UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Nikola Đukanović

Hamiltonov princip i parcijalne diferencijalne jednačine

-MASTER RAD-

Novi Sad, 2014.

Sadržaj

1 Uvod

Iako se klasična mehanika može formulisati na nekoliko različitih načina, postoji jedan univerzalan metod koji postavlja klasičnu mehaniku kao klasu izoperimetrijskih problema, tj onih u kojima se traži neka kriva koja poseduje određena svojstva maksimuma (minimuma). Ovakva formulacija predstavlja suštinu Hamiltonovog principa, i kao takva i suštinu ovog rada.
Dido, osnivač i prva kraljica Kartagine, smatra se prvom osobom koja je prepoznala značaj izoperimetrijskih problema. U jednoj transakciji sa Severnoafričkim poglavicom, po ugovoru je stekla pravo na deo zemlje koji može da ogradi određenom količinom kože. Dido je kožu isekla na najmalje moguće trake i time obuhvatila ogromnu teritoriju. Ovim rešenjem zauzela je i mesto u istorije matematike i analitičke mehanike.
Heron iz Aleksandrije, je još jedna ličnost iz antike koja se bavila izoperimetrijskim problemima. On je dao pretpostavku da svetlost kada prolazi od jedne tačke do druge, u kojoj joj je putanja preprečena ogledalima, uzima putanju u kojoj je udaljenost tačaka najmanja. Ovaj princip je dodatno proširio, u sedamnaestom veku, Pjer de Ferma[1], francuski matematičar, koji je posmatrao svetlost koja prolazi kroz dva medija različite gustine i otkrio da svetlost uzima putanju u kojoj joj je potrebno najmanje vremena da dođe iz jedne tačke u drugu.
Prvi put su izoperimetrijski problem prepoznati u mehanici 1696. godine, kada su Gotfrid Lajbnic[2] i Johan Bernuli[3] postavili čuveni problem brahistokrona, u kojem je potrebno pronaći oblik krive po kojoj se kotrlja kuglica, bez trenja, pod uticajem konstantne gravitacione sile, tako da vreme od više tačke do niže bude najmanje. Ovaj pro-

[1] Pierre de Fermat (1601.-1665.), Francuski matematičar i pravnik
[2] Gottfried Wilhelm Leibniz (1646.-1716.) Nemački matematičar i filozof
[3] Johann Bernoulli (1667.-1748.) Švajcarski matematičar

blem je išao od jednog matematičara do drugog, sve dok ga konačno nije rešio Isak Njutn[4]. Nešto kasnije Leonard Ojler[5] predstavio nekoliko problema mehanike u izoperimetrijsku formu, na predlog Danijela Bernulija [6]. Konačno, opštu izoperimetrijsku formulaciju mehanike postavio je Hamilton u devetnaestom veku. Jednačine kretanja dobijene iz Hamiltonovog principa, nešto ranije je samostalno uspeo da dobije Jozef Lagranž[7].
Interesovanje za analitičku mehaniku u osamnaestom i početkom devetnaestog veka se u najvećem delu odnosilo na kretanje nebeskih tela i na traženju univerzalnog principa po kojem krefanje funkcioniše. Pjer Maupertius[8] je mislio da isoperimetrijska priroda mehanike vodi ka dokazu o postojanju Boga.
U međuvremenu opšti principi mehanike su isprobani u granama nauke koje su bile skromnije objašnjene; kao na primer prostiranje svetlosti, ponašanje elektriciteta i magnetizma, kao i veza među ovim pojavama, što je konačno rezultiralo da Maksvel[9] dođe do svojih jednačina koje opisuju elektricitet i magnetizam.

[4]Isaac Newton (1643.-1727.)
[5]Leonhard Euler (1707.-1783. Engleski matematičar i fizičar) Švajcarski matematičar i fizičar
[6]Daniel Bernoulli (1700.1782.) Švajcarski matematičar i fizičar
[7]Joseph-Louis Lagrange (1736.-1813.) Italijanski matematičar i astronom
[8]Pierre Louis Maupertuis (1698.-1759.) Francuski matematičar i filozof
[9]James Clerk Maxwell (1831.-1879.) Škotski matematičar i fizičar

2 Biografija

Slika 1: Hamilton

Ser Vilijam Ruan Hamilton(Sir William Rowan Hamilton), (rođen 4. Avgusta 1805. u Dablinu - umro 2. Septembra 1865. u Dablinu), je bio Irski matematičar, astronom i fizičar.

Kao sin advokata Hamilton nije provodio mnogo vremena sa ocem, pa je svoje štkolovanje započeo sa svojim ujakom, Džejmsom Hamiltonom (James Hamilton), Anglikanskim sveštenikom, sa kojim je živeo do svoje treće godine.Već sa pet godina pokazao je veliki talenat za jezike, do kada je već uspeo da savlada Latinski, Grčki i Hebrejski, a do svoje dvanaeste godine savladao je i Arapski, Sanskrit, Persijski, Sirijski i Francuski. Međutim, Hamiltonu je pored jezika dobro vladao i aritmetikom od najranijeg detinjstva, ali se ozbiljno zainteresovao za matematiku nakon čitanja Anlitičke geometrije Bartolomeja Lojda [10] u svojoj šesnaestoj godini (pre toga njegov interes u matematici bio je ograničen na pojedina poglavlja Euklida i Njutna). Nešto kasnije se značajnije zainteresovao za matematiku i počeo da čita radove Pjera-Simona Laplasa[11] i Jozefa-Luisa Lagranža.

U Dablinu, 1823. godine upisuje Triniti koledž (Trinity College), gde je briljirao ne samo u matematici i fizici već i u klasičnim na-

[10] Bartholomew Lloyd, Irski akademik

[11] Pierre-Simon Laplace (1749.-1827.), Francuski matematičar i astronom

ukama. 1827. godine Irska Kraljevska Akademija objavila je njegov rad o optici, a iste godine je imenovan za profesora astronomije na Triniti koledžu.

Hamiltonov prvi obljavljeni rad iz meatematike, "Teorija sistema zrakova", počinje ddokazujući da sitem zrakova u nekom delu prostora može biti fokusiran na jednu tačku u prostoru pomoću zakrivljenih ogledala ako i samo ako su ti zrakovi normalni na neki niz površi. Novina je bila da je Hamilton povezao sistem zrakova sa nekom karakterističnom funkcijom. Teorija karakterističnih funkcija je kasnije u potpunjena sa još tri rada. U ovim radovima, karakteristična funkcija zavisi od dve koordinate i vremena potrebnog da da svetlost prođe kroz optički sistem. Ukoliko je karakteristična funkcija poznata, može se doći do osnovnih svojstava optičkih sistema. Hamiltonov kolega Hamfri Lojd[12], profesor prirodne filozofije na Triniti koledžu, uspeo je da dokaže Hamiltonova tvrđenja eksperimentalno, što je dalje uzdiglo Hamiltonovu reputaciju. Godine 1833. Hamilton je metode primenjene u optici počeo da primenjuje na probleme u dinamici. Posle napornog rada odlazi do elegantnog metoda u kojem dodeljuje karakteristične funkcije sistemu čestica. Koristeći varijacione metode dolazi do jednačina kretanja sistema. Hamilton objavljuje dva rada "O opštom metodu u dinamici" (On a General Method in Dynamics), objavljenim 1834. i 1835., dge u drugom izražava svoje jednačine kredanja (Hamilton-Jakobijeve jednačine). Njegov rad je dalje usavršio nemački matematičar Karl Jakobi[13], posle čega je zančaj njegovog rada postao još očigledniji u razvoju nebeske mehanike, a nešto kasnije i kvantne mehanike. Dotada ppoznata mehanika dobila je novu formu i nasi naziv Hamiltonova mehanika.

1835. godine, u Dablinu dodeljena mu je počasna titula viteza od strane Britanske asocijecije za napredak nauke (British Association

[12]Humphrey Lloyd (1800.–1881.), Irski fizičar

[13]Carl Gustav Jacob Jacobi (1804.-1851.)

for the Advancement of Science). Dve godine kasnije, 1837. izabran je za predsednika Irske kraljevske akademije i ostao je na toj poziciji do 1846. godine.

Poslednjih dvadesetak godina svog života posvetio je svojoj strasti ka fundamentalnim principima algebre, objavljuje esej "O algebri kao nauci čistog vremena" (On Algebra as the Science of Pure Time) i razvije teoriju kvaterniona koja mu postaje opsesija do kraja života. Knjiga "Lekcije o kvaternionima" (Lectures on Quaternions) nije ostavila uticaja među matematičarima i fizičarima, a knjiga "Elementi kvaterniona" (Elements of Quaternions) ostala je nezavršena zbog njegove smrti u 60 godini života.

Potrebne teoreme i definicije

U ovom odeljku navešćemo neke od definicija i teorema koje su neophodne za dalje razumevanje teksta.

