UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Petar Ostojić

Statistička analiza Dow Jones indeksa

-Master rad-

Mentor:
prof. dr Zagorka Lozanov-Crvenković

Novi Sad, 2015.

SADRŽAJ

Uvod

Krajem dvadesetog i početkom dvadeset prvog veka dolazi do razvoja mnogih statističkih disciplina, među kojima je i analiza vremenskih serija. Vremenska serija pretstavlja skup podataka o vrednostima neke slučajne promenljive za niz uzastopnih perioda. Vremenske serije prisutne su u raznim naučnim oblastima, kao na primer u meteorologiji (temperatura vazduha, vazdušni pritisak...), demografiji (kretanje stope nataliteta i mortaliteta), ali i u ekonomskim naukama. Takve vremenske serije nazivaju se finansijske vremenske serije. Njima se opisuje kretanje cena na tržištu, godišnja proizvodnja, izvoz, promena cene akcija na berzi i sl. Ekonometrijski modeli koji koriste podatke vremenskih serija pogodni su za analizu kretanja i razvoja pojave u vremenu, ispitivanje uzročno-posledičnih veza i predviđanje. Dinamika pojave, odnosno podaci o njoj, najčešće se prate u godišnjim, kvartalnim i mesečnim intervalima.

Analiza finansijskih vremenskih serija se odnosi na teoriju i praksu određivanja vrednosti finansijskih aktiva tokom vremena. Karakteristike koje izdvajaju finansijske vremenske serije od ostalih vremenskih serija su: varijacija i neodređenost. Upravo zbog postojanja neodređenosti, u analizi ovih vremenskih serija primenjuju se statistički metodi.

Kako je proces donošenja odluka često povezan sa predviđanjem budućih vrednosti promenljivih koje zavise od vremena, vremenske serije i njihova analiza predstavljaju pogodno sredstvo. Osnovni cilj vremenske serije jeste da na osnovu istorijskih podataka, prognozira buduću vrednost neke pojave. Naime u ovom kontekstu predviđanje podrazumeva analizu istorijskih podataka i ekstrapolaciju istih u budućnosti, uz upotrebu odgovarajućeg matematičkog modela.

Tema ovog rada će biti statistička analiza Dow Jones indeksa. Indeksi su relativni brojevi koji pokazuju odnos stanja jedne pojave ili skupa pojava u različitim vremenskim trenucima ili na različitim mestima. Indeksi kao pokazatelji na tržištu akcija nastali su kao posledica nastojanja investitora da kupe jeftino i prodaju skupo. Tako je nastala potreba za predviđanjem kretanja cena akcija. Osnovna karakteristika akcijskih indeksa, kao indikatora kretanja cena akcija, jeste da oni ne govore o tome kako će se cene kretati u budućnosti, već pokazuju koliko su se cene pomerile u odnosu na prethodni period. Usavršavanje indeksa ima za cilj da što bolje, pouzdanije, odraze promene cena akcija na određenom tržištu.

U uvodnom delu biće dati osnovni pojmovi vremenskih serija. Takođe, biće izloženi pojmovi ključni za indekse, kao i njihova podela. Centralno mesto u radu zauzimaju indeksi ponderisani cenom, konkretno Dow Jones indeksi. Na kraju rada, u četvrtom poglavlju, će na stvarnim podacima biti predstavljena statistička analiza Dow Jones indeksa u statističkim programima Statistica i R.

Novi Sad, 2015. Petar Ostojić

Poglavlje 1

Vremenske serije

Analiza vremenskih serija je statistička disciplina koja je našla primenu u mnogim oblastima ekonomije, finansija, prirodnih i društvenih nauka. Polazni pojam u analizi vremenskih serija je sama vremenska serija. Ona predstavlja niz opservacija uređenih u odnosu na vreme, a to uređenje se obično ostvaruje u jednakim vremenskim intervalima. Osnovni cilj vremenske serije jeste da na osnovu istorijskih podataka, prognozira buduću vrednost neke pojave.

Vremenske serije su predstavljane kao stohastički procesi, a na osnovu osobina koje poseduju možemo ih podeliti na stacionarne i nestacionarne. Razlikujemo tri klase procesa stacionarnih vremenskih serija: *autoregresioni procesi*, *procesi pokretnih sredina* i *autoregresioni procesi pokretnih sredina*, a kao model nestacionarnih vremenskih serija predstavljen je *autoregresinoni integrisani proces pokretnih sredina*. Takođe, na osnovu vremenskih serija koje učestvuju u formiranju vrednosti određene vremenske serije, mogu se posmatrati kao *jednovrednosne* (jednodimenzione) vremenske serije ili kao *viševrednosne* (višedimenzione) vremenske serije.

Vremenske serije poseduju stohastički karakter, iz tog razloga pretpostavljamo da je vrednost vremenske serije u trenutku t realizacija slučajne promenljive X_t . U tom kontekstu, vremenska serija je realizacija familije slučajnih promenljivih koja se zove *stohastički proces*. ([7], [8], [9])

1.1.Stohastički procesi

Pre nego sto počnemo da definišemo pojmove stohastičkog (slučajnog) procesa i vremenske serije, podsetićemo se nekih osnovnih pojmova i definicija iz verovatnoće i stohastike ([1],[2]).
$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\}$ - skup elementarnih događja, tj. skup svih ishoda nekog eksperimenta.

Definicija 1.1.1 *Neka je* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. *Ako važe sledeći uslovi:*
1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^C \in \mathcal{F}$
3. $\{A_i\}_{i \subseteq \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \cup_{i \subseteq \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$

tada je $\mathcal{F}$ $\boldsymbol{\sigma}$**-polje** (σ -algebra) nad Ω.

Definicija 1.1.2 Najmanje σ -polje koje sadrži sve otvorene podskupove od $\mathbb{R}^n$zove se Borelovo σ -polje nad $\mathbb{R}^n$ i označavamo ga sa $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}})$ ili sa $\boldsymbol{\mathcal{B}}^{\boldsymbol{n}}$.

Definicija 1.1.3 Preslikavanje (funkcija) $P: \mathcal{F} \to [0, 1]$ koje zadovoljava uslove:
1. $P(\Omega) = 1$
2. $\{A_i\}_{i \subseteq \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}\ i\ A_i \cap A_j = \emptyset\ za\ i \neq j \Rightarrow P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

zove se **verovatnoća** nad $(\Omega, \mathcal{F})$. Trojka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ naziva se **prostor verovatnoća**.

Definicija 1.1.4 Preslikavanje $X: \Omega \to \mathbb{R}^n$ zove se n-dimenzionalna slučajna promenljiva ako je zadovoljeno da za svako $S \in \mathcal{B}^n$ važi:

$$X^{-1}(S) \in \mathcal{F}$$

kažemo da je tada X $\mathcal{F}$-merljivo.

Definicija 1.1.5 Slučajni (stohastički) proces je familija slučajnih promenljivih $\{X_t(\omega): t \in$ T, $\omega \in \Omega$ definisanih nad istim prostorom verovatnoća Ω, $\mathcal{F}$, $\mathcal{P}$, a gde je T indeksni skup.

Ako fiksiramo $t \in \mathrm{T}$, tada $X_t(\Omega)$ predstavlja slučajnu promeljivu definisanu na skupu elementarnih događaja Ω. Ukoliko, pak, fiksiramo $\omega \in \Omega$, tada skup vrednosti slučajnih promenljivih $X_t(\Omega)$ postaje funkcija skupa indeksa T.

Postoji više načiina da definišemo indeksni skup T. U zavisnosti od toga kako definišemo ovaj skup, dobijamo različite slučajne procese. Naime, ako je $T = \mathbb{R}$ ili $T \subseteq \mathbb{R}$ onda je naš slučajni proces definisan na realnoj pravoj i naziva se slučajan proces sa neprekidnim parametrom (oznaka: $\{X_t(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$).
Sa druge strane, ako je skup T skup celih ili prirodnih brojeva, onda se slučajni proces naziva slučajan proces sa prekidnim (diskretnim) parametrom ($T = \mathbb{N}$ oznaka je $\{X_t(t)\}_{t\in\mathbb{N}}$).

Definicija 1.1.6 Neka je skup $\zeta = \{(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathrm{T}^{\mathrm{n}},\ t_1 < t_2 < \cdots < t_n, n = 1,2, \ldots\}$. Funkcije $\{F_t(\cdot), t \in \zeta\}$ definisane sa:

$$F_t(x) = P\{X_{t_1} < x_1, X_{t_2} < x_2, \ldots, X_{t_n} < x_n\}, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

zovu se konačno dimenzionalne **funkcije raspodele** stohastičkog procesa.

Definicija 1.1.7 Stohastički proces X_t je Gausovski proces ako sve njegove konačno dimenzionalne funkcije raspodele imaju višedimenzionalnu normalnu raspodelu.

<u>Neka svojstva stohastičkih procesa:</u>

1.Srednja vrednost (očekivanje) procesa X_t:

$$E(X_t) = \mu_t$$

2.Disperzija procesa Xt:

$$Var(X_t) = E({X_t}^2) - E^2(X_t) = \sigma_t, t \in T$$

3. Kovarijansa procesa Xt:

$$Cov(X_t, X_t) = E\big[\big(X_t - E(X_t)\big)\big(X_s - E(X_s)\big)\big] = \gamma_X(t, s), t, s \in T$$

4. Koeficijent korelacije:

$$\rho_X(t, s) = \frac{E(X_t X_s) - E(X_t)E(X_s)}{\sqrt{Var(X_t)Var(X_s)}}, t, s \in T$$

Kako je tema rada vezana za finansijske vremenske serije, razmatracemo niz slučajnih promenljivih uređenih u odnosu na skup prirodnih brojeva, tj. T = ℕ = {1, 2, ...}. U ovom slučaju će indeksni skup T predstavljati trenutke u vremenu.

Što se tiče definicije vremenske serije, autori nemaju jedinstven stav. U literaturi su najzastupljenije dve varijante. Prva kaze da je vremenska serija jedna realizacija slučajnog procesa, a druga da nema razlike između ova dva pojma.

Definicija 1.1.8 *Vremenska serija* je familija slučajnih promenljivih uređenih u odnosu na vreme.

Definicija 1.1.9 Vremenska serija X_t je ***strogo*** *stacionarna* ako za bilo koja dva prirodna broja
n i k i bilo koju n-torku prirodnih brojeva $t_1, t_2, \cdots, t_n$ slučajni nizovi $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$ i $(X_{t_1+k}, X_{t_2+k}, \ldots, X_{t_n+k})$ imaju istu raspodelu verovatnoća. Dakle, strogo stacionarna vremenska serija je ona čija se svojstva ne menjaju transliranjem u vremenu.

Definicija 1.1.10 Za vremensku seriju X_t kažemo da je ***slabo*** *stacionarna* ukoliko važe sledeći uslovi:
1. $E(X_t) = \mu_t = const., t = 1,2, \ldots$
2. $Var(X_t) = E(X_t - \mu)^2 = const., t = 1,2, \ldots$
3. $Cov(X_t, X_t - k) = E(X_t - \mu)(X_t - k - \mu) = \gamma(k) = \gamma_k, t = 1,2, \ldots, k = 1,2, \ldots$

Iz definicije zaključujemo da su srednja vrednosti i varijansna slabo stacionarnih serija konačne (tj. ne menjaju se tokom vremena), a da je kovarijansa invarijantna u odnosu na vreme. Lako je uočiti da iz stroge stacionarnosti sledi slaba stacionarnost, ali obrnuto ne mora da važi. Specijalan slučaj su Gausovski procesi kod kojih slaba stacionarnost implicira strogu.

Stacionarnost vremenskih serija je ključna pri njihovoj analizi. U zavisnosti od toga da li je vremenska serija stacionarna ili ne, biramo različite statističke metode za analizu. U tom smislu, vremenske serije delimo na **stacionarne** i **nestacionarne**. Ukoliko se svojstva vremenske serije tokom vremena ne menjaju onda je vremenska serija stacionarna. U suprotnom, odnosno ako su parametri kretanja vremenske serije funkcije vremena ona je nestacionarna. Pri analizi finansijskih vremenskih serija najčešće se pretpostavlja da su slabo stacionarne.

1.2.Finansijske vremenske serije

Finansijske vremenske serije služe za definisanje modela koji opisuju realne podatke sa finansijksog tržišta. Podaci se najčešće odnose na cene akcija, berzanske indekse i devizne stope.
Međutim, preporučuje se da se ne radi sa nizom cena, već da se taj niz pretvori u niz prinosa datih finansijskih aktiva. Razlog za korišćenje prinosa umesto cene aktive, dali su 1997. godine, Campbel, Lo i MacKinlay ([3]). Prvi razlog je taj sto za prosečnog investitora, prinos aktive daje potpuni uvid u potencijalne investicije. Drugi razlog je vise tehničke prirode i odnosi se na bolje statističke osobine u odnosu na iste za cenu aktive.

U nastavku su date neke od definicija prinosa aktive, pri čemu pretpostavljamo da akcije ne isplaćuju dividende.

Neka je P_t cena neke akcije u vremenskom trenutku t.

Definicija 1.2.1 Ako imamo aktivu jedan vremenski period, tj. od $t-1$ do t, tada je *stopa ukupnog prinosa:*

$$1+R_t=\frac{P_t}{P_{t-1}}$$
$$P_t=P_{t-1}(1+R_t)$$

Odgovarajuća stopa prinosa, takođe za jedan vremenski period je:

$$R_t=\frac{P_t}{P_{t-1}}-1=\frac{P_t-P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

Definicija 1.2.2 Ako neku aktivu imamo k perioda, tj. od perioda $t-k$ do perioda t, tada je stopa ukupnog prinosa:

$$1+R_t[k]=\frac{P_t}{P_{t-k}}$$
$$=\frac{P_t}{P_{t-1}}\times\frac{P_{t-1}}{P_{t-2}}\times\ldots\times\frac{P_{t-k+1}}{P_{t-k}}$$
$$=(1+R_t)(1+R_{t-1})\ldots(1+1+R_{t-k+1})$$

$$= \prod_{j=0}^{k-1} (1 + R_{t-j})$$

Odavde uočavamo da je stopa ukupnog prinosa za k perioda zapravo jednaka proizvodu k stopa ukupnog prihoda za jedan period.

U praksi je veoma bitan stvarni vremenski interval (veoma je važno da li je mesečna ili godišnja stopa prinosa u pitanju). Ukoliko sam interval nije precizno dat, pretpostavljano da je to jedna godina.

Definicija 1.2.4 ***Portfolio*** hartija od vrednosti (aktiva) je skup svih hartija od vrednosti koje posedujemo ([4]).

Neka su aktive koje posedujemo $A_1, A_2, \dots, A_n$ sa cenama$P_1, P_2, \dots, P_n$ i količinama $k_1, k_2, \dots, k_n$ tada je vrednost portfolija:

$$\Pi = \sum_{i=1}^{n} k_i P_i$$

Težinski koeficijent *i*-te aktive predstavlja udeo *i*-te aktive u celom portfoliju.
Težinske koeficijente dobijamo na osnovu formule:

$$\omega_i = \frac{k_i P_i}{\Pi}$$

Portfolio hartija od vrednosti zapisujemo na sledeci način:

$$\Pi = \sum_{i=1}^{n} \omega_i P_i$$

Stopa prinosa portfolija Π, definisanog u prethodnoj jednačini, data je sa:

$$R_{\Pi_t} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i R_{it}$$

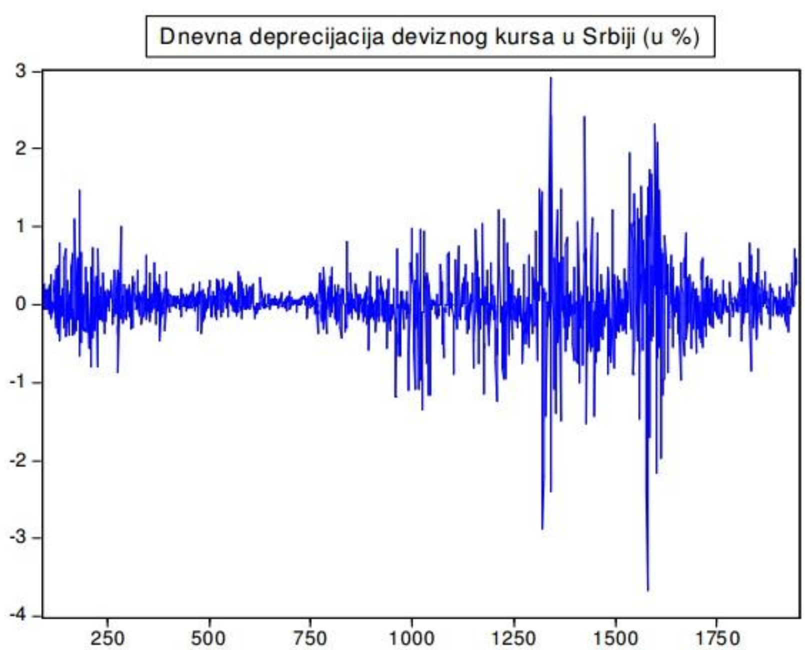
gde je R_{it} stopa prinosa aktive *i*.

Karakteristike finansijskih vremenskih serija:

Finansijske vremenske serije u praksi najlakše možemo prepoznati ukoliko vremenska serija koja je predmet izučavanja, poseduje neku od sledećih osobina ([5]):

i) Nestabilna varijansa

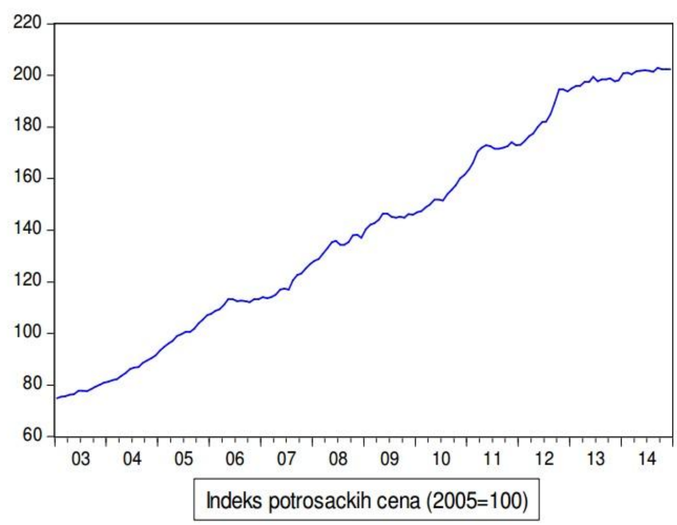
Najčešće cena finansijskog instrumenta nije stabilna. Do promena cena akcije na tržištu dolazi usled novih informacija koje stalno pristižu. Dakle, dolazak nove vesti utiče na rast varijabiliteta, koji se potom smiruje, pa ponovo može porasti ukoliko nova vest pristigne. Stepen promene cene akcije zavisi od toga kako na novopristiglu vest investitori gledaju. Ukoliko je vest negativna, varijabilitet raste. Bitno je naglasiti da se u ovom slučaju razmatra uslovna varijansa tj. volatilnost ([6]), a promenu volatilnosti označavamo kao uslovnu heteroskedastičnost.



