Univerzitet u Novom Sadu

Prirodno matematički fakultet

Departman za matematiku i informatiku

Radovan Lopušina

# FAZI SKUPOVI I NJIHOVA PRIMENA U INVESTICIONIM ODLUKAMA

-MASTER RAD-

Mentor: dr Ivana Štajner - Papuga

Novi Sad, 2017.

# SADRŽAJ

**UVOD** ..... **3**

**1. ISTORIJAT RAZVOJA FAZI MISLI** ..... **6**

**2. UVODNI POJMOVI** ..... **9**

2.1. FAZI SKUPOVI ..... 10

2.2. OPERACIJE SA FAZI SKUPOVIMA ..... 18

2.3. FAZI BROJEVI ..... 23

2.3.1. Trougaoni fazi brojevi ..... 27

2.3.2. Trapezoidni fazi brojevi ..... 29

2.4. FAZI RELACIJE ..... 32

2.4.1. Osnovne operacije sa fazi relacijama ..... 36

2.5. FAZI SREDNJA VREDNOST, FAZI VARIJANSA I FAZI KOVARIJANSA ..... 38

**3. MODELI ZA VREDNOVANJE INVESTICIJA** ..... **42**

3.1. NETO SADAŠNJA VREDNOST ..... 42

3.2. VREDNOVANJE REALNIH OPCIJA ..... 45

3.2.1. Teorijski pristup ..... 45

3.2.2. Numerički pristup ..... 48

3.3. VREDNOVANJE FAZI REALNIH OPCIJA ..... 51

3.4. BINOMNI MODEL VREDNOVANJA REALNIH OPCIJA ..... 57

**4. FAZI ISPLATIVOST** ..... **61**

4.1. MOTIVACIJA ..... 61

4.2. METOD FAZI ISPLATIVOSTI ..... 63

4.2.1. Fazi srednja vrednost pozitivnog dela fazi broja ..... 65

4.2.2. Verodostojna srednja vrednost pozitivnog dela fazi broja ..... 66

4.2.2.1. Verodostojna srednja vrednosti za trougaoune fazi brojeve ..... 67

4.2.2.2. Verodostojna srednja vrednosti za trapezoidne fazi brojeve ..... 68

4.3. PRIMENA METODE FAZI ISPLATIVOSTI ..... 70

4.3.1. Praktična primena metode fazi isplativosti ..... 71

**ZAKLJUČAK** ..... **79**

**LITERATURA** ..... **81**

**BIOGRAFIJA** ..... **83**

# UVOD

U skladu sa različitim uslovima, investiciona odluka trebala bi da sadrži sve segmente na osnovu kojih se odluka može doneti. Osnovna karakteristika investiranja jeste vreme, jedini nenadoknadivi resurs, u kome se odvija proces investiranja. Vremenski period između ulaganja u sadašnjosti i efekata koji se očekuju u budućnosti je najčešće veoma dugačak i određujuće utiče na valjanost celokupnog procesa [10]. Dakle, postoji određeni rizik koji se pojavljuje u investiranju. Prema Pierre Masse[1] – u investiranje jeste razmena neposrednog i izvesnog zadovoljenja od koga se odustaje, za nadu koju čovek dobija i koja se zasniva na investiranom dobru.

Donošenje teških odluka je velika stvar. Rukovodstva kompanija često žele da steknu svoj prvi podsticaj, pri čemu su prilično često nagrađivani od strane akcionara koji misle da je odlučno delovanje znak menadžera koji će stvoriti dobru akcionarsku vrednost i dobar ambijent za napredak kompanije. Ipak, pravi ishodi nisu sigurni zbog promene tržišta, promena u sirovinama i troškovima energije, promena u tehnološkim planovima, promena u ekonomskoj klimi itd.  U cilju podržavanja i motivisanja teških odluka, brojne metode su se razvile, a standardni pristupi podrazumevaju korišćenje metode neto sadašnje vrednosti sa brojnim pretpostavkama o budućem razvitku glavnih troškova i profitabilnosti.

Samo mali broj odluka počivaju na principu *„sad ili nikad“*. Često je moguce odložiti, izmeniti ili podeliti složene odluke na strateške delove koji mogu proizvesti znacajne efekte i samim tim značajno smanjiti nesigurnost. U takvim slučajevima možemo se poslužiti teorijom realnih opcija. U prvom delu rada definišu se fazi skupovi i njihove osobine, a drugi deo rada sadrži pregled teorije realnih opcija sa stanovišta fazi logike.

Često postoji neizvesnost u pogledu ulaznih podataka neophodnih za donošenje odluke. Takođe, u određenim situacijama odluka se donosi na osnovu iskustva, intuicije i subjektivne procene određenih parametara od strane donosioca odluke. Pri donošenju

[1] Pierre Benjamin Daniel Masse (1898 – 1987) je bio francuski ekonomista, inžinjer, primenjeni matematičar i visoki zvaničnik u Vladi Francuske.

odluka u uslovima neizvesnosti i rizika koristili su se metode teorije verovatnoće. Međutim pojavila se teorija fazi skupova koja predstavlja pogodan matematički aparat za uspešniju formulaciju neizvesnosti, nesigurnosti i subjektivnosti.

Fazi logika se nastavlja na klasičnu logiku, odnosno klasična logika je specijalan slučaj fazi logike. Dok u dvovrednosnoj logici jedan element pripada ili ne pripada određenom skupu, u fazi logici je to malo drugačije. U fazi logici elemenat u određenoj meri pripada pojedinom skupu. Drugim rečima, jedan elemenat može da pripada većem broju skupova pri čemu se razlikuje u „jačini pripadnosti“. U ovom radu biće opisano delovanje fazi skupova na vrednost realnih opcija koje se koriste u investicionom odlučivanju.

*Prvo poglavlje* rada nas uvodi u same početke fazi misli. Kroz prvo poglavlje videćemo ko je tvorac fazi logike, kada je ona nastala i kakve vrste neizvesnosti su dovele do pojave fazi logike. Upoznaćemo se sa principom nekompatabilnosti i na samom kraju prvog poglavlja videćemo razvoj fazi misli kroz istoriju.

*Drugo poglavlje* rada počinje izlaganjem o osnovnim pojmovima fazi misli. U okviru tog poglavlja upoznaćemo se sa fazi skupovima i njihovim osobinama. Nakon fazi skupova fokus se stavlja na fazi brojeve koji predstavljaju specijalan slučaj fazi skupova. U tom delu rada upoznaćemo se sa vrstama fazi brojeva od kojih ćemo izdvojiti dve vrste: trougaoni fazi broj i trapezoidni fazi broj. Izdvajanje ove dve vrste se vrši zbog njihove široke primene u praksi, a samim tim i u vrednovanju realnih opcija. U drugom poglavlju dat je pregled fazi relacija, fazi očekivane vrednosti, fazi varijanse i fazi kovarijanse.

*Treće poglavlje* rada počinje sa razmatranjem različitih modela i metoda u vrednovanju realnih opcija. Prvi metod koji će se obraditi jeste metod neto sadašnje vrednosti ($NSV$) koji predstavlja nefleksibilan metod. Nakon njega, upoznajemo se sa prvim fleksibilnim modelom koji se koristi u vrednovanju realnih opcija ($ROV$) a predstavlja proširenje Black – Scholes-ovog modela (neprekidni model). Sledeći model koji se u ovom poglavlju obrađuje jeste fazi model vrednovanja realnih opcija ($FROV$) koji predstavlja proširenje $ROV$ modela uvođenjem fazi skupova i fazi brojeva. Na samom kraju ovog poglavlja upoznaćemo se sa diskretnim modelom koji se koristi u vrednovanju realnih opcija, a nosi naziv Binomni model.

*Četvrto poglavlje* rada donosi metod fazi isplativosti kao najnovije metode vrednovanja realnih opcija. U njemu se opisuje motivacija nastanka metode, nakon čega se prelazi na njegovu matematičku formulaciju. U okviru matematičke formulacije pojavljuju se pojmovi: fazi srednja vrednost pozitivnog dela fazi broja i verodostojna srednja vrednost pozitivnog dela fazi broja. Četvrto poglavlje sadrži objašnjenje ovih pojmova. Na samom kraju rada data su dva primera. Kroz njih je prikazana praktična primena metode fazi isplativosti.

Sva potrebna računanja i svi potrebni grafici urađeni su u programskim paketima *Matlab*, *Mathematica* i *Excel*.

---

*Pre nego što odpočnu redovi ovog naučnog rada želeo bih da iskažem izuzetnu zahvalnost svojoj mentorki prof. dr Ivani Štajner Papugi koja mi je u svakom trenutku pružala pomoć, motivaciju, savete i razumevanje. Posebno joj se zahvaljujem na predloženoj temi koja je bila interesantna, inovativna i na znanjima koja mi je prenela tokom studiranja.*

*Zahvaljujem se prijateljima i kolegama koji su mi na bilo koji način pružili sugestije, pomoć i podršku u toku mog studiranja.*

*Posebno i najdublje se zahvaljujem svojoj porodici, roditeljima i sestrama koji su mi pružali beskonačnu podršku i pomoć na mom putu usvajanja novih znanja.*

*.*

*Novi Sad, 2017. godine* *Radovan Lopušina*

# 1. ISTORIJAT RAZVOJA FAZI MISLI

Do početka osamdesetih godina često je stavljeno na stranu postojanje raznih vidova neizvesnosti, nepodložnih izražavanju jednom jedinom dimenzijom verovatnoće, iako je još od ranije poznata mnogostrukost koncepcija i pojmova verovatnoće. Kahneman i Tversky (1982.), pod uticajem Heiderove teorije atribucije, pišu o neizvesnosti i pripisuju neizvesnost spoljašnjem svetu ili našem stanju znanja. Eksterna (objektivna) neizvesnost se pripisuje dispozicijama objektivne stvarnosti, a interna (subjektivna) neizvesnost se pripisuje stanju znanja odnosno neznanja. Kahneman i Tversky ukazuju na četiri varijante neizvesnosti s obzirom na način njihovog ocenjivanja. Ova četiri vida neizvesnosti ne iscrpljuju sve, niti isključuju mešovite vidove neizvesnosti. Njihovo razlikovanje je značajno stoga što zakoni teorije verovatnoće nisu jednako primenljivi na različite vidove neizvesnosti.

Na raznorodnost neizvesnosti i nepodložnosti raznih vrsta neizvesnosti predstavljanju posredstvom verovatnoće ukazivao je i George Klir (1988.). Vrstama neizvesnosti Klir smatra:

- nespecifičnost,
- rasplinutost,
- disonancu i
- konfuziju.

Verovatnoća u kontekstu bajesovskog pristupa, prema njegovom uverenju, podesna je samo u slučaju disonance, Dempster – Šaferova verovatnoća je prikladna za nespeciičnost, disonancu i konfuziju, dok se rasplinutost njima ne može obrađivati, te je u tu svrhu neophodna *rasplinuta (fazi) logika*.

Smisao, vrednost, način i proces rešavanja problema odlučivanja u oblasti strategijskog upravljanja određeni su kulturnim, socijalnim, vremenskim, vrednosnim ali i logičkim kontekstom. Pre više od tri decenije razvijena je rasplinuta (fazi) logika. Koncept fazi logike osmislio je Lotfi Zadeh[2], profesor na Univerzitetu u Kaliforniji i predstavio ga ne kao kontrolnu metodologiju već kao način obrade podataka tako što se dozvoljava delimična pripadnost nekom skupu umesto jasne pripadnosti ili nepripadnosti. Prvi rad posvećen fazi logici objavio je Zadeh još davne 1965. godine pod naslovom *„Fazi skupovi“* koji je objavljen u prestižnom međunarodnom časopisu *„Information and control“*. Ovaj pristup teoriji skupova nije bio primenjen na upravljanje sistemima do 70-tih godina zbog nedovoljnih sposobnosti računara tog vremena. Profesor Zadeh je zastupao mišljenje da ljudima nisu potrebne precizne i numerički tačno definisane informacije, a da su oni ipak sposobni za visoko adaptivno upravljanje. S tim u vezi, profesor Zadeh je tvorac i često citiranog principa nekompatabilnosti koji glasi:

*„Što se bliže posmatra realan problem, njegovo rešenje postaje sve više fazi.“*

***Lofti Zadeh (1921. –2017. )***

Ovaj princip se može uzeti za jednu od centralnih tema istraživanja i praktičnih primena fazi skupova i fazi tehnologija. Za simuliranje racionalnog zaključivanja u uslovima neodređenosti ponuđeno je dosta metoda, koje su u praksi pokazale sa manje ili više uspeha (faktor pouzdanosti, Bajesova verovatnoća, fazi koncept). Fazi tehnologije predstavljaju pokušaj da se neprecizne informacije predstavljaju i obrađuju pomoću računara, čime bi se obezbedila prisnija veza između čoveka, koji po prirodi ovakve informacije koristi, i računara koji manipuliše isključivo brojevima i fiksnim simbolima. Zbog toga su fazi tehnologije orijentisane ka čoveku, i često se nazivaju humanim tehnologijama.

Neki od najznačajnijih događaja iz istorije fazi skupova su svakako: početak izučavanja fazi logike u Japanu 1972. godine, razvoj prvog industrijskog kontrolera od strane Mamdanija u Londonu 1974. godine, kao i prva praktična realizacija fazi kontrolera za upravljanje proizvodnjom cementa 1980. godine od strane danske kompanije *Smidth*. Zbog izuzetno praktične orijentacije japanskih istraživača, inženjera i drugih stručnjaka, fazi

[2] Lofti Aliasker Zadeh je matematičar, elektrotehničar, naučnik i istraživač veštačke inteligencije, profesor na Univerzitetu Kalifornija, Berkli.

inženjerstvo se u Japanu razvilo u moćnu naučnu granu. Godine 1985. formirano je Međunarodno društvo za fazi sisteme, a 1989. u Jokohami osnovan je LIFE – međunarodni istraživački institut koji je pored najboljih japanskih istraživača okupljao i istraživače u oblasti fazi sistema iz celog sveta.

Od kraja osamdesetih do danas fazi tehnologije su se stalno razvijale. Tako danas postoje realizovani sistemi koji upotrebljavaju ove tehnologije u sklopu fazi baza podataka, fazi sistema za obradu slike, fazi ekspertskih sistema, fazi sistema za podršku pri donošenju odluka, fazi sistema za kvalitativno modeliranje, fazi analizu podataka, identifikaciju sistema i uopštavanje podataka.

# 2. UVODNI POJMOVI

U ovom delu rada dat je pregled pojmova vezanih za fazi aritmetiku, odnosno fazi skupove. Pored fazi skupova predstavljeno je objašnjenje fazi brojeva koji predstavljaju specijalan slučaj fazi skupova. U okviru ovog poglavlja pojasnićemo i fazi relacije, fazi srednju vrednost i fazi varijansu čije razumevanje je neophodno za dalju obradu rada. Literatura korišćena pri izradi ovog poglavlja rada [2,3,5,9,13,17,18,25,26].

Tradicionalni ekonomski modeli zasnovani su na klasičnoj matematici utemeljenoj na aristotelovskoj dvoelementnoj logici. Sa pojavom fazi matematike, kao sredstva za modeliranje pojave koje su prožete neodređenošću i nekompletnošću, stvara se mnogo adekvatnijji okvir za modeliranje ekonomskih pojava. Novi koncept je rezultirao pojavom približnog rezonovanja i fazi sistema kontrole koji su se pokazali kao efikasno sredstvo pri donošenju odluka u uslovima neodređenosti.

U aristotelovskom konceptu, određeni element ili pripada ili ne pripada nekom skupu, treće mogućnosti nema. Međutim, ovako precizan pristup nije odgovarajući za modeliranje pojava koje su prožete neodređenošću. Poznat je Wang[3]–ov paradoks: ako je $x$ mali broj onda je to i $x+1$. Ako je i $x+1$ mali broj onda je to i $(x+1)+1$. Tako dolazimo do zaključka da je milijarda mali broj, kao i beskonačnost. Rešenje koje je mogla da ponudi klasična matematika bilo bi da se odabere proizvoljna, ali jasna granica između skupa malih i velikih brojeva. Pojam fazi skupa, potpuno suprotan pojmu tradicionalnog aristotelovskog skupa, uvodi, kao što je već rečeno, Zadeh 1965. godine. Ovim konceptom se dopušta nijansiranje stepena pripadnosti elementa određenom skupu. Korišćena literatura je [18].

U svakodnevnom jeziku u prenošenju znanja i informacija pojavljuje se velika nepreciznost i neodređenost, rasplinutost (eng. *fuzziness*). Karakteristike „mlad“, „zdrav“, „nizak“ su jednostavni primeri takvih termina. Npr. ako se uzme primer iz života „Devojka je lepa“ za većinu ljudi je razumljiviji od iskaza „Lepotu devojke na skali od 1 do 10 ocenjujemo sa 8.7“. Fazi pristup, pored nepreciznosti, karakteriše i postepenost prelaza iz jedne u drugu krajnost, npr. od ukusnog do neukusnog jela. Lofti Zadeh je rekao: „Kako

[3] Hao Wang (1921. – 1995.) je bio kineski filozof i matematičar.

složenost sistema raste, sposobnost da se donesu precizni, a istovremeno i značajni iskazi o njegovom ponašanju opada dok se postigne prag iza kojeg preciznost i značajnost ne postanu međusobno isključujuće karakteristike“.

## 2.1. FAZI SKUPOVI

U slučajevima kada je nemoguće napraviti jasnu razliku između pripadnosti ili nepripadnosti nekog elementa datom skupu, ne mogu se koristiti principi klasične teorije skupova. Susret sa ovakvim situacijama u svakodnevnom životu je veoma čest. U nastavku je dat originalan primer: studentima Prirodno – matematičkog fakulteta u Novom Sadu je postavljeno pitanje da li se slažu da je dobro završiti smer primenjene matematike, pri čemu su ponuđeni sledeći odgovori: nemam mišljenje, ne slažem se, delimično se ne slažem, delimično se slažem i slažem se. Na ovom primeru se vidi da je univerzalni skup, skup svih studenata Prirodno – matematičkog fakulteta, a posmatra se njegov podskup sačinjen od studenata koji se slažu sa prethodno navedenom tvrdnjom. Već na ovom primeru se vidi da nije upitanju klasičan skup, jer postoje studenti koji se samo u određenoj meri slažu sa datom tvrdnjom. Upravo zbog ovakvih neodređenosti koje se javljaju veoma često, u istim ili sličnim situacijama, nastala je potreba da se one matematički opišu, pa se javljaju fazi skupovi.

Dakle, ovo posmatranje naglašava prazninu koja postoji između mentalne reprezentacije stvarnosti i uobičajene matematičke reprezentacije koja je bazirana na binarnoj logici, brojevima, diferencijalnim jednačinama i slično. Klasična logika ne može da izmeri kategorije u kojima se pripadanje javlja postepeno. Fazi skup dozvoljava da neki element samo u određenoj meri pripada skupu, kao što su u prethodno datom primeru studenti koji se delimično slažu. Funkcija kojom se opisuje stepen pripadnosti nekog elementa se naziva *funkcija pripadnosti (*eng. *membership funciton).*

Funkcije pripradnosti kod običnih skupova je precizna i može uzeti samo dve vrednosti. Međutim, u svakodnevnom životu osim brojeva neminovno je sretati se i sa raznim lingvističkim terminima koje je potrebno modelovati, a za koje je jako teško napraviti jasnu razliku da li pripadaju ili ne pripadaju nekom skupu. Recimo, ako se posmatra temperatura na kojoj se voda ledi, skup će činiti sve vrednosti stepena koje su ispod nule uključujući i nulu, tj. $A = \{x \in U | x \leq U\}$. Samim tim funkcija pripadnosti je:

$$\mu_A = \begin{cases} 1, & za \;\; x \leq 0 \\ 0, & za \;\; x > 0. \end{cases}$$

Ovde je jasno da je granica za temperaturu zamrzavanja tačno definisana i bilo koja temperatura ako se uzme, ona će ili pripadati skupu $A$ ili neće. Međutim, šta ako se uzme da je skup „skup niskih temperatura“? Sada nije moguće odrediti jasnu granicu, i ona zavisi od subjektivnih osećaja pa vidimo da ovde primena logike klasičnih skupova nije od koristi jer je potrebna gradacija. Ideja je da se definiše delimično pripadanje nekog elementa skupu. Sada funkcija pripadnosti ne uzima samo vredonsti 0 i 1, već sve vrednosti iz zatvorenog intervala [0,1] i na taj način daje stepen pripadanja nekog elementa skupu. Korišćena literatura je [2,3,25,26].

Setimo se opet primera sa studentima. U njemu smo naveli odgovore: nemam mišljenje, ne slažem se, delimično se ne slažem, delimično se slažem i slažem se. Tim odgovorima se mogu dodeliti vrednosti: 0, 0,25, 0,5 i 1, redom. Na ovaj način brojevima je opisan subjektivan osećaj svakog ispitanika (studenta).

Fazi skup se definiše upravo preko svoje funkcije pripadnosti, a funkcija pripadnosti je data sledećom definicijom.

***Definicija 2.1.*** *[2] Funkcija pripadnosti za fazi skupove, u oznaci* $\mu$ *je preslikavanje* $\mu : U \rightarrow [0,1]$, *gde je* $U$ *univerzalni skup.*

***Definicija 2.2.*** *[2] Neka je* $X \subset U$ *običan skup. Fazi skup* $A$ *se definiše kao skup uređenih parova binarne relacije:*

$$A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in X, \mu_A(x) \in [0,1]\}$$

*gde je* $\mu_A(x)$ *funkcija pripadnosti. Ona određuje ocenu, odnosno stepen kojim neki element* $x \in X$ *pripada fazi skupu A.*

Dakle, vidimo da je fazi skup $A$, skup uređenih parova $(x, \mu_A(x))$, gde je $x$ element univerzalnog skupa $A$, a $\mu_A(x)$ vrednost funkcije pripadnosti za element $x$. Ova definicija povezuje svaki element skupa $A$ sa realnim brojem $\mu_A(x)$ iz intervala [0,1]. Logično, što je veća vrednost za $\mu_A(x)$ to je veći stepen pripadnosti. Fazi skup se formalno može poistovetiti sa svojom funkcijom pripadnosti, tj. može se posmatrati i kao funkcija koja elemente domena (skupa $X$) preslikava u interval $[0,1]$.

$$\mu_A(x): X \to [0,1].$$

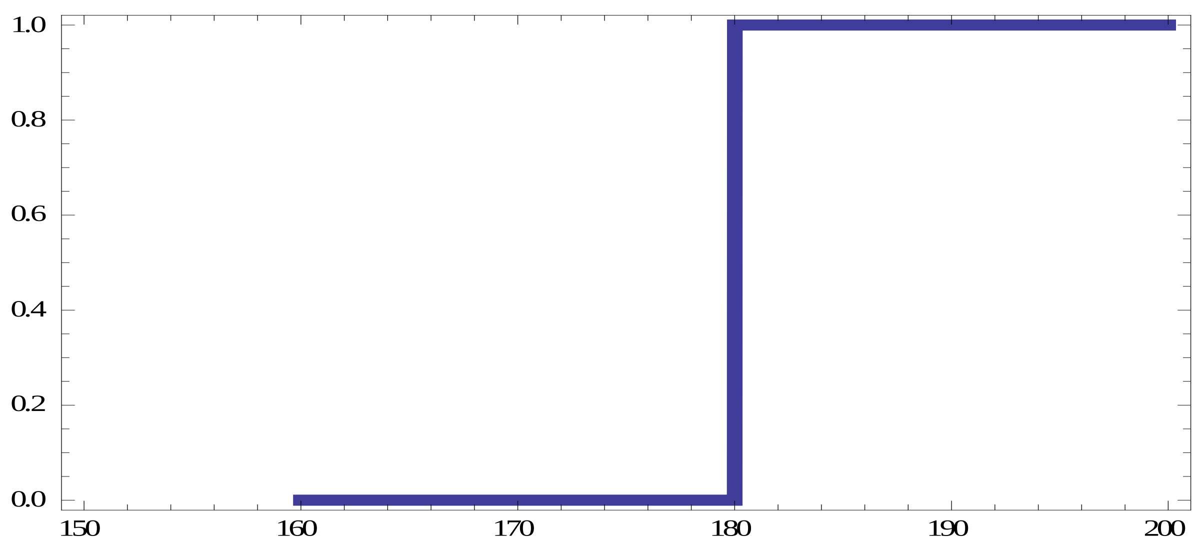
Ako fazi skup ima konačno mnogo elemenata, oni se mogu nabrojati i obično se elementi koji imaju nulti stepen pripadnosti (elementi za koje je vrednost funkcije pripadnosti nula) ne navode. Takođe, ukoliko fazi skup ima konačan broj elemenata oni se mogu prikazati i pomoću tabele, navodeći u jednom redu elemente, a u drugom odgovarajuće vrednosti funkcije pripadnosti.