Definicija 1. *Norma* $\|\cdot\|$ *na vektorskom prostoru* V *je nenegativna, realna funkcija koja zadovoljava sledeće uslove:*

1. $\|v\| \geq 0 \quad \forall v \in V, \quad \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
2. $\|c \cdot v\| = |c| \cdot \|v\| \ \forall c \in \mathbb{R}, \quad \forall v \in V$
3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|, \quad \forall v, w \in V.$

Definicija 2. *Metrika indukovana normom na vektorskom prostoru* V *je data sa* $d(v, w) := \|v - w\| \ \ \forall v, w \in V.$

Razmatramo realne funkcije f na datom domenu Ω, neka je

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

za $1 \leq p < \infty$. Definišemo prostor Lebegovih funkcija

$$L^p(\Omega) := \{f(x) : \|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty\}$$

Definicija 3. *Normirani vektorski prostor* $(V, \|\cdot\|)$ *nazivamo Banahov vektorski prostor ako je kompletan u odnosu na metriku indukovanu normom* $\|\cdot\|$*.*

Teorema 1. *[2] Prostor* $L^p(\Omega)$ *je Banahov, za* $1 \leq p < \infty$*.*

Dokaz. U dokazu ćemo koristiti sledeću lemu:

Lema 1. *[2] Neka je X merljiv prostor i $1 \leq p < \infty$. Ako je $\{g_k \in L^p(X) : k \in \mathbb{N}\}$ niz u $L^p(X)$ takav da*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_{L^p} < \infty$$

tada postoji funkcija $f \in L^p(X)$ takva da

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k = f$$

gde suma konvergira skoro svuda u $L^p(X)$.

Neka je $\{f_k : k \in \mathbb{N}\}$ Košijev niz u $L^p(\Omega)$, tada možemo izabrati podniz $\{f_{k_j} : j \in \mathbb{N}\}$ takav da

$$\|f_{k_j+1} - f_{k_j}\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{1}{2^j}.$$

Zapisujeko $g_j = f_{k_j+1} - f_{k_j}$ i imamo

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|g_j\|_{L^p(\Omega)} < \infty,$$

pa po lemi suma

$$f_{k_1} + \sum_{j=1}^{\infty} g_j$$

konvergira skoro svuda i u $L^p(\Omega)$ ka funkciji $f \in L^p(\Omega)$. Stoga je limes podniza

$$\lim_{j\to\infty} f_{k_j} = \lim_{j\to\infty} \left(f_{k_1} + \sum_{i=1}^{j-1} g_i \right) = f_{k_1} + \sum_{j=1}^{\infty} g_j = f$$

postoji u $L^p(\Omega)$. Kako je početni niz bio košijev, sledi

$$\lim_{k\to\infty} f_k = f$$

u $L^p(\Omega)$, stoga je svaki Košijev niz konvergentan, to jest $L^p(\Omega)$ je Banahov. $\square$

Definicija 4. *Za dati domen Ω i kompaktan podskup $K \subset \Omega$, definišemo skup lokalno integrabilnih funkcija*

$$L^1_{loc}(\Omega) := \{f : f \in L^1(K) \quad \forall K \subset \Omega\}$$

Definicija 5. *Kažemo da funkcija $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ ima slabi izvod $\nabla^\alpha f$, ukoliko postoji funkcija $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ takva da važi*

$$\int_\Omega f(x)\phi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega g(x)\phi^{(\alpha)}(x)dx$$

za svako $\phi \in C^\infty(\Omega)$. Definišemo slabi izvod od f kao $\nabla^\alpha f = g$.

Neka je $k \in \mathbb{N}$ i neka je $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Pretpostavimo da postoje slabi izvodi $\nabla^\alpha f$ za svako $|\alpha| \leq k$. Definišemo normu

$$\|f\|_{H^{k,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|\nabla^\alpha f\|^p_{L_p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definicija 6. *Definišemo prostor Soboljeva*

$$H^{k,p}(\Omega) := \{f \in L^1_{loc}(\Omega) : \|f\|_{H^{k,p}(\Omega)} < \infty\}$$

$H^{k,p}(\Omega)$ je po definiciji normirani linearni vektorski prostor, sa normom $\|f\|_{H^{k,p}(\Omega)}$.

Teorema 2. *[3] Prostor Soboljeva $H^{k,p}(\Omega)$ je Banahov.*

Dokaz. Neka je $\{v_j\}$ Košijev niz u odnosu na normu $\|\cdot\|_{H^{k,p}(\Omega)}$. Kako je ova norma kombinacija normi $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ slabih izvoda, sledi da je $\forall|\alpha| \leq k$, $\{\nabla^\alpha v_j\}$ Košijev niz u odnosu na normu $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$. Stoga postoji $v_j \in L^p(\Omega)$ takav da $\nabla^l v_j - v^\alpha \to 0$, kada $j \to \infty$. Preostaje da pokažemo da $\nabla^\alpha v$ postoji i $\nabla^\alpha v = v^\alpha$.
Prvo primećujemo da ako $w_j \to w$ na $L^p(\Omega)$ tada $\forall\phi \in D(\Omega)$

$$\int_\Omega w_j(x)\phi(x)dx \to \int_\Omega w(x)\phi(x)dx$$

jer koristeći Holderovu nejednakost imamo

$$\|w_j\phi - w\phi\|_{L^p(\Omega)} \leq \|w_j w\|_{L^p(\Omega)}\|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0 \tag{1}$$

kada $j \to \infty$. Da bismo pokazali da je $\nabla^\alpha = v^\alpha$ moramo pokazati da je

$$\int_\Omega v^\alpha\phi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v\phi^{(\alpha)}(x)dx \qquad \forall\phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Ovo sledi iz definicije slabog izvoda i (1):

$$\int_\Omega v^\alpha\phi(x)dx = \lim_{j\to\infty}\int_\Omega \nabla^\alpha v_j\phi dx$$

$$= (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v_j\phi^\alpha(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v\phi^\alpha(x)dx \qquad \forall\phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

□

Definicija 7. *Funkcija $f : \mathbb{R}^m \supset \Omega \to \mathbb{R}^n$ je glatka ukoliko svi njeni parcijalni izvodi, svih redova postoje i neprekidni su.*

Skup svih glatkih funkcija na Ω označavamo sa $C^\infty(\Omega)$, a sa $C_0^\infty(\Omega)$ skup glatkih funkcija sa kompaktnim nosačem u Ω.

Definicija 8. *Neka je (X,d) metrički prostor, $f : X \to \mathbb{R}$ i $x \in X$.*

1. *Funkcija f je donje poluneprekidna u tački x ako za svaki niz $\{x_t\}$ u X, takav da $x_t \to x$ važi $\liminf f(x_t) \geq f(x)$.*

2. *Funkcija f je donje poluneprekidna ako je donje poluneprekidna za svako $x \in X$.*

Definicija 9. *Neka je $1 \leq p < \infty$, za niz $\{f_n\}$ in $L^p(\Omega)$ kažemo da konvergira slabo ka $f \in L^p(\Omega)$ ako važi*

$$\int_\Omega f_n(x)\phi(x)dx \to \int_\Omega f(x)\phi(x)dx$$

za svako $\forall \phi(x) \in L^q(\Omega)$ gde je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Označavamo $f_n \rightharpoonup f$ na $L^p(\Omega)$.

Teorema 3. *[4](Eberlein - Smulian) Banahov prostor E je refleksivan ako i samo ako svaki ograničeni niz u E ima konvergentan podniz koji konvergira slabo ka elementu iz E.*

Teorema 4. *(Rellich - Kondrachov) Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ otvoren, ograničen Lipšicov domen i neka je $1 \leq p < n$. Postavljamo*

$$p^* := \frac{np}{n-p}.$$

Tada je prostor Soboljeva $H^{1,p}(\Omega; \mathbb{R})$ neprekidno utopljen u $L^{p^*}(\Omega; \mathbb{R})$ i kompaktno utopljen u $L^q(\Omega; \mathbb{R})$ za svako $1 \leq q < p^*$. Simbolično zapisujemo:

$$H^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$$

i

$$H^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega), 1 \leq q < p^*.$$

Definicija 10. *Neka je $A = \{x \in \mathbb{R}^n : a_j \leq x_j \leq b_j, j = 1, ..., n\}$ interval u $\mathbb{R}^n$, tada je Lebegova mera skupa A:*

$$\mathcal{L}^n(A) = \Pi_{j=1}^n (b_j - a_j).$$

Ako je E merljiv skup onda je

$$\mathcal{L}^n(E) = \inf\{\mathcal{L}^n(U);\ U \supset E,\ U je\ otvoren\}.$$

Definicija 11. *Neka su X, Y topološki prostori i $(T, \mathcal{M}, \mu)$ merljiv prostor. Kažemo da je funkcija $f : X \times T \to Y$ Karateodorijeva ako zadovoljava sledeće uslove:*

