



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU



Nemanja Đurasinović

MATEMATIČKI MODELI ČULA SLUHA

-master rad-

MENTOR: dr Marko Nedeljkov

Novi Sad, 2015.

Želim se na ovom mestu neizmerno zahvaliti mom mentoru, dr Marku Nedeljkovu, profesoricama dr Nataši Krejić i dr Danijeli Rajter-Ćirić na svim savetima, sugestijama prilikom izrade master rada, kao i na pruženom znanju tokom studija; svim asistentima i profesorima sa kojima sam sarađivao na studijama kao i profesoricama u osnovnoj i srednjoj školi, prof. Ružici Bulat i prof. Sandri Popović. Dalje, želim se zahvaliti svim kolegama sa grupe koji su doprineli lakšem i zanimljivijem polaganju ispita na studijama.

Takođe, želeo bih se zahvaliti Nikoli, Aleksandri i Vasiliju, oni znaju zašto. No, svu zahvalnost ovog sveta dugujem mojoj porodici, pre svega majci Veri, ocu Miletu, sestri Jeleni, bratu Dušku i njihovim porodicama za svu ljubav, podršku i razumevanje koju su mi nesebično davali. Rad je posvećen svima njima.

Novi Sad, 2015.

Nemanja Đurasinović

Sadržaj

1. Anatomija ljudskog uha i auditivni sistem	5
1.1. Spoljašnje uho	6
1.2. Srednje uho	6
1.3. Unutrašnje uho	7
2. Matematičke osnove.....	9
2.1. Parcijalne diferencijalne jednačine	9
2.2. Klasifikacija PDJ. Početni i granični uslovi.....	10
2.3. Furijeova transformacija	13
2.4. Navier-Stokes-ove jednačine. Jednačina kontinuiteta.....	15
2.5. Eliptične parcijalne diferencijalne jednačine. Laplasova jednačina i principi.	21
2.5.1. Jak princip maksimuma.	23
2.5.2. Slab princip maksimuma.....	24
2.5.3. Fundamentalno rešenje Laplasove jednačine u \mathbb{R}^n	25
2.6. Numerički alati za rešavanje. Metoda konačnih razlika.	30
3. Matematički modeli	33
3.1. Uvodne prepostavke.....	33
3.2. Pritisak u kohlei – model	34
3.3. Pojednostavljeni model pritiska	41
3.4. Navier –Stokes-ova jednačina fluida i BM.	43
3.5. Bazilarna membrana – pasivni model.....	50
3.6. Aktivni model	53
3.7. Model rezonacije tektoralne membrane.....	54
3.8. Integralne jednačine i beskonačna kohlea.....	55
4. Numeričko rešenje i implementacija.....	60
4.1. Numerička implementacija modela	62
Dodatak i popis slika sa izvorima	66
Zaključak	71
Literatura	72
Biografija.....	74

Predgovor

'Ne samo moćno oružje u borbi za opstanak, matematika je simbol naše intelektualne snage i jemstvo da će se ljudski duh vazda boriti za uzvišene ciljeve '

(Danilo Blanuša, 1903-1987)

Teško je zamisliti svet koji nas okružuje bez zvuka u njemu. Evolucijom senzornog sistema kod sisara, razvilo se i čulo sluha. Njegova namena je višestruka – od otkrivanja potencijalne opasnosti pa do uživanja u omiljenoj muzici.

Cilj ovog master rada jeste, pevashodno, da kroz matematičko modeliranje pokušamo razumeti ceo proces putanje zvuka (zvuk je, strogo govoreći-mehanički talas) iz okoline koja nas okružuje sve do mozga koji primljene signale obrađuje kada mi postajemo svesni da smo čuli nešto.

Rad je podeljen u više logičkih celina; u prvom delu se upoznajemo sa osnovnim karakteristikama zvuka i dajemo anatomsku građu uha kao osnov za bolje razumevanje modela, zatim u drugom delu navodimo neke poznate matematičke osnove, modele i osnovne principe koji će nam koristiti dalje u radu. U trećem delu koristimo već poznate modele iz fizike i mehanike odnosno dinamike i pravimo analogon kako bismo opisali svaku deonicu uha i procesa koji se u tom delu izvršava. Na samom kraju implementiramo numeričko rešenje u programskom paketu Matlab i pravimo analogon sa modelom, upoređujući i analizirajući rezultate. Kombinuje se znanje iz anatomske, elektro-fiziologije i najzad, matematičkog modeliranja.

Akcenat ćemo staviti na modele vezane za srednje i unutrašnje uho, bazilarnu membranu i organ puža (kohlea). Navode se modeli koji su se razvijali kroz istoriju kako bi opisali auditivni sistem na osnovu saznanja iz fizike i na osnovu nekih empirijskih odnosno eksperimentalnih zaključaka. Još u petom veku pre Hrista, stari Grci su doživljavali zvuk kao talase koji se prostiru kroz vazduh. Zapavu, oni su došli do zaključka da je (ljudski) sluh rezultat dopiranja tih talasa do uha, ali nisu mogli ništa više da saznaju.

U 16. veku, dolazi do blagog napretka, kada se razvila anatomska i kada su skriveni delovi ljudskog uha videli svetlost dana.

Godine 1863., nemački lekar i fizičar Herman fon Helmholc¹ objavljuje rad ‘Doktrina senzacije tona’ gde predlaže model sluha koji se bazira na pretpostavci da se organ puž (kohlea) može modelirati kao rezonator zvuka, odnosno da pojedini delovi puža vibriraju na određenoj frekvenciji zvučnih talasa. Svakako da najveći doprinos pripada gospodinu Georgu fon Bekešiju² koji je posvetio pažnju modeliranju kohlee počev od 1928., na osnovu eksperimentalnih rezultata, a čiji modeli su mu doneli i Nobelovu nagradu 1961. godine. Takođe, on je posmatrao i modelirao zvučne talase koji dopiru do bazilarne membrane.

Počev od 1950-e godine, kada su Peterson i Bogert na osnovu Bekešijevih rezultata izveli talasni model kohlee, interesovanje za ovu oblast počinje da raste, da bi tokom narednih decenija bili predlagani mnogobrojni modeli³ a samim tim učinjeni značajni pomaci u razumevanju čula sluha. Zahvaljujući današnjoj modernoj aparaturi, preciznim merenjima i računarima možemo doći do preciznijih i boljih rezultata. U ovom master radu ćemo navesti neke od modela, posmatrati njihove karakteristike, prednosti, numeričke aproksimacije i uporedićemo ih.

Autor se nada da će rad u budućnosti poslužiti kao osnov za dalje usavršavanje modela ove prirode a možda jednom i pomoći poboljšanju modela za otklanjanje oštećenja sluha. Ili makar, još više podstaknuti tu ideju.

¹ Hermann von Helmholtz (1821-1894), nemački fizičar i lekar. Jedan od njegovih sudenata-doktoranata bio je i Mihailo Pupin.

² Georg von Békésy (1899-1972), mađarski biofizičar.

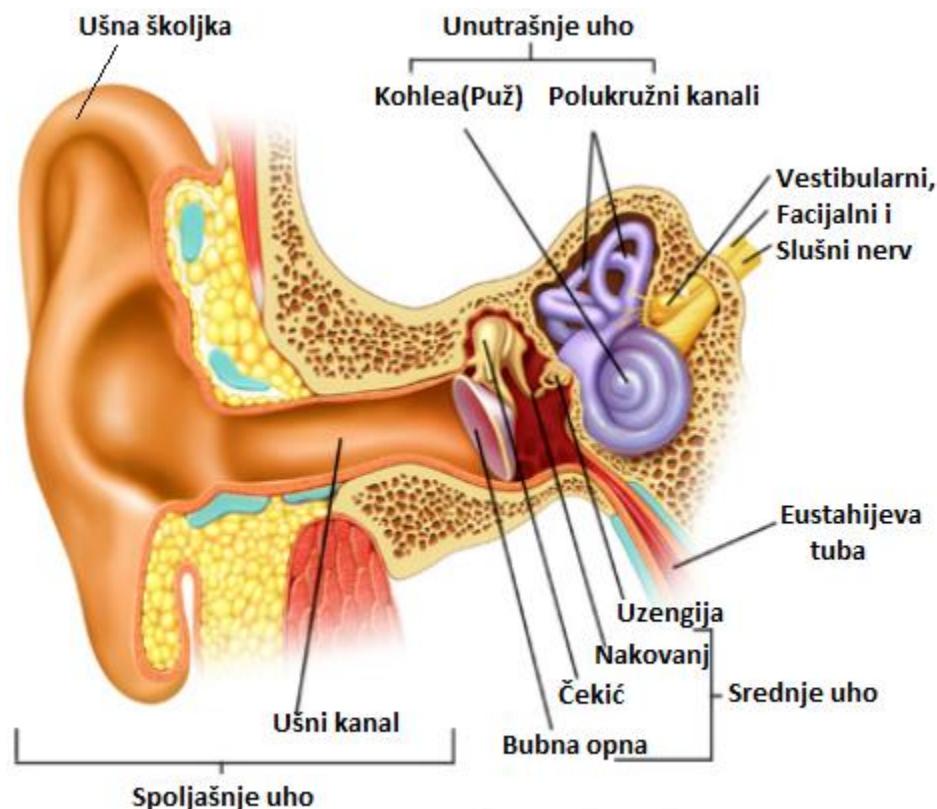
³ Navodimo neke od autora koji su nastavili proučavanje modela a čiji rezultati će biti prikazani i u ovom radu : Džonston i Bojl -1967., Rod -1971., Lien i Koks, Šreder-1973., Alen -1977.

1. Anatomija ljudskog uha i auditivni sistem

Ljudsko uho predstavlja instancu auditivnog sistema; ono je sastavni deo čulnog sistema zaduženog za obradu zvučnih (mehaničkih) talasa. Neretko se smatra da uho čini samo spoljašnji zalistak tkiva, poznat kao ušna školjka, no, ona je samo vidljivi, periferni deo jednog složenijeg sistema. Takođe, u uhu se nalazi centar za ravnotežu i koordinisanje položaja tela. Kičmenjaci imaju jedan par ušiju smešten simetrično sa obe strane glave. Na taj način se lakše detektuju zvučni izvori iz okoline. Iako oblik spoljašnjeg uha varira od vrste do vrste, unutrašnji mehanizam čula sluha i njegov izgled je kod sisara sličan.

Uho možemo vizuelno podeliti na tri celine,

- spoljašnje,
- srednje i
- unutrašnje uho.



Slika: Poprečni presek uha i njegovi ključni elementi

1.1. Spoljašnje uho

Spoljašnje uho predstavlja celinu za sebe i ona se sastoji od vidljivog , kožnog dela (ušne školjke), ušnog kanala i spoljašnjeg dela bubne opne. Ušna školjka se sastoji od zakriviljene spoljašnje ivice (lat.,*helix*), unutrašnjeg zakriviljenog oboda prekrivenog kožom(lat., *antihelix*) , gde se otvara ušni kanal koji vodi ka bubnoj opni i srednjem uhu. Dužina ušnog kanala je oko 2,5 cm i on je ovičen sa kosti sa spoljne odnosno hrskavicom sa unutrašnje strane. Žlezde koje se nalaze u koži ušnog kanala luče cerumen. Mišići spoljašnjeg uha se mogu podeliti na spoljašnje i unutrašnje; neki sisari imaju sposobnost da usmeravaju ušnu školjku zahvaljujući tim mišićima. Mačke, na primer. Konji imaju sposobnost da pomeraju usne školjke nezavisno jedna od druge. Na taj način neki sisari lakše određuju pravac izvora zvuka. Ljudska bića lokalizuju izvor zvuka pomoću centralnog nervnog sistema, i to na osnovu glasnoće zvuka koji dopire do oba uha, upoređujući sekvensijalne intervale dopiranja zvučnih signala. Glavna funkcija spoljašnjeg uha jeste prikupljanje zvučnih talasa i sprovođenje ka srednjem uhu.

1.2. Srednje uho

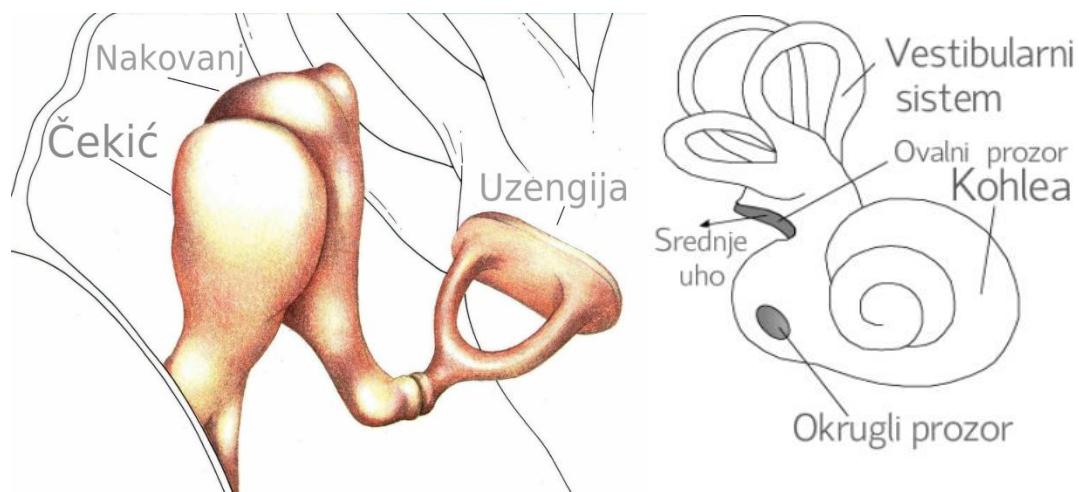
Srednje uho predstavlja šupljinu ispunjenu vazduhom iza bubne opne, čine ga tri koščice – čekić, nakovanj i uzengija. Takođe, srednje uho je povezano sa gornjim delom grla preko tzv. Eustahijeve tube. Glavna funkcija ovih koščica jeste upravo prenos zvučnih talasa dalje ka unutrašnjem uhu. ‘Čekić’ je direktno povezan sa bubenom opnom i on prenosi vibracije bubne opne izazvane upravo zvučnim talasima. Anatomski redosled ovih koščica je takav da vibriranje bubne opne domino efektom izaziva kretanje prvo čekića, zatim nakovanja i na kraju, uzengije, koja je ujedno i najmanja koščica u ljudskom telu. U trenutku kada završni deo uzengije potiskuje tzv., vestibularni organ (vestibulum, trem), dolazi do pomeranja fluida u kohlei (puž) u unutrašnjem uhu. Slušne koščice pomažu u pojačanju zvučnih talasa i do 30 puta.

1.3. Unutrašnje uho

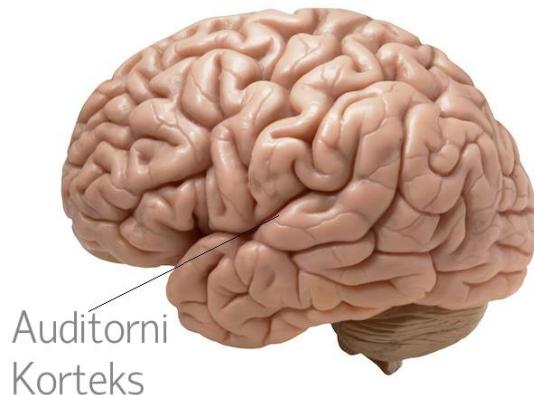
Unutrašnje uho predstavlja najdublji deo uha kod kičmenjaka. Ono je zaslužno za detektovanje zvuka i održavanje ravnoteže. Kod sisara, ono se sastoji od koštanog laverinta, šuplje temporalne kosti lobanje sa sistemom prolaza kojeg čine dve osnovne funkcionalne komponente:

Puž (lat., *Cochlea*) – organ zadužen za sluh. Ovaj organ pretvara mehaničke talase, zvučni pritisak u elektrohemiske impulse (akcione potencijale) koji se sprovode do mozga putem slušnog nerva.

Vestibularni sistem – sistem zadužen za ravnotežu i koordinaciju tela.

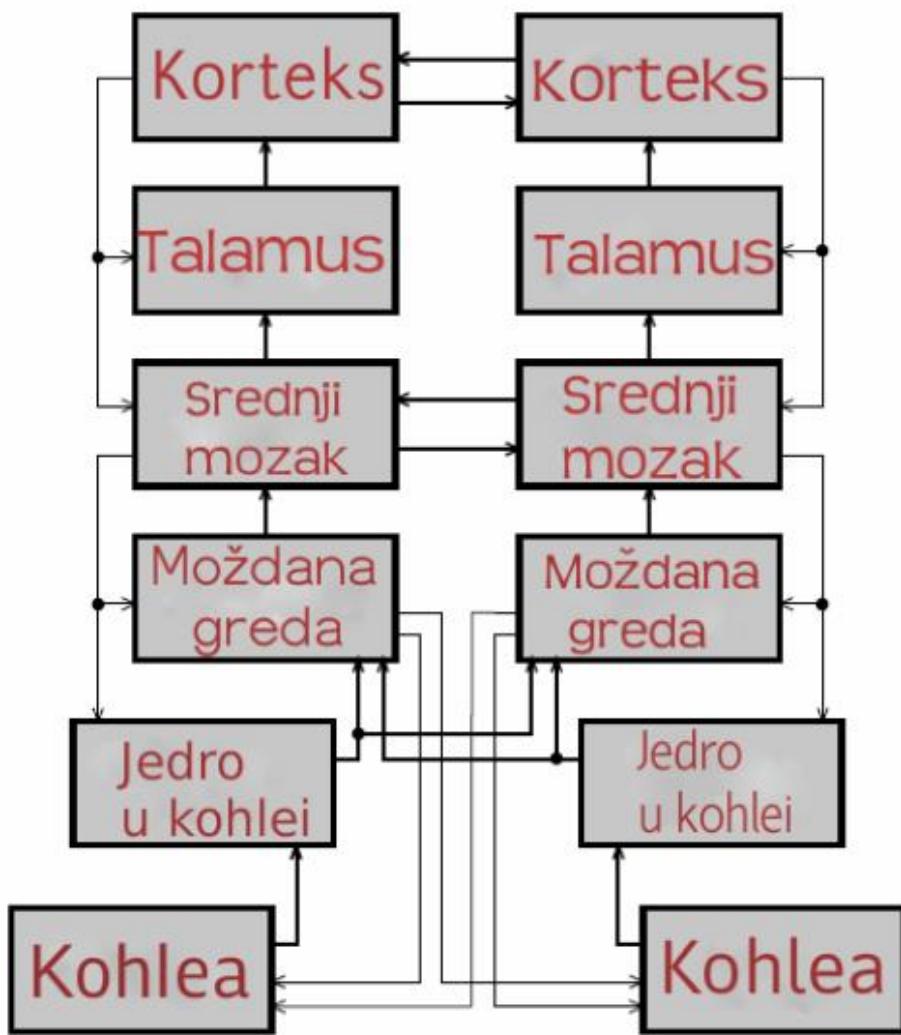


Slika: *Srednje i unutrašnje uho*



Slika: *Auditorni Korteks, centar za prijem zvuka u mozgu*

Kada zvučni talasi dopru do našeg uha, prvi korak u prenosu signala se odigrava na bazilarnoj membrani u kohlei. Zvučni talasi raznih frekvencija iniciraju vibracije na različitim delovima bazilarne membrane. Bazilarna membrana (u daljem tekstu, BM) je povezana sa dlačicama koje predstavljaju čulne ćelije kao i sa perifernim nervnim vlaknima. Dalji tok prenosa informacija se dešava upravo u oko 30.000 nervnih vlakana u unutrašnjem uhu. Upravo sve nelineranosti koje se javljaju u matematičkim modelima su posledica prevođenja zvučnih talasa (od strane čulnih ćelija-dlačica) iz mehaničkog u elektro-hemijski oblik.