***Primer 2.1.*** *[2]*

**a)** Recimo da treba opisati visinu ljudi uz pomoć klasičnog skupa. Neka je pretpostavka da je čovek visok ukoliko je njegova visina bar $180cm$, inače je nizak (neka je početna visina $160cm$). Dakle, skup je $A = \{visoki\ ljudi\}$, a njegova funkcija pripadnosti je:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & ako\ je\ \ 160 \leq x < 180, \\ 1, & ako\ je\ \ \ \ \ \ \ \ \ x \geq 180. \end{cases}$$

Grafički, naša funkcija sada izgleda na sledeći način:




***Slika 2.1.*** *Funkcija pripadnosti klasičnog skupa A*

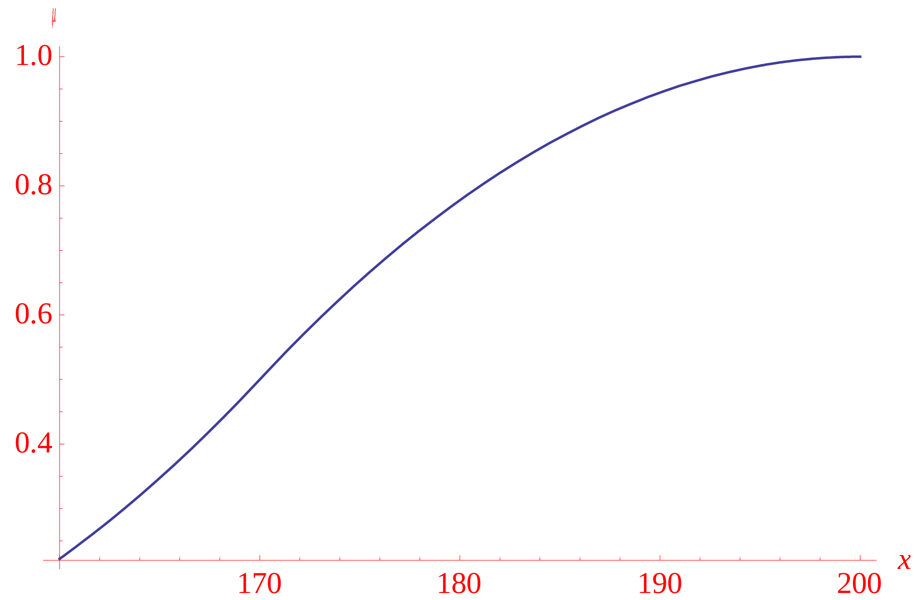
Ovakav način razmišljanja je, kao što se i vidi sa slike, „ograničen“. Kažemo da je ovakvo razmišljanje „ograničeno“ zbog toga što ne dozvoljava gradaciju, odnosno postepeno povećavanje visine. Upravo zbog toga može se doći do pogrešnih zaključaka. Naime, po ovom modelu osoba koja je visoka $179cm$, spada u niske ljude (funkcija pripadnosti je nula), a osoba koja je samo jedan centimetar viša spada u visoke ljude. Takođe, osoba koja ima $180cm$ i osoba koja ima $200cm$ su visoke, a pri tome razlika među njima je velika.

Ovakvi problemi, pre svega lingvistički, moraju se posmatrati na drugi način. Upravo tu dolazi do izražaja „neodređenost“ (rasplinutost). Zato, u primeru pod b) prikazujemo fazi skup jer kod njega se nema ovakvih nedostataka.

**b)** Posmatrajmo istu situaciju kao i u primeru pod a), pri čemu ćemo skup $A = \{visoki\ ljudi\}$ opisati pomoću fazi skupa. Neka je $\mathcal{A} = \{(x, \mu_{\mathcal{A}}(x))\}$ fazi skup kod koga je $x \epsilon [160cm, 200cm]$ i

$$\mu_{\mathcal{A}}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2 \cdot 30^2}(x-140)^2, za\ 160 \leq x \leq 170, \\ 1 - \dfrac{1}{2 \cdot 30^2}(x-200)^2, za\ 170 \leq x \leq 200. \end{cases}$$

Ovu funkciju možemo grafički prikazati tako da $x$ predstavlja visine na horizontalnoj osi, a na vertikalnoj osi, vrednosti funkcije pripadnosti prikazuju sa kojim stepenom se ljudi mogu kategorisati kao visoki tj. sa kojim stepenom pripadaju skupu visokih ljudi.

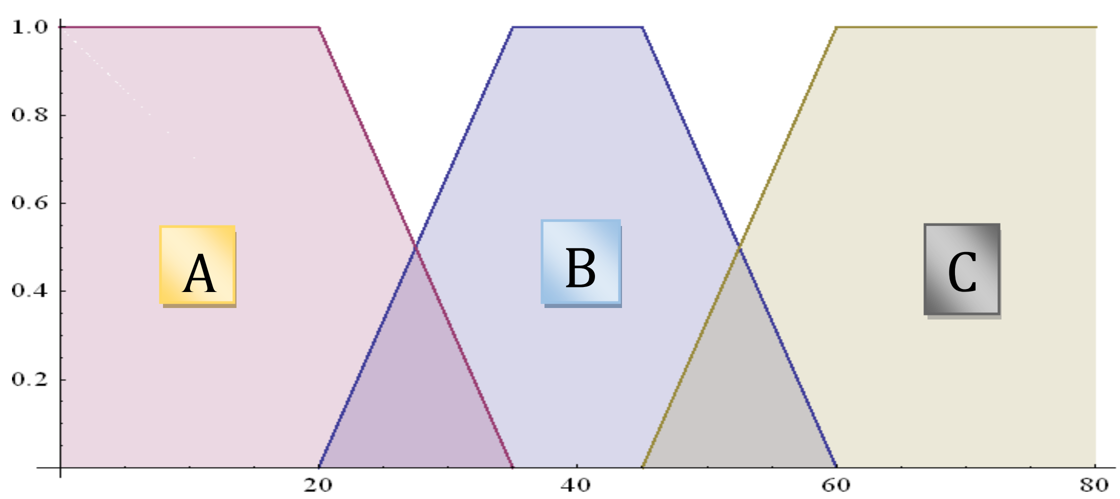



***Slika 2.2.*** *Grafik funkcije pripadnosti fazi skupa iz primera pod b)*

Primer fazi skupa je dat i u sledećem primeru.

***Primer 2.2.*** *[25]*

Neka je $X$ skup svih ljudi. Posmatraju se tri fazi podskupa: mladi $A$, srednjih godina $B$, i stari $C$. Odgovarajuće funkcije pripadnosti su date na Slici 2.3.




***Slika 2.3.*** *Grafik funkcije pripadnosti fazi podskupova $A, B$ i $C$*

Sa grafika se možmo uočiti da mladi ljudi koji imaju od 0 do 20 godina imaju vrednost funkcije pripadnosti 1, a kako broj godina raste vrednost njihove funkcije pripadnosti linearno opada. Analogno, kod ljudi koji po starosnoj dobi pripadaju skupu $C$, a imaju od 45 do 60 godina, njihova funkcija pripadnosti linearno raste, odnosno za ljude od 60 godina pa naviše, funkcija pripadnosti ima vrednost 1. Kod ljudi koji po starnosnoj dobi pripadaju skupu $B$ vrednost funkcije pripadnosti je 1 na intervalu $[30, 50]$, a na intervalima $[20, 35]$ i $[45, 60]$ funkcija pripadnosti linearno raste odnosno opada, respektivno.

Analitički, prethodno definisane funkcije pripadnosti mogu biti predstavljene na sledeći način:

- na podskupu $A$

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 20], \\ -\frac{1}{15}x + \frac{7}{3}, & x \in [20, 35]. \end{cases}$$

- na podskupu $B$

$$\mu_B(x) = \begin{cases} \frac{1}{15}x - \frac{4}{3}, & x \in [20, 35], \\ 1, & x \in [35, 45], \\ -\frac{1}{15}x + 4, & x \in [45, 60]. \end{cases}$$

- na podskupu $C$

$$\mu_C(x) = \begin{cases} \frac{1}{15}x - 3, & x \in [45, 60], \\ 1, & x \in [60, 100]. \end{cases}$$

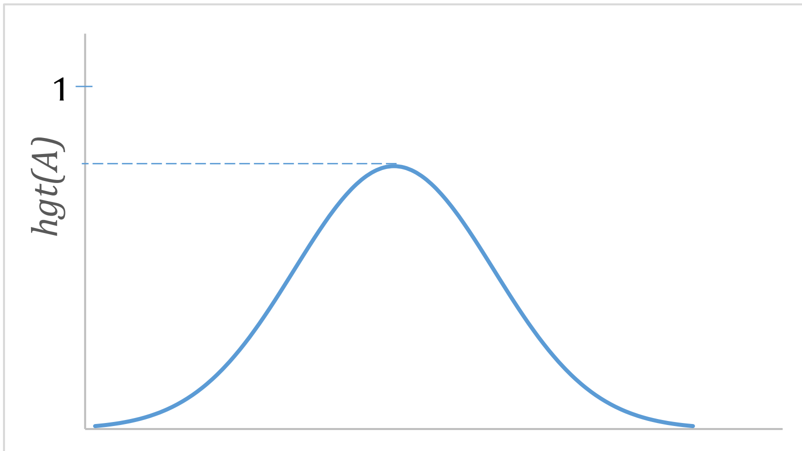
Sada kada smo uveli fazi skupove možemo konstatovati da se obični skupovi mogu posmatrati kao specijalan slučaj fazi skupova kada je funkcija pripadnosti jednaka jedinici. Ukoliko je funkcija pripadnosti $\mu_A(x) = 0$ za svako $x \in X$, tada je skup $A$ prazan skup.

***Definicija 2.3.*** *[13] Visina $hgt(A)$ fazi skupa A je supremum funkcije pripadnosti, tj.*

$$hgt(A) = \sup_{x \in U} \mu_A(x),$$

*pri čemu važi da ako fazi skup A ima konačno mnogo elemenata, visina se definiše kao maksimum funkcije pripadnosti tj.*

$$hgt(A) = \max_{x \in U} \mu_A(x).$$




***Slika 2.4.*** *Visina fazi skupa A*

***Definicija 2.4.*** *[9] Fazi skup je konveksan ako i samo ako*

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}, x_1, x_2 \in U, \lambda \in [0,1].$$

Iz definicije 2.4. vidimo da ukoliko uzmemo dva elementa $x$ i $y$ iz konveksnog fazi skupa, i pri tome ih spojimo jednom duži, vrednost funkcije pripadnosti za ma koju tačku te duži mora biti veća ili jednaka minimumu funkcija pripadnosti elemenata $x$ i $y$.

Ukoliko postoji problem sa stepenom neodređenosti, to možemo modelirati i odgovarajućom verovatnoćom koja je isto funkcija sa vrednostima na intervalu [0,1]. Zbog toga, dat je prikaz primera koji će ukazati na osnovnu razliku u primeni verovatnoće i funkcije pripadnosti.

***Primer 2.3.*** *[17]*

Neka je $X$ skup svih tečnosti. Uočimo njegov fazi podskup $A$: „tečnosti pogodne za piće". Tako će tečnosti kao čista voda imati vrednost funkcije pripadanja 1, dok recimo vino može imati stepen 0,6, voćni sok 0,8, rakija 0,2, sona kiselina 0. Ako sada zamislimo situaciju da se žedni putnik nalazi u pustinji i da nailazi na dve boce sa tečnostima gde na prvoj piše vrednost funkcije pripadanja $\mu_A = 0{,}92$ a na drugoj boci verovatnoća da je pitka tečnost 0,92. Koju bocu će putnik izabrati? Da je funkcija pripadnosti 0,92 znači da se u boci nalazi tečnosti između kisele vode i soka, što je prilično prihvatljivo. Za razliku od prve boce izborom druge boce putnik može dobiti i pitku vodu no isto tako može dobiti i otrov. Očigledan izbor će biti prva boca.

***Definicija 2.5.*** *[13] Fazi skup A je normalizovan ako je $hgt(A) = 1$, odnosno ako postoji bar jedan element, iz univerzalnog skupa, takav da je vrednost funkcije pripadnosti jednaka jedinici. U suprotnom fazi skup je subnormalizovan.*

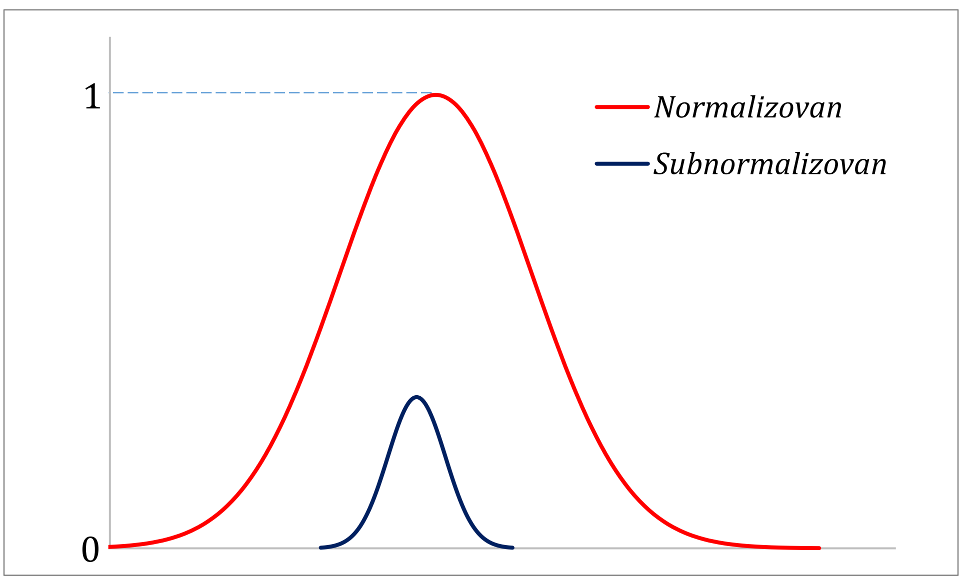
***Definicija 2.6.*** *[13] Jezgro core(A) fazi skupa A je klasičan skup svih elemenata $x \in U$ takvih da je vrednost funkcije pripadnosti jednaka jedinici tj.*

$$core(A) = \{x \in U | \mu_A(x) = 1\}$$

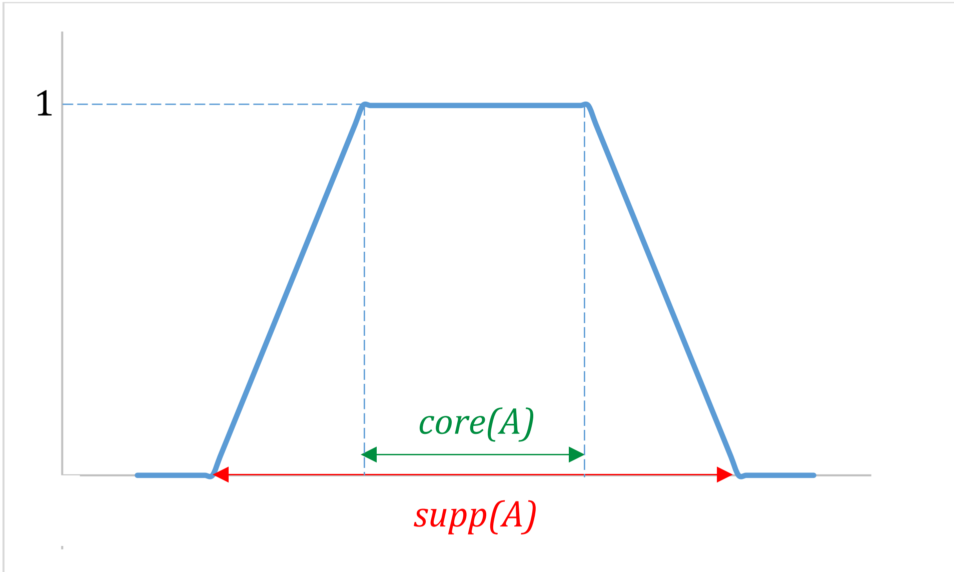
*Dakle, to je skup svih onih elemenata koji u potpunosti pripadaju datom skupu.*

***Definicija 2.7.*** *[13] Nosač $supp(A)$ fazi skupa A je klasičan skup svih elemenata $x \in U$ čija je vrednost funkcije pripadnosti veća od nule, tj.*

$$supp(A) = \{x \in X | \mu_A(x) > 0\}.$$




***Slika 2.5.*** *Normalizovan i subnormalizovan fazi skup*




***Slika 2.6.*** *Jezgro i nosač fazi skupa A*

## 2.2. OPERACIJE SA FAZI SKUPOVIMA

U ovom delu rada dat je preged operacija sa fazi skupovima koje predstavljaju prirodna uproštenja operacija sa klasičnim skupovima. Sledi pregled osnovnih operacija nad fazi skupovima, pa u skladu sa tim definišemo: neka je $U$ univerzalni skup, a skupovi $A, B$ i $C$ fazi skupovi definisani na sledeći način:

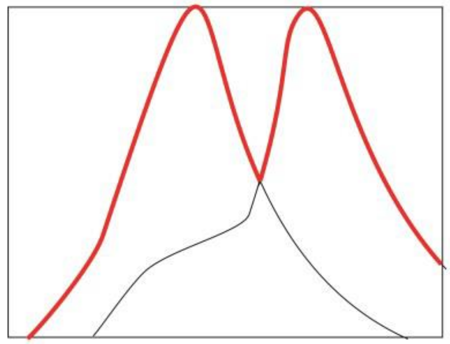
$$A = \{(x, \mu_A(x))\}, \qquad \mu_A(x) \in [0,1],$$

$$B = \{(x, \mu_B(x))\}, \qquad \mu_B(x) \in [0,1],$$

$$C = \{(x, \mu_C(x))\}, \qquad \mu_C(x) \in [0,1].$$

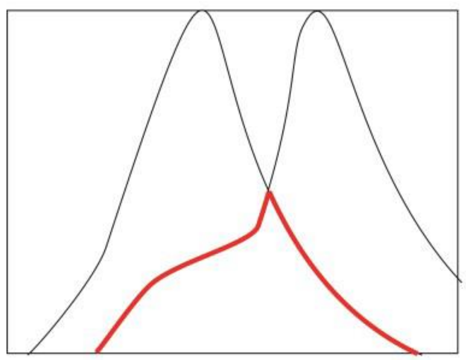
Kao što smo već rekli, operacije sa fazi skupovima predstavljaju prirodna uopštenja operacija sa klasičnim skupovima pa je zbog toga prirodno da formule za operacije sa klasičnim skupovima iskazanim sa karakterističnim funkcijama prenesemo na funkcije pripadanja. Na taj način imamo uniju i presek. Korišćena literatura je [2].

$$\mu_{A\cup B}(x) = max(\mu_A(x), \mu_B(x)),$$



***Slika 2.7.*** *Funkcija pripadnosti unije fazi skupova predstavljena crvenom bojom.*

$$\mu_{A\cap B}(x) = min(\mu_A(x), \mu_B(x)),$$



***Slika 2.8.*** *Funkcija pripadnosti preseka fazi skupova predstavljena crvenom bojom.*

*NAPOMENA:* Trougaone norme i trougaone konorme (eng. *triangular norms and triangular conorms*) predstavljaju specijalne operacije na jediničnom intervalu. Uopštenja unije i preseka fazi skupova mogu se proširiti uvođenjem trougaonih normi i trougaonih konormi. One se razlikuju samo po rubnim uslovima što se može primetiti iz njihovih definicija. U tom cilju sledi prikaz definicije trougaone norme i konorme.**Trougaona norma T** (t-norma) je funkcija T: $[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ takva da za svako $x, y, z \in [0,1]$ važe sledeće osobine:

**(T1)** $T(x,y) = T(y,x)$ *komutativnost*

**(T2)** $T\big(x, T(y,z)\big) = T(T(x,y),z)$ *asocijativnost*

**(T3)** $T(x,y) \leq T(x,z)$ $za\ y \leq z$ *monotonost*

**(T4)** $T(x,1) = T(1,x) = x, T(x,0) = T(0,x) = 0.$ *rubni uslovi*

**Trougaona konorma S** (t-konorma) je funkcija S: $[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ takva da uz pretpostavku $x, y, z \in [0,1]$ važe sledeće osobine:

**(S1)** $S(x,y) = S(y,x)$ *komutativnost*

**(S2)** $S\big(x, S(y,z)\big) = S(S(x,y),z)$ *asocijativnost*

**(S3)** $S(x,y) \leq S(x,z)$ $za\ y \leq z$ *monotonost*

**(S4)** $S(x,1) = 1, S(x,0) = 0$ *rubni uslovi*

***Definicija 2.8.*** *[2] Fazi skupovi A i B su ekvivalentni,* $A = B$*, akko za svako* $x \in U$ *važi:*

$$\mu_A(x) = \mu_B(x).$$

***Definicija 2.9.*** *[2] Fazi skup A je podskup fazi skupa B,* $A \subseteq B$*, ako za svako* $x \in U$ *važi da je:*

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x).$$

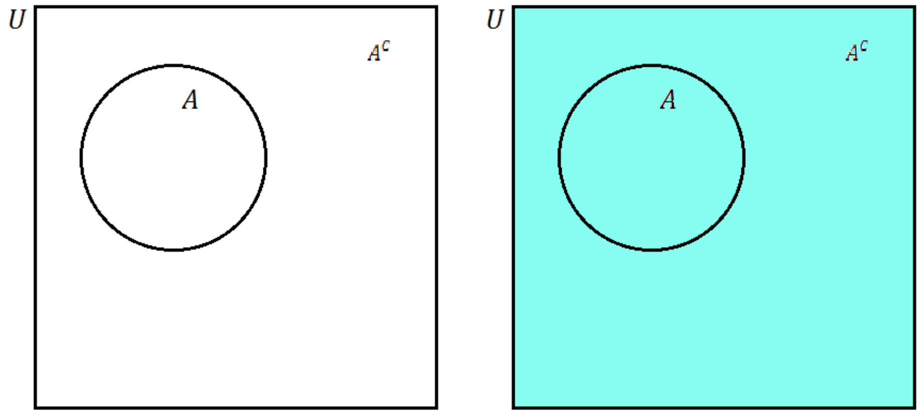
***Definicija 2.10.*** *[2] Fazi skup A je pravi podskup fazi skupa B,* $A \subset B$*, ako je A podskup od B i* $A \neq B$*, tj. ako važe sledeća dva uslova istovremeno:*

1) $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$*, za svako* $x \in U$,
2) $\mu_A(x) < \mu_B(x)$*, za bar jedno* $x \in U$.

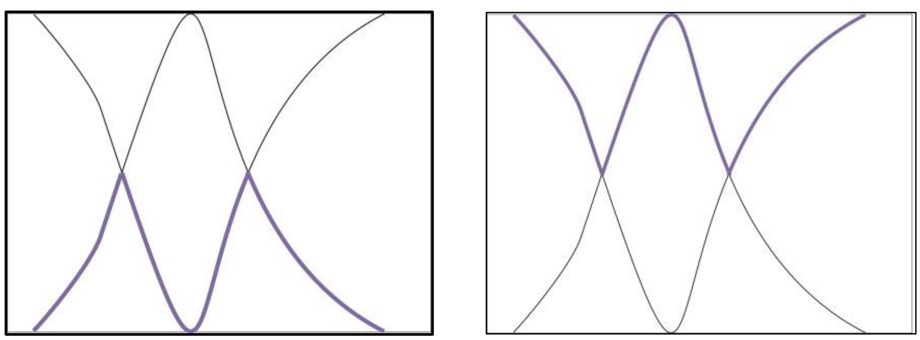
***Definicija 2.11.*** *[2] Fazi skupovi A i* $A^C$ *su komplementi ako za svako* $x \in U$ *važi:*

$$\mu_{A^C}(x) = 1 - \mu_A(x).$$

Obični skupovi imaju važnu osobinu isključenja trećeg, odnosno: $A \cap A^C = \emptyset$ i $A \cup A^C = U$. Međutim, ovaj princip, tj. princip isključenja trećeg ne važi za fazi skupove, što je logično jer kod fazi skupova ne važi pravilo da element pripada odnosno ne pripada skupu (što je slučaj kod klasičnih skupova). Da princip isključenja trećeg ne važi kod fazi skupova ilustrovaćemo sledećim slikama:




***Slika 2.9.*** *Zakon isključenja trećeg važi za klasične skupove, leva slika:* $A \cap A^C = \emptyset$*, desna slika:* $A \cup A^C = U$.



***Slika 2.10.*** *Zakon isključenja trećeg ne važi za fazi skupove, leva slika:* $A \cap A^C \neq \emptyset$*, desna slika:* $A \cup A^C \neq U$.

***Definicija 2.12.*** *[17] Za fazi skup A defnisaćemo njegov* $\gamma$ *−presek, u oznaci* $[A]^\gamma$*, kao klasičan skup elemenata* $x$*, koji pripadaju tom fazi skupu A, najmanje sa stepenom* $\gamma$:

$$[A]^\gamma = \{x | x \in X, \mu_A(x) \geq \gamma\}, \ \alpha \in [0,1].$$

Na ovaj način može se definisati granica stepena pripadnosti i da se svi elementi čiji je stepen pripadnosti strogo manji od $\gamma$ ne uzmu u razmatranje. Takođe, $\gamma$ −preseke uvodimo ukoliko želimo da odradimo neku operaciju sa fazi brojevima (o njima ćemo govoriti u nastavku rada) tako što ih „iscepkamo“ na $\gamma$ −preseke koji su intervali, odradimo željenu operaciju, pa zatim dobijene intervale rekonstruišemo u fazi broj.

Svaki fazi podskup se može rekonstruisati pomoću svojih $\gamma$ −preseka, preko specijalnih fazi podskupova $\gamma[A]^{\gamma}$. Dakle, važi sledeća teorema o dekompoziciji fazi skupa.