(i) *$f(\cdot, u)$ je merljiva za svako u,*

(ii) *$f(t, \cdot)$ je neprekidna za svako t.*

Lema 2. *(Fatuova Lema) Neka je $\{f_n\}$ niz nenegativnih, merljivih funkcija, na merljivom prostoru (S, Σ, μ). Definišemo funkciju $F : S \to [0, \infty]$, pomoću*

$$f(s) = \liminf_{n \to \infty} f_n(s), \quad s \in S.$$

Tada je funkcija f merljiva i važi

$$\int_S f d\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int_S f_n d\mu.$$

Teorema 5. *(Beppo - Levi) Neka je (X, Σ, μ) merljiv prostor i neka je $(u_n)_{n \in \mathcal{N}} \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $u_n : X \to \mathbb{R}$ niz opadajućih $\mu-$integrabilnih funkcija. Neka je*

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} u_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$$

tačkasti infimum. Tada je $\inf_{n \in \mathbb{N}} u_n$ $\mu-$integrabilan ako važi

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \int u_n d\mu > -\infty$$

i tada važi

$$\int \inf_{n \in \mathbb{N}} u_n d\mu = \inf_{n \in \mathbb{N}} \int u_n d\mu.$$

3 Varijacioni račun

Varijacioni račun proučava ekstremne i kritične tačke funkcionela. Ova grana vuče korene iz mnogih oblasti, od geometrije i optimizacije do mehanike. Klasičan problem varijacionog računa dat na sledeći način: data je funkcionela $J : X \to \mathbb{R}$, gde je X skup dopustivih funkcija, koja je ograničena od dole. Potrebno je naći tačku $\overline{x} \in X$ (ukoliko postoji) tako da je

$$J(\overline{x}) = \inf_{x \in X} J(x).$$

Tipičan primer za funkcionele je

$$J(x) = \int_a^b f(t, x(t), \dot{x}(t))dt$$

gde su $a, b \in \mathbb{R}$ i f je neka neprekidna funkcija. Postoje dva pristupa ovom problemu; jedan je direktni metod, u kojem uzimamo niz tačaka (funkcija iz X) takav da niz vrednosti J konvergira ka infimumu od J, i tada pokušavamo da pokažemo da niz ili podniz konvergira ka minimizatoru. Ovo zahteva neku vrstu kompaktnosti, kako bismo pokazali da postoji konvergentan podniz minimizatora i neku vrstu donje poluneprekidnosti funkcije, kako bismo pokazali da je limes minimizator. Drugi pristup je indirektni metod, u kojem koristimo činjenicu da je svaka unutrašnja tačka ukojoj je J diferencijabilna i dostiže minimum, ujedno i kritična tačka ili stacionarna tačka J, što znači da je izvod od J jednak nuli. Dakle ispitujemo kritične tačke funkcije, rubne tačke i tačke u kojima funkcija nije diferencijabilna, u potrazi za minimumom.

Neophodan uslov za ekstrem funkcija na realnom domenu je da je prvi izvod jednak nuli. Ova ideja proširena je i na varijacioni račun, za funkcionele, tj funkcije čije je domen neki prostor funkcija sa potrebnim osobinama. Jedan od važnijih koncepata je Gatoovova varijacija.

Definicija 12. *Funkcionelu $\delta J(x)$ nazivamo Gatoovom varijacijom od*

J u tački x, ukoliko postoji limes

$$\delta J(x;h) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{J(x+\varepsilon h) - J(x)}{\varepsilon}$$

gde je h bilo koji vektor iz vektorskog prostora X.

Primetimo da su $x, h \in X$, kako je x nepoznata funkcija koja minimizira (ili maksimizira) funkcionelu, želimo da vidimo šta se dešava sa $J(x)$ kada malo promenimo funkciju x.To činimo tako što uzimamo neku funkciju h i množimo je malim brojem ε, dodajemo x i posmatramo vrednost $J(x+\varepsilon h)$. Dalje razmišljamo šta se dešava kada ε ide u nulu.

Izvod po pravcu funkcije $f(x_1, ..., x_n) = f(\overline{x})$ u pravcu datog vektora $\overline{h}$ je dat sa

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\overline{x} + \varepsilon \overline{h}) - f(\overline{x})}{\varepsilon}$$

ovde je vektor $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, a izvod po pravcu predstavlja stepen promene funkcije u pravcu vektora $\overline{h} \in \mathbb{R}^n$. Dakle Gatoov izvod proširuje ovaj koncept na prostor funkcionela, tj on predstavlja izvod po pravcu $J(x)$ u pravcu vektora h.

Definicija 13. *Kažemo da je funkcija J Gato-diferencijabilna ukoliko postoji Gatoova varijacija za svako $h \in X$.*

Gatoovu varijaciju možemo definisati i na sledeći način:

$$\delta J(x;h) = \frac{d}{d\varepsilon} J(x+\varepsilon h)\bigg|_{\varepsilon=0}$$

ovo nam olakšava računanje, pošto razmičljamo o $J(x+\varepsilon h)$ kao o realnoj funkciji koja zavisi samo od ε. Ova jednakost sledi iz definicije Gatoove varijacije i definicije prvog izvoda:

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(x+\varepsilon h)\bigg|_{\varepsilon=0} = \lim_{t \to 0} \frac{J(x+(\varepsilon+t)h) - J(x+\varepsilon h)}{t}\bigg|_{\varepsilon=0}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{J(x+th) - J(x)}{t} = \delta J(x;h)$$

Gatoova varijacija nam daje neophodan uslov za ekstram funkcionele.

Teorema 6. *[1] Neka $J : D \to \mathbb{R}$ gde je D otvoren podskup normiranog vektorskog prostora X. Neophodan uslov za ekstrem funkcionele $J(x)$ je*

$$\delta J(x;h) = 0, \qquad \forall h \in X.$$

Dokaz. Posmatramo $J(x)$, neka je $z \in D$ tačka minimuma i $h \in X$ proizvoljni vektor. Tada, za dovoljno malo ε važi

$$J(z+\varepsilon h) - J(z) \geq 0$$

sada je za $\varepsilon \geq 0$

$$\frac{J(z+\varepsilon h) - J(z)}{\varepsilon} \geq 0$$

i za $\varepsilon \leq 0$

$$\frac{J(z+\varepsilon h) - J(z)}{\varepsilon} \leq 0$$

puštamo $\varepsilon \to 0$ i zbog postojanja Gatoove varijacije imamo

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{J(z+\varepsilon h) - J(z)}{\varepsilon} \geq 0 \text{ i } \lim_{\varepsilon \to 0^-} \frac{J(z+\varepsilon h) - J(z)}{\varepsilon} \leq 0$$

odakle sledi

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{J(z+\varepsilon h) - J(z)}{\varepsilon} = \delta J(z;h) = 0.$$

Dokaz je sličan za slučaj da je z tačka maksimuma. □

Postojanje Gatoovoe varijacije je slab uslov za funkcionele, obzirom da ne koristi normu definisanu na X, stoga nije direktno povezan sa neprekidnošću funkcionele. Za tu svrhu definišemo Frešeov diferencijal.

Definicija 14. *Neka* $J : X \to \mathbb{R}$ *i* $dJ(x;h)$ *je neprekidna, linearna funkcionela od* h*, tada kažemo da je* J *Freše-diferencijabilna u* x *sa priraštajem* h *ukoliko važi*

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{J(x+\varepsilon h) - J(x) - dJ(x;h)}{\|h\|} = 0.$$

$dJ(x;h)$ *zovemo Frešeov diferencijal.*

Definicija 15. *Ukoliko je* $J : D \to \mathbb{R}$ *Freše-diferencijabilna za svako* $x \in D$ *kažemo da je Freše-diferencijabilna na* D.

Neke osobine Frešeovog diferencijala:

i) $J(x+h) = J(x) + dJ(x;h) + E(x;h)h\|h\|$ za bilo koje malo, različito od nule $h \in X$ ima limes jednak nuli, to jest

$$\lim_{h\to 0} E(x;h) = 0$$

ii) $dJ(x;ah+bg) = adJ(x;h) + bdJ(x;g)$ važi za svako $a, b \in \mathbb{R}$ i $g, h \in X$.