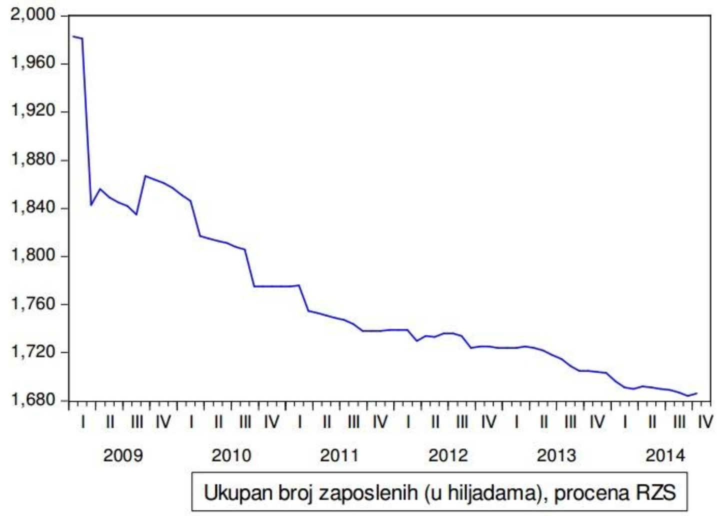
Slika 1.1 Nestabilna varijacija
(Dnevna deprecijacija deviznog kursa u Srbiji za period januar 2003. – maj 2010.)

ii) Trend

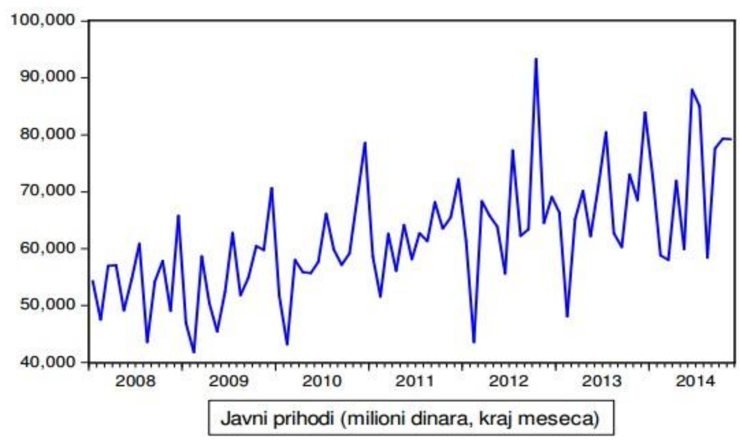
Dugoročna komponenta u kretanju finansijske vremenske serije naziva se trend. Ukoliko serija sistemski raste ili opada tokom vremena, trend može biti rastući ili opadajući. Takođe, trend može biti deterministički ili stohastički u zavisnosti od toga da li se kretanje vremenske serije može predvideti na osnovu prošlih vrednosti ili ne.



Slika 1.2 Stohastički rastući trend
(mesečni podaci privrede Srbije za period januar 2013. – decembar 2014.)



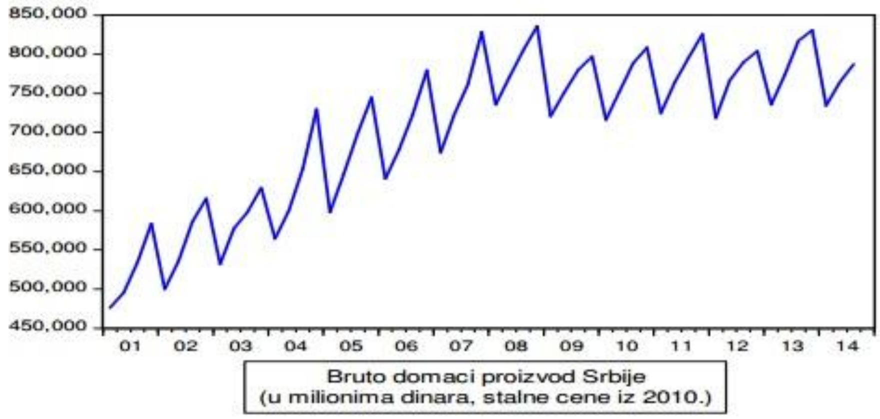
Slika 1.3 Stohastički opadajući trend
(mesečni podaci privrede Srbije za period januar 2009. – oktobar 2014.)



Slika 1.4 Deterministički trend
(javni prihodi u Srbiji za period januar 2008. – novembar 2014.)

iii) Sezonska komponenta

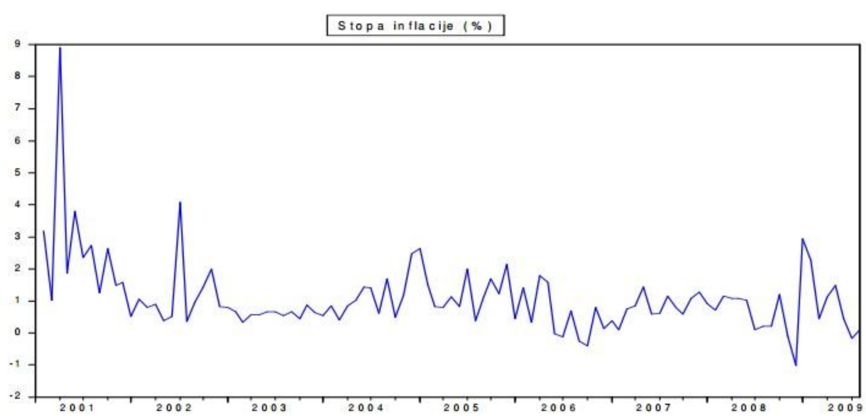
Ukoliko vremenska serija ispoljava pravilnosti u kretanju u toku jedne kalendarske godine tada se ona naziva sezonska vremenska serija. Postojanje ove komponente ukazuje da postoji veći stepen korelacije između opservacija istih meseci u različitim godinama nego između susednih meseci.



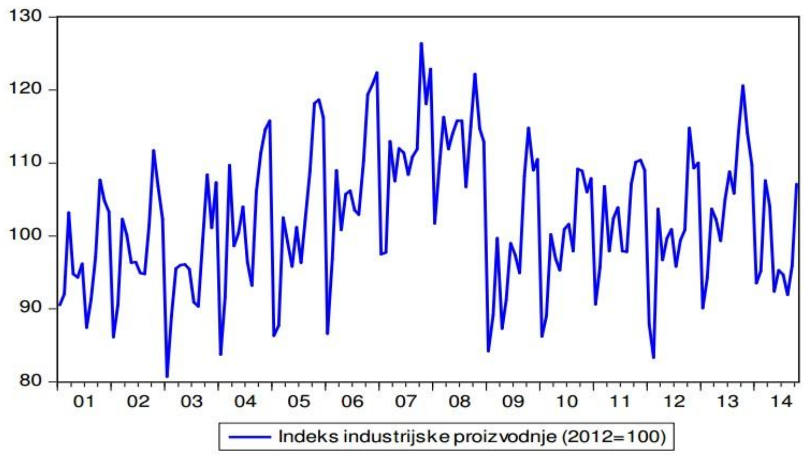
Slika 1.5 Sezonske varijacije
(kvartalni BDP privrede Srbije za period januar 2001. - mart 2014.)

iv) Strukturni lom

Strukturni lom predstavlja skup opservacija koje odstupaju od prethodnog toka vremenske serije. On je najčešće rezultat neke intervencije, u smislu događaja koji će uticati na kretanje vremenske serije. Može biti jednokratna i trajna promena.



Slika 1.6 Jednokratni strukturni lom
(Inflacije privrede Srbije u periodu januar 2001. - avgust 2009.)



Slika 1.7 Trajni strukturni lom
(Indeks industrijske proizvodnje Srbije u periodu januar 2001.-oktobar 2014.)

1.3. Autoregresioni AR modeli

Autoregresioni modeli vremenskih serija su oni modeli u kojima se zavisna promenljiva u trenutku *t* opisuje u funkciji od sopstvenih prethodnih vrednosti, tj. skup objašnjavajućih promenljivih su elementi iste vremenske serije samo u trenutcima $t-1$, $t-2$, . . . , $t-p$. Dakle, autoregresioni model definišemo na sledeći način ([5]).

Definicija 1.3.1: Autoregresivni model reda p definisan je na sledeći način:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \ldots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$$

gde je ε_t beli šum, a $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p$ autoregresioni parametri. Ovom modelu može da se pridruži karakteristična jednačina sledećeg oblika:

$$g^p - \phi_1 g^{p-1} - \phi_2 g^{p-2} - \ldots - \phi_p = 0$$

gde su $g_1, g_2, \ldots, g_p$, rešenja (koreni) karakteristične jednačine. Ukoliko su svi koreni po modulu manji od 1, tada je odgovarajuća vremenska serija stacionarna.

Da bismo bolje razumeli autoregresioni model vremenskih serija, u nastavku ćemo detaljno opisati izgled i svojstva **AR(1)** i **AR(2)** modela, pa zaključke primeniti na autoregresioni model reda p.

1.3.1. Autoregresioni model prvog reda – AR(1)

Autoregresioni model prvog reda (u oznaci AR(1)) zapisujemo na sledeći način:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$$

gde je ϕ_1 autoregresioni parametar, a ε_t beli šum.

Stacionarnost AR(1) modela:

Polazeći od prethodne jednačine, rekurzijom od nazad dobijamo:

$$\begin{aligned} X_t &= \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= \phi_1 (\phi_1 - X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t \\ &= \phi_1{}^2 (\phi_1 X_{t-3} + \varepsilon_{t-2}) + \varepsilon_t + \phi_1{}^3 \varepsilon_{t-1} \\ &= \dots \\ &= \varepsilon_t + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \phi_1{}^2 \varepsilon_{t-2} + \phi_1{}^3 \varepsilon_{t-1} + \dots \end{aligned}$$

Sada računamo varijansu od X_t :

$$\begin{aligned} Var(X_t) &= Var(\varepsilon_t + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \phi_1{}^2 \varepsilon_{t-2} + \phi_1{}^3 \varepsilon_{t-1} + \dots) \\ &= \sigma^2 (1 + \phi_1{}^2 + \phi_1{}^4 + \phi_1{}^6 + \dots) \end{aligned}$$

a znamo da je $Var(X_t) = \mathrm{E}(\varepsilon_t) = \sigma^2$. Varijansa vremenske serije bice konačna, a samim tim vremenska serija slabo stacionarna, samo ako je $|\phi_1| < 1$. ([5]) Dakle, varijansa slabo stacionarne vremenske serije opisane AR(1) modelom je:

$$Var(X_t) = \sigma^2 \left(1 + \phi_1{}^2 + \phi_1{}^4 + \phi_1{}^6 + \dots\right) = \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1{}^2}$$

AR(1) je linearni proces

Pre nego sto prikažemo da je AR model zaista specijalan slučaj linearnog modela, definisaćemo *operator kašnjenja*.

Operator *L* pomera nivo vremenske serije za jedan period unazad. Trenutak koji u sadašnjem vremenu kasni jedan period naziva se kašnjenje prvog reda.

Za operator L vaze sledeće osobine:

1. $L^k\, X_t \;=\; X_{t-k},\; k \;=\; 1, 2, \ldots$
2. $L^{-k}\, X_t = X_{t+k}$, k = 1, 2, . . .
3. $L\delta \;=\; \delta, gde\ je\ \delta\ konstanta$
4. $L^0\, X_t \;=\; X_t$
5. $L^i(L^j X_t) \;=\; L^j\,(L^i X_t) \;=\; Xt - i - j$
6. $L(\beta X_t) \;=\; \beta(LX_t) \;=\; \beta X_{t-1},\; gde\ je\ \beta\ konstanta$

Dakle, operator kašnjenja prvog reda L:

$$LX_t \;=\; X_{t-1}.$$

Korišćenjem ovog operatora, AR(1) model možemo da zapišemo i kao:

$$(1\; - \phi_1 L)X_t \;=\; \varepsilon_t \;\Rightarrow\; X_t \;=\; \frac{1}{(1\; -\; \phi_1 L)}\; \varepsilon_t$$

Uz uslov da je $|\phi_1| < \; 1$, izraz $\frac{1}{(1\, -\, \phi_1 L)}$ je zbir članova geometrijske progresije, pa je:

$$\begin{aligned} X_t \;&=\; \frac{1}{(1 - \phi_1 L)}\; \varepsilon_t \\ &= \varepsilon_t + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + {\phi_1}^2 \varepsilon_{t-2} + \;\ldots \end{aligned}$$

Iz ove jednačine direktno vidimo da smo dobili linearni proces, tj. da je AR(1) model specijalan slučaj linearnog procesa.

Autokovarijaciona i autokorelaciona funkcija:

Kako je definisano u prethodnom poglavlju, autokovarijacioni koeficijent na rastojanju k definiše se kao:

$$\gamma_k \;=\; cov(\gamma_t\;, \gamma_{t-k}) = E\,(X_t\; -\; □)(X_{t-k}\; -\; □)$$

S obzirom da je očekivanje slabo stacionarne vremenske serije X_t jednako 0, (E(X_t) = 0), dobijamo da je koeficijent γ_k zapravo E($X_t X_{t-k}$).
Dakle, kako je:

$$X_t = \varepsilon_{\;t} + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + {\phi_1}^2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + {\phi_1}^k \varepsilon_{t-k} + {\phi_1}^{k+1} \varepsilon_{t-k-1}$$

sledi da je:

$$X_{t-k}= \varepsilon_{t-k} + \phi_1 \varepsilon_{t-k-1} + {\phi_1}^2 \varepsilon_{t-k-2} + \ldots$$

pa dobijamo oblik autokovarijacionog koeficijenta na rastojanju k:

$$\begin{aligned}
\gamma_k &= E(X_t X_{t-k}) \\
&= E\big(\varepsilon_t + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + {\phi_1}^2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + {\phi_1}^k \varepsilon_{t-k} + {\phi_1}^{k+1} \varepsilon_{t-k-1} + \cdots\big)(\varepsilon_{t-k} + \phi_1 \varepsilon_{t-k-1} + \\
&\quad {\phi_1}^2 \varepsilon_{t-k-2} + \ldots) \\
&= \sigma^2({\phi_1}^k + \phi_1 {\phi_1}^{k+1} + {\phi_1}^2 {\phi_1}^{k+2} + \cdots) \\
&= \sigma^2 {\phi_1}^k (1 + {\phi_1}^2 + {\phi_1}^4 + \cdots) \\
&= \frac{\sigma^2 \ {\phi_1}^k}{1-{\phi_1}^k}
\end{aligned}$$

Dobijamo da autokovarijaciona funkcija AR(1) modela zavisi samo od varijanse belog šuma i od autoregresivnog parametra ϕ_1.

Autokorelaciona funkcija se definiše kao $\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$, gde je $\gamma_0 = Var(X_t)$, pa je autokorelacioni koeficijent na rastojanju k definisan na sledeći način:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\frac{\sigma^2 {\phi_1}^k}{1-{\phi_1}^2}}{\frac{\sigma^2}{1-{\phi_1}^2}} = {\phi_1}^k.$$

Zaključujemo da je autokorelaciona funkcija vremenske serije opisane AR(1) modelom $\rho_k = {\phi_1}^k, k = 1,2,\ldots$

1.3.2 Autoregresioni model drugog reda - AR(2)

Autoregresioni model drugog reda, tj. AR(2) model, definisan je na sledeći način:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$$

gde su ϕ_1 i ϕ_2 autoregresioni parametri.

Stacionarnost AR(2) modela:

Formula za AR(2) model je zapravo jedna stohastička diferencna jednačina drugog reda:

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} = \varepsilon_t$$

i njoj možemo da pridružimo karakterističnu jednačinu:

$$g^{2} - \phi_1 g - \phi_2 = 0$$

Rešenja ove jednačine su:

$$g_1 = \frac{\phi_1 + \sqrt{{\phi_1}^2 + 4{\phi_2}^2}}{2}, \; g_2 = \frac{\phi_1 - \sqrt{{\phi_1}^2 + 4{\phi_2}^2}}{2}$$

Ukoliko je:

1. ${\phi_1}^2 + 4\phi_2 \geq 0$ tada su rešenja karakterisitčne jednačine realna,

2. ${\phi_1}^2 + 4\phi_2 < 0$ tada su rešenja kompleksna.

Kao što je već rečeno, da bismo modelom AR(2) mogli da opišemo slabo stacionarnu vremensku seriju, potrebno je da: $|g1| < 1$ i $|g2| < 1$.
Koristeći Vijetove formule i dobijene oblike karakterističnih rešenja jednačine, dobija se da je uslov za stacionarnost vremenske serije opisane AR(2) modelom data sledećim sistemom nejednakosti:

$$\begin{gathered} \phi_1 + \phi_2 < 1 \\ \phi_1 - \phi_2 < 1 \\ -1 < \phi_2 < 1 \end{gathered}$$

Autokovarijaciona i autokorelaciona funkcija AR(2) modela:

Ako jednačinu AR(2) modela pomnožimo sa X_{t-k} pa od toga uzmemo očekivanje, dobijamo:

$$\begin{gathered} \gamma_k = E(X_t X_{t-k}) \\ = \phi_1 E(X_{t-1} X_{t-k}) + \phi_2 E(X_{t-2} X_{t-k}) + E(\varepsilon_t X_{t-k}) \\ = \gamma_{k-1} + \gamma_{k-2} + E(\varepsilon_t X_{t-k}) \end{gathered}$$

s tim da opet pretpostavljamo da je $E(X_t) = 0$.

Dalje je:

$$E(\varepsilon_t X_{t-k}) = E(\varepsilon_t)(\varepsilon_{t-k} + \phi_1 \varepsilon_{t-k-1} + ({\phi_1}^2 + \phi_2)\varepsilon_{t-k-2} + \cdots) = \begin{cases} E(\varepsilon_t)^2 = \sigma^2, k = 0 \\ 0, k \neq 0 \end{cases}$$

pa jednačina za autokovarijacionu funkciju vremenske serije opisane AR(2) modelom, postaje:

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \sigma^2$$

za $k = 0,$ a za $k > 0$ je:

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2}$$

Autokovarijacioni koeficijent za k = 0 tj. varijansa procesa moze i drugačije da se zapiše:

$$\gamma_0 = var(X_t) = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \sigma^2 = \phi_1 \rho_1 \gamma_0 + \phi_2 \rho_2 \gamma_0 + \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1 \rho_1 - \phi_2 \rho_2}$$

Autokorelaciona funkcija vremenske serije opisane AR(2) modelom, data je sledećom formulom:

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2}, k = 1, 2, \ldots$$

Da bismo dobili pravi oblik varijanse vremenske serije opisane AR(2) modelom, potrebno je da odredimo autokorelacione koeficijente na rastojanju 1 i 2. Autokorelacioni koeficijent na rastojanju 1, ρ_1 dat je sa formulom:

$$\rho_1 = \phi_1 \rho_0 + \phi_2 \rho_1 = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2}$$

a autokorelacioni koeficijent na rastojanju 2 je:

$$\rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \rho_0 = \frac{{\phi_1}^2}{1 - \phi_2} + \phi_2$$

Sada možemo ove izraze da ubacimo nazad u formulu za autokovarijacioni koeficijent γ_0 i da dobijemo konačan izgled varijanse procesa:

$$\gamma_0 = Var(X_t) = \frac{(1 - \phi_2)\,\sigma^2}{(1 + \phi_2)[(1 - \phi_2)^2 - {\phi_1}^2]}$$

1.3.3 Autoregresioni model reda p - AR(p)

Rezultati i zaključci dobijeni za modele AR(1) i AR(2) mogu se primeniti na opšti autoregresioni model reda p - AR(p). Ovaj model ima sledeći oblik:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \ldots + \phi_P X_{t-P} + \varepsilon_t$$

gde su $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_P$ autoregresioni parametri modela, a sa ε_t ponovo je obeležen beli šum.

Stacionarnosti AR(p) modela:

AR(p) modelu odgovara stohastička diferencna jednačina p-tog reda:

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} - \cdots - \phi_P X_{t-P} = \varepsilon_t$$

čija je karakteristična jednačina:

$$g^{P} - \phi_1 g^{P-1} - \phi_2 g^{P-2} - \cdots - \phi_P = 0.$$

Ako su koreni ove jednačine svi po modulu manji od 1 onda je vremenska serija stacionarna.