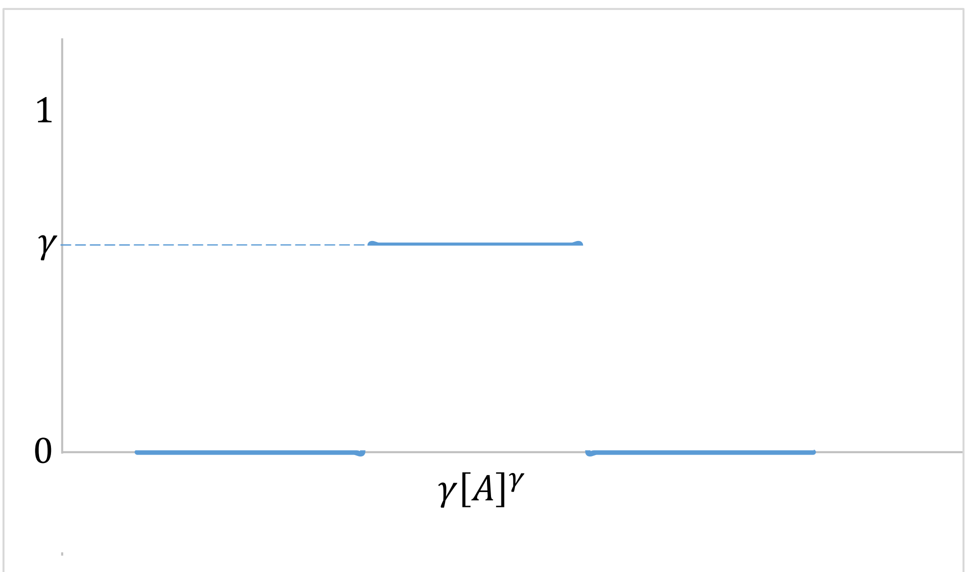
***Teorema 2.1.*** *[17] Za svaki fazi podskup A važi:*

$$A = \bigcup_{\gamma \in [0,1]} \gamma[A]^{\gamma},$$

*gde je* $\cup$ *unija fazi skupa.*

Pre nego što bude dat pregled dokaza ove teoreme, sledi formalni i grafički prikaz funkcije $\gamma[A]^{\gamma}(x)$:

$$\gamma[A]^{\gamma}(x) = \begin{cases} \gamma, & x \in [A]^{\gamma} \\ 0, & inače. \end{cases}$$




***Slika 2.11.*** *Grafički prikaz funkcije* $\gamma[A]^{\gamma}$

***Dokaz:***

*Neka je x proizvoljan fiksan element iz U. Označimo* $\mu_A(x) = r$.

*Tada je*

$$\mu_{\bigcup_{\gamma\in[0,1]}\gamma[A]^\gamma}(x) = \sup_{\gamma\in[0,1]} \mu_{\gamma[A]^\gamma}(x) = max\left(\sup_{\gamma\in[0,r]} \mu_{\gamma[A]^\gamma}(x), \sup_{\gamma\in(r,1]} \mu_{\gamma[A]^\gamma}(x)\right).$$

Kako je za $\gamma \in [0, r]$ uvek

$$\mu_A(x) = r \geq \gamma, \text{ to je } \mu_{\gamma[A]^\gamma} = \gamma,$$

a za $\gamma \in (r, 1]$ uvek je

$$\mu_A(x) = r < \gamma, \text{pa je } \mu_{\gamma[A]^\gamma} = 0$$

pa važi

$$\mu_{\bigcup_{\gamma\in[0,1]}\gamma[A]^\gamma}(x) = \sup_{\gamma\in[0,1]} \gamma = r = \mu_A(x).$$

## 2.3. FAZI BROJEVI

Fazi skupovi definisani na skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ imaju poseban značaj u teoriji fazi skupova. Fazi skupovi se, pod određenim uslovima, mogu posmatrati kao fazi brojevi. Fazi brojevi su od suštinskog značaja za primenu pa se stoga, iako su oni specijalni fazi skupovi, koristi posebna oznaka kao bi se istakli. U ovom delu rada sledi prikaz osnovnh definicija specijalnih fazi skupova tj. fazi brojeva.

Fazi brojevi svoju primenu nalaze u programiranju, inžinjeringu za komunikacione proizvode, a eksperimentalne nauke, a konsultantske i finansijske institucije su sve češći korisnici fazi brojeva.

***Definicija 2.13.*** *[9] Za fazi skup A nad skupom realnih brojeva, kaže se da je fazi broj* **A** *ako su zadovoljeni sledeći uslovi:*

1. *A je konveksan,*
2. *postoji tačno jedno $\bar{x} \in \mathbb{R}$ takvo da je $\mu_A(\bar{x}) = 1$,*

3. *funkcija pripadnosti $\mu_A(x)$ za $x \in \mathbb{R}$ je bar po delovima neprekidna.*

***Definicija 2.14.*** *[9] Modalna vrednost fazi broja* $\mathbf{A}$ *je vrednost $\bar{x}$ kojoj odgovara maksimalni stepen pripadnosti.*

Kao što smo već naglasili, zbog značajnosti fazi brojeva koristićemo drugačije oznake za njih, pa u skladu sa tim fazi brojeve označavamo sa velikim masnim slovima: **A, B, C**, ..., a njihove funkcije pripadnosti sa: $\mu_{\mathbf{A}}(x), \mu_{\mathbf{B}}(x), \mu_{\mathbf{C}}(x), \dots$

***Definicija 2.15.*** *[9] Fazi broj je strogo pozitivan, tj.* $\mathbf{A} > 0$*, ako i samo ako je nosač tog fazi broja takav da važi:*

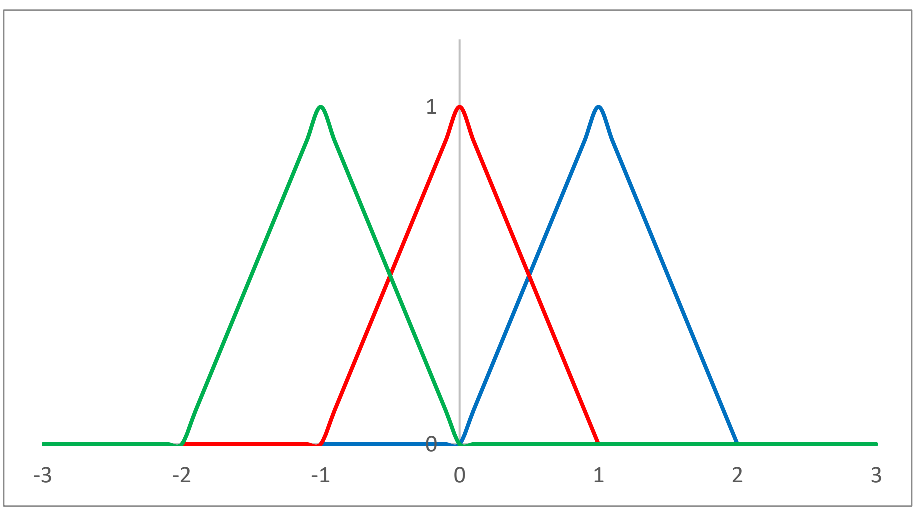
$$supp(\mathbf{A}) \subset (0, +\infty),$$

*odnosno strogo negativan, tj.* $\mathbf{A} < 0$ *ako i samo ako je nosač tog fazi broja takav da važi:*

$$supp(\mathbf{A}) \subset (-\infty, 0).$$

***Definicija 2.16.*** *[9] Za fazi broj se kaže da je fazi – nula broj, u oznaci* $sgn(\mathbf{A}) = 0$*, ako nije ni pozitivan ni negativan, tj. ako važi* $0 \in supp(\mathbf{A})$.

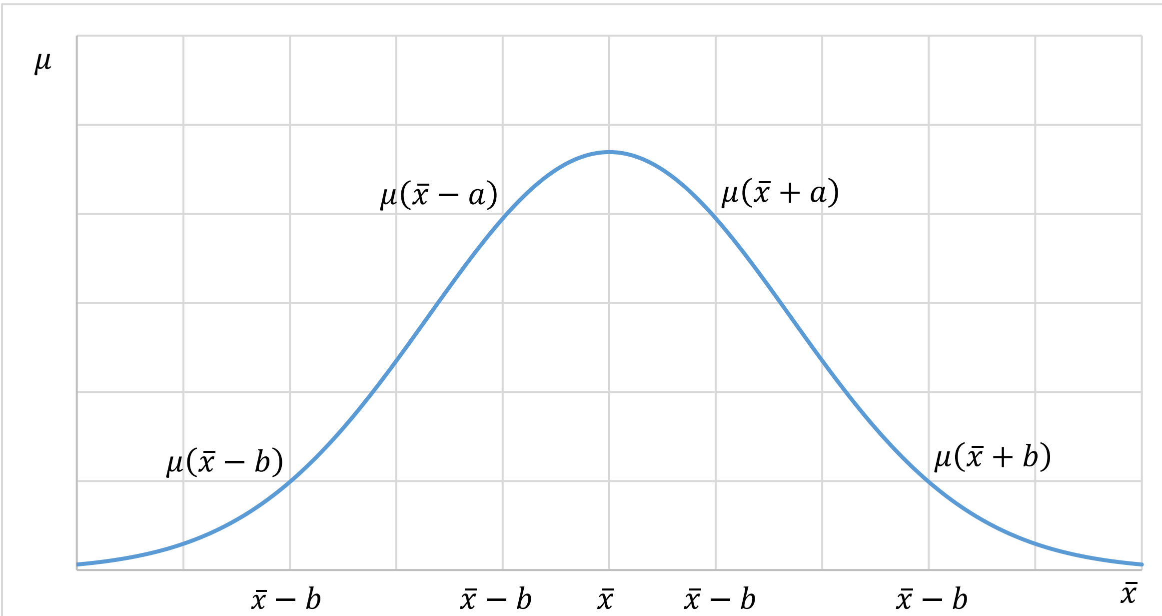
Na sledećoj slici prikazani su strogo pozitivan fazi broj, strogo negativan fazi broj i fazi – nula broj.




***Slika 2.12.*** *Zelena boja – strogo negativan fazi broj, crvena boja – fazi – nula broj, plava boja – strogo pozitivan fazi broj*

***Definicija 2.17.*** *[9] Fazi broj je simetričan ako njegova funkcija pripadnosti zadovoljava:*

$$\mu_{\mathbf{p}}(\bar{x}+x)=\mu_{\mathbf{p}}(\bar{x}-x), \forall x\in\mathbb{R}.$$




***Slika 2.13.*** *Funkcija pripadnosti simetričnog fazi broja.*

U cilju korišćenja fazi brojeva i fazi relacija u ma kom inteligentnom sistemu, moraju se izvršavati aritmetičke operacije (naročito sabiranje, oduzimanje, množenje i deljenje) sa ovim fazi veličinama. Proces korišćenja osnovnih operacija sa fazi brojevima zasniva se na primeni ***Zadehovog principa proširenja***. Ovaj princip omogućava korišćenje klasičnih matematičkih operacija tako da se prošire i primene na fazi brojeve.

Sledi prikazi Zadehovog principa proširenja:

***Definicija 2.18.*** *[26] Neka su $A_1, A_2, \dots, A_n$ fazi podskupovi klasičnih skupova $X_1, X_2, \dots, X_n$ respektivno i neka je dato preslikavanje $f: X_1\times X_2\times\dots\times X_n\to Y$ takvo da za svaku n-torku $(x_1, x_2, \dots, x_n)\in X_1\times X_2\times\dots\times X_n$ važi: $f(x_1, x_2, \dots, x_n)=y\in Y$. Tada je*

$B=f(A_1, A_2, \dots, A_n)$

*fazi podskup od $Y$ čija je funkcija pripadnosti:*

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \sup\limits_{y} min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2), \dots, \mu_{A_n}(x_n)\}, & ako\ postoji\ y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ 0, & inače. \end{cases}$$

*Drugim rečima, princip proširenja govori da je slika nekog fazi skupa takođe fazi skup čija je funkcija pripadnosti $\mu_B(y)$.*

U nastavku je dat originalan primer Zadehovog principa proširenja.

***Primer 2.4.***

Neka su data dva fazi skupa $A_1 = \{(-3,0.2), (-1,0.1), (2,0,8)\}, A_2 = \{(-2,0.4), (0, 0.6)\}$ i preslikavanje $f(x_1, x_2) = |2x_1| - x_2$. Korišćenjem Zadehovog principa proširenja treba odrediti skup $B = f(A_1, A_2)$. Kako bi prezentacija primera bila preglednija koristiće se tabela. U prvu kolonu unose se elementi prvog skupa zapisanih u obliku $x_{1i}^{\langle \mu_{A_1}(x_1) \rangle}$, dok se u prvu vrstu tabele unose elementi drugog skupa zapisanih u obliku $x_{2j}^{\langle \mu_{A_2}(x_2) \rangle}$, a zatim se u preseku $i$ −te vrste i $j$ − te kolone nalazi element $y_{i,j} = f\big(x_{1i}, x_{2j}\big)$. Stepen pripadnosti za taj element se dobija kao $min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)\}$.

| | $-2^{\langle 0,4 \rangle}$ | $0^{\langle 0,6 \rangle}$ |
|---|---|---|
| $-3^{\langle 0,2 \rangle}$ | $8^{\langle 0,2 \rangle}$ | $6^{\langle 0,2 \rangle}$ |
| $-1^{\langle 0,1 \rangle}$ | $4^{\langle 0,1 \rangle}$ | $2^{\langle 0,1 \rangle}$ |
| $2^{\langle 0,8 \rangle}$ | $6^{\langle 0,4 \rangle}$ | $4^{\langle 0,6 \rangle}$ |

Sada sledi prikaz nove tabele u kojoj će biti prikazane vrednosti $y_{i,j}$, stepen pripadnosti za te vrednosti i supremumu svih stepena pripadnosti.

| $y = f(x_1, x_2) = \lvert 2x_1 \rvert - x_2$ | $min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)\}$ | $\sup min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)\}$ |
|---|---|---|
| 2 | 0.1 | 0.1 |
| 4 | 0.1, 0.6 | 0.6 |
| 6 | 0.2, 0.4 | 0.4 |
| 8 | 0.2 | 0.2 |

Na kraju smo dobili traženi skup $B = \{(2,0.1), (4,0.6), (6,0.4), (8,0.2)\}$.

U zavisnosti od tipa funkcije pripadnosti, dobijaju se različiti fazi brojevi. Zadeh je klasifikovao ove funkcije u dve kategorije: linearne i nelinearne. Najčešće vrste funkcija pripadnosti, odnosno fazi brojeva su:

- trougaoni fazi broj,
- trapezoidni fazi broj,
- interval kao fazi broj,
- Gausov fazi broj.

U nastavku ćemo se baviti trougaonim i trapezoidnim fazi brojevima, jer se najčešće susreću u praksi. Prikaz trougaonih i trapezoidnih fazi brojeva urađeno je uz pomoć [5,13].

## 2.3.1. Trougaoni fazi brojevi

***Definicija 2.19.*** *[5] Trougaoni fazi broj* **A**, *odnosno, trougaoni broj sa funkcijom pripadnosti* $\mu_{\boldsymbol{A}}(x)$ *je definisan funkcijom pripadnosti oblika:*

$$\mu_{\mathbf{A}}(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{a-x}{\alpha}, & za\ a-\alpha \leq x \leq a \\ 1 - \dfrac{x-a}{\beta}, & za\ a \leq x \leq a+\beta \\ 0, & inače. \end{cases}$$

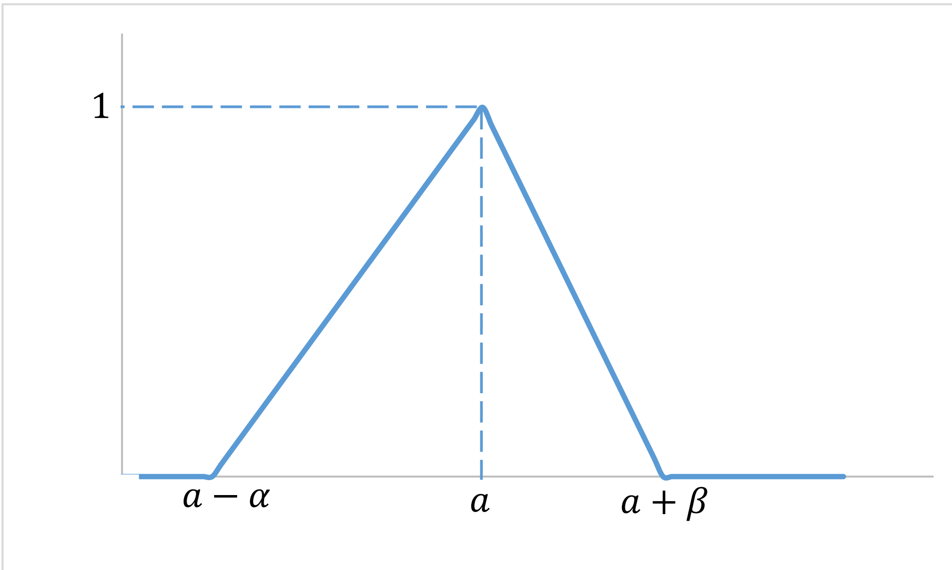
Trougaoni fazi brojevi se označavaju sa $\mathbf{A} = tfn(a-\alpha, a, a+\beta)$, ali zbog jednostavnosti uvodi se şledeći zapis $\mathbf{A} = (a, \alpha, \beta)$.

U ovom zapisu vrednost $a$ predstavlja modalnu vrednost fazi broja, a $\alpha$ i $\beta$ su odstupanja sa leve i desne strane, respektivno (u nekim literaturama se $\alpha$ i $\beta$ još nazivaju leva i desna širina, respektivno). Interval $[a-\alpha, a+\beta]$ predstavlja nosač fazi broja, a tačka

$(a, 1)$ je vrh fazi broja. Trougaoni fazi brojevi se još nazivaju i linearni jer imaju linearnu funkciju pripadnosti.

Primetimo da trougaoni fazi broj $\mathbf{A} = (a, \alpha, \beta)$ možemo zapisati i preko $\gamma$ −preseka:

$$[\mathbf{A}]^{\gamma} = [a - (1-\gamma)\alpha, a + (1-\gamma)\beta], \qquad \forall\gamma \in [0,1].$$



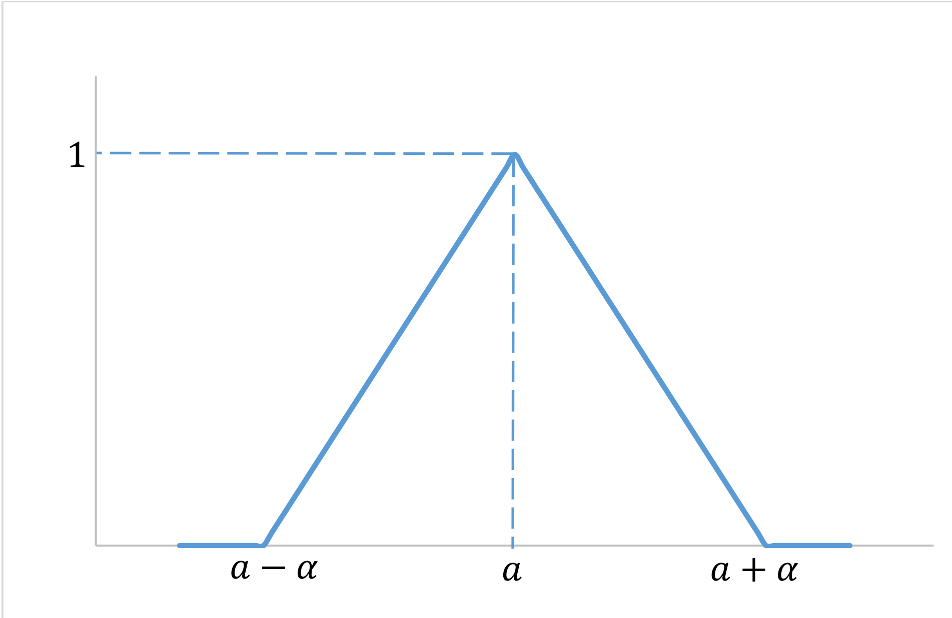

***Slika 2.14.*** *Trougaoni fazi broj* $\mathbf{A} = (a, \alpha, \beta)$

Ako se modalna vrednost, tj. tačka $a \in (\alpha, \beta)$ nalazi tačno na sredini nosača, tj.

$$a = \frac{(a-\alpha) + (a+\beta)}{2},$$

tada kažemo da je taj trougaoni fazi broj simetričan, pri čemu je njegova funkcija pripadnosti:

$$\mu_{\mathbf{A}}(x) = \begin{cases} 2\dfrac{x-\alpha}{a-\alpha}, & za\ \alpha \leq x \leq a, \\ 2\dfrac{x-\beta}{a-\beta}, & za\ a \leq x \leq \beta \\ 0, & inače. \end{cases}$$




***Slika 2.15.*** *Simetrični trougaoni fazi brojevi*

Kao što je već napomenuto, funkcija pripadnosti trougaonih fazi brojeva je linearna funkcija, pri čemu se sastoji od dva linarna dela koja se spajaju u tački $(a, 1)$ koja predstavlja maksimum. Stoga, mnogi autori definišu levi i desni trougaoni fazi broj. Levi trougaoni fazi broj u oznaci $\mathbf{A}^{l}$ je $\mathbf{A}^{l} = (a-\alpha, a, a)$, dok desni trougaoni fazi broj u oznaci $\mathbf{A}^{r}$ je $\mathbf{A}^{r} = (a, a, a+\beta)$. Levi trougaoni fazi broj opisuje pojave poput velikog profita, velikog rizika, dok desni trougaoni fazi broj opisuje pojave poput malog profita, malog rizika i slično.

## 2.3.2. Trapezoidni fazi brojevi

Kako bi bio dat pregled trapezoidnih fazi brojeva, neophodno je da se pre svega upoznamo sa $L-R$ fazi intervalima, jer su trapezoidni fazi intervali specijalna vrsta $L-R$ fazi intervala. Vrlo često se u literaturi trapezoidni fazi intervali nazivaju trapezoidni fazi brojevi, pa stoga ih i u ovom radu nazivamo trapezoidni fazi brojevi.

Ako neki fazi skup $A$ ne zadovoljava jedan od tri uslova navedenih u definiciji fazi broja (definicija 2.13.), on neće biti fazi broj. Međutim, ukoliko je narušen samo drugi uslov, dakle da za fazi broj **A** postoji više od jedne modalne vrednosti onda za taj broj kažemo da je *fazi interval*.

***Definicija 2.20.*** *[5]* $L - R$ *fazi interval u oznaci* $\mathbf{A} = (a, b, \alpha, \beta)_{LR}$ *se definiše preko svoje funkcije pripadnosti oblika:*

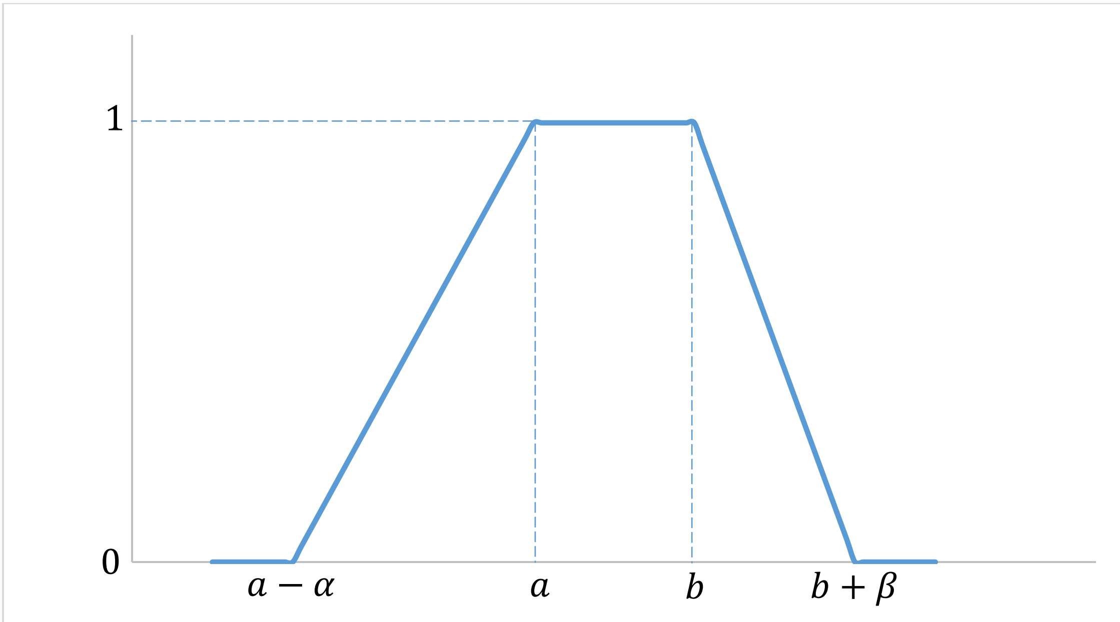
$$\mu_{\mathrm{A}}(x) = \begin{cases} 0, & r + \beta < x \leq l - \alpha, \\ L\left(\dfrac{a - x}{\alpha}\right), & a - \alpha \leq x \leq b, \\ 1, & a \leq x \leq b\,, \\ R\left(\dfrac{x - b}{\beta}\right), & b \leq x \leq b + \beta. \end{cases}$$

Specijalno, za $L(x) = R(x) = 1 - x$ dobijamo trapezoidni fazi broj. Trapezoidni fazi broj ima oznaku $\mathbf{A} = (a, b, a - \alpha, b + \beta)$**.** Zbog jednostavnosti, uvodi se kraći zapis trapezoidnog fazi broja $\mathbf{A} = (a, b, \alpha, \beta)$. Takođe, trougaoni fazi brojevi predstavljaju specijalni slučaj trapezoidnih fazi brojeva kada je $a = b$.

***Definicija 2.21.*** *[5] Funkcija pripadnosti trapezoidnog fazi* **A** *broja je oblika:*

$$\mu_{\mathrm{A}}(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{a - x}{\alpha}, & a - \alpha \leq x \leq a, \\ 1, & a \leq x \leq b, \\ 1 - \dfrac{x - b}{\beta}, & a \leq x \leq b + \beta, \\ 0, & inače. \end{cases}$$

*gde je* $[a - \alpha, a + \beta]$ *nosač trapezoidnog fazi broja, a* $[a, b]$ *interval na kome je stepen pripadnosti jednak 1.*




***Slika 2.16.*** *Trapezoidni fazi broj*

***Definicija 2.22.*** *[5] Ako važi* $[a-\alpha, a] = [b, b+\beta]$*, onda je trapezoidni fazi interval simetričan u odnosu na pravu* $x = \frac{a+b}{2}$.