Teorema 7. *[1] Ako je funkcionela* $J : X \to \mathbb{R}$ *Freše-diferencijabilna u* x*, tada postoji Gatoova varijacija u* x *i jednaka je Frešeovom diferencijalu, to jest*

$$\delta J(x;h) = dJ(x;h) \text{ za svako } h \in X.$$

Dokaz. Zbog linearnosti $dJ(x;h)$ možemo zapisati

$$dJ(x;\varepsilon h) = \varepsilon dJ(x;h)$$

i zamenjujući ovo u i), dobijamo

$$J(x+\varepsilon h) - J(x) - \varepsilon dJ(x;h) = E(x;h)\|h\||\varepsilon|$$

za bilo koje $h \in X$, što dalje daje

$$\frac{J(x+\varepsilon h)-J(x)}{\varepsilon} = dJ(x;h) + E(x;h)\|h\|\frac{|\varepsilon|}{\varepsilon}$$

puštamo $\varepsilon \to 0$ i dobijamo

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{J(x+\varepsilon h)-J(x)}{\varepsilon} = \delta J(x;h) = dJ(x;h)$$

jer je

$$\lim_{\varepsilon\to 0} E(x,\varepsilon h)\frac{|\varepsilon|}{\varepsilon} = 0$$

□

Lema 3. *(Fundamentalna lema varijacionog računa) Neka je data funkcija $F \in C[a,b]$ i neka važi $\int_a^b F(t)h(t)dt = 0$ za svako $h \in C^1[a,b]$ za koje je $h(a) = h(b) = 0$. Tada je $F \equiv 0$.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji $t_0 \in [a,b]$ u kojoj je $F(t_0) \neq 0$. Iz neprekidnosti funkcije F sledi da postoji interval $(c,d) \subset (a,b)$ koji sadrži tačku t_0 tako da važi $F(t_0) < 0$, za sve $t \in (c,d)$. Sada definišemo

$$h(t) := \begin{cases} (c-t)^2(d-t)^2, & t \in (c,d) \\ 0, & t \in (a,b)\setminus(c,d). \end{cases}$$

Tada je $\int_a^b F(t)h(t)dt > 0$, što je u kontradikciji sa pretpostavkom leme. □

4 Direktni metod

Mnogi problem u analizi se mogu prikazati u obliku funkcionalnih jednačina $F(u) = 0$, gde je u rešenje nad nekom klasom dopustivih funkcija na nekom Banahovom prostoru V. Tipično, takve jednačine su nelinearne; na primer, ako je klasa dopustivih funkcija ograničena nekim (nelinearnim) ograničenjem. Posebna klasa funkcionalnih jednačina predstavlja klasu Ojler-Lagranžovih jednačina

$$dE(u) = 0$$

za funkcionelu E na V, koja je Freše-diferencijabilne sa izvodom dE. Kažemo da takve jednačine imaju varijacioni oblik.

4.1 Donja poluneprekidnost

U ovom odeljku ćemo dati dovoljne uslove da funkcionela bude ograničena od dole i da dostiže svoj infimum.

Teorema 8. *[13] Neka je M topološki Hausdorfov prostor i neka $E : V \to \mathbb{R} \cup +\infty$ zadovoljava uslov vezane kompaktnosti:*
Za bilo koje $\alpha \in \mathbb{R}$, skup

$$K_\alpha = \{u \in M; E(u) \leqslant \alpha\} \tag{2}$$

je kompaktan.
Tada je E uniformno ograničeno od dole na M i dostiže svoj infimum.

Dokaz. Neka važi (2), možemo pretpostaviti $E \not\equiv +\infty$ i neka je

$$\alpha_0 = \inf_M E \geqslant -\infty.$$

Pretpostavimo da je (α_m) strogo opadajući niz. Radi preglednosti označavamo $K_{\alpha_m} = K_m$, po pretpostavci svaki K_m je kompaktan i neprazan, štaviše $K_m \supset K_{m+1}$ za svako m. Po kompaktnosti postoji tačka $u \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} K_m$ koja zadovoljava

$$E(u) \leqslant \alpha_m$$

za svako m. Puštajući limes $m \to +\infty$, dobijamo

$$E(u) \leqslant \alpha_0 = \inf_M E$$

odakle sledi tvrđenje. □ □

Uslov donje poluneprekidnosti može biti lakše zadovoljen ukoliko imamo finiju topologiju na M, suprotno tome uslov kompaktnosti podskupova K_α zahteva grublju topologiju. U praksi često postoji slabi prostor Soboljeva gde su oba uslova istovremeno zadovoljena. U primeni često nam je jednostavnije da posmatramo sledeći specijalni slučaj.

Teorema 9. *[13] Neka je V refleksivan Banahov prostor sa normom $\|\cdot\|$, i neka je $M \subset V$ slabo zatvoren podskup od V. Neka je $E : V \to \mathbb{R} \cup +\infty$ koersivno i (nizovno) slabo donje neprekidno na M u odnosu na V, to jest, da su zadovoljeni sledeći uslovi:*

1. *$E \to +\infty$ kada $\|u\| \to +\infty$, $u \in M$.*

2. *Za bilo koje $u \in M$, i bilo koji niz (u_m), takav da $u_m \rightharpoonup u$ (konvergira slabo) na V važi:*

$$E(u) \leqslant \liminf_{M \to \infty} E(u_m)$$

tada je E ograničeno od dole na M i dostiže svoj infimum na M.

Dokaz. Neka je $\alpha_0 = \inf_M E$ i neka je (u_m) minimizirajući niz na M, tj, zadovoljava $E(u_m) \to \alpha_0$. Po koersivnosti niz (u_m) je ograničen na V. Kako je V refleksivno, po teoremi 3, možemo pretpostaviti da $u_m \rightharpoonup u$ za neko $u \in V$. Ali M je slabo zatvoren, stoga je $u \in M$ i po donjoj poluneprekidnosti važi:

$$E(u) \leqslant \liminf_{m\to\infty} E(u_m) = \alpha_0.$$

$\square$

Teorema 10. *[13] Neka je Ω domen u $\mathbb{R}^n$ i pretpostavimo da je $F : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN} \to \mathbb{R}$ Karateodorijeva funkcija koja zadovoljava uslove:*

i) $F(x,u,p) \geq \phi(x)$ za svako x,u,p gde je $\phi \in L^1(\Omega)$

ii) $F(x,u,\cdot)$ je konveksna u p za svako x, u.

Tada, ako u_m, $u \in H^{1,1}(\Omega)$ i $u_m \to u$ na $L^1(\Omega')$, $\nabla u_m \rightharpoonup \nabla u$ slabo u $L^1(\Omega')$ za svako $\Omega' \subset\subset \Omega$, sledi da je

$$E(u) \leq \lim_{m\to\infty} \inf E(u_m)$$

gde je

$$E(u) = \int_\Omega F(x,u,\nabla u)dx.$$

Dokaz. Možemo pretpostaviti da je $(E(u_m))$ konačan i konvergentan. Štaviše zamenjujući F sa $F - \phi$ možemo pretpostaviti da je $F \geq 0$. Po slaboj lokalnoj L^1 konvergenciji $\nabla u_m \rightharpoonup \nabla u$ za bilo koje $m_0 \in \mathbb{N}$ postoji niz $(P^l)_{l\geq m_0}$ konveksnih linearnih kombinacija.

$$P^l = \sum_{m=m_0}^{l} \alpha_m^l \nabla u_m, \quad 0 \leq \alpha_m^1 \leq 1, \quad \sum_{m=m_0}^{l} \alpha_m^l = 1, \quad l \geq m_0$$

takvih da $P^l \to \nabla u$ na $L^1(\Omega')$ i skoro svuda kada $l \to \infty$. Po konveksnosti, za svako m_0 i bilo koje $l \geq m_0$ i skoro svako $x \in \Omega'$ imamo:

$$\begin{aligned} F(x, u(x), P^l(x)) &= F(x, u(x), \sum_{m=m_0}^{l} \alpha_m^l \nabla u_m) \\ &\leq \sum_{m=m_0}^{l} \alpha_m^l F(x, u(x), u_m(x)) \end{aligned} \tag{3}$$

Sada integralimo po Ω' i puštamo limes u $l \to \infty$ i na osnovu Fatuove leme dobijamo:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} \liminf_{n\to\infty} F(x, u(x), P^l(x))dx &= \int_{\Omega'} F(x, u(x), \nabla u)dx \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\Omega'} F(x, u(x), P^l(x))dx \\ &\leq \sup_{m\geq m_0} \int_{\Omega'} F(x, u(x), \nabla u_m(x))dx \end{aligned} \tag{4}$$

kako je m_0 proizvoljno, ovo dalje implicira da je

$$\int_{\Omega'} F(x, u(x), \nabla u(x)) \leq \limsup_{m\to\infty} \int_{\Omega'} F(x, u(x), \nabla u_m(x))dx$$

za bilo koji ograničen $\Omega' \subset\subset \Omega$.

Sada nam je potrebla sledeća lema:

Lema 4. *Pod hipotezama teoreme, postoji podniz (u_m) takav da važi:*

$$F(x, u_m(x), \nabla u_m(x)) - F(x, u(x), \nabla u_m(x)) \to 0 \qquad \textit{u meri,}$$

lokalno na Ω.

Po ovoj lemi za svako $\Omega' \subset\subset \Omega$ i svako $\varepsilon > 0, \forall m_0 \in \mathbb{N}$ postoji $m \geq m_0$ i skup $\Omega'_{\varepsilon,m} \subset \Omega'$ sa $\mathcal{L}^n(\Omega'_{\varepsilon,m}) < \varepsilon$ takav da

$$|F(x, u_m(x), \nabla u_m(x)) - F(x, u(x), \nabla u_m(x))| < \varepsilon$$

za sve $x \in \Omega' \setminus \Omega'_{\varepsilon,m}$.

