formule, pomoću kojih ih možemo izračunati.Drugi deo se sastoji od osnovnih pojmova stohastičke analize. Prvo definišemo verovatnoću, prostor verovatnoće, slučajne promenljive, pa stohastičke procese. Biće reč o lancima Markova, o procesima rađanja i umiranja, Poasonovom procesu i Braunovom kretanju. Posle toga bavimo se stohastičkom integracijom u odnosu na Braunovo kretanje. Za to ćemo pokazati i par primera.Zadnji deo ovog rada je primena ortogonalnih polinoma koji su spomenuti u drugom delu u vezi stohastičkih pojmova. Prvo pokazujemo kako ih možemo koristiti kod procesa rađanja i umiranja, i kod slučajnog hoda, kada želimo da izračunamo verovatnoće prelaza kod ovih procesa. Druga primena je u stohastičkoj integraciji. Ovde pokazujemo kao se računa stohastički integral u odnosu na Braunovo kretanje pomoću Hermitovih polinoma, a pomoću Charlierovih polinoma kako računamo stohastički integral u odnosu na Poasonov proces. Treća primena je aproksimacija raspodele slučajne promenljive pomoću ortogonalnih polinoma. Prvo definišemo jaku i slabu polinomnu ekspanziju, pa ćemo ih pokazati na primerima.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN Veća: 01. 7. 2015.
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:
Predsednik: dr Stevan Pilipović, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet,

Univerzitet u Novom Sadu

Član: Član: dr Dora Seleši, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor

Član: dr Danijela Rajter-Ćirić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
KO

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monograph type
DT
Type of record: Printed text
TR
Contents code: Master's thesis
CC
Author: Sandra Gužvanj
AU
Mentor: Dora Seleši, PhD
MN

Title: Orthogonal polynomials and their application in stochastic analysis
TI

Language of text: Serbian
LT
Language of abstract: English/Serbian
LA
Country of publication: Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2015.
PY
Publisher: Author's reprint
PU

Publication place: Novi Sad, Faculty of Science, Dositeja Obradovića 4
PP
Physical description: 5/64/17/2/1/25/1
(chapters/pages/literature/tables/pictures/graphics/appendices)
PD
Scientific field: Mathematics
SF
Scientific discipline: Analysis and probability
SD
Subject / Key words: Orthogonal polynomials, Stohastic processes, Markov Chains, Birht and Death Processes, Poisson processes, Brownian Motion, Stohastic Integration Theory, Generalized Polynomial Chaos.
SKW

UC:
Holding data: Library of the Department of Mathematics and Informatics, Novi Sad
HD
Note:
N
Abstract: Subject of the master thesis is Orthogonal polynomials and their application in stochastic analysis. This thesis has 3 sections. The first section introduces orthogonal polynomials and gives an overview of theorems of zeros of orthogonal polynomials, and theorem of recursive relation of orthogonal polynomials. This introduction is followed by the analysis of Hermite polynomials, Legendre polynomials, Charlier polynomials, Laguerre polynomials, Jacoby polynomials with their exact definition and formulas used in calculations. The second section demonstrates techniques of stochastic analysis. Probability, probability space, random variables, stohastic processes are defined here along with Markow chains, Birht and Death Processes, Poisson processes, Brownian Motion. The section is closed by a few examples of stochastic integration. The third section focuses on the application of orthogonal polynomials in stochastic analysis. The first application deals with birth and death processes, and random walks. Application of orthogonal polynomials in stochastic integration is given as their second use, for Brownian Motion using Hermite and for Poisson processes using Charlier polynomials. The third application is approximation of stochastic variable using orthogonal polynomials by employing weak and strong expansion of polynomials, which is demonstrated by a few examples.
AB

Accepted by Scientific Board on: July 1, 2015
ASB
Defended:
DE

Thesis defend board:
President: Stevan Pilipović, PhD, Full professor, Faculty of Science, University of Novi Sad

Member: Dora Seleši, PhD, associate professor, Faculty of Science, University of Novi Sad,mentor

Member: Danijela Rajter-Ćirić, PhD, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
DB