Slika: Putanja zvučnog signala od kohlee do Auditornog korteksa

2. Matematičke osnove

2.1. Parcijalne diferencijalne jednačine

Parcijalne diferencijalne jednačine (u oznaci, PDJ) su diferencijalne jednačine koje sadrže funkcije više promenljivih kao i njihove parcijalne izvode. Uz pomoć PDJ, mogu se modelirati razni problemi iz oblasti elektrostatike, elektrodinamike, topote, prijema zvuka i akustike uopšte, kvantne mehanike, dinamike fluida, cene opcija. Ovo su samo neki u moru primera. Rešenja ovih matematičkih modela se mogu dobiti ili analitički ili numerički, uz pomoć softvera.

Definicija 2.1.1. Za funkciju $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, parcijalna diferencijalna jednačina je ona oblika

$$f\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial u^2}{\partial x_1 \partial x_1}, \dots, \frac{\partial u^2}{\partial x_n \partial x_n}, \dots\right) = 0.$$

Ako je f linearna funkcija od u i njenih parcijalnih izvoda, tada imamo linearu PDJ.

Uobičajeni primeri linearih PDJ-a su

- Laplasova⁴

$$\Delta u = \nabla^2 u = 0, \quad \Delta u = \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

- toplotna

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \nabla^2 u = 0$$

- Helmholtcova

$$\nabla^2 A + k^2 A = 0^5$$

⁴ Pierre-Simon Laplace (1749-1827), francuski matematičar i astronom.

⁵ k predstavlja talasni broj a A meru amplitudine talasa.

- Poasonova⁶

$$\Delta u = \nabla^2 u = f$$

- talasna

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u.$$

Nezavisne promenljive date funkcije u mogu da budu prostorne [dvodimenzionalne, trodimenzionalne; u oznaci $u(x, y), u(x, y, z)$] ali isto tako, mogu da uključe i vremensku promenljivu t .

2.2. Klasifikacija PDJ. Početni i granični uslovi.

Klasifikacija PDJ se može vršiti na više kriterijuma – po broju nezavisnih promenljivih, redu najvišeg parcijalnog izvoda u jednačini, po linearnosti, homogenosti. Modeli koje ćemo navoditi u radu koriste linearne PDJ drugog reda i srećemo se sa dve ulazne, prostorne promenljive, (x, y) dok napredniji modeli koriste i vremensku promenljivu te imamo uređeni par promenljivih (x, y, t) . Takođe, zbog prirode problema, funkcije čiji oblik tražimo su kompleksne i može se pokazati u nekim slučajevima da i realni delovi tih funkcija takođe predstavljaju rešenje problema.

Neka opšta klasifikacija nalaže da se linearne PDJ drugog reda mogu podeliti na parabolične, hiperbolične i eliptične. Tako talasna jednačina predstavlja hiperboličnu, Laplasova eliptičnu dok toplotna predstavlja paraboličnu jednačinu. Nama će eliptične jednačine biti fokus proučavanja.

Podsetimo se da realna kriva drugog reda u ravni oblika

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

⁶ Simeon Denis Poisson (1781-1840), francuski matematičar.

može da predstavlja elipsu, hiperbolu ili parabolu u zavisnosti od znaka diskriminante, $bc - a^2$.

Analogno, posmatrajmo linearu PDJ drugog reda u opštem obliku

$$L[u] = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g, \quad (x, y) \in D \quad (1)$$

Funkcije koje se nalaze uz funkciju u i njene izvode se nazivaju konsatnte i one su u opštem slučaju funkcije dvaju promenljivih klase $C^1(D)$ za koje želimo da važi relacija $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. Prviom, ako je $g = g(x, y) = 0$, imamo homogenu linearu PDJ drugog reda.

Definicija 2.2.1. Diskriminanta $\Delta(L)(x, y)$ se definiše kao:

$$\Delta(L)(x, y) = \det \begin{bmatrix} b & a \\ c & b \end{bmatrix} = b^2 - ac.$$

Definicija 2.2.2. Jednačina (1) je:

- Parabolična u (x, y) , ako je $\Delta(L)(x, y) = 0$,
- Hiperbolična u (x, y) , ako je $\Delta(L)(x, y) > 0$,
- Eliptična u (x, y) , ako je $\Delta(L)(x, y) < 0$.

Pokušajmo sada približiti definiciju linearne PDJ drugog reda svođenjem na kvadratnu jednačinu u izvesnom smislu i posmatrati rešenja iste. Prvo prmetimo da totalni diferencijali funkcija u_x i u_y imaju oblik

$$d(u_x) = u_{xx}dx + u_{xy}dy \quad (2)$$

$$d(u_y) = u_{yx}dx + u_{yy}dy \quad (3)$$

Grupišući jednačine (1), (2) i (3) u zajednički oblik, imamo da važi sledeća relacija

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{xx} \\ u_{xy} \\ u_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -du_x - eu_y - f + g \\ d(u_x) \\ d(u_y) \end{bmatrix} \quad (4)$$

Poznato je već iz linearne algebre da sistem jednačina (4) ima jednoznačno rešenje osim kada je determinanta matrice jednaka nuli.

U tom slučaju, javljaju se singularnosti i prekidi kod parcijanlih izvoda. Kada izjednačimo determinantu sistema sa nulom, dobijemo

$$a(dy)^2 - bdx dy + c(dx)^2 = 0 \quad (5)$$

Ovako dobijena jednačina (5) se zove **karakteristična jednačina** koja odgovara početnoj jednačini (1). Njena rešenja se zovu **karakteristike**. Matematički gledano, karakteristike su hiper-površi [specijalno, u dvodimenzionalnom slučaju predstavljaju karakteristične linije koje prolaze kroz tačku domena D u kojoj drugi izvodi imaju prekid ili imaju više od jedne vrednosti u toj tački.]. Ukoliko imamo n -dimenzioni domen, tada su karakteristike $(n - 1)$ - dimenzione hiper-površi.

Imamo dalje, iz (5), da važi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Na ovaj način smo se vratili na definiciju 2.2.2.

Početni i granični uslovi

Za što efikasnije modeliranje neke fizičke pojave, potrebni su granični i početni uslovi. To su početne vrednosti [mogu da budu konstante ili funkcije jedne promenljive] od nepoznate funkcije u , odnosno njene vrednosti na granici domena definisanosti D .

U praksi, granični uslovi mogu biti:

- Dirihićevi⁷, oblika
Za $x = a$, $u(a, y) = f_1(y)$;
Za $x = b$, $u(b, y) = f_2(y)$.
- Nojmanovi⁸:
Za $x = a$, $u_x(a, y) = f_3(y)$;
Za $x = b$, $u_x(b, y) = f_4(y)$.
- Robin⁹-ovi [poznat kao i mešoviti]:

⁷ Peter Gustav Lejeune Dirichlet, (1805-1859), nemački matematičar.

⁸ John von Neumann, (1903-1957), mađarski matematičar jevrejskog porekla.

⁹ Victor Gustave Robin, (1855-1897), francuski matematičar.

Za $x = a$, $Au + Bu_x(a, y) = C$;

Za $x = b$, $A_1 u + B_1 u_x(b, y) = C_1$, где су A, B, C, A_1, B_1, C_1 углавном функције временске променљиве t , по дефиницији.

Početni услови су облика

$$u(x, y = y_0) = f(x).$$

2.3. Furijeova¹⁰ transformacija

У овом оделјку наvodimo дефиницију Furijeove трансформације, неке њene особине и својства. Нјена примена је многострука, користићемо је у трећој глави приликом одређивања израза за разлику вредности притиска течности насталог у кокиљу.

Дефиниција 2.3.1. *Nека је $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ¹¹. Furijeova трансформација функције f је функција \hat{f} , комплексна и ограничена на \mathbb{R}^n , дефинисана са*

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i xy} f(x) dx$$

Дефиниција 2.3.2. *Nека су f и g интегрирујуће функције на \mathbb{R}^n . Конволуција функција f и g , у означи $f * g$, дефинишемо као*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) dy$$

Може се показати да је операција $*$ комутативна.

Дефиниција 2.3.3. *Operator ∂^β дефинишемо на следећи начин*

$$\partial^\beta = \prod_{j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)^\beta = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2} \dots \partial x_n^{\beta_n}},$$

где је β вектор $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, мулти индекс, а β_j , $j = 1, \dots, n$ представљају ненегативне целе бројеве.

¹⁰ Joseph Fourier (1768-1830), француски математичар и физичар.

¹¹ Sa $L^p(D)$ означавамо простор чији је p -и степен интегрирујућа функција на D , за $1 \leq p \leq \infty$.

Definišemo

$$|\beta| = \sum_{j=1}^n \beta_j$$

i za $x \in \mathbb{R}^n$,

$$x^\beta = x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_n^{\beta_n}$$

Definicija 2.3.4. Neka je $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ skup neprekidno-diferencijabilnih funkcija na \mathbb{R}^n . Definišemo Švarcovu¹² klasu $S = S(\mathbb{R}^n)$ kao

$$S = S(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \max|x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty\}$$

Drugim rečima, Švarcova klasa sadrži one funkcije čije izvodi naglo opadaju u \mathbb{R}^n . Jedna od njih je i Gausova funkcija.

Takođe, direktnom primenom definicije Furijeove transformacije i konvolucije, može se pokazati da važe sledeće osobine:

- 1) Furijeova transformacija je linearno preslikavanje, odnosno

$$(\alpha f + \beta g)^\wedge(y) = \alpha \hat{f}(y) + \beta \hat{g}(y)$$

- 2) Za f i $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ važi $(f * g)^\wedge(y) = \hat{f}\hat{g}$.

- 3) Za $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ važi $(f(x + a))^\wedge(y) = e^{-2\pi i a} \hat{f}(y)$

- 4) Za $f \in S$, važi $\hat{f} \in \mathbb{C}^\infty$ i tada imamo da važi

$$\partial^\beta \hat{f} = [(-2\pi i x)^\beta f]^\wedge \text{ i } (\partial^\beta f)^\wedge = (2\pi i y)^\beta \hat{f}$$

- 5) Ako $f \in S$, tada i $\hat{f} \in S$.

¹² Laurent-Moïse Schwartz (1915 -2002), francuski matematičar.

6) Za f i $g \in S$ važi

$$\int f \hat{g} = \int \hat{f} g$$

Zbog toga, za funkciju f iz L^1 deinišimo inverznu Furijeovu transformaciju.

Definicija 2.3.5. Za $f \in L^1$, inverzna Furijeova transformacija, \check{f} , je data sa

$$\check{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi ixy} f(y) dy = \hat{f}(-x)$$

Navodimo sledeću teoremu o Inverzu, bez dokaza.

Teorema 2.3.1. Za funkciju $f \in S$ važi $\check{\check{f}} = f$.

2.4. Navier-Stokes-ove jednačine¹³. Jednačina kontinuiteta

Jedan od glavnih pojmova u teoriji mehanike fluida, jesu Navier-Stokes-ove jednačine, nastale 1822. godine. U 3. poglavlju ćemo videti njihovu primenu za opis kretanja fluida u ljudskoj kohlei. Po svojoj prirodi, ove jednačine pripadaju kategoriji nelinearnih PDJ u skoro svim realnim situacijama. Kako se fluidi kreću haotično kroz neku zapreminu, imamo tzv. turbulenciju. Do samih jednačina se dolazi primenom II Njutnovog¹⁴ zakona za fluide i pod pretpostavkom da su fluidi nestišljivi.

Kažemo da je fizička osobina nekog materijala merena fizičkom veličinom ‘intenzivna’ (eng., intensive property) ukoliko ona ne zavisi od količine. Takve fizičke veličine su gustina, temperatura, tačka ključanja. Neka je L takva jedna veličina koja se nalazi unutar proizvoljne zapremine Ω , ovičena rubom $\partial\Omega$.

¹³ Dugujemo ih pre svega francuskom fizičaru Claude-Louis Navier-u (1785-1836). Kasnije ih je proširio Georg Gabriel Stokes (1819-1903), britanski matematičar i fizičar.

¹⁴ Isaac Newton (1643-1727), britanski matematičar, fizičar, astronom, alhemičar i filozof.

Posmatraćemo jednačinu kontinuiteta, odnosno posmatraćemo brzinu [stopu] promene veličine L u nekom medijumu. Na osnovu Rejnolds¹⁵-ove jednchine kretanja, imamo da je

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} L dV = - \int_{\partial\Omega} L \vec{v} \cdot \vec{n} dA - \int_{\Omega} Q dV \quad (6)$$

Leva strana jednačine (6) predstavlja stopu promene veličine L unutar zapremine Ω , dok se desna strana sastoje od dva dela :

- Izraza za fluks, $\int_{\partial\Omega} L \vec{v} \cdot \vec{n} dA$, koji predstavlja količinu veličine L koja izlazi iz zapremine preko granice $\partial\Omega$ i
- Izraz $\int_{\Omega} Q dV$, koji predstavlja količinu koja nestaje [ili nastaje] u slučaju postojanja otvora unutar zapremine Ω . Ovde ne posmatramo slučaj kada fizička veličina isparava i na taj način nestaje.

Na osnovu teoreme divergencije, možemo da izraz za fluks pretvorimo u zapreminski integral,

$$\int_{\partial\Omega} L \vec{v} \cdot \vec{n} dA = \int_{\Omega} \nabla(L \vec{v}) dV$$

Tada jednačina (6) ima oblik

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} L dV = - \int_{\partial\Omega} \nabla(L \vec{v}) dV + \int_{\Omega} Q dV \quad (7)$$

Podsetimo se Lajbnicove¹⁶ teoreme,

$$\frac{d}{dx} \int_a^b f(x, y) dy = \int_a^b \frac{d}{dx} f(x, y) dy$$

Stoga, imamo da je (7) ekvivalentno

¹⁵ Osborne Reynolds (1842-1912), britanski fizičar.

¹⁶ Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716), nemački filozof.

$$\int_{\Omega} \frac{d}{dx} L dV = - \int_{\partial\Omega} \nabla(L\vec{v}) + Q dV$$

Što je, dalje, ekvivalentno sa

$$\int_{\Omega} \frac{d}{dx} L dV + \nabla(L\vec{v}) + Q dV = 0 \quad (8)$$

Da bi ova jednačina bila zadovoljena za svaku zapreminu, jedina solucija jeste da integrand bude jednak nuli. Imamo tada

$$\frac{d}{dx} L + \nabla(L\vec{v}) + Q = 0 \quad (9)$$

Primenjujući sada ovu jednačinu kontinuiteta na zapreminu, dobijamo

$$\frac{d}{dx} \rho + \nabla(\rho\vec{v}) + Q = 0 \quad (10)$$

U slučaju da nemamo nikakve otvore unutar zapremine [$Q = 0$], dobijamo iz (10)

$$\frac{d}{dx} \rho + \nabla(\rho\vec{v}) = 0 \quad (11)$$

Za nestišljive fluide, gustina je konstantna. Tada je $\frac{d}{dx} \rho = 0$, i delenjem jednačine (11) konstantom ρ , dobijamo najjednostavniji oblik,

$$\nabla\vec{v} = 0$$

Definicija 2.4.1. Lagranžov [Stoksov] izvod čestice jeste mera promene intenzivne veličine na nivou jedne čestice te veličine u vektorskom polju. Ovaj izvod sadrži

- Stopu promene veličine, $\frac{d}{dt} L$ i
- Promenu položaja čestice u vektorskem polju, \vec{v} .

Tada se Lagranžov izvod definiše sa

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{du}{dt} + (\vec{v} \cdot \nabla)u$$

Izraz $(\vec{v} \cdot \nabla)u$ predstavlja izvod po pravcu funkcije u u vektorskom polju \vec{v} .

Na osnovu II Njutnovog zakona, imamo

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (12)$$

Uzimajući $\vec{F} = \vec{b}$ u (12) za silu tela u kom fluktuišu fluidi i zamenom mase zapreminom, ubrzanja kao izvoda funkcije brzine a sve u funkciji prostornih i vremenske promenljive, dobijamo

$$\vec{b} = \rho \frac{d}{dt} \vec{v}(x, y, z, t) \quad (13)$$

Primenjujući pravilo složenog izvoda za vektor brzine, imamo iz (13):

$$\vec{b} = \rho \left(\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dy} \frac{dy}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dz} \frac{dz}{dt} \right)$$

Ili, što je ekvivalentno

$$\vec{b} = \rho \left(\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right)$$

Ili,

$$\vec{b} = \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} \quad (14)$$

Prepostavimo da sada sila kojom telo deluje na fluide zavisi od stresa [smicanja]¹⁷ i spoljašnjih sila, kao što je sila gravitacije, na primer. Imamo tada

$$\vec{b} = \nabla \cdot \sigma + \vec{f}$$

Sa σ označavamo stres, a sa \vec{f} spoljašnje sile.

Tenzor σ se dalje može predstaviti u matričnom obliku, kao

¹⁷ Viskozni, Njutnov fluid (uključujući vazduh i vodu), koji se kreće duž čvrste granice, vršiće tangencijalno naprezanje na toj granici.

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (15)$$

U praksi, ovaj stres-tenzor se dekomponuje na dva tenzora, hidrostaticki tenzor i tenzor deformacije. Hidrostaticki tenzor predstavlja one sile koje određuju zapreminu tela, sile pritiska; tenzor deformacije određuje kretanje i deformaciju samog tela i komponovan je od pomicaja fluida. Imamo tada iz (15)

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{xx} + p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} + p & \sigma_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} + p \end{bmatrix}$$

Ili, ekvivalentno,

$$\sigma = -pI + T, \text{ gde je } T \text{ tenzor deformacije.}$$

Smenom u početnu jednačinu (14), konačno dolazimo do Navije-Stoks-ovih jednačina u svom najopštijem obliku :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \nabla T + \vec{f}.$$

Sada možemo modifikovati tenzor deformacije T u skladu sa vrstom fluida čije kretanje modeliramo a samim tim i modifikovati najopštiji oblik Navije-Stoksovih jednačina.