Uzimamo sada $\varepsilon_m = 2^{-m}$ i prelazimo na podniz; ukoliko je neophodno možemo pretpostaviti da za svako m postoji skup $\Omega'_{\varepsilon_m} \subset \Omega'$ mere manje od ε_m takav da je gornja nejednakost zadovoljena (sa ε_m) za sve $x \in \Omega' \setminus \Omega'_{\varepsilon_m,m}$. Stoga za bilo koje $\varepsilon > 0$, ukoliko odaberemo $m_0 = m_0(\varepsilon) > |\log_2^{\varepsilon}|$, $\Omega'_\varepsilon = \bigcup_{m \geq m_0} \Omega'_{\varepsilon_m,m}$, ovaj skup ima meru $\mathcal{L}^n(\Omega'_\varepsilon) < \varepsilon$ i nejednakost važi uniformno za svako $x \in \Omega' \setminus \Omega'_{\varepsilon_m,m}$ i sve $m \geq m_0(\varepsilon)$. Štaviše za $\varepsilon < \delta$ po konstrukciji $\Omega'_\varepsilon \subset \Omega'_\delta$. Pokrivač od Ω koji se sastoji od $\Omega^{(k)} \subset\subset \Omega, k \in \mathbb{N}$. Neka je $\varepsilon > 0$ i biramo niz $\varepsilon^{(k)} > 0$ takav da je $\sum_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{L}^n(\Omega^{(k)})\varepsilon^{(k)} \leq \varepsilon$. Ako je neophodno prelazimo na podniz, za svaki $\Omega^{(k)}$ i $\varepsilon^{(k)}$ možemo izabrati $m_0^{(k)}$ i $\Omega_\varepsilon^{(k)} \subset \Omega^{(k)}$ takav da je $\mathcal{L}^n(\Omega_\varepsilon^{(k)}) < \varepsilon^{(k)}$ i

$$|F(x, u_m(x), \nabla u_m(x)) - F(x, u(x), \nabla u_m(x))| < \varepsilon^{(k)}$$

uniformno za $x \in \Omega^{(k)} \setminus \Omega_\varepsilon^{(k)}, m \geq m_0^{(k)}$. Štaviše, možemo pretpostaviti da je $\Omega_\varepsilon^{(k)} \setminus \Omega_\delta^{(k)}$, ako je $\varepsilon < \delta$, za svako k. Tada za bilo koje $K \in \mathbb{N}$, puštamo $\Omega^K = \bigcup_{k=1}^K \Omega^{(k)}$, $\Omega_\varepsilon^K = \bigcup_{k=1}^K \Omega_\varepsilon^{(k)}$, i imamo

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega^K \setminus \Omega_\varepsilon^K} F(x, u, \nabla u) dx &\leq \limsup_{m \to \infty} \int_{\Omega^K \setminus \Omega_\varepsilon^K} F(x, u, \nabla u_m) dx \\
&\leq \limsup_{m \to \infty} \int_{\Omega^K \setminus \Omega_\varepsilon^K} F(x, u_m, \nabla u_m) dx + \varepsilon \qquad (5) \\
&\leq \limsup_{m \to \infty} E(u_m) + \varepsilon = \liminf_{m \to \infty} E(u_m) + \varepsilon
\end{aligned}$$

puštamo da $\varepsilon \to 0$ i $K \to \infty$, i tvrđenje sledi iz Beppo Levi-jeve teoreme, kako je $F \geq 0$ i kako se $\Omega^K \setminus \Omega_\varepsilon^K$ uvećava kada $\varepsilon \downarrow 0$, praćeno sa $K \uparrow \infty$. □

Dokaz. (Dokaz Leme 4) Pretpostavimo da postoji $\Omega' \subset\subset \Omega$, $\varepsilon > 0$ i $\Omega_m = \{x \in \Omega'; |F(x, u_m, \nabla u_m) - F(x, u, u_m)| \geq \varepsilon\}$ takvo da kada pustimo $m \to \infty$ važi

$$\liminf_{m \to \infty} \mathcal{L}^n(\Omega_m) \geq 2\varepsilon.$$

Niz (∇u_m) koji slabo konvergira, je uniformno ograničen na $L^1(\Omega')$ Ovde je

$$\mathcal{L}^n\{x \in \Omega'; |\nabla u_m| \geq l\} \leq l^{-1} \int_{\Omega'} |\nabla u_m| dx \leq \frac{C}{l} \leq \varepsilon$$

ako je $l = l_0(\varepsilon)$ dovoljno veliko. Birajući

$$\tilde{\Omega}_m := \{x \in \Omega'; |\nabla u_m| \leq l_0(\varepsilon)\}$$

važi

$$\liminf_{m \to \infty} \mathcal{L}^n(\tilde{\Omega}_m) \geq \varepsilon.$$

Takođe za $\Omega = \bigcup_{m \geq M} \tilde{\Omega}_m$ imamo $\mathcal{L}^n(\Omega^M) \geq \varepsilon$, uniformno za $M \in \mathbb{N}$. Štaviše, $\Omega' \supset \Omega^M \supset \Omega^{M+1}$ za svako M i stoga $\Omega^\infty := \bigcap_{M \in \mathbb{N}} \Omega^M \subset \Omega'$ ima meru $\mathcal{L}^n(\Omega^\infty) \geq \varepsilon$. Konačno, zanemarujući skupove mere nula i prelazeći na podnizove, ukoliko je to neophodno, možemo pretpostaviti da je $F(x, z, p)$ neprekidna u (z, p), da su $u_m(x), u(x), \nabla u_m(x)$ dobro definisani i konačni, dok $u_m(x) \to u(x)$, kada $m \to \infty$ u svakoj tački $x \in \Omega^\infty$.

Primetimo da po konstrukciji, svaka tačka $x \in \Omega^\infty$ pripada u beskonačno mnogo skupova $\tilde{\Omega}_m$. Biramo takvu tačku x. Možemo pretpostaviti da je $x \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \tilde{\Omega}_m$.

Po uniformnoj ograničenosti $|\nabla u_m(x)| \leq C$, postoji podniz $m \to \infty$, i vektor $p \in \mathbb{R}^{nN}$ takav da $\nabla u_m(x) \to p \ \ (m \to \infty)$. Ali tada zbog neprekidnosti,

$$F(x, u_m(x), \nabla u_m(x)) \to F(x, u(x), p),$$

i

$$F(x, u(x), \nabla u_m(x)) \to F(x, u(x), p)$$

što je u kontradikciji sa gore datim Ω_m. $\square$

"Relih-Kondrahova teorema implicira da svaki uniformno ograničen niz u $H^{1,1}(\Omega; \mathbb{R})$ ima podniz koji konvergira u $L^1(\Omega; \mathbb{R})$. Lokalna ograničenost minimizirajućeg niza u $H^{1,1}(\Omega)$ može biti zaključena iz uslova koersivnosti:

$$F(x, z, p) \geq |p|^\mu - \phi(x), \mu \geq 1, \phi \in L^1,$$

a kako jaka konvergencija implicira slabu, sledi da Teorema 9. za sobom povlači i Teoremu 8. [13] "

5 Hamiltonov princip

Definišemo funkciju $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, koju nazivamo Lagranžijan, sa

$$L(x, \dot{x}) = T(\dot{x}) - V(x).$$

Dakle $L(x, v)$ je razlika kinetičke i potencijalne energije, izražene preko pozicije čestice x i njene brzine $\dot{x}$. Ako je $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ trajektorija čestice tada definišemo akciju od $x(t)$ na $[a, b]$, kao realnu funkciju definisanu na prostoru trajektorija $\{x : [a, b] \to \mathbb{R}^n\}$, sa:

$$S(x) = \int_a^b L(x(t), \dot{x}(t))dt.$$

Hamiltonov princip (poznat još i kao princip stacionarne akcije) kaže da je, za fiksiranu početnu i krajnju poziciju $x(a)$ i $x(b)$, putanja koju čestica uzima ona u kojoj je akcija stacionarna.
Da bismo ovo objasnili u više detalja, pretpostavimo da je $h : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ neka trajektorija za koju važi $h(a) = h(b) = 0$. Izvod po pravcu od S u $x(t)$ u pravcu $h(t)$ je definisan sa

$$dS(x)h = \frac{d}{d\varepsilon} S(x + \varepsilon h)\bigg|_{\varepsilon=0}.$$

Frešeov izvod od S u tački $x(t)$ je linearna funkcionela $dS(x)$ koja preslikava $h(t)$ u izvod po pravcu od S u tački $x(t)$ u pravcu $h(t)$. Trajektorija $x(t)$ je stacionarna tačka S ako je njena kritična tačka, tj. ako je $dS(x) = 0$. Eksplicitno to znači

$$\frac{d}{d\varepsilon} S(x + \varepsilon h)\bigg|_{\varepsilon=0} = 0$$

za svaku glatku funkciju $h : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, koja nestaje u $t = a, b$. Stoga, mala varijacija u trajektoriji, reda ε, koja zadržava krajnje tačke fiksiranim, vodi do varijacije reda ε^2.