Analogno, kao što smo definisali levi i desni trougaoni fazi broj, tako definišemo i levi i desni trapezoidni fazi broj. Levi trapezoidni fazi broj je $\mathbf{A}^{l} = (a-\alpha, a, b, b)$ sa nosačem $[a-\alpha, b]$, a desni trapezoidni fazi broj je $\mathbf{A}^{r} = (a, a, b, b+\beta)$ sa nosačem $[a, b+\beta]$.

Kao i trougaoni, i trapezoidni fazi broj se može prikazati putem $\gamma -$ preseka. Neka je $\mathbf{A} = (a, b, \alpha, \beta)$ trapezoidni fazi broj. Očigledno je da važi:

$$[\mathbf{A}]^{\gamma} = [a-(1-\gamma)\alpha, b+(1-\gamma)\beta], \qquad \forall\gamma \in [0,1].$$

## 2.4. FAZI RELACIJE

Klasične relacije pokazuju da li su neki elementi u relaciji ili ne. Međutim, fazi relacije dozvoljavaju elementima da budu u određenoj meri u relaciji, pa zato i imaju široku primenu. Dakle, prelaz od pojma klasične relacije ka pojmu fazi relacije moguće je obezbediti uvođenjem koncepta „*jačine*“ relacije između pojedinih elemenata. Izlaganje fazi relacija i operacija sa njima oslanja se na [2,9].

***Definicija 2.23.*** *[2] Neka je dat Dekartov proizvod:*

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\},$$

*gde su $A$ i $B$ podskupovi univerzalnih skupova $U_1$ i $U_2$ respektivno. Fazi relacija na $A \times B$ u oznaci $\mathcal{R}(x, y)$ se definiše kao skup:*

$$\mathcal{R} = \{(x, y), \mu_{\mathcal{R}}(x, y) | (x, y) \in A \times B, \mu_{\mathcal{R}}(x, y) \in [0,1]\},$$

*gde je $\mu_{\mathcal{R}}(x, y)$ funkcija dve promenljive koja se zove funkcija pripadnosti.*

Funkcija pripadnosti $\mu_{\mathcal{R}}(x, y)$ daje stepen pripadnosti uređenog para u $\mathcal{R}$, pridružujući svakom paru $(x, y)$ u $A \times B$ jedan realan broj iz intervala $[0,1]$. Taj stepen pripadanja, pokazuje stepen kojim je $x$ u relaciji sa $y$. Pretpostavka je da je funkcija $\mu_{\mathcal{R}}(x, y)$ po delovima neprekidna ili diskretna nad domenom $A \times B$ (opisuje površ). Formalno, fazi relacija je klasična trinarna relacija, tj. to je skup uređenih trojki.

***Definicija 2.24.*** *[2] n-arna fazi relacija $\mathcal{R}$ je uređeni par:*

$$\mathcal{R}, = \big((a_1, a_2, \dots, a_n), \mu_{\mathcal{R}}(a_1, a_2, \dots, a_n)\big),$$

*gde je*

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \; i \; \mu_{\mathcal{R}}(a_1, a_2, \dots, a_n) \in [0,1].$$

Fazi relacije u odnosu na klasične relacije poseduju veću „izražajnu moć“ koja se odnosi na $x$ i $y$ zbog funkcije pripadnosti $\mu_{\mathcal{R}}(x, y)$ koja dodeljuje specifične vrednosti (ocene) za svaki par $(x, y)$. Stoga je uobičajeno koristiti sledeće izraze: $x$ je mnogo veće od $y$, $x$ je blizu $y$, $x$ je bitan u odnosu na $y$, $x$ i $y$ su skoro isti, $x$ i $y$ su jako daleko, itd.

***Primer 2.5.*** *[2]*

Posmatrajmo fazi relaciju koja se sastoji od konačnog broja uređenih parova,

$$\mathcal{R} = \left\{\begin{matrix} \big((x_1, y_1), 0\big), \big((x_1, y_2), 0.1\big), \big((x_1, y_3), 0.2\big), \\ \big((x_2, y_1), 0.7\big), \big((x_2, y_2), 0.2\big), \big((x_2, y_3), 0.3\big), \\ \big((x_3, y_1), 1\big), \big((x_3, y_2), 0.6\big), \big((x_3, y_3), 0.2\big) \end{matrix}\right\}$$

Ona takođe može biti zapisana kao tabela (matrica):

| | $\triangleq$ $y$ <br> $x$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{R}$ | $x_1$ | 0 | 0.1 | 0.2 |
| | $x_2$ | 0.7 | 0.2 | 0.3 |
| | $x_3$ | 1 | 0.6 | 0.2 |

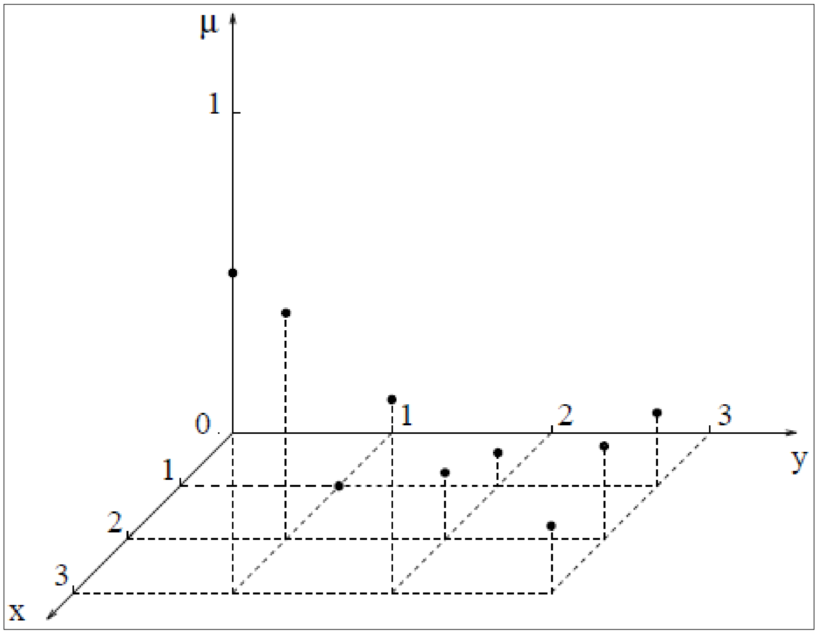
gde brojevi u ćelijama predstavljaju vrednosti funkcija pripadnosti:

$$\mu_{\mathcal{R}}(x_1, y_1) = 0, \qquad \mu_{\mathcal{R}}(x_1, y_2) = 0.1, \qquad \mu_{\mathcal{R}}(x_1, y_3) = 0.2,$$

$$\mu_{\mathcal{R}}(x_2, y_1) = 0.7, \qquad \mu_{\mathcal{R}}(x_2, y_2) = 0.2, \qquad \mu_{\mathcal{R}}(x_2, y_3) = 0.3,$$

$$\mu_{\mathcal{R}}(x_1, y_1) = 1, \qquad \mu_{\mathcal{R}}(x_3, y_2) = 0.6, \qquad \mu_{\mathcal{R}}(x_3, y_3) = 0.2.$$

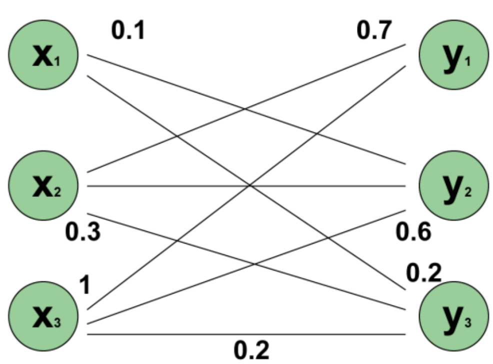
Ako pretpostavimo da je $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, y_1 = 1, y_2 = 2, y_3 = 3$, tada $\mathcal{R}$ možemo predstaviti tačkama u trodimenzionalnom prostoru $(x, y, \mu)$.




***Slika 2.17.*** *Fazi relacija $\mathcal{R}$ opsana kao $x$ je veće od $y$*

Kako su vrednosti funkcije pripadnosti 0.7, 1, 0.6 ispod glavne dijagonale (u pravcu $x$) date tabele veće od onih koje se nalaze iznad (u pravcu $y$), 0.1, 0.2, 0.3, tada kažemo da relacija $\mathcal{R}$ opisuje: $x$ je veće od $y$.

Fazi relacija $\mathcal{R}$ može da se predstavi i pomoću fazi grafa gde vrednosti na vezama između čvorova predstavljaju stepen pripradanja.




***Slika 2.18.*** *Fazi relacija $\mathcal{R}$ predstavljena kao fazi graf*

***Primer 2.6.*** *[2]*

Posmatrajmo sledeća dva skupa čiji su elementi kompanije:

$$A = \{kompanija\ a_1, kompanija\ a_2, kompanija\ a_3\},$$

$$B = \{kompanija\ b_1, kompanija\ b_2\}.$$

Neka je $\mathcal{R}$ fazi relacija između ova dva skupa koja predstavlja relaciju „veoma daleko“ koja se odnosi na udaljenost između kompanija:

$$\mathcal{R} = \left\{ \begin{matrix} \big((kompanija\ a_1, kompanija\ b_1), 0.9\big), \\ \big((kompanija\ a_1, kompanija\ b_2), 0.6\big), \\ \big((kompanija\ a_2, kompanija\ b_1), 1\big), \\ \big((kompanija\ a_2, kompanija\ b_2), 0.4\big), \\ \big((kompanija\ a_3, kompanija\ b_1), 0.5\big), \\ \big((kompanija\ a_3, kompanija\ b_2), 0.1\big) \end{matrix} \right\}.$$

Kao što smo rekli u prethodnom primeru, fazi relacija može biti predstavljena i tabelarno:

| | $\triangleq$ | $kompanija\ b_1$ | $kompanija\ b_2$ |
|---|---|---|---|
| $\mathcal{R}$ | $kompanija\ a_1$ | 0.9 | 0.6 |
| | $kompanija\ a_2$ | 1 | 0.4 |
| | $kompanija\ a_3$ | 0.5 | 0.1 |

Funkcija pripadnosti pokazuje koliko su kompanije udaljene jedna od druge, pa se tako može reći da su Kompanija $a_2$ i Kompanija $b_1$ na velikoj udaljenosti (funkcija pripadnosti iznosi 1), dok kompanije Kompanija $a_3$ i Kompanija $b_2$ (funkcija pripadnosti iznosi 0.1).

## 2.4.1. Osnovne operacije sa fazi relacijama

Neka su $\mathcal{R}_1$ i $\mathcal{R}_2$ dve fazi relacije nad $A \times B$, gde su:

$$\mathcal{R}_1 = \left\{\left((x,y), \mu_{\mathcal{R}_1}(x,y)\right)\right\}, \qquad (x,y) \in A \times B,$$

$$\mathcal{R}_2 = \left\{\left((x,y), \mu_{\mathcal{R}_2}(x,y)\right)\right\}, \qquad (x,y) \in A \times B.$$

Na dalje ćemo koristiti funkciju pripadnosti $\mu_{\mathcal{R}_1}(x,y)$ i $\mu_{\mathcal{R}_2}(x,y)$ kako bi pokazali operacije sa fazi relacijama $\mathcal{R}_1$ i $\mathcal{R}_2$.

***Definicija 2.25.*** *[2] Dve fazi relacije su ekvivalentne, u oznaci $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$, ako i samo ako za svaki par $(x,y) \in A \times B$ važi:*

$$\mu_{\mathcal{R}_1}(x,y) = \mu_{\mathcal{R}_2}(x,y).$$

***Definicija 2.26.*** *[2] Dve fazi relacije su u inkluziji, u oznaci $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$, ako za svaki par $(x,y) \in A \times B$ važi:*

$$\mu_{\mathcal{R}_1}(x,y) \leq \mu_{\mathcal{R}_2}(x,y).$$

*U tom slučaju kažemo da je $\mathcal{R}_1$ inkluzija na $\mathcal{R}_2$ ili kažemo da je $\mathcal{R}_2$ veća od $\mathcal{R}_1$. Ako važi da je $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$ i istovremeno bar za jedan par $(x,y)$ važi:*

$$\mu_{\mathcal{R}_1}(x,y) < \mu_{\mathcal{R}_2}(x,y),$$

*tada imamo strogu inkluziju $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2$.*

***Definicija 2.27.*** *[2] Komplement relacije $\mathcal{R}$, u oznaci $\bar{\mathcal{R}}$, se definiše kao:*

$$\mu_{\bar{\mathcal{R}}}(x,y) = 1 - \mu_{\mathcal{R}}(x,y),$$

*pri čemu mora da važi za svaki par $(x,y) \in A \times B$.*

***Definicija 2.28.*** *[2] Presek dve fazi relacije $\mathcal{R}_1$ i $\mathcal{R}_2$, u oznaci $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$, se definiše kao:*

$$\mu_{\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2}(x, y) = \min\{\mu_{\mathcal{R}_1}(x, y), \mu_{\mathcal{R}_2}(x, y)\}, \quad (x, y) \in A \times B.$$

***Definicija 2.29.*** *[2] Unija dve fazi relacije $\mathcal{R}_1$ i $\mathcal{R}_2$, u oznaci $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$, se definiše kao:*

$$\mu_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2}(x, y) = \max\{\mu_{\mathcal{R}_1}(x, y), \mu_{\mathcal{R}_2}(x, y)\}, \quad (x, y) \in A \times B.$$

***Primer 2.7.*** *[2]*

Posmatrajmo relacije $\mathcal{R}_1$ i $\mathcal{R}_2$ koje su date tabelarno:

| $\mathcal{R}_1$ | $\triangleq$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ |
|---|---|---|---|---|
| | $x_1$ | 0 | 0.1 | 0.2 |
| | $x_2$ | 0 | 0.7 | 0.3 |
| | $x_3$ | 0.2 | 0.8 | 1 |

| $\mathcal{R}_2$ | $\triangleq$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ |
|---|---|---|---|---|
| | $x_1$ | 0.3 | 0.3 | 0.2 |
| | $x_2$ | 0.5 | 0 | 1 |
| | $x_3$ | 0.7 | 0.3 | 0.1 |

Koristeći definicije za presek i uniju dve relacije (Definicija 2.24. i Definicija 2.25) za svaki par redom $(x_i, y_j), i, j = 1,2,3$, dobijamo:

| $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ | $\triangleq$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ |
|---|---|---|---|---|
| | $x_1$ | 0 | 0.1 | 0.2 |
| | $x_2$ | 0 | 0 | 0.3 |
| | $x_3$ | 0.2 | 0.3 | 1 |

| $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ | $\triangleq$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ |
|---|---|---|---|---|
| | $x_1$ | 0.3 | 0.3 | 0.2 |
| | $x_2$ | 0.5 | 0.7 | 1 |
| | $x_3$ | 0.7 | 0.3 | 1 |

## 2.5. FAZI SREDNJA VREDNOST, FAZI VARIJANSA I FAZI KOVARIJANSA

Neka je $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \boldsymbol{\mathcal{F}}$ fazi broj pri čemu je $[\mathbf{A}]^\gamma = [a_1(\gamma), a_2(\gamma)], [\mathbf{B}]^\gamma = [b_1(\gamma), b_2(\gamma)]\gamma \in [0,1]$. Slede definicije fazi srednje vrednosti, fazi varijanse, fazi standardne devijacije fazi broja **A,** kao i fazi kovarijansa između fazi brojeva **A** i **B.** Izlaganje u ovom poglavlju zasnovano je na [5].

***Definicija 2.30.*** *[5] Fazi srednja vrednost fazi broja* **A** *se definiše kao:*

$$E(\mathbf{A}) = \int_0^1 \gamma(a_1(\gamma) + a_2(\gamma))\, d\gamma = \frac{\int_0^1 \gamma \cdot \frac{a_1(\gamma) + a_2(\gamma)}{2} d\gamma}{\int_0^1 \gamma d\gamma},$$

*tj.* $E(\mathbf{A})$ *je prosek aritmetičke sredine svih skupova* $\gamma -$ *nivoa tj. aritmetička sredina od* $a_1(\gamma)$ i $a_2(\gamma)$ *je upravo* $\gamma$.

***Definicija 2.31.*** *[5] Neka je* **A** *fazi broj,* $[\mathbf{A}]^\gamma = [a_1(\gamma), a_2(\gamma)], \gamma \in [0,1]$. *Funkicja* $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ *se zove težinska funkcija (eng. weighting function) ako je* $f$ *nenegativna, monotono rastuća i zadovoljava sledeći uslov:*

$$\int_0^1 f(\gamma) = 1.$$

Sada se može dati definicija $f$- težinske fazi srednje vrednosti.

***Definicija 2.32.*** *[5]* $f$ *– težinska fazi srednja vrednost fazi broja* **A** *se definiše kao:*

$$E_f(A) = \int_0^1 \frac{a_1(\gamma) + a_2(\gamma)}{2} f(\gamma) d\gamma.$$

Ovako definisana $f$- težinska fazi srednja vrednost se može posmatrati kao generalizacija prethodno definisane fazi srednje vrednosti (Definicija 2.32.). Ako se stavi da je $f(\gamma) = 2\gamma, \gamma \in [0,1]$, dobija se:

$$E_f(A) = \int_0^1 \frac{a_1(\gamma) + a_2(\gamma)}{2} 2\gamma d\gamma = \int_0^1 [a_1(\gamma) + a_2(\gamma)]\gamma d\gamma = E(A).$$

***Definicija 2.33.*** *[5] Fazi varijansa fazi broja* **A** *se definiše kao:*

$$\sigma^2(\mathbf{A}) = \int_0^1 \gamma\left(\left[\frac{a_1(\gamma) + a_2(\gamma)}{2} - a_1(\gamma)\right]^2 + \left[\frac{a_1(\gamma) + a_2(\gamma)}{2} - a_2(\gamma)\right]^2\right) d\gamma$$

*odnosno:*

$$\sigma^2(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}\int_0^1 \gamma\big(a_2(\gamma) - a_1(\gamma)\big)^2 d\gamma$$

*tj. fazi varijansa fazi broja* **A** *je definisana kao očekivana vrednost kvadrata odstupanja između aritmetičke sredine i krajnjih tačaka nivoa.*

***Definicija 2.34.*** *[5] Standardna devijacija fazi broja* **A** *definiše se kao:*

$$\sigma(\mathbf{A}) = \sqrt{\sigma^2(\mathbf{A})}$$

***Definicija 2.35.*** *[5] Fazi kovarijansa između fazi brojeva* **A** *i* **B** *je definisana kao:*

$$Cov(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \frac{1}{2}\int_0^1 \gamma\big(a_2(\gamma) - a_1(\gamma)\big)\big(b_2(\gamma) - b_1(\gamma)\big)\, d\gamma$$

Može se uočiti da ako je $\mathbf{A} = (a, \alpha, \beta)$ trougaoni fazi broj sa centrom $a$, levom i desnom širinom $\alpha$ i $\beta$, respektivno, tada je $\gamma -$ nivo od **A:**

$$[\mathbf{A}]^\gamma = [a - (1-\gamma)\alpha, a + (1-\gamma)\beta], \qquad \forall\gamma \in [0,1],$$

i važi da je fazi srednja vrednost trougaonog fazi broja **A** jednaka:

$$E(\mathbf{A}) = \int_0^1 \gamma[a - (1-\gamma)\alpha + a + (1-\gamma)\beta]\, d\gamma = a + \frac{\beta - \alpha}{6},$$

a fazi varijansa:

$$\sigma^2(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}\int_0^1 \gamma(a + \beta(1-\gamma) - (a - \alpha(1-\gamma)))^2 d\gamma = \frac{(\alpha+\beta)^2}{24}.$$

Fazi kovarijansa dva trougaona fazi broja $[\mathbf{A}]^\gamma = [a_1(\gamma), a_2(\gamma)], [\mathbf{B}]^\gamma = [b_1(\gamma), b_2(\gamma)], \gamma \in [0,1]$, pri čemu je $[\mathbf{B}]^\gamma = [b - (1-\gamma)\alpha_B, b + (1-\gamma)\beta_B]$, jeste:

$$\begin{aligned}
Cov(\mathbf{A},\mathbf{B}) &= \frac{1}{2}\int_0^1 \gamma\big(a_2(\gamma) - a_1(\gamma)\big)\big(b_2(\gamma) - b_1(\gamma)\big)\, d\gamma \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \gamma(a + (1-\gamma)\beta_A - a + (1-\gamma)\alpha_A)(b + (1-\gamma)\beta_B - b + (1-\gamma)\alpha_B)\, d\gamma \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \gamma(\beta_A - \beta_A\gamma + \alpha_A - \alpha_A\gamma)(\beta_B - \beta_B\gamma + \alpha_B - \alpha_B\gamma)\, d\gamma \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \gamma\big(\alpha_A + \beta_A - \gamma(\alpha_A + \beta_A)\big)\big(\alpha_B + \beta_B - \gamma(\alpha_B + \beta_B)\big)\, d\gamma \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \gamma(\alpha_A + \beta_A)(1-\gamma)\,(\alpha_B + \beta_B)(1-\gamma) d\gamma \\
&= \frac{1}{2}(\alpha_A + \beta_A)(\alpha_B + \beta_B)\int_0^1 \gamma(1-\gamma)^2\, d\gamma \\
&= \frac{1}{2}(\alpha_A + \beta_A)(\alpha_B + \beta_B)\int_0^1 \gamma(1 - 2\gamma + \gamma^2)\, d\gamma \\
&= \frac{1}{2}(\alpha_A + \beta_A)(\alpha_B + \beta_B)\int_0^1 (\gamma - 2\gamma^2 + \gamma^3)\, d\gamma
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}(\alpha_A+\beta_A)(\alpha_B+\beta_B)\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}(\alpha_A+\beta_A)(\alpha_B+\beta_B)\frac{1}{12}=\frac{(\alpha_A+\beta_A)\cdot(\alpha_B+\beta_B)}{24}.$$

Takođe, ako je $\mathbf{A}=(a,b,\alpha,\beta)$ trapezoidni fazi broj tada je $\gamma-$ nivo od **A:**

$$[\mathbf{A}]^{\gamma}=[a-(1-\gamma)\alpha, b+(1-\gamma)\beta], \qquad \forall\gamma\in[0,1],$$

i važi da je fazi srednja vrednost trapezoidnog fazi broja **A** jednaka:

$$E(\mathbf{A})=\int_0^1\gamma[a-(1-\gamma)\alpha+b+(1-\gamma)\beta]\,d\gamma=\frac{a+b}{2}+\frac{\beta-\alpha}{6},$$

a fazi varijansa:

$$\sigma^2(\mathbf{A})=\frac{(b-a)^2}{4}+\frac{(b-a)(\alpha+\beta)}{6}+\frac{(\alpha+\beta)^2}{24}.$$

Slede originalani primeri fazi srednje vrednosti, fazi varijanse, fazi standardne devijacije, i fazi kovarijanse.

***Primer 2.8.*** Neka je dat trougaoni fazi broj $\mathbf{A}=(4,2,5)$. Odredimo njegovu srednju vrednost, varijansu, standardnu devijaciju.

$$E(\mathbf{A})=4+\frac{5-2}{6}=4+0{,}5=4{,}5,$$

$$\sigma^2(\mathbf{A})=\frac{(2+5)^2}{24}=\frac{49}{24}=2{,}04.$$

$$\sigma(\mathbf{A})=\sqrt{\sigma^2(\mathbf{A})}=\sqrt{2{,}04}=1{,}43.$$

***Primer 2.9.*** Neka su dati trougaoni fazi brojevi $\mathbf{A}=(4,1,5)$ i $\mathbf{B}=(5,2,6)$. Tada je fazi kovarijansa između ova dva broja dobija na sledeći način:

| | |
|---|---|
| $a=4$ | $b=5$ |
| $\alpha_A=1$ | $\alpha_B=2$ |
| $\beta_A=5$ | $\beta_B=6$ |

$$Cov(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \frac{(1+5)\cdot(2+6)}{24} = \frac{6\cdot 8}{24} = \frac{48}{24} = 2$$

# 3. MODELI ZA VREDNOVANJE INVESTICIJA

U ovom poglavlja dat je pregled različitih modela vrednovanja investicija, počevši od nefleksibilne metode (neto sadašnja vrednost), do fleksibilnih metoda ($ROV$, $FROV$, binomno stablo). Izlaganje u ovom poglavlju zasnovano je na [1,4,5,7,8,14,15,19,20,23,24].

## 3.1. NETO SADAŠNJA VREDNOST

Vrednovanje je proces kvantifikacije cele imovine ili investicionog projekta. Svrhe i razlozi vrednovanja imovine su raznoliki. Tipični primeri uključuju finansijske izveštaje, kapitalna budžetiranja, strateška planiranja i upravljanje rizicima. Postoje brojne tradicionalne metode za analizu investicionih odluka. Među njima, napopularniji metod je neto sadašnja vrednost ($NPV$[4]) [19].

Neto sadašnja vrednost predstavlja razliku između sadašnje vrednosti neto priliva tj. očekivanih efekata investicije i sadašnje vrednosti odliva gotovine tj. inicijalnog kapitalnog izdatka [23].

Neto sadašnju vrednost računamo kao:

$$NPV = V - I,$$

gde je:

[4] Net present value

$V$ −diskontovani efekti svedeni na sadašnju vrednost,

$I$ − vrednost investicionih ulaganja,

pri čemu godišnje neto prilive svedene na sadašnju vrednost računamo kao:

$$V = cf_0 + \frac{cf_1}{(1+r)^1} + \frac{cf_2}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{cf_n}{(1+r)^n} = \sum_{i=0}^{n} \frac{cf_i}{(1+r)^i},$$

gde $cf_i, i = 1,2, \dots n$, označava neto priliv u $i$ −toj godini, a $r$ predstavlja godišnju kamatnu stopu.