Kako smo prepostavili da radimo sa Njutnovim fluidima, tada važi i prepostavka o prirodi tenzora T . Za Njutnove fluide, pritisak fluida je proporcionalan stopi deformacije fluida. Matematički,

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Proporcionalna konstanta μ je mera viskoznosti.¹⁸

Tada imamo

¹⁸ Unutrašnji otpor tečnosti. Tečnost se ne kreće jednako prilikom protoka kroz šupljinu. Konstanta μ meri lakoću toka fluida prilikom delovanja sila tela na fluid.

$$\nabla \cdot \sigma = \mu \nabla \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & 2 \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial y} & 2 \frac{\partial \omega}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Računajući komponentu x operatora divergencije, dobijamo

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \sigma)_i &= \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) = \\ &= \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial z} = \\ &= \mu \nabla^2 u + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) = \\ &= \mu \nabla^2 u + \mu \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot v) = \\ &= \mu \nabla^2 u + 0 = \mu \nabla^2 u. \end{aligned}$$

Kako možemo primeniti izvod i na ostale komponente, tada operator divergencije zamenjujemo Laplasijanom :

$$\nabla \cdot T = \mu \nabla^2 \vec{v}$$

Sada konačno dobijamo, proširivanjem tenzora,

$$\rho \left(\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} + \vec{f}$$

Imamo da je

- $\rho \left(\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right)$ sila inercije po zapremini,
- $\frac{d\vec{v}}{dt}$ ubrzanje fluida, brzina promene brzine fluida,
- $\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$ konvektivno ubrzanje. Konvektivno ubrzanje je po definiciji brzina promene brzine svake tačke fluida koja se kreće duž krive $c(t)$. Otuda ‘konvektivno’ .
- $(-\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v})$ divergencija stresa,
- $-\nabla p$ gradijent pritiska fluida
- $\mu \nabla^2 \vec{v}$ mera viskoznosti fluida,
- \vec{f} ostale masene sile.

Matematičari još nisu dokazali da rešenja u tri dimenzije uvek postoje, ili da, ako postoje, da one ne sadrže singularnosti ili diskontinuitete (prekide). Ovi problemi nazivaju se problemi postojanja i glatkosti Navije-Stoksovih jednačina. Uvođenjem nekih dodatnih pretpostavki i posmatranje jednačina u dvodimenzionalnom prostoru dodatno olakšava nalaženje nekih približnih ali analitičkih rešenja za nalaženja vrednosti pritiska fluida u kohlei, što će kasnije biti i prikazano u narednoj glavi.

2.5. Eliptične parcijalne diferencijalne jednačine. Laplasova jednačina i principi.

U prethodnom poglavlju smo videli definiciju eliptične parcijalne diferencijalne jednačine, pogledati definiciju 2.2.2. Glavni predstavnik ove klase jednačina jeste Laplasova, a čije osobine ćemo koristiti u narednom poglavlju za modeliranje vrednosti pritiska u ljudskoj kohlei.

Definicija 2.5.1. *Laplasov operator, Δ , za funkciju $u = u(x_1, \dots, x_n)$ definišemo sa*

$$\Delta u = \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

Napomena: Za funkciju $u = u(x_1, \dots, x_n)$, važi relacija $\Delta = \nabla^2$, gde ∇ prestavlja gradijent funkcije u , vektor parcijalnih izvoda date funkcije u .

Definicija 2.5.2. Laplasova jednačina je data sa

$$\Delta u = \nabla^2 u = 0 \quad (16)$$

Rešenja Laplasove jednačine su harmonijske funkcije i one zauzimaju važno mesto u svetu nauke. Preciznije,

Definicija 2.5.3. Neka je D otvoren skup u \mathbb{R}^n . Takav skup je uglavnom povezan i ograničen. Sa ∂D označavamo njegov rub. Funkcija $u \in C^2(D)$ je harmonijska ukoliko zadovoljava $\Delta u = 0$, $x \in D$, subharmonijska ako važi $\Delta u \geq 0$ a superharmonijska ukoliko je $-u$ subharmonijska.

Definicija 2.5.4. Sa ω_n obeležavamo $n - 1$ - dimenzionu meru jedinične sfere $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n | |x| = 1\}$, i u tom slučaju je $\omega_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$, gde je $\Gamma(\cdot)$ Gama funkcija. Gama funkciju za kompleksan broj sa realnim delom definišemo kao

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx$$

Napomena: Za prirodan broj n važi $\Gamma(n) = (n - 1)!$.

Napomena: Drugi autori za ω_n uzimaju zapreminu, odnosno n dimenzionu Lebegovu meru jedinične lopte, $B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n | |x| \leq 1\}$. Može se pokazati da je zapremnina lopte $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n | |x - y| \leq r\}$, $|B(x,r)| = \omega_n r^n/n$.

Teorema 2.5.1. Princip nejednakosti srednje vrednosti. Neka je $u \in C^2(D)$ subharmonijska i neka je $x \in D$ i $r < \text{dist}(x, \partial D)$. Tada važi

$$u(x) \leq \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{S(x,r)} u(y) dS_y$$

i

$$u(x) \leq \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B(x,r)} u(y) dy$$

Posledica: Ako je $u \in C^2(D)$ harmonijska funkcija, tada je ona i subharmonijska i superharmonijska.

2.5.1. Jak princip maksimuma.

Teorema 2.5.1.1. *Neka je funkcija $u \in C^2(D)$ subharmonijska. Prepostavimo da postoji tačka $x \in D$ takva da važi*

$$u(x) = \sup(u), \text{ na skupu } D.$$

Tada je funkcija u konstanta. Stoga, ako je funkcija u harmonijska i dostiže svoj maksimum ili svoj minimum u skupu D, tada je ona konstanta.

Dokaz. Neka je $M = \sup(u)$, na D . Možemo skup D razložiti na dva podskupa, $D_1 = \{y|u(y) < M\}$ i $D_2 = \{y|u(y) = M\}$. Kako je funkcija u neprekidna, skup D_1 je otvoren a skup D_2 zatvoren. Po pretpostavci, skup D_2 nije prazan. Neka je x bilo koja tačka iz D_2 .

Sada, iz nejednakosti srednje vrednosti imamo

$$M = u(x) \leq \int_{B(x,r)} u(y) dy \leq M$$

Stoga, $u(y) = M$, za svaku loptu $B(x,r) \subset D$. To znači da je skup D_2 otvoren. Kako povezan skup ne može biti razložen u dva neprazna, odvojena otvorena skupa, imamo da je $D_1 = D_2$. ■

Pridev ‘jak’ u nazivu teoreme se odnosi na zaključak da ako funkcija dostiže svoj maksimum u skupu D , da je ona konstanta. Sledi još jedan važan princip za skalarnu Laplasovu jednačinu i probleme u kojima ona figuriše a u kojima se ne javlja nejednakost srednje vrednosti.

2.5.2. Slab princip maksimuma

Toerema 2.5.2.1. Neka je funkcija $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ subharmonijska. Tada važi

$$\max_{x \in \bar{D}} u = \max_{x \in \partial D} u$$

Za harmonijsku funkciju u važi

$$\min_{x \in \partial D} u \leq u(x) \leq \max_{x \in \partial D} u$$

Napomena – slab princip maksimuma sledi iz jakog principa ali ovde pristupamo drugom dokazu.

Dokaz. Prvo, prepostavimo da je funkcija u striktno subharmonijska, odnosno da važi $\Delta u > 0$. Kako $u \in C(\bar{D})$, ona tada dostiže svoj maksimum u nekoj tački $x \in \bar{D}$. Ako pokažemo da $x \in D$, tada imamo kontradikciju. Kako funkcija dostiže maksimum, tada važi $Su(x) = 0$, gde je $S^2 u$ negativno semi-definitna matrica. Ali tada je $\Delta u = Tr(S^2 u) \leq 0$, što je kontradikcija sa prepostavkom da je funkcija striktno subharmonijska. Stoga, imamo $\max_{x \in \bar{D}} u = \max_{x \in \partial D} u$.

Ako u nije striktno harmonijska, neka je $\varepsilon > 0$ i konstruišimo tada striktno harmonijsku funkciju $u^\varepsilon = u + \varepsilon|x|^2$.

Imamo tada

$$\max_{x \in \bar{D}} u \leq \max_{x \in \bar{D}} u^\varepsilon = \max_{x \in \partial D} u^\varepsilon \leq \max_{x \in \partial D} u + \varepsilon \max_{x \in \partial D} |x|^2$$

Kako je leva strana nejednačine nezavisna od ε , puštajući $\varepsilon \rightarrow 0$, dobijamo slab princip maksimuma. ■

2.5.3. Fundamentalno rešenje Laplasove jednačine u \mathbb{R}^n

Pokušajmo naći rešenje Laplasove jednačine oblika $u(x) = \psi(r)$, gde je $r = |x|$, $x \in \mathbb{R}^n$. Zamenom u Laplasovu jednačinu, dobijamo iz (16)

$$\Delta u = \psi'' + \frac{(n-1)}{r}\psi' = 0 \quad (17)$$

Integracijom (17) dobijamo

$$\psi' = C_1 r^{1-n}, \quad n \geq 2, \quad r > 0 \quad (18)$$

Još jednom integracijom iz (18) imamo

$$\psi = C_1 \log(r) + C_2, \quad n = 2, \quad r > 0,$$

odnosno,

$$\psi = \frac{C_1}{2-n} r^{2-n} + C_2, \quad n \geq 3, \quad r > 0.$$

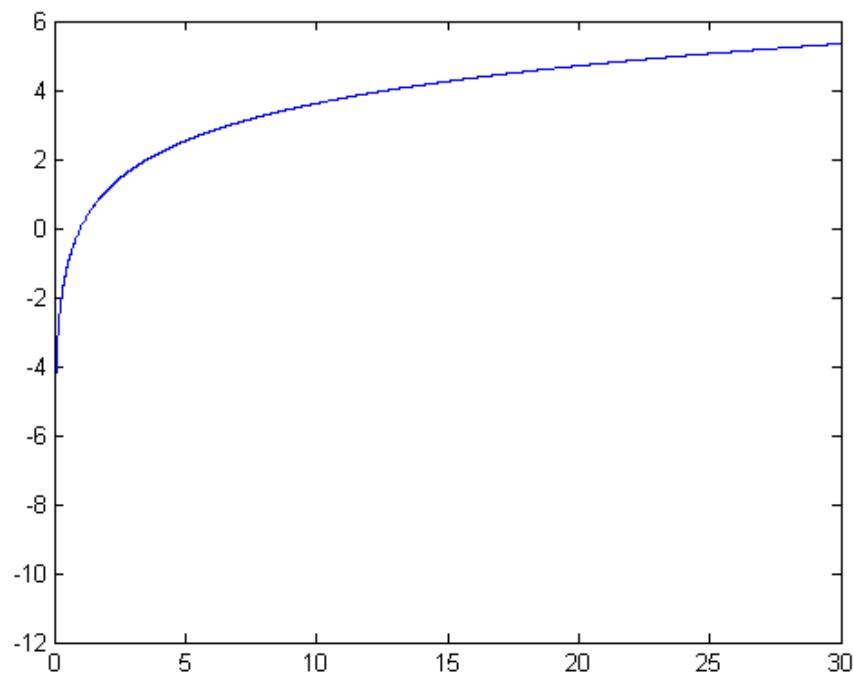
Za konstantu C_2 uzimamo da je njena vrednost 0, jer nije fizički značajna, dok za C_1 uzimamo vrednost $1/2\pi$ jer tada imamo radijalno-simetrično rešenje Laplasove jednačine, što je i fizički smisleno. Tada imamo za dvodimenzionalni slučaj (za $n = 2$), i za $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,

$$\psi(r) = \frac{1}{2\pi} \log(r),$$

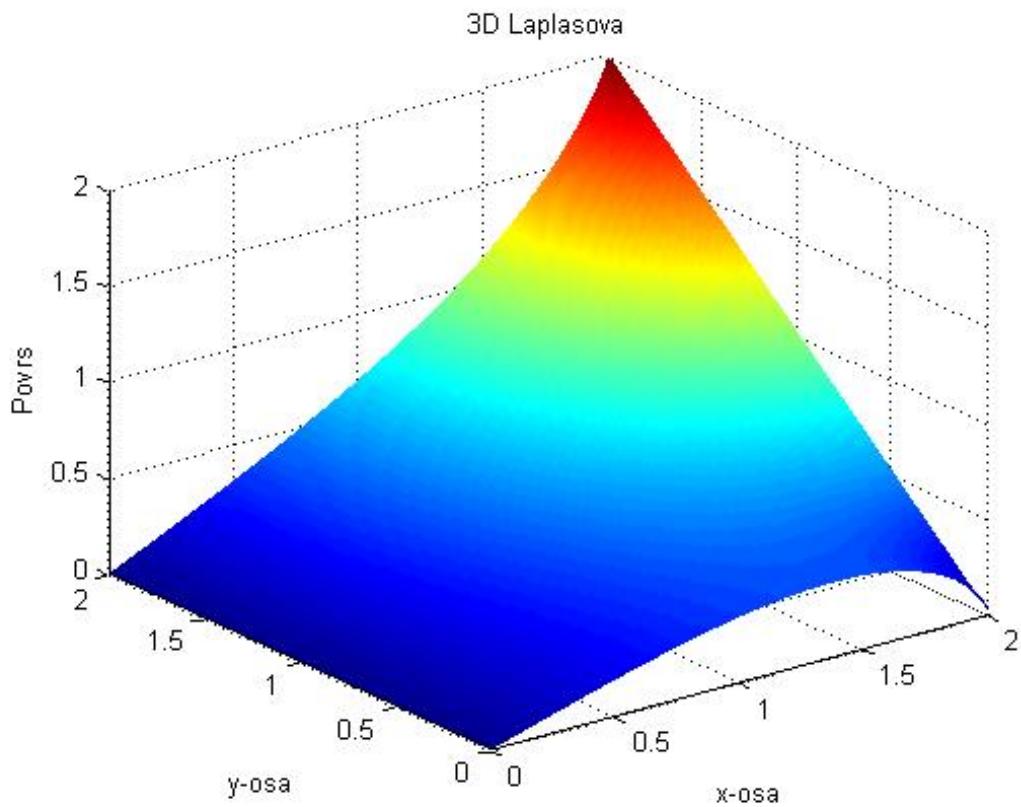
dok za $n \geq 3$ imamo

$$\psi(r) = \frac{r^{2-n}}{(2-n)\omega_n}$$

Napomena: U dvodimenzionalnom slučaju, funkcija ψ nije ograničena ni odozgo ni odozdo, što je posledica činjenice da subharmonijske funkcije zadovoljavaju teoremu koja tvrdi da su subharmonijske funkcije koje su ograničene odozgo konstante. Za $n \geq 3$ ovo nije slučaj.



Grafik: Rešenje Laplasove jednačine za $n = 2$, $u(x,y)$ ravni.



Grafik: Rešenje Laplasove jednačine za $n = 3$, dakle, za trodimenzionalan slučaj [korišćen je metod konačnih razlika uz Dirihleov početni uslov. O početnim uslovima više na strani 12.]

Navodimo sada teoreme i principe, bez dokaza, vezane za harmonijske funkcije za koje smatramo da su značajne.

Teorema 2.5.2. *Neka su $u, v \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$, neka zadovoljavaju $\Delta u = \Delta v$ u D i neka je $u = v$ na ∂D . Tada važi $u = v$ u D .*

Teorema 2.5.3. [Harnakova¹⁹ nejednakost] *Neka je $u \in C^2(D)$ nenegativna harmonijska funkcija u D . Tada za proizvoljan povezan skup $D' \subset\subset D$ postoji konstanta $C(D', D)$ takva da je*

$$\sup(u) \leq C \inf(u), \text{ na } D'$$

Definicija 2.5.5. *Funkcija $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ je realna analitička na D ako za svako $x \in D$ postoji lopta $B(x, r)$, $r > 0$ takva da se funkcija može razviti u konvergentan red*

$$f(y) = \sum_{\alpha} c_{\alpha}(y - x)^{\alpha}, \quad y \in B(x, r),$$

gde je α multi-indeks a $c_{\alpha} = \alpha!^{-1} \partial^{\alpha} f(x)$, $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$.

Definicija 2.5.6. *Sa $C^{\omega}(D)$ označavamo skup realih analitičkih funkcija na D . Više o ovom skupu može da se pronađe u [14].*

Teorema 2.5.4. *Ako $f \in C^{\omega}(D)$. tada i $f \in C^{\infty}(D)$ i za svako $x \in D$ postoji lopta $B(x, r) \subset D$ takva da je $c_{\alpha} = \alpha!^{-1} \partial^{\alpha} f(x)$. Štaviše, postoji pozitivna konstanta M takva da je za svako $y \in B(x, r)$ i $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ zadovoljeno*

$$|\partial^{\alpha} f(y)| \leq \frac{M |\alpha|!}{r^{|\alpha|}}$$

gde je $|\alpha|$ težina multi-indeksa definisana sa $|\alpha| = |\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|$.

Teorema 2.5.5. *Neka je D otvoren i povezan skup u \mathbb{R}^n . Neka je $f \in C^{\omega}(D)$ i $x \in D$. Tada je f određena jedinstveno do na $\partial^{\alpha} f(x)$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$.*

Teorema 2.5.6. *Neka je u harmonijska funkcija na D . Tada $u \in C^{\omega}(D)$.*

Teorema 2.5.7. *Neka niz harmonijskih funkcija $u_k: D \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, konvergira uniformno na podskupovima skupa D ka funkciji $u: D \rightarrow \mathbb{R}$. Tada je i u harmonijska.*

¹⁹ C. G.A. Harnack (1851-1888), nemački matematičar.

Teorema 2.5.8. Harnakova teorema o konvergenciji. Neka je u_k monotono rastući niz i neka za neko $\xi \in D$, niz $\{u_k(\xi)\}$ ograničen. Tada niz u_k konvergira uniformno na kompaktnim podskupovima od D ka harmonijskoj funkciji.

Dokaz. Znamo da $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(\xi)$ postoji, jer je niz ograničen i monoton. Dakle, za svako $\varepsilon > 0$ postoji N takvo da važi $0 \leq u_l(\xi) - u_k(\xi) < \varepsilon$, $l \geq k \geq N$. Uzmimo proizvoljan podskup $D' \subset\subset D$ i neka $\xi \in D'$. Iz Harnakove nejednakosti,

$$\sup_{D'}(u_l - u_k) \leq C(\inf_{D'}(u_l - u_k)) \leq C\varepsilon$$

Tada je niz $u_l - u_k$ Košijev u $\overline{D'}$ i na osnovu **Teoreme 2.5.7.**, sledi tvrđenje. ■

Teorema 2.5.9. Ako je u_k ograničen niz, tada postoji podniz koji konvergira ka harmonijskoj funkciji na kompaktnim podskupovima skupa D .

2.6. Numerički alati za rešavanje. Metoda konačnih razlika.

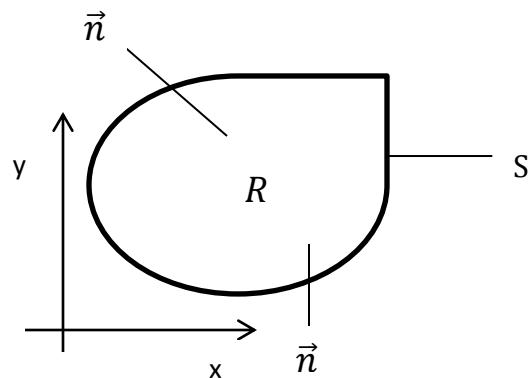
Kako često analitičko rešenje modela ne postoji, nužno je pribegnuti numeričkoj metodi rešavanja parcijalnih diferencijalnih jednačina. Tehnika se sastoji u aproksimaciji parcijalnih izvoda i početnih odnosno rubnih uslova diferencijalnim količnicima te rešavanjem sistema. Ovde navodimo jednu tehniku, metodu konačnih razlika, koja će biti kasnije iskorišćena i implementirana u narednoj glavi.