Autokovarijaciona i autokorelaciona funkcija AR(p) procesa:

Ako uopštimo izvođenja autokovarijacione funkcije za modele AR(1) i AR(2) dobijamo kako izgleda autokovarijaciona funkcija autoregresionog modela reda p:

$$\gamma_k = \begin{cases} \phi_1\gamma_{k-1} + \phi_2\gamma_{k-2} + \cdots + \phi_1\gamma_{k-1} + \phi_p\gamma_{k-p} + \sigma^2, k = 0 \\ \phi_1\gamma_{k-1} + \phi_2\gamma_{k-2} + \cdots + \phi_1\gamma_{k-1} + \phi_p\gamma_{k-p}, k > 0 \end{cases}$$

Kao što je već rečeno, autokovarijacioni koeficijent na rastojanju 0 je varijansa vremenske serije, pa imamo:

$$\gamma_0 = Var(X_t) = \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1\rho_1 - \phi_2\rho_2 - \cdots - \phi_p\rho_p}$$

Autokorelaciona funkcija vremenske serije opisane AR(p) modelom ima sledeći oblik:

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \cdots + \phi_p \rho_{k-p}, k > 0$$

Parcijalna autokorelaciona funkcija:

U literaturi vremenskih serija od velikog značaja je red autoregresionih modela vremenskih serija ([5],[6]). Razlog tome je što je red AR modela, p, nepoznat u praktičnoj primeni. Jedan od načina da se odredi red autoregresionih modela je pomoću parcijalne autokorelacione funkcije. Kao što je ranije definisano, autokorelacioni koeficijent na rastojanju k, meri stepen korelacije između Xt i Xt−k i njega smo definisali na sledeći način:

$$\rho_k = \frac{cov(X_t, X_{t-k})}{\sqrt{Var(X_t)Var(X_{t-k})}}, k = 1,2,\ldots$$

S obzirom da ρ_k može da bude pod uticajem X_t i X_{t-k} sa članovima vremenske serije na rastojanjima između trenutaka t i t − k, eliminacijom uticaja članova između t i t − k dobija se parcijalni autokorelacioni koeficijenat.

Osim za određivanje reda AR modela, parcijalna autokorelaciona funkcija opisuje stepen korelisanosti između X_t i X_{t-k} kada se eliminišu uticaji članova vremenske serije na rastojanjima između t i $t - k$, tj. $(X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_{t-k+1})$.

U nastavku definišemo ovu funkciju i dajemo njene osobine za autoregresione modele. Ako posmatramo autoregresioni model reda k oblika:

$$X_t = \phi_0 + \phi_{11} X_{t-1} + \phi_{22} X_{t-2} + \ldots + \phi_{kk} X_{t-k} + \varepsilon_t.$$

Parcijalni autokorelacioni koeficijent definiše se kao k-ti autoregresioni parametar u prethodnom modelu. (U model je uklјčen i parametar ϕ_0 da bismo mogli da interpretiramo ostale parametre na navedeni način).

Parcijalni autokorelacioni koeficijent ϕ_{kk} izvodi se kao poslednji autoregresioni parametar u modelu AR(k), pa uzimajući to u obzir dolazimo do reda modela.([5]) Uz neke dodatne uslove regularnosti može se pokazati da važi sledeće:

Za AR(p)model:

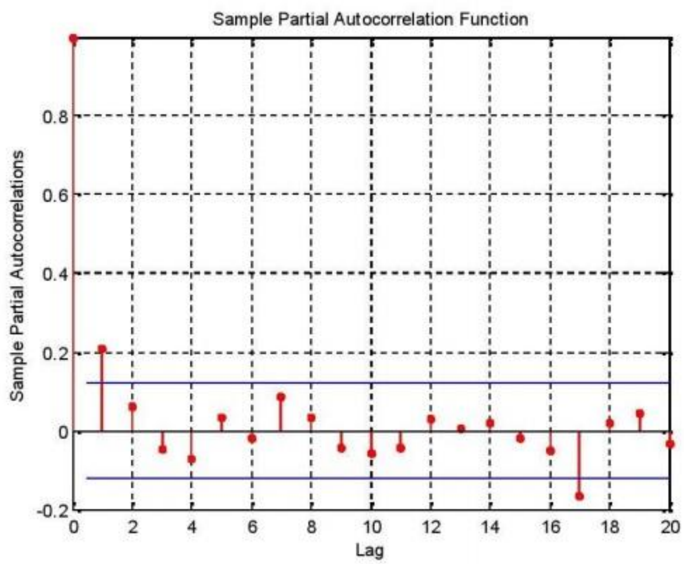
$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \ldots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t ,$$

parcijalna autokorelaciona funkcija uzima sledeće vrednosti:

$$\phi_{kk} \neq 0, \mathrm{k} = 1, 2, \ldots , \mathrm{p}$$

$$\phi_{pp} = \phi_p, \mathrm{k} = \mathrm{p}$$

$$\phi_{kk} = 0, \mathrm{k} > p$$



Grafik 1.1: Primer parcijalne autokorelacione funkcije vremenske serije

1.4. Modeli pokretnih proseka - MA

Sledeća klasa modela koji imaju veliku primenu u modeliranju serija prinosa u finansijama su modeli pokretnih proseka. Engleski naziv za ove modele je “Moving average models” odakle i potiče skraćenica koju koristimo, tj. **MA** modeli, odnosno MA(q) za modele pokretnih proseka reda q ([6]). Jedna nova karakteristika javlja se kod ovih modela, a to je invertibilnost. Invertibilnost prikazuje vezu između formi AR i MA modela ([5]). U ovom radu ćemo iskoristiti invertibilnost i preko AR modela beskonačnog reda doći do formule za MA model prvog reda. Iako pretpostavaljamo, isključivo jednostavnosti radi, da je red AR modela konačan, u teoriji ipak možemo da pretpostavimo da posmatramo AR model beskonačnog reda:

$$X_t \;=\; \phi_0 \;+\; \phi_1 X_{t-1} \;+\; \phi_2 X_{t-2} \;+\ldots+ \varepsilon_t$$

Međutim, ovakav AR model nije praktičan ni realan, jer ima beskonačno mnogo parametara. Ipak, ukoliko pretpostavimo da koeficijenti ϕ_i zadovoljavaju neke uslove i ograničenja, postići ćemo to da ih određuje konačan broj parametara, pa će nam na taj način i AR model imati konačan red. Neka je, na primer:

$$X_t \;=\; \phi_0 \;-\; \theta_1 X_{t-1} \;-\; \theta_1{}^2 X_{t-2} \;-\; \theta_1{}^3 X_{t-3} \;-\cdots+\; \varepsilon_t$$

U ovom modelu svi koeficijenti zavise samo od jednog parametra θ_1, tako što je

$$\phi_i = -\theta_1{}^i \text{ za i} \geq 1.$$

Da bi ovaj model bio stacionanran, parametar θ_1 mora da bude manji od 1 po apsolutnoj vrednosti. Iz uslova stacionarnosti $|\theta_1| < 1$, imamo da $\theta_1{}^i \rightarrow 0$ kako i $\rightarrow \infty$.

Prethodni model može da se zapiše i na drugi način:

$$X_t \;+\; \phi_1 X_{t-1} \;+\; \phi_2 X_{t-2} + \ldots = \phi_0 \;+ \varepsilon_t$$

Na osnovu ovog, znamo kako izgleda model za X_{t-1}:

$$X_{t-1} + \;\theta_1 X_{t-2} \;-\; \theta_1{}^2 X_{t-3} \;+\cdots\;=\; \phi_0 \;+\varepsilon_t - 1$$

Množeći prvu jednačinu sa θ_1 i oduzimajći rezultat od druge jednačine, dobijamo:

$$X_t \;=\; \phi_0(1 \;-\; \theta_1) \;+\varepsilon_t \;-\; \theta_1 \varepsilon_t - 1$$

što nam govori da je X_t , ako izuzmemo konstantu, ponderisani prosek šokova ε_t i ε_{t-1}. Iz ovog razloga je ovaj MA model, MA model reda 1.

- **Model pokretnih proseka reda 1**, tj. MA(1), u opštem slučaju ima sledeći oblik:

$$X_t \;=\; c_0 \;+\; \varepsilon_t \;-\; \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

gde je c_0 konstanta, a $\{\varepsilon_t\}$ beli šum.

- **Model pokretnih MA(2) ima oblik**:

$$X_t \;=\; c_0 \;+\; \varepsilon_t \;-\; \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2}$$

- **MA(q) model ima oblik**:

$$X_t \;=\; c_0 \;+\; \varepsilon_t \;-\; \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \ldots - \theta_q \;-\; \varepsilon_{t-q}, \qquad gde\ je\ q \;>\; 0.$$

1.4.1 Osobine MA modela

Kao i kod autoregresionih modela, pokazaćemo osobine za modele MA(1) i MA(2), pa zaključke uopštiti na MA(q) modele.

Stacionarnost:

MA modeli su uvek slabo stacionarni jer predstavljaju konačnu linearnu kombinaciju elemenata belog šuma za koji su prva dva momenta invarijante u odnosu na vreme.

Podsetimo se samo:

1. Beli šum ima normalnu raspodelu, $\varepsilon_t : \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$.
2. c_0 je konstanta.

Očekivanje:

Očekivanje MA(1) modela je:

$$E(X_t) = c_0$$

i ono je invarijanta u odnosu na vreme.

Varijansa:

Varijansa MA(1)modela je:

$$Var(X_t) = \sigma_\varepsilon^2 + {\theta_1}^2\sigma_\varepsilon^2 = (1 + {\theta_1}^2)\sigma_\varepsilon^2$$

pri čemu su ε_t i ε_{t-1} nekorelisani. Ponovo, i varijansa modela je invarijanta u odnosu na vreme. Kompletna priča je primenjljiva na MA(q) modele.

Za ove modele, zaključujemo sledeće:

1. Konstanta iz MA(q) modela je očekivanje serije $E(X_t) = c_0$
2. Varijansa MA(q) modela je $Var(X_t) = (1 + {\theta_1}^2 + {\theta_2}^2 + \ldots + {\theta_q}^2)\sigma_\varepsilon^2$.

Autokorelaciona funkcija MA modela:

Posmatrajmo ponovo MA(1) model. Radi jednostavnosti pretpostavićemo da je $c_0 = 0$. Množenjem modela sa X_{t-l} dobijamo:

$$X_{t-l}X_t = X_{t-l}\varepsilon_t - \theta_1 X_{t-l}\varepsilon_{t-1}$$

Tražeći očekivanje od prethodnog izraza, imamo:

$$\gamma_1 = -\theta_1\sigma_\varepsilon^2$$

a za $l > 1$ je

$$\gamma_l = 0.$$

Koristeći malopre izvedenu varijansu MA(1) procesa, dobijamo autokorelacione koeficijente za MA(1) model:

$$\rho_0 = 1$$

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1}{1-{\theta_1}^2}$$

$$\rho_l = 0,\ l > 2$$

Parcijalna autokorelaciona funkcija MA modela:

S obzirom da MA modele karakteriše osobina invertibilnosti, tj. MA(1) modelu odgovara AR model beskonačnog reda, možemo da zaključimo da se parcijalna autokorelaciona funkcija kod ovih modela sastoji iz niza nenula vrednosti. Zapravo, parcijalni autokorelacioni koeficijenti opadaju sa rastom kašnjenja. Za proizvoljno k oblik parcijalne autokorelacione funkcije MA modela dat je sa:

$$\phi_{kk} = -\frac{{\theta_1}^k(1 - {\theta_1}^2)}{(1 - {\theta_1}^{2(k+1)})} \; za \; k = 1,2,\ldots.$$

1.5. Autoregresioni modeli pokretnih proseka - ARMA

Često se u praktičnom radu sa AR i MA modelima javlja potreba da model ima veoma veliki red da bi mogao adekvatno da opiše dinamičku strukturu podataka vremenske serije. Veliki broj parametara u modelu, znatno otežava rad i kao rešenje ovog problema uvedena je nova klasa modela za opisivanje vremenskih serija. To su autoregresioni modeli pokretnih proseka, odnosno ARMA modeli (angl. autoregressive moving-average models) ([5],[6]). Dakle, ARMA modeli su osmišljeni tako da imaju relativno mali broj parametara i predstavljaju kombinaciju autoregresionih modela i modela pokretnih proseka, kao što i samo ime kaže.

1.5.1. ARMA (1,1) model i njegove osobine

Definicija 1.5.1 X_t prati ARMA(1,1) model ako zadovoljava sledeći uslov:

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} = \phi_0 + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

gde je $\{\varepsilon_t\}$ beli šum, leva strana jednačine je AR komponenta modela, reda p = 1, a desna strana je MA komponenta reda q = 1 i ϕ_0 je konstanta. Da bi ovaj model uopšte imao smisla, mora biti $\phi_1 \neq \theta_1$ jer bi se u suprotnom model sveo na beli šum.

Osobine modela:

S obzirom da je ARMA(1,1) model kombinacija AR(1) i MA(1) modela, osobine ovog modela su veoma slične odgovarajućim osobinama AR modela, s tim da dolazi do manjih izmena zbog MA modela.

1.5.2 Opšti ARMA modeli

Opšti oblik autoregresionih modela pokretnih proseka je dat sa:

$$X_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^{p} \phi_i X_{t-i} + \varepsilon_t - \sum_{i=1}^{q} \theta_i \varepsilon_{t-i}$$

gde je $\{\varepsilon_t\}$ beli šum, a p i q su nenegativni celi brojevi, koji predstavljaju red AR i MA modela, respektivno.([5])

Specijalni slučajevi ARMA(p,q) modela su:

1. $AR(p) = ARMA(p, 0)$ i

2. $MA(q) = ARMA(0, q)$.

ARMA(p,q) model, možemo da zapišemo i na malo drugačiji način:

$$\underbrace{\left(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p\right)}_{\phi(L)} X_t = \theta_0 + \underbrace{\left(1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \cdots - \theta_q L^q\right)}_{\Theta(L)} \varepsilon_t$$

gde je L operator kašnjenja (docnje) koji smo definisali kod AR modela.

Za polinome Φ(L) i Θ(L) zahteva se da nemaju zajedničkih faktora jer bi u suprotnom red modela (p,q) mogao biti redukovan. Sem toga, Φ(L) je polinom AR modela, a Θ(L) polinom MA modela. Stacionarnost ARMA(p,q) modela određena je na osnovu stacionarnosti AR(p) komponente. U skladu sa tim, invertibilnost je određena pomoću komponente MA modela.

Očekivanje :

$$E(X_t) = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \ldots - \phi_p} = \square$$

Autokovarijaciona i autokorelaciona funkcija:

I ovde kao i u najjednostavnijem obliku ovog modela, pretpostavljamo, isključivo jednostavnosti radi, da je parametar $\phi_0 = 0$, pa je autokovarijaciona funkcija data sa $E(X_t X_{t-k})$.

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \ldots + \phi_p \gamma_{k-p} + E(\varepsilon_t X_{t-k}) - \theta_1 E(\varepsilon_{t-1} X_{t-k}) - \theta_2 E(\varepsilon_{t-2} X_{t-k}) - \ldots - \theta_p E(\varepsilon_{t-p} X_{t-k})$$

S obzirom da je vremenska serija linearni proces, važi sledeće:

$$E(X_{t-k}\varepsilon_{t-q}) = 0, k > q$$

$$E(X_{t-k}\varepsilon_{t-q}) = Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2, k = q$$

Prema tome, autokovarijaciona funkcija ARMA(p,q) modela je:

$$\gamma_k = \phi_1\gamma_{k-1} + \phi_2\gamma_{k-2} + \ldots + \phi_p\gamma_{k-p}$$

odakle dobijamo i autokorelacionu funkciju ovog modela:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \phi_1\rho_{k-1} + \phi_2\rho_{k-2} + \ldots + \phi_p\rho_{k-p}$$

Podsetimo se osobina autokorelacione funkcije za AR(p) i MA(q) modele koje smo definisali ranije. Vrednosti autokorelacionih koeficijenata opadaju sa povećanjem broja kašnjenja kod AR modela. Za MA model važi da ovi koeficijenti imaju nenula vrednosti samo za kašnjenja koja su manja ili jednaka redu modela, q. Uzimajući ove osobine u obzir dolazimo do osobina ove funkcije kod kombinovanih ARMA modela.([5])

Osobine autokorelacione funkcije:

1. Prvih q autokorelacionih koeficijenata vremenske serije opisane ARMA(p,q) modelom zavisi od parametara i AR i MA komponente.

2. Za kašnjenja veća od reda MA komponente, tj. za $q + 1$, $q + 2$, …, autokorelaciona funkcija se ponaša kao kod AR modela. Osobine parcijalnih autokorelacionih koeficijenata kod MA modela opadaju sa povećanjem broja kašnjenja, a kod AR modela imaju nenula vrednosti samo za ona kašnjenja koja su manja ili jednaka redu samog modela, p.

Sada možemo da navedemo osobine ove funkcije kod ARMA modela.

1. Na kašnjenjima manjim ili jednakim redu AR komponente, p, parcijalni autokorelacioni koeficijenti zavise od svih parametara modela (dakle, i od AR i od MA komponente),

2. Za kašnjenja reda većeg od reda AR komponente, tj. za $p + 1$, $p + 2$, …, ovi koeficijenti slede oblik i svojstva parcijalne autokorelacione funkcije MA modela.

1.6. Autoregresioni modeli pokretnih proseka za integrisane vremenske serije – ARIMA

Autoregresioni model pokretnih proseka za integrisane vremenske serije (engl. autoregressive integrated moving average model) opisuje se formom oblika:

$$\underbrace{\left(1-\phi_1 L-\phi_2 L^2-\cdots-\phi_p L^p\right)}_{\phi(L)}\underbrace{(1-L)^d}_{\Delta} X_t=\theta_0+\underbrace{\left(1-\theta_1 L-\theta_2 L^2-\cdots-\theta_q L^q\right)}_{\Theta(L)}\varepsilon_t$$

Ovde koristimo skraćenicu ARIMA(p,d,q) model, gde je:

→ p red autoregresione komponente

→ d nivo integrisanosti vremenske serije

→ q red komponente pokretnih proseka

Za polinome $\phi(L)$ i $\Theta(L)$ pretpostavlja se da ne sadrže zajedničke faktore i da opisuju redom autoregresionu i komponentu pokretnih proseka stacionarne vremenske serije $(1-L)^d X_t$. Proces ε_t je beli šum.

Dati tip modela obuhvata kao svoje specijalne slučajeve prethodno razmatrane modele na sledeći način:

AR(p)	MA(q)	ARMA(p,q)	Beli šum	Slučajan hod
ARIMA(p,0,0)	ARIMA(0,0,q)	ARIMA(p,0,q)	ARIMA(0,0,0)	ARIMA(0,1,0)

Tabela 1.1

Pretpostavimo da je d=1. U tom slučaju imamo ARIMA(p,1,q) model oblika:

$$\Delta X_t=\theta_0+\phi_1\Delta X_{t-1}+\phi_2\Delta X_{t-2}+\cdots+\phi_п\Delta X_{t-п}+\varepsilon_t-\theta_1\varepsilon_{t-1}-\theta_2\varepsilon_{t-2}-\theta_q\varepsilon_{t-q}$$

Reč je o ARMA(p,q) modelu, ali za vremensku seriju ΔX_t koja je prethodno transformisana da bi se postigla njena stacionarna reprezenatcija. Parametar θ_0 označava konstantni prirast (ili pad), odnosno parametar uz linearni trend u nivou date vremenske serije. Na primer, kod analiziranog ARIMA(0,1,0) modela taj parametar smo obeležavali sa β.