Sada formulu za $NPV$ možemo zapisati na sledeći način:

$$NPV = \sum_{i=0}^{n} \frac{cf_i}{(1+r)^i} - I.$$

Dakle, u osnovi neto sadašnje vrednosti jeste da pokaže sposobnost projekta da vrati sredstva uložena u njega. Neki investicioni projekat će biti prihvaćen ukoliko je neto sadašnja vrednost projekta pozitivna a neće biti prihvaćen ukoliko je neto sadašnja vrednost projekta negativna. Sledi primer izračunavanja neto sadašnje vrednosti.

***Primer 3.1.***

Koristeći metodu $NPV$ oceniti da li je ekonomski prihvatljivo realizovati datu investicionu mogućnost ako je planirano ulaganje od 120.000 dinara, pri čemu je kamatna stopa 12%, i ako imamo godišnje neto prilive u periodima eksploatacije 4 godine: u prvoj godini 25.000 dinara, u drugoj 40.000, u trećoj 52.000 dinara i u četvrtoj godini 75.000.

*Rešenje:* Znamo da je vrednost investicionog ulaganja 120.000 dinara, odnosno $I = 120.000$ dinara. Zatim računamo diskontovanu vrednost neto priliva:

$$V = \frac{25000}{(1+0{,}12)^1} + \frac{40000}{(1+0{,}12)^2} + \frac{52000}{(1+0{,}12)^3} + \frac{75000}{(1+0{,}12)^4} = 138.885{,}6 \ din.$$

$$NPV = V - I = 138.885{,}6 - 120.000 = 18.885{,}6 \ din.$$

Zaključak: Jeste ekonomski prihvatljivo realizovati datu investicionu mogućnost jer je $NPV > 0$.

Suština neto sadašnje vrednosti jeste da se obračunava na osnovu diskontovanog novčanog toka ($DFC$[5]). Diskontovani novčani tok u ocenu valjanosti investicije uključuje faktor vremena, tako što poštuje činjenicu da vreme ima svoju finansijsku dimenziju, tj. ono bukvalno poštuje poslovnu izreku „Vreme je novac.“.

U industrijskoj primeni $NPV$, postavljaju se pitanja u vezi sa tim kako novčani tokovi i odgovarajuća diskontna stopa trebaju biti determinisani i kako rizik treba obračunati. Kritičari $NPV$ pružaju različite tačke gledišta zašto je standardan metod $NPV$ deficitaran i daju različite teze kako bi to pokazali. Neki su predložili upoterbu simulacija za poboljšanje statističkog $NPV$, dok drugi predlažu uključivanje stabla odlučivanja. Kao što je istaknuto od strane mnogih koji su pisali o ovoj temi, postoje tri karakteristike investicija, koje, ako su prisutne zajedno, čine korišćenje standardne $NPV$ metode neadekvatnom za dobijanje prave vrednosti investicije. Te karakteristike uključuju sledeće:

1. nepovratni troškovi – većina investicija imaju nepovratne troškove, dakle donošenje odluka je nepovratno,
2. buduća neizvesnost pokretačke vrednosti – većina investicija su podložni ekonomskim i tehničkim nesigurnostima, pri čemu informacije dolaze postepeno kako bi rešile neizvesnosti,
3. ne nestaju investicione mogućnosti – prilike za ulaganje ne nestaju uvek ako odluka nije odmah doneta tj. odluke se mogu odložiti, pa stoga investiciono pitanje nije samo „Ukoliko se investira...?“ već i „Kada treba investirati?“.

Kada postoji neizvesnost, nepovratnost a pri tome šanse za investiranje ne nestanu odmah tada se pojavljuju dve situacije:

1. može biti optimalno čekati novu informaciju pre donošenja investicionih odluka,
2. fleksibilnost može biti dostupna (pri dolasku novih informacija) kako bi promenila prethodno izabranu strategiju.

Drugim rečima, u prisustvu nepovratnih troškova, neizvesnih ekonomskih i tehničkih faktora kao i šansi za čekanje, racionalni investitori reaguju strateški do postepenog dolaska informacija, u smislu investicionog čekanja (ovakav pristup se još zove

[5] Discounted cash flow

„čekaj i vidi“) ili revizije prethodno izabrane strategije. Međutim, pretpostavka standardne $NPV$ metode je da se investiciona odluka donosi u trenutku analize (ovakav pristup se još naziva „ovde i sada“) čime se ne ostavlja mesta za buduću fleksibilnost donosioca odluka jer se neizvesnosti u budućnosti rešavaju. Ovo predstavlja suštinsku manu $NPV$ metode. Budući da ovaj problem nije pokriven klasičnom metodologijom, sve više donosioca odluke se okreće konceptu *realnih opcija*. Korišćena literatura je [1,19,20,23].

## 3.2. VREDNOVANJE REALNIH OPCIJA

U poglavlju dat je teorijski i praktični osvrt na model vrednovanja realnih opcija na koje se nadovezuje prikaz istog modela sa fazi stanovišta. Izlaganje ovog dela rada oslanja se na [4,5,8,14,15,19,21,22,24].

### 3.2.1. Teorijski pristup

Realne opcije su, u kontekstu ovog razmatranja , bazirane na istom principu kao i finansijske opcije. Realne opcije prvi put se pojavljuju 1977. godine, a uveo ih je Stewart C. Myers da bi primenio teoriju finansijskih opcija kod odlučivanja kompanije o investicijama. Drugim rečima, preduzeće utvrđuje opcije kod početnog ulaganja, a ukoliko ekonomski parametri projekta budu povoljni preduzeće kasnije može da realizuje opciju. U suprotnom dolazi do napuštanja opcije, a to znači da preduzeće neće investirati. Važno je napomenuti da mnoge svetske kompanije poput Boinga primenjuju teoriju realnih opcija za vrednovanje investicionih odluka.

Kao što je napomenuto, $NPV$ nema fleksibilnost pri donošenju odluka. Drugim rečima, taj metod svaku investiciju posmatra kao šansu „sad ili nikad“. Međutim, realne opcije nemaju takav odnos prema investicijama. Investitor kroz realne opcije može da sačeka određeno vreme, u pogledu donošenja odluke, sve dok dodatna korisna informacija ne potvrdi ili ne opovrgne investicionu odluku.

Svaka opcija podrazumeva tri vrste učesnika:

- prodavca opcije,
- kupca opcije i
- brokera.

Prodavac opcije dobija cenu ili premiju zato što kupcu ustupa opciju, odnosno daje mu pravo da kupi ili proda osnovno sredstvo. Kupac opcije plaća prodavcu cenu opcije kako bi stekao pravo da zahteva prodaju ili kupovinu osnovnog sredstva. Broker nastoji da pronađe kupce i prodavca opcije i omogući zaključenje ugovora, a kao naknadu za to ima posredničku proviziju.

Vrste realnih opcija su:

- opcije za odlaganje projekta,
- opcije za proširenje projekta i
- opcije za napuštanje projekta.

***Opcije za odlaganje projekta (***eng. ***wait) –*** za neke investicione projekte postoji opcija čekanja, što implicira da se projekat ne mora realizovati odmah. Ukoliko se kompanija odluči na ovakvu vrstu realne opcije, ona čekanjem može dobiti nove informacije o stanju na tržištu, cenama, troškovima pa samim tim ima veće šanse za uspeh. Ovakav tip opcije predstavlja američku kupovnu opciju na vrednost projekta sa cenom izvršenja.

***Opcije za proširenje projekta (***eng. ***expand) -*** ova vrsta realne opcije se koristi kada kompanija realizuje određene projekte kako bi u budućnosti mogla da ulaže u druge projekte ili da uđe na nova tržišta. Kompanija koristi opciju za proširenje projekta onda kada je sadašnja vrednost očekivanih novčanih tokova viša od troškova ulaska na tržište ili realizacije projekta. Opcija za proširenje obima projekta predstavlja američku call opciju, dok opcija za smanjenje obima projekta (prodajući deo projekta) predstavlja američku put opciju.

***Opcija za napuštanje projekta (***eng. ***abandon) –*** ovakva vrsta realnih opcija se koristi u slučaju kada novčani tokovi od realizacije projekta nisu približno jednaki očekivanim. Opcije za napuštanje projekta za fiksnu cenu je američka put opcija.

Realna opcija predstavlja pravo, ali ne i obavezu na akciju odlaganja, proširivanja, ugovaranja ili otkazivanja projekta za unapred utvrđenu cenu, za unapred određen vremenski period, odnosno životni vek opcije. Imati realnu opciju znači imati mogućnost donošenja odluke za ili protiv (tokom određenog perioda) investicionog ulaganja bez obavezivanja unapred. Ona predstavlja određenu vrstu fleksibilnosti koja je ugrađena u realnu aktivu ili investicioni projekat. Svaka opcija ima vrednost koja se računa tako što se od tekuće cene haritje odbije izvršna cena.

Kao što smo napomenuli, realne opcije su bazirane na sličnom principu kao i finansijske opcije, pa stoga postoji određena korespodencija između njih što je predstavljeno u Tabeli 3.1. Model realnih opcija investiciju posmatra kao opciju na novčani tok.

| FINANSIJSKE OPCIJE | | REALNE OPCIJE |
|---|---|---|
| Call opcija | → | Realna opcija |
| Sadašnja vrednost cene akcije | → | Sadašnja vrednost očekivanih novčanih tokova |
| Cena izvršenja | → | Sadašnja vrednost investicionih troškova |
| Datum dospeća | → | Investicioni period |
| Bezrizična kamatna stopa | → | Bezrizična kamatna stopa |
| Volatilnost cene akcije | → | Volatilnost očekivanog novčanog toka |
| Dividende | → | Mogćnost troškova tokom investicionog perioda |

***Tabela 3.1.*** *Korespodencija između finansijskih i realnih opcija*

Modeli za procenu vrednosti realnih opcija uključuju Black – Scholes-ov[6] model, binomni model, model Monte Carlo simulacija itd. U ovom radu baziraćemo se na Black – Scholes – ov i binomni model koji predstavljaju neprekidni i diskretni model, respektivno. Izlaganje u ovom poglavlju se oslanja na [4,5,19,21,22].

[6] Fischer Sheffey Black (1938. – 1995.) i Myron Samuel Scholes su američki stručnjaci za finansijsku ekonomiju. Dobitnici su Nobelove nagrade 1997. godine za ekonomiju.

### 3.2.2. Numerički pristup

Podsetimo se činjenica i formulacije Black – Scholes modela. Prodaja ili kupovina osnovnog sredstva za prethodno definisanu cenu naziva se izvršenje opcije. Opcija će se izvršiti samo ako je vrednost osnovnog sredstva veća od cene izvršenja u slučaju call opcije (pravo da se kupi osnovno sredstvno), odnosno samo ako je vrednost osnovnog sredstva manja od cene izvršenja u slučaju put opcije (pravo da se proda osnovno sredstvo). Za riziko neutralne investitore Black – Scholes formula za cenu call opcije je [4]:

$$C_0 = S_0 N(d_1) - Xe^{-rT} N(d_2).$$

U nastavku predstavljamo proširenje Black -Scholes – ovog modela (proširili smo sa aktivama koje isplaćuju dividende), kao metode za vrednovanje realnih opcija.

***Vrednost realne opcije*** se izračunava na sledeći način [5]:

$$ROV = S_0 e^{-\delta T} N(d_1) - Xe^{-rT} N(d_2)$$

gde su

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(r - \delta + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Dakle, vrednost realne opcije u predstavljenom modelu možemo posmatrati kao funkciju sledećih promenljivih:

- $S_0$ – sadašnja vrednost očekivanih novčanih tokova,
- $X$ – predstavlja nominalnu vrednost fiksnih troškova,
- $r$ – bezrizična kamatna stopa,
- $T$ – vreme do dospeća opcije (izraženo u godinama),
- $\sigma$ – rizik očekivanih novčanih tokova,
- $\delta$ – izgubljena vrednost tokom trajanja opcije,
- $N(d)$ – verovatnoća da slučajna promenljiva koja ima standardnu normalnu raspodelu bude manja od $d$.

Štaviše, $N(d)$ predstavlja funkciju raspodele normalne slučajne promenljive (funkcija raspodele standardizovane slučajne promenljive):

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx.$$

***Primer 3.2.*** *[4]*

Kompanija $A$ koja se bavi proizvodnjom nafte ima mogućnost da dobije petogodišnju licencu za naftne platforme. Kada se platforme razviju, očekuje se da će dati prinos od 50 miliona barela nafte. Trenutna cena barela nafte iz oblasti gde posluje Kompanija $A$ je \$10, a sadašnja vrednost troškova razvoja je \$600 miliona dolara. Tada je $NPV$ projekta:

$$50\, miliona\ \times\ \$10 - \$600\, miliona = -\$100\, miliona.$$

Suočena sa ovakvom situacijom, Kompanija $A$ bi očigledno propustila priliku za investiranje. Međutim, pitamo se šta bi pristup vrednovanju realnih opcija učinio u istom slučaju. Za početak, ovakav pristup vrednovanju bi prepoznao važnost neizvesnosti i nesigurnosti. Postoje dva glavna izvora nesigurnosti u poglednu vrednosti platforme: količina nafte i cena nafte. Pretpostavimo, primera radi, da ova dva izvora nesigurnosti zajednički rezultiraju standardnom devijacijom od 30%. Držanje opcije takođe obavezuje imaoca da servisira godišnje fiksne troškove održavanja aktive i neka to bude \$15 miliona. Ovo predstavlja isplatu u vidu dividendi u iznostu od 3 procenta $\left(\text{tj. } {}^{15}/_{500}\right)$ vrednosti imovine. Znamo da period trajanja opcije $T$ iznosi 5 godina i da je bezrizična kamatna stopa 5%. Imamo sve informacije nepohodne za procenu vrednosti realne opcije, pa je:

$$\begin{aligned} ROV &= 500 \cdot e^{-0{,}03\cdot 5} \cdot 0{,}58 - 600 \cdot e^{-0{,}05\cdot 5} \cdot 0{,}32 = \$251\, milion - \$151\, milion \\ &= 100\, miliona. \end{aligned}$$

Suočavajući se sa odlukom koja se odlaže, nameće se glavno pitanje na koje bi kompanija trebala da odgovori:

*Koliko dugo (izraženo u $T$ vremenskih perioda) treba odlagati odluku, ako se odluka uopšte i donese?* Iz ideje vrednovanja realnih opcija možemo uočiti pravilo za donošenje optimalnih odluka (strategija).

***PRAVILO ODLUČIVANJA:*** *[5] Pretpostavimo da imamo priliku za odloženu odluku P, sa duzinom od L godina sa očekivanim novčanim tokovima:*

$$(cf_0, cf_1, \dots, cf_L)$$

*gde je $cf_i$ gotovinski priliv koji kompanija očekuje da proizvede u i - toj godini, pri čemu je $i = 0,1, \dots, L$. Kada je maksimalno vreme odlaganja $T$, donošenje odluke o investiciji (drugim rečima izvršiti opciju) je u vremu $t'$, $0 \le t' \le T$, za koju je opcija $(ROV_{t'})$ pozitivna i dostiže svoju maksimalnu vrednost:*

$$ROV_{t'} = \max_{t=0,1,\dots,T} ROV_t = \max_{t=0,1,\dots,T} \{V_t e^{-\delta t} N(d_1) - X e^{-rt} N(d_2)\}.$$

Primetimo da se u formuli iznad pojavljuje $V_t$. Ova veličina se definiše na sledeći način:

$$V_t = PV(cf_0, cf_1, \dots, cf_L, \beta_P) - PV(cf_0, cf_1, \dots, cf_{t-1}, \beta_P) = PV(\, cf_t, \dots, cf_L, \beta_P)$$

i predstavlja sadašnju vrednost agregatnih novčanih tokova koja je proizvedena odlukom koju odlažemo $t$ godina pre nego što je prihvatimo. Stoga imamo da je:

$$V_t = cf_0 + \sum_{j=1}^{L} \frac{cf_j}{(1+\beta_P)^j} - cf_0 - \sum_{j=1}^{t} \frac{cf_j}{(1+\beta_P)^j} = \sum_{j=t}^{L} \frac{cf_j}{(1+\beta_P)^j}.$$

a $\beta_P$ predstavlja rizik (ovaj rizik je prilagođen diskontovanoj stopi koja se odnosi na odluku).

Naravno, pravilo odlučivanja se menja svakog puta kada dobijemo ili saznamo novu informaciju tokom perioda odlaganja kako bi videli optimalnu investicionu strategiju koju menjamo u kontekstu novih informacija.

Očigledno, ukoliko donesemo odluku odmah, bez čekanja, tada dobijamo:

$$V_0 = PV(cf_0, cf_1, \dots, cf_L, \beta_P) = \sum_{j=0}^{L} \frac{cf_j}{(1+\beta_P)^j}$$

a kako važi da je:

$$\lim_{T\to 0} d_1 = \lim_{T\to 0} d_2 = +\infty, \qquad \lim_{T\to 0} N(d_1) = \lim_{T\to 0} N(d_2) = 1,$$

sledi:

$$ROV_0 = V_0 - X = \sum_{j=0}^{L} \frac{cf_j}{(1+\beta_P)^j} - X.$$

Vidimo da, ukoliko donesemo odmah odluku, metod vrednovanja reale opcije se poistovećuje sa $NPV$ metodom. Dakle, pravilo odlučivanja takođe uključuje neto sadašnju vrednost pretpostavljenih novčanih tokova.

Realne opcije su korišćene kao strategijski intrumenti, gde su stepeni slobode nekih akcija ograničeni od strane mogućnosti kompanije. Posebno je ovo slučaj kada su posledice odluke značajne i imaju uticaj na tržište i poziciju kompanije u odnosu na konkurente. U principu, realne opcije treba poželjno posmatrati u širem smislu, gde rukovodstvo kompanije ima stepen slobode da promeni, pa čak i poništi, mogućnosti za ponovno investiranje.

# 3.3. VREDNOVANJE FAZI REALNIH OPCIJA

Generalno govoreći, sadašnja vrednost očekivanih novčanih tokova se ne može proceniti jedinstvenom vrednošću. U ovom delu ćemo pretpostaviti da očekivani novčani tokovi odluke „zatvoriti – ne zatvoriti" ne mogu biti okarakterisani sa jednim brojem (što treba da bude u slučaju donošenja veoma, veoma teških odluka). Štaviše, iskustva na projektima u velikim investicijama pokazuju da rukovodstva kompanja mogu da procene sadašnju vrednost očekivanih novčanih tokova pomoću fazi logike, odnosno koristeći trapezoidne fazi brojeve. Pomoću trapezoidnih fazi brojeva možemo proceniti fazi sadašnju vrednost očekivanih novčanih tokova projekta, koja je oblika [4]:

$$\widetilde{S_0} = (s_1, s_2, \alpha, \beta),$$

tj. najčešće moguće sadašnje vrednosti očekivanih novčanih tokova se nalaze u intervalu $[s_1, s_2]$, što predstavlja jezgro trapezoidnog fazi broja $\widetilde{S_0}$, a $(s_2 + \ \beta)$ je potencijal rasta a $(s_1 - \alpha)$ je potencijal pada sadašnje vrednosti očekivanih novčanih tokova. Interval $(s_1 - \ \alpha, s_2 + \ \beta)$ predstavlja nosač predstavljenog trapezoidnog fazi broja.

Slično sadašnjoj vrednosti očekivanih novčanih tokova i očekivani troškovi se mogu proceniti pomoću trapezoidnh fazi brojeva na sledeći način:

$$\tilde{X} = (x_1, x_2, \alpha', \beta')$$

tj. najčešće moguće vrednosti očekivanih troškova leže u intervalu $[x_1, x_2]$, što predstavlja jezgro trapezoidnog fazi broja $\tilde{X}$, a $(x_2 + \beta')$ je potencijal rasta i $(x_1 - \alpha')$ je potencijal pada vrednosti očekivanih troškova. Interval $(x_1 - \alpha', x_2 + \beta')$ predstavlja nosač predstavljenog trapeziodnog fazi broja.

Moramo napomenuti da se raspodele mogućnosti očekivanih troškova i sadašnje vrednosti očekivanih novčanih tokova mogu predstaviti nelinearnim funkcijama pripadnosti (npr. Gausovom, S funkcijom, L funkcijom, Gama funkcijom itd.). Međutim, matematički gledano, lakše je koristiti linearnu funkciju pripadnosti, i što je važnije, menadžeri kompanija preferiraju trapezoidne fazi brojeve u odnosu na Gausov fazi broj kada su u pitanju procene nesigurnosti u vezi sa budućim novčanim prilivima i odlivima.

Bazirano na prethodnom poglavlju (gde smo razmatrali vrednovanje realnih opcija) i na razmatranju koje smo sproveli u ovom poglavlju, dajemo sledeću formulu za izračunavanje ***vrednosti fazi realnih opcija*** ($FROV$[7])[5]:

$$FROV = \widetilde{S_0} e^{-\delta T} N(d_1) - \tilde{X} e^{-rT} N(d_2),$$

gde je:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{E\left(\widetilde{\mathrm{S_0}}\right)}{E\left(\tilde{\mathrm{X}}\right)}\right) + \left(\mathrm{r} - \delta + \frac{\sigma^2}{2}\right)\mathrm{T}}{\sigma\sqrt{T}},$$

[7] Fuzzy real option value

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Dakle, vrednost fazi realne opcije u predstavljenom modelu možemo posmatrati kao funkciju sledećih promenljivih:

- $E(\widetilde{S_0})$ – fazi srednja vrednost sadašnje vrednosti očekivanih novčanih tokova,
- $E(\widetilde{X})$ – fazi srednja vrednost očekivanih troškova.
- $\sigma := \sigma(\widetilde{S_0})$ – fazi varijansa sadašnje vrednosti očekivanih novčanih tokova,

pri čemu ostale promenljive imaju isto značenje kao i kod $ROV$ modela.

Koristeći operacije nad trapezoidnim fazi brojevima dobijamo sledeći oblik za $FROV$:

$$FROV = (s_1, s_2, \alpha, \beta)e^{-\delta T}N(d_1) - (x_1, x_2, \alpha', \beta')e^{-rT}N(d_2)$$

$$= (s_1 e^{-\delta T}N(d_1) - x_1 e^{-rT}N(d_2), s_2 e^{-\delta T}N(d_1) - x_2 e^{-rT}N(d_2),$$

$$\alpha e^{-\delta T}N(d_1) + \beta' e^{-rT}N(d_2), \beta e^{-\delta T}N(d_1) + \alpha' e^{-rT}N(d_2)).$$

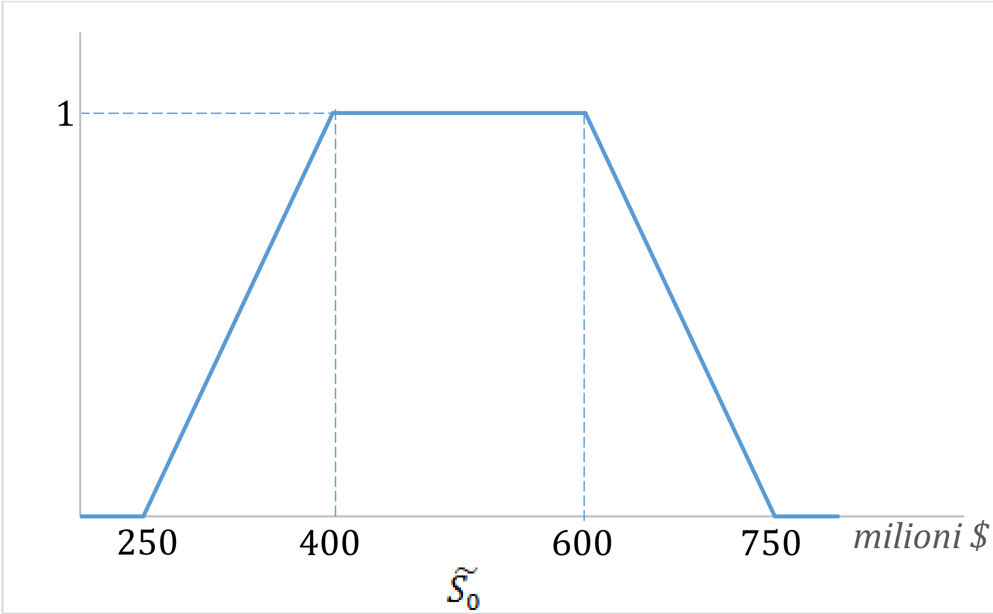
*Napomena*: Ne smemo koristiti izraz $E\left(\frac{\widetilde{S_0}}{\widetilde{X}}\right)$ pri računanju $d_1$, jer $\frac{\widetilde{S_0}}{\widetilde{X}}$ može da ne bude fazi broj. Takođe, vrednost fazi realne $FROV$ će takođe biti fazi broj s obzirom da predstavlja razliku dva fazi broja.

***Primer 3.3.*** *[4]*

Želimo da nađemo vrednost fazi realne opcije pod sledećim pretpostavkama:

$$\widetilde{S_0} = (\$400\ miliona, \$600\ miliona, \$150\ miliona, \$150\ miliona)$$

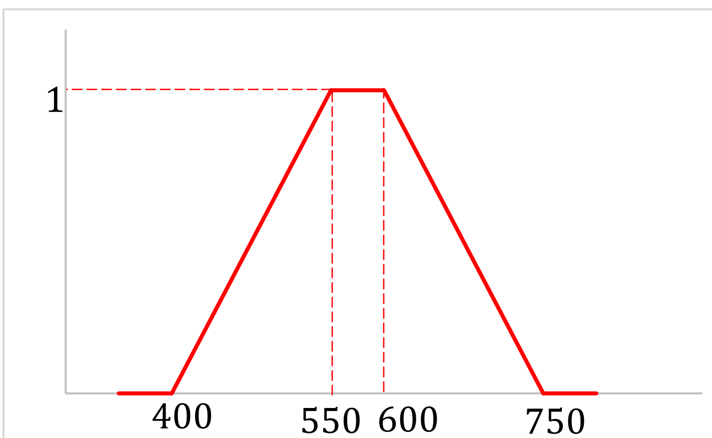
Predstavimo raspodelu mogućnosti sadašnje vrednost očekivanih novčanih tokova.