Podsetimo se da je opšti oblik eliptične PDJ sa dve promenljive

$$u_{xx} + au_{yy} + bu_x + cu_y + du = \begin{cases} 0 - \text{Laplasova} \\ f(x, y) - \text{Poasonova}, \end{cases} \quad (19)$$

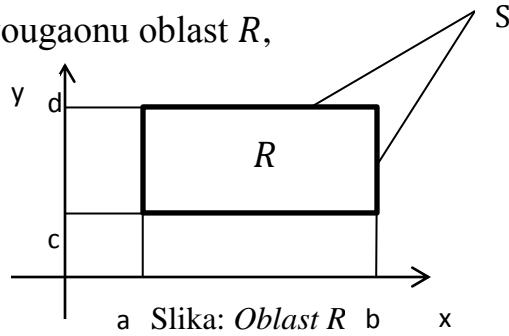
i ona je definisana na nekoj oblasti R u $x - y$ ravni a na garnici te oblasti, S , važe uglavnom rubni uslovi Robin-ovog tipa:

$$Au + B \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = C, \text{ gde je } \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \text{ izvod u pravcu normale na granicu } S.$$



Slika: Oblast definisanosti S

Ograničićemo se sada na pravougaonu oblast R ,



Diskretizujemo sada domen R na sledeći način

$$\Delta x = \frac{b-a}{N}, \Delta y = \frac{d-c}{M}, x_i = a + i\Delta x, i = 0, 1, \dots, N; y_j = c + j\Delta y,$$

$$j = 0, 1, \dots, M.$$

Numeričko rešenje PDJ predstavlja skup od $(N+1)(M+1)$ vrednosti funkcije $u(x_i, y_j) = u_{i,j}$ i to

- $(N-1)(M-1)$ vrednosti u unutrašnjosti domena R , $u_{i,j}$, za $i = 1, \dots, N-1$, $j = 1, \dots, M-1$.
- $2(M+N)$ vrednosti na granici domena.

Sada aproksimiramo parcijalne izvode koji figurišu u formuli na sledeći način:

$$u_{xx}|_{x_i, y_j} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}$$

$$u_{yy}|_{x_i, y_j} \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}$$

$$u_x|_{x_i, y_j} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x}$$

$$u_y|_{x_i, y_j} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y}$$

Granični uslovi koji figurušu u PDJ se aproksimiraju na sledeći način

$$u_x|_{x=a=x_0} \approx \frac{u_{1,j} - u_{0,j}}{\Delta x}$$

$$u_x|_{x=a=x_N} \approx \frac{u_{N,j} - u_{N-1,j}}{\Delta x}$$

$$u_y|_{y=c=y_0} \approx \frac{u_{i,1} - u_{i,0}}{\Delta y}$$

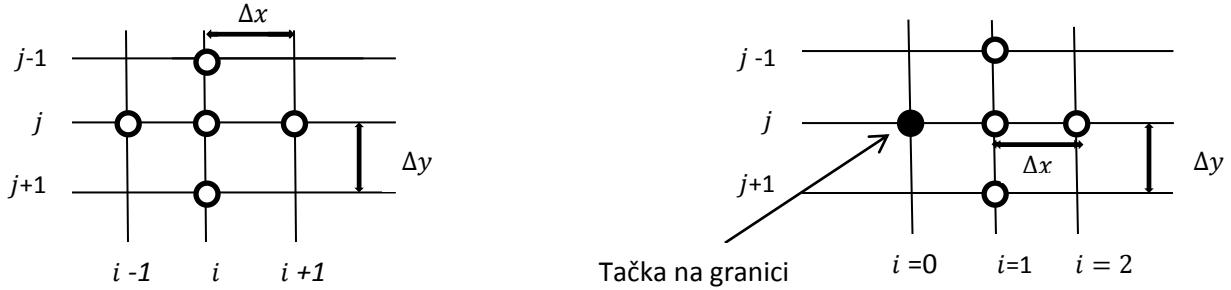
$$u_y|_{y=d=y_M} \approx \frac{u_{i,M} - u_{i,M-1}}{\Delta y}$$

Ubacujući ove aproksimacije u početnu jednačinu (19), dobijamo sistem linearnih jednačina:

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + a \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} + b \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + c \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} + du_{i,j} = f(x_i, y_j),$$

$$i = 1, \dots, N-1, j = 1, \dots, M-1 \quad (20)$$

Svaka od jednačina sistema (20) sadrži po pet susednih vrednosti $u_{i,j}$. Ovaj sistem jednačina uključuje i granične vrednosti, odnosno tačke $u_{0,j}, u_{N,j}, u_{i,0}, u_{i,M}$.



Slika: *Mreža diskretizacije*

Brzina konvergencije zavisi od funkcije f kao i od početnih vrednosti funkcije u a za rešavanje sistema linearnih jednačina se može koristiti Jakobijev ili Gaus-Zajdelov iterativni postupak.

U specijalnom slučaju, za Laplasovu jednačinu (16), sistem linearnih jednačina ima oblik:

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} = 0$$

$$i = 1, \dots, N-1, j = 1, \dots, M-1$$

Uzimajći $\Delta x = \Delta y$, dobijamo sledeću iterativnu formulu:

$$u_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{4}(u_{i-1,j}^{(k)} + u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k)})$$

$$i = 1, \dots, N-1, j = 1, \dots, M-1$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

3. Matematički modeli

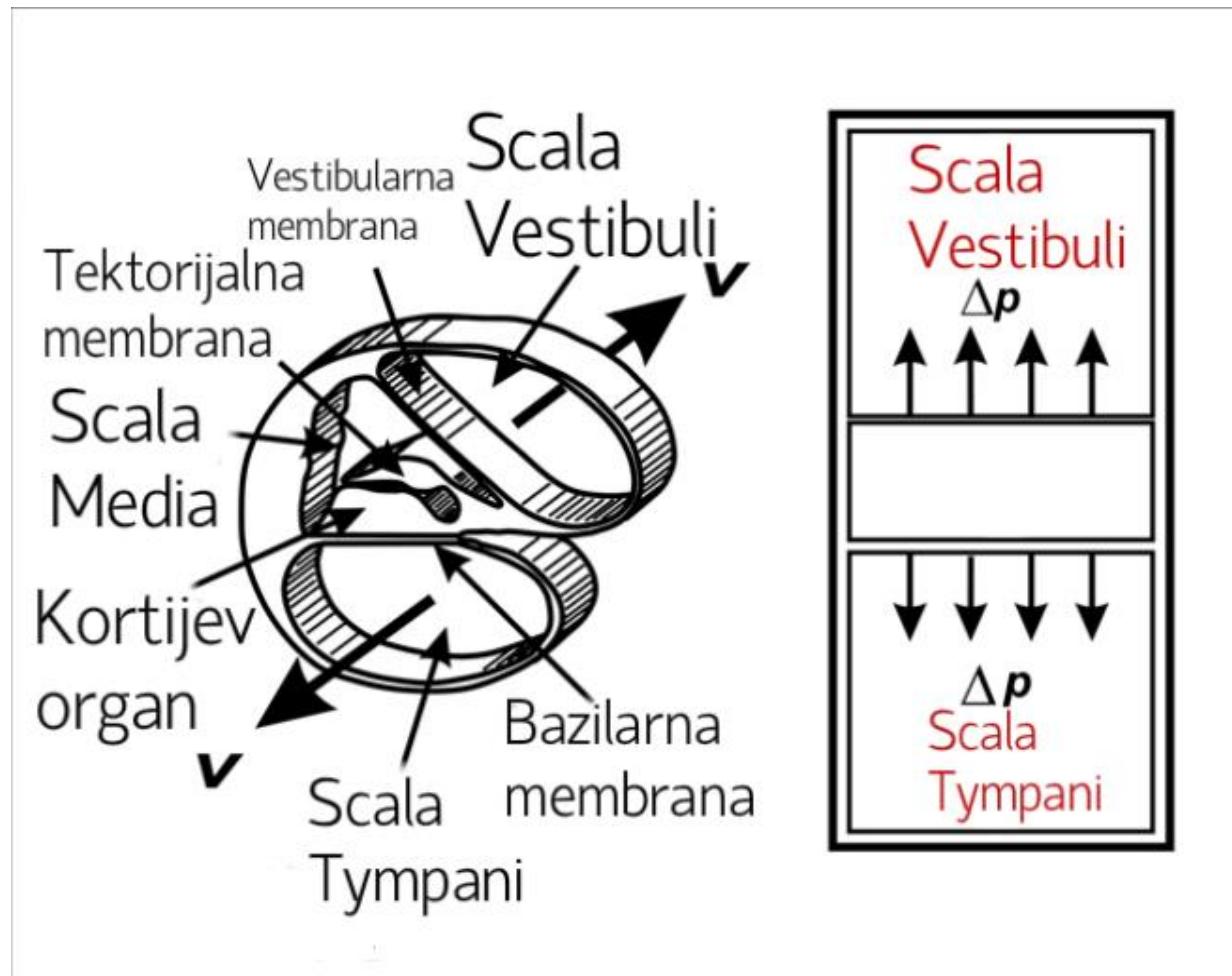
3.1. Uvodne prepostavke

Praktično sve što je poznato o talasima koji deluju u kohlei i na uho uopšte dugujemo gosp. Von Bekešiju koji je proučavao te talase koristeći mikroskop. Takođe, on je konstruisao fizički model kohlee i uz pomoć tih modela odredio koje su karakteristike kohlee esencijalne za funkcionisanje modela. U sledećim stavkama sažeto navodimo neke opšte zaključke dobijene eksperimentalnim proučavanjem kohlee:

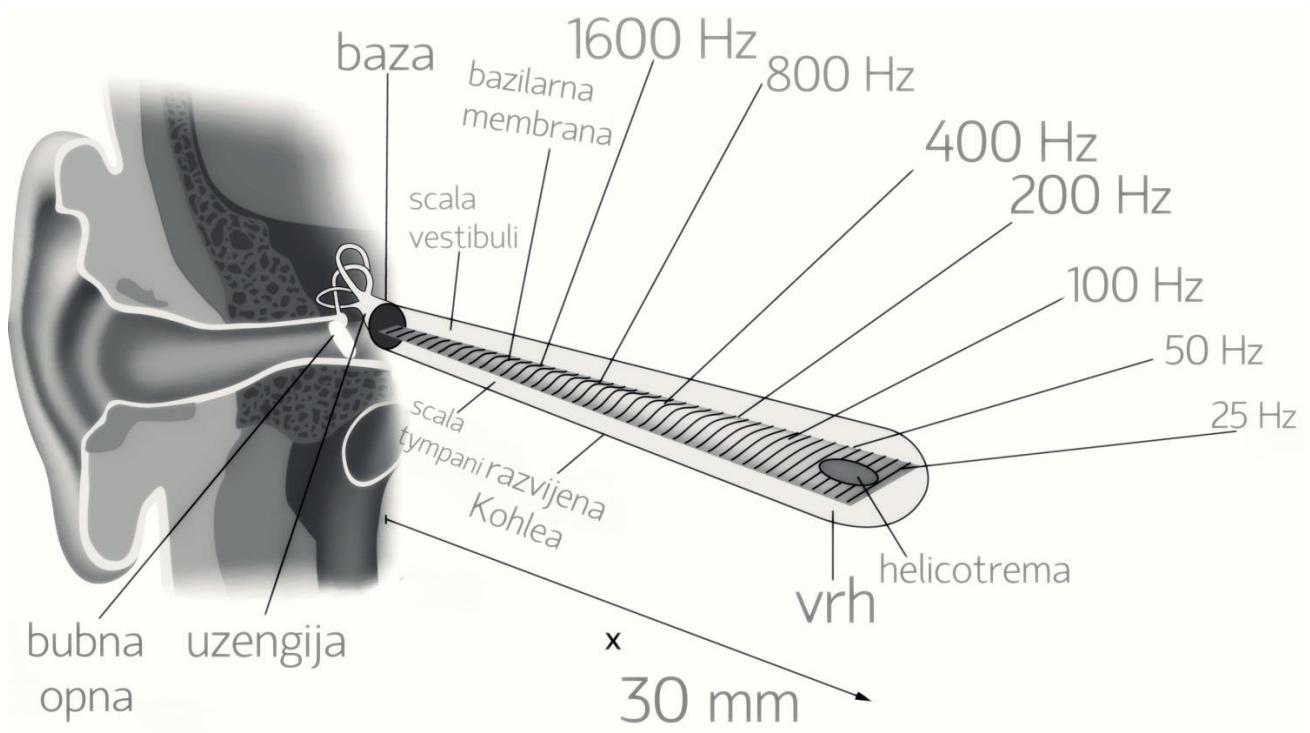
1. Kada na uho deluje stalan čist ton, kohlea reaguje u vidu putujućeg talasa stalne brzine.
2. Amplituda toga talasa je stalna funkcija koja raste do svog jedinstvenog maksimuma te nakon toga naglo opada.
3. Kada se promeni frekvencija talasa iz izvora, funkcija amplitude ne menja oblik nego se translira u novu poziciju. Pozicija maksimuma varira kao i negativni logaritam frekvencije talasa izvora. Kako su vlakna slušnog nerva raspoređena duž bazilarne membrane, to samo znači da zvuci različitih frekvencija deluju na različite grupe nervnih vlakana.
4. Savitljivost membrane po jedinici dužine varira u odnosu na njen položaj, kao $e^{\lambda x}$, gde je $\lambda^{-1} = 0.7$.
5. Bazilarna membrana nije zategnuta nego je savitljiva.
6. Tečnost u kohlei je neophodna za putujući talas iz spoljašnje sredine. Bez te tečnosti, svi delovi bazilarne membrane vibriraju sinhrono kao odgovor na nametnutu oscilaciju spolja. Ovaj podatak govori da nije bitna sama masa kohlee nego masa tečnosti u njoj.
7. Iako je ta tečnost neophodna, njena dubina u kohlei nije važna. Talasi osciluju na svakoj kapi tečnosti koja je na bazilarnoj membrani. U modelima, dubina se može korigovati a svako povećanje iste iznad normlane veličine ne utiče na kretanje talasa.
8. Iskrivljenost kohlee nema velikog značaja jer se talas može reprodukovati i u modelima koji ne uzimaju u obzir iskrivljenje.
9. Putujući talasi poprimaju oblik i pravac širenja i nisu osetljivi na način simulacije kohlee.

3.2. Pritisak u kohlei – model

Navodimo sada model iz [2] koji opisuje pritisak u kohlei, a numeričko rešenje modela je implementirano u programskom paketu Matlab i prikazano u dodatku. Modelira se razlika pritiska fluida u kohlei između dva dela kohlee, tzv. *scala tympani* i *scala vestibuli*. Takođe, posmatramo karakteristike kohlee kada se ona razvije poput opruge.

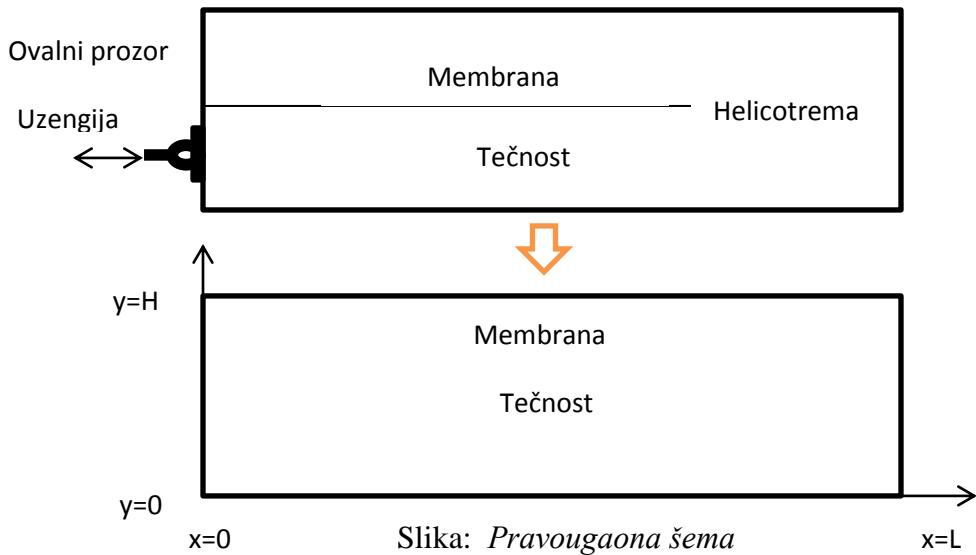


Slika: Ljudska kohlea i njeni delovi, poprečni presek.



Slika: Razvijena kohlea

U (x, y) ravni, modeliramo pritisak i brzinu na domenu prikazanom na slikama ispod:



[Napomena: Posmatramo jednu komoru zbog simetričnosti, a helicotrema se može zanemariti]

Naš cilj biće da odredimo vektor brzine $V(x, y, t)$ i pritisak $P(x, y, t)$ za svaku tačku tečnosti u kohlei. Za tečnost pretpostavljamo da je nestišljiva, bez viskoznosti, homogena sa gustom ρ . Kako je izvod zapremine nestišljive tečnosti neprekidan, imamo

$$\nabla V(x, y) = 0.$$

Iz zakona održanja primjenjenog na zapreminu, imamo:

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t}(x, y) = -\nabla P(x, y). \quad (21)$$

Jednačina (21) predstavlja jednačinu kretanja a izvod po vremenskoj promenljivoj t je značajan. Kada bi brzina protoka fluida V imala x -komponentu, $u(x, y, t)$ i y -komponentu, $v(x, y, t)$, tada bi važilo:

$$\frac{DV}{Dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + u \frac{\partial V}{\partial x} + v \frac{\partial V}{\partial y} \quad (22)$$

Pri normalnom slušanju zvuka, brzina protoka fluida je zanemarljivo mala pa ćemo pretpostaviti da važi

$$\frac{DV}{Dt} = \frac{\partial V}{\partial t} \quad (23)$$

Uzimajući relaciju (23) u obzir, transformišemo jednačinu (21) i dobijamo:

$$\nabla^2 P(x, y) = 0, \quad (24)$$

odnosno, imamo da pritisak u kohlei tačno zadovoljava Laplasovu jednačinu. Ova relacija važi samo jer smo pretpostavili nestišljivost i linearnost ali nismo uzeli u obzir činjenicu da je tečnost viskozna. Naše jednačine (23) i (24), se sada mogu zapisati tako da zadovolje neprekidnost i jednačinu kretanja tečnosti:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = 0 \quad (25)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = -i\omega\rho u(x, y) \quad (26)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = -i\omega\rho v(x, y) \quad (27)$$

Posmatraćemo pritiske u *Scala Tympani* i *Scala Vestibuli*, P_t i P_v , i tada ćemo odrediti razliku pritiska između dvaju *Scala*, P_d . Prepostavićemo da oba dela kohlee jednako deluju na bazilarnu membranu. Dalje, možemo prepostaviti da važi relacija ‘odraza u ogledalu’, odnosno

$$P_v(x, y) = -P_t(x, -y). \quad (28)$$

Iz jednačine (24), imamo da važi

$$\nabla^2 P_v(x, y) = \nabla^2 P_t(x, -y) = 0$$

Neka je sada u_s brzina kretanja uzengije a u_r brzina kretanja okruglog prozora. Prepostavljamo da je brzina kretanja tečnosti u ove dve granice kohlee u celosti duž x -ose. Kako bi prilagodili rešenja kretanju uzengije za sve frekvencije zvuka, stavićemo

$$u_s = -u_r = -i\omega$$

Iz jednačina kretanja (26), imamo

$$\frac{\partial P_v}{\partial x}(0, y) = -\frac{\partial P_t}{\partial x}(0, -y) = -\omega^2 \rho \quad (29)$$

Neka je V_b brzina kretanja bazilarne membrane. Sada prepostavimo da membrana ima samo y komponentu u odnosu na svoju brzinu kretanja.