Poglavlje 2

Indeksni brojevi

Indeksi su relativni brojevi koji pokazuju odnos stanja jedne pojave ili skupa pojava u različitim vremenskim trenucima ili na različitim mestima.
U zavisnosti od toga da li posmatramo dinamiku jedne ili više pojava, razlikujemo dve vrste indeksa:

1. Individualni - pomoću njih se prati dinamika jedne pojave,
2. Grupni - izražavaju odnose stanja heterogenog skupa pojava. [10]

2.1.Individualni indeksi

Individualni indeksi su relativni pokazatelji dinamike kretanja vrednosti pojave vremenskog niza i njima se upoređuje stanje jedne pojave u različitim vremenskim intervalima ili momentima.

Individualni indeksi dele se na:

1. Verižne indekse,
2. Bazne indekse.

Verižni indeksi pokazuju relativne promene pojave u tekućem razdoblju u odnosu na prethodno, odnosno pokazuju za koliko procenata se vrednost pojave u jednom promenila u odnosu na prethodni .

Ako sa $Y_1, Y_2, \dots, Y_N$ označimo frekvencije jednog vremenskog niza, tada se verižni indeksi računaju na sledeći način:

$$V_t = \frac{Y_t}{Y_{t-1}} \cdot 100 \ , \ \ t = 2,3, \cdots, N$$

Kako vrednost vremenske serije za period pre prvog posmatranog razdoblja nije poznata veličina, ne može se izračunati prvi verižni indeks u jednom nizu. Verižni indeksi se još nazivaju i **lančani indeksi** jer pokazuju promene pojave u uzastopnim vremenskim intervalima i nadovezuju se jedan na drugi.

Stopa promene je relativna promena vrednosti neke pojave u tekućem u odnosu na prethodno posmatrano razdoblje. Računa se prema izrazu:

$$S_t = \left(\frac{Y_t}{Y_{t-1}} - 1\right) \cdot 100 \ , \ \ t = 2,3, \cdots, N$$

Prosečna stopa promene je prosečna relativna promena vrednosti neke pojave kroz razdoblja u ukupnom posmatranom vremenskom periodu. Pretpostavka je da se vrednost posmatrane pojave u svakom razdoblju menja (raste ili opada) za jednak procenat kroz neki izabrani, dalji vremenski period. Prosečna stopa promene za neki dalji period računa se pomoću geometrijske sredine verižnih indeksa. Kako verižnih indeksa ima *(N-1)*, jer se prvi u nizu ne računa, geometrijska sredina biće *(N-1)*-koren od njihovih umnožaka:

$$G = \sqrt[N-1]{V_2 \cdot \dots \cdot V_N} = \sqrt[N-1]{\frac{Y_2}{Y_1} \cdot \frac{Y_3}{Y_2} \cdot \dots \cdot \frac{Y_{N-1}}{Y_{N-2}} \cdot \frac{Y_N}{Y_{N-1}}}$$

Iz prethodne jednakosti dobijamo da važi da je **geometrijska sredina verižnih indeksa**:

$$G = \sqrt[N-1]{\frac{Y_N}{Y_1}}.$$

Prosečna stopa promene računa se prema formuli:

$$\bar{S} = (G - 1) \cdot 100$$

Ako su zadati godišnji podaci onda je to prosečna godišnja stopa promene, ako su podaci dati po mesecima, reč je o prosečnoj mesečnoj stopi promene.

Ukoliko pretpostavimo da će se vrednosti neke pojave u budućnosti nastaviti da se kreće na isti način, odnosno prema izračunatoj prosečnoj stopi promene kao i u posmatranom periodu, preko geometrijske sredine se može, počevši od poslednjeg elementa (Y_N) u nizu, vršiti prognoza njenog kretanja:

$$\widehat{Y_{N+1}} = Y_N \cdot G^t$$

gde je:

$\widehat{Y_{N+1}}$- predviđena vrednost pojave uz pretpostavku neizmenjenog G u *N+1* periodu,
Y_N - poslednja vrednost pojave u nizu,
G - izračunata ili pretpostavljena geometrijska sredina verižnih indeksa,
t - broj vremenskih intervala nakon poslednjeg u nizu za koje se vrši prognoza.

Bazni indeksi ili **indeksi na stalnoj bazi** pokazuju relativne promene pojave u tekućem periodu u odnosu na neko odabrani bazni period, odnosno pokazuju za koliko procenata se vrednost pojave u jednom periodu promenila u odnosu na odabrani bazni period.

Bazni indeksi se računaju na sledeći način:

$$I_t = \frac{Y_t}{Y_b} \cdot 100 \ , \ t = 1,2,\cdots,N$$

Gde je Y_b vrednost pojave u nekom izabranom baznom periodu. (uobičajeno je da se za bazno razdoblje uzima da je jednako b=100).

Prilikom statističke analize u praksi treba pažljivo birati bazno razdoblje jer se pogrešnim izborom mogu dobiti iskrivljene predstave o dinamici pojave. Ako se na primer za bazno razdoblje odabere ono razdoblje u kom je vrednost pojave najmanja u nizu, izračunati bazni indeksi će pokazivati porast u odnosu na bazu. Ako se, suprotno, za bazno razdoblje odabere ono u kom je vrednost pojave najveća u nizu, bazni indeksi će pokazivati stalan pad u odnosu na izabranu bazu. Na taj način se u praksi može manipulisati podacima.

Kako se bazni indeksi dobijaju deljenjem svakog člana niza istim brojem (bazom) i množenjem istim faktorom (sa 100), može se zaključiti da su bazni indeksi direktno proporcionalni originalnim vrednostima vremenskog niza, pa sve što se može izračunati deljenjem originalnih vrednosti pojave, može se dobiti i deljenjem baznih indeksa (naravno po istoj bazi).
Stoga važi da je geometrijska sredina verižnih indeksa:

$$G = \sqrt[N-1]{\frac{Y_N}{Y_1}} \quad \Rightarrow \quad G = \sqrt[N-1]{\frac{I_N}{I_1}}$$

gde su I_1 i I_N, prvi i poslednji bazni indeks u nizu.

Preračunavanje baznih indeksa po jednoj bazi u bazne indekse po drugoj bazi se vrši na sledeći način:

$$I_t^* = \frac{I_t}{I_b} \cdot 100$$

gde je b novo bazno razdoblje za indekse I_t^*.

Računanje verižnih indeksa preko baznih indeksa dato je sa:

$$V_t = \frac{Y_t}{Y_{t-1}} \cdot 100 \quad \Rightarrow \quad V_t = \frac{I_t}{I_{t-1}} \cdot 100 \quad , \quad t = 2,3,\cdots,N$$

gde su I_t i I_{t-1} bazni indeksi jednake baze.

Preračunavanje verižnih indeksa u bazne po nekoj bazi b:

- za razdoblja pre baznog (b=100), računa se unazad:

$$I_{t-1} = \frac{I_t}{V_t} \cdot 100$$

- za razdoblja posle baznog (b=100), računa se unapred:

$$I_t = \frac{V_t \cdot I_{t-1}}{100}$$

2.2.Grupni indeksi

Grupni indeksi predstavljaju relativne varijacije grupe srodnih pojava. Oni nam omogućuju praćenje kretanja kompleksnih celina, kao što su na primer: proizvodnja industrije, proizvodnja poljoprivrede, vrednost ukupnog prometa, cena prehambrenih proizvoda i slično.

Svi indeksi, individualni i grupni, svrstavaju se u tri osnovne grupe: **indekse cena**, **indekse količina** i **indekse vrednosti**. Iz ovih indeksa izvedeni su: indeksu produktivnosti, indeksi troškova života, indeksi nominalnih i realnih primanja i slični indeksi.

Grupni indeksi dele se na:
1. Neponderisane indekse,
2. Ponderisane indekse.

2.2.1.Neponderisani grupni indeksi

Zajedničke varijacije više vremenskih serija mogu se izraziti na dva načina: **metodom agregata** i **metodom prosečnih odnosa** (srednjih vrednosti) individualnih indeksa sastavnih serija.

i) Po *metodu agregata* grupni indeksi se izračunavaju na taj način što se zbir podataka svih sastavnih serija u posmatranom periodu stavi u odnos prema zbiru podataka istih tih serija u baznom periodu.

Označimo sa:
$p_0\ , q_0 -\ cena\ i\ količina\ u\ baznom\ periodu$,
$p_i\ , q_i -\ cena\ i\ količina\ u\ posmatranom\ periodu.$

Formule za izračunavanje grupnih indeksa su sledeće:
Indeks cena: $I_p = \frac{\sum p_i}{\sum p_0}$,
Indeks količina: $I_q = \frac{\sum q_i}{\sum q_0}$,
Indeks vrednosti: $I_{pq} = \frac{\sum p_i q_i}{\sum p_0 q_0}$.

ii) *Metod prosečnih odnosa* ili srednjih vrednosti ne polazi od prvobitnih podataka obuhvaćenih serija, nego od njihovih individualnih indeksa, sračunatih na isti period kao bazu i uzima srednju vrednost tih indeksa za posmatrani period.

Koristeći aritmetičku sredinu kao srednju vrednost individualnih indeksa, grupni indeksi se računaju na sledeći način:

Indeks cena: $\overline{I_p} = \frac{\sum I_p}{n} = \frac{\sum \frac{p_i}{p_0}}{n}$,

Indeks količina: $\overline{I_q} = \frac{\sum I_q}{n} = \frac{\sum \frac{q_i}{q_0}}{n}$,

Indeks vrednosti: $\overline{I_{pq}} = \frac{\sum I_{pq}}{n} = \frac{\sum \frac{p_i q_i}{p_0 q_0}}{n}$,

gde n predstavlja broj individualnih indeksa.

2.2.2.Ponderisani grupni indeksi

S obzirom na to da se grupni indeks utvrđuje za grupu različitih proizvoda i usluga i da pri tome neke grupe ili delovi grupa imaju veći značaj u odnosu na ostalem, važnost nekog dela (ponder) u grupi može se odrediti na različite načine.

Utvrđivanje grupnih indeksa odvija se u nekoliko koraka. To su:

- → definisanje grupe pojava i namene grupnih indeksa;
- → izbor elemenata za grupni indeks i njihova identifikacija;
- → prikupljanje podataka o elementima;
- → izbor baze indeksa, određivanje pondera i izraza za izračunavanje grupnih indeksa;
- → ocena reprezentativnosti indeksa kao prosečnih veličina i sprovođenje testova o nihovim teorijskim osobinama.

Osnovni zadatak konstrukcije grupnog indeksa količina je to da relativno izrazi promene fizičkog obima grupe pojava, dok grupnim indeksom cena treba pružiti brojčanu informaciju o relativnoj promeni cena grupe pojava. Kako se u krajnjoj liniji obračun grupnih indeksa sprovodi pomoću vrednosti, to se kod grupnog indeksa količina izoluje uticaj cena, a kod grupnog indeksa cena odstranjuje se uticaj promena količina.

Kod izračunavanja indeksa cena za pondere se uzimaju količine proizvoda, dok obratno kod indeksa količina (fizičkog obima) za pondere se uzimaju cene pojedinačnih proizvoda. Ako bismo, na primer, kod indeksa cena kao pondere uzeli količine proizvedenih ili prodatih

proizvoda u tekućem i baznom periodu ne bismo mogli dobiti pravu predstavu promena cena posmatrane grupe proizvoda, pošto bi tako izračunat indeks odražavao i te promene. Zbog toga, da bi se došlo do jednog ukupnog pokazatelja koji odražava promene u cenama, važno je da se pođe od istih vrednosti pondera, odnosno količina i za bazni i za tekući period.
U upotrebi su ***Laspeyresov*** i ***Paascheov*** oblik grupnih indeksa. Osnovna razlika je u tome da Laspeyresovi indeksi imaju pondere iz baznog razdoblja, a Pašeovi indeksi imaju pondere iz tekućeg razdoblja.

1) Grupni indeks cena

Grupni indeks cena je relativni pokazatelj dinamike kretanja cena skupa pojava u tekućem razdoblju u odnosu na bazno razdoblje.
Pretpostavimo da u grupi ima k različitih pojava, odnosno vremenskih nizova.
Količine u baznom razdoblju označimo sa $q_{10}, q_{20}, \dots, q_{i0}, \dots, q_{k0}$, a pripadajuće cene po jedinici mere u baznom razdoblju sa $p_{10}, p_{20}, \dots, p_{i0}, \dots, p_{k0}$.
Količine u sledećem razdoblju (izveštajnom razdoblju) označimo sa $q_{11}, q_{21}, \dots, q_{i1}, \dots, q_{k1}$, dok su pripadajuće cene u tom razdoblju $p_{11}, p_{21}, \dots, p_{i1}, \dots, p_{k1}$.

Laspeyresov grupni indeks cena predstavlja vaganu aritmetičku sredinu individualnih indeksa cena, gde su ponderi količine iz baznog, odnosno nultog razdoblja. Laspeyresov grupni indeks pokazuje za koliko posto su se promenile cene skupa pojava zajedno u tekućem razdoblju u odnosu na bazno razdoblje, računajući uz neizmenjene količine iz baznog razdoblja.
Agregatni oblik ovog indeksa je:

$$P_{01}(q_0) = \sum_{i=1}^{k} \frac{p_{i1}\, q_{i0}}{p_{i0} q_{io}} \cdot 100.$$

Međutim, u toku vremena dolazi do promena u stukturi posmatranog agregata, pa zadržavanje pondera iz baznog perioda dovodi do veće deformacije slike njegovih realnih promena. Posebno, što je duži period za koji se izračunavaju indeksi, povećana je verovatnoća da se promeni relativno značenje pondera. Na taj način se umanjuje reprezentativnost indeksa i rešenje se svodi na izvod: ili da se započne sa novim sistemom indeksnih brojeva ili da se produži sa starim ali sa izmenjenim ponderima. Ovakvo rešenje može da se dobije Pašeovom metodom.

Pašeov grupni indeks cena predstavlja vaganu aritmetičku sredinu individualnih indeksa cena, gde su ponderi količine iz izveštajnog, odnosno tekućeg razdoblja. Pašeov grupni indeks pokazuje za koliko posto su se promenile cene skupa pojava zajedno u tekućem razdoblju u odnosu na bazno razdoblje, računajući uz neizmenjene količine iz tekućeg razdoblja.
Agregatni oblik ovog indeksa je:

$$P_{01}(q_1) = \sum_{i=1}^{k} \frac{p_{i1}\, q_{i1}}{p_{i0}\, q_{i1}} \cdot 100.$$

Nepodobnost sistema ponderacije indeksnih brojeva na osnovu strukture iz tekućeg perioda proizilazi, s jedne strane, što u tekućem periodu često ne raspolažemo potrebnom dokumentacijom za određivanje pondera, i s druge strane, što pomoću te formule treba iz godine u godinu da menjamo sistem pondera. Zato se tekuća ponderacija retko primenjuje. Umesto nje, kada se pojave krupnija pomeranja u strukturi posmatrranog agregata pristupa se reviziji baznih pondera.

U statističkoj praksi moguća je kombinacija pondera iz baznog i takućeg perioda. Tako ***Fišerov grupni indeks*** cena predstavlja geometrijsku sredinu dva grupna indeksa, jednog sa ponderacionim faktorom iz baznog i drugog sa ponderacionim faktorom iz tekućeg perioda, odnosno

$$P_{01F} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \frac{p_{i1} q_{i1}}{p_{i0} q_{i1}} \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{p_{i1} q_{i0}}{p_{i0} q_{io}}} \cdot 100$$

Ovaj indeks se naziva **idealni indeks**, jer u najvećoj meri zadovoljava teorijske matematičke testove, ali je njegovo računanje veoma komplikovano i u praksi se retko primenjuje.
Isto tako, retko se primenjuje i ***Maršal-Edžvortov indeks*** cena koji je ponderisan zbirom ponderacionih faktora iz baznog i tekućeg perioda:

$$P_{01ME} = \frac{\sum_{i=1}^{k} p_{i1}(q_{i0} + q_{i1})}{\sum_{i=1}^{k} p_{i0}(q_{i0} + q_{i1})} \cdot 100$$

Određene analize u ekonomiji često u praksi zahtevaju posebne oblike grupnog indeksa cena. Od posebne je važnosti **indeks potrošačkih cena** (indeks troškova života) koji odražava promene cena dobara i usluga koje koristi referentno stanovništvo radi finalne potrošnje.
Indeks potrošačkih cena služi za merenje inflacije u privredi, za očuvanje vrednosti kod ugovora s indeksnim klauzulama kao osnova za deflacioniranje(uklanjanja uticaja inflacije) određenih vrednosnih pokazatelja.Pomoću ovog indeksa meri se uticaj potrošačkih cena na nominalne plate, odnosno računaju se realne plate.

$$Realne\ plate = \frac{Nominalne\ plate}{Ind.potr.cena} \cdot 100$$

Takođe važi:

$$Ind.real.pl. = \frac{Ind.nomin.pl.}{Ind.potr.cena} \cdot 100$$

gde su svi indeksi bazni po nekom istom odabranom razdoblju radi upoređivanja podataka.

Analogno se definišu i grupni indeksi količina.

2) Grupni indeks količina

Grupni indeks količina je relativni pokazatelj dinamike kretanja količina skupa pojava u tekućem razdoblju u odnosu na bazno razdoblje.

Laspeyresov grupni indeks količina predstavlja vaganu aritmetičku sredinu individualnih indeksa količina, gde su ponderi cene iz baznog, odnosno nultog razdoblja. Laspeyresov grupni indeks pokazuje za koliko posto su se promenile količine skupa pojava zajedno u tekućem razdoblju u odnosu na bazno razdoblje, računajući uz neizmenjene cene iz baznog razdoblja.

Agregatni oblik ovog indeksa je:

$$Q_{01}(p_0) = \sum_{i=1}^{k} \frac{q_{i1}p_{i0}}{q_{i0}p_{i0}} \cdot 100$$

Pašeov grupni indeks količina predstavlja vaganu aritmetičku sredinu individualnih indeksa količina, gde su ponderi cene iz izveštajnog, odnosno tekućeg razdoblja. Pašeov grupni indeks pokazuje za koliko posto su se promenile količine skupa pojava zajedno u tekućem razdoblju u odnosu na bazno razdoblje, računajući uz neizmenjene cene iz tekućeg razdoblja.

Agregatni oblik ovog indeksa je:

$$Q_{01}(p_1) = \sum_{i=1}^{k} \frac{q_{i1}p_{i1}}{q_{i0}p_{i1}} \cdot 100$$

Fišerov grupni indeks cena predstavlja geometrijsku sredinu dva grupna indeksa-LA, jednog sa ponderacionim faktorom iz baličnog i drugog sa ponderacionim faktorom iz tekućeg perioda, odnosno

$$Q_{01F} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \frac{q_{i1}p_{i0}}{q_{i0}p_{i0}} \sum_{i=1}^{k} \frac{q_{i1}p_{i1}}{q_{i0}p_{i1}}} \cdot 100$$

Maršal-Edžvortov indeks količina je ponderisan zbirom ponderacionih faktora iz baznog i tekućeg perioda:

$$Q_{01ME} = \frac{\sum_{i=1}^{k} q_{i1}(p_{i0} + p_{i1})}{\sum_{i=1}^{k} q_{i0}(p_{i0} + p_{i1})} \cdot 100$$

3) Grupni indeks vrednosti

Grupni indeks vrednosti je relativni pokazatelj dinamike kretanja vrednosti skupa pojava u tekućem razdoblju u odnosu na bazno razdoblje.

Vrednost je proizvod količine i cene nekog proizvoda:

$$V_i = q_i p_i$$

Vrednost je rezultat uticaja količina i cena, pa u određivanju tog tipa indeksa treba da do izražaja istovremeno dođu oba faktora.

Grupni indeks vrednosti dat je izrazom:

$$V_{01} = \frac{\sum_{i=1}^{k} q_{i1} p_{i1}}{\sum_{i=1}^{k} q_{i0} p_{i0}} \cdot 100$$

U brojiocu ovog izraza je vrednost izveštajnog razdoblja, a u imeniocu je vrednost baznog razdoblja.