Dalje, pretpostavimo da je $r = 5\%$ godišnje, $T = 5$ godina, $\delta = 0{,}03$ po godini i da je

$$\tilde{X} = (\$550\ miliona, \$600\ miliona, \$150\ miliona, \$150\ miliona).$$

Predstavimo sada raspodelu mogućnosti očekivanih troškova.




Prvo računamo:

$$\sigma(\widetilde{S_0}) = \sqrt{\frac{(s_2 - s_1)^2}{4} + \frac{(s_2 - s_1)(\alpha + \beta)}{6} + \frac{(\alpha + \beta)^2}{24}} = \$154.11\ miliona,$$

tj. $\sigma(\widetilde{S_0}) = 30.8\%$.

Dalje računamo:

$$E(\widetilde{S_0}) = \frac{s_1 + s_2}{2} + \frac{\beta - \alpha}{6} = \$500\,miliona,$$

$$E(\tilde{X}) = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{\beta' - \alpha'}{6} = \$600\,miliona.$$

Dalje,

$$N(d_1) = N\left(\frac{ln\left(\frac{600}{500}\right) + \left(0.05 - 0.03 + \frac{0.308^2}{2}\right) \cdot 5}{0{,}308 \cdot \sqrt{5}}\right) = 0.589,$$

$$N(d_2) = 0.321.$$

Iz formule za dobijanje vrednosti fazi realne opcije dobijamo:

$$FROV = (\$40.15\,miliona, \$166.58\,miliona, \$88.56\,miliona, \$88.56\,miliona).$$

Očekivana vrednost $FROV$ je $\$103.37\,miliona$, načešće moguće vrednosti se nalaze u intervalu $[\$40.15\,miliona, \$166.58\,miliona]$, potencijal pada tj. najveći mogući gubitak iznosi $\$48.41\,milion$ i potencijal rasta tj. najveći mogući dobitak iznosi $\$255.15\,miliona$.

Analogno sa modelom realnih opcija i kod modela vrednovanja fazi realnih opcija postoji *pravilo odlučivanja* koje pomaže kompaniji da donese pravu odluku. U nastavku ćemo prikazati pravilo odlučivanja kod $FROV$ modela.

***PRAVILO ODLUČIVANJA:*** *[5] Neka P predstavlja odluku koju je moguće odložiti sa dolazećim novčanim tokovima i troškovima koji se odlikuju trapezoidnim raspodelama mogućnosti (ovu raspodelu smo videli u razmatranju iznad). Pored toga, pretpostavimo da je maksimalno vreme odlaganja odluke T, a da je stopa prinosa na projektu* $\beta_P$. *U ovim okolnostima, kompanija će doneti odluku (tj. izvršiti realnu opciju) u trenutku* $t'$, $0 < t' < T$, *za koji je vrednost opcije,* $FROV_{t'}$, *pozitivna i dostiže maksimalnu vrednost. Dakle,*

$$FROV_{t'} = \max_{t=0,1,\dots,T} FROV_t = \max_{t=0,1,\dots,T} \left\{\widetilde{V}_t e^{-\delta t} N(d_1(t)) - \tilde{X} e^{-rt} N(d_2(t))\right\},$$

*gde su*

$$V_t = PV\left(\widetilde{cf_0}, \widetilde{cf_1}, \dots, \widetilde{cf_L}, \beta_P\right) - PV\left(\widetilde{cf_0}, \widetilde{cf_1}, \dots, \widetilde{cf_{t-1}}, \beta_P\right) = PV\left(\widetilde{cf_{t+1}}, \dots, \widetilde{cf_L}, \beta_P\right)$$
$$= cf_0 + \sum_{j=1}^{T} \frac{\widetilde{cf_j}}{(1+\beta_P)^j} - cf_0 - \sum_{j=1}^{t} \frac{\widetilde{cf_j}}{(1+\beta_P)^j} = \sum_{j=t}^{L} \frac{\widetilde{cf_j}}{(1+\beta_P)^j},$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{E(\widetilde{V}_t)}{E(\widetilde{X})}\right) + \left(r - \delta + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

*Sa E se označava operator fazi srednje vrednosti, pa $E(\tilde{X})$ označava fazi srednju vrednost očekivanih troškova, pri čemu:*

$$\sigma := \frac{\sigma(\widetilde{V}_t)}{E(\widetilde{V}_t)}$$

*predstavlja fazi varijansu ukupnih očekivanih novčanih tokova u odnosu na njihove srednje vrednosti (i stoga se predstavlja kao procentualna vrednost).*

Međutim, da bi našli maksimalni element iz skupa:

$$\{FROV_0, FROV_1, \dots, FROV_T\},$$

što nije ni malo lak zadatak zato što to uključuje rangiranje trapezoidnih fazi brojeva, uvodimo vrednosnu funkciju koja poredi vrednosti fazi realnih opcija trapezoidne forme $FROV_t = (c_t^L, c_t^R, \alpha_t, \beta_t)$:

$$v(FROV_t) = \frac{c_t^L + c_t^R}{2} + r_A \cdot \frac{\beta_t - \alpha_t}{6},$$

gde $r_A \geq 0$ predstavlja investitorov stepen averzije prema riziku. Ako je:

- $r_A = 1$, investitor je rizik neutralan (tada poredi fazi srednje vrednosti),
- $r_A > 1$, tada investitor ima naklon prema riziku (prihvata rizik) i
- $r_A < 1$, tada investitor ima averziju prema riziku (investitor je rizik odbojan).

## 3.4. BINOMNI MODEL VREDNOVANJA REALNIH OPCIJA

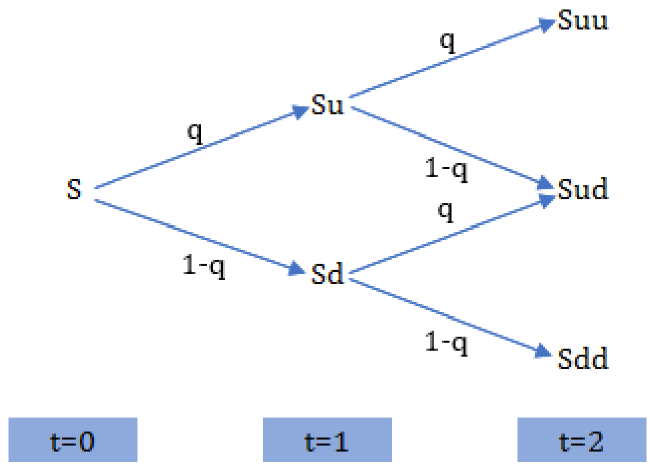
Binomni model predstavlja jedan od numeričkih metoda vrednovanja realnih opcija. Ovaj model nosi naziv još i $CRR$[8] model zbog naučnika koji su ga objavili 1979. godine (Cox – Ross - Rubinstein). Model objašnjava geometrijsko Braunovo kretanje u diskretnim vremenskim trenucima. Kako bismo pratili razvoj opcije na osnovnu imovinu uvodi se binomno stablo pri čemu se definiše broj koraka, odnosno broj vremenskih trenutaka. Korišćena literatura je [5,7].

Iz praktičnih razloga, i u radu sa rukovodstvom kompanije binomni model realnih opcija je lakši za korišćenje i objašnjavanje u smislu raspoloživih podataka. U našem radu, osnovno binomno „okruženje“ je predstavljeno pomoću dva binomna stabla:

1. binomno stablo osnovne imovine i
2. binomno stablo vrednosti opcije.

Na Slici 1. vrednosti $u$ i $d$ opisuju geometrijsko Braunovo kretanje novčanih tokova tokom vremena, gde $q$ predstavlja verovatnoću kretanja osnovne imovine na gore, a $1-q$ predstavlja verovatnoću kretanja osnovne imovine na dole. Vrednost osnovnog sredstva se razvija tokom vremena prema verovatnoćama vezanim za kretanje $q$ i $1-q$, i multiplikativnim faktorima $u$ i $d$ (Slika 3.1.).

[8] Cox Ross Rubinstein




***Slika 3.1.*** *Binomno stablo osnovnog sredstva za dva perioda*

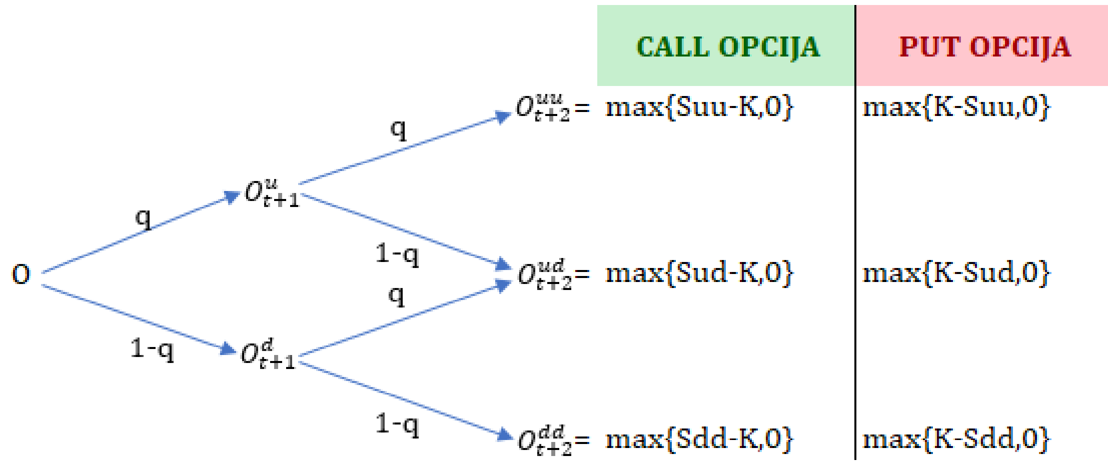
Koristeći model Cox – Ross – Rubinstein dobijamo sledeće formule:

| | |
|---|---|
| $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ | kretanje na gore |
| $d = \frac{1}{u} = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$ | kretanje na dole |
| $q = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$ | verovatnoća kretanja na gore |
| $p = 1 - q$ | verovatnoća kretanja na dole |

gde $\sigma$ predstavlja volatilnost cene osnovnog sredstva a $\Delta t$ predstavlja vremenski inkrement.

Binomno stablo vrednosti opcije se sastoji od čvorova (Slika 3.2.), pri čemu vrednosti čvorova u trenutku isteka opcije (svi krajnji čvorovi) imaju vrednost:

- $\max\{(S - K), 0\}$ ukoliko se radi o call opciji i
- $\max\{(K - S), 0\}$ ukoliko se radi o put opciji.




***Slika 3.2.*** *Binomno stablo vrednosti opcije za dva perioda*

Vrednost opcije preostalim čvorovima se računa pomoću vrednosti opcije iz naredna dva čvora, koja poističu iz čvora u kome računamo vrednost opcije. Pomoću $CRR$ modela dobijamo formulu prema kojoj računamo vrednost opcije u trenutku $t$:

$$O_t = e^{-r\Delta t}[q \cdot O_{t+1}^{u} + (1-q) \cdot O_{t+1}^{d}]$$

gde je:

- $O_t$ vrednost opcije u trenutku $t$,
- $O_{t+1}^{u}$ vrednost opcije u trenutku $t+1$, ako se cena osnovnog sredstva povećala za stopu $u$ od trenutka $t$,
- $O_{t+1}^{d}$ vrednost opcije u trenutku $t+1$, ako se cena osnovnog sredstva smanjila za stopu $d$ od trenutka $t$.

Primetimo da prethodna formula predstavlja diskontovanu vrednost od očekivane vrednosti opcije u trenutku $t+1$, odnosno diskontovanu vrednost od $E(O_{t+1})$.

Binomni model predstavlja diskretni model (vrednosti računamo u diskretnim vremenskim trenucima), i njegova tačnost raste sa porastom broja vremenskih intervala. Ukoliko broj perioda teži ka beskonačnosti tj. $\Delta t \to 0$ dobijmo neprekidni model tj. Black – Scholes model. Na kraju, povlastica koja se dobija korišćenjem fazi brojeva i modela fazi realnih opcija u modelu Black – Scholes i binomnom modelu je ta da možemo:

- predstavljati neizvesnost u procenama budućih troškova i novčanih tokova i
- uzeti u obzir ove faktore kada donosimo odluku da zatvorimo postrojenje sada ili da odložimo odluku za $t$ godina.

***Primer 3.4.*** Posmatrajmo akciju sa volatilnošću $\sigma = 0{,}2$. Trenutna cena akcije je 62\$. Data je evropska call opcija na ovu akciju koja dospeva za dva meseca i čija je strike cena $K =$ 60\$. Godišnja kamatna stopa je 10% i kapitališe se mesečno. Odredićemo cenu opcije koristeći binomni model.

| | | |
|---|---|---|
| $S = 62\$$ | $T = 2$ | $r = 10\%$ |
| $\sigma = 10\%$ | $K = 60\$$ | $\Delta t = \dfrac{1}{12}$ |

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = e^{0,2\sqrt{\frac{1}{12}}} = 1{,}05943$$

$$d = \frac{1}{u} = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = e^{-0,2\sqrt{\frac{1}{12}}} = 0{,}9439$$

$$q = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = \frac{e^{0,1\cdot\frac{1}{12}} - 0{,}9439}{1{,}05943 - 0{,}9439} = 0{,}558$$

$$uS = 1{,}05943 \cdot 62\$ = 65{,}68\$$$

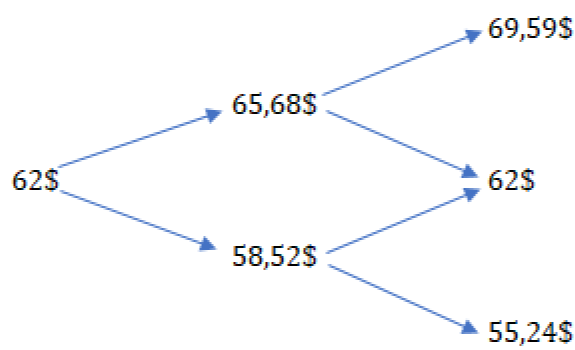
$$dS = 0{,}9439 \cdot 62\$ = 58{,}52\$$$

$$uuS = 1{,}05943 \cdot 65{,}68\$ = 69{,}59\$$$

$$udS = 1{,}05943 \cdot 0{,}9439 \cdot 62\$ = 62\$$$

$$ddS = 0{,}9439 \cdot 58{,}52\$ = 55{,}24\$$$

Sada naše binomno stablo za akciju izgleda ovako:




Sada računamo cenu evropske call opcije:

$$O_{t+2}^{uu} = max\{uuS - K, 0\} = max\{69{,}59\$ - 60\$, 0\} = 9{,}59\$$$

$$O_{t+2}^{ud} = max\{udS - K, 0\} = max\{62\$ - 60\$, 0\} = 2\$$$

$$O_{t+2}^{dd} = max\{ddS - K, 0\} = max\{55{,}24\$ - 60\$, 0\} = 0\$$$

$$O_{t+1}^{u} = e^{-r\Delta t}\left(q \cdot O_{t+2}^{uu} + (1-q) \cdot O_{t+2}^{ud}\right) = e^{-0{,}1\cdot\frac{1}{12}} \cdot (0{,}558 \cdot 9{,}59\$ + (1 - 0{,}558) \cdot 2\$) = 6{,}18\$$$

$$O_{t+1}^{d} = e^{-r\Delta t}\left(q \cdot O_{t+2}^{ud} + (1-q) \cdot O_{t+2}^{dd}\right) = e^{-0{,}1\cdot\frac{1}{12}} \cdot (0{,}558 \cdot 2\$ + (1 - 0{,}558) \cdot 0\$) = 1{,}11\$$$

Vrednost opcije je:

$$O = e^{-r\Delta t}\left(q \cdot O_{t+1}^{u} + (1-q) \cdot O_{t+1}^{d}\right) = e^{-0{,}1\cdot\frac{1}{12}} \cdot (0{,}558 \cdot 6{,}18\$ + (1 - 0{,}558) \cdot 1{,}11\$) = 3{,}91\$$$

# 4. FAZI ISPLATIVOST

U ovom poglavlju, dat je prikaz metod fazi isplativosti za vrednovanje realnih opcija. Na početku prikazana je motivacija za nastanak ovog modela, odnosno sa modelom iz kojeg je nastao metod fazi isplativosti. Nakon motivacije, imaćemo detaljan pregled metode fazi isplativosti, kao i način računanja vrednosti opcije. Kroz ovo poglavlje prožimaće se novi pojmovi: fazi srednja vrednost pozitivnog dela fazi broja i verodostojna srednja vrednost pozitivnog dela fazi broja. Ovi pojmovi nam služe za izračunavanje vrednosti realne opcije i detaljno su objašnjeni u ovom poglavlju. Na kraju videćemo praktičnu primenu ove metode, odnosno videćemo kako metoda radi na realnim primerima, uz datu originalnu korekciju primera. U ovom poglavlju korišćena je literatura [5,6,11,12,16,27].

## 4.1. MOTIVACIJA

Vrednovanje realnih opcija predstavlja tretiranje investicione mogućnosti i različitih tipova fleksibilnosti kao opcije pri čemu ih vrednuje modelima. Realne opcije su korisne kao model za strateško i operativno donošenje odluka i kao alat za vrednovanje i numeričku analizu. Ovaj deo rada se fokusira na korišćenje realnih opcija u svrhe numeričke analize, a naročito ćemo obratiti pažnju na izvođenje vrednosti realne opcije za datu investicionu mogućnost ili rukovodstvenu fleksibilnost.

Realne opcije se obično vrednuju istim metodama koje se koriste u vrednovanju finansijskih opcija tj. Black – Scholes formula za izračunavanje cene opcije, binomni model vrednovanja opcija i Monte – Carlo metoda. Većina ovih metoda je složena i zahteva dosta dobro razumevanje složenih matematičkih procesa, pri čemu se pojavljuju problemi pri njihovom korišćenju u praksi.

Međutim, pojavio se novi pristup vrednovanju realnih opcija, nazvan Datar – Mathews metod (*DM*[9] metod), gde se vrednost realne opcije računa iz raspodela isplata, dobijenih iz raspodele neto sadašnje vrednosti za projekat generisan Monte – Carlo simulacijom. Kreatori *DM* metode pokazuju da njeni rezultati konvergiraju ka rezultatima iz Black – Scholes modela. Ovaj metod predstavlja pojednostvaljenje u računanju vrednosti realne opcije, čineći ga jasnijim i donoseći metod vrednovanja koji je veoma blizak praksi. Najpozitivnija odlika *DM* je da na njega ne utiču problemi sa pretpostavkama povezane sa tržišnim procesima. Metoda *DM* koristi scenarije novčanih tokova kao ulazni faktor za Monte – Carlo simulaciju kako bi dobila raspodelu za investicione ishode. Upravo ovu metodu su naučnici Collan, Fuller i Mezei iskoristili kako bi napravili novi metod za vrednovanje realnih opcija nazvan *Metoda fazi isplativosti za vrednovanje realnih opcija* koji ne koristi simulacije.

Simulacije nisu apsolutno neophodan korak u Datar – Mathews metodi, pa u tom smislu metoda fazi isplativosti i *DM* metoda nisu toliko različiti. Međutim, ono što je potpuno drugačije je to da je *DM* metoda zasnovana na teoriji verovatnoće i kao takva ima potpuno drugačiju osnovu od metode fazi isplativosti. To znači da su načini na koje ova dva modela posmatraju neizvesnost potpuno drugačija.

Pored teorije verovatnoće, postoje i drugi načini koji se koriste za posmatranje neizvesnosti ili nepreciznosti u budućim procenama, a to su fazi logika i fazi skupovi. Kao što smo već i napomenuli, u klasičnoj teoriji skupova, element u potpunosti ili pripada ili ne pripada nekom skupu. Ovaj tip dvovrednosne ili „tačno – netačno“ logike se obično koristi u finansijama. Dvovrednosna logika jeste osnovna pretpostavka teorije verovatnoće. Međutim, ona predstavlja problem jer se finansijske odluke obično donose u uslovima neizvesnosti.

[9] Vinary Datar i Scott Mathews su kreirali *DM* metod 2000. godine za kompaniju Boing. Vinary Datar je bio profesor na Sijetl Univerzitetu, dok je Scott Mathews bio tehnički saradnik u kompaniji Boing.

U kontekstu finansijskih investicija, neizvesnost predstavlja praktično nemogućnost davanja apsolutno tačnih i preciznih procena, na primer budućih novčanih tokova. Sa druge strane, fazi skupovi se mogu koristiti za formalizovanje netačnosti koje postoje pri donošenju odluka. Fazi skupovi su skupovi koji dozvoljavaju gradaciju pripadnosti kao što je „budući novčani tok u godini $x$ je oko $y$ evra“. To znači da se fazi skupovi mogu koristiti za formalizovanje netačnosti koje nastaju pri donošenju odluka. Zaista, korišćenje teorije fazi skupova u ekonomiji dovodi do rezultata koji se ne mogu dobiti klasičnim metodama. . U praktičnim primenama najviše korišćeni fazi brojevi su trougaoni i trapezoidni fazi brojevi. Oni se koriste zbog toga što čine mnoge operacije mogućim i intuitivno razumljivijim.

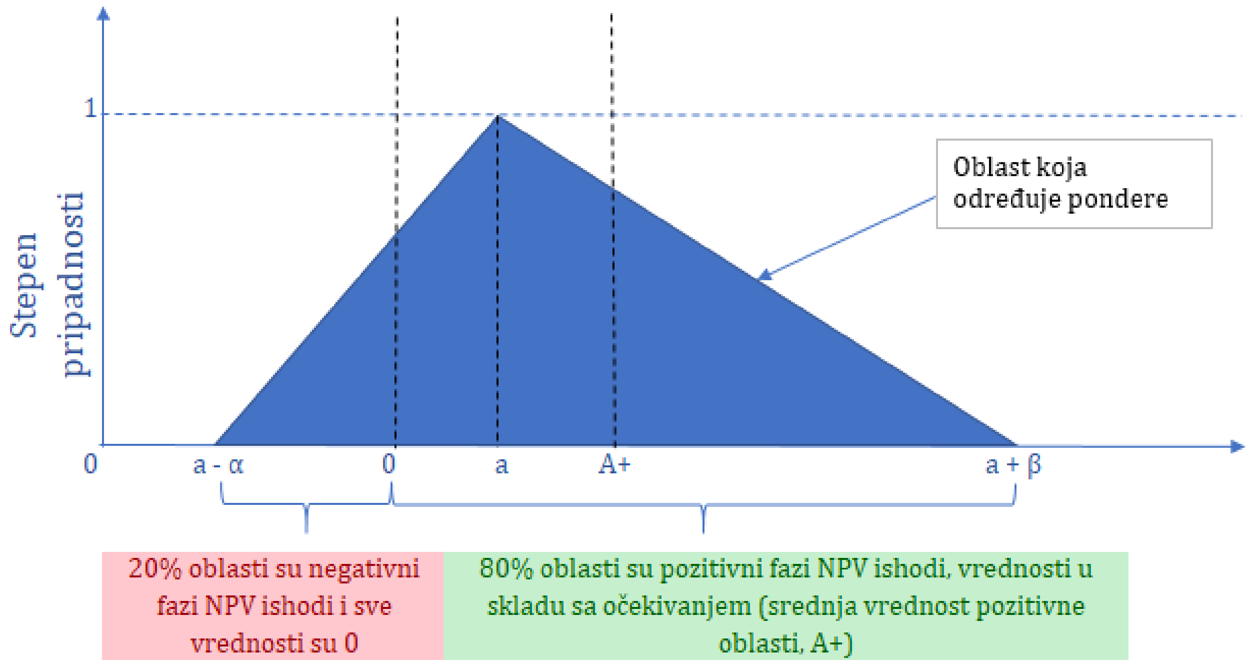
Kada zamenimo „obične“ (nefazi) brojeve sa fazi brojevima, možemo konstruisati modele koji uključuju ljudsku nepreciznost. To ove modele čini mnogo bližim realnim situacijama. Takođe, zamenom nefazi brojeva sa fazi brojevima automatski znači da dobijeni modeli takođe moraju da prate pravila fazi aritmetike.

## 4.2. METOD FAZI ISPLATIVOSTI

Metoda Datar – Mathews podrazumeva da je ponderisani prosek pozitivnih ishoda fazi $NPV$ (drugim rečima, pozitivnih ishoda raspodele isplativosti) vrednost realne opcije. Pošto u ovoj metodi radimo sa fazi brojevima, ponderisani prosek predstavlja fazi sredinu pozitivnih ishoda $NPV$.

Ovde ćemo koristiti fazi brojeve kako bi prikazali očekivane buduće raspodele troškova i prihoda projekta, a samim tim i profitabilnost $NPV$ ishoda. Fazi $NPV$, predstavljena kao fazi broj, predstavlja raspodelu isplativosti projetka.

Trougaoni fazi broj koji opisuje $NPV$ je definisan sa tri tačke (Slika 4.1.). Tri tačke koje definišu fazi $NPV$ se dobijaju predikcijom tri scenarija, odnosno tako što odredimo $NPV$ za sva tri scenarija.




***Slika 4.1.*** *Trougaoni fazi broj A definisan sa tri tačke* $\{a, \alpha, \beta\}$ *opisuje NPV potencijalnog projekta*

Nakon određivanja fazi $NPV$ prelazimo na određivanje vrednosti realne opcije. Izračunavanje vrednosti realne opcije ($ROV$) iz fazi neto sadašnje vrednosti (iz raspodele $NPV$) jeste fazi sredina $NPV$ gde su vrednosti ispod nule (negativni ishodi $NPV$) računate kao nula. Sledeća definicija nam daje obrazac za računanje vrednosti realnih opcija putem fazi $NPV$.

***Definicija 4.1.*** *[5] Vrednost realne opcije iz fazi $NPV$ se računa na sledeći način:*

$$ROV = \frac{\int_0^\infty A(x)dx}{\int_{-\infty}^{\infty} A(x)dx} \times E(A_+)$$

*gde:*

- *A predstavlja fazi neto sadašnju vrednost ($fazi\ NPV$),*
- *$E(A_+)$ predstavlja fazi srednju vrednost pozitivnog dela fazi $NPV$,*
- *$\int_{-\infty}^{\infty} A(x)dx$ – ovaj integral računa oblast ispod čitavog fazi broja A, i*
- *$\int_0^\infty A(x)dx$ – ovaj integral računa oblast ispod pozitivnog dela fazi broja A.*

Možemo primetiti da kada je ceo fazi broj iznad nule tada je vrednost realne opcije upravo fazi sredina fazi broja, a kada je ceo fazi broj ispod nule tada je vrednost realne opcije nula. Ova metoda govori da kada koristimo fazi brojeve, ponderisani prosek pozitivnih vrednosti raspodele isplata je ništa drugo do ponderisana fazi sredina pozitivnih vrednosti fazi $NPV$.

Kako bi vrednost realne opcije bila određena neophodno je da odredimo fazi srednju vrednost pozitivnog dela $NPV$. Pored fazi srednje vrednosti u literaturi se može naći i verodostojna srednja vrednost koju možemo koristiti za izračunavanje vrednosti realne opcije. U nastavku dat je prikaz fazi srednje vrednosti i verodostojne srednje vrednosti pozitivnih delova fazi broja. U našem slučaju, taj fazi broj će predstavljati fazi $NPV$.

## 4.2.1. Fazi srednja vrednost pozitivnog dela fazi broja

U slučaju fazi srednje (očekivane) vrednosti, računanje sredine pozitivnog dela je definisan sa četiri slučaja. Korišćena je literatura [5,6].

1. Slučaj kada je: $0 < a - \alpha$. U ovom slučaju ceo fazi broj je iznad nule pa je fazi srednja vrednost pozitivnog dela fazi broja upravo sama fazi srednja vrednost:

$$E(A_+) = E(A) = a + \frac{\beta - \alpha}{6}.$$

2. Slučaj kada je: $a - \alpha < 0 < a$. U ovom slučaju fazi srednja vrednost pozitivnog dela fazi broja se računa kao:

$$E(A_+) = a + \frac{\beta - \alpha}{6} + \frac{(\alpha - a)^3}{6a^2}.$$

3. Slučaj kada je: $a < 0 < a + \beta$. U ovom slučaju fazi srednja vrednost pozitivnog dela fazi broja se računa kao:

$$E(A_+) = \frac{(a + \beta)^3}{6\beta^2}.$$

4. Slučaj kada je: $a+\beta<0$. U ovom slučaju ceo fazi broj je ispod nule pa je njegova vrednost nula tj.

$$E(A_+)=0.$$

### 4.2.2. Verodostojna srednja vrednost pozitivnog dela fazi broja

Za fazi promenljive, čije su raspodele fazi brojevi, definisana je fazi srednja vrednost sa kojom smo se susreli u prethodnom delu rada. Međutim, ta definicija je striktno vezana za formu fazi broja pri čemu se ne može proširiti na druge klase fazi raspodele (npr. diskretna fazi raspodela). Kako bi se taj problem prevazišao definiše se mera verodostojnosti, u okviru koje se razvila i verodostojna očekivana vrednost (eng. *credibilistic expected value*).

U ovom delu rada prikazaće se postupak korišćenja mere verodostojnosti i verodostojnu očekivanu (srednju) vrednost za procenu fazi realnih opcija. Prvo je data definicija mere verodostojnosti.

***Definicija 4.2.*** *[6] Neka je $\theta$ neprazan skup i neka je $P(\theta)$ partitivni skup od $\theta$. Skupovna funkcija* Cr *se zove mera verodostojnosti ako zadovoljava sedeća četiri uslova:*

1. $\mathrm{Cr}\{\theta\}=1$
2. Cr *je rastuća, tj.* $\mathrm{Cr}(C)\leq \mathrm{Cr}(D)$ *za* $C\subset D$
3. $\mathrm{Cr}(C)+\mathrm{Cr}(C^C)=1$ *za svako* $C\in P(\theta)$
4. $\mathrm{Cr}\{\bigcup_i C_i\}\wedge 0{,}5 = sup_i \mathrm{Cr}\{C_i\}$ *za svako* $\{C_i\}$ *sa* $\mathrm{Cr}\{C_i\}\leq 0{,}5$.

Prva primena mere verodostojnosti jeste novi koncept očekivane vrednosti za normalizovan fazi skup, odnosno za fazi brojeve.

***Definicija 4.3.*** *[6] Očekivana vrednost normalizovane fazi varijable $\xi$ je definisan na sledeći način:*

$$E_C[\xi] = \int_0^{\infty} \mathrm{Cr}\{\xi \geq r\}dr - \int_{-\infty}^{0} \mathrm{Cr}\{\xi \leq r\}dr$$

*pod uslovom da je bar jedan od integrala konačan.*

U slučaju verodostojne očekivane vrednosti, računanje sredine pozitivnog dela je definisan formulom:

$$E_C[A_+] = \int_0^{\infty} \mathrm{Cr}\{A \geq r\}dr.$$

#### 4.2.2.1. Verodostojna srednja vrednosti za trougaoune fazi brojeve

Ovde postoji četiri slučaja kada računamo verodostojnu srednju vrednost pozitivne oblasti trougaone fazi isplate:

1. Slučaj kada je: $0 < a - \alpha$. U ovom slučaju verodostojna očekivana vrednost se računa kao:

$$E_C(A_+) = E_C(A) = a + \frac{\beta - \alpha}{4}.$$

U ovom slučaju fazi srednju vrednost trougaonog fazi broja ćemo označavati sa $E_P(A)$, a kao što smo to videli u prethodnom delu rada ona je:

$$E_P(A) = a + \frac{\beta - \alpha}{6}.$$

Ako poredimo ovu vrednost sa verodostojnom srednjom vrednošću dobijamo:

$$|E_P(A) - a| \leq |E_C(A) - a|.$$

Takođe, možemo zaključiti da važi $E_P(A) \leq E_C(A)$ ako i samo ako je leva širina $(\alpha)$ manja od desne širine $(\beta)$ trougaonog fazi broja $A = (a, \alpha, \beta)$.

2. Slučaj kada je: $a - \alpha < 0 < a$. U ovom slučaju verodostojna očekivana vrednost se računa kao:

$$E_C[A_+] = \int_0^{\infty} \mathrm{Cr}\{A \geq r\} dr = \int_0^{a} \left(\frac{1}{2} + \frac{a-r}{2\alpha}\right) dr + \int_a^{a+\beta} \left(\frac{1}{2} - \frac{r-a}{2\beta}\right) dr = \frac{a}{2} + \frac{a^2}{4\alpha} + \frac{\beta}{4}$$

3. Slučaj kada je: $a < 0 < a + \beta$. U ovom slučaju verodostojna očekivana vrednost se računa kao:

$$E_C[A_+] = \int_0^{\infty} \mathrm{Cr}\{A \geq r\} dr = \int_0^{a+\beta} \left(\frac{1}{2} - \frac{r-a}{2\beta}\right) dr = \frac{a}{2} + \frac{a^2}{4\beta} + \frac{\beta}{4}.$$

4. Slučaj kada je: $a + \beta < 0$. U ovom slučaju verodostojna očekivana vrednost ima vrednost nula tj.

$$E_C[A_+] = 0.$$

#### 4.2.2.2. Verodostojna srednja vrednosti za trapezoidne fazi brojeve

Da bismo izračunavali vrednost realne opcije iz raspodele isplativosti $NPV$ trapezoidne forme moramo posmatrati trapezoidnu fazi raspodelu isplate $A$ koja je definisana sa:

$$A(u) = \begin{cases} \frac{u}{\alpha} - \frac{a_1 - \alpha}{\alpha}, & za\ a_1 - \alpha \leq u \leq a_1 \\ 1, & za\ a_1 \leq u \leq a_2 \\ \frac{u}{-\beta} + \frac{a_2 + \beta}{\beta}, & za\ a_2 \leq u \leq a_2 + \beta \\ 0, & ina\check{c}e \end{cases}$$

gde je $\gamma$ −nivo od $A$ definisan sa $[A]^\gamma = [\gamma\alpha + a_1 - \alpha, -\gamma\beta + a_2 + \beta]$. U slučaju trapezoidne forme, verodostojnost ima sledeći oblik:

$$\mathrm{Cr}\{A \le r\} = \begin{cases} 0, & za\; r \le a_1 - \alpha \\ \frac{1}{2} - \frac{a - x}{2\alpha}, & za\; a_1 - \alpha \le x \le a_1 \\ \frac{1}{2}, & za\; a_1 \le x \le a_2 \\ \frac{1}{2} + \frac{x - a}{2\beta}, & za\; a_2 \le x \le a_2 + \beta \\ 0, & za\; a_2 + \beta \le x. \end{cases}$$

Ovde postoji pet slučajeva kada računamo verodostojnu srednju vrednost pozitivne oblasti trapezoidne fazi isplate:

1. Slučaj kada je: $0 < a_1 - \alpha$. U ovom slučaju verodostojna očekivana vrednost se računa kao:

$$E_C(A_+) = E_C(A) = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{\beta - \alpha}{4}.$$

U ovom slučaju fazi srednju vrednost trougaonog fazi broja ćemo označavati sa $E_P(A)$, a kao što smo to videli u prethodnom delu rada ona je:

$$E_P(A) = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{\beta - \alpha}{6}.$$

Ako poredimo ovu vrednost sa verodostojnom srednjom vrednošću dobijamo:

$$|E_P(A) - a| \le |E_C(A) - a|.$$

Takođe, možemo zaključiti da važi $E_P(A) \le E_C(A)$ ako i samo ako je leva širina ($\alpha$) manja od desne širine ($\beta$) trapezoidnog fazi broja $A = (a_1, a_2, \alpha, \beta)$.

2. Slučaj kada je: $a_1 - \alpha < 0 < a_1$. U ovom slučaju verodostojna očekivana vrednost se računa kao:

$$E_C[A_+] = \int_0^{a_1} \left(\frac{1}{2} + \frac{a_1 - r}{2\alpha}\right) dr + \int_{a_1}^{a_2} \frac{1}{2} dr + \int_{a_2}^{a_2+\beta} \left(\frac{1}{2} - \frac{r - a_2}{2\beta}\right) dr = \frac{a_2}{2} + \frac{a_1^2}{4\alpha} + \frac{\beta}{4}.$$

3. Slučaj kada je: $a_1 < 0 < a_2$. U ovom slučaju verodostojna očekivana vrednost se računa kao:

$$E_C[A_+] = \int_0^{a_2} \frac{1}{2} dr + \int_{a_2}^{a_2+\beta} \left(\frac{1}{2} - \frac{r - a_2}{2\beta}\right) dr = \frac{a_2}{2} + \frac{\beta}{4}.$$

4. Slučaj kada je: $a_2 < x < a_2 + \beta$. U ovom slučaju verodostojna očekivana vrednost se računa kao:

$$E_C[A_+] = \int_0^{a_2+\beta} \left(\frac{1}{2} - \frac{r - a_2}{2\beta}\right) dr = \frac{a_2}{2} + \frac{a_2^2}{4\beta} + \frac{\beta}{4}.$$

5. Slučaj kada je: $a_2 + \beta < 0$. U ovom slučaju verodostojna očekivana vrednost ima vrednost nula tj.

$$E_C[A_+] = 0.$$

## 4.3. PRIMENA METODE FAZI ISPLATIVOSTI

U primeni predstavljene metode prikazaćemo dva primera koja se razlikuju po poziciji fazi $NPV$ u odnosu na nulu. Prvi primer će predstavljati slučaj kada je cela fazi $NPV$ iznad nule, a drugi primer će predstavljati slučaj kada se nula nalazi u nosaču fazi $NPV$. Za izračunavanje vrednosti realne opcije koristiće se fazi srednja vrednost pozitivnog dela fazi broja (fazi $NPV$).

### 4.3.1. Praktična primena metode fazi isplativosti

***Primer 4.1.*** **(Dati primer predstavlja originalnu korekciju rešenja zadatka objavljenog u [11]).**

U ovom primeru želimo da izračunamo vrednost realne opcije iz poslovnog slučaja. Za analizu problema i kalkulacije vrednosti realne opcije koristićemo programski paket Excel. Ulazne informacije su dostupne u obliku tri scenarija budućih novčanih tokova i to:

1. dobar (optimističan),
2. osnovni (najviše verovatan) i
3. loš (pesimističan).

Vrednosti u scenarijima su date od strane rukovodstva kompanije kao „obični“ (nefazi) brojevi. Iz scenarija troškova i prihoda, tri scenarija za $NPV$ su kombinovani, gde su novčani tokovi troškova diskontovani bezrizičnom stopom, a novčani tokovi prihoda su diskontovani po stopi koja je prilagođena riziku. $NPV$ se računa za svaki od ova tri scenarija posebno. Ideja korišćenja odvojenih novčanih tokova za troškove i prihode jeste da se naglasi različitost procesa novčanog toka i različitost nivoa rizika. Kroz sledeće slike videćemo postupak računanja vrednosti realne opcije putem metode fazi isplativosti.

Novčani tokovi troškova | Rf=0,05

| | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 | 4,5 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CF dobar | 1,00 | 1,00 | 1,00 | 1,00 | 1,00 | 1,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| CF osnovni | 0,60 | 0,60 | 0,60 | 0,60 | 0,60 | 0,60 | 0,08 | 0,08 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| CF loš | 0,40 | 0,40 | 0,40 | 0,40 | 0,40 | 0,40 | 0,33 | 0,33 | 0,05 | 0,05 | 0,00 | 0,00 |
| PV dobar | 1,00 | 0,98 | 0,95 | 0,93 | 0,91 | 0,89 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| PV osnovni | 0,60 | 0,59 | 0,57 | 0,56 | 0,54 | 0,53 | 0,07 | 0,07 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| PV loš | 0,40 | 0,39 | 0,38 | 0,37 | 0,36 | 0,35 | 0,29 | 0,28 | 0,04 | 0,04 | 0,00 | 0,00 |

| | 0 - 0,5 | 0 - 1 | 0 - 1,5 | 0 - 2 | 0 - 2,5 | 0 - 3 | 0 - 3,5 | 0 - 4 | 0 - 4,5 | 0 - 5 | 0 - 6 | 0 - 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Suma PV dobar | 1,00 | 1,98 | 2,93 | 3,86 | 4,76 | 5,65 | 5,65 | 5,65 | 5,65 | 5,65 | 5,65 | 5,65 |
| Suma PV osnovni | 0,60 | 1,19 | 1,76 | 2,31 | 2,86 | 3,39 | 3,46 | 3,53 | 3,53 | 3,53 | 3,53 | 3,53 |
| Suma PV loš | 0,40 | 0,79 | 1,17 | 1,54 | 1,91 | 2,26 | 2,55 | 2,82 | 2,86 | 2,90 | 2,90 | 2,90 |

***Slika 4.2.*** *Prikaz novčanih tokova, sadašnje vrednosti i sume sadašnjih vrednosti za troškove*

Na Slici 4.2. prikazan je novčani tok (CF), sadašnja vrednost (PV) i sume sadašnje vrednosti za troškove u sva tri scenarija (dobar, osnovni i loš scenario). Sadašnja vrednost novčanog toka se računa tako što ga diskontujemo sa diskontnom stopom $Rf = 0{,}05$. Nakon toga sumiramo sadašnje vrednosti do poslednjeg perioda (vrednosti označene žutom bojom).

Novčani tokovi prihoda — Ra=0,15

| | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 | 4,5 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CF dobar | 1,80 | 3,50 | 4,50 | 4,80 | 5,40 | 6,10 | 6,30 | 6,50 | 6,80 | 6,90 | 15,50 | 15,50 |
| CF osnovni | 0,56 | 1,21 | 1,56 | 1,95 | 2,49 | 3,04 | 3,41 | 3,48 | 3,58 | 3,56 | 7,60 | 7,90 |
| CF loš | 0,31 | 0,61 | 0,75 | 0,91 | 1,13 | 1,33 | 1,46 | 1,53 | 1,57 | 1,60 | 3,29 | 3,39 |
| PV dobar | 1,80 | 3,26 | 3,91 | 3,89 | 4,08 | 4,30 | 4,14 | 3,99 | 3,89 | 3,68 | 7,71 | 6,70 |
| PV osnovni | 0,56 | 1,13 | 1,36 | 1,58 | 1,88 | 2,14 | 2,24 | 2,13 | 2,05 | 1,90 | 3,78 | 3,42 |
| PV loš | 0,31 | 0,57 | 0,65 | 0,74 | 0,85 | 0,94 | 0,96 | 0,94 | 0,90 | 0,85 | 1,64 | 1,47 |

| | 0 - 0,5 | 0 - 1 | 0 - 1,5 | 0 - 2 | 0 - 2,5 | 0 - 3 | 0 - 3,5 | 0 - 4 | 0 - 4,5 | 0 - 5 | 0 - 6 | 0 - 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Suma PV dobar | 1,80 | 5,06 | 8,98 | 12,87 | 16,95 | 21,25 | 25,40 | 29,38 | 33,27 | 36,95 | 44,65 | 51,36 |
| Suma PV osnovni | 0,56 | 1,69 | 3,04 | 4,63 | 6,51 | 8,65 | 10,89 | 13,03 | 15,08 | 16,97 | 20,75 | 24,17 |
| Suma PV loš | 0,31 | 0,88 | 1,53 | 2,27 | 3,12 | 4,06 | 5,02 | 5,96 | 6,86 | 7,71 | 9,35 | 10,81 |

***Slika 4.3.*** *Prikaz novčanih tokova, sadašnje vrednosti i sume sadašnjih vrednosti za prihode*

Na Slici 4.3. prikazan je novčani tok (CF), sadašnja vrednost (PV) i sume sadašnje vrednosti za prihode u sva tri scenarija (dobar, osnovni i loš scenario). Sadašnja vrednost novčanog toka se računa tako što ga diskontujemo sa diskontnom stopom $Ra = 0{,}15$. Nakon toga sumiramo sadašnje vrednosti do poslednjeg perioda (vrednosti označene žutom bojom).

Kada smo ovo odradili prelazimo na određivanje neto sadašnje vrednosti za sva tri scenarija i time formiramo raspodelu fazi $NPV$.

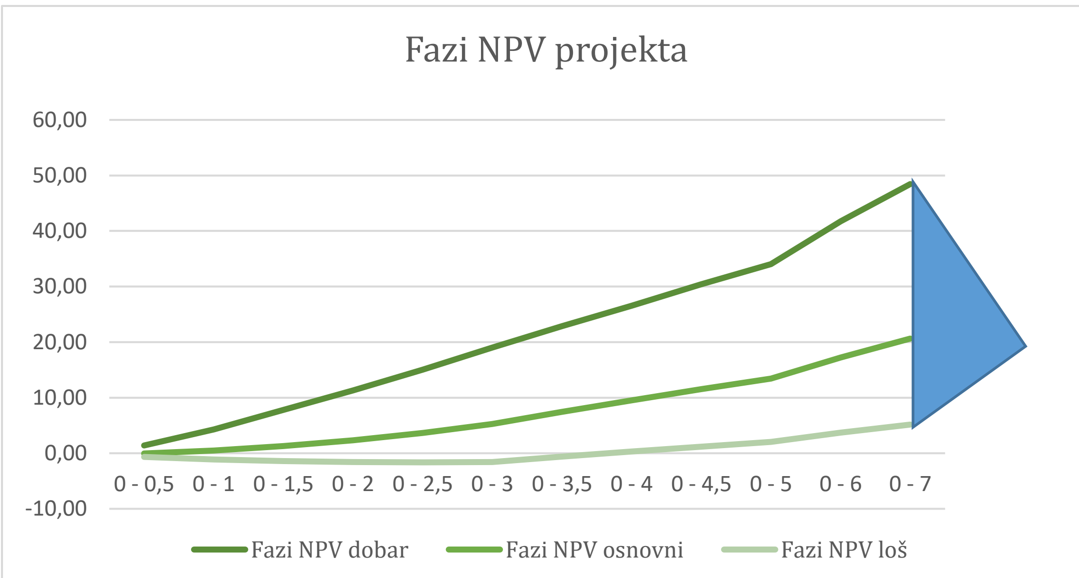
| | 0 - 0,5 | 0 - 1 | 0 - 1,5 | 0 - 2 | 0 - 2,5 | 0 - 3 | 0 - 3,5 | 0 - 4 | 0 - 4,5 | 0 - 5 | 0 - 6 | 0 - 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Fazi NPV dobar | 1,40 | 4,27 | 7,81 | 11,33 | 15,05 | 18,99 | 22,85 | 26,56 | 30,40 | 34,04 | 41,75 | 48,45 |
| Fazi NPV osnovni | -0,04 | 0,50 | 1,29 | 2,31 | 3,65 | 5,26 | 7,44 | 9,50 | 11,55 | 13,45 | 17,23 | 20,64 |
| Fazi NPV loš | -0,69 | -1,10 | -1,40 | -1,59 | -1,64 | -1,59 | -0,63 | 0,31 | 1,21 | 2,06 | 3,70 | 5,16 |

***Slika 4.4.*** *Prikaz fazi neto sadašnje vrednosti za sva tri scenarija*

Na Slici 3. prikazane su neto sadašnje vrednosti za sva tri scenarija. Fazi neto sadašnje vrednosti za sva tri scenarija dobijamo na sledeći način:

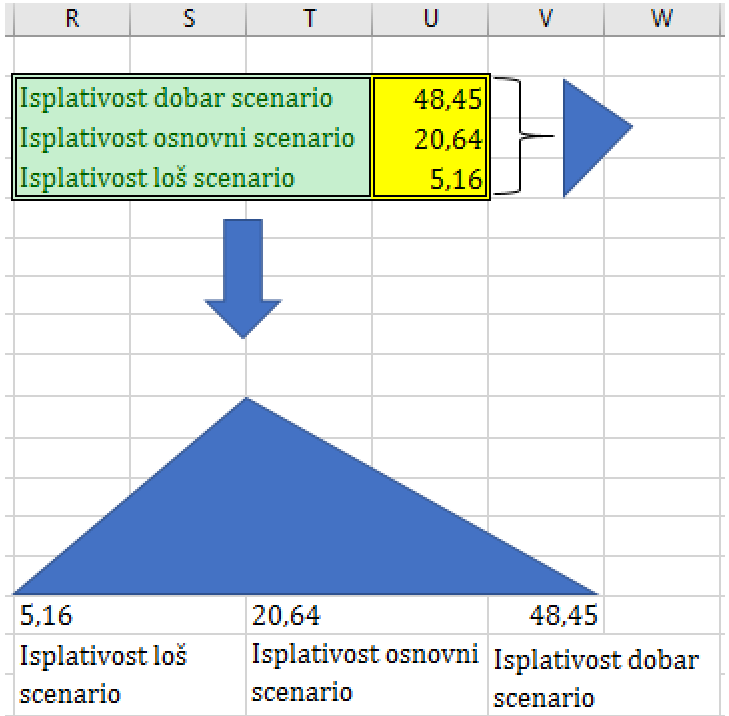
1. fazi $NPV$ za dobar scenario: od sume PV prihoda za dobar scenario oduzmemo sumu PV troškova za loš scenario,
2. fazi $NPV$ za osnovni scenario: : od sume PV prihoda za osnovni scenario oduzmemo sumu PV troškova za osnovni scenario i
3. fazi $NPV$ za loš scenario: od sume PV prihoda za loš scenario oduzmemo sumu PV troškova za dobar scenario.

Na ovaj način formiramo fazi $NPV$ projekta što je prikazano i grafički.




***Grafik 4.1.*** *Grafički prikaz generisanja fazi NPV*

Dakle, na ovaj način formiramo trougaoni fazi broj koji predstavlja fazi $NPV$ projekta.




***Slika 4.5.*** *Prikaz fazi NPV kao trougaonog fazi broja*

Dobijeni fazi $NPV$ je raspodela isplativosti za investiciju. Vrednost realne opcije za investiciju se računa iz dobijene fazi $NPV$ prema formuli:

$$ROV = \frac{\int_0^\infty A(x)dx}{\int_{-\infty}^\infty A(x)dx} \times E(A_+).$$

Pošto vidimo da se ceo fazi broj nalazi iznad nule, tj. $0 < 5{,}16 = a - \alpha$, primenjujemo prvi slučaj pri izračunavanju fazi srednje vrednosti pozitivnog dela (u ovom slučaju celog fazi broja) fazi broja, pa dobijamo:

$$E(A_+) = a + \frac{\beta - \alpha}{6} = 20{,}64 + \frac{27{,}81 - 15{,}48}{6} = 22{,}695.$$

Vrednost količnika integrala je 1 jer se ceo fazi broj nalazi iznad nule. Sada imamo sve što nam je potrebno da bismo dobili vrednost realne opcije, pa je:

$$ROV = 1 \cdot 22{,}695 = 22{,}695.$$

U sledećem primeru ćemo prikazati slučaj kada nije ceo fazi broj iznad nule.