Iz jednačina (26) i (28) imamo da je

$$\frac{\partial P_v}{\partial y}(x, 0) = -\frac{\partial P_t}{\partial y}(x, 0) = -i\omega \rho V_b(x)$$

Zbog krutosti gornjeg i donjih zidova kohlee, brzina protoka tečnosti duž y ose mora biti jedanaka nuli, stoga je

$$\frac{\partial P_v}{\partial y}(x, H) = -\frac{\partial P_t}{\partial y}(x, -H) = 0$$

Uzan prolaz, helicotrema, spaja ova dva dela kohlee i stavićemo da su pritisci u toj tački u obe Scala-e jednak. Dakle,

$$P_v(L, y) = P_t(L, -y)$$

Definišemo razliku pritiska, P_d , kao:

$$P_d(x, y) = P_t(x, -y) - P_v(x, y), \quad x \in [0, L], y \in [0, H].$$

gde su P_t i P_v pritisci tečnosti ostvareni u scala tympani i scala vestibuli, repsekativno.

Tada naš model, sumirajući sve jednačine, poprima sledeći oblik :

$$\nabla^2 P_d(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial P_d}{\partial x}(0, y) = 2\omega^2 \rho$$

$$\frac{\partial P_d}{\partial y}(x, 0) = 2i\omega\rho V_b(x)$$

$$\frac{\partial P_d}{\partial y}(x, H) = 0$$

$$P_d(L, y) = 0.$$

Funkcije pritiska P i brzine protoka tečnosti V su funkcije zavisne od promenljivih x, y i t ali se zavisnost od vremenske promenljive pojednostavljuje prepostavkom da se posmatra delovanje zvuka konstantne frekvencije a sama frekvencija za različite vrednosti zvuka izraženog u Hz se menja u zavisnosti od datog parametra ω .

Uzmimo da su funkcije $P(x, y)$ i $V(x, y)$ takve kompleksne funkcije da važi:

$$P(x, y, t) = \operatorname{Re}[P(x, y)e^{i\omega t}] \text{ i analogno,}$$

$$V(x, y, t) = \operatorname{Re}[V(x, y)e^{i\omega t}].$$

Kada bismo u gornjem sistemu mogli izraziti V_b u funkciji P_d , našli bismo analitičko rešenje pritiska. Da bismo rešili ovaj problem, uvodimo funkciju prijema zvuka, u oznaci $Y(x)$, kako bi lakše okarakterisali kompleksnu građu ljudske kohlee i analitički povezali brzinu kretanja V_b i pritisak P_d , koji tražimo. Ova funkcija je rezultat eksperimentalne analize. Preciznije rečeno, treba nam analitička veza između P_d i V_b koja sadrži funkciju prijema zvuka $Y(x)$. Neka je

$$V_b(x) = Y(x)P_d(x, 0).$$

Eksperimentom je utvrđeno da je sila koja deluje na BM i njeno savijanje upravo rezulat delovanja razlike pritiska P_d u svakoj tački kohlee. Iz tog razloga imamo da je

$$P_d(x, 0) = M \frac{\partial V_b}{\partial t} + RV_b + K \int_0^t V_b dt,$$

gde su $M(x)$, $R(x)$ i $K(x)$ redom masa, prigušenje i mera krutosti BM po jedinici površine.

Kako smo uveli pretpostavku da se zvuk prostire harmonijski u odnosu na vremensku promenljivu, prethodni izraz poprima oblik:

$$P_d(x, 0) = (i\omega M + R + K/i\omega)V_b(x),$$

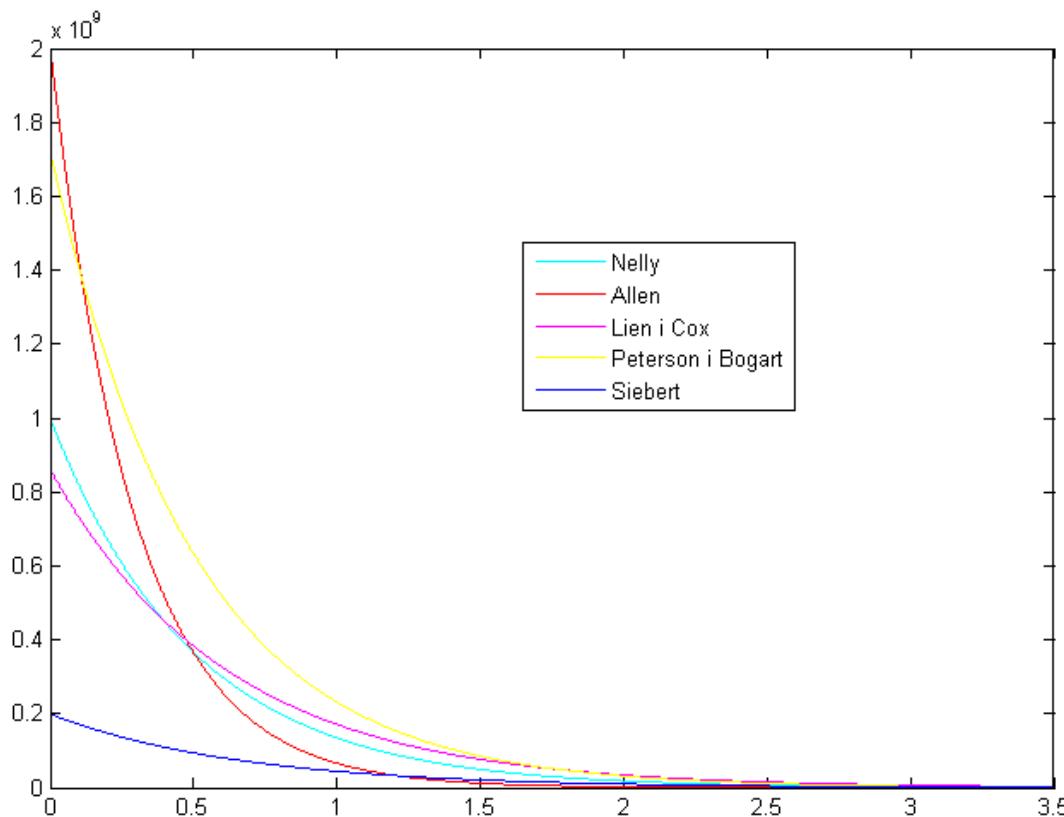
i tada dobijamo funkciju prijema:

$$Y(x) = (i\omega M + R + \frac{K}{i\omega})^{-1}.$$

U sledećoj tabeli su dati razni oblici za funkcije $M(x)$, $R(x)$ i $K(x)$ na osnovu eksperimentalnih podataka.

	$K(x)$	$M(x)$	$R(x)$
Neely	$10^9 e^{-2x}$	200	0.15
Allen	$2 \cdot 10^9 e^{-3.4x}$	$600e^{-1.7x}$	0.1
Lien i Cox	$8.6 \cdot 10^8 e^{-1.61x}$	$600x$	0.2
Peterson i Bogart	$1.72 \cdot 10^9 e^{-2x}$	0	0.143
Siebert	$2 \cdot 10^8 e^{-1.5x}$	$5e^{2.28x}$	0.01
Jedinica	dyn/cm^3 ²⁰	$(dyn - sec)/cm^3$	gm/cm^2

Tabela: *Funkcije krutosti, mase i prigušenja*



Grafik: *Funkcije krutosti, $K(x)$, $x \in [0,3.5 \text{ cm}]$*

²⁰ dyn(din) – merna jedinica za silu; 1 din je ekvivalentan sa 10 mikronjutna.

3.3. Pojednostavljeni model pritiska

Pojednostavljenje dvodimenzionalnog modela se bazira na pretpostavci da posmatramo funkciju prijema zvuka kao konstantu, odnosno

$$Y(x) = Y_0.$$

Tada možemo naći tačno analitičko rešenje pritiska P_d ali ono i nije toliko precizno kao ono iz dvodimenzionalnog modela. Analitički oblik pritiska je tada

$$P_d(x, y) = P_0 \cosh(\beta_0(y - H)) e^{-i\beta_0 x},$$

gde je

$$\beta_0 H t g h(\beta_0 H) = -2\omega\rho Y_0 H.^{21}$$

Ovaj izraz tačno zadovoljava Laplasovu jednačinu i granične uslove za modeliranje pritiska fluida u kohlei. Promena pritiska a samim tim i kretanje BM varira sinusoidalno duž x -ose. Ako je λ_0 talasna dužina BM, tada je

$$\beta_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}.$$

Za početnu vrednost pritiska P_0 , u programskom paketu Matlab, dobijamo grafik funkcije $P_d(x, y)$ na domenu $(x, y) \in [0, 3.5] \times [0, 0.1]$. Veličine su izražene u cm a programska kod koji crta površ je dat u dodatku. Parametri λ_0 i β_0 su već definisani.

Pretpostavićemo da je promena pritiska duž y -ose ima oblik kosinus-hiperboličnog, odnosno

$$P_d(x, y) = \cosh(\beta(x)(y - H)) P_d(x, H),$$

gde je

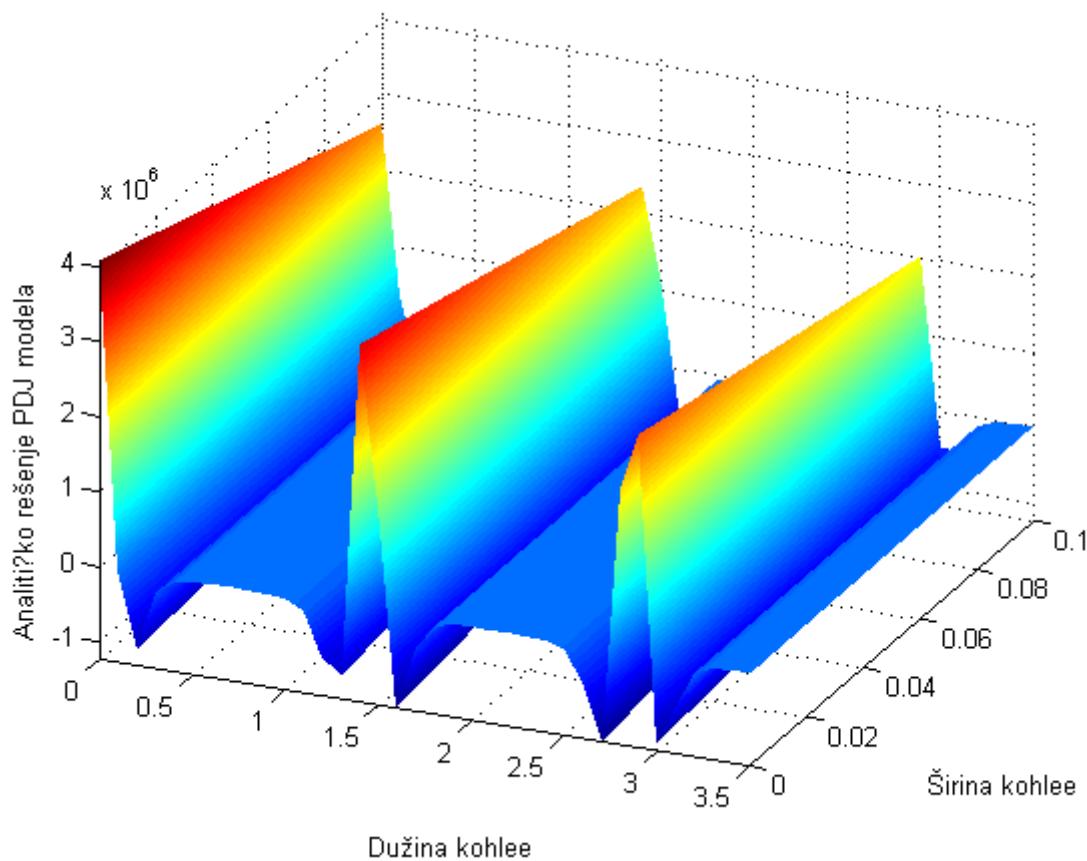
$$\beta(x) H t g h(\beta(x)H) = -2i\omega\rho Y(x)H.$$

²¹ Jednačina je transcedentna i da se rešiti nekim od numeričkih postupaka. Njutnovim iterativnim postupkom, na primer.

Aproksimiramo $P_d(x, H)$ sa

$$P_d(x, H) \approx P_0 e^{i \int \beta(x) dx}.$$

Funkciju $\beta(x)$ zovemo još i ‘lokalni talasni broj’, koja je i mera amplitude talasa. Primećujemo da su konstante β_0 i λ_0 uopštene kao funkcije od x .



Slika: 3D model pritiska u kohlei

3.4. Navier –Stokes-ova jednačina fluida i BM.

Modeliranje pritiska koristeći Navier-Stokes-ove jednačine se navodi u [1]. Uvodimo neke pretpostavke a samim tim pojednostavljujemo Navier-Stokes-ove jednačine, ne uzimamo u obzir nelinearnosti u jednačinama, ne uzimamo u obzir razliku pritiska koja se ostvaruje, P_d , već pokušavamo naći opšti izraz za vrednost pritiska u kohlei ; ne posmatramo delovanje pritiska u zavisnosti od oblika kohlee nego u zavisnosti od oblika BM. Takođe, u ovom modelu nemamo funkciju prijema zvuka. Neka je $h = h(x, t)$ devijacija BM duž x – ose. Neka je vektor (u, v) vektor brzine fluida a p pritisak fluida. Sve oznake su funkcije od (x, y, t) .

Uvodimo pretpostavke:

- Fluidi u kohlei zadovoljavaju Navier-Stoksove jednačine koje ne sadrže nelinearnosti, odnsono :

Za $y \neq 0$:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Gde su ρ i μ gustina i viskoznost tečnosti fuida, videti 2. poglavlje. Poslednja jednačina opisuje nestišljivost fluida. Primećujemo da u ovom modelu nemamo spoljašnji faktor sile koja deluje na tečnost.

- BM ima zanemarljivo malu masu.
- Ne postoji povezanost duž BM.
- Svaki deo BM reaguje na silu koja je proporcionalna premeštaju svakog od dela BM kao i fleksibilnosti BM. Sila je data sa $e^{\lambda x}$ što ide u prilog činjenici da je membrana uzana i fleksibilna na svom završetku.

- BM karakteriše aktivan mehanizam:

$$\text{Za } \mathbf{y} = 0$$

$$u(x, 0, t) = 0,$$

$$v(x, 0, t) = \frac{\partial h}{\partial t}(x, t),$$

$$p(x, 0^-, t) - p(x, 0^+, t) = s_0 e^{-\lambda x} \left(h + \beta \frac{\partial h}{\partial t} \right)(x, t).$$

Funkcija h je nepoznata a parametar β je negativan. Parametar λ je izmerio G.f. Bekeši za neaktivnu kohleu i on iznosi $\lambda^{-1} \approx 0.7$ cm za prosečnu ljudsku kohleu dužine oko 3.5 cm. Zbog simetričnosti sistema, tražimo rešenja koja zadovoljavaju

$$\begin{aligned} p(x, y, t) &= -p(x, -y, t), \\ u(x, y, t) &= -u(x, -y, t), \\ v(x, y, t) &= v(x, -y, t). \end{aligned}$$

I tada, umesto uslova $\mathbf{y} = 0$ namećemo novi uslov $\mathbf{y} = 0^-$, dakle, vrednosti promenljive y manje od nule i tada posmatramo sistem kada je $\mathbf{y} < 0$. Tada naši granični uslovi imaju oblik

$$\begin{aligned} u(x, 0, t) &= 0, \\ v(x, 0, t) &= \frac{\partial h}{\partial t}(x, t), \\ 2p(x, 0, t) &= s_0 e^{-\lambda x} \left(h + \beta \frac{\partial h}{\partial t} \right)(x, t). \end{aligned} \tag{30}$$

Namećemo i uslov

$$(u, v, p) \rightarrow 0, y \rightarrow -\infty.$$

Cilj – želimo da odredimo rešenje koje predstavlja stabilnu reakciju kohlee na čist ton²². Koristićemo smene, proširenja nepoznatih funkcija²³ i aproksimacijom tačnog rešenja svešćemo problem na sistem običnih diferencijalnih jednačina.

Koristimo smenu promenljivih,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ p \end{pmatrix}(x, y, t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} U \\ V \\ P \end{pmatrix}\left(x - x_\varepsilon, \frac{y}{\varepsilon}, \varepsilon\right) e^{i\left(\omega t + \frac{\Phi(x-x_\varepsilon)}{\varepsilon}\right)},$$

$$h(x, t, \varepsilon) = H(x - x_\varepsilon, \varepsilon) e^{i\left(\omega t + \frac{\Phi(x-x_\varepsilon)}{\varepsilon}\right)},$$

gde su Φ , ω prostorna frekvencija i data frekvencija čistog tona koji dopire spolja, respektivno (merna jedinica je radian/sekunda). Funkcije Φ, U, V, P su kompleksne a parametri x_ε i ε će biti određeni kasnije. Hoćemo još da važi $\varepsilon \ll 1$ jer u korišćenju perturbacija, parametar ε^2 je dovoljno mali. Dalje, stavimo

$$X = x - x_\varepsilon,$$

$$Y = y/\varepsilon \text{ i } \xi(X) = \frac{\partial \Phi}{\partial X}(X).$$

Smenom u gornji sistem, dobijamo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\omega U e^{i\left(\omega t + \frac{\Phi(x-x_\varepsilon)}{\varepsilon}\right)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left[\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{i}{\varepsilon} \xi(X) U \right] e^{i\left(\omega t + \frac{\Phi(x-x_\varepsilon)}{\varepsilon}\right)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial U}{\partial Y} e^{i\left(\omega t + \frac{\Phi(x-x_\varepsilon)}{\varepsilon}\right)},$$

$$\Delta U = \Delta U = \left[\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{i}{\varepsilon} \left(\xi' U + 2\xi \frac{\partial U}{\partial X} \right) + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} - \xi^2 U \right) \right] e^{i\left(\omega t + \frac{\Phi(x-x_\varepsilon)}{\varepsilon}\right)}$$

²² Čist ton predstavlja ton čiji talasi imaju oblik sinusoide – sinusni/kosinusni oblik.

²³ Matematički alat koji aproksimira nepoznatu funkciju kako bi se dobila približna rešenja. Jedan primer je i Tejlorov razvoj funkcije u red.

Sada naš problem sa početka (30) i njegovi granični uslovi dobijaju oblik,

za $Y < 0$,

$$(i\omega\rho - \mu\Delta)U + \left(i\frac{\xi}{\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial x}\right)P = 0,$$

$$(i\omega\rho - \mu\Delta)V + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial P}{\partial Y} = 0,$$

$$\left(i\frac{\xi}{\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial x}\right)U + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial V}{\partial Y} = 0,$$

a granični uslovi dobijaju oblik

Za $Y = 0$,

$$U(X, 0, \varepsilon) = 0,$$

$$V(X, 0, \varepsilon) = i\omega H(X, 0, \varepsilon),$$

$$2P(X, 0, \varepsilon) = s_0(1 + i\omega\beta)e^{-\lambda x\varepsilon}e^{-\lambda x}H(X, 0, \varepsilon),$$

$$(U, V, P) \rightarrow 0 \text{ kada } Y \rightarrow -\infty.$$

Sada napišemo funkcije U, V, P, H kao perturbacije :

$$U = U_0 + \varepsilon U_1 + \dots$$

$$V = V_0 + \varepsilon V_1 + \dots$$

$$P = \varepsilon(P_0 + \varepsilon P_1 + \dots),$$

$$H = H_0 + \varepsilon H_1 + \dots$$

Sada pogodno izaberemo

$$\varepsilon = e^{-\lambda x\varepsilon}, \varepsilon^2 = \frac{\mu\lambda^2}{\rho\omega}.$$

Ovako izabrani parametri čine ε dovoljno malim. Na primer, ako tečnost u kohlei ima karakteristike vode, tada je $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$, $\mu = 0.02 \text{ g/(cm} \cdot \text{s)}$ i za ton od 600 Hz znamo da je $\omega = 2\pi \cdot 600/\text{s}$ i $\lambda^{-1} = 0.7 \text{ cm}$ i imamo tada da je $\varepsilon \approx 0.003$.

Kako smo proširili nepoznate funkcije, broj rešenja se povećao i mi možemo umesto rešenja \mathbf{U} posmatrati rešenje $\mathbf{U}_0, \mathbf{U}_1$ ili bilo koje drugo iz razvoja funkcije \mathbf{U} . Rešenja sa indeksom $i, i = 0, 1, 2, \dots$ se zovu rešenja i -tog reda. Mi ćemo tražiti rešenja nultog reda.

Zamenom perturbacija ε i grupisanjem dobijamo sistem ODJ sa graničnim uslovima:

$$\text{Za } Y < 0$$

$$\rho\omega \left(i - \frac{1}{\lambda^2} \left(-\xi^2 + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \right) \right) U_0 + i\xi P_0 = 0,$$

$$\rho\omega \left(i - \frac{1}{\lambda^2} \left(-\xi^2 + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \right) \right) V_0 + \frac{\partial P_0}{\partial Y} = 0,$$

$$i\xi U_0 + \frac{\partial V_0}{\partial Y} = 0,$$

a granični uslovi su:

$$Y = 0:$$

$$U_0(X, 0) = 0,$$

$$V_0(X, 0) = i\omega H_0(X)$$

$$2P_0(X, 0) = s_0(1 + i\omega\beta)e^{-\lambda x}H_0(X),$$

$$(U_0, V_0, P_0) \rightarrow 0, Y \rightarrow -\infty.$$

Posmatrajući sada rešenja prvog reda, imamo:

Za $Y < 0$,

$$\rho\omega \left(i - \frac{1}{\lambda^2} \left(-\xi^2 + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \right) \right) U_1 + i\xi P_1 = \frac{\rho\omega}{\lambda^2} i \left(\xi' + 2\xi \frac{\partial}{\partial X} \right) U_0 - \frac{\partial}{\partial X} P_0,$$

$$\rho\omega \left(i - \frac{1}{\lambda^2} \left(-\xi^2 + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \right) \right) V_1 + \frac{\partial P_1}{\partial Y} = \frac{\rho\omega}{\lambda^2} i \left(\xi' + 2\xi \frac{\partial}{\partial X} \right) V_0,$$

$$i\xi U_1 + \frac{\partial V_1}{\partial Y} = -\frac{\partial}{\partial X} U_0,$$

dok za $Y = 0$ imamo

$$U_1(X, 0) = 0,$$

$$V_1(X, 0) = i\omega H_1(X),$$

$$2P_1(X, 0) = s_0(1 + i\omega\beta)e^{-\lambda X}H_1(X),$$

$$(U_1, V_1, P_1) \rightarrow 0, \quad Y \rightarrow -\infty.$$

Za fiksirano $\textcolor{brown}{x}$, rešenja sistema ODJ po funkcijama $\textcolor{brown}{U}_0, \textcolor{brown}{V}_0, \textcolor{brown}{P}_0$ je dato sa:

$$P_0(X, Y) = P_0(X, 0)e^{\sqrt{\xi^2}Y},$$

$$U_0(X, Y) = -P_0(X, 0) \frac{i\xi}{i\omega\rho} (e^{\sqrt{\xi^2}Y} - e^{\sqrt{\xi^2+i\lambda^2}Y}),$$

$$V_0(X, Y) = -P_0(X, 0) \frac{\xi^2}{i\omega\rho} \left(\frac{e^{\sqrt{\xi^2}Y}}{\sqrt{\xi^2}} - \frac{e^{\sqrt{\xi^2+i\lambda^2}Y}}{\sqrt{\xi^2+i\lambda^2}} \right),$$

gde uzimamo korene sa pozitivnim realnim delom. Sistem ODJ daje dva rešenja nultog reda za funkciju H_0 u funkciji $P_0(X, 0)$ a koja izgledaju

$$H_0(X) = \frac{v_0(X, Y)}{i\omega} \text{ i } H_0(X) = P_0(X, 0) \frac{2e^{\lambda X}}{s_0(1 + i\omega\beta)}. \quad (31)$$

Sada trebamo naći funkciju $\xi(X)$ tako da obe jednačine (31) za $H_0(X)$ budu zadovoljene i funkciju $P_0(X, 0)$. Upoređujući oba izraza za $H_0(X)$, definišimo

$$Q(X) = \xi^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\xi^2}} - \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + i\lambda^2}} \right),$$

gde je, sa druge strane

$$Q(X) = \frac{2\rho\omega^2 e^{\lambda X}}{s_0(1+i\omega\beta)}.$$

Izraz $Q(X)$ definiše lokalnu prostornu frekvenciju ξ u funkciji od X i ω . Ako je ξ rešenje jednačine gornje jednakosti, tada je $i - \xi$ takođe rešenje i ono predstavlja talas koji putuje u suprotnom smeru.

Sada trebamo naći i funkciju $P_0(X, 0)$. Ako u sistemu ODJ u kom figurišu rešenja prvog reda pomnožimo jednačine redom sa $-U_0, V_0, P_0$ (koje predstavljaju rešenja sistema nultog reda sa ξ zamenjenim sa $-\xi$) i integralimo svaku od njih po $Y, Y \in (-\infty, 0)$ dobijamo, nakon integraljenja i grupisanja,

$$\frac{\partial}{\partial X} \int_{-\infty}^0 \left[\frac{i\omega\rho\xi}{\lambda^2} (V_0^2 - U_0^2) + U_0 P_0 \right] dY = 0,$$

odnosno

$$\int_{-\infty}^0 \left[\frac{i\omega\rho\xi}{\lambda^2} (V_0^2 - U_0^2) + U_0 P_0 \right] dY = C_0,$$

gde je C_0 konstanta nezavisna od X . Funkcije U_1, V_1, P_1 su nestale nakon množenja sistema ODJ sa $-U_0, V_0, P_0$ i sređivanjem. Nakon smene U_0, V_0, P_0 u gornju integralnu jednačinu i integraljenja konačno dobijamo

$$P_0(X, 0)^2 = \frac{2\omega\rho C_0 (\sqrt{\xi^2 + i\lambda^2})^3 \sqrt{\xi^2}}{\xi (\sqrt{\xi^2 + i\lambda^2} - \sqrt{\xi^2})(\sqrt{\xi^2 + i\lambda^2} \sqrt{\xi^2} - i\lambda^2)},$$

što nam daje i rešenja za U_0, V_0, P_0 .

3.5. Bazilarna membrana – pasivni model

Osvrнимо се на орган кohлеу – она је испunjена tečnosću. Овде посматрамо trodimenzionalni model kohlee [3] и видимо да је njena donja komora simetrična kada je $y = 0$. Mehaničkim pomeranjem uzengije, zvučni signali indukuju vibracije na levoj granici kohlee, $(x, y) \in \{0\} \times [0, H]$, што dalje dovodi do kretanja tečnosti која prolazi koso-simetrično od gornje komore sve do donje komore preko malog prolaza (*helicotrema*), у $(L, 0)$. Razlika u zvučnom pritisku dovodi do kretanja BM. Simetričnost нам допушта да ignoriшемо karakterистике helicoterme i посматрамо само gornju komoru где притисак tečnosti у пуžу задовољава Laplasovu jednačину као и грачићне uslove добијене на основу ravnoteže mehaničkih sila. Тада ако бисмо моделирали BM као еластичну oprugu, наš pasivni model prima oblik:

$$\Delta p(x, y, t) = 0, \text{ односно}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0, (x, y) \in (0, L) \times (0, H), t \in (0, \infty)$$

Грачићни uslovi за BM су:

$$p_y(x, 0, t) = 2\rho u_{tt}(x, t), 0 \leq x \leq L$$

$$p_y(x, H, t) = 0, 0 \leq x \leq H, t \geq 0 \quad (\text{гornji zid puža je fiksiran})$$

$$p(L, y, t) = 0, y \in [0, H], t \geq 0$$

$$p_x(0, y, t) = 2\rho T_M p_e(t), y \in [0, H],$$

где се последњи грачићни uslov односи на основни zid puža на ког deluju zvučni talasi; $p_e(t)$ predstavlja zvučni pritisak на bubnu opnu a T_M представља грачићни linearни operator у простору ograničenih neprekidnih funkcija koji odražава operator vezan за eksperimentalne rezultate (merenja, obradu podataka) srednjeg уха.

Za obrazac $T_M p_e(t)$ se uzima izraz

$$T_M p_e(t) = \sum_{j=1}^{J_m} a_m(\omega_j) A_j \exp(i\omega_j t) + k.k,$$

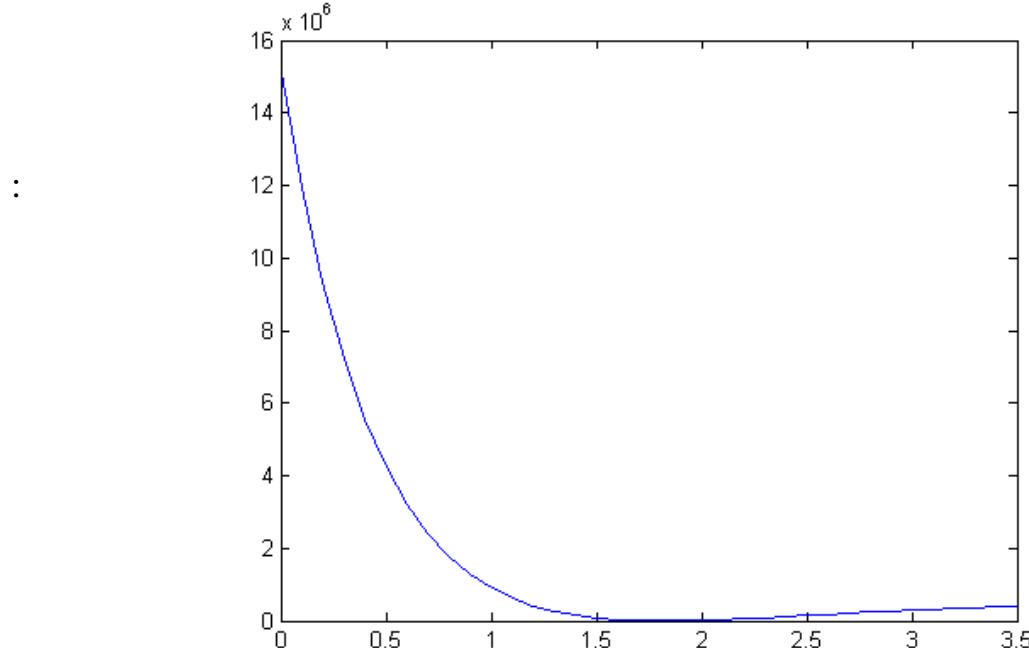
gde je $a_m(\cdot)$ funkcija dobijena fitovanjem podataka srednjeg uha, J_m pozitivan ceo broj, funkcije ρ i $u = u(x, t)$ predstavljaju redom gustinu tečnosti u kohlei i vektor premeštaja²⁴ BM, respektivno.

Dinamika BM se može opisati sa

$$p(x, 0, t) = Mu_{tt} + Ru_t + Ku(x), \quad x \in [0, L]$$

gde su $M = M(x)$ i $R = R(x)$ masa i prigušenje BM, respektivno, a $K = K(x)$ predstavlja funkciju krutosti BM a koja se može dobiti fitovanjem eksperimentalnih podataka. Jedan njen moguć analitički oblik je

$$K(x) = 4\pi^2 M \left(0.456 \left(\exp \left(1 - \frac{x}{L} \right) \right) - 0.45 \right)^2$$



Grafik:Funkcija krutosti

²⁴ Vektor premeštaja [ili, vektor pomeranja] je vektor koji predstavlja razliku između krajnjeg i početnog vektora položaja neke čestice ili tela u prostoru.

Za date početne vrednosti $(u(x, 0), u_t(x, 0))$ dobijamo kompletan pasivni model. Ako bismo zamenili pritisak fluida u kohlei, p , sa prosečnom vrednosti, Laplasova jednačina se pojednostavljuje:

$$p_{xx} - 2\rho u_{tt} = 0, x \in [0, L].$$

3.6. Aktivni model

Koritjev organ se nalazi na bazilarnoj membrani i čine ga spoljašnje i unutrašnje ćelije čula sluha koje su povezane sa tektorialnom membranom. Spoljne čulne ćelije (SČĆ) imaju ulogu pojačavanja reagovanja BM kada dopre zvuk niskog intenziteta dok unutrašnje čulne ćelije (UČĆ) pretvaraju mehaničke talase u nervne impulse koji se dalje sprovode do mozga. Model koji je predložen u [3] je mikro-mehaničke prirode i uzima u obzir nagib SČĆ u longitudinalnom pravcu duž kohlee kao i silu (u oznaci $q(x, t)$) kojom SČĆ deluju na BM. Na osnovu ravnoteže sila dobijamo diferencnu jednačinu [3] :

$$q(x + \Delta, t) = \alpha(x, u, t)(p(x, 0, t) + q(x, t)), x \in [0, L - \Delta]$$

$$q(x, t) = 0 \text{ ako } x \in [0, \Delta], \Delta > 0.$$

$\alpha(x, u, t) = \alpha$, je nenegativna i nelinearna funkcija koja za velike vrednosti $|u|$ teži nuli dok je za male vrednosti $|u|$ pozitivna konstanta. Zove se još i faktor napretka. Što je α veće, povećava se i reakcija BM na zvučne talase.

Posmatrajmo sada BM po delovima i definišimo lokalni faktor napretka za svaki deo, $\alpha_{loc}(u)$, kao

$$\alpha_{loc}(u) = \frac{c_0}{(1 + c_1 u^2)}, c_0 > 0, c_1 > 0 .$$

Da bi aktivni model bio kompletan, modifikujemo jednačinu BM kao

$$q(x, t) + p(x, 0, t) = Mu_{tt} + Ru_t + Ku(x), \quad x \in [0, L].$$

gde su M i R ovde pozitivne konstante. Za $\alpha(x, u, t)$ se u [3] predlaže oblik

$$\alpha(x, u, t) = \frac{\gamma}{\sqrt{\lambda\pi}} \int_0^L \exp(-(x - x')^2 / \lambda) \alpha_{loc}(u(x', t)) dx',$$

pri čemu su γ i λ konstante.

3.7. Model rezonacije tektorske membrane

Posmatrajmo sada model obe membrane, bazilarnu i tektorsku. Ideja modela jeste da se obe membrane posmatraju kao dve mase spojene elastičnom oprugom tako da čine harmonijski oscilator. Neka je $\xi(x, t) = (u(x, t), v(x, t))$ vektor pomeraja BM i TM, redom. Tada jednačine kretanja obeju membranu zadovoljavaju:

$$M_p \ddot{\xi}_{tt} + C_p \dot{\xi}_t + K_p \xi = F,$$

$$M_p = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, C_p = \begin{bmatrix} c_1 + c_3 & -c_3 \\ -c_3 & c_2 + c_3 \end{bmatrix}, K_p = \begin{bmatrix} k_1 + k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_2 + k_3 \end{bmatrix},$$

$$F = [p(x, 0, t), 0]^T.$$

Parametri m_i, c_i, k_i su funkcije od x . Kako bismo model učinili aktivnim, potrebno je dodati silu F_a na prethodnu jednačinu pa imamo

$$M_p \ddot{\xi}_{tt} + C_p \dot{\xi}_t + K_p \xi = F + F_a, \text{ gde je}$$

$$F_a = [\gamma[c_4(u_t - v_t) + k_4(u - v)], 0]^T.$$

Parametar $\gamma \in [0, 1]$ predstavlja koeficijent napretka koji se navodi ili kao konstanta ili u sledećem alternativnom obliku:

$$\gamma = \frac{1}{1 + \theta N(u)}$$

$$N(u)(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\lambda\pi}} \int_0^L \exp(-(x-s)^2/\lambda) u^2(s, t) ds, \quad \theta, \lambda > 0.$$

3.8. Integralne jednačine i beskonačna kohlea

Jedan od načina da se dođe do rešenja modela pritiska navedenog gore jeste da se problem redukuje na samo jednu promenljivu, inkorporacijom koordinate y u integralnu jednačinu. Kada posmatramo beskonačnu kohleu, zanemarujuemo granične uslove vezane za uzengiju i helicotremu i tada se model pojednostavljuje. Ova dva granična uslova mogu biti naknadno uvedena nalaženjem drugog izvoda konačne integralne jednačine po promenljivoj x . Definišemo razliku pritiska $P(x)$ duž BM na sledeći način:

$$P(x) = P_d(x, 0).$$

- **Pristup sa Grinovom funkcijom**

Želimo da naša integralna jednačina ima oblik

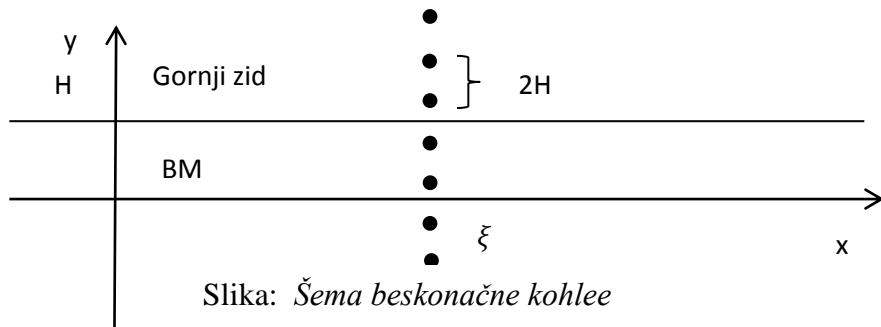
$$P(x) = -2i\omega\rho \int_{-\infty}^{\infty} G(x|\xi)V_b(\xi)d\xi$$

gde je $G(x|\xi)$ Grinova funkcija. U fizičkom smislu, $G(x|\xi)$ predstavlja funkciju potencijala brzine u tački x u jedinici brzine ξ .