Ove tri vrste grupnih indeksa su u međusobnoj vezi:

Grupni indeks vrednosti jednak je proizvodu odgovarajućeg grupnog indeksa količina i grupnog indeksa cena:

→ Grupni indeks vrednosti je, dakle, proizvod Pašovog grupnog indeksa količina i Lasperseovog grupnog indeksa cena,

$$V_{01} = \frac{\sum_{i=1}^{k} q_{i1} p_{i1}}{\sum_{i=1}^{k} q_{i0} p_{i0}} \cdot 100 = \frac{\sum_{i=1}^{k} \frac{q_{i1} p_{i1}}{q_{i0} p_{i1}} \cdot 100 \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{p_{i1} q_{i0}}{p_{i0} q_{io}} \cdot 100}{100} = Q_{01}(p_1) \cdot P_{01}(q_0),$$

→ Grupni indeks vrednosti jednak proizvodu Lasperseovog grupnog indeksa količina i Pašovog grupnog indeksa cena:

$$V_{01} = \frac{\sum_{i=1}^{k} q_{i1} p_{i1}}{\sum_{i=1}^{k} q_{i0} p_{i0}} \cdot 100 = \frac{\sum_{i=1}^{k} \frac{q_{i1} p_{i0}}{q_{i0} p_{i0}} \cdot 100 \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{p_{i1} q_{i1}}{p_{i0} q_{i1}} \cdot 100}{100} = Q_{01}(p_0) \cdot P_{01}(q_1).$$

Poglavlje 3

Dow Jones indeksi

Indeksi kao pokazatelji na tržištu akcija nastali su kao posledica nastojanja investitora da kupe jeftino i prodaju skupo. Tako je nastala potreba za predviđanjem kretanja cena akcija. Osnovna karakteristika akcijskih indeksa, kao indikatora kretanja cena akcija, jeste da oni ne govore o tome kako će se cene kretati u budućnosti, već pokazuju koliko su se cene pomerile u odnosu na prethodni period. Usavršavanje indeksa ima za cilj da što bolje, pouzdanije odraze promene cena akcija na određenom tržištu.

Danas se najpoznatiji indeksi kretanja cena akcija mogu podeliti u dve grupe:

1. Indeksi ponderisani cenom,

2. Indeksi ponderisani tržišnom vrednošću.

Najpoznatiji indeksi ponderisani cenama su: Dow Jones Averages, od kojih je najpoznatiji **Dow Jones Industrial Average**, zatim, Value Line Composite Average, koji uključuje više od 1600 akcija kotiranih na Njujorškoj berzi i vanberzanskom tržištu, Nikkei 225 Stock Average, koji obuhvata 225 akcija najvećih japanskih firmi itd. [11]

Dow Jones & Company je osnovan 1882., a pokrenuo je svoj prvi akcijski indikator 1884. godine sa indeksom koji se uglavnom sastojao od akcija železnice. Ovaj indikator kasnije postaje poznat pod imenom Dow Jones prosek prevoza. 1896. godine kompanije pokreću Dow Jones Industrial Average (DJIA), najpraćeniji berzanski indikator na svetu, koji prati najveću svetsku berzu. Sastavljen je od 30 pouzdanih američkih kompanija iz različitih grana privrede.

Pored Dow Jones Industrial Average postoje još :

1. **Dow Jones Transportation Average**, objavljen 1896. godine. U početku se sastojao od 20 železničkih kompanija dok se danas sastoji od 20 transportnih kompanija,
2. **Dow Jones Utilities Average**, objavljen 1929. godine, sastoji se od 15 kompanija iz domena uslužnih delatnosti,
3. **Dow Jones globalni indeks**, razvijen je u skorije vreme i uključuje 3000 različitih indeksa koji prate cene akcija više od 5000 kompanija u 36 zemalja.

Indeksi su kapitalizacija slobodnog kursa tržišta izmereni radi prikazivanja dela deoničarskih akcija koje su raspoložive za trgovinu. Ovo se postiže korigovanjem ukupnog broja deoničarskih akcija pomoću akcija koje se drže u strateškim holdinzima, tj. blok vlasništvu.

Ovo korigovanje blok vlasništva se primenjuje ukoliko se blokovi od barem 5% od ukupnog broja nekih deoničarskih akcija nalaze u:

- Mešovitom vlasništvu: akcije poseduje sama kompanija kao blagajničke zapise ili ih poseduju druge kompanije,
- Državnom vlasništvu: akcije poseduje ili vlada ili njene agencije,
- Privatnom vlasništvu: akcije poseduju ili individualna lica ili porodice.

Ovo korigovanje blok vlasništva se ne primenjuje ukoliko su:

- Blokovi manji od 5% od ukupnog broja akcija,
- Blokovi u vlasništvu starateljskih kompanije, holdinga i zajedničkih fondova itd.

Cene akcija koje se koriste za izračunavanje indeksa su:

1. Početna cena: prva kupoprodajna cena u toku zvaničnih radnih sati u sistemu tržišta akcija. Dok ovo ne bude na raspolaganju, koristi se završna/korigovana cena od prethodnog dana.
2. Završna cena: poslednja kupoprodajna cena u toku zvaničnih radnih sati sistema tržišta akcija. Ako se tog čitavog dana tom akcijom nije trgovalo, onda se koristi završna/korigovana cena od prethodnog dana.
3. Korigovana cena: završna cena se koriguje isto kao i neki respektivni akcionarski postupak koji stupa na snagu sledećeg radnog dana.

Cene akcija se naznačavaju u sledećim slučajevima:

- Obustavljen kurs: poslednja kupoprodajna cena pre obustave. Ako je obustava od pre zvaničnog otvaranja sistema berzanske trgovine, onda se koristi završna cena od prethodnog dana.
- Odmor za tržišni sistem: koriste se završne cene iz prethodnog dana za sve akcije izlistane na sistemu trgovine u pitanju.

Indeksi se računaju pomoću Laspejresove formule, koja meri promene cena naspram opterećenja kvantiteta fiksne osnove. Svaki indeks ima jedinstven indeksni delilac, koji se koriguje radi održavanja kontinuiteta vrednosti indeksa preko promena usled akcionarskih postupaka:

$$Index_t = \frac{\sum_{I=1}^{n} p_{It} q_{It} X_{It}^{EURO} f_{It}}{C_t \sum_{I=1}^{n} P_{I0} q_{I0} X_{I0}^{EURO}} \cdot base\ value = \frac{M_t}{B_t} \cdot\ base\ value$$

gde je:

n = broj akcija u indeksu
P_{I0}= završna cena akcija (*i*) na bazni datum
q_{I0}= broj akcija kompanije (*i*) na bazni datum
p_{I0} = cena akcija (*i*) u vreme (*t*)
q_{It} = broj akcija kompanije (*i*) u vreme (*t*)
f_{It} = faktor slobodnog kursa za kompaniju (*i*) u vreme (*t*)
C_t = faktor usklađivanja tržišne kapitalizacije za bazni datum
t = vreme kada se indeks izračunava
M_t = tržišna kapitalizacija indeksa u vreme (*t*)
B_t = tržišna kapitalizacija korigovanog baznog datuma indeksa u vreme (*t*)
X_{It}^{EURO} = stopa ukrštanja: domaća moneta u evrima kompanije (*i*) u vreme (*t*)
Base value = 1.000 za indeks stila i blu čip indeksa; a 100 za sve ostale indekse na bazni datum.

Tačnost podataka za izračunavanje indeksa je:

→ Ulazni podaci i drugi opšti podaci: zaokruženi na sedam decimalnih mesta

→ Indeksni delioci: zaokruženi na cele brojevi
→ Faktori slobodnog kursa: zaokruženi na četiri decimalna mesta
→ Indeksne vrednosti: zaokružene na dva decimalna mesta za rasturanje.

Izvori ulaznih podataka za izračunavanje indeksa uključuju tržišne platforme, nadzorne agencije, kompanije u proseku akcija koje se mogu investirati, povezani servisni provajderi itd.

Kao osnova za izračunavanje DJIA služi portfolio koji sadrži po jednu akciju svake firme obuhvaćene indeksom. Indeks se izračunava sabiranjem cena akcija odabranih kompanija i deljenjem specijalno određenim brojem – deliocem (*Divisor*). Delilac se objavljuje svakog dana u Wall Street Journalu.

$$DJIA_t = \frac{\sum_{i=1}^{30} p_{i,t}}{Divisor}$$

Na taj način firma koja ima veću cenu akcije učestvuje u indeksu sa većom težinom, ponderom. Takođe, ako cena neke akcije koja učestvuje u indeksu naglo poraste, ona automatski dobija veću težinu.

Prilagođavanje delioca se vrši :
→ u slučaju podele akcija neke firme (*stock split),*
→ u slučaju da akcija neke firme bude isključena (ili uključena u) iz portfolia na osnovu kojeg se izračunava indeks.

Ovo prilagođavanje se vrši da bi se neutralisao uticaj ovih izmena na indeks, jer je cilj da indeks odražava samo one promene cena akcija koje su rezultat trgovanja.

Pokažimo na primeru kako delilac funkcioniše.

Primer 1:
Pretpostavimo da imamo 3 fiktivne kompanije sa cenama akcija:
Arizona Aircraft 1200
Boston Bismuth 227
Carolina Cable 73

Za ove 3 fiktivne kompanije Dow 3 bi jednostavno bio ukupna suma cena akcija podeljen sa 3, odnosno:

$$\frac{1200 + 227 + 73}{3} = \frac{1500}{3} = 500$$

Pretpostavimo da Arizona Aircraft odluči da podeli akciju na 4 akcije, odnosno cena akcije sada iznosi 300 umesto 1200. Tada bi Dow 3 iznosio:

$$\frac{300 + 227 + 73}{3} = \frac{600}{3} = 200$$

što ne može da se desi jer promena Dow 3 ne bi bila posledica trgovanja već podele akcije kompanije.

Novi delilac dobijamo po formuli :

$$NewDivisor = \frac{NewSum}{OldSum} \cdot OldDivisor$$

Dobijamo da je novi delilac $\frac{600}{1500} \cdot 3 = 1.2$ i Dow 3 je ostao nepromenjen jer $\frac{600}{1.2} = 500$.

Pretpostavimo da posle nekoliko meseci cene akcija su sledeće:
Arizona Aircraft 316
Boston Bismuth 215
Carolina Cable 75
Dow 3 iznosi: $\frac{16+215+75}{1.2} = 505$

Editori sa Wall Street-a su odlučili da isključe Boston Bismuth sa Dow 3 liste, i da ulkjuče Delaware Drilling sa cenom 13 po akciji.
Arizona Aircraft 316
Delaware Drilling 13
Carolina Cable 75

Računamo novi delilac:

$$NewSum = 316 + 13 + 75 = 404$$

$$OldSum = 316 + 215 + 75 = 606$$

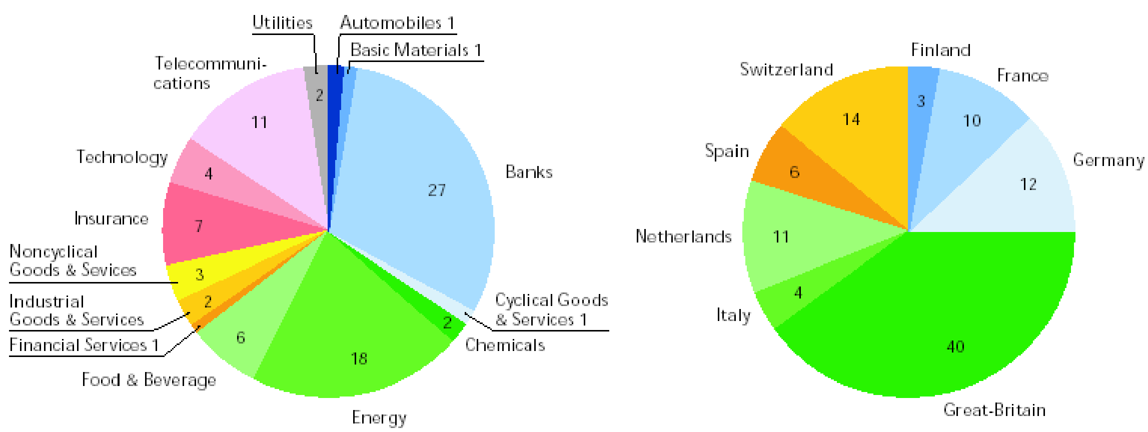
$$NewDivisor = \frac{404}{606} \cdot 1.2 = 0.8$$

Dow 3 ostaje nepromenjen jer $\frac{404}{0.8} = 505.$ □

Regionalna klasifikacija pokriva regionalni prosek na pet komplementarnih načina:

1. Evropa: kompanije koje su inkorporirane i izlistane u regionalnom univerzumu, bez obzira na trgovinsku monetu
2. Evrozona: kompanije uključene u Evrozonu, sa tamo primarnim listingom i koje trguju u evrima
3. Evropa bez regiona Velike Britanije
4. Nordijski region
5. Evropa bez regiona Evrozone.

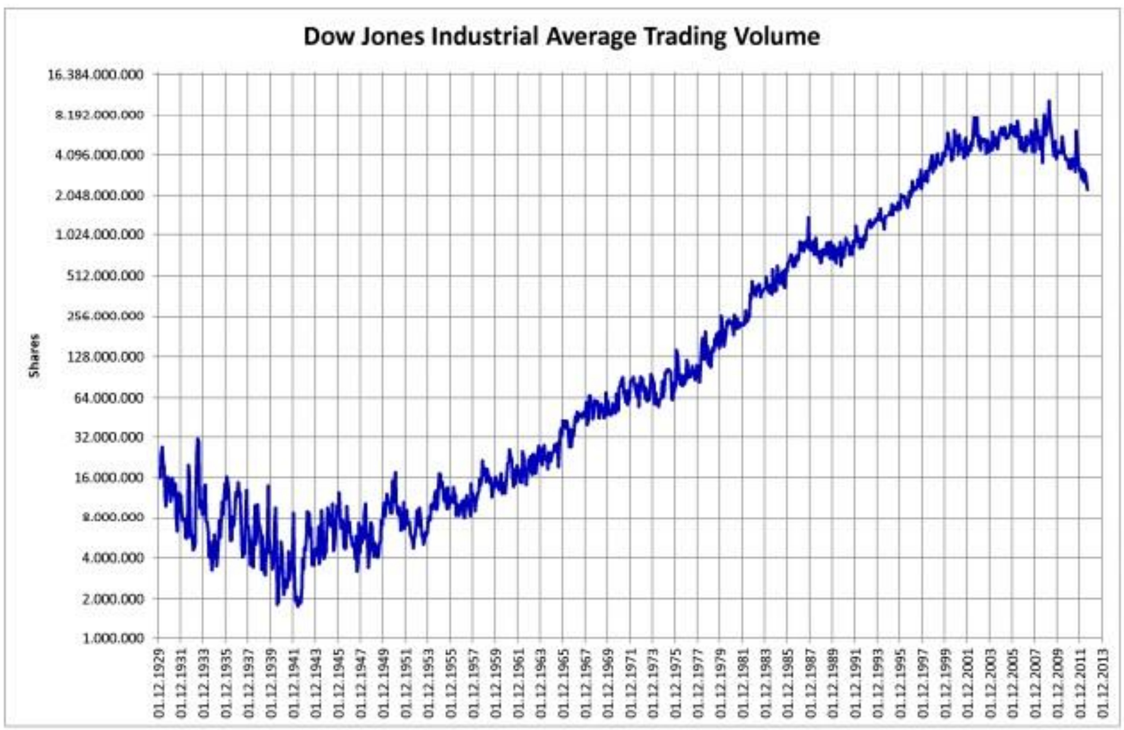
Zemlje koje su zastupljene u Dow Jones Indeksu, kao i privredne oblasti koje učestvuju u formiranju indeksa, prikazane su na sledećem grafiku:



Slika 3.1 Zastupljenost privrednih oblasti i zemalja u Dow Jones indeksu

Istorijski pregled

1884. godine Charles Dow je napravio listu akcija devet kompanija železnice i dve industrijske kompanije koja se pojavila u Customer's Afternoon Letter-dnevnim novinama na dve strane koja je bila preteča novina The Wall Street Journal. 2. januara 1986. godine, broj akcija je pao sa 14 na 12 zbog napuštanja dve kompanije železnica.



Slika 3.2 Mesečni obim trgovine u periodu od 1929. do 2013. godine

DJIA je prvi objavljen 26. maja 1896. godine i predstavljao je prosek akcija 12 američkih kompanija gde je samo General Electric ostao i dan danas. Ostalih jedanaest su bili:

1. American Cotton Oil Company,
2. American Sugar Company,
3. American Tobacco Company,
4. Chicago Gas Company,
5. Distilling & Cattle Feeding Company,
6. Tennessee Coal, Iron and Railroad Company,
7. National Lead Company,

8. North American Company,
9. U.S. Leather Company,
10. United States Rubber Company,
11. Laclede Gas Light Company.

Kada je prvi put objavljen indeks je bio na nivou **62.76**. Dostigao je vrhunac tokom leta 1890. godine – **78.38**, a svoj najveći pad ikada doživeo je tokom leta 1896. godine – **28.48** (taj period je inače nazvan ***Panika***). Najveći skokovi u cenama akcija se upravo dešavaju na početku DJIA sa rađanjem i sazrevanjem industrijske ekonomije. Kratak rat između SAD-a i Španske imperije je samo malo, skoro neprimetno, imao uticaj na DJIA. Period Panika se pojavio i 1901. i 1907. godine. Sve do 1914. godine ostaje raspon od 53 do 103 poena akcija. Zemljotres 1906. godine u San Francisku i Rusko-Japanski rat su isto imali mali uticaj, skoro neprimetan, na promenu visine akcija. Tu deceniju obeležava prosečna visina akcija od **99.05** poena.

Od 1910. do 1911. godine usledio je još jedan period Panika koji je gušio ekonomski rast. 30. jula 1914. godine visina akcija dospeva do nivoa **71.42** kada se i donosi odluka da se Njujorška berza zatvori na četiri i po meseca zbog rata. Kada se ponovo otvorila 12. decembra 1914. godine, indeks je imao pad **24.39%**. Septembra 1916. godine na spisku za trgovinu akcijama nalazi se 20 kompanija i zbog toga sledi još jedan pad cena akcija. Iako je usledio i pad ekonomske aktivnosti nakon Prvog svetskog rata, decembra 1919. godine prosečna visina akcija je **107.23** poena.

Tokom dvadesetih godina usledila je recesija, zatim Poljsko-Sovjetski rat, Irski građanski rat, Turski rat za nezavisnost i počele su pripreme za Kineski građanski rat. Nakon kraha koji se desio 13. novembra 1929. godine usledila je ***Velika depresija*** koja je trajala nekoliko godina i koja je dovela do velikog pada cena akcija, čak **90%** (08.7.1932. – **41.22**). 17. septembra 1929. godine, visina akcija je bila na nivou **381.17**, mada je samo nakon dva meseca usledila kriza tako da je kraj ove decenije obeležio nivo visine akcija **248.48**.

Recesija koja je zahvatila SAD 1937. i 1938. godine je jako pogodila i berzu tako da je kraj ove decenije obeležio pad na nivo **150.24**, čak **40%** manje. Posleratni period doneo je porast od **39%** (nivo **206**). Iako su usledile i dve krizne godine - godine recesije – 1953. i 1958. – to nije uticalo na berzu. Od nivoa 206 DJIA je skočio na nivo **616**.

Šezdesetih godina, SAD su bile uključene, kako u mnoga strana politička pitanja (Kubanski rat, Vijetnamski rat i dr.), tako i u unutrašnja (pokret za građanska prava, politička ubistva), takođe je došlo i do recesije 1960. i 1961. godine i sve to je doprinelo samo malom porastu cena akcija od **30%** odnosno nivo **800**.

Sedamdesete godine su bile protkane ekonomskom nesigurnošću i problematičnim odnosima SAD-a sa nekim zemljama Bliskog istoka. Ova decenija je započela recesijom 1969.-1970. godine. Nakon toga energetska i naftna kriza su isto prouzrokovale recesiju u par navrata, a vladala je i velika nezaposlenost i visoka inflacija. Iako je 14. novembar 1972. godine, DJIA bio na nivou **1003.16** do kraja ove decenije završio je na **838**.

Osamdesete godina, menjanjem zakona SAD-a, usledio je nagli porast cena na berzi. Zakonom je dozvoljeno korišćenje penzionih fondova i fondova novčanog tržišta na berzi. Stroge korekcije se dešavaju usput. Najveći pad jednodnevnog proseka još od 1914. godine se desio 19. oktobra 1987. godine (ovaj datum je poznat kao ***Crni Ponedeljak***) i iznosio je **22.61%**. Još uvek se ne zna tačan razlog za ovakav pad, ali je moguće da je program za trgovinu doprineo tome. 13. oktobar 1989. godine usledio je još jedan manji pad (mini pad koji je inicirao kolaps tržišta obveznica) od **7%**. Uprkos svemu (krize i padovi na tržištu, ratno stanje u svetu), berza beleži porast sa 838.-og na nivo **2753**.

Slika 3.3 DJIA na Crni ponedeljak 1987. godine

Devedesete godine su donele veliki napredak u tehnologiji, što je naročito izraženo pojavom interneta. Početkom devedesetih cena nafte je skočila, usledila je recesija i kriza u Evropi, poznata kao ***Crna Sreda***. Raspad SSSR-a i pad komunizma, bombardovanje Jugoslavije, ništa nije uspelo da ublaži entuzijazam koji je sa sobom doneo internet. Čak ni pojave genocida, rata u Africi koji je za posledicu imao gubitak od 5 miliona ljudi, nisu imali dovoljno negativan uticaj na DJIA. Između 1992. i 1993. godine DJIA je bio na nivou 3000 sa skromnim dobicima, dok je Biotehnološki sektor trpeo gubitke – biotehnološke kompanije su videle kako njihove akcije brzo rastu i dostižu rekordni nivo, nakon čega padaju na neki novi niži nivo. Sve do jula 1997. godine DJIA je beležio uspehe i došao do nivoa **8000**. Međutim, oktobra meseca iste godine usledila je finansijska kriza u Aziji koja je imala uticaj na pad nivoa DJIA od **554** poena. Usledila je i Ruska finansijska kriza, ali je vremenom nivo DJIA skočio na nivo **10 000**. Do kraja decenije zabeležen je nivo **11 497**.

U periodu od 2. januara 2001. godine pa do 11. septembra te iste godine, berza je zabeležila više padova. Naročito je septembar mesec bio slab jer je zabeležio padove od par stotina poena na dan. 11. septembra 2001. godine, berza je bila zatvorena, ali samo na par dana, jer se već 17. septembra otvara i do kraja godine se vraća na nešto viši nivo od **10 000** poena. Od 2002. do 2006. godine, uglavnom nije bilo naglih padova i porasta. Posle tog perioda berza beleži nagli skok do **14 000** poena, ali dolazi i do padova usred jačanja kineske valute – juana.

15. septembra 2008. godine, ekonomska kriza koja se brzo širila, postala je očigledna kada su braća Lehman podnela zahtev za stečajni plan zajedno sa ekonomskim efektom rekordno visokih cena nafte koja je tada dostigla cenu od 150 dolara po buretu. Tog dana DJIA je izgubio više od 500 poena po šesti put u svojoj istoriji. Ni zakon o hitnoj ekonomskoj stabilizaciji, predložen i sproveden od strane Federativne rezerve i Trezora SAD-a, a ni FDIC – korporacija za bankarsko spajanje nisu sprečili dalje gubitke. 6. maja 2010. godine, DJIA gubi skoro 1000 poena i taj datum se pamti kao "***Flash Crash***" zbog toga što je DJIA dotakao dno. Početkom maja 2013. godine DJIA je prešao nivo **15 000** po prvi put.

Slika 3.4 Flash Crash, 6.5.2010. godine

Poglavlje 4

Statistička analiza

U ovom poglavlju biće prikazana statistička analiza Dow Jones indeksa na osnovu dostupnih istorijskih podataka.[1]

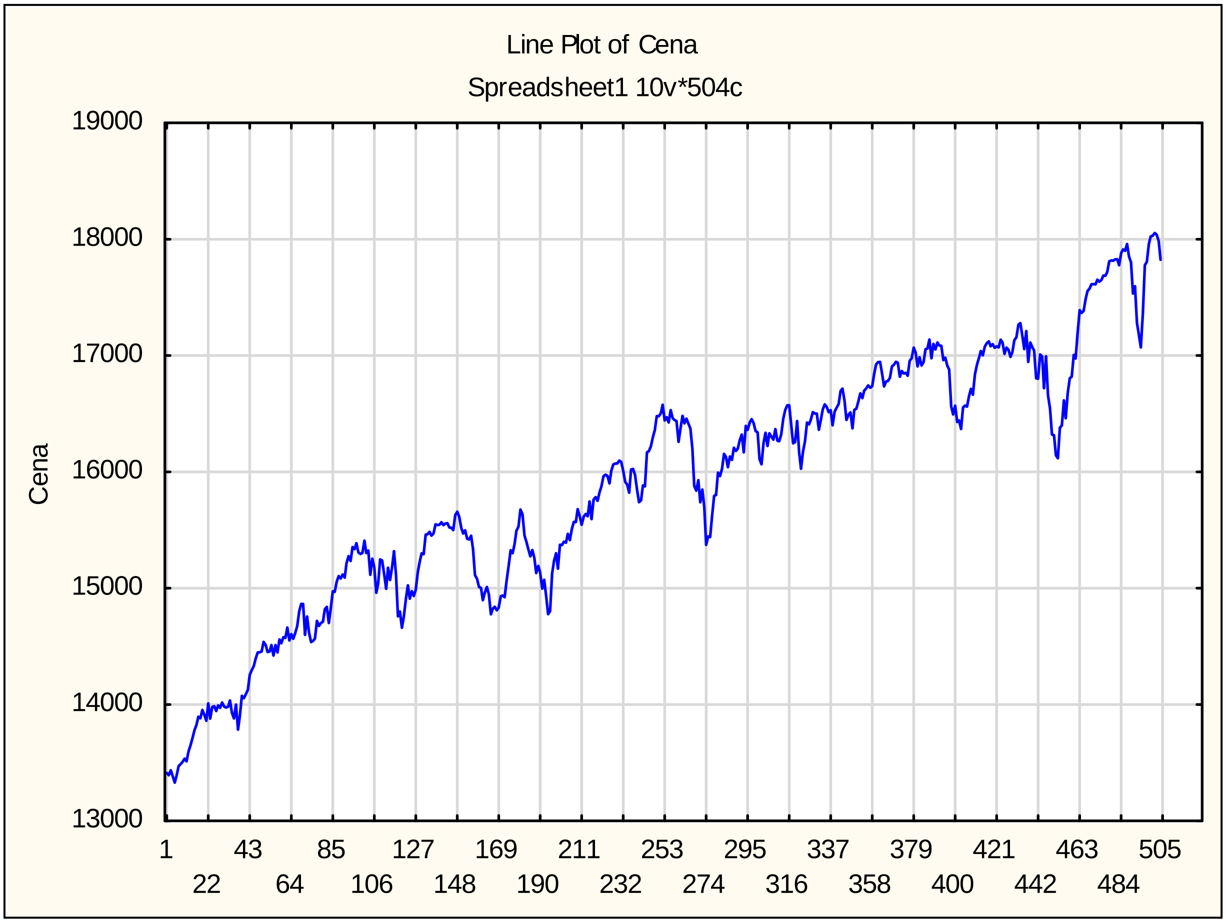
Analiza je sprovedena posmatrajući dostupne podatke o kretanju cene sa dva različita aspekta. Osnosno, posmatrali smo dve vremenske serije:

- dnevne vrednosti Dow Jones indeksa za vremenski period od dve godine (2013. i 2014. godina)
- mesečne vrednosti Dow Jones indeksa za vremenski period od deset godina (2001.-2010.godine).

Dnevno kretanje cena indeksa u periodu od 2013.-2014. godine dato je na *Grafiku 4.1*, dok je deskriptivna statistika data u *Tabeli 4.1.*

Analogno, mesečno kretanje cena indeksa u periodu od 2001.-2010. godine dato je na *Grafiku 4.2*, dok je deskriptivna statistika data u *Tabeli 4.2.*

[1] http://finance.yahoo.com/q/hp?s=%5EDJI+Historical+Prices

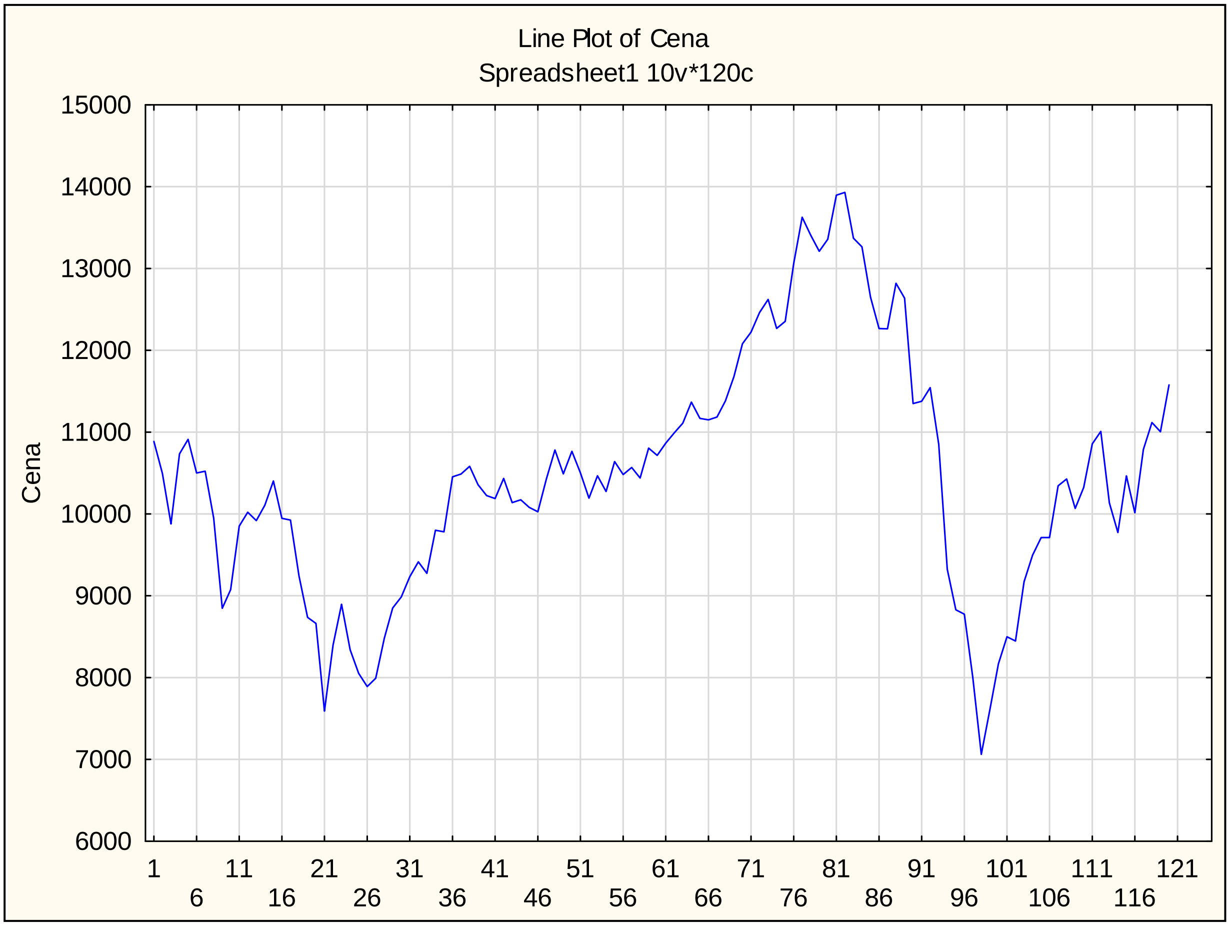


Grafik 4.1 Vremenska serija – kretanje cene akcije Dow Jones indeksa u period od 1.1.2013. do 31.12.2014. godine

Dnevno kretanje cene indeksa u toku 504 radna dana bilo je u interval 13328.85 i 18053.71. Najniža vrednost je zabeležena na početku 2013. godine, dok je najviša na kraju posmatranog perioda. Srednja vrednost je 15893.61, a standardno odstupanje 1091.425.

Descriptive Statistics					
Variable	Valid N	Mean	Minimum	Maximum	Std. Dev.
Cena	504	15893.61	13328.85	18053.71	1091.425

Tabela 4.1



Grafik 4.2 Prikaz mesečnog kretanje cena indeksa u period od 2001. do 2010. godine

Mesečno kretanje cene indeksa u toku 120 meseci bilo je u intervalu 7062.930 i 13930.01. Najniža vrednost je zabeležena na početku 2009. godine, dok je najviša na kraju 2007. godine. Srednja vrednost je 10457.10, a standardno odstupanje 1459.235.

Descriptive Statistics					
Variable	Valid N	Mean	Minimum	Maximum	Std. Dev.
Cena	120	10457.10	7062.930	13930.01	1459.235

Tabela 4.2

Na osnovu istorijskih podataka za ove dve vremenske serije želeli smo da predvidimo dnevno kretanje cene indeksa za prvih šest meseci naredne 2015. godine, odnosno mesečno za narednu 2011. godinu.

Analiza je rađena u statističkim softverima Statistica i R. Dobijeni podaci su prikazani u sledećim tabelama i graficima.

Vremenska serija za dnevne vrednosti indeksa

Kao što je već navedeno, posmatramo vrednosti indeksa na dnevnom nivou u toku radnih dana za dve kalendarske godine. Na osnovu tih vrednosti izračunate su dnevne predikcije cena za naredni period od šest meseci.

Predikcije su generisane koristeći ARIMA(p,d,q) modele opisane u Poglavlju 2. Formirali smo i analizirali 4 različita modela, pri čemu smo menjali parametre p i q, a za d smo uzimali da je 1:

- ARIMA(0,1,0)
- ARIMA(4,1,0)
- ARIMA(4,1,4)
- ARIMA(1,1,1)

Model	**Model Fit statistics**		**Ljung-Box Q(18)**		
	R-squared	**Normalized BIC**	**Statistics**	**DF**	**Sig.**
ARIMA(0,1,0)	.991	9.312	27.323	18	.073
ARIMA(4,1,0)	.991	9.362	20.740	14	.108
ARIMA(4,1,4)	.991	9.394	15.167	10	.126
ARIMA(1,1,1)	.991	9.338	26.647	16	.046

Tabela 4.3.

Na sledećim graficima prikazani su reziduali za autokorelacionu (ACF) i parcijalno autokorelacionu funkciju (PACF) za ova četiri ARIMA modela.

Zatim, dat je grafik sa kretanjem cene akcije Dow Jones indeksa u period od 1.1.2013. do 30.6.2015. godine.

Na kraju su prikazane dobijene predviđene cene i upoređene sa stvarnim cenama za period od 1.1.-30.6.2015. godine.

Adekvatnost modela testirana je pomoću **Ljung-Box testa**. Nulta hipoteza testa je da je model adekvatan odnosno da dobro fituje podatke. Test statistika ima χ_i kvadrat raspodelu. Na nivou značajnosti 5% , svi modeli sem model ARIMA(1,1,1) su se pokazali kao dobri.

Uobičajen pristup za odabir modela jeste koeficijent **BIC** (Bayesian information Criterion). indeks uklapanja:

$$BIC = -2\ln(L) + r\ln(n),$$

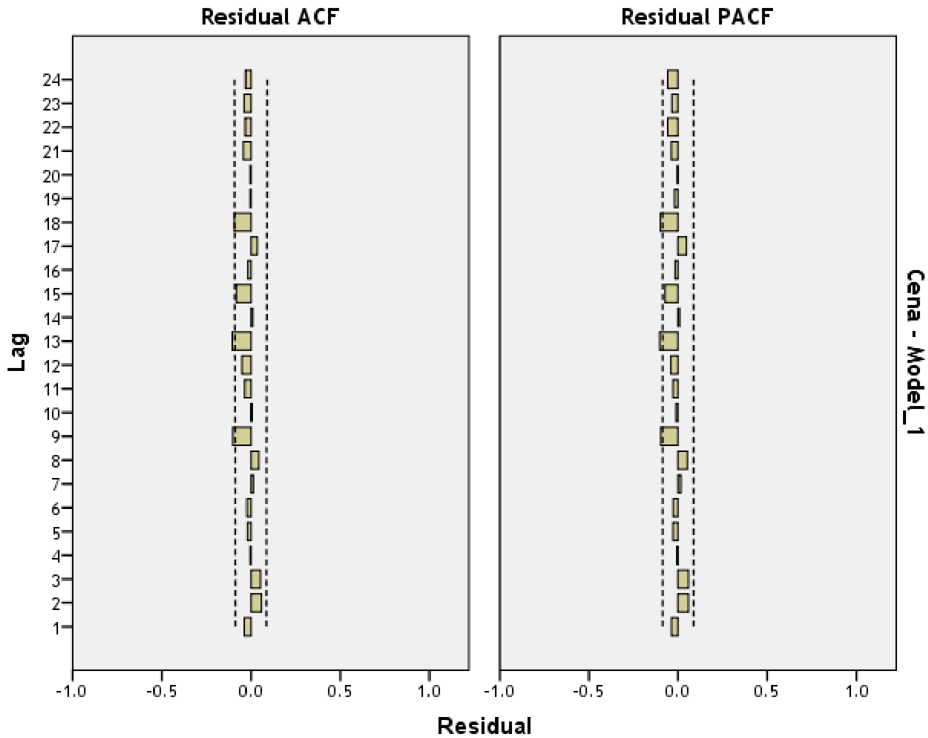
gde je: L funkcija verovatnoće modela (Likelihood Function - L), r broj parametara koji se ocenjuje uključujući odsečak. Drugi deo zbira $r\ln(n)$ je komponenta „kazne“ modela i predstavlja meru kompleksnosti modela ili kompenzaciju u slučaju nedostatka uklapanja podataka u model kada se koristi funkcija verovatnoće modela. „Kazna“ modela se povećava sa povećanjem broja podataka. [12]

Prema BIC kriterijumu, model sa manjim BIC koeficijentom se preferira. Iz *Tabele 4.3* možemo videti da model ARIMA(0,1,0) ima najmanji BIC koeficijent.