6 Ekvivalencija Hamiltonovog principa sa drugim Njutnovim zakonom

Posmatramo česticu mase m koja se kreće kroz n-dimenzionalno polje sile $F(x)$. Za polje sile kažemo da je konzervativno ako je

$$F(x) = -\nabla V(x)$$

za glatku funkciju potencijala $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, gde je ∇ gradijent u odnosu na x. Ekvivalentno, polje sile je konzervativno ako je rad izvršen silom F na čestici, dok se kreće od x_0 do x_1,

$$\int_{\Gamma(x_0,x_1)} F \cdot dx$$

nezavisan od putanje $\Gamma(x_0, x_1)$.
Po Njutnovom drugom zakonu, duž cele putanje mora biti zadovoljeno

$$m\ddot{x} = -\nabla V(x).$$

Da bismo došli do jednačine koju zadovoljava stacionarna tačka $x(t)$ akcije S, primenom Hamiltonovog principa, definišemo kinetičku energiju kao

$$T(x) = \frac{1}{2}m\|\dot{x}\|^2.$$

Sada je

$$S(x) = \int_a^b \left[\frac{1}{2}m\|\dot{x}\|^2 - V(x)\right] dt,$$

uvodimo proizvoljnu funkciju $h : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, takvu da je $h(a) = h(b) = 0$ i tražimo stacionarnu tačku akcije.

$$S(x + \varepsilon h) = \int_a^b \left[\frac{1}{2}m\|\dot{x}(t) + \varepsilon\dot{h}\|^2 - V(x(t) + \varepsilon h(t))\right] dt$$

diferenciramo po ε i postavljamo $\varepsilon = 0$. Što daje

$$\frac{d}{d\varepsilon} S(x + \varepsilon h) = \int_a^b \Big[m\dot{x}\dot{h} - \nabla V(x) h \Big] dt = 0$$

sada primenjujemo parcijalnu integraciju i koristimo činjenicu da je $h(a) = h(b) = 0$, dobijamo

$$\frac{d}{d\varepsilon} S(x + \varepsilon h) = -\int_a^b \Big[m\ddot{x} + \nabla V(x) \Big] \cdot h dt = 0$$

kako je ovaj integral jednak nuli za bilo koje $h(t)$, primenom fundamentalne leme varijacionog računa, sledi da $x(t)$ zadovoljava

$$m\ddot{x} + \nabla V(x) = 0$$

za $a \leqslant t \leqslant b$, to jest drugi Njutnov zakon.

7 Ojler-Lagranžove jednačine

Neka je

$$\mathcal{F}(u) = \int_a^b L(x, u(x), u'(x))dx$$

akcija za neki Lagranžijan L, gde je

$$L : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

glatka funkcija. Ako je $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ glatka funkcija koja nestaje u $x = a, b$, tada je

$$d\mathcal{F}(u)h = \frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b L(x, u(x) + \varepsilon h(x), u'(x) + \varepsilon h'(x))dx \bigg|_{\varepsilon=0}$$

$$= \int_a^b \Big[L_u(x, u(x), u'(x))h(x) + L_{u'}(x, u(x), u'(x))h'(x) \Big] dx$$

Sledi da je potreban uslov da C^1-funkcija $u(x)$ bude stacionarna tačka funkcionele $\mathcal{F}$, na prostoru funkcija sa traženim krajnjim tačkama, je da važi

$$\int_a^b \Big[L_u(x, u(x), u'(x))h(x) + L_{u'}(x, u(x), u'(x))h'(x) \Big] dx = 0$$

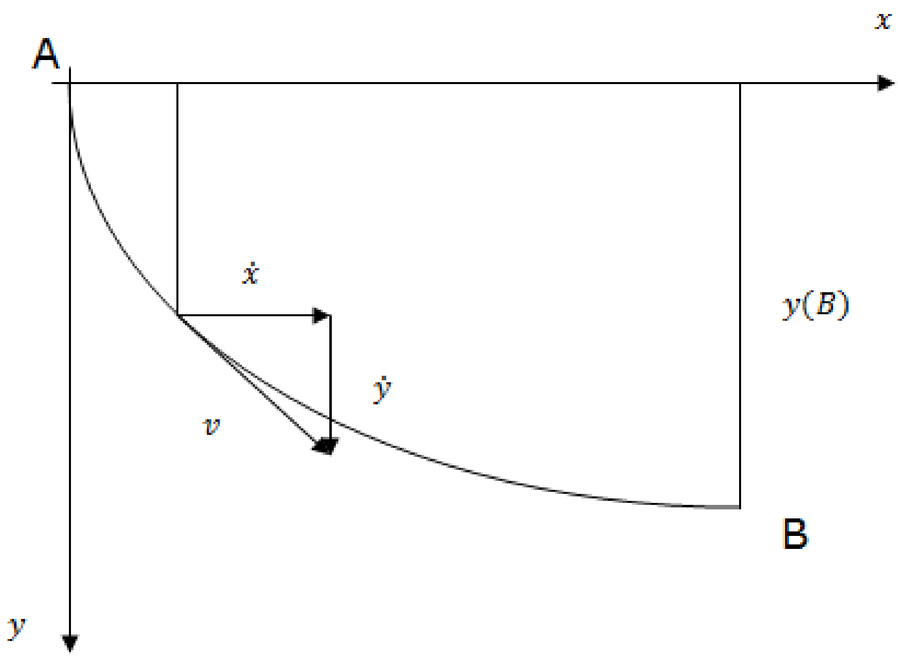
za svaku glatku funkciju $h(x)$ koja nestaje u $x = a, b$. Ako je funkcija u iz C^2, tada možemo primeniti parcijalnu integraciju i dobijamo

$$\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{F}(u+\varepsilon h) = \int_a^b \Big[L_u(x, u(x), u'(x)) - \frac{d}{dx} L_{u'}(x, u(x), u'(x)) \Big] h(x)dx = 0.$$

Na osnovu fundamentalne leme varijacionog računa sledi da, ako je C^2-funkcija $u(x)$ stacionarna tačka $\mathcal{F}$, tada mora zadovoljavati

$$L_u(x, u, u') - \frac{d}{dx} L_{u'}(x, u, u') = 0$$

Primer 1. *[11]Problem brahistokrone. Potrebno je naći putanju dužm koje će se materijalna tačka za najkraće moguće vreme spustiti od tačke A do tačke B, pod uticajem konstantnog gravitacionog polja. Oganičiemo kretanje čestice tako da kriva leži u ravni. Pretpostavimo da je početna brzina čestice nula i da je $x_A(0) = 0$ i $y_A(0) = 0$.*



Ukupna energija čestice data sa $E = \frac{mv^2}{2} - mgy = 0$, stoga je $v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$. Ukupno vreme putovanja duž putanje s je dato sa

$$T = \int dt = \int \frac{ds}{v} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_B} \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{y(x)}} dx.$$

Kako je $\frac{1}{\sqrt{2g}}$ konstanta možemo je izostaviti u daljem razmatranju. Dalje tražimo parcijalne izvode kako bismo dobili Ojler-Lagranžovu jednačinu

$$L(x, y, y') = \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{y(x)}},$$

a kako je

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{\sqrt{1+(y'(x))^2}}{2y^{\frac{3}{2}}}$$

i

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{1}{y\sqrt{1+(y'(x))^2}}\left(\frac{y''(x)}{1+(y'(x))^2} - \frac{1}{2}\frac{(y'(x))^2}{y}\right)$$

posle sređivanja iz Ojler-Lagranžove jednačine dobijamo

$$2yy'' + (y')^2 + 1 = 0$$

što je nelinearna jednačina drugog reda, koju možemo svesti na jednačinu prvog reda. Množimo jednačinu sa y' i imamo

$$y' + 2yy'y'' + (y')^3 = 0.$$

Kako je leva strana jednačine zapravo izvod $[y + y(y')^2]'$, zaključujemo da je

$$y + y(y')^2 = C$$

ili

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{C-y}{y}}, \qquad \frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{y}{C-y}}.$$

Kako na me jednostavnije da ovaj problem posmatramo preko polarnih koordinata uvodimo smenu iz x u φ, gde je φ ugao koji tangenta zaklapa sa vertikalnom osom, dakle $\frac{dx}{dy} = \tan\varphi$, pa je

$$\frac{y}{C-y} = \frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}$$

ili

$$y\sin^2\varphi + y\cos^2\varphi = y = C\sin^2\varphi.$$

Diferenciramo po φ *i dobijamo*

$$\frac{dy}{d\varphi} = 2C \sin\varphi \cos\varphi$$

i kasnije to koristimo kako bismo dobili

$$\frac{dx}{d\varphi} = \sqrt{\frac{y}{C-y}}\frac{dy}{d\varphi} = C(1 - \cos 2\varphi)$$

posle integracije dobijamo parametrizovanu krivu (sa parametrom φ*)*

$$x = \frac{C}{2}(2\varphi - \sin\varphi), \qquad y = \frac{C}{2}(1 - \cos 2\varphi).$$

Opisana kriva naziva se cikloid i predstavlja putanju koju opisuje fiksirana tačka na kružnici koja se kotrlja po pravoj.