Uzmimo da je duž BM, $V_b(x) = 0$, i da je $V_b(\xi) = 1$. Svi granični uslovi vezani za promenljivu y će biti ispunjeni konstruisanjem odgovarajućeg niza slika duž y ose. Praktično, granični uslovi

$$V(x, H) = 0, \text{ za svako } x \text{ i } V(x, 0) = 0, \text{ za } x \neq \xi,$$

zapravo iziskuju da se slike [slike, kao vrednosti pritiska] beskonačno šire duž pravca y ose, a razmak između svake dve slike je $2H$. Na slici ispod se nalazi ilustarcija:



Sada posmatrajmo potencijal brzine na BM u jednoj tački izvora [brzine], u tačkama $y = 2nH$ tamo gde je $x = \xi$ i označimo taj potencijal brzine fluida sa $g_n(x, \xi)$.

Tada Grinova funkcija pojedinačnog izvora brzine protoka fluida ima sledeći oblik:

$$g_n(x, \xi) = -\frac{1}{2\pi} \ln[(x - \xi)^2 + (2nH)^2], \\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Ukupna Grinova funkcija duž beskonačne kohlee bi tada bila suma pojedinačnih slika $g_n(x, \xi)$, to jest,

$$G'(x|\xi) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln[(x - \xi)^2 + (2nH)^2]$$

Ova formulacija Grinove funkcije zahteva korekciju jer navedena suma divergira. Naime, možemo razdvojiti sumu na konvergentan i divergentan deo koji je konstantan, ne zavisi od x :

$$G'(x|\xi) = -\frac{1}{\pi} \left\{ \ln|x - \xi| + \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left[1 + \left(\frac{x - \xi}{2nH} \right)^2 \right] + 2\ln(2nH) \right\}$$

Poslednji član može da se zanemari [kao konsantna] i korišćenjem osobine logaritamske funkcije, dobijamo modifikovanu Grinovu funkciju

$$G(x|\xi) = -\frac{1}{\pi} \ln \left\{ |x - \xi| \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{\pi(x - \xi)}{2H} \right)^2 \left(\frac{1}{n\pi} \right)^2 \right) \right\} \\ = -\frac{1}{\pi} \ln \left\{ \sinh \left(\frac{\pi}{2H} |x - \xi| \right) \right\}$$

gde je beskonačan proizvod zamenjen sinus-hiperboličnim. Tada, integracijom svih izvora brzine duž beskonačne kohlee, imamo

$$P(x) = \frac{2i\omega\rho}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left[\sinh \left(\frac{\pi}{2H} |x - \xi| \right) \right] Y(\xi) P(\xi) d\xi,$$

gde je $V_b(\xi)$ zamenjeno sa funkcijom prijema zvuka i pritiskom. Nalaženjem drugog izvoda funkcije $P(x)$ po x ponovo uvodimo granične uslove za helicotremu i uzengiju. Tada ovaj izraz predstavlja dobru aproksimaciju rešenja dvodimenzionalnog modela. Greške su značajne samo u blizini graničnih uslova. Ovaj rezultat dugujemo Allen-u, koji je 1977. došao do ovog rezultata i prikazao numeričko rešenje datog integrala na konačnoj kohlei, pogledati [2].

- **Pristup Furijeovom transformacijom**

Drugi pristup inkorporacije dimenzije y u integralnu jednačinu jeste primenom Furijeove transformacije, odnosno da putujući talas u kohlei posmatramo kroz prizmu njegovih sinusoidalnih komponenti. Definišimo prostornu Furijeovu transformaciju pritiska $P(x)$ na sledeći način:

$$p(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x) e^{-i\mu x} dx$$

Da bi zadovoljili granične uslove sa gornjeg zida kohlee kao i Laplasovu jednačinu za fluide, zahtevamo:

$$P_d(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh(\mu(y - H))}{\cosh(\mu H)} e^{i\mu x} p(\mu) d\mu$$

Primenom graničnog uslova na BM, imamo:

$$2i\omega\rho Y(x) P(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mu \tanh(\mu H) e^{i\mu x} p(\mu) d\mu$$

Furijeovom transformacijom gornje jednačine dobijamo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x) e^{-i\mu x} dx = -\frac{2i\omega\rho}{\mu \tanh(\mu H)} \int_{-\infty}^{\infty} Y(x) P(x) e^{-i\mu x} dx$$

Jednačinu je izveo Siebert, 1974. godine.

- **Poređenje dvaju integralnih jednačina**

Dva navedena pristupa problemu, Furijeovom transformacijom i Grinovom funkcijom, dovela su do dva rešenja. Ako se posmatra isti model kohlee, tada ove dve jednačine trebaju biti ekvivalentne. Uz neznatnu modifikaciju, imamo

1. Allen-ovu jednačinu,

$$P(x) = \frac{2i\omega\rho}{\pi} \ln \left[\sinh \left(\frac{\pi}{2H} |x| \right) \right] * Y(x) P(x) \text{ i}$$

2. Siebert-ovu jednačinu,

$$f[P(x)] = -\frac{2i\omega\rho}{\mu \tanh(\mu H)} f[Y(x)P(x)],$$

gde $*$ predstavlja konvoluciju a $f[\cdot]$ prostronu Furijeovu transformaciju. Nalaženjem drugog izvoda funkcije $P(x)$ po x , dobijamo, za obe jednačine,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P(x)}{\partial x^2} &= \frac{2i\rho\omega}{\pi} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \left(\sinh \left(\frac{\pi}{2H} |x| \right) \right) \right\} * Y(x) P(x) \\ f \left[\frac{\partial^2 P(x)}{\partial x^2} \right] &= \frac{2i\omega\rho\mu}{\tanh(\mu H)} f[Y(x)P(x)] \end{aligned}$$

Ako pokažemo da važi sledeća relacija:

$$f \left[\frac{1}{\pi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \left(\sinh \left(\frac{\pi}{2H} |x| \right) \right) \right] = \frac{\mu}{\tanh(\mu H)},$$

imaćemo jednakost Allen-ove i Siebert-ove jednačine.

Primetimo prvo da važi,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln(\sinh\left(\frac{\pi}{2H}|x|\right)) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{1}{2H}|x| + \frac{1}{\pi} \ln \left[1 - \exp\left(-\frac{\pi}{H}|x|\right) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{H} \delta(x) + \frac{1}{\pi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \left[1 - \exp\left(-\frac{\pi}{H}|x|\right) \right], \end{aligned}$$

pri čemu je $\delta(x)$ Dirakova²⁵ delta funkcija. Primenjujući sada Furijeovu transformaciju na poslednji izraz i koristeći poznate osobine transformacije, dobijamo:

$$\begin{aligned} f \left[\frac{1}{\pi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln(\sinh\left(\frac{\pi}{2H}|x|\right)) \right] &= \frac{1}{H} - \frac{1}{\pi} \mu^2 f \left[\ln \left[1 - \exp\left(-\frac{\pi}{H}|x|\right) \right] \right] \\ &= \frac{1}{H} - \frac{2}{\pi} \mu^2 \int_0^\infty \ln \left[1 - \exp\left(-\frac{\pi}{H}\mu\right) \right] \cos \mu d\mu \\ &= \frac{1}{H} - \frac{2}{\pi} \mu^2 \left\{ \frac{\pi}{2H\mu^2} - \frac{\pi}{2\mu \tanh(\mu H)} \right\} \\ &= \frac{\mu}{\tanh(\mu H)} \end{aligned}$$

te imamo jednakost dve jednačine.

²⁵ Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1988), britanski teorijski fizičar.

4. Numeričko rešenje i implementacija

Neka je dat pravougaonik koji predstavlja razvijenu kohleu a ujedno i domen modela na kom tražimo vrednosti pritiska fluida. Neka je duž x -ose dato N , odnosno M tačaka duž y -ose. Imamo ukupno MN tačaka diskretizacije domena u kojima tražimo numeričke vrednosti za P_d . Definišimo [2]:

$$p(i,j) = P_d(jdx, idx),$$

gde su

$$dx = \frac{L}{N}, \quad i = 1, 2, \dots, M; j = 1, 2, \dots, N.$$

Aproksimirajući parcijalne izvode i granične uslove u modelu diferencnim količnicima dobijamo sistem diferencnih algebarskih jednačina. Neka je p MN dimenzioni vektor koji sadrži nepoznate vrednosti pritiska u tačkama diskretizacije a vektor q MN dimenzioni vektor sa početnim vrednostima. Tada sistem algebarskih diferencnih jednačina ima oblik:

$$Ap = q$$

Matrica $A = [a_{ij}]_{MN \times MN}$ je retka, blok tri-diagonalna. Za $M = N = 5$ sistem ima oblik

$$\begin{bmatrix} A_1 & -2I & 0 & 0 & 0 \\ -I & A_2 & -I & 0 & 0 \\ 0 & -I & A_3 & -I & 0 \\ 0 & 0 & -I & A_4 & -I \\ 0 & 0 & 0 & -2I & A_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^1 \\ p^2 \\ p^3 \\ p^4 \\ p^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

gde su

$$A_k = \begin{bmatrix} a_k & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\textcolor{brown}{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

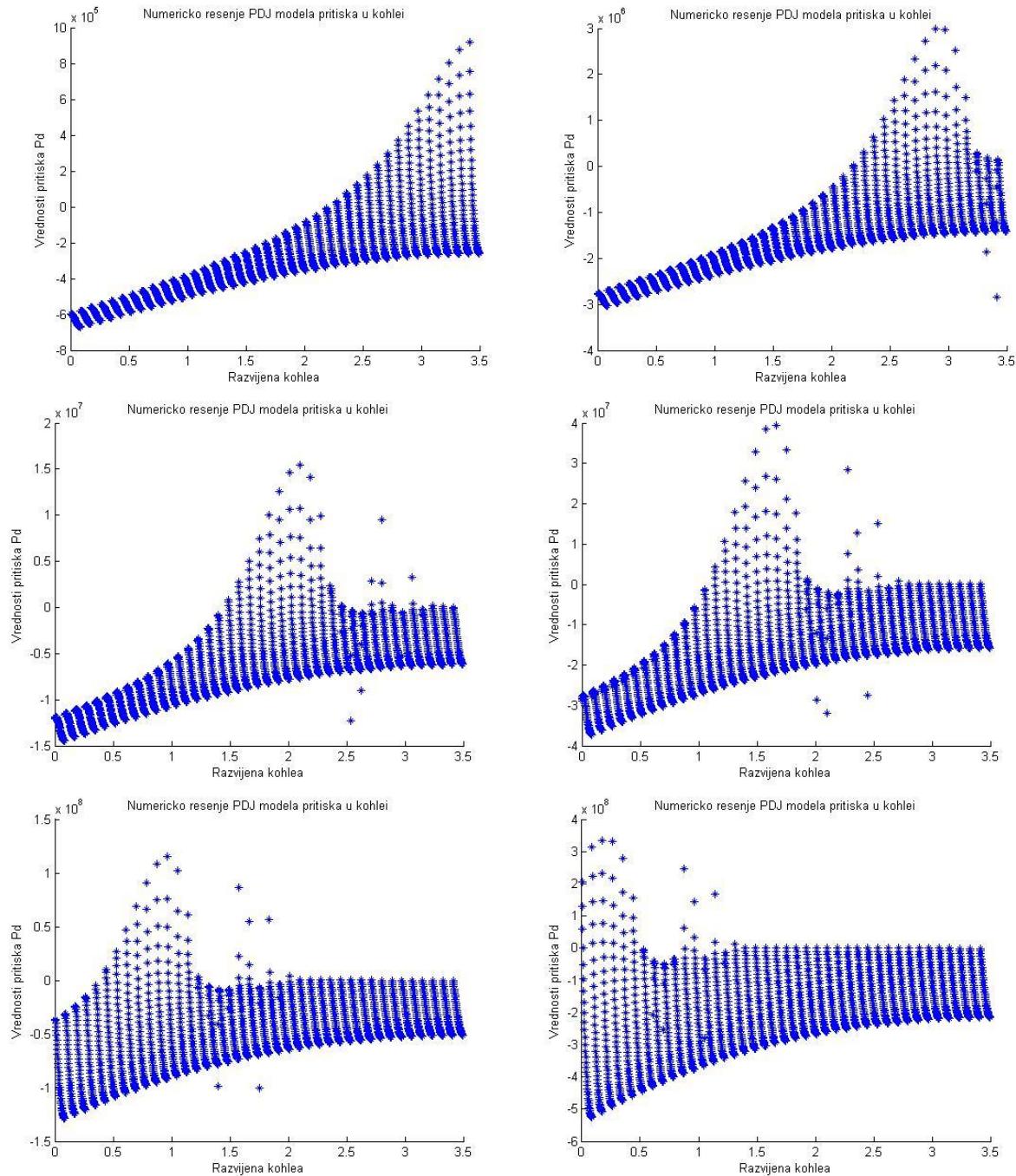
$$a_k=4+2(2i\omega Y(\textcolor{brown}{kdx})),$$

$$p^k=\begin{bmatrix} p(1,k) \\ p(2,k) \\ p(3,k) \\ p(4,k) \\ p(5,k) \end{bmatrix}, q^k=\begin{bmatrix} -2P_0\,dx \\ -2P_0\,dx \\ -2P_0\,dx \\ -2P_0\,dx \\ -2P_0\,dx \end{bmatrix}, P_0=2\omega^2\rho.$$

4.1. Numerička implementacija modela

Implementacijom u programskom paketu Matlab dobijamo numeričko rešenje za vrednosti razlike pritiska P_d . Uzećemo sve gorepomenute funkcije prijema zvuka, različite frekvencije zvuka koji deluju na kohleu i posmatračemo šta se događa sa razlikom pritiska u kohlei. Bitan momenat jeste sama analiza vrednosti pritiska i njihova interpretacija kao i eventualno uočavanje prednosti i mana modela.

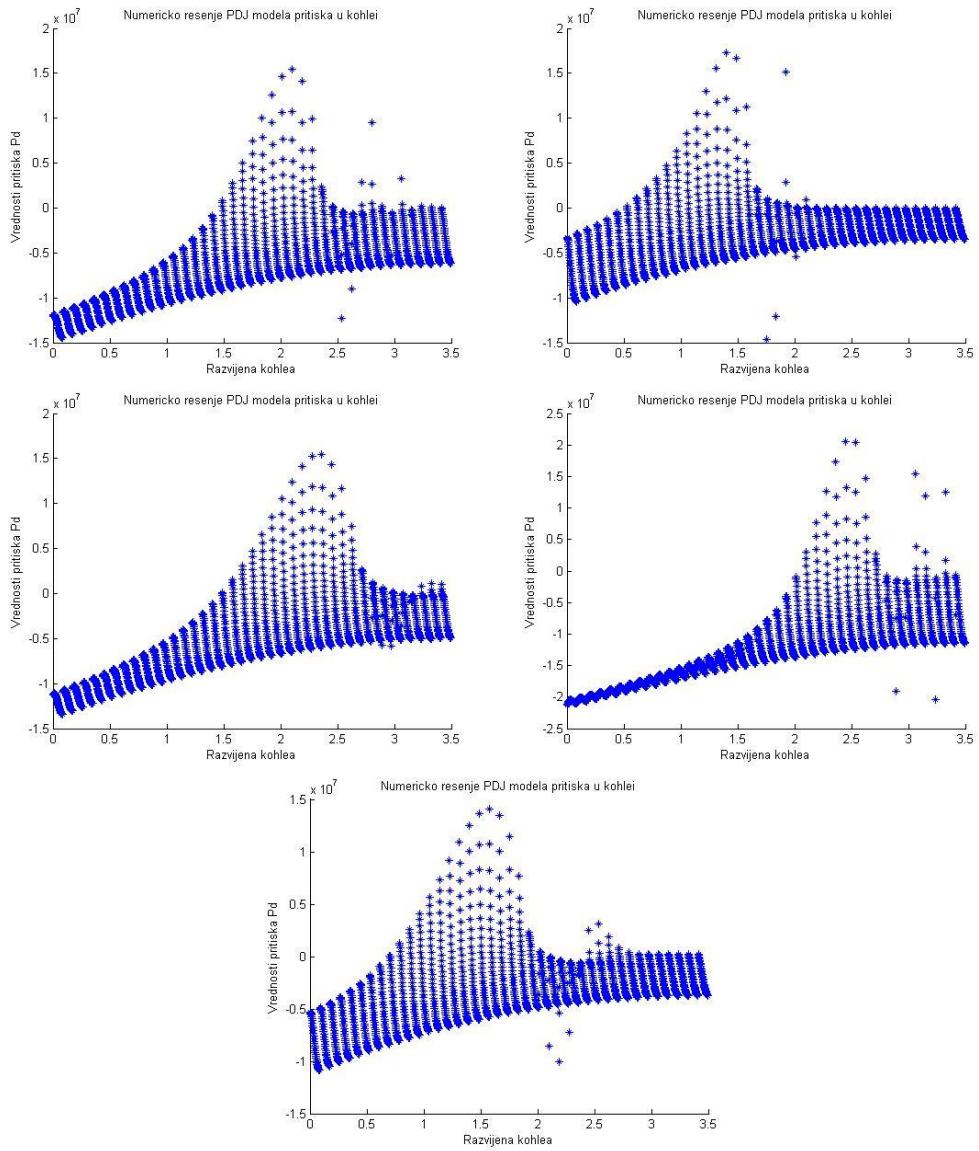
Uzimajući recimo, Neely-jev oblik funkcije prijema zvuka, diskretizaciju domena na 40 tačaka duž x i y ose, zvukove različitih frekvencija koji deluju na ljudsko uho i gustinu fluida u kohlei od $1g/cm^3$, imamo vrednosti za P_d kao na slici.



Slika: Numeričke vrednosti razlike pritiska, P_d , za zvukove frekvencije od redom, 50Hz, 100Hz, 240Hz, 400Hz, 800 Hz i 1600 Hz.

Posmatrajući samu definiciju numeričkog nalaženja razlike pritiska P_d , očigledno je da se ta razlika ne ostvaruje na svim delovima kohlee isto. Štaviše, ona varira u skladu sa visinom frekvencije zvuka koji inicira kretanje tečnosti unutar kohlee. Eksperimentalnom analizom je utvrđeno da uparvo ta razlika u pritisku jeste uzrok za kretanje bazilarne membrane i stvaranje akcionog potencijala u čulnim dlačicama. Akcioni potencijal se slušnim nervom dalje sprovodi do auditornog korteksa koji obrađuje primljene signale i mi postajemo svesni da smo čuli nešto. Skalirajući vrednosti pritiska duž razvijene kohlee, po definiciji, dobijeni grafici pokazuju da se razlika u pritisku ostvaruju na lokalnom nivou i to u skladu sa visinom frekvencije zvuka iz spoljašnje sredine. Sa grafika možemo da vidimo da je ispunjena uparvo ta pretpostavka o lokalnom delovanju pritiska. Nakon postizanja svoje maksimalne vrednosti, vrednost razlike pritiska se smanjuje i on postaje negativan i u tim delovima kohlee deluje pritsak u *scala vestibuli* i ne dolazi do stvaranja akcionog potencijala u čulnim ćelijama. Drugim rečima, pozitivna vrednost pritiska se ostvaruje na vrhu kohlee, odnosno pri kraju izdužene kohlee za zvuk frekvencije od 50 Hz, te se talas vrednosti veće od 0 pomera ka dnu kohlee povećanjem frekvencije zvuka. Tako da za zvuk od 1600 Hz imamo delovanje pritiska tečnosti na samom početku kohlee, tik iza uzengije. Za pozitivne vrednosti razlike pritiska imamo da je tada veći pritisak u *scala tympani*, koji i inicira kretanje bazilarne membrane. Na ovaj način vidimo da je sa te strane model dobro postavljen jer ispunjava datu pretpostavku. Sa druge strane, posmatrajmo funkciju prijema zvuka – ona sadrži funkciju mase kohlee, $M(x)$. Fizički, masa definisana na taj način je velika za ljudsku kohleu i za mambranu, no ona se može ali i ne mora zanemariti. Može, jer je zaista njena masa zanemarljivo mala. Ne mora, jer njena masa nije konstanta uzimajući u obzir kohlein devijantan odnosno izdužen oblik od ovalnog prozora ka vrhu. Vidimo da svako povećanje pritiska i gustine tečnosti dovodi povećanja pritiska tečnosti. Za ekstremno male i velike frekvencije zvuka, dobijamo vrednosti koje su blizu nule, odnosno negativne su, te ne dolazi do pritiska tečnosti u *scala tympani* i nema stvaranja akcionog potencijala, što ide u prilog činjenici da ljudko uho zaista ne registruje zvuke ekstremnih frekvencija. Neely-jev predlog za numeričko rešenje vrednosti pritiska svakako predstavlja temelj za dalje usavršavanje matematičkih modela ove prirode iako sadrži neke fizički neizvodljive pretpostavke.

Posmatrajmo sada kakve rezultate nam daje zvuk od 240 Hz [ravan ženskom glasu soprana] uzimajući funkcije prijema zvuka iz tabele. Imamo tada:



Slika: Vrednosti razlike pritiska u kohlei uzimajući redom Neely-jev, Allen-ov, Lien and Cox-ov, Peterson-ov i Siebert-ov oblik funkcije prijema zvuka

Dodatak i popis slika sa izvorima

U dodatku se nalazi Matlab kod za numeričko rešenje modela razlike pritiska u kohlei. Ulazni parametri funkcije su broj tačaka diskretizacije pravougaonog domena, intenzitet zvuka izražen u Hz koji deluje na uho i gustina tečnosti u kohlei. Često se uzima da tečnost u kohlei ima karakteristike vode te je gutsina $1\text{g}/\text{cm}^3$. Funkcija iscrtava vrednosti pritiska u datim tačkama diskretizacije u trodimenzionalnom kordinatnom sistemu.

Napomena – za parametre m i n uzeti $n \geq 2$ i $n \geq m$.

```
function p=pritisak(m,n,frekvencijaZvuka,gustina)
%m,n su deobne tačke domena. Recimo da tražimo numeričko rešenje
na pravougaoniku koji je podeljen na mn tacaka.
format longG
dx=(3.5)/n; % 3.5 cm je prosečna dužina kohlee kada se ona
razvije.
omega=2*pi*frekvencijaZvuka; %Omega predstavlja
ugaonu(kružnu) frekvenciju.
nizY=[]; %Prave se pomoćne matrice.
nizak=[];
i=0.0000+1.0000i;
for k=1:m
    y(k)=(i*omega*0.15+200+(10^9*exp(-2*k*dx))*(i*omega)^(-1))^-1;
    nizY=[nizY y(k)];
end
for t=1:m
    a(t)=4+2*(2*i*omega*gustina*y(t));
    nizak=[nizak a(t)];
end
Ak=zeros(n); %Formiranje matrice sistema koja koristi diferencne
količnike za aproksimaciju parcijalnih izvoda.
iznad=-[2 ones(1,n-2)];
ispod=fliplr(iznad);
B1=diag(ispod,-1);
B2=diag(iznad,1);
B=(B1+B2);
Ak=zeros(n)+B;
for i=2:m
    for j=2:n
        if i==j
            Ak(i,j)=4;
```

```

        end
    end
end
r=m*n;
u=m*n;
A=zeros(r,u);
m=t;
C=[];
for k=1:t
Ak(1,1)=nizak(k);
C=[C Ak];
end
s=n;
for g=1:m
    for i=((g-1)*s+1):g*s
        for j=((g-1)*s+1):g*s
            A(i,j)=C(i-(g-1)*s,j);
        end
    end
end
D=zeros(r,u);
I=eye(m)^-1;
o=m-1;
l=0;
for k=1:o
    for i=1:m
        for j=1:m
            if o>k
                D(i+l+n,j+l)=I(i,j);
            else
                D(i+l+n,j+l)=2*I(i,j);
            end
        end
    end
    l=l+n;
end
D=D(1:m*n,1:m*n-1);
t=zeros(m*n,1);
D=[D t];
F=zeros(m,n);
o=m-1;
l=0;
for k=1:o
    for i=1:n
        for j=1:n
            if k==1

```

```

        F(i+1,j+1+n)=2*I(i,j);
    else
        F(i+1,j+1+n)=I(i,j);
    end
end
l=l+n;
end
w=zeros(n,m*n);
F=[F; w];
MatricaSistema=A+D+F;
disp(MatricaSistema);
q1=[]; %Formiranje vektora sa početnim vrednostima.
for i=1:m*n
q1=[q1 -4*omega^2*gustina*dx];
end
for i=1:m*n
for j=(m+1):m*n
q1(j)=0;
end
end
p=inv(MatricaSistema)*q1'; %Vektor koji sadrži numerička rešenja
modela.
zq=p;
xq=[];
for j=1:m*n
xq=[xq j*dx];
end
yq=[];
for i=1:m*n
yq=[yq i*dx];
end
%Sledi deo koji iscrtava vrednosti vektora p u tri dimenzije.
xlabel('x-osa');
ylabel('y-osa');
zlabel('Vrednosti pritiska');
view(-30,10)
title('Numericko resenje PDJ modela pritiska u kohlei');
iks=0:(3.5/(m*n)):(3.5-(3.5/(m*n)));
ipsilon=0:(0.1/(m*n)):(0.1-(0.1/(m*n))); %Može se pozvati jedna
od sledeće scatter naredbe.
scatter(iks,zq);
scatter3(xq,yq,zq,'MarkerEdgeColor','b','MarkerFaceColor',[.01
.1 .1]);
scatter3(iks,ipsilon,zq, '*', 'b');

```

Matlab kod za iscrtavanje površi koja predstavlja pritisak u kohlei dobijenog pojednostavljenjem modela uvođenjem dodatnih pretpostavki. Ulazni parametar jeste frekvencija zvuka koji dopire iz spolajšnje sredine.

```
function pritisak2D(f)
omega=2*pi*f;
p0=2*omega^2;
H=1;
i=0.0000+1.0000i;
lambda=1/(0.7);
x=0:0.1:3.5;
y=0:0.1:0.1;
[X,Y]=meshgrid(x,y);
beta=2*pi*(lambda)^(-1);
Z=p0*cosh(beta*(Y-H)).^exp(-i*beta*X);
surf(X,Y,real(Z));
shading interp
axis tight
xlabel('Dužina kohlee');
ylabel('Širina kohlee');
zlabel('Analiti?ko rešenje PDJ modela');
```

Popis slika i izvori:

- Strana 5., Poprečni presek uha i njegovi ključni elementi, preuzeto sa
https://14yunhyu.files.wordpress.com/2014/01/2191_ear_anatomy_450.jpg?w=604
- Strana 7., Srednje i unutrašnje uho; Auditorni korteks, centar za prijem zvuka u mozgu, preuzeto sa
<http://me.hawkelibrary.com/>
<https://www.phactual.com/the-9-types-of-intelligence/>
- Strana 8., Putanja zvučnog signala od kohlee do Auditornog korteksa, preuzeto iz rada L. Watts: *Cochlear Mechanics: Analysis and Analog VLSI*, California Institute of Technology, doctoral thesis, 1993.
- Slika 32., Ljudska kohlea i njeni delovi, poprečni presek, preuzeto sa
<http://www.a3ccm-apmas-eakoh.be/a3ccm/a3ccm.htm>
- Strana 33., Razvijena kohlea, preuzeto sa
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Uncoiled_cochlea_with_basilar_membrane.png

Zaključak

U master radu su izloženi modeli koji opisuju kretanje i variranje pritiska u ljudskoj kohlei prilikom dopiranja zvuka iz spoljašnje sredine, kao i numeričko rešenje jednog od modela. Videli smo kako se fizičke veličine pretvaraju u jednačine, njihovu međusobnu povezanost i uporište u realnoj situaciji, kako se od ideje dobijaju konkretni rezultati. Naime, ceo sistem funkcionisanja mehanizma kohlee je dosta kompleksan i matematičkim jezikom možemo obuhvatiti deo priče jer modeli još nisu spremni zameniti eksperimentalne rezultate, oni se daju samo usavršavati i davati bolju sliku ali i dalje nedovoljno dobru. Nikola Tesla je svojevremeno rekao

‘Današnji naučnici zamenjuju eksperimente matematikom i lutajući iz formule u formulu, na kraju stvaraju konstrukciju daleku od stvarnosti’

Dešava se da modeli ne funkcionišu za zvuke svake frekvencije kao i to da je odstupanje modela od stvarne slike veće za one vrednosti pritiska u okolini helicotreme, upravo zbog pojednostavljenja pretpostavki. No, na ovaj način je još jednom potvrđena istina o primenljivosti matematike kao univerzalne nauke na gotovo svim nivoima života. Razvitak i poboljšanje modela tek sledi i ono prati razvitak numeričkih metoda kao i računarskog softvera.

Literatura

- [1] D.Terman, B.Ermentrout, A.Friedman, A.Borisyuk : *Tutorials in Mathematical Biosciences I -Mathematical Neuroscience*, Springer [Berlin –Heidelberg], 2005, str. 107-168
- [2] S.T.Neely, J.R.Pierce: *Mathematical Models of the Mechanics of the Cochlea*, California Institute of Technology, 1978.
- [3] J.Xin: *Ear Modeling and Sound Signal Processing*, Proceedings of ICCM 2004, Hong Kong; New Studies in Advanced Mathematics, ed. S-T Yau, Vol. 42, str. 819 - 830, AMS and International Press, 2008.
- [4] W. Robert J. Funnell, N.Mafsoon, W.F.Decreamer: *Mechanics and modelling for the middle Ear*, article, 2012.
- [5] B.Wen : *Modeling the nonlinear active cochlea: Mathematics and analog VLSI* , Univeristy of Pensylvania, doctoral thesis, 2006.
- [6] M. Ferranzzini: *Virtual Middle Ear: A dynamic mathematical model based on the finite element method*, Institute for Biomedical Engineering, University of Zurich, doctoral thesis, 2003.
- [7] L. Watts: *Cochlear Mecahnics: Analysis and Analog VLSI*, California Institute of Technology, doctoral thesis, 1993.
- [8] J. Prikkel : *Modelling Cochlear Mechanics*, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, University of Groningen, Master thesis in Applied Mathematics, 2009.
- [9] Y.L. Song i drugi : *Modeling sound transmission of human middle ear and its clinical applications using finite element analysis*, Kaohsiung Journal of Medical Sciences br. 29, str. 133 -139, 2013.
- [10] Richard F. Lyon and Carver A. Mead : *Cochlear Hydrodynamics Demystified*, Department of Computer Science, California Institute of Technology, 1988.

- [11] Charles S. Peskin : *Lectures on Mathematical Aspects of Physiology – The Inner Ear*, AMS, Providence, Rhode Island, 1981.
- [12] Radovan Omorjan, *Numeričko rešavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina*, Tehnološki fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, skripta, 2006.
- [13] Danka Lučić, *Stefanov problem u modelima topljenja*, završni rad, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, 2014.
- [14] Govind Menon, *Lectures od Partial Differential Equations*, Division of Applied Mathematics, Brown University, 2005.
- [15] Julien Meaud, Karl Grosh, *Response to a Pure Tone in a Nonlinear Mechanical-Electrical-Acoustical Model of the Cochlea*, Department of Electrical Engineering and Department of Biomedical Engineering, Ann Arbor, Michigan, Biophysical Journal, Vol. 102., 2012, str. 1237-1246.
- [16] L. Watts, *The mode-coupling Liouville-Green approximation for a two-dimensional cochlear model*, Journal of Acoustical Society of America, Vol. 108., California, 2000.
- [17] MATLAB, MathWorks.com
- [18] Wikipedia

Biografija



Nemanja Đurasinović je rođen 29. jula 1991. u Somboru. Odrastao je u Prigrevici gde završava osnovnu školu ‘Mladost’ 2006. sa odličnim uspehom kao nosilac Vukove diplome. Gimnaziju ‘Nikola Tesla’ u Apatinu završava 2010. sa odličnim uspehom kao učenik generacije i biva nagrađen posetom kraljevskom domu Karađorđević u junu 2010. Tokom školovanja, bio je učesnik na takmičenjima raznih nivoa iz biologije, istorije, geografije, srpskog jezika, fizike kao i na republičkom takmičenju iz matematike 2008. Takođe, učestvuje na takmičenjima matematičkog društva ‘Arhimedes’. U julu 2010. upisuje osnovne studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer Primjenjena matematika, modul Matematika finansija koje završava u septembru 2013. i stiče zvanje matematičar. Iste godine, na

matičnom fakultetu upisuje master-akademske studije i zaključno sa junskim ispitnim rokom 2015. godine polaže sve predmete predviđene nastavnim planom i programom i samim tim stiče pravo na odbranu master rada. Za vreme studija bio je stipendista opštine Apatin i Republike Srbije kao i dobitnik nagrade fakulteta za uspeh ostvaren u školskoj 2010/2011. Omiljeni hobiji su mu crtanje, bicikлизам, plivanje i proučavanje istorije. Od 2009. član je likovne kolonije u Prigrevici.

U Novom Sadu, 2015.

Nemanja Đurasinović

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Master rad

VR

Autor: Nemanja Đurasinović

AU

Mentor: Prof. dr Marko Nedeljkov, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

MN

Naslov: Matematički modeli čula sluha

NR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: srpski

JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2015.

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4.

MA

Fizički opis rada: (4 /83/9/1/12/16/1)

(broj poglavlja / broj strana /broj lit. citata / broj tabela / broj slika /broj grafika / broj priloga)

FO

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Parcijalne diferencijalne jednačine

ND

Predmetna odrednica/ ključne reči: Parcijalne diferencijalne jednačine, Navije-Stoksove jednačine, matematičko modeliranje, integralne jednačine, čulo sluha, kohlea, dinamika fluida, Njutnovi fluidi, bazilarna membrana, jednačine matematičke fizike, Laplasova jednačina, eliptične parcijalne diferencijalne jednačine, Grinova funkcija, Furijeova transformacija, harmonijske funkcije, numeričko rešenje.

PO

UDK

Čuva se: u biblioteci Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta, Univerziteta u Novom Sadu

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod: Cilj ovog master rada jeste, pevashodno, da kroz matematičko modeliranje pokušamo razumeti ceo proces putanje zvuka (zvuk je, strogo govoreći-mehanički talas) iz okoline koja nas okružuje sve do mozga koji primljene signale obrađuje kada mi postajemo svesni da smo čuli nešto. Implementiramo numeričko rešenje u programskom paketu Matlab i pravimo analogon sa modelom, upoređujući i analizirajući rezultate. Kombinuje se znanje iz anatomije, elektrofiziologije i najzad, matematičkog modeliranja.

Akcenat ćemo staviti na modele vezane za srednje i unutrašnje uho, bazilarnu membranu i organ puža (kohlea). Navode se modeli koji su se razvijali kroz istoriju kako bi opisali auditivni sistem na osnovu saznanja iz fizike i na osnovu nekih empirijskih odnosno eksperimentalnih zaključaka.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 16.06.2015.

DP

Datum odbrane: Oktobar 2015.

DO

Članovi komisije:

Predsednik: Prof. dr Nataša Krejić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu,

Mentor: Prof. dr Marko Nedeljkov, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu,

Član: Prof. dr Danijela Rajter-Ćirić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu.

KO

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORD DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Documentation: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Content Code: Master's thesis

CC

Author: Nemanja Đurasinović

AU

Mentor: Marko Nedeljkov, Ph.D.

MN

Title: Mathematical Models of the Hearing mechanism

TI

Language of text: Serbian

LT

Language of abstract: English

LA

Country of publication: Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2015

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publication place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4

PP

Physical description: (4/ 83/9/ 1/12/16/1)

(number of sections / pages / references / tables / pictures / graphs / appendices)

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific Discipline: Partial Differential Equations

SD

Subject / Key words: Partial Differential Equations, Navier-Stokes equations, mathematical modeling, integral equations, the auditory system, the Cochlea, fluid dynamics, Newtonian fluids, basilar membrane, the mathematical physics, Laplace's equation, Elliptic partial differential equations, Green's function, Fourier transformation, harmonic functions, numerical solution.

SKW

UC

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

HD

Note:

N

Abstract: The main goal of the thesis is, primarily, to understand the whole pathway of the sound from the environment up to the Auditory Cortex which function is to decode signals from the inner ear. Afterwards we become aware that we have just heard the sound from the environment. (Roughly speaking, the sound is a mechanical wave). We simulate the numerical solution of the model with Matlab, and then we compare and analyse the results of the solution with the model. We use the knowledge of anatomy of the ear, the electro-physiology and mathematical modeling at last.

We especially draw attention on the models of middle and inner ear, basilar membrane and the Cochlea. We produce and compare several models that have been developing through the history and which have been describing the auditory system in the mathematical language.

AB

Accepted by the Scientific Board on: 16.06.2015.

ASB

Defended: October 2015.

DE

Thesis defend board:

President: Nataša Krejić, Ph. D., Full Professor, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad.

Mentor: Marko Nedeljkov, Ph. D., Full Professor, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad.

Member: Danijela Rajter-Ćirić, Ph. D., Full Professor, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad.

DB