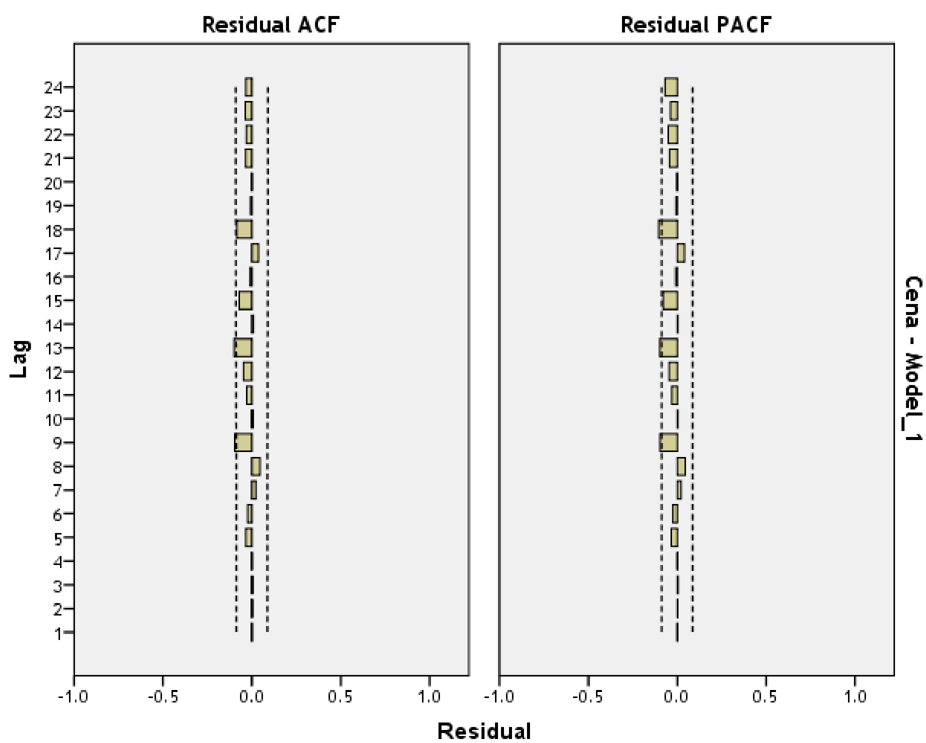
Izdvajanje modela ARIMA(0,1,0) kao najboljeg za modeliranje dnevnih kretanja cene indeksa potvrđuje i ugrađena funkcija **Auto.Arima()** u statističkom programu R. Ova funkcija koristi algoritam koji kombinuje test jediničnih korena, minimizaciju BIC i MLE kako bi se dobio najbolji ARIMA model. Na našem primeru, dobijeno da je najpogodniji model za pravljenje predikcije ARIMA(0,1,0).

Na sledećim graficima (Grafik 4.3-4.6) prikazani su reziduali za autokorelacionu (ACF) i parcijalno autokorelacionu funkciju (PACF) za ova četiri ARIMA modela.

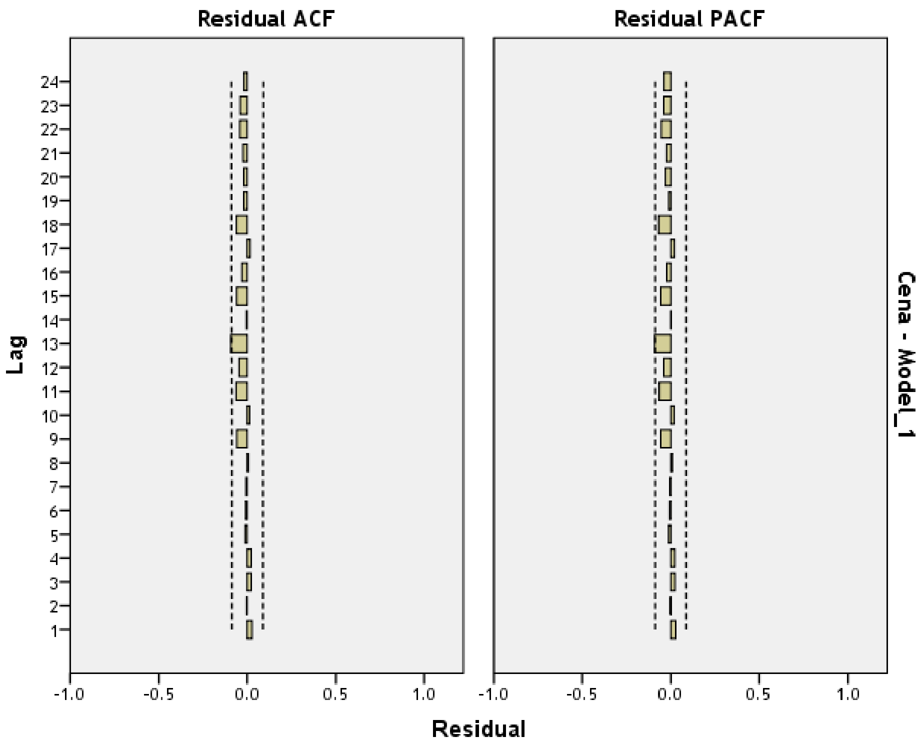
Zatim, na kraju su prikazane dobijene predviđene cene i upoređene sa stvarnim cenama za period od 1.1.-30.6.2015. godine.



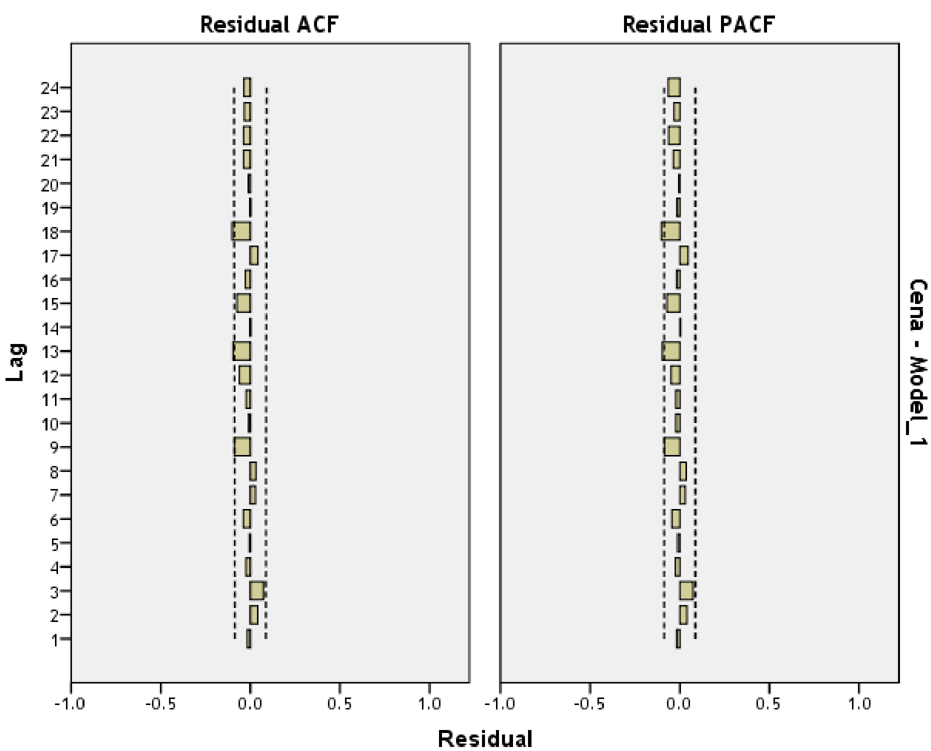
Grafik 4.3 Reziduali za ACF i PACF za ARIMA (0,1,0)



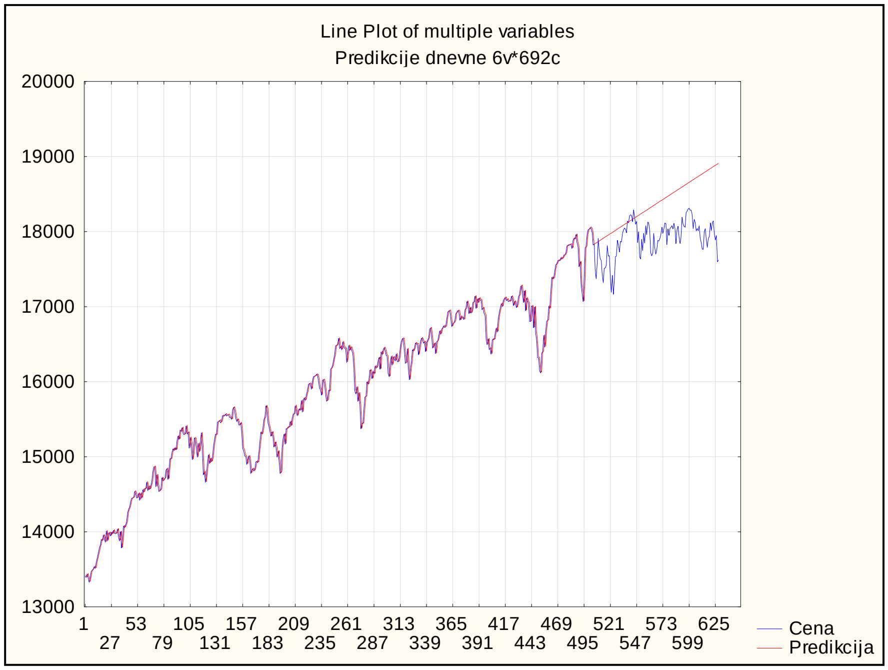
Grafik 4.4 Reziduali za ACF i PACF za ARIMA (4,1,0)



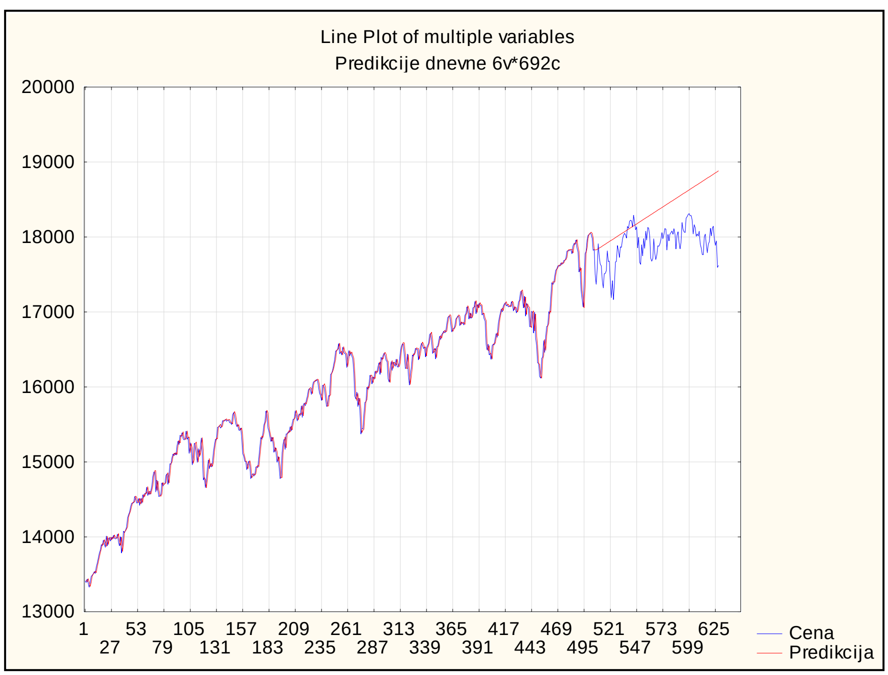
Grafik 4.5 Reziduali za ACF i PACF za ARIMA (4,1,4)



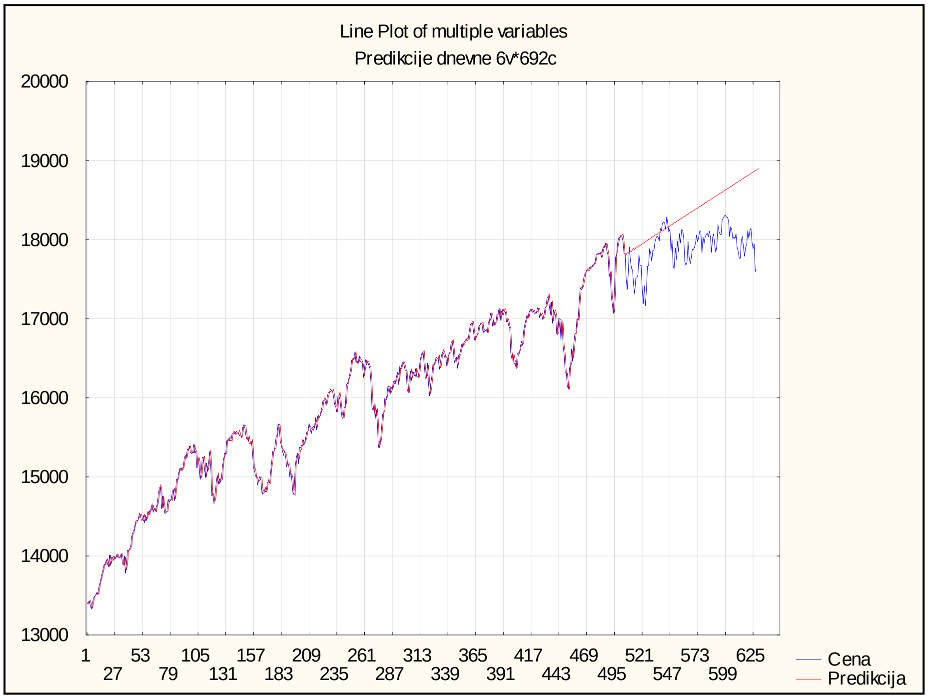
Grafik 4.6 Reziduali za ACF i PACF za ARIMA (1,1,1)



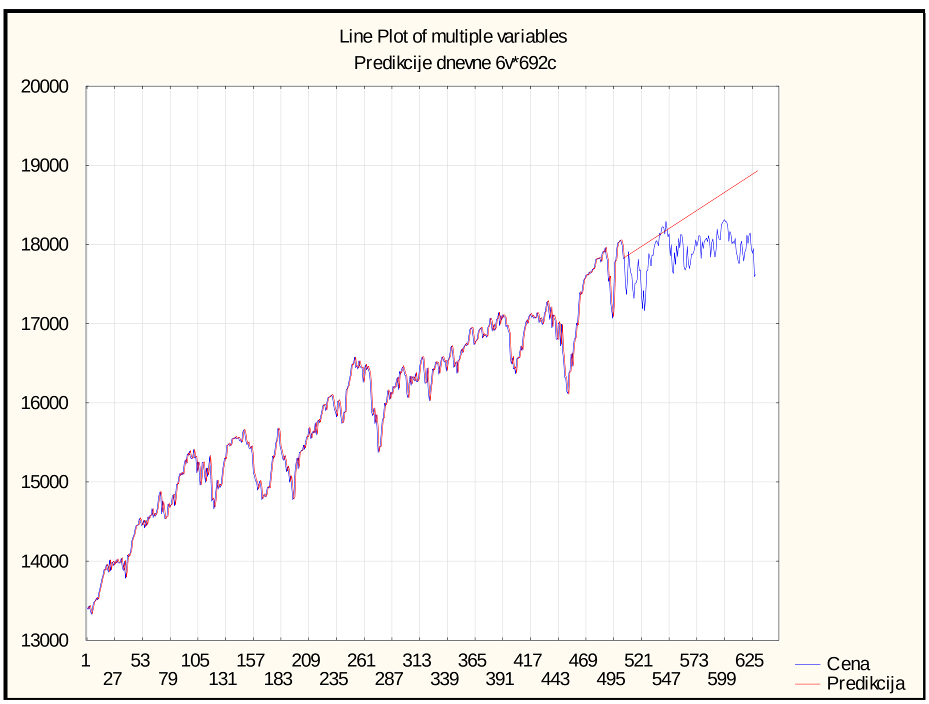
Grafik 4.7 Prikaz kretanja cene i predviđene cene dobijene korišćenjem modela ARIMA (0,1,0)



Grafik 4.8 Prikaz kretanja cene i predviđene cene dobijene korišćenjem modela ARIMA (4,1,0)



Grafik 4.9 Prikaz kretanja cene i predviđene cene dobijene korišćenjem modela ARIMA (4,1,4)



Grafik 4.10 Prikaz kretanja cene i predviđene cene dobijene korišćenjem modela ARIMA (1,1,1)

Vremenska serija za mesečne vrednosti indeksa

Kao što je već navedeno, posmatramo vrednosti indeksa na mesečnom nivou u toku deset uzastopnih godina, od 2001. do 2010. godine. Na osnovu tih vrednosti izračunate su mesečne cena za narednu godinu.

Predikcije su generisane koristeći ARIMA modele opisane u Poglavlju 2. Formirali smo i analizirali 4 različita modela:

- ARIMA(0,1,0)
- ARIMA(4,1,0)
- ARIMA(4,1,4)
- ARIMA(1,1,1)

Model	Model Fit statistics		Ljung-Box Q(18)		
	R-squared	Normalized BIC	Statistics	DF	Sig.
ARIMA(0,1,0)	.905	12.264	35.445	18	.058
ARIMA(4,1,0)	.913	12.369	10.362	14	.735
ARIMA(4,1,4)	.917	12.522	6.897	10	.735
ARIMA(1,1,1)	.910	12.306	24.591	16	.077

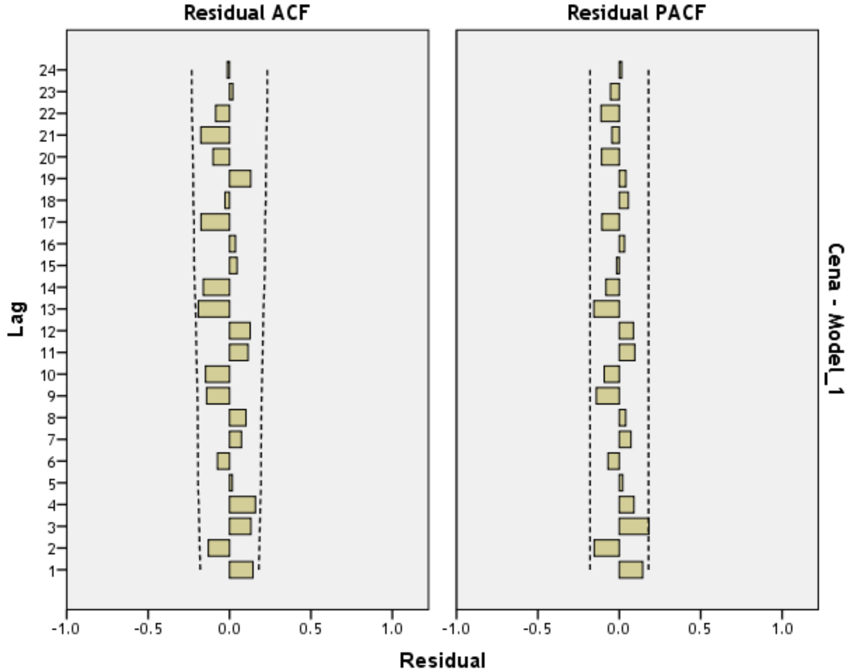
Tabela 4.4

Adekvatnost modela testirana je pomoću **Ljung-Box testa**. Nulta hipoteza testa je da je model adekvatan odnosno da dobro fituje podatke. Test statistika ima χ_i kvadrat raspodelu. Na nivou značajnosti 5% , svi modeli su se pokazali kao dobri.

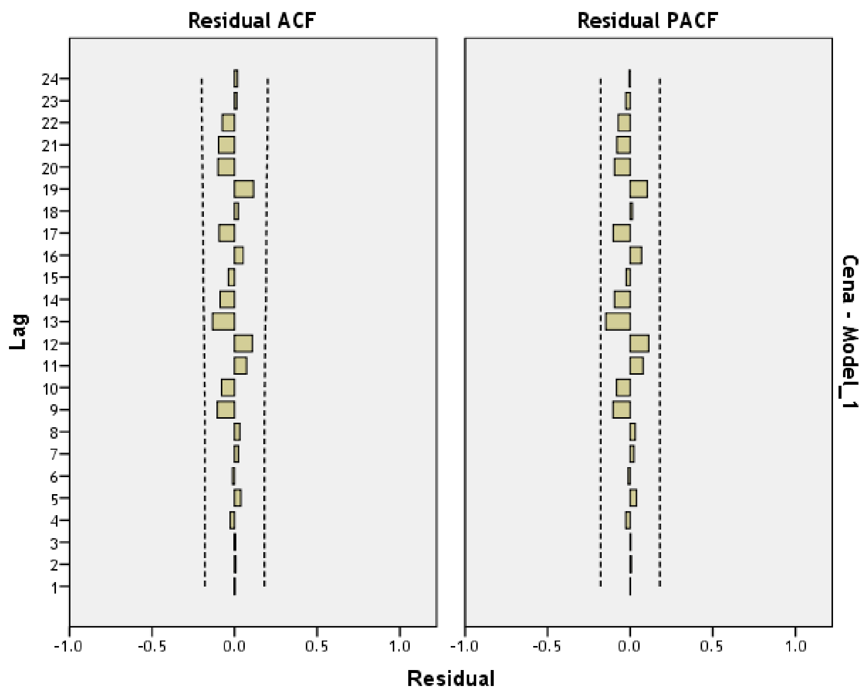
Prema BIC kriterijumu, model sa manjim BIC koeficijentom se preferira. Iz *Tabele 4.4* možemo videti da model ARIMA(0,1,0) ima najmanji BIC koeficijent. Izdvajanje modela ARIMA(0,1,0) kao najboljeg za modeliranje mesečnog kretanja cene indeksa potvrđuje i ugrađena funkcija **Auto.Arima()** u statističkom programu R.

Na sledećim graficima (Grafik 4.10-4.13) prikazani su reziduali za autokorelacionu (ACF) i parcijalno autokorelacionu funkciju (PACF) za ova četiri ARIMA modela.

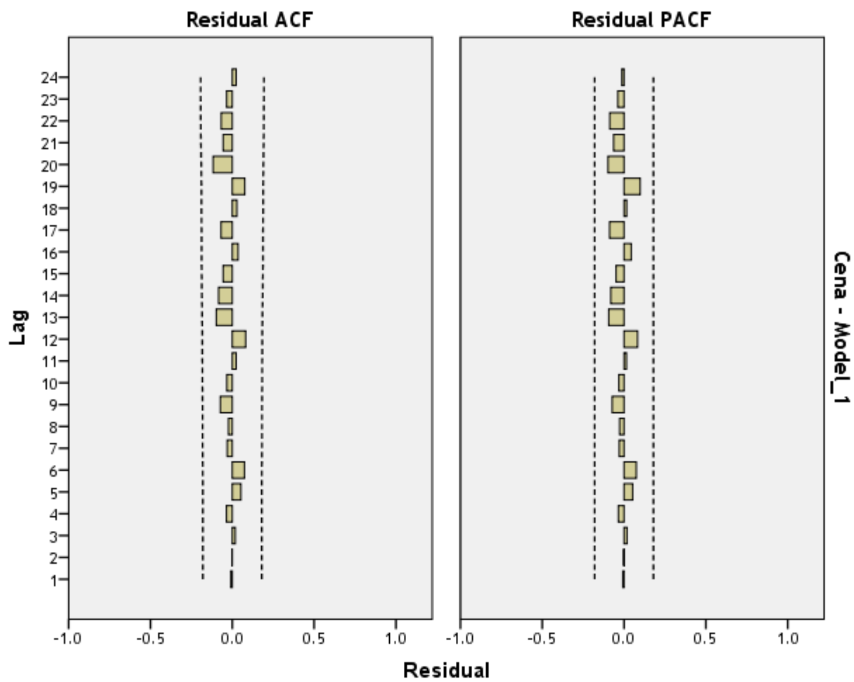
Zatim, na kraju su prikazane dobijene predviđene cene i upoređene sa stvarnim cenama za period od 1.1.-31.12.2011. godine.



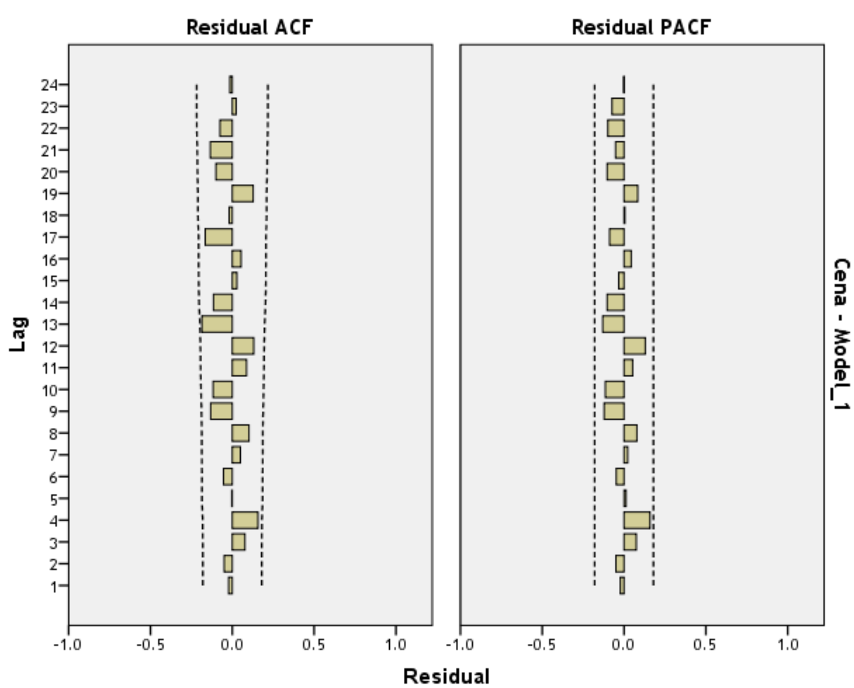
Grafik 4.10 Reziduali za ACF i PACF za ARIMA (0,1,0)



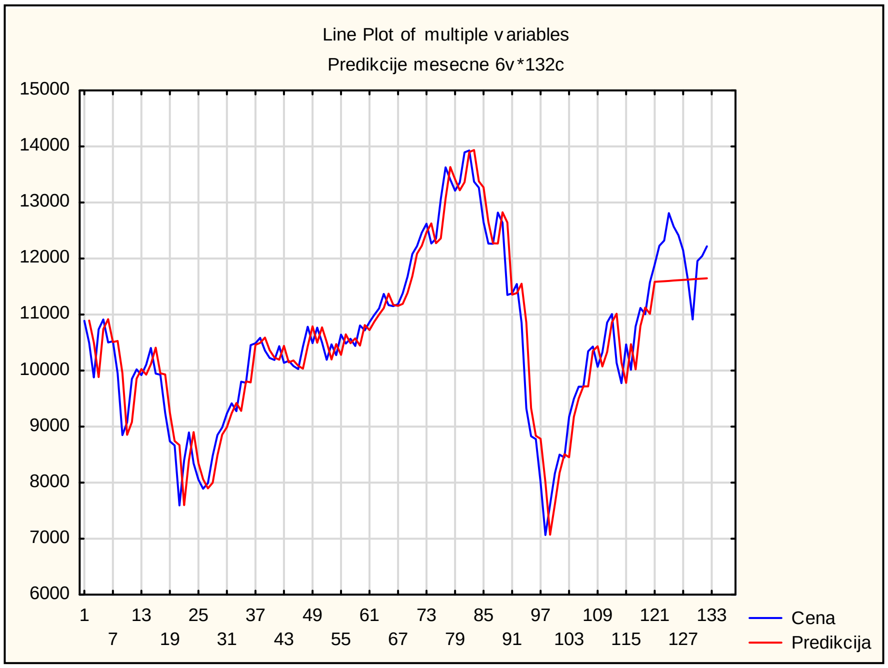
Grafik 4.11. Reziduali za ACF i PACF za ARIMA (4,1,0)



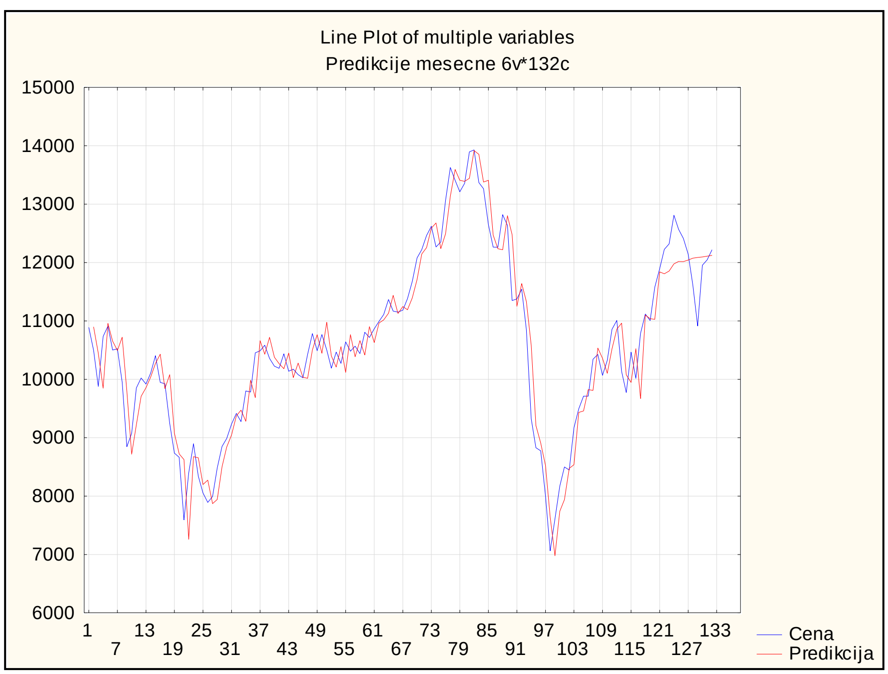
Grafik 4.12 Reziduali za ACF i PACF za ARIMA (4,1,4)



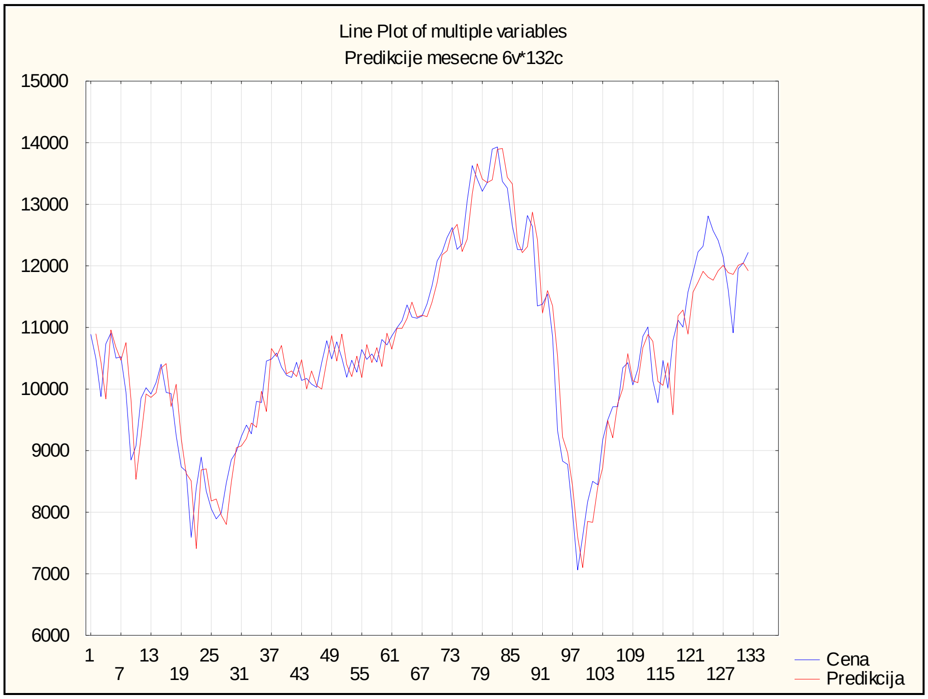
Grafik 4.13 Reziduali za ACF i PACF za ARIMA (1,1,1)



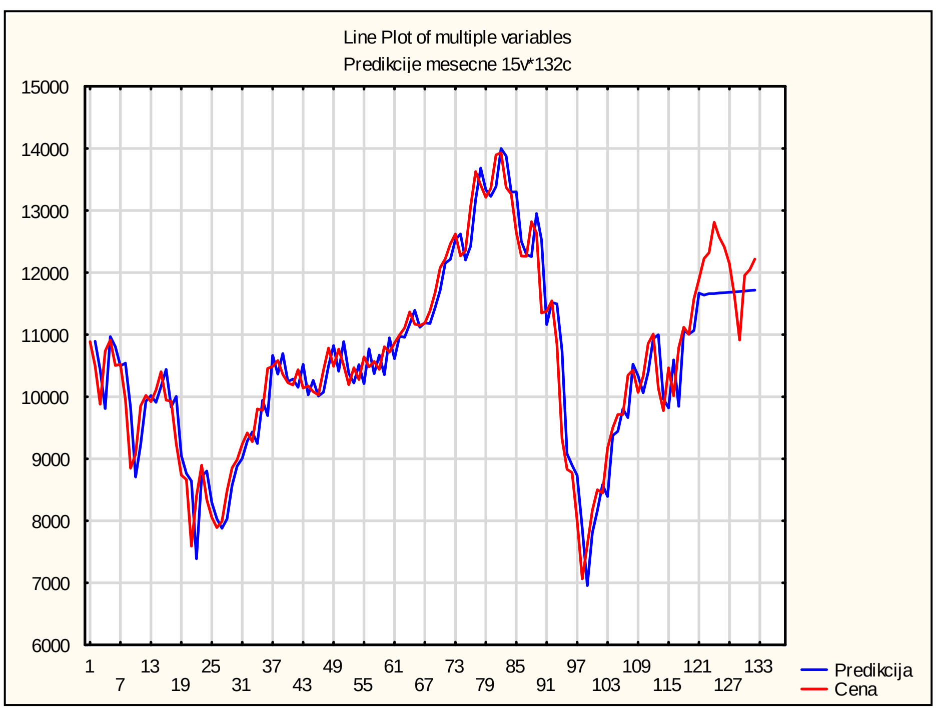
Grafik 4.14 Prikaz kretanja cene i predviđene cene dobijene korišćenjem modela ARIMA (0,1,0)



Grafik 4.15 Prikaz kretanja cene i predviđene cene dobijene korišćenjem modela ARIMA (4,1,0)



Grafik 4.16 Prikaz kretanja cene i predviđene cene dobijene korišćenjem modela ARIMA (4,1,4)



Grafik 4.17 Prikaz kretanja cene i predviđene cene dobijene korišćenjem modela ARIMA (1,1,1)

Literatura

1. Danijela Rajter-Cirić (2009), Verovatnoća, Univerzitet u Novom Sadu,

2. Danijela Rajter-Cirić (2012), Beleške sa kursa Stohastička analiza, Novi Sad

3. Campbell, J. Y., Lo, A.W., and MacKinlay, A.C. (1997), The Econometrics of Financial Markets, Princeton University Press: New Jersey

4. Natasa Krejić (2013), Beleške sa kursa Finansijska matematika 2, Novi Sad

5. Z. Mladenovic, A. Nojković (2012), Primenjena analiza vremenskih serija, Prvo izdanje, Centar za izdavačku delatnost Ekonomskog fakulteta u Beogradu

6. Ruey S. Tsay (2010), Analysis of Financial Time Series, 3rd Edition, John Wiley Sons, inc.

7. D. C. Montgomery, C. L. Jennings, M. Kulahci , (2008), "Introduction to Time Series Analysis and Forecasting", John Wiley & Sons, inc.

8. G. Kirchgässner, J. Wolters (2007), "Introduction to Modern Time Series Analysis", Springer

9. J. D. Hamilton, (1994), "Time Series Analysis James " Princeton University Press, New Jersey

10. Equiti Index, Futures & Options Information Guide, CME, Chicago Mercantile Exchange

11. Dow Jones STOXXSM Index Guide, January 2004, Version 7.3

12. Kenny DA. Measuring Model Fit. 2011 [cited 02.07.2012]; Available from:http://davidakenny.net/cm/fit.htm

Biografija

Petar Ostojić rođen je 01.05.1989. godine u Zagrebu. Osnovu školu "Svetozar Marković – Toza" završio je 2004. godine kao đak generacije. Iste godine upisao je Gimnaziju "Isidora Sekulić" u Novom Sadu, prirodno-matematički smer, i završio je 2008. godine sa odličnim uspehom. Po završetku gimnazije upisuje Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, smer primenjena matematika, modul - matematika finansija. Osnovne studije završava 2013. godine. Potom je upisao master studije na istom fakultetu. Položio je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom master studija u junskom ispitnom roku 2015. godine.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO–MATEMATICKI FAKULTET
KLJUCNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Master rad

VR

Autor: Petar Ostojić

AU

Mentor: prof. dr Zagorka Lozanov-Crvenković

MN

Naslov rada: Statistička analiza Dow Jones indeksa

NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: s / e

JI

Zemlja publikovanja: Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2015.

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno–matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4

MA Fizički opis rada: (6, 91, 14, 5, 0, 14, 1)

FO

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Statističko modeliranje

ND

Predmetna odrednica / Kljucne reči: statistika, vremenske serije, stohastički procesi, indeksi, Dow Jones indeksi

PO

UDK

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno–matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod:
Tema ovog rada je Statistička analiza Dow Jones indeksa. Dati su osnovni pojmovi prinosa aktive i osobine njihove raspodele verovatnoća. Takođe, izloženi su pojmovi ključni za slučajne procese kao što su stacionarnost, autokorelaciona i autokovarijansna funkcija procesa. U prvom delu su predstavljeni i osnovni pojmovi analize vremenske serije.
Prikazani su i neki od modela linearnih vremenskih serija: autoregresioni model (AR), model pokretnih proseka (MA), autoregresioni model pokretnih proseka (ARMA) i autoregresioni model pokretnih proseka za integrisane vremenske serije (ARIMA). Data je kratka analiza ovih modela i predviđanje budućih vrednosti vremenskih serija na osnovu ovih modela.
U drugom delu rada dati su pojmovi vezani za indekse, dok je u trećem poglavlju akcenat stavljen na indekse ponderisane cenama - Dow Jones Averages, od kojih je najpoznatiji Dow Jones Industrial Average (DJIA).
Na kraju, u četvrtom poglavlju, je na realnim podacima urađena statistička analiza Dow Jones indeksa u statističkim programima Statistica i R.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veca: 16.10.2015.

DP

Datum odbrane: Novembar 2015.

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: dr Ljiljana Gajić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, predsednik
Član: dr Zagorka Lozanov-Crvenković, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor
Član: dr Ivana Štajner-Papuga, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, član

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORD DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph documentation

DT

Type of record: Textual printed material

TR

Contents Code: Master's thesis

CC

Author: Petar Ostojić

AU

Mentor: Zagorka Lozanov-Crvenković, Ph.D.

MN

Title: Statistical analysis of Dow Jones index

TI

Language of text: Serbian

LT

Language of abstract: en / s

LA

Country of publication: Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2015.

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4

PP

Physical description: (6, 91, 14, 5, 0, 14, 1)

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Statistical Modeling

SD

Subject / Key words: statistics, time series, stochastic processes, indexes, Dow Jones indexes

SKW

UC:

Holding data: Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences,
University of Novi Sad

HD

Note:

N

Abstract: This thesis deals with Dow Jones index. The first chapter provides a brief overview of asset returns, the characteristics of their probability distribution and properties of volatility. Also, some basic terms for stochastic processes, such as stationarity, correlation and autocorrelation function are defined in this part. Second chapter deals with time series analysis. Some basic linear models are presented here, such as: simple autoregressive models (AR), simple moving-average models (MA), simple autoregressive moving-average models (ARMA) and autoregressive integrated moving-average models (ARIMA). A brief analysis of these models is given and forecasting future values of time series is described.
Central part of the thesis is reserved for The Dow Jones Industrial Average - one of the best-known index in the world. At the very end of the thesis on the real data was performed statistical analysis of the Dow Jones index in statistical software Statistica and R.
AB

Accepted by the Scientific Board on: 16.10.2015.

ASB

Defended: November 2015.

DE

Thesis defend board:
President: Ljiljana Gajić, Ph.D., full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, president
Member: Zagorka Lozanov-Crvenković, Ph.D., full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, supervisor
Member: Ivana Štajner-Papuga, Ph.D., associate professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, member