8 Hamilton-Jakobijeve jednačine

U Lagranžovoj formulaciji mehanike imamo funkciju $L(x, \dot{x}, t)$, gde su x generalizovane koordinate. Jednačine kretanja su

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0.$$

Kako nam je često zgodno da posmatramo sistem sa stanovišta impulsa, probaćemo da zamenimo $\dot{x}$ sa generalizovanim impulsom, koji definišemo na sledeći način

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}.$$

Kada eliminičemo $\dot{x}$ i zamenimo ga sa p, posmatraćemo x i p kao nezavisne. Želimo da nađemo funkciju koja će jedinstveno odrediti putanju pomoću x i p, koja će sadržati istu količinu informacija kao i Lagranžijan. Ovo ćemo postići pomoću Legendreove transformacije. Razmotrimo funkciju $f(x, y)$ takvu da je totalni izvod

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Sada definišemo funkciju $g(x, y, u) = ux - f(x, y)$. Ukoliko posmatramo totalni izvod od g, imamo:

$$dg = d(ux) - df = udx + xdu - \frac{\partial f}{\partial x}dx - \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

sada biramo $u(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}$ i imamo

$$dg = xdu - \frac{\partial f}{\partial y}$$

to jest, imamo funkciju koja zavisi od u i y. Ukoliko želimo eksplicitan izraz za g, invertujemo i dobijamo

$$g(u, y) = ux(u, y) - f(x(u, y), y).$$

Ovaj postupak naziva se Legendreova transformacija, vodi nas od funkcije $f(x, y)$do funkcije $g(u, y)$.

Primenimo ovo na Lagranžijan $L(x, \dot{x}, t)$. Definišemo Hamiltonijan kao Legendreovu transformaciju Lagranžijana u odnosu na promenljivu $\dot{x}$:

$$H(x, p, t) = p\dot{x} - L(x, \dot{x}, t)$$

gde ćemo eliminisati $\dot{x}$ iz desne strane tako što ćemo koristiti

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$$

kako bismo dobili $\dot{x} = \dot{x}(x, p, t)$.

Izvućićemo sada $L(x, \dot{x}, t)$ i primeniti Hamiltonov princip. Imamo da je akcija

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (p\dot{x} - H(x, p, t))dt$$

gde je $\dot{x} = \dot{x}(x, p)$ i x i p su nezavisni. Sistem će uzeti putanju u kojoj je $\delta S = 0$, gde je $\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0$. Imamo

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta p\dot{x} + p\delta\dot{x} - \frac{\partial H}{\partial p}\delta p - \frac{\partial H}{\partial x}\delta x\right]dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\dot{x} - \frac{\partial H}{\partial p}\right)\delta p + p\delta\dot{x} - \frac{\partial H}{\partial x}\delta x\right] = 0$$

kako je

$$\int_{t_1}^{t_2} p\delta x dt = p\delta x|_{t_1}^{t_2} - \dot{p}\delta x = -\dot{p}\delta x$$

imamo da je

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\dot{x} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) \delta p + \left(-\dot{p} - \frac{\partial H}{\partial x} \right) \delta x \right] dt$$

odakle, primenom fundamentalne leme varijacionog računa, dobijamo Hamilton-Jakobijeve jednačine:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad \text{i} \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

Primer 2. *[11]Prosti harmonijski oscilator. Posmatramo masu koja se kreće u kvadratnom potencijalnom polju sa karakterističnim koeficijentom k. Lagranžijan za ovaj sistem je*

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

odakle proizilazi da je impuls

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}.$$

Ovo dalje implicira da je $\dot{x} = \frac{p}{m}$, pa je hamiltonijan dat sa

$$H(x, p) = \dot{x} p - L(x, \dot{x}) = \frac{p^2}{m} - \left(\frac{1}{2} m \left(\frac{p}{m} \right) - \frac{1}{2} k x^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{p^2}{m} + \frac{1}{2} k x^2.$$

Primetimo da je ovo zapravo zbir kinetičke i potencijalne energije, dakle ukupna energija, što je čest slučaj pri izboru Hamiltonijana. Odavde su Hamilton-Jakobijeve jednačine date sa

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx.$$

Sada kombinujući ove dve jednačine dobijamo uobičajenu jednačinu za prosti harmonijski iscilator $m\ddot{x} = -kx$.

9 Poasonova jednačina

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ domen i $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ funkcija, gde je $\overline{\Omega} \subset\subset \Omega$ i pretpostavimo da je domen funkcije dovoljno gladak. Definišemo funkcionelu

$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - fu\right)dx.$$

gde su $u, f \in H_0^{1,2}(\Omega)$, i tražimo funkciju koja je minimizira.

Prvo je pitanje da li takva funkcija postoji. Primetimo da $E :\in H_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}\cup\infty$ i da je $H_0^{1,2}(\Omega)$ banahov sa normom $\|u\| = \sqrt{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}$. Pokazujemo da je E koersivna: Na osnovi definicije norme u Soboljevom prostoru u Holderove nejednakosti imamo

$$\mathcal{F}(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \|f\|\|u\| \geq \frac{1}{2}(\|u\|^2 - c\|u\|) \geq \frac{1}{2}\|u\|(\|u\| - c).$$

E je nizovno slabo donje poluneprekidna: koristimo lemu

Lema 5. *Neka je X Banahov prostor i (x_n) konvergira slabo ka x $(x_n \rightharpoonup x)$. Tada važi*

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n\| \geq \|x\|.$$

Dokaz. Biramo neko $\phi \in X^*$ takvo da je $\|\phi\| = 1$ i $\|\phi(x)\| = x$, tada po definiciji slabe konvergencije (na Banahoovm prostoru) važi $\phi(x_n) \to \phi(x)$ pa i $\|\phi(x_n)\| \to \|\phi(x)\| = \|x\|$. Sada je

$$\|x\| = \|\phi(x)\| = \lim_{n\to\infty} \|\phi(x_n)\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|\phi(x_n)\|$$

$$\leq \liminf_{n\to\infty}(\|\phi\|\|(x_n)\|) \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$$

□

kako je $H_0^{1,2}$ Banahov, važi

$$\|u\| \leq \liminf_{m\to\infty} \|u_m\|$$

$$\sqrt{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx} \leq \liminf_{m\to\infty} \sqrt{\int_\Omega |\nabla u_m|^2 dx}$$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \leq \liminf \int_\Omega |\nabla u_m|^2 dx$$

pa je dovoljno pokazati da za $u_m \rightharpoonup u$ na $H_0^{1,2}(\Omega)$ imamo

$$\int_\Omega f u_m dx \to \int_\Omega f u dx.$$

Kako je $f \in H_0^{1,2}(\Omega)$ ovo sledi direktno iz same definicije slabe konvergencije. Ovim su zadovoljeni uslovi Teoreme 9, pa je E ograničena od dole na $H_0^{1,2}(\Omega)$ i dostiže svoj infimum na $H_0^{1,2}(\Omega)$.

Sada primenjujemo indirektni metod. Uvodimo pomoćnu funkciju $h : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ takvu daje $h = 0$ na $\partial\Omega$, tada je

$$\left.\frac{d\mathcal{F}(u+\varepsilon h)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon}\int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u + \varepsilon \nabla h|^2 - f(u+\varepsilon h)\right] dx\Bigg|_{\varepsilon=0}$$

$$= \int_\Omega \Big[\nabla u \cdot \nabla h - fh\Big] dx = (\clubsuit)$$

dalje koristimo identitet

$$\nabla \cdot (h\nabla u) = h\Delta u + \nabla u \cdot \nabla h$$

i primenjujemo teoremu o divergenciji

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h dx = -\int_\Omega (\Delta u) h dx + \int_{\partial\Omega} h\frac{\partial u}{\partial n} dS$$

kako je $h = 0$ na $\partial\Omega$, desni sabirak je jednak nuli i dobijamo da je

$$\frac{d\mathcal{F}(u+\varepsilon h)}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = \int_{\Omega} \big[-\Delta u - f \big] h dx = 0$$

po fundamentalnoj lemi sledi da je funkcija koja minimizira početni integral rešenje Poasonove jednačine

$$-\Delta u = f.$$

Za funkcije koje zadovoljavaju ($\clubsuit$) kažemo da su slaba rešenja Poasonove jednačine.