***Primer 4.2.*** *[27]*

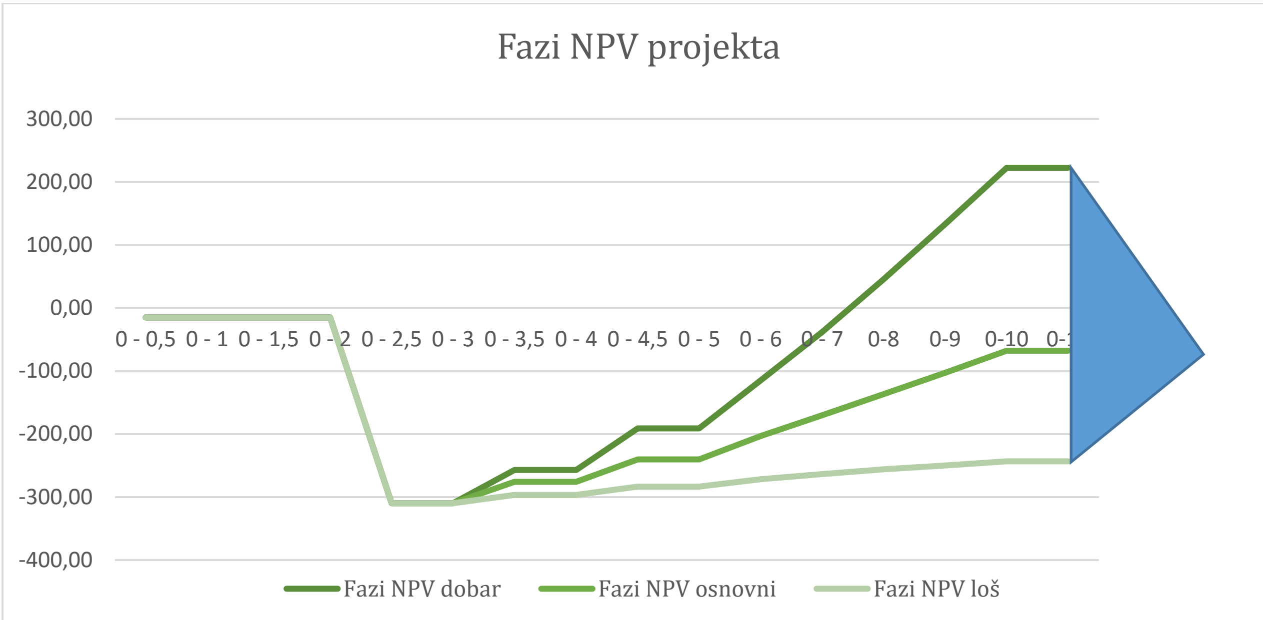
Pretpostavimo da imamo tri scenarija kao i u primeru 4.1., odnosno imamo dobar, osnovni i loš scenario. Dati su nam novi podaci o novčanim tokovima troškova i prihoda. Računski deo je analogan sa prvim primerom, pri čemu su izmenjeni novčani tokovi scenarija za troškove i prihode, a kamatne stope su ostale iste. Za analizu problema i kalkulacije vrednosti realne opcije koristićemo opet programski paket Excel.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | Novčani tokovi troškova | | | | | | Rf=0,05 | | | | | | | | | |
| 4 | | | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 | 4,5 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | CF dobar | | 15,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 325,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| 6 | CF osnovni | | 15,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 325,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| 7 | CF loš | | 15,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 325,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| 8 | PV dobar | | 15,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 294,78 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| 9 | PV osnovni | | 15,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 294,78 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| 10 | PV loš | | 15,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 294,78 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| 11 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 12 | | | 0 - 0,5 | 0 - 1 | 0 - 1,5 | 0 - 2 | 0 - 2,5 | 0 - 3 | 0 - 3,5 | 0 - 4 | 0 - 4,5 | 0 - 5 | 0 - 6 | 0 - 7 | 0-8 | 0-9 | 0-10 | 0-11 |
| 13 | Suma PV dobar | | 15,00 | 15,00 | 15,00 | 15,00 | 309,78 | 309,78 | 309,78 | 309,78 | 309,78 | 309,78 | 309,78 | 309,78 | 309,78 | 309,78 | 309,78 | 309,78 |
| 14 | Suma PV osnovni | | 15,00 | 15,00 | 15,00 | 15,00 | 309,78 | 309,78 | 309,78 | 309,78 | 309,78 | 309,78 | 309,78 | 309,78 | 309,78 | 309,78 | 309,78 | 309,78 |
| 15 | Suma PV loš | | 15,00 | 15,00 | 15,00 | 15,00 | 309,78 | 309,78 | 309,78 | 309,78 | 309,78 | 309,78 | 309,78 | 309,78 | 309,78 | 309,78 | 309,78 | 309,78 |
| 16 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

***Slika 4.6.*** *Prikaz novčanih tokova, sadašnje vrednosti i sume sadašnjih vrednosti za troškove*

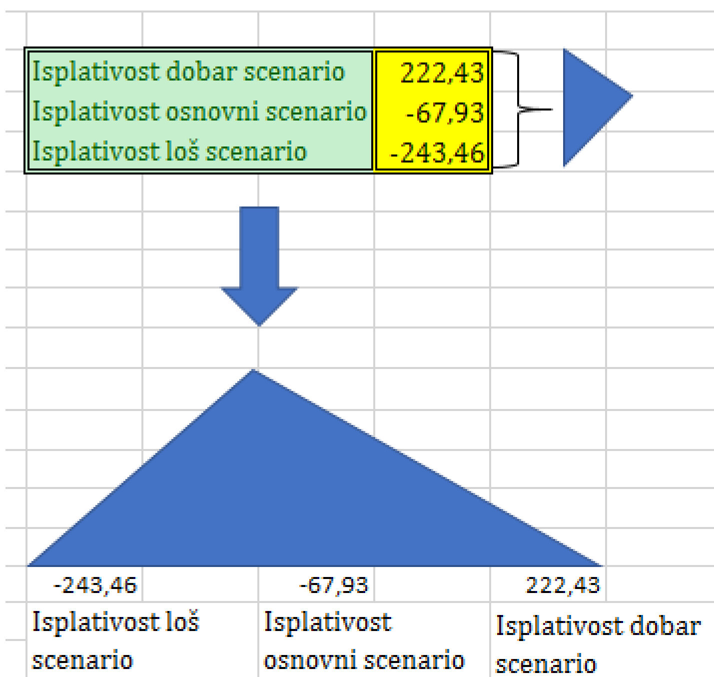
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 17 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 18 | | | Novčani tokovi prihoda | | | | | | Ra=0,15 | | | | | | | | | |
| 19 | | | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 | 4,5 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 20 | CF dobar | | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 80,00 | 0,00 | 116,00 | 0,00 | 153,00 | 177,00 | 223,00 | 268,00 | 314,00 | 0,00 |
| 21 | CF osnovni | | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 52,00 | 0,00 | 62,00 | 0,00 | 74,00 | 77,00 | 89,00 | 104,00 | 122,00 | 0,00 |
| 22 | CF loš | | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 20,00 | 0,00 | 23,00 | 0,00 | 24,00 | 18,00 | 20,00 | 20,00 | 22,00 | 0,00 |
| 23 | PV dobar | | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 52,60 | 0,00 | 66,32 | 0,00 | 76,07 | 76,52 | 83,83 | 87,61 | 89,26 | 0,00 |
| 24 | PV osnovni | | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 34,19 | 0,00 | 35,45 | 0,00 | 36,79 | 33,29 | 33,46 | 34,00 | 34,68 | 0,00 |
| 25 | PV loš | | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 13,15 | 0,00 | 13,15 | 0,00 | 11,93 | 7,78 | 7,52 | 6,54 | 6,25 | 0,00 |
| 26 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 27 | | | 0 - 0,5 | 0 - 1 | 0 - 1,5 | 0 - 2 | 0 - 2,5 | 0 - 3 | 0 - 3,5 | 0 - 4 | 0 - 4,5 | 0 - 5 | 0 - 6 | 0 - 7 | 0-8 | 0-9 | 0-10 | 0-11 |
| 28 | Suma PV dobar | | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 52,60 | 52,60 | 118,92 | 118,92 | 194,99 | 271,51 | 355,35 | 442,96 | 532,22 | 532,22 |
| 29 | Suma PV osnovni | | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 34,19 | 34,19 | 69,64 | 69,64 | 106,43 | 139,72 | 173,18 | 207,18 | 241,86 | 241,86 |
| 30 | Suma PV loš | | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 13,15 | 13,15 | 26,30 | 26,30 | 38,23 | 46,01 | 53,53 | 60,07 | 66,33 | 66,33 |

***Slika 4.7.*** *Prikaz novčanih tokova, sadašnje vrednosti i sume sadašnjih vrednosti za prihode*




***Grafik 4.2.*** *Grafički prikaz generisanja fazi NPV*

Dakle, na ovaj način formiramo trougaoni fazi broj koji predstavlja fazi *NPV* projekta.




***Slika 4.8.*** *Prikaz fazi NPV kao trougaonog fazi broja*

Da bismo odredili vrednost realne opcije neophodno je prvo odrediti fazi srednju vrednost pozitivnog dela fazi $NPV$. Vidimo da se jedan deo fazi $NPV$ nalazi ispod a drugi deo iznad nule. Kako važi da je $a = -67{,}93 < 0 < 222{,}43 = a + \beta$ primenjujemo treći slučaj pri određivanju fazi srednje vrednosti pozitivnog dela tj.

$$E(A_+) = \frac{(a+\beta)^3}{6\beta^2} = \frac{222{,}43^3}{6 \cdot (222{,}43 - (-67{,}93))^2} = \frac{222{,}43^3}{6 \cdot 290{,}36^2} = 21{,}75.$$

Sada prelazimo na računanje površine cele fazi $NPV$, kao i površine pozitivnog dela fazi $NPV$, tj. određujemo integrale. Površna cele fazi $NPV$ je:

$$\int_{-\infty}^{\infty} A(x)dx = \int_{a-\alpha}^{a} \left(1 - \frac{a-x}{\alpha}\right) dx + \int_{a}^{a+\beta} \left(1 - \frac{x-a}{\beta}\right) dx = \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

U našem slučaju dobijamo da je:

$$\int_{-\infty}^{\infty} A(x)dx = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\big(-67{,}93 - (-243{,}46)\big) + \big(222{,}43 - (-67{,}93)\big)}{2} = 232{,}945.$$

Površina pozitivnog dela fazi $NPV$ je:

$$\int_{0}^{\infty} A(x)dx = \int_{0}^{a+\beta} \left(1 - \frac{x-a}{\beta}\right) dx = a + \frac{\beta}{2} + \frac{a^2}{2\beta}.$$

U našem slučaju dobijamo da je:

$$\int_{0}^{\infty} A(x)dx = a + \frac{\beta}{2} + \frac{a^2}{2\beta} = -\,67{,}93 + \frac{222{,}43 + 67{,}93}{2} + \frac{(-67{,}93)^2}{2 \cdot \big(222{,}43 - (-67{,}93)\big)} = 85{,}2.$$

Sada imamo sve što nam je potrebno da bismo dobili vrednost realne opcije, pa je:

$$ROV = \frac{85{,}2}{232{,}945} \cdot 21{,}75 = 7{,}96.$$

Vidimo da jednostavnost ovog modela predstavlja prednost nad kompleksnijim metodama. Koristeći trougaone i trapezoidne fazi brojeve implementacije u tabelarnim programima činimo mnogo lakšim. Ovakav pristup daje da mogućnost vrednovanja realnih opcija pronađe put do što većeg broja ljudi. Ovaj metod je fleksibilan i može se koristiti kada je fazi $NPV$ dobijena iz scenarija. Fazi $NPV$ predstavlja raspodelu mogućih vrednosti koje može uzeti $NPV$. To znači da je po definiciji u trenutku procene nemoguće ostvariti vrednost izvan tog fazi broja. Praktično to je sinonim za situaciju kada je vrednost realne opcije nula (sve vrednosti fazi $NPV$ su ispod nule).

Metod postavlja pitanje dinamičke prirode procene profitabilnosti investicije, što drugim rečima predstavlja procenu promena kada se informacije promene. Kako se novčani tokovi približavaju, informacije se menjaju i neizvesnost je smanjena i to bi trebalo da se odrazi na fazi $NPV$. Odraz se ogleda u tome da što je veća neizvesnost raspodela bi trebala da bude šira, a kada je neizvesnost smanjena, širina raspodele se smanjuje. Samo ako postoji potpuna izvesnost, raspodela fazi $NPV$ se predstavlja kao jedinstven broj.

# ZAKLJUČAK

Vreme je jedini nenadoknadivi resurs. Upravo vremenski period između ulaganja koje se dešava u sadašnjosti i efekata tih ulaganja koje će se desiti u budućnosti determiniše celokupan proces investiranja. Proces investiranja prolazi kroz određenu nesigurnost i neizvesnost pa je prirodan motiv svakog investitora da minimizira ta dva faktora. Nesigurnost i neizvesnost se mogu posmatrati uz pomoć teorije verovatnoće. Međutim, kroz ovaj rad upoznali smo i drugi način koji nam pomaže u posmatranju i analizi nesigurnosti i neizvesnosti a to je fazi logika. Kroz fazi logiku, odnosno fazi skupove, neizvesnost približavamo praksi, pri čemu nam daje mnogo lakši način njenog posmatranja u odnosu na teoriju verovatnoće.

Postoje različiti modeli i metode koje se koriste u investiranju. Jedna od osnovnih metoda jeste metoda neto sadašnje vrednosti. Videli smo da ona predstavlja nefleksibilan metod, tj. metod po kome se odluka o investiciji donosi odmah. Takav način investiranja, drugim rečima „*sad ili nikad*“, može dovesti do kraha investicije, jer svaka investicija zavisi i od informacija koje se pojavljuju tokom perioda u kome se dobijaju efekti ulaganja. Zbog toga sve više investitora pribegava realnim opcijama. One nam donose određenu fleksibilnost u investiranju. Drugim rečima, pomoću njih gubitak možemo ograničiti, s tim da odluka da li će se investirati ili ne, se ne mora doneti odmah.

Prvi metod koji smo predstavili jeste metod vrednovanja realnih opcija ($ROV$). On predstavlja proširenje Black – Scholes-ovog modela. Kod $ROV$ metode, projekat se posmatra kao opcija na osnovni novčani tok, dok optimalnu investicionu strategiju čini optimalno pravilo odlučivanja momenta u kome će se opcija izvršiti. Nakon toga, ovaj metod smo proširili sa fazi brojevima i dobili smo metod vrednovanja fazi realnih opcija ($FROV$). Novčani tok se retko kada može okarakterisati sa jednim brojem. Uglavnom, njega investitori procenjuju sa intervalom u čemu nam pomažu fazi brojevi. Pomoću trapezoidnih fazi brojeva određujemo sadašnju vrednost novčanih tokova i troškova koje koristimo u modelu $FROV$. Kao i kod $ROV$ metode, ovaj metod posmatra projekat kao opciju na novčani tok, a investicionu strategiju čini pravilo odlučivanja momenta u kome će se izvršiti investicioni projekat.

Sa pojavom najnovije metode koju nazivamo metod fazi isplativosti, vrednovanje realnih opcija smo približili korisnicima tj. investitorima. Ovaj metod ne zahteva poznavanje komplikovane matematike. U okviru ove metode, fazi brojevi se koriste kako bi prikazali fazi $NPV$. Metod se bazira na tri scenarija procenjena od strane rukovodstva. Kombinacijom ova tri scenarija formira se fazi $NPV$ odakle dobijamo vrednost realne opcije kao ponderisani prosek pozitivnog dela fazi $NPV$. Fazi $NPV$ predstavlja raspodelu svih vrednosti koje može uzeti $NPV$. Drugim rečima nemoguće je da se ostvari vrednost izvan nosača fazi $NPV$. Metod takođe postavlja pitanje dinamike profitabilnosti investicije. On reguliše širinu nosača raspodele fazi $NPV$ u zavisnosti od informacija koje dolaze. Širina nosača je proporcionalna sa neizvesnošću što znači sledeće: veća neizvesnost širi nosač (šira raspodela fazi $NPV$) i obrnuto.

# LITERATURA


[1] Adekunde R. O.; *Real Options and Asset Valuation in Competitive Energy Markets,* Unversity of Waterloo, Ontario, Canada, 2007.

[2] Bojadziev G., Bojadziev M.; *Fuzzy logic for bussines, finance and management,* World Scientific, 1999.

[3] Bojadziev G., Bojadziev M.; *Fuzzy Sets, Fuzzy logic, Applications,* World Scientific, 1995.

[4] Carlsson C., Fuller R.; *A fuzzy approach to real option valuation,* Elusier Computer Science, 2002.

[5] Carlsson C., Fuller R.; *Possibility for Decisions,* Springer, 2011.

[6] Collan M., Fuller R., Jozsef M.; *Credibilistic approach to the fuzzy pay – off method for real option analysis,* Journal of Applied Research, 2012.

[7] Cox C. J., Ross A. S., Rubinstein M.; *Option Pricing: A simplified approach,* Journal of Financial Economics 7, 1979.

[8] Fedrizzi M., Carlsson C., Fuller R.; *Fuzzy Logic in Management,* Springer Science, 2004.

[9] Haans M.; *Applied fuzzy arithmetic – an introduction with engineering application,* Springer, 2005.

[10] Jovanović P.; *Upravljanje investicijama,* Fakultet organizacionih nauka, Beograd 2006.

[11] Jozsef M., Fuller R., Collan M.; *A Fuzzy Pay – Off Method for Real Option Valuation,* Journal of Applied Mathematics and Decision Sciences, 2009.

[12] Jozsef M.; *A Quantitative View on Fuzzy Numbers,* Turku Centre for Computer Science, 2011.

[13] Klement E. P., Mesiar R., Pap E.; *Triangular norms,* Kluwer Academic Publishers, 2000.

[14] Lee C. Y., Lee S. S.; *The Valuation RFID investment using fuzzy real options,* Elsevier, 2011.

[15] Leslie J. K., Michaels P. M.; *The real power of real options,* The McKinsey and Company, 1997.

[16] Mathews S., Datar V., Johnson B.; *A Practical Method for Valuing Real Option: The Boeing Approach,* Journal of Applied Corporate Finance, A Morgan Stanley Publication, 2007.

[17] Pap E.; *Fazi mere i njihova primena,* Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno matematički fakultet Novi sad, 1999.

[18] Pavkov I., Japundžić M.; *Uloga fazi matematike u ekonomskom odlučivanju,* Škola biznisa, 2012.

[19] Petrović Vujačić J., Nikolić B.; *Analiza realnih opcija u investicionom odlučivanju u telekomunikacijama,* Saobraćajni fakultet u Beogradu, 2014.

[20] Schwartz E. S., Trigeorgis L.; *Real options and Investment under Uncertainty: Classical Readings and Recent Contributions",* the MIT Press, USA, 2004.

[21] Sudarić M.; *Primena metoda realnih opcija na koncesiju za regionalni put Vojvođanski Y,* autorski reprint, Novi Sad, 2012.
[22] Trigeorgis L.; *Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation“,* the MIT Press, Cambridge, 1996.
[23] Urošević B.; *Finansijska ekonomija,* Univerzitet u Beogradu, Beograd 2014.
[24] You C. J., Lee C. K. M., Chen S. L., Jiao J. R.; *A real option theoretic fuzzy evaluation model for enterprise resource planning investment,* Journal of Engineering and Tehnology Management, 2012.
[25] Zadeh L. A., *Fuzzy sets,* Information Control 8, 1965.
[26] Zadeh L. A.; *The Concept of Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning,* Inform. Sci., 1975.
[27] http://payoffmethod.com/the_method/

# BIOGRAFIJA

Radovan Lopušina je rođen 01.08.1990. u Vrbasu. Završio je osnovnu školu „Vuk Karadžić“ u Bačkom Dobrom Polju 2005. godine kao nosilac Vukove diplome. Iste godine je upisao gimnaziju „Žarko Zrenjanin“ u Vrbasu, prirodno – matematički smer. Nakon završetka srednje škole 2009. godine upisao je osnovne akademske studije Primenjene matematike na Prirodno – matematičkom fakultetu u Novom Sadu, modul Matematika finansija. Osnovne studije završava u aprilu 2014. godine sa prosečnom ocenom 8,12. Iste godine upisuje master studije primenjene matematike na istom fakultetu. Položio je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom u oktobarskom roku 2016. godine. Od maja 2015. godine zaposlen je u osnovnoj školi „Vuk Karadžić“.

UNIVERZITET U NOVOM SADU

PRIRODNO – MATEMATIČKI FAKULTET

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

| | |
|---|---|
| Redni broj:<br>**RBR** | |
| Identifikacioni broj:<br>**IBR** | |
| Tip dokumentacije:<br>**TD** | monografska dokumentacija |
| Tip zapisa:<br>**TZ** | tekstualni štampani materijal |
| Vrsta rada:<br>**VR** | master rad |
| Autor:<br>**AU** | Radovan Lopušina |
| Mentor:<br>**MN** | Prof. dr Ivana Štajner – Papuga |
| Naslov rada:<br>**NR** | Fazi skupovi i njihova primena u investicionim odlukama |
| Jezik publikacije:<br>**JP** | srpski (latinica) |
| Jezik izvoda:<br>**JI** | srpski/engleski |
| Zemlja publikovanja:<br>**ZP** | Republika Srbija |
| Uže geografsko područje:<br>**UGP** | Vojvodina |
| Godina:<br>**GO** | 2017. |
| Izdavač:<br>**IZ** | Autorski reprint |
| Mesto i adresa:<br>**MA** | Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno – matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4 |
| Fizički opis rada:<br>**FOR** | (5/82/27/1/28/0)<br>(broj poglavlja/strana/lit. citata/tabela/slika/priloga) |
| Naučna oblast:<br>**NO** | Matematika |

| | |
|---|---|
| Naučna disciplina:<br>**ND** | Primenjena matematika |
| Predmetne odrednice, ključne reči:<br>**PO, UDK** | Fazi skup, fazi broj, realne opcije, fazi realne opcije, metod fazi isplativosti |
| Čuva se:<br>**ČU** | Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno – matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu |
| Važna napomena:<br>**VN** | |
| Izvod:<br>**IZ** | Ovaj rad se bavi pregledom fazi skupova, njihovih osobina i prikazom uticaja fazi skupova u investicionom odlučivanju. Početak rada prezentuje same početke fazi misli, kada je ona nastala i kakve vrste neizvesnosti su dovele do pojave fazi logike. U drugom poglavlju rada dat je prikaz osnovnih pojmova fazi misli, definišu se fazi skupovi, njihove relacije i osobine. Nakon fazi skupova fokus se stavlja na fazi brojeve koji predstavljaju specijalan slučaj fazi skupova. Sledeće poglavlje sadrži pregled različitih modela vrednovanja realnih opcija. Prezentovani modeli su NPV, ROV, FROV i binomni model. U poslednjem, četvrtom poglavlju rada dat je prikaz novije metode vrednovanja realnih opcija a to je metoda fazi isplativosti. Na samom kraju rada data je ilustracija metode fazi isplativosti. Kroz njih je prikazana praktična primena ove metode, pri čemu su analizirana dva slučaja, kada je cela fazi NPV iznad nule, i kada se nula nalazi u nosaču fazi NPV. |
| Datum prihvatanja teme od strane NN veća:<br>**DP** | 14.11.2017. |
| Datum odbrane:<br>**DO** | |
| Članovi komisije:<br>**KO** | Predsednik: dr Dora Seleši, redovan profesor, Prirodno – matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu,<br>Mentor: dr Ivana Štajner – Papuga, redovni profesor, Prirodno – matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu.<br>Član; dr Tatjana Došenović, vanredn profesor, Tehnološki fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, |

UNIVERSITY OF NOVI SAD

FACULTY OF SCIENCE

KEY WORDS DOCUMENTATION

| | |
|---|---|
| Accession number: **ANO** | |
| Identification number: **INO** | |
| Document type: **DT** | Monograph type |
| Type of record: **TR** | Printed text |
| Contents code: **CC** | Master's thesis |
| Author: **AU** | Radovan Lopušina |
| Menthor: **MN** | dr Ivana Štajner – Papuga |
| Title: **TI** | Fuzzy sets and their application in investment decisions |
| Language of text: **LT** | Serbian (Latin) |
| Language of abstract: **LA** | Serbian/english |
| Country of publication: **CP** | Republic of Serbia |
| Locality of publication: **LP** | Vojvodina |
| Publication year: **PY** | 2017. |
| Publisher: **PU** | Author's reprint |
| Publication place: **PP** | Novi Sad, Department of Mathematics and Infomatics, Faculty of Science, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4 |
| Physical description: **PD** | (5/82/27/1/28/0) (chapters/pages/literature/tables/pictures/add. lists) |
| Science field: **SF** | Mathematics |

| | |
|---|---|
| Scientific discipline: **SD** | Applied mathematics |
| Subject key word: **SKW** | Fuzzy set, Fuzzy number, Real options, Fuzzy real options, Fuzzy pay off method |
| Holding data: **HD** | The library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, University of Novi Sad |
| Note: **N** | |
| Abstract: **AB** | This paper deals with the review of fuzzy sets, their properties and demostrating the impact of the fuzzy sets in investment decisions making. The beginning of work presents the beginnings of fuzzy thoughts, and what kinds of uncertainties have lad to the appearance of fuzzy logic. The second chapter gives an overview of the basic concepts of the fuzzy thoughts, and fuzzy sets, their relations and properties, are defined. After fuzzy sets, focus is placed on the fuzzy numbers which present a special case of the fuzzy sets. The following section provides an overview of the various models for evaluating real options. Presented models are NPV, ROV, FROV and binomial model. In the last, fourth chapter of this paper, a newer method of evaluating real options is presented, which is fuzzy pay-off method. At the very end of this paper, an illustration of the fuzzy pay-off method is given. Through them the practical application of this method is presented, where two cases are analyzed, when the entire fuzzy NPV is above zero, and when the zero is in support of the fuzzy NPV. |
| Accepted by the Scientific Board on: **AS** | November 14th, 2017 |
| Defended: **DE** | |
| Thesis defended board: **DB** | President: Dora Seleši PhD, full professor, Faculty of Science, University of Novi Sad,<br>Mentor: Ivana Štajner – Papuga PhD, full professor, Faculty of Science, University of Novi Sad,<br>Member: Tatjana Došenović PhD, Associate Professor, Faculty of Technology, University of Novi Sad. |