10 Laplasova jednačina

Posmatramo funkcionelu

$$\mathcal{S}(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

podintegralna funkcija je Karateodorijeva, zadovoljava:

$$|\nabla u|^2 \geq 0$$

za sve x, u, p. I konveksna je u p za svako x, u, jer za proizvoljno p, q važi:

$$\begin{aligned} (tp + (1-t)q)^2 = t^2p^2 + 2t(1-t)pq + (1-t)^2q^2 &\leq tp^2 + (1-t)q^2 \\ (t^2 - t)p^2 + ((1-t)^2 - 1 + t)q^2 + 2t(1-t)pq &\leq 0 \\ (t(t-1))p^2 + (t(t-1))q^2 - 2(t(t-1)pq) &\leq 0 \\ t(t-1)(p-q)^2 &\leq 0 \end{aligned} \tag{6}$$

što važi za svako $t \in [0, 1]$. Lokalnu ograničenost niza zaključujemo iz uslova koersivnosti

$$F(x, u, p) = |p|^2 \geq |p|^\mu - \phi(x)$$

koji je zadovoljen za $\mu = 2$ i $\phi(x) = 0$. Ovim su zadovoljeni uslovi Teoreme 10, pa i postojanje niza funkcija koji minimizira dati integral. Primenjujemo direktan metod; uvodimo pomoćnu funkciju $h : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ takvu daje $h = 0$ na $\partial\Omega$, tada je

$$\begin{aligned} \left.\frac{d\mathcal{S}(u + \varepsilon h)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} &= \left.\frac{d}{d\varepsilon}\int_\Omega \left[|\nabla u + \varepsilon \nabla h|^2\right] dx\right|_{\varepsilon=0} \\ &= 2\int_\Omega \left[\nabla u \cdot \nabla h\right] dx = (\spadesuit) \end{aligned} \tag{7}$$

dalje koristimo identitet

$$\nabla \cdot (h\nabla u) = h\Delta u + \nabla u \cdot \nabla h$$

i primenjujemo teoremu o divergenciji

$$2\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h dx = -2\int_\Omega (\Delta u) h dx + 2\int_{\partial\Omega} h\frac{\partial u}{\partial n} dS$$

kako je $h = 0$ na $\partial\Omega$, desni sabirak je jednak nuli i dobijamo da je

$$\left.\frac{d\mathcal{S}(u+\varepsilon h)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 2\int_\Omega -\Delta u h dx = 0$$

po fundamentalnoj lemi sledi da je funkcija koja minimizira početni integral rešenje Laplasove jednačine

$$\Delta u = 0.$$

Za funkcije koje zadovoljavaju ($\spadesuit$) kažemo da su slaba rešenja Laplasove jednačine.

11 Talasna jednačina

Neka je $u = u(x,t)$ odstupanje zategnute žice od početne (neutralne) pozicije $u \equiv 0$. Gustina žice data je sa $\rho = \rho(x)$ i elastičnost sa $k = k(x)$. U ovom primeru predpostavljamo da je žica uiformna. Razmotrimo kratak deo žice, u intervalu $[x, x+\Delta x]$. Masa žice je $\rho(x)\Delta x$, brzina odtupanja je u_t i stoga je kinetička energija ($E = \frac{1}{2}mv^2$), data sa:

$$\Delta U = \frac{1}{2}\rho(u_t)^2\Delta x$$

pa je ukupna kinetička energija duž žice data sa

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L \rho(u_t)^2 dx.$$

Iz Hukovog zakona, potencijalna energija za žicu je $\frac{k}{2}y^2$, gde je y dužina "opruge". Za istegnutu žicu dužina je data sa $ds = \sqrt{1+u_x^2}dx$, te je ukupna potencijalna energija data sa

$$V = \int_0^L \frac{k}{2}(1+u_x^2)dx.$$

Akcija za datu funkciju je data kao integral razlike kinetičke i potencijalne energije:

$$S(u) = \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L \Big[\rho u_t^2 - k(1+u_x^2)\Big]dxdt.$$

Tražimo Gatoovu varijaciju, dodajemo neku funkciju $h = h(x,t)$, za koju važi $h(0,t) = h(L,t) = h(x,o) = h(x,T) = 0$, sada je

$$S(u+\varepsilon h) = \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L \left[\rho\left(\frac{\partial(u+\varepsilon h)}{\partial t}\right)^2 - k\left(1+\frac{\partial(u+\varepsilon h)}{\partial x}\right)^2\right]dxdt$$

treba da važi

$$\left.\frac{\partial S(u+\varepsilon h)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=0$$

to jest

$$\frac{\partial S(u+\varepsilon h)}{\partial \varepsilon}=\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L\left[2\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial h}{\partial t}\right)\frac{\partial h}{\partial t}-2k\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\varepsilon\frac{\partial h}{\partial x}\right)\frac{\partial h}{\partial x}\right]dxdt$$

sad računamo vrednost u $\varepsilon=0$,

$$\left.\frac{\partial S(u+\varepsilon h)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\int_0^T\int_0^L\left[\rho\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial t}-k\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x}\right]dxdt=0.$$

Kako je

$$\int_0^L k\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x}dx=k\frac{\partial u}{\partial x}h(x,t)\Big|_0^L-\int_0^L k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}h(x,t)dx=-\int_0^L k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}h(x,t)dx$$

i

$$\int_0^T \rho\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial t}dt=\rho\frac{\partial u}{\partial t}h(x,t)\Big|_0^T-\int_0^T \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}h(x,t)dx=-\int_0^L \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}h(x,t)dt$$

sledi da je

$$\int_0^T\int_0^L\left[-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]h(x,t)dxdt=0.$$

Na osnovu fundamentalne leme varijacionog računa sledi da je

$$-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

što dalje možemo svesti na

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,$$

gde je $c=\sqrt{\frac{k}{\rho}}$.

Literatura

[1] First variation of functionals. http://www.mecheng.iisc.ernet.in/suresh/me256/LectureNotes2009$_2$*.pdf*.

[2] l^p spaces. https://www.math.ucdavis.edu/ hunter/measure_theory/measure_notes_ch7.pdf.

[3] Sobolev spaces. http://jones.math.unibas.ch/ beilina/CDE/Lectures/Lecture3.pdf.

[4] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer, 2011.

[5] Demetrios Christodoulou. *The Action Principle and Partial Differential Equations.* Princeton University Press, 1999.

[6] Bernard Dacoronga. *Introduction to Calculus of Variations.* Imperial Coledge Press, 2004.

[7] A.R. Forsyth. *Calculus of Variations.* Cambridge University Press, 1927.

[8] B.R. Gossick. *Hamilton's Principle and Physical systems.* Accademic press, 1967.

[9] L.M. Graves. *Calculus of Variations and its Applications.* McGraw - Hill Book Company, inc., 1958.

[10] John K. Hunter. *Lecture Notes on Applied Mathematics.* Department of Mathematics, University of California, 2007.

[11] B.D. Vujanović i T.M. Atanacković. *An Introduction to Modem Variational Techniques in Mechanics and Engineering.* Springer Science+Business Media New York, 2004.

[12] Simon J.A. Malham. *An introduction to Lagrangian and Hamiltonian mechanics*. Maxwell Institute for Mathematical Sciences and School of Mathematical and Computer Sciences, 2014.

[13] Michael Struwe. *Variational methods, applications to Nonlinear Partial Differential Equations*. Springer, 1999.

Kratka biografija

Nikola Đukanović rođen je 9. decembra 1989. u Kikindi. Završio je osnovnu školu "Vuk Karadžić" i gimnaziju "Dušan Vasiljev" u Kikindi, 2008. godine upisuje akademske studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer Matematika finansija i završava 2011, iste godine upisuje master studije primenjene matematike, modul Matematika finansija, na istom fakultetu.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Nikola Đukanović
AU

Mentor: dr Marko Nedeljkov
MN

Naslov rada: Hamiltonov princip i parcijalne diferencijalne jednačine
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: s / e
JI

Zemlja publikovanja: Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2014.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno–matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (11, 46, 14, 0, 2, 0, 0)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Parcijalne diferencijalne jednačine
ND

Predmetna odrednica / Ključne reči: Hamiltonov princip, parcijalne diferencijalne jednačine, donja poluneprekidnost
PO

UDK

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno–matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: Ovaj rad bavi je Hamiltonovim principom (Principom stacionarne akcije) i pomoću njega izvodi neke od poznatijih parcijalnih diferencijalnih jednačina i pomoću teorema o donjoj poluneprekidnosti dokazuje i postojanje njihovih rešenja.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 10.10.2013.
DP

DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik:	dr Sanja Konjik, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član:	dr Marko Nedeljkov, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor
Član:	dr Danijela Rajter-Ćirić, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Nikola Đukanović
AU

Mentor: Marko Nedeljkov, Ph.D.
MN

Title: Hamilton's Principle and Partial Differential Equations
TI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract: English
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2014.
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: (11, 46, 14, 0, 2, 0, 0)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Partial Differential Equations
SD

Subject / Key words: Hamilton's principle, Partial Differential Equations, Lower semicontinuity
SKW

UC:

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: This master thesis is about Hamilthon's principle, derivation of some partial differential equations using this principle and proving the existence of solutions of those equations using lower semicontinuity theorems.

AB

Accepted by the Scientific Board on: 10.10.2013.
ASB

DE

Thesis defend board:
DB

President:	Dr Sanja Konjik, docent, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
Member:	Dr Marko Nedeljkov, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, supervisor
Member:	Dr Danijela Rajter-Ćirić, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad