



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ДЕПАРТМАН ЗА
МАТЕМАТИКУ И ИНФОРМАТИКУ



Наташа Рикаловић

НЕКИ МАТЕМАТИЧКИ АСПЕКТИ ПРОЦЕСА ГЛАСАЊА

-МАСТЕР РАД-

Нови Сад, 2015.

Садржај

Увод	4
1. Основни појмови	6
1.1. Примери изборних система.....	8
1.2. Релација преференције и функција корисности	9
1.2.1. Лутрије	16
1.2.2. Аверзија према ризику	19
2. Релативност избора	23
2.1. Функција избора	24
2.2. Изборни колеџ	26
2.3. Преглед процедура	28
2.3.1. Други круг гласања	29
2.3.2. Класификација резултата	31
2.3.3. Елиминационо гласање.....	32
2.3.4. Гласање одобравањем.....	32
2.3.5. Кумулативно гласање	33
2.3.6. Борда рачун	33
2.3.7. Кондорсеов победник	34
2.3.8. Кенет Ероу.....	36
2.3.8.1. Теорема Ероуа	37
3. Различити исходи избора у зависности од избора процедуре.....	40
3.1. Доналд Сари о исходу гласања	44
3.2. Геометријски приказ изборних листа и изборних резултата	45
3.2.1. Геометријски приказ изборних листа	45
3.2.2. Процедурална дуж.....	50
3.2.3. Позиционирање процедуралне дужи.....	54
4. Повлачење кандидата.....	56
5. Стратегија гласања	60
6. Процедуралне разлике	63
6.1. Поништавање гласова	63
6.2. Борда или Кондорсе	66
6.3. Кондорсе и Ероу.....	68

Неки математички аспекти теорије гласања

7. Примена вероватноће и статистике у теорији гласања	71
7.1. Вероватноћа пресудности утицаја једног гласача	71
7.2. Неке статистичке методе у теорији гласања	76
7.3. Двокружни систем (runoff method)	81
Закључак	84
Литература	86
Биографија	88

Увод

„Бројеви управљају светом“ – говорили су Питагорејци. То је, разуме се, мистика. Али бројеви пружају човеку могућност да управља светом и у то нас убеђује цели ток и развитак науке и технике нашег доба.

A. Dorodnicin¹

Претходни цитат нам говори да је математика, као фундаментална наука, свеprisутна у сваком аспекту живота. Једна од можда најзанимљивијих примена математике је управо у „играма“. Игра сада дефинише све ситуације почев од најтривијалнијих, попут проблема на коју страну шутирати лопту приликом извођења пенала у фудбалу, до оних најкомплекснијих ситуација у политици.

Област примењене математике која се бави проучавањем стратешких одлука које доносе рационални играчи је управо Теорија игара и пре свега је изузетно занимљива због своје велике примене. Можемо је видети у различитим областима, као што је економија, шах, међународни односи, биологија, психологија и многе друге. Посебно је интересантна веза између теорије игара и процеса гласања.

Фокус овог рада је на савременом и свеprisутном проблему гласања. Управо развој теорије игара је, између осталог, допринео појави нових математичких алата неопходних за анализу система гласања и стратешко гласање. Један од тих алата је базиран на идеји јаког Нешовог еквилибријума, развијеног педесетих година прошлог века. Ова и сличне методе довеле су до значајних резултата који су променили теорију гласања. Употреба математичких критеријума за процену система гласања уведена је када је Кенет Ероу доказао да су поједини интуитивно пожељни критеријуми заправо узајамно контрадикторни, на тај начин демонстрирајући инхерентна ограничења теорије гласања.

Циљ овог рада је представљање процеса гласања, те доношења резултујућих одлука, из математичког угла. У раду ће бити дат приказ расположивих могућности у гласачком систему које се односе на број кандидата, као и на индивидуалност сваког појединца који гласа. Обратиће се пажња и на утицај различитих гласачких техника на резултат гласања. Биће приказана анализа утицаја квалитативних и квантитативних особина како кандидата, тако и гласача на целокупни гласачки систем.

Како је процес гласања у тесној вези са теоријом игара, у првом делу рада биће дат исцрпан приказ релевантних појмова и резултата из теорија игара, попут гласачког

¹Анатолиј Алексејевич Дородницин (1910 – 1994) – руски математичар, геофизичар, академик РАН. Велики допринос је имао у области аеродинамике и методама за решавање диференцијалних једначина.

Неки математички аспекти теорије гласања

процеса, гласачког вектора и преференције гласача. Биће наведене и неке интересантне историјске карактеристике, као и прикази анализа неких познатих гласања. Коришћена литература је [8], [17] и [19].

У другом делу биће илустрован гласачки систем на проблему студената и професора, где професори представљају гласаче, а студенти кандидате. Биће наведене и две значајне теореме за процес гласања, а то су Борда рачун и Ероуова теорема. Затим, биће дат преглед познатих метода у процесу гласања, као што су метод позиције и Кондорсеов метод. Дефинисаће се гласачки вектор, те илустровати утицај избора процедуре на промену победника гласања ако су познате преференције гласача. Овај део рада ће садржати и геометријски приказ различитих гласачких профила, као и приказ процедуралних линија. Размотриће се шта се дешава са исходом гласања након повлачења неког кандидата. Потом ће се представити могућа стратегија којом се може умањити манипулација редоследа гласања. Консултована литература приликом израде овог поглавља је [6], [8], [14] и [27].

Фокус остатка рада ће бити на проблему хаотичног понашања појединаца, те на могућем утицају истог на исход гласања. Биће приказане неке од најзначајнијих методе за рангирање, као и њихова компарација. Упоредиће се значајне методе и увидети њихове предности и мане. Проблем се огледа у томе што исти кандидати истог дана могу бити ранжирани прво једном методом, а затим другом. Неки од познатих метода који ће бити приказани су: вишекружни систем (runoff метод) и Кондорсеов метод, тј. метод избора при којем се бира кандидат који ће освојити гласове већине при свим могућим упаривањима против других кандидата. Коришћена литература је [3], [5], [8], [9] и [14].

1. Основни појмови

Почетак Теорије игара је везан за 17. век, када су математичари покушавали да реше проблеме у различитим коцкарским играма (Паскал и Фермат, 1650). Немачки математичар Ернест Зермело је објавио књигу *О употреби теорије скупова у теорији шаховске игре* 1912. године, док је 1921. г. доказао важна тврђења о победничким стратегијама.

Најзначајнији моменат и вероватно почетак развоја *Теорије игара* је књига *Теорија игара и економског понашања* чији су аутори Џон фон Нојман (John von Neumann 1903 – 1957) и Оскар Моргенстерн (Oskar Morgenstern, 1902 – 1977) из 1944. године. Тада су коначно дефинисани основни појмови везани за ову област, као и методе за проналазак оптималних стратегија.

Током 50 – тих и 60 – тих година прошлог века модели теорије игара почињу да се примењују у економији, затим у психологији, као и у социологији. Док се у 70 – тим годинама примењују чак и у еволуционој биологији. Претходно илуструје ширину могућих примена теорије игара. Треба поменути и велики допринос развоју ове области који су имали и добитници Нобелове награде за економију из 1944. године Џон Неш (John Nash), Џон Харсаниј (John C. Harsanyi) и Рајнхард Зелтен (Reinhard Selten) (видети [19]).

Упркос мноштву поља у којима се примењује теорија игара, овај рад ће се највише ослањати на теорију гласања. Теорија гласања открива многе изборне процедуре које доводе до потпуно другачијих исхода и приказује гласање у свакој од 256 нијанси од црне до беле боје. Следи преглед дефиниција неколико основних појмова који се тичу саме теме рада.

Нека је даље са X обележен скуп свих играча, N његова кардиналност, а са S коалиција, тј. скуп играча који доносе исту одлуку.

Дефиниција 1. [8] Функција избора између две алтернативе за произвољну коалицију S је дата са

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } |S| > N/2 \\ 0, & \text{ако је } |S| \leq N/2, \end{cases}$$

где је $|S|$ број играча у коалицији S , а N укупан број играча, при чему 1 представља победу коалиције S , а 0 њен пораз.

Следеће две формалне дефиниције релевантне су баш за процес гласања.

Дефиниција 2. [25] Вектор гласања је вектор који описује начин на који су

резултати саопштени.

Другим речима, за дати систем гласања са n кандидата, гласање је описано следећим вектором $(w_1, w_2, \dots, w_n)$ где је w_i број поена додељен i – том кандидату и кандидати су произвољно распоређени.

Дефиниција 3. [4] *Гласачки систем је било који метод који узима колекцију комплетних и транзитивних индивидуалних релација преференције, односно колекцију индивидуалних позиција на ранг листи, и креира групну ранг листу.*

Следи преглед појмова есенцијалних за сам процес гласања.

1. **Избори** – поступак којим грађани, тј. бирачи поверавају обављање политичке власти представничком телу, али и председнику државе, који онда представљају суверену народну власт [17].

Осим државних избора постоје и избори у политичким странкама, али и избори ван политике, као што су избори за председника одељења, или избори за директора једне школе, избори за мис света, итд.

2. **Бирачко право** – као једно од основних политичких права грађана, субјективно је право грађана одређене државе да на изборима дају глас одређеном кандидату, али и право да буду кандидати на изборима [17].
3. **Изборни систем** – представља скуп процедура и правила, чији је циљ да се на демократски начин гласови бирача преточе у одређену политичку одлуку. Под изборним системом се подразумева: начин гласања, ко има право да бира и буде биран, одређивање изборних јединица², процедуре кандидовања, утврђивање резултата избора, рокови, начини контроле избора, број кандидата који се бира (видети [17]). Постоје следећи изборни системи:
 - а. **Пропорционални изборни систем** – странка или група грађана добија број представника сразмеран освојеном броју гласова бирача;
 - б. **Већински изборни систем** – изабран је онај ко освоји највише гласова.
 - с. **Мешовити изборни систем** – комбинација већинског и пропорционалног изборног система.
4. **Електори** – лица која грађани бирају непосредно, а који потом, као чланови електорске групе у свакој америчкој држави, бирају председника и потпредседника САД – а [23].
5. **Кандидат** – Грађанин који ужива пасивно бирачко право, код кога не постоје законом прописане сметње за обављање посланичке функције (парламентарна неподударност) и који је истакнут као кандидат или самостално или на

²Изборна јединица – територија којој припада унапред одређен број представничких мандата.

кандидатској листи [23].

1.1. Примери изборних система

У нашој земљи је заступљен пропорционални изборни систем, док је у САД – у заступљен већински изборни систем. Разликују се две врсте већинског изборног система – једнокружни већински изборни систем и двокружни већински изборни систем, о којима ће касније бити реч. Можемо разликовати две врсте избора у зависности од њихове функције, а то су:

- ❖ Парламентарни избори – за чланове парламента (углавном се спроводи по пропорционалном изборном систему);
- ❖ Председнички избори – за председника државе (спроводи се по већинском изборном систему).

Већински изборни систем је систем у коме бирачи непосредно бирају председника државе, градоначелника, председника општине, и сл, при чему је изабран онај који је освојио највише гласова (релативну, апсолутну или тзв. квалификовану већину).³ Овај систем је један од једноставнијих система и примењује се у англосаксонским земљама.

У ужем смислу се подразумева да бирачи гласају у тачно одређеној изборној јединици у којој може бити изабран тачно један кандидат, а онда тај кандидат, заједно са представницима других територијалних јединица одређује чланове председничких тела. Као и сваки систем и овај има своје предности и мане. Можда једна од највећих предности је тај што омогућава већу политичку стабилност двостраначких земаља.

Критика овог система је што се појављују тзв. бачени гласови, под којим се подразумевају сви гласови изнад 50%, које освоји кандидат неке странке, јер је довољан само један глас изнад тих 50% да би се освојила одређена посланичка места. У нашој земљи је овај систем гласања коришћен за парламентарне изборе, али је од 1990. године ступио на снагу пропорционалан систем гласања. Разликују се двокружни и једнокружни изборни систем:

- ❖ Двокружни – у првом кругу гласања је потребно освојити апсолутну већину, а уколико нема никог са апсолутном већином, прелази се на други круг гласања. У другом кругу избор је сужен на два кандидата, и то она два који су освојили највише гласова у првом кругу, а од њих

³Релативна већина – има је кандидат који на изборима освоји више гласова од било ког другог кандидата;

Апсолутна већина – има је кандидат који освоји бар један глас више од половине свих гласова бирача;

Квалификована већина – подврста је апсолутне већине која, чак, може да захтева тачно одређен број гласова или много већи број од половине свих гласова бирача.

побеђује онај који освоји апсолутну већину. Овај систем гласања примењив је јер се апсолутна већина углавном тешко постиже; и карактеристичан је за Француску.

- ❖ Једнокружни – састоји се у подели територија на којој се гласа на изборне јединице и у свакој од њих такмичење кандидата се води засебно. На гласање се излази једном и победник је онај који освоји највећи број гласова (не мора бити апсолутна већина). Овај систем примењује се у САД – у и оно што га одликује јесте избор личности (гласа се за једну личност), једноставност и гласање у једном кругу [17].

Пропорционалан систем гласања је систем у коме се уместо појединачних кандидата бирају изборне листе и користи се као метод избора за председничка тела. Расдела мандата у пропорционалном изборном систему се врши помоћу Д'Онтовог система највећих изборних количника. У овом систему одређена изборна листа добија број мандата који је пропорционалан броју освојених гласова бирача. Као што је већ у тексту напоменуто, ово је изборни систем који се примењује у нашој земљи, али и у бројним европским државама. Позитивна страна овог система је што најверније одражава вољу гласача, што је уједно и била највећа мана већинског система гласања. Док је највећа мана то што даје превелики значај малим партијама, које једва пређу цензус⁴ (видети [17]).

Комбинацијом ова два изборна система добија се мешовити изборни систем. Настао је управо у нади да ће се отклонити недостаци већинског и пропорционалног изборног система. Овај систем је први пут заживео у Данској, а данас се примењује у више од двадесет и пет земаља. Овај систем подразумева то да појединац или странка са највећим бројем гласова добија мандат, али поједина подручја у држави користе пропорционални метод (видети [17]).

1.2. Релација преференције и функција корисности

У математици, науци, економији и обичном животу се неретко долази у ситуацију где се бира између две или више опција. Зато је корисно имати неки математички језик који говори о поређењу датих опција, а то су преференције. Управо се индивидуалне преференције појединца могу посматрати кроз бинарне преференције. Према томе уколико појединац доноси одлуку да ли ће похађати часове немачког или француског језика и изабере немачки у математици помоћу релација преференције записујемо *немачки преферира у односу на француски* [22].

⁴Цензус – минималан број гласова који нека изборна листа или странка мора да освоји да би добила место у представничком телу (код нас је цензус 5%).

Неки математички аспекти теорије гласања

Велики допринос када се доноси нека одлука, када постоји избор, тј. када је у питању људска преференција дали су Џон вон Нојман и Оскар Моргенстерн. Године 1944. су објавили књигу *Теорија игара и економско понашање* у коме се баве преференцијама, утилитарним функцијама у лутријама и коцкању [28].

Односи између елемената неког скупа се описују релацијама. У зависности од броја елемената чији однос релација приказује, релације могу бити унарне, бинарне...

Дефиниција 4. [2] Бинарна релација p на скупу X је:

- 1) рефлексивна, ако испуњава услов, $\forall x \in X, xpx$,
- 2) симетрична, ако испуњава услов, $\forall x, y \in X, xpy \Rightarrow ypx$,
- 3) антисиметрична, ако испуњава услов, $\forall x, y \in X, xpy \wedge ypx \Rightarrow x = y$,
- 4) транзитивна, ако испуњава услов, $\forall x, y, z \in X, xpy \wedge ypz \Rightarrow xpz$.

За релацију на скупу X за коју важе особине 1), 2) и 4) кажемо да је релација еквиваленције. За релацију на скупу X за коју важе особине 1), 3) и 4) кажемо да је релација поретка. Следи дефиниција посебног типа релације која је есенцијала за процес гласања, односно за процес доношења одлука.

Дефиниција 5. [10] Релација преференције $\succsim$ је бинарна релација на скупу X која има следеће особине:

1. $\forall x \in X, x \succsim x$, (рефлексивност),
2. $\forall x, y \in X, x \succsim y$ или $x \precsim y$, (комплетност),
3. $\forall x, y, z \in X, x \succsim y \wedge y \succsim z \Rightarrow x \succsim z$, (транзитивност).

Дефиниција 6. [10] Релација стриктне преференције $\succ$ се дефинише на следећи начин:

$$x \succ y \Leftrightarrow x \succsim y \wedge \neg (y \succsim x).$$

Дефиниција 7. [15] Релација индиферентности $\sim$ се дефинише на следећи начин:

$$x \sim y \Leftrightarrow x \succsim y \wedge y \succsim x.$$

Претпоставимо сада да $x, y, z \in X$ представљају корпе добара, тј. могуће изборе које појединац има на располагању у датом тренутку. Релација преференције $\succsim$ на скупу X може имати следеће особине :

- Монотоност ($\forall x, y \in X, x \geq y \Rightarrow x \succsim y$).
- Стриктна монотоност ($\forall x, y \in X, x > y \Rightarrow x \succ y$) – економска интерпретација монотоности и стриктне монотоности могла би бити “што више то боље” .
- Локална нестационарност ($\forall x \in X, \forall \epsilon > 0$ постоји избор $y \in X$ такав да важи $\|x - y\| < \epsilon$ и $x \succ y$) – ова особина значи да увек постоји корпа добара коју појединац преферира „мало више“ од постојеће.

Неки математички аспекти теорије гласања

- **Конвексност** ($\forall x, y, z \in X, x \succcurlyeq z \wedge y \succcurlyeq z \Rightarrow tx + (1-t)y \succcurlyeq z, t \in (0,1)$).
- **Стриктна конвексност** ($\forall x, y, z \in X, x \succcurlyeq z \wedge y \succcurlyeq z \Rightarrow tx + (1-t)y \succ z, t \in (0,1)$) – ако преферирамо корпе x и y односу на корпу добара z , онда и све линеарне комбинације x и y преферирамо у односу на z [10].

Ситуација у којој појединац треба да донесе одлуку у датом моменту, при чему је избор вишеструки се према томе може математички приказати помоћу релација преференције. Како се са било којом врстом избора сусрећемо свакодневно релације преференције су нашле примену кроз математику у многим сферама живота. Једна од таквих ситуација је и гласање, односно гласачки систем, где се заправо налазимо у ситуацији у којој треба изабрати једног кандидата од неколико кандидованих.

Представљање одлука се може поред релације преференције извршити и помоћу такозване функције корисности.

Дефиниција 8. [10] Нека је $\succcurlyeq$ релација преференције на скупу X . Функција $u: X \rightarrow \mathbb{R}$ за коју важи

$$x \succcurlyeq y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$$

назива се **функција корисности** (утилитарна функција) релације преференције.

Тврђење 1. [11] Ако u представља $\succcurlyeq$, онда за било који строго растућу функцију $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, функција $v(x) = f(u(x))$ такође представља $\succcurlyeq$.

Доказ.

$$a \succcurlyeq b$$

$$\Leftrightarrow u(a) \geq u(b) \text{ (док } u \text{ представља } \succcurlyeq)$$

$$\Leftrightarrow f(u(a)) \geq f(u(b)) \text{ (док је } f \text{ строго растућа функција)}$$

$$\Leftrightarrow v(a) \geq v(b). \square$$

Елемент $a \in A \subseteq X$ је **минималан елемент** за релацију преференције на скупу A ако $\forall x \in A$ важи $x \succcurlyeq a$.

Лема 1. Сваки коначан подкуп $A \subseteq X$ има минимални елемент (аналогно, постоји максималан елемент).

Доказ. Доказ ове леме се ради помоћу математичке индукције.

База индукције: Прво се посматра случај када је кардинални број скупа A једнак 1, односно када је број елемената скупа A једнак 1, $|A| = 1$. Јасно, тада је тај елемент минималан, јер је једини у скупу.

Индукцијска хипотеза: Претпоставља се да за $|A| = n$, тј. да за скуп A

Неки математички аспекти теорије гласања

кардиналности n , постоји минимални елемент.

Индукцијски корак: Нека је кардиналност скупа A $n+1$ и нека је $x \in A$. Скуп $A - \{x\}$ је кардиналности n , који на основу индукцијске хипотезе има минимални елемент који ће се означити као y .

Ако је $x \succcurlyeq y$, онда је y минимални елемент скупа A . Ако је $y \succcurlyeq x$, онда је на основу транзитивности $z \succcurlyeq x$ за све $z \in A - \{x\}$ и онда је x минималан елемент. $\square$

Функција корисности управо даје одговор на питање који избор се више преферира. Најпре се сваком избору додељују бројеви и избор који има највећи број је највише префериран.

Теорема 1. [10] Ако је $\succcurlyeq$ релација преференције на коначном скупу X , тада релација $\succcurlyeq$ има функцију корисности чије су вредности у скупу природних бројева.

Доказ. Дефинише се низ скупова, индуктивно. Нека је X_1 скуп минималних елемената скупа X . На основу претходне леме, X_1 није празан скуп. Конструишу се скупови $X_1, X_2, \dots, X_k$.

Ако је $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k$, доказ је завршен.

Ако није, дефинише се X_{k+1} тако да буде скуп минималних елемената скупа $X \setminus (X_1 \cup X_2 \dots \cup X_k)$. На основу претходне леме $X_{k+1} \neq \emptyset$. Како је X коначан скуп, до краја доказа се долази након $|X|$ корака, односно док се не истроше сви елементи скупа X . Дефинише се корисност $u(x) = k$ ако је $x \in X_k$, где $u(x)$ представља број корака у ком ће бити x елиминисан. Како би се утврдило да u представља $\succcurlyeq$, претпоставља се да је $a \succcurlyeq b$. Онда $b \in X \setminus (X_1 \cup X_2 \dots \cup X_k)$ и $u(a) \geq u(b)$.

Јасно, скупови $X_1, X_2, \dots, X_k$ су дисјунктни, а како је $X = \bigcup_{i=1}^k X_i$, јасно је да је формирања функција која свим елементима скупа X додељује природне бројеве као њихове корисности. $\square$

Теорема 2. [10] Ако је $\succcurlyeq$ релација преференције на пребројивом скупу X , тада релација $\succcurlyeq$ има функцију корисности чије су вредности у интервалу $(-1, 1)$.

Доказ. Нека су елементи скупа X поређани у низ $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, што је могуће јер је X пребројив. Нека је $u(x_1) = 0$.

Потом, нека за корисности $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ важи $u(x_i) \in (-1, 1)$ и нека је $x_k \succcurlyeq x_l$ ако и само ако $u(x_k) \geq u(x_l)$.

Ако $x_n \neq x_k$ за неко $k < n$ онда је $u(x_n) = u(x_k)$.

Ако није, дефинишу се следећа два скупа :

$$\{u(x_k) | x_k < x_n\} \cup \{-1\},$$

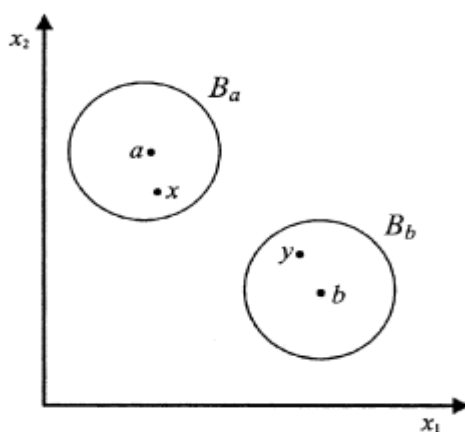
$$\{u(x_k) | x_n < x_k\} \cup \{1\}.$$

Бира се корисност $u(x_n)$ тако да буде између ова два скупа. Ово гарантује да за

Неки математички аспекти теорије гласања

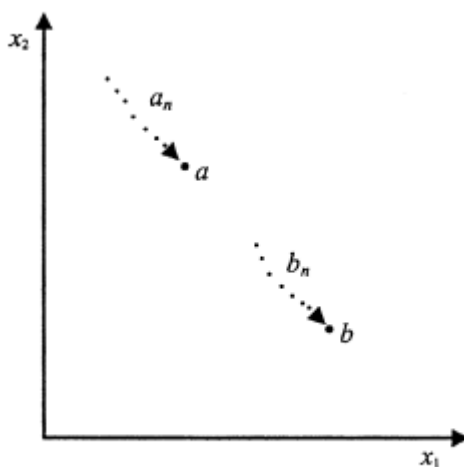
било које $k < n$ важи да је $x_n \succcurlyeq x_k$ ако и само ако $u(x_n) \geq u(x_k)$. Према томе, функција која је дефинисана на скупу $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ представља преференцију ових елемената.

За крај доказа да u представља $\succcurlyeq$ потребно је узети два произвољна елемента $x, y \in X$. Тада је за неко k и l $x = x_k$ и $y = y_l$. На основу горе примењеног за $n = \max\{k, l\}$ јасно је да је $x_k \succcurlyeq x_l$ ако и само ако $u(x_k) \geq u(x_l)$ и тиме је тврђење доказано. $\square$



Фигура 1.

Дефиниција 9. [11] Релација преференције $\succcurlyeq$ на скупу X је непрекидна ако увек када је $a \succ b$ постоје околине B_a и B_b око a и b , респективно, такве да за све $x \in B_a$ и $y \in B_b$, $x \succ y$. (Фигура 1.)



Фигура 2.

Дефиниција 10. [11] Релација преференције $\succsim$ на скупу X је непрекидна ако је граф $\succsim$ (то је скуп $\{(x, y) | x \succsim y\} \subseteq X \times X$) затворен скуп; односно ако су елементи скупа X парови $\{(a_n, b_n)\}$ који су поређани у низ и за које важи да је $a_n \succsim b_n$ за свако n и $a_n \rightarrow a$ и $b_n \rightarrow b$, онда $a \succsim b$. (Фигура 2.)

Тврђење 2. [11] Релација преференције $\succsim$ на скупу X је непрекидна по Дефиницији 9 ако и само ако је непрекидна по Дефиницији 10.

Доказ. Нека је $\succsim$ на X непрекидна по Дефиницији 9. Нека је $\{(a_n, b_n)\}$ низ парова за које важи

$$a_n \succsim b_n$$

за свако n и $a_n \rightarrow a$ и $b_n \rightarrow b$. Ако није тачно $a \succsim b$, тада постоје околине тачака a и b , у ознаци B_a и B_b тако да за свако $y \in B_a$ и $x \in B_b$ важи

$$y \succ x.$$

Сада постоји довољно велико N тако да за свако $n > N$ важи $a_n \in B_a$ и $b_n \in B_b$. Другим речима, за свако $n > N$ је испуњено

$$b_n \succ a_n$$

што доводи до контрадикције.

Нека је сад $\succsim$ непрекидна по Дефиницији 10. Нека је $a \succ b$. Сада се посматра скуп свих елемената из X који су на растојању мањем од r од x и нека је тај скуп означен са $B(x, r)$. Сада, претпоставља се да важи супротно, тј. да за свако n постоји $a_n \in B(a, \frac{1}{n})$ и $b_n \in B(b, \frac{1}{n})$ тако да

$$b_n \succsim a_n.$$

У том случају низ $\{(b_n, a_n)\}$ конвергира ка $\{(b, a)\}$ што, по другој дефиницији даје и доводи до контрадикције $b \succsim a$. $\square$

Напомена. [11] Ако је $\succsim$ на скупу X представљено непрекидном функцијом u онда је $\succsim$ непрекидно. Такође, треба имати на уму да важи :

$$\text{ако } a \succ b \text{ онда } u(a) > u(b).$$

Нека је :

$$\varepsilon = \frac{u(a) - u(b)}{2}.$$

Из непрекидности функције u следи да постоји $\delta > 0$ такво да за свако x који је ближи δ него a ,

Неки математички аспекти теорије гласања

$$u(x) > u(a) - \varepsilon,$$

и за свако y који је ближи δ него b ,

$$u(y) < u(b) + \varepsilon.$$

Тада за x и y са околинама радијуса δ око a и b , респективно, важи $x \succ y$.

Напомена. [11] Примери функција корисности:

- Коб – Дагласова функција корисности : $u(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$ за $\alpha \in (0,1)$;
- Квази – линеарна функција корисности : $u(x, m) = V(x) + m$;
- Лионтифова функција корисности : $u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$.

Следи Дабреуова теорема, односно њени класични резултати који су од великог значаја у економској теорији. Резултат ове теореме се односи на непрекидност јер је то веома битна особина која гарантује малу промену излазних вредности ако је дошло до мале промене улазних вредности. За боље разумевање ове теореме неопходно је прво навести лему.

Лема 2. [11] Ако је $\succsim$ непрекидна релација преференције на конвексном скупу $X \subseteq \mathbb{R}^n$, и ако $x \succsim y$ онда постоји $z \in X$ такво да је $x \succ y \succ z$.

Доказ. Претпоставља се супротно. Конструира се низ тачака на интервалу који повезује тачке x и y на следећи начин.

База индукције : Прво се дефинише да је $x_0 = x$ и $y_0 = y$.

Индукцијски корак : Постоје две тачке, x_t и y_t , на линији која повезује x и y , такве да је $x_t \succsim x$ и $y_t \succsim y$. Проналази се средиште између x_t и y_t и обележава се са m . На основу претпоставке следи да је $m \succsim x$ или $y \succsim m$.

Најпре се дефинише да је

$$x_{t+1} = m \text{ и } y_{t+1} = y_t,$$

а потом да је

$$x_{t+1} = x_t \text{ а } y_{t+1} = m.$$

Низови $\{x_t\}$ и $\{y_t\}$ конвергирају и морају конвергирати ка истој тачки z , док разлика између x_t и y_t конвергира у нулу. Из непрекидности $\succsim$ следи

$$z \succsim x \text{ и } y \succsim z$$

и из транзитивности $y \succsim x$, што је контрадикторно претпоставци да $x \succ y$. $\square$

Теорема 3. (Дабреу [11]) Нека је X конвексан подскуп од $\mathbb{R}^n$ за који постоји пребројив густ подскуп Y . Ако је релација преференције $\succsim$ непрекидна онда постоји непрекидна функција корисности $\succsim$.

Доказ. На основу претходног познато је да постоји функција корисности $\mu: Y \rightarrow$

$[-1,1]$ која представља рестрикцију релације преференције $\succsim$ на Y . За свако $x \in X$ дефинише се следеће

$$U(x) = \sup\{\mu(z) \mid z \in Y \text{ и } x \succ z\}.$$

Нека је $U(x) = -1$ ако не постоји $z \in Y$ тако да $x \succ z$. Другим речима, x је минимални елемент у X .

Ако је $x \sim y$, тада важи $x \succ z$ ако и само ако $y \succ z$. Односно, $U(x) = U(y)$.

Ако је $x \succ y$, тада по претходној лемми постоји z тако да $x \succ z \succ y$. Због непрекидности релације преференције, постоји околина тачке z таква да су сви елементи из те околине инфериорни у односу на x , а супериорни у односу на y . Обзиром на то да је Y густ скуп, постоји $z_1 \in Y$ тако да је $x \succ z_1 \succ y$. Из истог разлога постоји и $z_2 \in Y$ тако да је $z_1 \succ z_2 \succ y$. Дакле,

$$U(x) \geq \mu(z_1) > \mu(z_2) \geq U(y)$$

при чему први и трећи део неједнакости потичу од дефиниције скупа U , а централни део од претпоставке да је μ функција корисности за почетну релацију преференције. $\square$

1.2.1. Лутрије

Релација преференције, као и функција корисности се могу довести у везу са лутријама. Управо ту везу су направили Џон фон Нојман и Оскар Моргенстен, о чијем раду и великом доприносу када је у питању теорија игара је већ било речи.

Уколико постоје две количине новца које се могу добити на лутрији наравно да ће већу корисност донети већа сума новца [20]. Нека је $X = (x_1, x_2, \dots, x_r)$ скуп свих исхода. Следи уобичајени запис лутрије:

$$l = \langle p_1, x_1; x_2, p_2; \dots; x_r, p_r \rangle$$

где је $p_i \geq 0$ вероватноћа добијања x_i , $i = 1, 2, \dots, r$ и

$$\sum_{i=1}^r p_i = 1.$$

Видети [20].

Према томе x_i , $i = 1, 2, \dots, r$ су могући исходи лутрије који доносе одређене новчане вредности. Сваки исход x_i , $i = 1, 2, \dots, r$ дат је са својом вероватноћом p_i , $i = 1, 2, \dots, r$, при чему је њихова сума један.

Наравно, постоји могућност да су неке вероватноће $p_i = 0$, што би значило да

неке награде нису могуће у посматраној лутрији. Ова лутрија представља просту лутрију јер су унапред утврђене награде. Код сложене лутрије неке од 'награда' могу представљати улазак у нову лутрију [20].

На пример, у сложеној лутрији

$$\langle q_1, l_1; q_2, l_2; \dots; q_s, l_s \rangle$$

$q_i \geq 0$ представља вероватноћу уласка у лутрију l_i , $i = 1, 2, \dots, s$ и важи:

$$q_1 + q_2 + \dots + q_s = 1.$$

Видети [20].

Заправо сложена лутрија за исходе има просте лутрије и свака вероватноћа q_i , $i = 1, 2, \dots, s$ представља вероватноћу добитка просте лутрије l_i , $i = 1, 2, \dots, s$ која за исходе има очекиване новчане вредности.

Нека је A скуп свих могућих награда, укључујући и скуп простих и скуп коначно сложених лутрија.

Како би се одлуке доносиоца сматрале рационалним, потребно је увести неколико претпоставки о конзистентности његових преференција. На основу тих претпоставки се може показати егзистенција функције корисности.

Претпостављају се следеће аксиоме:

Аксиома 1. [20] Слаб поредак. Преференције доносиоца одлуке на скупу A имају слаб поредак. Без умањења општости такве награде ће бити означене као $x_1 \succcurlyeq x_2 \succcurlyeq \dots \succcurlyeq x_n$.

Аксиома 2. [20] Нетривијалност. Да би се избегла тривијалност претпоставља се стриктна преференција x_1 у односу на x_n . Тј. $x_1 \succ x_n$.

Аксиома 3. [20] Разлагање сложених лутрија. Нека је дата сложена лутрија $l = \langle q_1, l_1, q_2, l_2, \dots, q_s, l_s \rangle$ која за награде има улазак у просте лутрије $l_1, l_2, \dots, l_s$ где

$$l_j = \langle p_{j1}, x_1; p_{j2}, x_2; \dots; p_{jr}, x_r \rangle$$

за $j = 1, 2, \dots, s$.

Нека је l' проста лутрија $\langle p_1, x_1, p_2, x_2, \dots, p_r, x_r \rangle$ где:

$$p_i = q_1 p_{1i} + q_2 p_{2i} + \dots + q_s p_{si}$$

за $i = 1, 2, \dots, r$. Онда доносиоц одлуке мора сматрати да је $l \sim l'$.

Аксиома 4. [20] Одрживост. Нека су $b, c \in A$ награде за које доносиоц одлуке сматра да су у односу $b \sim c$. Нека је $l \in A$ било каква лутрија, проста или сложена, за коју важи:

$$l = \langle \dots; q, b; \dots \rangle$$

Неки математички аспекти теорије гласања

тј. код које је q вероватноћа да је b директан исход лутрије l .

Нека је l' конструисана на основу лутрије l , заменом c за b док други исходи и све вероватноће остају непромењене

$$l' = \langle \dots ; q, c ; \dots \rangle.$$

Тада доносиоц одлуке сматра да је $l \sim l'$.

Аксиома 5. [20] Референтни експеримент:

$$x_1 p x_r \in A, \forall p, 0 \leq p \leq 1,$$

где

$$x_1 p x_r = \langle p, x_1; 0, x_2; \dots; (1 - p), x_r \rangle.$$

Аксиома 6. [20] **Монотоност.** $x_1 p x_r \succcurlyeq x_1 p' x_r \Leftrightarrow p \geq p'$. Другим речима, што су веће шансе да освоји x_1 , то је јача његова преференција референтне лутрије.

Аксиома 7. [20] **Непрекидност.** $\forall x_i \in X \exists p_i, 0 \leq p_i \leq 1$, такво да

$$x_i \sim x_1 p_i x_r.$$

Теорема 4. [12] Ако преференције доносиоца одлуке на скупу A задовољавају аксиоме 1-7, онда постоји функција корисности u на скупу X за коју је релација $\succcurlyeq$ представљена на следећи начин:

$$x_i \succcurlyeq x_j \Leftrightarrow u(x_i) \geq u(x_j)$$

за било који пар $x_i, x_j \in X$ и

$$\langle p_1, x_1, p_2, x_2, \dots, p_r, x_r \rangle \succcurlyeq \langle p'_1, x_1, p'_2, x_2, \dots, p'_r, x_r \rangle \Leftrightarrow \sum_{i=1}^r p_i u(x_i) \geq \sum_{i=1}^r p'_i u(x_i).$$

за било који пар простих лутрија у A .

Доказ. Нека је $X = (x_1, x_2, \dots, x_r)$ скуп свих исхода. Због аксиоме о комплетности могуће је претпоставити следеће :

$$x_1 \succcurlyeq x_2 \succcurlyeq \dots \succcurlyeq x_r$$

Сада аксиома о нетривијалности гарантује да бар на једном месту важи стриктна преференција, тј. да се може претпоставити следеће :

$$x_1 \succ x_r.$$

Другим речима могуће је утврдити који исход је најбољи, а који најлошији. Тражена функција корисности $u: X \rightarrow [0, 1]$ се конструише на следећи начин :

Неки математички аспекти теорије гласања

- *корак I* : $u(A_r) = 0$ и $u(A_1) = 1$.
- *корак II* : за свако $p \in [0, 1]$ дефинише се лутрија $L(p) = pA_1 + (1 - p)A_r$ (очигледно $L(0) \sim A_r$, $L(1) \sim A_1$).
- *корак III* : аксиома о непрекидности дозвољава да за сваки исход x_i постоји $g_i \in [0, 1]$ тако да је $L(g_i) \sim x_i$ и $1 = g_1 \geq g_2 \geq \dots \geq g_r = 0$.
- *корак IV* : $u(x_i) = g_i$.

Очигледно, наведена еквиваленција важи, а вредност

$$\sum_{i=1}^r p_i u(x_i)$$

је очекивана корисност лутрије $L = (p_1, x_1, p_2, x_2, \dots, p_r, x_r)$ у ознаци $E(u(L))$. $\square$

Напомена. Јасно ако су L и M две лутрије важи следеће :

$$L > M \Leftrightarrow E(u(L)) > E(u(M)).$$

Први услов у теорему показује да је u функција поретка на скупу награда X . Други услов показује да функција u има особину очекиване корисности кад се употребљава за поређење простих лутрија [20]. Исходи лутрије могу бити новчане вредности и тада се добија очекивана новчана вредност лутрије која је представљена као сума производа датог исхода и његове вероватноће. Међутим, много чешће се посматра корисност исхода $u(x_i), i = 1, 2, \dots, r$, те се тада посматра очекивана корисност лутрије $\sum_{i=1}^r p_i u(x_i)$.

1.2.2. Аверзија према ризику

Дефиниција 11. [10] Функција $u: X \rightarrow \mathbb{R}$ је конкавна ако важи:

$$\forall x, y \in X, x \neq y, \forall \alpha \in [0, 1], u(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \alpha u(x) + (1 - \alpha)u(y).$$

Конкавност функције корисности је повезана са ризиком. Да би се ризик појаснио, најлакше га је повезати са већ поменутим лутријама. Од сваке лутрије се очекује одређена сума новца као добитак.

Нека је очекивана новчана вредност

$$E(X) = \begin{cases} \sum_{i=1}^r p(x_i)x_i, & \text{ако је } X \text{ коначан} \\ \int_X p(x)x dx, & \text{иначе,} \end{cases}$$

а очекивана корисност

$$E(u(X)) = \begin{cases} \sum_{i=1}^r p(x_i)u(x_i), & \text{ако је } X \text{ коначан} \\ \int_X p(x)u(x)dx, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Нека је x_c – новчана вредност коју доносиоц одлуке улаже на лутрију [26].

Ризик премија за неку лутрију $\pi = E(X) - x_c$, видети [26].

Није свако спреман ни да ризикује. Склоност ка ризику се може приказати помоћу функције корисности. Степен аверзије према ризику мери се Ероу – Пратовим коефицијентом апсолутне ризик – аверзије:

$$r(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} = \frac{d^2u}{dx^2} / \frac{du}{dx},$$

претпостављајући да је функција корисности два пута диференцијабилна [26].

Надаље, ако је $u_1 = \alpha u_2 + \beta$, за неко $\alpha > 0$, онда је

$$\frac{du_1}{dx} = \alpha \frac{du_2}{dx}$$

и

$$\frac{d^2u_1}{dx^2} = \alpha \frac{d^2u_2}{dx^2}.$$

Одатле је $r_1 = r_2$.

Количник $\frac{du^2}{dx^2}$ је негативан за конкавне функције, нула за линеарне функције и позитиван за конвексне функције, а $\frac{du}{dx}$ је позитиван уз претпоставку да је функција корисности строго растућа. Према томе је

$r(x) > 0, \forall x \Rightarrow$ аверзија према ризику,

$r(x) = 0, \forall x \Rightarrow$ ризик неутралан,

$r(x) < 0, \forall x \Rightarrow$ склоност ка ризику [26].

Теорема 5. (Прат [26]) Нека су u_1 и u_2 две функције корисности. За било коју лутрију нека је π_i ризик премија дата са $u_i, i=1, 2$. Онда

$$r_1(x) > r_2(x), \forall x \Rightarrow \pi_1 > \pi_2.$$

Ова теорема говори да је први избор ризичнији од другог избора, али да доноси већу премију.

Наредна теорема из [15] даје форму познате Јенсенове⁵ неједнакости која има примену у теорији корисности, тачније при анализи понашања доносиоца одлуке спрам ризика.

Теорема 6. [15] *Ако је $u(x)$ конвексна функција и ако је X случајна променљива онда је очекивана корисност већа или једнака са очекиваном вредношћу*

$$E[u(X)] \geq u(E[X]),$$

са једнакошћу ако и само ако је $u(x)$ је линеарна у односу на X или $var(X) = 0$.

Из Јенсенове неједнакости следи за конкавну функцију корисности :

$$E[u(w - X)] \geq u(E[w - X]) = u(w - E[X]), \quad (1)$$

где w представља одређену вредност коју доносиоц одлуке жели осигурати [15]. Према томе (1) јесте аверзија према ризику, при чему је очекивана корисност од $(w - X)$ већа од очекиване вредности. Доносиоц одлуке преферира да плати фиксни износ $E(X)$ у односу на износ ризика X .

Пример 1. [15] Претпоставља се да доносиоц одлуке треба да осигура нешто вредности w од губитка X . Поставља се питање колико је спреман да плати то осигурање. Нека су μ и σ^2 средња вредност и дисперзија за губитак X .

Користећи Тејлоров развој другог реда на функцији корисности u у $w - \mu$, добија се

$$u(w - X) \approx u(w - \mu) + u'(w - \mu)(\mu - X) + \frac{1}{2}u''(w - \mu)(\mu - X)^2.$$

Очекивана корисност $u(w - \mu)$ дата је са

$$E[u(w - X)] \approx E[u(w - \mu) + (\mu - X)u'(w - \mu) + \frac{1}{2}(\mu - X)^2u''(w - \mu)].$$

Након пар корака, долази се до

$$E[u(w - X)] \approx u(w - \mu) + \frac{1}{2}\sigma^2u''(w - \mu).$$

Тејлоров развој на функцију са десне стране једначине (1) дат је са

$$u(w - P^{max}) \approx u(w - \mu) + (\mu - P^{max})u'(w - \mu),$$

где је P^{max} максимална премија на коју доносилац одлуке пристаје.

Сада се из претходне две једнакости добија

⁵ Johan Jensen (1859 – 1925) Дански математичар и инжењер.

Неки математички аспекти теорије гласања

$$u(w - \mu) + \frac{1}{2}\sigma^2 u''(w - \mu) \approx u(w - \mu) + (\mu - P^{max})u'(w - \mu).$$

Након неколико корака долази се до

$$P^{max} \approx \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{u''(w - \mu)}{u'(w - \mu)}$$

где је коефицијент аверзије према ризику $r(w - \mu)$ функције корисности u за $w - \mu$ дат са

$$r(w - \mu) = -\frac{u''(w - \mu)}{u'(w - \mu)}.$$

$$P^{max} \approx \mu + \frac{1}{2}r(w - \mu)\sigma^2.$$

Из последње једанкости се може закључити да ако осигурање има већи коефицијент аверзије према ризику онда ће и премија бити већа.

2. Релативност избора

Велики део овог поглавља се ослања на [8], [18], [21] и [22]. Постојање избора није увек најбољи начин да се дође до најбољег решења. Сама могућност да бирамо, и будемо бирани понекад може имати отежавајућу околност, или донети бреме тешких одлука. Појединце могућност избора доводи у бесконачну дилему, тако да избор увек радо уступају другима.

У различитим изборним процесима се користе различита средства у циљу поспешивања ових процеса. Ови процеси се разликују од дела света у коме се одржавају, али, такође, сусрећу се са различитим проблемима. Међутим, ови процеси имају доста заједничких елемената од самог начина одвијања до актера који у њему учествују.

На жалост, изборни резултати често не осликавају у потпуности вољу гласача. Ако се изборни систем посматра као машинерија, а сам гласач као најмањи и у исто време најбитнији део ње, логичан резултат таквог процеса ће бити оно како је *неко* замислио да буде. Поред тога, намеће се и питање колико гласачи уистину познају гласачку процедуру и колико су разјашњени сами резултати те процедуре. Заправо, изборни резултати не морају да значе оно што људи најчешће мисли да значе. Ако се изборни систем посматра као машинерија, јасно се уочава да сам исход неће представљати вољу гласача, већ зависи од изборне процедуре.

Како изборни резултати утичу на наш живот, потребно је направити неке промене када је реч о изборној процедури, али и целокупном начину гласања. Очигледно је да се најбоље промене, промене које ће довести до побољшања изборног процеса, повећања тачности, самим тим и легитимности избора, могу постићи употребом различитих математичких алата.

Потребно је подробније објаснити појмове као што су Изборни колеџ и политичка моћ. Прва важна чињеница је суштинска разлика између нашег председничког избора и избора у једној многољуднијој земљи, САД – у. Док је код нас заступљено такозвано директно гласање у коме сваки појединац доноси глас једнаке пропорционалности, у САД – у наилазимо на дијаметрално супротну процедуру гласања. Наиме, кључну улогу у целом гласању игра Изборни колеџ. Изборни колеџ се састоји од државних електора изабраних од стране становника сваке државе. Исто тако једна држава има број електора сразмеран броју становника, што би значило да председника не бирају директно становници, већ електори као њихови представници. Дакле, електори могу да гласају како они сами желе, без обзира на вољу оних који су га изабрали. Имајући такво стање у виду, долази се до закључка да мање државе имају већу политичку моћ од већих. Разлика у политичкој моћи се види у нелогичној

несразмерности односа броја становника и количника броја становника и електора. То нам говори да становници из мањих држава имају много већи утицај на избор председника од грађана већих држава.

2.1. Функција избора

Често се, размишљајући о политици и њеној моћи, намеће питање да ли се она као таква може уопште мерити. Следи једноставан пример конструисан по угледу на [8].

Пример 2. Породица која се састоји од пет чланова жели да гледа филм. У избору се налази *Birdmen* и *Whiplash*. Филм који добије већински број гласова ће бити изабран.

У овом примеру скуп гласача X чине чланови породице и његова кардиналност је пет. Са S је означен скуп чланове породице који желе да гледају исти филм.

Сада је могуће поставити функцију избора на следећи начин:

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } |S| \geq 3 \\ 0, & \text{ако је } |S| < 3. \end{cases}$$

Јасно је да ће победити онај филм који има више од половине броја чланова породице. Сада, вектор гласања је дводимензиони и прва компонента је број гласова које је добио први филм, а другу компоненту чини број гласова које је добио други филм.

Претходни пример је могуће формализовати следећом дефиницијом.

Дефиниција 12. [8] Нека је X скуп гласача, P – фамилија свих могућих коалиција укључујући и празан скуп; S произвољна коалиција. Тада је функција избора, у ознаци v , пресликавање:

$$v: P \rightarrow \{0,1\}$$

дато са

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } |S| \text{ веће од било које друге коалиције} \\ 0, & \text{ако постоји већа коалиција.} \end{cases}$$

Очигледно, побеђује она алтернатива коју заступа најбројнија коалиција. Могуће је формирати и вектор одлуке, при чему димензија вектора одговара броју понуђених алтернатива, а компоненте су кардиналности коалиција које заступају одређене алтернативе.

Неки математички аспекти теорије гласања

Да би се што боље илустровао проблем политичке моћи, могуће је увести функцију избора на нешто другачији начин. Претпоставимо да су гласачи распоређени у тимове (коалиције), те претпоставимо да је сада

$$v: P \rightarrow R,$$

при чему је P скуп сих тимова, а R скуп бодова који тимови могу да освоје. Дакле, $v(S)$ је број бодова које тим S осваја. Приказана функција открива добитке, односно губитке, или мане, односно предности сваког тима. Поставља се питање колика је (политичка) моћ једне особе која треба до одлучи ком тиму ће се прикључити. Овај проблем је илустрован наредним једноставним примером.

Пример 3. Примера ради, ако постоји пет тимова, логично се намеће питање ком тиму је најбоље да се придружи. Пратећи неки тим, очекује се да ће да оствари 10 победа, тј. $v(S) = 10$. Уколико се том тиму придружи нови, доказано добар, учесник, онда се од тима очекује 15 победа, тј. пет победа више, $v(S \cup \{j\}) = 15$, где је j нови учесник. Тада ће разлика $v(S \cup \{j\}) - v(S) = 15 - 10 = 5$ означавати вредност коју нови учесник доприноси тиму.

Да би се проценила тачна предност коју он заиста доноси тиму, потребно је да се решавалац овог проблема придружи различитим тимовима без обзира на то да ли су они добри или лоши. На тај начин одредиће се колико његово придруживање заиста вреди, тј. укупна моћ што се може одредити кроз већ поменућу формулу $v(S \cup \{j\}) - v(S)$.

Релативни значај сваког појединца се може објаснити помоћу претходног примера. Потребно је стога увести множиоце λ_s , који управо представљају тај релативни значај. Једна од могућности је да λ_s буде фиксна реципрочна вредност броја играча у некој коалицији, тј.

$$\lambda_s = \frac{1}{|S|}.$$

Дефиниција 13. [8] За множиоце λ_s индекс моћи играча j дат је са:

$$p_j = \sum_{S \in P(j)} \lambda_{S \cup j} [v(S \cup j) - v(S)],$$

где је са $P(j)$ означен скуп свих коалиција у којима се играч j не налази.

Из формуле се читава да што је веће p_j то значи да је вредност играча j већа.

Претходни примери дати су у циљу што бољег разумевања и осветљавања појма политичке моћи. Битно је да се нагласи да су дати примери показатељи да се политичка моћ ипак може мерити. Дакле, коначна формула на крају је кључ у коме

лежи одговор и објашњење на који начин се до тога може доћи, тј. на који начин се може измерити политичка моћ. Самом својом необичношћу, овај пример само је показатељ да математика, иако врло егзактна наука, неке наизглед и сувопарна и непримењива, крије мноштво занимљивости и простора за њену креативну примену.

2.2. Изборни колеџ

Само постојање Изборног колеџа подстиче на размишљање о његовим добрим и лошим странама. Свакако оно што ће већина људи уочити су његове незанемарљиве, наизглед баналне мане. У наставку рада биће предочене најважније од њих. Лоша страна овог система, као што је већ поменуто, огледа се у томе што у већини случајева сам избор није воља гласача него последица машинерије. Чињеница да су многе истакнуте личности јавно предложиле укидање Изборног колеџа, као и њихов лични став о томе говори о честим последицама које су се догађале у прошлости. Као и сваки став у политици и овај је имао присталице и оне који су мислили другачије. С обзиром да се Изборни колеџ састоји из 538 електора, могуће је поставити функцију:

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } |S| \geq 270 \\ 0, & \text{ако је } |S| < 269 \end{cases}$$

која представља предности и мане овог система. Јасно је да је победио кандидат коалиције S ако је кардиналност већа од половине укупног броја електора.

Уколико је победа убедљива, тј. број гласова драстично већи у односу на противника, мане Изборног колеџа ће остати не приметне. У том случају победник ће свакако представљати вољу гласача. Недостаци се могу најпре уочити у измењеној ситуацији, тј. када је резултат гласања неуведљива и тесна победа. Снага једне државе зависи од тренутка у ком се броји њен глас. Пример за то запажа се у подацима из 2000. године, када је Буш победио са 271 електоралним гласом, значи са само једним гласом изнад постављене границе. Што значи да су мање државе имале три пута већи утицај од већих као што је нпр. Флорида и да је грешка била то што је изборна кампања била концентрисана на веће земље, а не на ове мале. Тако да се код тесних победа манипулисање и малверзација може најлакше спровести кроз мале државе (видети [8]).

Пример 4. У једном од најгледанијих квизова на свету, у квизу *Милионер*, препознаје се, такође, овај систем. Да би учесник освојио милион динара, потребно је да до тог циља дође тако што ће тачно одговорити на петнаест постављених питања. На том путу има право да искористи помоћ пријатеља. Уколико стигне до четрнаестог питања и тачно одговори на свако, на ред долази последње, петнаесто питање, за милион динара. Ризикујући да остане на загарантованој суми, која је знатно мања од онога што тренутно има, 500 000 динара, учесник отвара последње питање у низу. С обзиром да то није његова ближа област, такмичар се одлучује за помоћ пријатеља. Како је

пријатељ тачно одговорио на питање, учесник успева да заради милион динара и да однесе победу. Ово је класичан пример колики је утицај споредних играча, као што је случај и са мањим државама, јер да није било тог само једног одговора, учесник не би постао милионер. Свакако да је једно питање у односу на осталих четрнаест наизглед занемарљиво, али, најважније, пресудно.

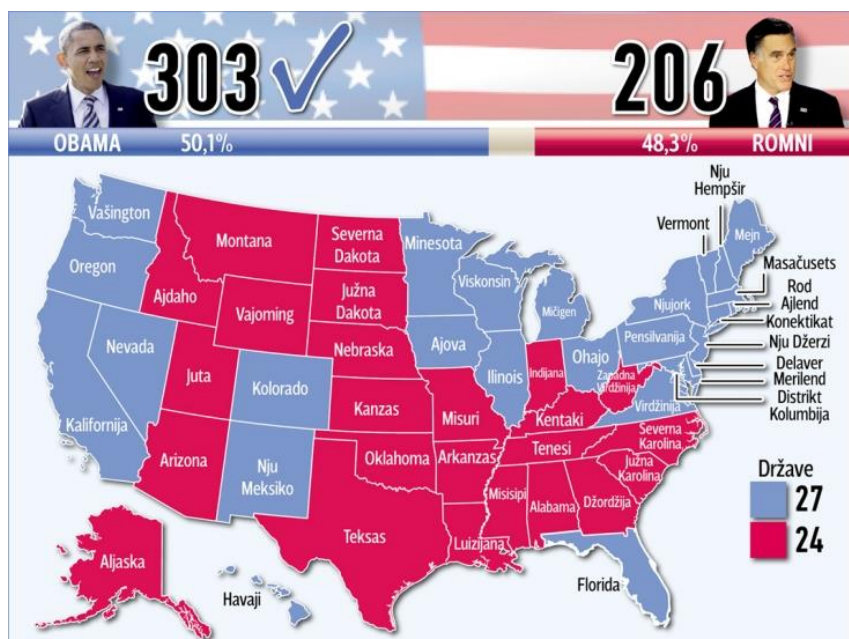
Пример 5. Иако је пион у шаху најслабија фигура на табли, у исто време је и једина која може да врати краљицу у игру, тако и сваки велики политички играч треба да зна да највећи утицај могу имати најмање државе.

Када би се Изборни колеџ заиста укинуо, мање државе би изгубиле скоро сваку улогу у одлучивању и избору како председника, тако и многих других одлука. У случају директног гласања њихов утицај не би могао бити пресудан и вероватно би били занемарени у великој мери. Ипак, директно гласање је и данас најзаступљеније на свету, и многим је управо такво главна тежња којој стреме. Тешко је изабрати онај прави поступак гласања, јер ће сваки носити са собом и предности и мане.

Пример 6.⁶ Председнички избори у САД – у из 2008. године код већине људи изазивају запитаност како је баш Обама победио те године, као и поново 2012. године. Суштина је управо у овој изборној процедури и постојању Изборног колеџа. Дакле, председника не бирају директно гласачи, као што је речено, већ електори. Електори се бирају из педесет држава и из округа Колумбије. Највише електора има Колумбија, док Аљаска и Монтана имају само по три електора. Електори у 30 држава морају да изражавају вољу гласача, док у осталим то не мора да буде случај. Државе у којим ниједан кандидат не освоји већину гласова, које могу да обезбеде већину у Изборном колеџу су такозване „свинг државе“.

Како мање државе имају већи утицај и тежину гласања, сматра се да је 2012. године Обама управо захваљујући њима и победио. Државе које су одиграле кључну улогу су Охајо и Вирџинија. У њима је Обама имао свега неколико десетина хиљада гласова у односу на противкандидата. Обама је имао 303 електорска гласа, а Ромни 206 од укупно 538 електоралних гласова.

⁶ Консултовано <http://www.blic.rs/>



Слика 1.⁶ Избори у САД-у 2012. године

На слици 1. је приказан однос гласова које су добили ови кандидати. Обамини гласови су обојени плавом бојом, а Ромнијеви у црвено. Овако сједињени резултати на илустративан начин приказују неколико ствари на које треба обратити пажњу. Једна од њих је та да је Обама однео гласове из много мањих држава, за разлику од Ромнија. Оваква поставка одмах намеће питање да ли је важније победити у мањим или многољуднијим државама. У САД – у, већ је наглашено, мале државе играју много већу улогу, као и сада, док се велике, свакако, могу сматрати већином.

Иако је Обама победио са прилично убедљивом разликом у електоралним гласовима, разлика у укупном броју гласова је драстично мања, што говори о предности ове изборне процедуре која је донела победу Обама и мани која је наштетила Ромнију. Победу су му донеле само три државе.

Ово је само пример колико овакав систем може бити незахвалан, али свакако не искључује могућност да тај избор управо представља вољу гласача.

2.3. Преглед процедура

У овом делу рада дат је преглед различитих процедуре које су есенцијалне за процес гласања и које су илустроване великим бројем у циљу бољег разумевања. Такође, наредни примери корисни су као испомоћ при одлучивању која од ових изборних процедура најпогоднија за примену у датој ситуацији. Ако се, примера ради, организује избор за директора школе, председника одељења, кандидата за неко радно место и слично, најбоље би било да се у тој ситуацији одабере процедура која је у исто време прикладна и која ће свакако дати резултат који осликава што реалнију

ситуацију, а не последицу изборног поступка. Литература консултован при изради овог поглавља је [8], [14], [16], [18], [23] и [24].

2.3.1. Други круг гласања

Други круг гласања се може сматрати подскупом већинског изборног система, о коме је већ било речи. Ова метода је настала у тежњи како би био приказан исправнији одраз воље гласача. Другом кругу гласања приступају многи политичари, како због извесних циљева, тако и због правичнијег исхода до којег се долази. У наставку текста биће детаљније појашњене, кроз конкретне примере, све битније одлике ове изборне процедуре. Много пута у прошлости и данас је коришћен други круг гласања, као могуће огледало жеље гласача. Једна од држава које примењује такву методу је Француска.

Један од бројних историјских примера који карактерише и осликава двокружни већински изборни систем су председнички избори из 1981. године у Француској.

Француска је неколико пута мењала изборни систем, користила је пропорционални, а после њега већински двокружни систем. У првом кругу гласања, борба се водила унутар коалиција. Дакле, прво се гласало за представника левнице Социјалиста или Комуниста, и за представника деснице (УДФ или РПР). Након завршеног гласања у првом кругу, приступало се другом кругу, у који улазе по један кандидат изабран од сваке стране, кандидат левнице и кандидат деснице. За председника се бирао победник из другог круга (видети [21]).

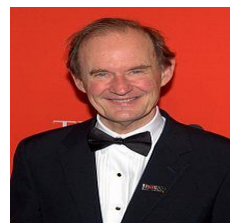
Занимљива чињеница након победе социјалиста из истих избора, јесте та што је њихов лидер, Франсоа Митеран, 1985. године одлучио да промени изборни систем који му је донео победу. Чак и лаику, ово ће бити врло чудновата одлука. Јасно је, реч је о манипулацији. Те године Франсоа уводи пропорционални систем и опет односи победу. Разлог лежи у томе што пропорционални систем повећава број партија, док их већински редукује (видети [21]).

Честа појава је, како код нас, тако и у другим земљама, да се гласа за једног од кандидата због нетрпељивости према другом. Најлошији сценарио би био да се том дуелу придружи трећи неутралан кандидат.



1. David Boies, Gore

VS

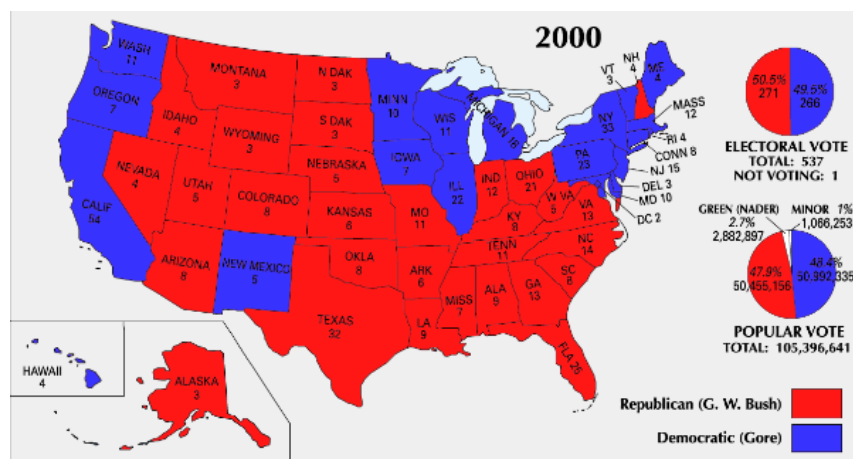


2. Theodore Olson, Bush

Слика 2. [30]

Неки математички аспекти теорије гласања

Пример 7. Можда најреалнији пример је гласање за председника САД – а 2000. године када су кандидати били Буш, Гор и Нејдер као трећи. Одређени део гласова је добио Нејдер, док је остатак подељен између Буша и Гора, који су били главни кандидати за победника. Очекивано мишљење јавности је да ће победу однети Гор, међутим, победник је био Буш. Коначна разлика између њих двојице је била мизерна, због чега је други круг можда био најбоље решење. У том случају победу би сигурно однео Гор, јер је већини оних који су гласали за Нејдера, Гор био дражи од Буша (видети [8]).



Слика 3. [30] Резултати гласања у САД – у 2000. године

Други круг се не одржава накнадно, већ гласачи током гласања бирају председника, али и кандидата за кога би гласали да нема њиховог првог избора. Могуће је навести више од два кандидата. Овакав начин избора председника се данас примењује у неколико држава као што је и Ирска.

У државама у којима влада демократија, између осталог и у нашој земљи, немогуће је ограничити број кандидата, као ни ко ће се кандидовати. Значи, када постоји већи број кандидата, други круг је прави избор јер пружа увид која два кандидата имају највећи број гласова и сам однос броја гласова између кандидата. Примењује се у ситуацијама када не постоји апсолутна већина.

Општепознато је да је ретко када победник избора убедљиво изгласан, посебно када су у питању председнички избори, што увек резултира тесном изборничком трком и минијатурном разликом. Како победник није одабран у првом кругу, организује се други круг гласања у коме се, свакако, услед сведеног избора на само два кандидата, добија коначни победник.

У претходном примеру први круг би показао колику подршку има Нејдер, док би други одлучио ко ће бити председник. Као и све друге процедуре и ова процедура има многе мане. Једна од главних мана је да неко ко је био много лошији од првог, у другом кругу, након изbacивања из надметања најлошијег играча, може и да победи, но о томе ће нешто касније бити више речи.

2.3.2. Класификација резултата

Проблем класификације кандидата се најлакше може објаснити путем поступка оцењивања. Потребно је одредити адекватан начин одређивања најбољег, односно најлошијег ученика, као и место другопласираног, трећепласираног, итд. Класичан начин, најпримењиванији у пракси, јесте да се рачунање успеха током школске године изводи уз помоћ просте аритметичке средине, $\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}$. Поставља се питање да ли је овај начин најприкладнији и да ли баш он показује и истиче најбоље ученике. Да би се лакше одредила валидност овог система, у даљем раду биће представљено неколико начина који се примењују у свету и успоставиће се извесна паралела између њих.

За што боље разумевање следећег примера, у раду ће бити коришћена класична скала оцена:

- ❖ 5 – одличан,
- ❖ 4 – врлодобар,
- ❖ 3 – добар,
- ❖ 2 – довољан,
- ❖ 1 – недовољан.

Један од начина је да се ученици класификују по броју петица, тј. да се сабирају само петице, док ће остале оцене бити занемарене. Тада се може догодити да ученик са 6 петица и 4 двојке буде бољи од ученика који има 5 петица и 4 четворке. Мана оваквог начина класификације је очигледна, док у исто време треба размислити да ли је битно да ученик буде приближно добар у свим предметима или најбољи у већини.

Овакав начин би највероватније био добар када би петицу било незамисливо тешко добити, а, можда, чак ни тада не би био право решење. Овај начин класификовања може се упоредити са директним гласањем, јер као што се броји само колико ученик има петица, тако се и сагледава само ко има највећи број гласова. Осим што је у овом случају небитан податак ко је заузео друго, ко треће место, и сл.

Пример 8. Недавно је у једној основној школи из Лознице организовано такмичење *Ја имам талент* и у финалу су се нашла три ученика. Комисију су представљали наставници школе, којих је било пет. Сваки наставник је давао оцене 1, 2, 3 сваком од три ученика. Победник је био онај који је имао највише оцена 1. Такво гласање је приказано у следећој табели:

	Сања	Вања	Драгана	Зорица	Владица
Вук	1	1	1	3	3
Растко	2	2	2	1	1

Неки математички аспекти теорије гласања

Ања	3	3	3	2	2
-----	---	---	---	---	---

Табела 1. Ја имам таленат

Види се из приложене табеле да ће са оваквим начином гласања победник бити Вук, који има три оцене 1 и две оцене 3. Другопласирани је Растко, који има две оцене 1 и три оцене 2. Проблем оваквог начина огледа се у томе што је укупан резултат другопласираног, узимајући у обзир саме оцене, бољи од победника јер Растко нема ниједну оцмену 3. Може се рећи да је оваква изборна процедура лоша. Да је одлучено пре гласања да се сабирају само најгоре оцене, што би довело до тога да се елиминацијом избаце најлошије рангирани кандидати, исход би био сасвим другачији. У том случају прво би била елиминисана Ања, па Вук, а самим тим би победник онда био Растко.

2.3.3. Елиминационо гласање

Некада је лакше простом елиминацијом кандидата доћи до победника, него гласањем *за*. Овакав начин гласања се најчешће примењује када је реч о кандидатима за неко радно место. Најпре се кандидати тестирају, а затим се, на основу резултата тестова, најлошији кандидати одбацује. На пример, у првом кругу могуће је да се елиминишу сви они кандидати који не знају енглески језик, па се и даље елиминације врше на основу истог модела. Коначно, добија се кандидат који је најмање лош. Питање је само колико је елиминационо гласање репрезентативно.

2.3.4. Гласање одобравањем

Гласање одобравањем дозвољава гласачу да одобри онолико кандидата колико он жели, који ће након избора постати равноправни. Пример за ово присутан је у просвети – случај када професори без икаквог договора о критеријуму, бирају ученике за Ученички парламент. Из сваког разреда се бирају по два ученика, која ће бити представници парламента. Професор је тај који може да изабере два ученика по својој вољи. Дакле, може изабрати ученике који имају најбоље оцене или пак оне који имају најлошије оцене како би их стимулисао. Тада они, као чланови Ученичког парламента, постају равноправни у таквом систему и у доношењу одлука унутар њега.

Овај пример би представљао комбинацију већине претходно наведених јер су изабрани ученици са најлошијим оценама као и ученици са најбољим оценама, али и они који су остваривали просечне резултате у дотадашњем школовању.. Очигледно је да приступ професор бира може довести до проблематичних резултата, па је препоручљиво избегавати га. Једини прави избор у овом случају, који се не може довести у питање, јесте избор ученика са најбољим оценама. Дакле, сваки резултат добијен коришћењем гласања одобравањем се може проблематизовати у смислу исправности и правичности, осим ако није једногласно изгласан.

2.3.5. Кумулативно гласање

Кумулативно гласање се користи у већинском изборном систему са вишемандатним изборним јединицама и у пропорционалном изборном систему. То је таква изборна процедура где сваки гласач добија број поена, а на њему је како ће их распоредити.

Према томе, то је још једна од техника гласања. Бирачу стоји на располагању онолико гласова колико се посланика бира. Он је слободан да расположиве гласове расподели кандидатима према сопственом избору. Све расположиве гласове бирач може концентрисати (кумулирати) на само једнога од кандидата или их може распоредити међу кандидатима. На пример, бирач добије два гласа и додељује их кандидатима онако како жели. Може да да оба своја поена једном кандидату или да сваком да по један поен.

Ако се то примени на класификације рангирања ученика, кумулативно гласање би значило да сваки професор додељује 4 поена за оцену пет, 3 поена за оцену четири, 2 поена за оцену три, 1 поен за двојку и коначно 0 поена за јединицу. Системом оцењивања са четири поена за сваког ученика ће се срачунати добијени број поена и на тај начин ће бити одабран најбољи, као и најлошији ученик.

2.3.6. Борда рачун



Слика 4. [30]

Жан – Шарл де Борда рођен је у граду Дакс у југозападној Француској (Jean Charles de Borda 4. мај 1733. – 19. фебруар 1799.). Његов отац је желео да он постане судија, међутим Бордине жеље су биле другачије и отац му је то дозволио. Борда је почео каријеру као математичар у војсци. Године 1770. Борда је формулисао преференцијални систем гласања, који се уобичајено назива Борда рачун. Борда је био и математичар и физичар, бавио се политичким наукама. Сматрао је да изборна процедура, која се користила тада, није добра и радио је на њеном побољшању (видети [24]).

Преференцијални систем гласања је један од начина гласања у већинском систему. Бирачи гласају доделом бодова. Бројем бодова који додељују кандидатима бирачи исказују своје вредновање кандидата и одређују њихово место на ранг листи кандидата. Преференцијално гласање има два облика. Први је додела бодова по члановима аритметичког низа (1, 2, 3, 4, 5, ..., N). Други је додела бодова по члановима геометријског низа (1, 2, 4, 8, 16, ..., N). За разлику од алтернативног гласања, преференцијално гласање налаже да бирач свакоме од кандидата додели бодове не изостављајући ниједнога од кандидата. Бирач не може доделити бодове само једном или неколицини кандидата, већ свакоме од кандидата. У противном овај систем избора не би се разликовао од релативне већине (видети [8], [23]).

Неки математички аспекти теорије гласања

Борда рачун функционише тако да када има n кандидата он i – том кандидату додељује $n - i$ бодова. Ако постоји три кандидата, свака особа рангира опцију према својим преференцијама и бројем означава поредак у свом систему рангирања, на пример 1 за прво место, најбољу опцију, 2 за друго место, итд. После тога сабирају се резултати за сваку опцију да би се одредио укупан резултат. Друштвено најбоља опција је она са најнижим резултатом (може и обрнуто).

Пример 9. Када би се Бордин рачун применио на наведени пример такмичења *Ја имам таленат*, сваки глас би носио одређен број поена, тачније 0, 1, 2, за оцене 1, 2, 3. Табела би имала следећи изглед:

	Сања	Вања	Драгана	Зорица	Владица
Вук	0	0	0	2	2
Растко	1	1	1	0	0
Ања	2	2	2	1	1

Табела 2. Ја имам таленат

Када се саберу освојени бодови сваког учесника, јасно је да би Вук имао 4 бода, Растко 3, а Ања 8 бодова. Према Бординој методи, победник је онај који има најмање поена, а то је у овом случају Растко. Самим тим исходује да би оваквим начином избора најбољег кандидата победник био други учесник, за разлику од победника где су се бројала само прва места. Из овога произилази да је, можда, овакав начин гласања, ипак, мало бољи изборни критеријум, јер узима у обзир сваки глас, а не само први.

2.3.7. Кондорсеов победник

Када постоји више од две опције, гласање се може обавити помоћу бинарне методе. На пример, када учествује три кандидата K , L , M , прво се гласа између K и L , а потом између победника и M .

Кондорсе (Mari – Žan – Antoan – Nikolas de Karitat Kondorse 17. септембар 1743. г. – 28. март 1794. г.) био је француски политичар, математичар и дао је велике доприносе у области политичких наука. Његово најважније дело говори о вероватноћи и филозофији математике. Најважнији рад из ове области био је Есеј о примени анализе на вероватноћу већинских одлука. Ово дело је било од немерљивог значаја у развоју теорије вероватноће. Познат је по Кондорсеовом парадоксу који истиче да је могуће да већина преферира могућност A у односу на могућност B , као и да преферира могућност B у односу на C , истовремено преферирајући могућност C у односу на могућност A , тј.

$$A > B \text{ и } B > C \text{ али } C > A,$$

(видети [18]).

Једна је од метода која се примењује на прерачунавање гласова у мандате у већинском изборном систему са појединачним кандидовањем и алтернативним гласањем. Кондорсеова метода укључује следећи поступак. Из групе кандидата који конкуришу на посланичко место, издвајају се кандидати у паровима (по два) и за сваки пар израчунавају се први и други алтернативни гласови. Колико парова кандидата ће бити зависи од броја кандидата који се боре за посланичко место.

Оваквим сукцесивним рачунањем утврђује се који међу кандидатима има највећи број првих алтернативних гласова. За сваки пар кандидата израчунава се предност једног кандидата у односу на другог. Остали кандидати искључују се из обрачунавања. Њихови гласови дати као други глас (алтернативни глас) додељују се двојици кандидата који чине пар у обрачуну.

Значи, Кондорсеов метод подразумева да се гласа између свих могућих парова. Кондорсеов победник је онај који победи све друге. Аналогно томе, Кондорсеов губитник је особа која изгуби од свих других. Често се пак дешава ситуација када не постоји Кондорсеов победник. Добар пример за то су групни турнири где се врло ретко дешава да једна победи све остале.

Кондорсеов победник је углавном ирационална одлука, чак и када су гласачи рационални.

Пример 10. [22] Гласачи су чланови једне породице који су гласали коју игру више преферирају ($\succ$) као што је приказано у табели 3.

	Чланови		
	Милан	Емилија	Милена
Преференције	Асоцијације	Карте	Јамб
	Карте	Јамб	Асоцијације
	Јамб	Асоцијације	Карте

Табела 3. Преференције породице

Из табеле се закључује да Милан и Милена преферирају више асоцијације од карте, што значи Асоцијације $\succ$ Карте. А Емилија и Милена преферирају више јамб од асоцијација, односно Јамб $\succ$ Асоцијације. Али, када се упореде карте и јамб, побеђују карте, односно Карте $\succ$ Јамб. Према томе,

Асоцијације $\succ$ Карте $\succ$ Јамб $\succ$ Асоцијације.

Закључак је да нема групног избора јер групни избор вечито кружи између три

опције. У сваком следећем кораку гласања победник може да буде побеђен и без постизања решења или равнотеже, односно победника добијеног гласањем. Парадокс је у томе што индивидуалне транзитивне преференције дају нетранзитивне групне или друштвене преференције.

2.3.8. Кенет Ероу



Слика 5. [30]

Врло важан део овог мастер рада ће се ослањати на радове и успехе великог америчког економисте, Кенета Ероуа (Kenneth Arrow, Њујорк, 23. август 1921. године). Дипломирао је друштвене науке, а магистрирао математику и докторирао економију 1951. године на Колумбији. Био је један од водећих економских теоретичара 20. века. Његови доприноси су били на пољима: теорија друштвеног избора, теорија опште равнотеже, економика информација и теорија привредног раста (видети [8]).

Све претходно наведене изборне процедуре испољавају различите мане у различитим ситуацијама. Трагајући за савршеном, на путу да се пронађе најпримеренија метода гласања, издвојио се Кенет Ероу. Многи економисти и политичари су мислили да је у томе успео и подржавали су његов резултат. Ероу је добио Нобелову награду за економију 1972. године, што је привукло пажњу ширег круга истраживача из домена математичке економије.

Ероу је на самом почетку каријере доказао својом Теоремом о немогућности да није могуће пронаћи механизам одлучивања који би показао вољу гласача на основу индивидуалних преферирања, тј. који не би био диктаторски. Може се користити и синоним – немогућност постојања функције друштвеног благостања.

Теорема немогућности се у математици врло лако може објаснити кроз свакодневне, општепознате и свима блиске примере. Посматрајући троугао са страницама $a = 3$, $b = 2$ и $c = 6$, чија конструкција није могућа јер није задовољен основни услов да је $a + b$ веће од c . Дакле, немогуће је конструисати троугао са страницама 2, 3 и 6 јер постоји противречност услова, и тиме је теорема немогућности задовољена.

Уколико се изборна процедура посматра као пресликавање, Ероуова теорема може се поделити на следећи начин:

Домен – простор жеље гласача – индивидуалне преференције,

Кодомен – простор друштвених исхода – листе преференције друштва.

Како домен осликава жеље гласача, могуће је претпоставити два могућа начина одлучивања. У првом случају, ако се претпостави да је број кандидата два, сваки гласач ће гласати за једног од њих. Ово је најлакши случај јер је сигурно да је један кандидат допадљивији од другог. Ако се у гласање убади и трећи кандидат као избор, гласачи ће имати тежу одлуку. При одлуци, ма каква она била, кандидати ће на основу

преференције бити поређани у неки низ. На пример, кандидат А је први избор, кандидат В други и кандидат С трећи. Лако се закључује да је А допадљивији од В, као и да је А допадљивији од С (видети [1]).

Други случај је када је непознато како ће гласач рангирати кандидате.

Кодомен је, како је већ напоменуто, простор друштвених исхода, дакле, он ће представљати транзитиван друштвени ранг. Могући су и нерешени исходи јер друштвени ранг не мора бити стриктан.

2.3.8.1. Теорема Ероуа

Потребно је дефинисати неколико појмова пре саме теореме.

Дефиниција 14. [8] Под појмом **профил** за произвољног гласача, у ознаци **р**, подразумева се распоред кандидата по преференцији посматраног гласача.

Пример 11. Ако се бира, на пример, председник студентског парламента, а комисија садржи пет чланова и кандидовало се три кандидата – Иван, Никола и Марко, и уз то три члана комисије имају идентичне профиле **р**, Иван $\succ$ Никола $\succ$ Марко, док друга два члана имају профиле Марко $\succ$ Иван $\succ$ Никола.

Ероуов приступ се састоји у томе да се одреди минимални скуп моралних и логичких услова који процес гласања мора да задовољи. Тај скуп чине следећи услови:

1. Услов ИИА (Независност од ирелевантних алтернатива). Додавањем нових опција не утиче на рангирање старих опција, тј. колективно рангирање старих опција ће остати непромењено. Према томе, овај услов тражи да међусобни однос гласова пара кандидата зависи само од тога како гласачи рангирају та два кандидата. За њихов однос, потпуно је неважно шта гласачи мисле о другим кандидатима.
2. Услов Н (Недиктаторски избор) Колективне преференције не могу да буду одређене на основу преференција једне особе
3. Услов П (Парето услов) Ако сви појединци рангирају све могуће опције на одређени начин, тада и колективне преференције треба да доведу до идентичног рангирања.
4. Услов У (неограничени домен) Методи колективног избора треба да функционишу за сва могућа индивидуална рангирање опција.
5. Услов Т (Транзитивност) Ако група преферира А у односу на В и В у односу на С, тада група не може да преферира С у односу на А.

Процедура колективног избора мора да задовољава свих пет услова (ИИА, Н, П, У, Т) (видети [14] и [27]).

Пример 12. Претпоставимо је да је одабрани редослед Буш $\succ$ Гор $\succ$ Надер. Изборни резултати показују могућност да је мање људи било за Надера, Гор би победио Буша.

Другим речима, појава да мишљење гласача о једном кандидату може да утиче на однос другог пара гласача узрокује многе изборне парадоксе.

Напомена. [8] Парето услов је назван по италијанском инжењеру Вилфреду Парету (Vilfredo Federico Damaso Pareto, 1848 – 1923), који је увео неколико математичких оруђа у економску аналитику. Овај услов је једногласан захтев. Наиме, ако сви гласачи на исти начин рангирају два кандидата, онда би тај заједнички начин рангирања требало да буде и резултат избора.

Пример 13. У претходном примеру са петочланом комисијом, како сви сматрају Ивана бољим кандидатом од Николе, то би требало да буде њихов релативни друштвени ранг. Односно, додавањем нових опција се не утиче на рангирање старих опција, тј. колективно рангирање старих опција ће остати непромењено.

Теорема 7. (Ероу [14]) *Када се бира између више од две опције, тада не постоји процедура колективног одлучивања која ће сигурно задовољавати услове ИИА, Н, П, У, Т.*

Ероу има оригиналан доказ који се због компликованости неће наводити (видети Kelly 1978, Campbell and Kelly 2002, Geanakoplos 2005. и Gaertner 2009.).

Када је успостављен неки однос гласова као коначни резултат већинског система гласања, он се може и променити, ако се, дан пре гласања, деси нека промена или било шта што ће наговорити гласаче да промене одлуку. Како то некад може утицати на резултат гласања, може се закључити да већински систем гласања не задовољава ИИА услов Ероуове теореме. Но, из тога се и намеће питање о испуњености услова ове теореме.

Теорема 8. (Ероу [16]) *Једина процедура која задовољава горе наведених пет услова је диктатура.*

Доказ. [13] *Овај доказ садржи неколико корака, због чега се наводи скица доказа. Претпоставимо да друштвени избор задовољава услов транзитивности, неограничености и ИИА услов, и онда покажемо да то значи да мора постојати гласач чије се индивидуалне преференције увек поклапају са социјалним преференцијама, који је према томе диктатор. Заправо је идеја доказа пронаћи кључног гласача чији ће гласачки листић променити друштвени резултат. Потом се покаже да је тај гласач делимични диктатор. И на крају, се покаже да су сви делимични диктатори, заправо иста особа, тј. да је тај гласач диктатор. □*

Односно, само у диктатури се исход избора слаже са жељама гласача.

Ероуова теорема може бити испуњена само када су испуњени сви њени услови, тј. претходних пет наведених. Свих пет услова могу бити испуњени само када постоји

Неки математички аспекти теорије гласања

потпуна диктатура. С обзиром да је данашње време обележено владом демократије, немогуће је да свих пет постављених услова буду испуњени, тј. бар један од услова неће бити испуњен.

Претходна теорема представља везу између проблема рационалности друштвеног избора са питањем поштовања етичких принципа. Велика Ероуова заслуга је и у томе што је директно применио математичку анализу на формализоване вредносне судове. У новом светлу, појавила се идеја да неки проблеми изборних процедура у демократији јесу заправо логичке природе.

3. Различити исходи избора у зависности од избора процедуре

Циљ почетних поглавља овог мастер рада био је разоткривање мистерије гласања и експлицирање чињенице да коначни исход гласања зависи искључиво од изборне методе, а не од воље гласача, као што већина људи у свету мисли. Промена изборне процедуре доводи до промене резултата. Основе функционисања изборних процедура могу се објаснити помоћу различитих математичких алатки. Да би се што боље изоштрила свест о самим изборима и њиховим последичним резултатима, даље ће у раду бити разлагани и осветљавани ставови великих научника о међусобној зависности изборне процедуре и самог исхода гласања. Сваки човек се, сигурно, бар једном у свом животу сусрео са некаквим обликом гласања, али су ретки они који су мислили да њихов глас неће одлучивати. Управо ће се у овом одељку проблематизовати и проверити једна таква слична ситуација.

Кроз саме до сад наведене примере требало је да се конструише податак о томе ко одлучује победника неког гласања, гласачи или процедура. У наставку ће бити обрађена три примера, и то редоследом којим се повећава број кандидата почевши од три, преко четири и, у последњем примеру, пет кандидата. Следећи примери су инспирисани примерима из [8], страна 34, 35. и 36.

Пример 14. Ученицима једног одељења подељени су гласачки листићи на којима је било понуђено три кандидата са задатком да изаберу једног од њих за председника свог одељења. Сваки гласач требало би да напише сопствену индивидуалну преференцију избора председника одељења. Примењујући различите изборне процедуре, горе поменуте, резултат ће варирати.

У овом гласању за председника одељења учествовало је петнаест гласача, а резултати оваквог избора били су следећи:

Преференција	Број гласача
Ана>Борис>Цеца	4
Ана>Цеца>Борис	3
Цеца>Борис>Ана	5
Борис>Цеца>Ана	3

Табела 4. Преференције за председника одељења.

Неки математички аспекти теорије гласања

По завршетку гласања и бројања гласова, изабран је нови председник одељења. Међутим, неопходно је проверити вероватност промене победника услед другачијег начина гласања.

- ❖ Један од начина пребројавања гласова и избора председника подразумева примену већинског система гласања. Управо оваквом изборном процедуром добиће се следећи резултати. Односи гласова између кандидата Ане, Бориса и Цеце су 7:3:5, према томе, победник је Ана.
- ❖ Уколико би ученици уместо три понуђена избора кандидата, имали само два избора пред собом, и на тај начин приступили гласању, добили би се другачији резултати, тј. односи гласова би били 7:12:11, према томе, победник би био Борис.
- ❖ Применом БЦ⁷ методе, односно могућношћу расподеле гласова (2, 1,0), односи између кандидата би и овај пут другачије изгледали, тј. 14:15:16. Према томе, сада се као победник издваја Цеца.

Најзанимљивија чињеница је та што се гласови ученика ни у једном тренутку нису мењали, што доводи до простог закључка о важности одлуке и избора одговарајуће изборне процедуре. Сходно томе произилази чињеница да није све у самом избору гласача, да као такав неће бити довољан и пресудан, већ да поред њега има још пресудних чинилаца – начин сабирања гласова, као и број изборних кандидата. Након оваквог увида у срж ове проблематике, немогуће је не запитати се колико је нечији глас заправо одлучујући у датом тренутку.

Наравно, најбитније је бити свестан истине, ма каква она била. Нажалост, неретко је човек у нелагодном и незавидном положају који му спутава могућност утицања и мењања наметнутог стања у овој игри истине и изазова. Требало би да се сваки човек понаособ усуди да се бори против заслепљивања и да у сваком датом, наметнутом стању пронађе доказе о сопственим ставовима, а не да помирљиво прихвата општеприхваћене приче, па чак и ако их други називају чињеницама. Несумњиво је истинита мисао великог француског математичара и филозофа, Ренеа Декарта, да се сумњати може у све. Човек који сумња, онда и мисли, што доводи до битне и универзалне истине - све док човек мисли, и даље се може назвати човеком (*Cogitoergosum*).

Пример 15. Професори у школи свакодневно се сусрећу са дечјим ситним препиркама и међусобним такмичењем. Најбитније је преокренути сваки тај *проблем* у игру. У једном одељењу једне лозничке основне школе појавила се група од четири дечака, који себе називају *Докторима*. Како су се непрестано препирали ко је бољи, јачи, паметнији и слично, предложено им је да направе гласање међу својим другарима и

⁷Борда рачун (Borda count) убудуће ће у раду бити означен скраћеницом БЦ.

Неки математички аспекти теорије гласања

да о њима говоре други, а не они сами, како би то требало иначе да буде. Без размишљања су пристали и рекли да ће изабрани бити вођа те групе. Вођу ће изабрати другари из њиховог одељења. Уз помоћ професора избори су били организовани.

У том узрасту већина деце посматра математику као монотону и некорисну у животу, па им је професор, не би ли их у томе разуверио и показао и њене друге примене, убацио у наставу и мало тривијалне математике, и то баш проблем који их је задесио. Договор је био да начин на који ће ученици гласати буде такав да рангирају сва четири *Доктора* (уведене су и скраћенице D_1, D_2, D_3, D_4).

Резултати овог гласања приказани су у следећој табели:

Преференција	Број гласача
$D_1 > D_2 > D_3 > D_4$	4
$D_1 > D_4 > D_3 > D_2$	4
$D_3 > D_2 > D_4 > D_1$	4
$D_4 > D_2 > D_3 > D_1$	5

Табела 5. Преференције за *Докторе*.

Приликом обраде резултата, укључени су и ученици из одељења да би било евидентно да гласови нису мењани. Примењујући четири различите изборне процедуре, професор овог одељења успео је да ђацима покаже да се добијају четири различита победника. Истовремено је ученицима показано и доказано да победника не одређују жеље ученика, већ изборна процедура.

У овом изборном гласању учествовало је 17 ученика.

- ❖ Када се на ово гласање примени већински систем гласања, резултати су $(D_1: D_2: D_3: D_4) = 8:0:4:5$, према томе, победник је D_1 ;
- ❖ Када ученици гласају за два кандидата, резултати су $8:13:4:9$, према томе, победник је D_2 ;
- ❖ Када ученици гласају за три кандидата, резултати су $8:13:17:13$, према томе, победник је D_3 ;
- ❖ Када ученици гласају за кандидате тако што распоређују гласове $(3, 2, 1, 0)$, односно БЦ методом, резултати су $24:26:23:27$, према томе, победник је D_4 .

Видевши добијене резултате, ученици су били одушевљени како се математика може користити као средство које одређује циљ. Спој игре и знања и јесте суштина лепоте ове природне науке.

Пример 16. Док се професори углавном највише труде да инспиришу своје ученике, заправо неретко се дешава супротно, да сами ученици инспиришу професоре, зато је

Неки математички аспекти теорије гласања

аутору рада било најлакше да сарађује са својим ученицима на истраживањима која су укључена у овај рад. Такође, као и претходни примери, и овај последњи пример реализован је у истом одељењу лозничке школе.

Сада је задатак био избор праве и жељене дестинације, од могућих пет, за ученичку екскурзију. Професор је издвојио 14 ученика, а затим и обрадио њихове изборе, међу којима су били: Златибор, Соко бања, Копаоник, Врњачка бања и Ђавоља Варош. Резултате је најлакше приказати табеларно, те је у раду овакав начин приказивања добијених резултата и примењен. Скраћенице су прва слова туристичких места, према томе Z, S, K, V, Ѓ.

Преференција	Број гласача
Z>K>S>V>Ѓ	3
Z>S>Ѓ>V>K	1
Z>Ѓ>S>V>K	2
S>K>V>Ѓ>Z	2
V>S>Ѓ>Z>K	2
Ѓ>Z>S>V>K	1
Ѓ>K>V>S>Z	3

Табела 6. Преференције за екскурзију.

Примењујући различите изборне процедуре, и овај пут добијени су различити исходи.

- ❖ Када се примени већински систем гласања, резултати су (Z, K, S, V, Ѓ) = (10, 0, 3, 3, 6), према томе, победник је Златибор;
- ❖ Када ученици гласају за два кандидата, резултати су (10, 11, 8, 3, 9), према томе, победник је Копаоник;
- ❖ Када ученици гласају за три кандидата, резултати су (10, 11, 16, 10, 13), према томе, победник је Соко бања;
- ❖ Када ученици гласају за три кандидата, резултати су (11, 11, 19, 20, 16), према томе, победник је Врњачка бања;
- ❖ Када ученици гласају за кандидате тако што распоређују гласове (4, 3, 2, 1, 0), односно БЦ методом резултати су (32, 24, 29, 25, 30), а победник је Златибор.

Примењујући различите процедуре, добијени су различити резултати, али не сви могући. Ниједном методом победник није била Ђавоља Варош, што значи да ипак постоје случајеви у којима није могуће наместити сваког кандидата за победника.

3.1. Доналд Сари о исходу гласања

Доналд Сари (Donald Gene Saari март, 1940. године у Мичигену), професор је математике и економије, као и директор математичког института у Калифорнији. Један је од најбољих научника у области теорије гласања и вероватноће награђених игара. Његова истраживања великим делом обухватају Бордин рачун и математичке алате, који дају велики допринос друштвеним наукама [29].

Теорема 9. (Сари [8]) За $N \geq 3$ кандидата $\{c_1, c_2, \dots, c_N\}$, постоје начини рангирања кандидата тако да c_j побеђује када гласачи гласају за j кандидата, $j = 1, 2, 3, \dots, N$, а c_N је победник на основу Борда рачуна.

Пример 17. На основу малопређашњег примера о избору председника одељења, уочљиво је да резултат варира од Ана $>$ Борис $>$ Цеца до потпуно обрнутог резултата Борис $>$ Цеца $>$ Ана. Ако би се увело још четири могућа начина бодовања, добило би се још неколико различитих поредака победника. Јасно је да резултати могу бити потпуно супротни тако да у једном начину бодовања један кандидат заузима прво место, а у неком другом може бити чак на другом месту.

Као што се може видети из претходног примера, проблеми изборне процедуре се тешко могу уочити ако се посматра само победник. Потребно је гледати изгласани редослед. Тачније, ако има три кандидата, могуће је направити седам различитих резултата, мењајући само начин бодовања.

Теорема 10. (Сари [8]) Претпоставимо да има $N \geq 2$ кандидата. За било које k које задовољава $1 \leq k \leq N! - (N - 1)!$, могуће је саставити листу са тачно k строго позиционих кандидата; различити изборни резултати се јављају како се изборна процедура мења. Немогуће је наћи листу са више од $N! - (N - 1)!$, строго позиционих изборних кандидата.

Када уврстимо $N = 3$, добије се број строго дефинисаних позиција кандидата:

$$3! - 2! = 6 - 2 = 4.$$

Када је, пак, четири кандидата у игри, број строго дефинисаних позиција кандидата је:

$$4! - 3! = 24 - 6 = 18.$$

Већ када је број кандидата пет, следи да се број строго дефинисаних позиција кандидата повећава великом брзином, што значи да за $N = 5$ провера Саријеве теореме захтева много више рачуна и рада. За $N = 5$ број строго дефинисаних позиција је:

$$5! - 4! = 120 - 24 = 96.$$

Очито да број могућих исхода несразмерно расте са повећањем броја кандидата. О томе говори и чињеница да број потенцијалних исхода са истим гласовима достиже милијарде (видети [8]).

Приметно је да распоред гласова појединих гласача није мењан ни у једном тренутку, док је исход варирао од једне до друге изборне процедуре. Како би избори осликали појединачне жеље, потребно је више се позабавити одабиром изборних процедура.

Теорема 11. (Сари [7]) *За $N \geq 4$ кандидата, постоји профил у којем, уз одговарајућу изборну процедуру, сваки кандидат може завршити на првом, другом, итд, као и на последњем месту.*

Победник избора је свакако неко о коме ће се највише причати, али у неким ситуацијама из свакодневног живота велику важност играју и друго и треће место, па и остала. Већина претходних варијација се сводила на одлучивање првог места, међутим ова теорема показује да се и остала места могу наместити. Ово је врло битна теорема која може послужити у различитим турнирима, такмичењима и слично. Некада је већа борба између последњег и претпоследњег места него међу прва два, на пример у шаховском турниру где постоји борба за опстанак у лиги. Само последње место прелази у нижу лигу и зато је битније не бити последњи, него освојити треће место. Баш у оваквим случајевима могуће је применити Саријеву теорему и одредити ко неће испасти.

3.2. Геометријски приказ изборних листа и изборних резултата

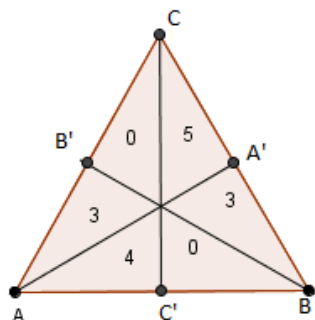
3.2.1. Геометријски приказ изборних листа

Изборне листе могу се представити на врло једноставан начин. Сваки пут кад се гласање заврши, листићи се сакупе и отпочне се процес пребројавања гласова. То је нешто што је неминовно и обавезно, углавном. Следећи геометријски приказ ће упростити бројање гласова за позиционе процедуре, те ће донекле бити омогућено избегавање бројања гласова, које је и временски неекономично. Ставка која је неизоставна јесте да су познате све преференције гласача и важно је истаћи и то да је преференција гласача у оптицају, као и податак колико свака преференција има гласова. У овом делу су дати прикази резултата и анализа из [6] и [8].

Уз помоћ једнакостраничног троугла могуће је упростити бројање гласова и то тако што свако теме овог троугла представља једног од три кандидата. Нека је доњи леви угао кандидат А, доњи десни угао кандидат В, и трећи, преостали, кандидат С и одреди се тачка која је подједнако удаљена од сва три темена, која је у геометрији

Неки математички аспекти теорије гласања

дефинисана као центар описане кружности.⁸ Кад се повуку све три тежишне дужи, добијају се шест мањих троуглова (видети [6]).



Слика 6.

Преференција	Број гласача
Ана>Борис>Цеца	4
Ана>Цеца>Борис	3
Цеца>Борис>Ана	5
Борис>Цеца>Ана	3

Сваки од ових шест троуглова са горње слике представља једну од шест могућих преференција. Како је област са бројем 4 најближа темену А, затим темену В и најдаља од темена С, сви поени ове области троугла имају исти редослед $A > B > C$. Број у троуглу означава број гласача који су гласали на тај начин, на пример број четири значи да су четири гласача гласала преференцију $A > B > C$. Пошто сваки од ових шест троуглова представља једну преференцију, лако се може закључити са слике да за две преференције, тј. $B > A > C$ и $C > A > B$, нико није гласао. Да би се све ово боље разумело, поред троугла стоји и табела из Примера 14, те се тако лакше могу видети резултати гласања и разумети њихов геометријски приказ.

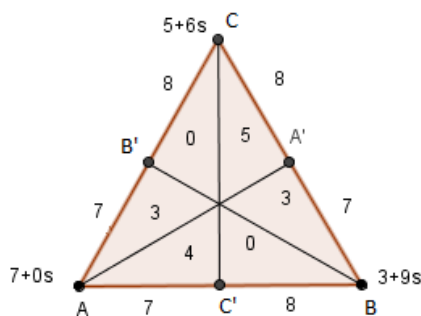
Поред геометријског представљања профила, могуће је користити и векторско представљање, које захтева слагање ранг листи. Тада слика добија векторски приказ $r=(4, 3, 0, 5, 3, 0)$, где први број означава доњу леву област, а остали се надовезују у смеру казаљке на сату (видети [8]).

Са слике се може уочити егзистенција вертикалне линије, која разграничава две области у троуглу. Прва област се налази лево од ње и састоји се из три троугла чији је збир једнак седам, док се десно од ње налази три троугла чији је збир осам. Ови зборови представљају однос гласова између кандидата А и В. У зависности од линије разграничења произилазе међусобни односи кандидата А и В, тј. $B > A$, 8:7.

У троуглу ABC постоје три вертикалне линије, где свака од њих дели велики троугао на две додирне области. Јасно је да су те вертикалне линије дужи AA' , BB' , CC' . Аналогно претходном закључку о међусобном односу парова В и А, долази се до односа парова Б и С, као и В и А, односно $C > B$, 8:7, а $C > A$, 8:7.

⁸Центар описане кружности се код једнакостраничног троугла налази у пресеку симетрала страница. Једнакостранични троугао има једну лепу особину, а то је да се центар описане, уписане кружности и тежиште поклапају.

Неки математички аспекти теорије гласања



Слика 7.

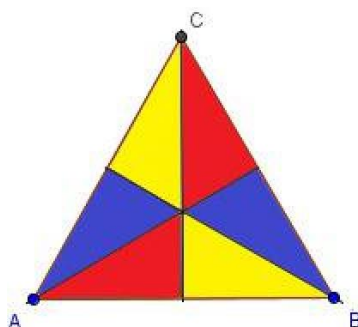
Ако се на ово гласање примени Кондорсеова метода, која подразумева да се гласа између свих могућих парова, очито је да нема Кондорсеовог победника, али је уочљиво постојање Кондорсеовог губитника. Како је то особа која је изгубила од оба кандидата, јасно је да ће кандидат А бити Кондорсеов губитник.

Укупан број гласова који је освојио сваки кандидат може се приказати у већинском систему гласања, код кога једину и најважнију улогу играју прва места у преференцијама. Односно, укупан број гласова ће представљати само оне гласове где су гласачи на прву позицију ставили тог кандидата, занемарујући тако другу и трећу позицију у некој преференцији.

Сходно овоме, кандидат А ће имати укупно седам гласова, кандидат В три гласа и кандидат С пет гласова. Ово је још један доказ да исход гласања зависи строго од изборне процедуре, а не од самих гласача - кандидат А истовремено је у већинском систему гласања победник и Кондорсеов губитник, где је изборна процедура Кондорсеова метода. Два крајње различита исхода са две различите изборне процедуре тиме су још једном разоткривена.

У циљу поједностављења изборних процедура, потребно је извршити њену нормализацију. Како би се смањио број бодова који се додељује кандидатима, врши се нормализација вектора, тако да се уместо $(w_1, w_2, 0)$ користи $(\frac{w_1}{w_1}, \frac{w_2}{w_1}, 0)$. Нормализацијом се добија да се за први избор гласача додељује 1 поен, за треће 0, а за друго вредност од 0 до 1. Добијени нормализован вектор биће означен са $w_s = (1, s, 0)$, где је $s = \frac{w_2}{w_1}$, $w_1 > w_2$ (видети [8]).

Пример 18. Ако гласови на изборима вреде $(9, 5, 0)$, тј. први избор гласача добија 9 поена, други 5, а трећи 0, нормализовани облик би био $w_{\frac{9}{5}} = (1, \frac{9}{5}, 0)$.



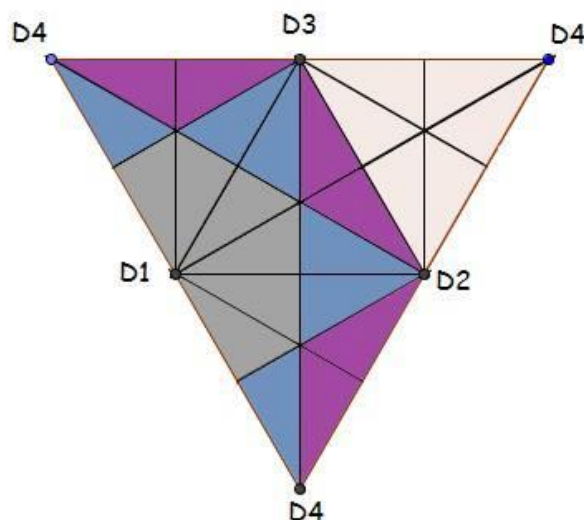
Слика 8.

Узимајући у обзир да s зависи од броја бодова који се додељују кандидату, тј. од изборне процедуре, резултат сваког од кандидата се може приказати као збир резултата добијених у већинском систему гласања и s пута број гласача који су га навели на друго место. Користећи слике 5, 6, лако се закључује да први сабирак у збиру представља два мала треугла са заједничким теменом A , док је други сабирак производ број s и збира бројева из два жуто обојена треугла, која представљају други избор гласача када је реч о кандидату A . Тиме се добија да је број гласова за кандидата A $7 + 0s$, за B $3 + 9s$, а за C $5 + 6s$ (за кандидата B додавани су гласови из црвених треуглова и помножени су са s , а за кандидата C додавани су гласови из плавих треуглова и помножени су са s).

Да би се геометријски представиле изборне процедуре када је број кандидата увећан за један, односно када је њихов укупан број четири, дате у примеру 15, где су кандидати (D_1, D_2, D_3, D_4) , немогуће је, због неусаглашености између броја темена треугла (три) и броја кандидата, представити треуглом као у претходном примеру. У овом случају користи се тространа једнакоивична пирамида чија се сва четири темена додељују сваком од та четири кандидата принципом једно теме – један кандидат. За четири кандидата постоји 24 могуће преференције, што значи да егземпларну пирамиду треба поделити на 24 мање пирамиде (видети [8]).

Да би дати пример био што разумљивији, могуће је из темена D_4 повући странице и исећи их на D_1D_4, D_2D_4, D_3D_4 . Овим поступком добија се једнакостранични треугао, те примењујући то даље, добијају се четири једнакостранична треугла унутар овог треугла, (слика 9.).

Са четири кандидата, нормализовани облик позиционе методе је $(1, s_1, s_2, 0)$, где је $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq 1$.

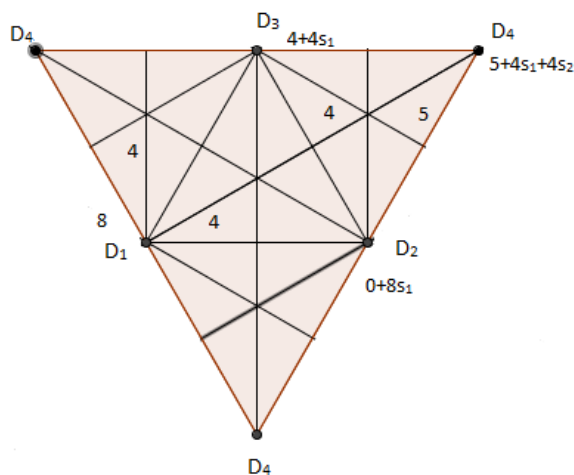


Слика 9.

Кандидати који су гласали за кандидата D_1 када је реч о већинском систему гласања, налазе се у шест малих, сивих троуглова, којима је једно теме D_1 . Затим, број гласача који су ставили кандидата на друго место, добија се када се s_1 помножи са збиром бројева који се налазе у шест мањих, плавих троуглова, који имају једну заједничку ивицу са неким од сивих троуглова. Гласови гласача који су кандидата D_1 ставили на треће место се налазе у троугловима који имају једно заједничко теме са сивим троугловима, и, као што је приказано на слици, има их шест – обојени су љубичастом бојом. Дакле, број гласача који су D_1 рангирали као трећег, добија се тако што се s_2 помножи са збиром бројева у љубичастим троугловима.

Ако је, примера ради, редослед гласача поређан тако да је $D_1 > D_2 > D_3 > D_4$, онда се, посматрајући троугао $D_1D_2D_3$, тај редослед смешта као да постоји само три кандидата. И тако се за све могуће преференције посматра само распоред прва три гласа и проналази се троугао чија су темена управо та три гласа, а даљи поступак се своди на причу о три кандидата.

Ако се поново ревидира пример *Доктора*, као и резултати тог гласања, могуће је представити гласачке листиће помоћу већ описаног поступка. Добијени троугао изгледа овако:



Слика 10.

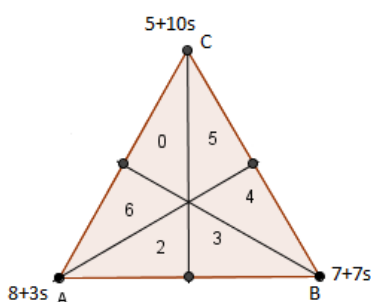
3.2.2. Процедурална дуж

Поред геометријског представљања изборних преференција, могућ је и геометријски приказ резултата гласања. Овај приказ омогућава да се за сваког кандидата прикаже добијени проценат од укупних гласова. Дакле, у случају три кандидата, за добијање процента сваког од њих, примењује се формула:

$$\{q = (q_A, q_B, q_C) \mid q_j \geq 0, q_A + q_B + q_C = 1\}$$

Појам процедуралне дужи приближније се може објаснити преко илустрације представљања гласања, тј. коришћењем једнакостраничног троугла. Вертикална дуж AA' ће у том случају представљати оне кандидате који нису могли да се одлуче ни за B ни за C (видети [6]).

Пример 19. Слика 11, која представља резултат неког гласања, још више ће расветлити појам процедуралне дужи:



Слика 11.

Из ове илустрације видљиво је да је вектор гласања w_s , а да је његова нормализована вредност:

Неки математички аспекти теорије гласања

$$q_s = \frac{1}{20(1+s)}(8+3s, 7+7s, 5+10s).$$

Након примене неколико једноставних, бинарних математичких операција, долази се до:

$$q_s = (1-2t)\left(\frac{8}{20}, \frac{7}{20}, \frac{5}{20}\right) + 2t\left(\frac{11}{40}, \frac{14}{40}, \frac{15}{40}\right), \text{ где је } t = \frac{s}{1+s}.$$

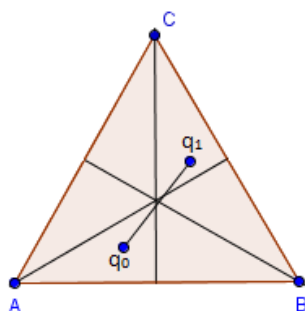
Ову формулу могуће је извести и у другачијем облику:

$$q_s = (1-2t)q_0 + 2tq_1, \text{ где је } t = \frac{s}{1+s}.$$

Где је $q_0 = \left(\frac{8}{20}, \frac{7}{20}, \frac{5}{20}\right)$, $q_1 = \left(\frac{11}{40}, \frac{14}{40}, \frac{15}{40}\right)$.

Што заправо значи да тачка q_0 представља резултат већинског система гласања, а тачка q_1 резултат елиминационог система гласања. Ова линија изборних резултата назива се процедурална дуж (видети [8]).

Процедурална линија омогућава идентификовање свих могућих изборних исхода за дату листу. Тачке q_0 и q_1 су крајње тачке процедуралне дужи. У већинском систему гласања победио би кандидат А, и то са редоследом $A > B > C$, што значи да се тачка q_0 смешта у троугао коме је једно теме А и који је ближи темену В, него С. Аналогно, тачка q_1 смешта се у троугао који представља преференцију $C > B > A$, јер је кандидат С победио у елиминационом систему гласања са наведном преференцијом. Следећа слика представља процедуралну дуж за наведени пример, одакле се читава да процедурална дуж пресеца седам области, што значи да у овом конкретном примеру сада има седам потенцијалних исхода за дату листу.



Слика 12.

Ако победа на одређеним изборима обезбеђује неком од кандидата улогу звезде, онда ће пут до звезде бити изграђен од изборне процедуре и тек понеког гласа. Дакле, победа на изборима, независно од тога из чије је перспективе – кандидата или гласача који подржава, за већину људи, жељеног кандидата, првенствено је могућа једино уз одабир најпримереније од понуђених изборних

процедура.

Историјски примери са свих страна света осмишљавају све ове досад наведене теоријске прорачуне. Управо услед проучавања општепознатих историјских догађаја, научници су и почели да се баве оваквом деликатном темом. Нажалост, све се може анализирати тек када прође, а са последицама се мора изборити.

Пример 20. Занимљив пример су председнички избори у САД – у, одиграни 1992. године, између Клинтона, Буша и Перота. За победника је изгласан Клинтон, победивши са 43,01% у односу на друга два (Слика 13.).



Слика 13.

Питање које се само намеће тиче се победника и потенцијалног другачијег исхода овог гласања – да ли су Буш или Перот могли уопште да буду изгласани, а не Клинтон. Сама чињеница да је Клинтон освојио испод 50% доводи у питање сам исход. Алекс Табарок је користио појам процедуралне дужи не би ли објаснио све могуће исходе у различитим изборним процедурама. Поред основа математике, морао је да дође и до многобројних података о мишљењима и ставовима које имају гласачи. Морао је да сазна шта Перотови гласачи мисле о другим кандидатима, затим како би Клинтонови гласачи расподелили гласове између Буша и Перота, као и како би Бушове присталице гласали између Клинтона и Перота. Табарок је успео да прикупи све ове податке, и на тај начин успео да прикаже све могуће исходе председничких избора 1992. године, користећи притом нормализоване резултате већинског и елиминационог изборног система. Дошао је до коначних резултата, који кажу да се процедурална дуж о којој је већ било речи налази у области „Клинтон > Буш > Перот”.

Долази се до закључка да је Клинтон победник у свакој другој методи, почев од бинарне преко другог круга, па до комбинације неке од њих. Друго место заузима Буш, а треће у сваком случају Перот. Иако је Клинтон победио са испод половине гласова, Табарок је показао да је то ипак убедљива победа (видети [8]).

Илустрација примера са три кандидата погодна је за додатно кристализовање самог појма процедуралне дужи, као и за поновно уверавање у могуће исходе, што ће у даљем тексту бити конкретизовано и доступно. Затим, биће и реконструисана она

Неки математички аспекти теорије гласања

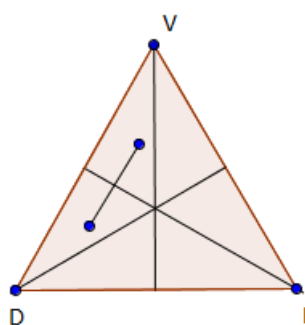
изборна процедура којом се долази до таквих исхода.

Пример 21. У истом одељењу у ком су били организовани избори за председника одељења, ученици су такође гласали и за представника ученичког парламента. На гласању је било присутно 25 ученика, од којих је сваки имао пред собом три избора. Имали су задатак да изабери једног представника одељења од три насумично изабрана међу њима – Дејана, Ивана и Вељка. Сваки ученик је, водећи се сопственим субјективним мишљењем, гласао ређајући понуђене кандидате у неки поредак. Након завршетка гласања, обрађени подаци приказали су однос гласова:

Преференција	Број гласача
$V > D > I$	10
$V > I > D$	6
$D > V > I$	2
$D > I > V$	4
$I > D > V$	3

Табела 8.

Да би се нацртала процедуралну дуж, потребно је прво одредити победника у већинском систему гласања са вектором $(1, 0, 0)$. Примењујући овакав систем, произилази из анализе да је победник Вељко и то са преференцијом $V > D > I$ (16:6:3). Овај резултат одређује један од малих једнакостраничних троуглова у коме се налази једна од крајњих тачака процедуралне дуже, што се може видети са слике 14. Затим, потребно је одредити другу крајњу тачку дужи, и то обрадом добијених гласова помоћу елиминационе методе. У елиминационом систему гласања победник је Дејан и то са редоследом $D > V > I$ (19:18:13). На тај начин обележена је процедурална дуж у једнакостраничном троуглу DIV.



Слика 14.

Та дуж сече три области, тј. два троугла и једну дуж. Суштина процедуралне дужи је да на неки начин олакша проналажење различитих метода како би сви могући кандидати неком од њих победили. Јасно је да не постоји ниједна изборна метода у којој је Иван победник. Да у овом примеру није искоришћена процедурална дуж, сигурно би много више времена било уложено у проналажење праве методе која би

Ивана прогласила победником. Овај пут било би прилично бесмислено коришћење Бординог рачуна са векторима $(2, 1, 0)$ или $(6, 5, 0)$ или било ког другог. Ниједна не би довела до тог победника, а свака понаособ би захтевала по мало рачуна и времена.

3.2.3. Позиционирање процедуралне дужи

Позиције процедуралних дужи пружају могућност одређивања свих потенцијалних исхода неког гласања. Не били се одредили сви могући исходи, потребно је, пре свега, саставити што више профила, а затим утврдити одговарајуће положаје процедуралних дужи. За сваку процедуралну дуж постоји више позиционих могућности и зато је лакше да се за неку процедуралну дуж провери да ли постоји одговарајући профил (преференција).

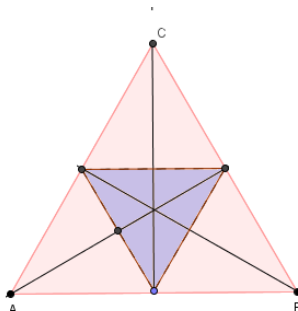
Као што је већ речено, крајње тачке ове дужи су q_0 и q_1 (резултат већинског гласања и елиминационог гласања). Како је распоред гласова код већинског $(1, 0, 0)$, а код елиминационог $(1, 1, 0)$, логично је да код елиминационог система има укупно бодова двоструко више него код већинског. Сваки члан q_1 већи је од половине вредности одговарајућег члана q_0 .

Наравно, неоспориво је да у већинском систему гласања неки кандидат може да има максималан број гласова, односно да сви гласају за њега, а неки могу имати нулу. Тако да постоје ограничења у броју гласања, тачније никада не може бити негативан резултат, али може бити нула. Ниједан кандидат не може имати већи број бодова од броја гласача.

Иако, можда, донекле изненађујућа чињеница, то су једина два услова која q_0 и q_1 морају испунити. Стога, за било коју дуж уцртану у троугао, а која задовољава ове услове, постоји профил за коју је та дуж процедурална. Приметно је да ови услови само значе да пошто је q_0 смештено на било коју тачку у троуглу,

- ❖ тачка q_1 мора бити у мањем троуглу, који се добија када се споје три средишње тачке страна; (осенчени троугао на слици 15.)
- ❖ q_1 не може бити ближе било којој од ивица великог троугла од q_0

Овај изузетно умерени услов, приказан на слици 15, дозвољава готово све могућности (видети [8]).



Неки математички аспекти теорије гласања

Слика 15. Ограничења линије процедуре (са осенченим троугловима)

На слици 15. су тачно одређене области у којима се може налазити q_1 и q_0 . Осенчена област представља област у којој се може налазити победник елиминационог система гласања, односно q_0 , док се победник већинског система гласања, q_1 , може налазити било где.

4. Повлачење кандидата

Поставља се питање да ли се резултати гласања мењају уколико се неки кандидат повуче након што је гласање обављено и да ли то мења победника или редослед остаје исти. Такође, то повлачи и питање о расплету ситуације у којој су утврђено прво, друго и треће место, али трећи кандидат због сујете одлучи да се повуче, па остаје дилема да ли се самим тим мења и тек проглашени победник. Саријева теорема пружа неке од могућих одговора. Више о овој теми се може наћи у [8], поглавље 3.

Теорема 12. (Сари [8]). Нека постоје три или више кандидата.

- Потребно је распоређивање кандидата на било који транзитиван начин. Затим, одабирање позиционе изборне методе којом ће се гласови сабирати.
- Избацивањем једног од кандидата, следи даље распоређивање преосталих кандидата на било који транзитиван начин. Овај редослед може бити потпуно различит од првобитног. Затим, поново је неопходан одабир позиционе изборне методе којом се рангирају кандидати.
- Процес елиминације кандидата, као и рангирање и одређивање позиционе процедуре за преостале кандидате примењује се све док се избор не сведе на два најбоља кандидата. Редослед кандидата не мора имати било какве везе са било којим од претходних рангирања. Преостали пар такође се рангира и то применом већинског система као изборну процедуру.

Постоји профил у којем гласачи гласају за одређени скуп кандидата, а гласови се рачунају на горе наведени начин, чији је исход специфициран.

Ова Саријева теорема указује на могуће озбиљне проблеме уколико се један од кандидата повуче. Најподеснији пример за илустрацију ове теореме је исти пример који је коришћену делу рада који се бавио елиминационим гласањем, када је избацивањем кандидата са најмањим бројем гласова у сваком кругу, утврђен победник. Питање је шта би се десило у случају да првопласирани одустане од овог радног места, јер је, примера ради, добио примамљивију понуду за други посао. Повлачењем победника намеће се питање да ли је неопходно организовати нове изборе или, пак, одмах посао понудити другопласираном. Управо Сари даје одговор на ову недоумицу – ипак је боље организовати нове изборе јер се може десити да је редослед без једног кандидата другачији.

Шта више, Сари тврди да постоје профили у којима у већинском систему гласања добијени резултат $A > B > C > D$, услед одустајања кандидата D , неће задржати исти редослед $A > B > C$. У случају да је кандидат D само избрисан са листе, ништа се не би променило, али када би се организовали нове изборе, резултат се не би само променио, већ би се тотално окренуо. Онај ко је био на првом месту, прешао

Неки математички аспекти теорије гласања

би на последње место јер гласачи који су ставили D на прво место могу ставити било која од три кандидата сада на то место. Према томе, када би D одустао, резултат би могао постати $C > B > A$. Такође, ништа другачије не би било када би одустао кандидат C или A и C.

Пример 22. Пример, који само потврђује Саријеву тврдњу да је боље организовати нове изборе, него само избрисати кандидата који је одустао, видљив је у следећој табели где су дате преференције гласача.

10	$D > C > A > B$
9	$C > D > A > B$
9	$A > D > B > C$
8	$D > B > A > C$
11	$B > D > A > C$
7	$A > C > B > D$
5	$A > B > C > D$
4	$C > A > B > D$
6	$C > B > A > D$
9	$B > C > A > D$

Табела 9.

У већинском изборном систему редослед је $A > B > C > D$ (21:20:19:18). Ево, шта се дешава уколико кандидат D одустане, а гласање је већ завршено. Уколико се само избрише кандидат D, добија се следећа табела:

23	$C > A > B$
14	$A > B > C$
19	$B > A > C$
7	$A > C > B$
6	$C > B > A$
9	$B > C > A$

Табела 10.

Сада је у већинском систему гласања добијени редослед $C \succ B \succ A$ (29:28:21). Овим је још једном потврђен Саријев закључак да је мало реалније организовати нове изборе.

Ипак, тешко је а не запитати се може ли још горе од овога – може ли резултат да буде тотално обрнут у различитим изборним процедурама. Може! Управо, овакви исходи су могући у већини изборних процедура, а о томе сведочи и Саријева теорема.

Теорема 13. (Сари [8]). *Нека N буде број кандидата и претпоставка је да постоје барем три кандидата.*

- *Потребно је рангирање кандидата на било који транзитивни начин. Затим, одабир позиционе методе којом ће се бројати гласови.*
- *Постоји N начина да један од кандидата отпадне. За сваки од ових начина, неопходно је распоређивање преосталих $(N - 1)$ кандидата на било који транзитиван начин. Нови редослед кандидата не мора нужно имати било какве везе са претходним. Затим, за сваки од подскупова кандидата, требало би да се изабере позициона изборна метода којом ће се бројати гласови.*
- *Ово се примењује даље; за сваки могући подскуп три или више кандидата додељује се насумичан транзитивни распоред и позициона метода којом ће се рачунати гласови.*
- *Када се дође до два последња кандидата, и њих је потребно распоредити на један од два начин. Нека изборна процедура овог пута буде већинска. За скоро сваку одабрану позициону методу, подразумева се већински и елиминациони систем где се гласа за два или три кандидата, и било који други, постоји профил у ком гласачи гласају на неки од могућих начина, изборни исход је специфициран. Изборни метод који не дозвољава овако хаотичну ситуацију је Борда рачун.*

Очито да ова теорема тврди да скоро све изборне процедуре дозвољавају различите исходе. Такође, према овој теореме може да се деси да оно што је избор већине ипак већ у другом кругу испадне. Када постоји више кандидата и када постоји кандидат A који у дуелу са било којим другим кандидатом побеђује, значи да је он Кондорсеов победник. Према томе, када је A у неком подскупу кандидата, у коме има три члана, четири или више, он увек побеђује. Али, ако он има много других позиција у преференцијама гласача, он неће победити у већинском систему гласања. И одмах, у другом кругу ће испасти.

Ово је један од проблема који могу да настану применом ове теореме, тј. праћењем њених корака приликом вишекружног изборног система. Често се може десити да већински изборни систем даје једног победника, док бинарни изборни систем даје неког сасвим другог, или, још горе, бинарни систем понекад даје победника који, приликом елиминације у вишекружном изборном систему, испада већ у другом кругу.

Неки математички аспекти теорије гласања

Оно, ипак, што ова теорема тврди, јесте да сигурно постоји профил у којем ће тачно одређени кандидат победити и то тачно са којом изборном процедуром. Оно што је сасвим сигурно да је процедура која нема ове проблеме, БЦ метода, и то из неколико разлога.

БЦ метода је једина метода која не дозвољава да Кондорсеов губитник буде боље рангиран од Кондорсеовог победника. Надаље, БЦ је једина позициона метода где међусобни однос парова мора бити у складу са БЦ редоследом (као што је већ поменуто, могуће је да је резултат у једној процедури један, а када се примени бинарни начин гласања, дијаметрално различит). Када има већи број кандидата, могуће је да један кандидат, у свим могућим скуповима од по три кандидата, побеђује, док, када су сви кандидати у конкуренцији, он бива последњи. Једино БЦ метода не дозвољава ову ситуацију. Могуће је осмислити профиле у којима свака процедура мења исходе у складу са одређеним променама, док овако неку нестабилност БЦ метода не дозвољава [8].

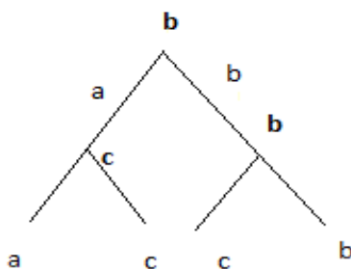
5. Стратегија гласања

Гласач може да реагује на манипулацију редоследом гласања тако што ће стратешки да гласа. У раној фази гласања, гласа за опцију која ће у каснијем гласању бити побеђена од опције коју он преферира. При стратешком гласању, гласачи предвиђају резултате и гласају оптимално у односу на дати редослед гласања већ у раној фази. Ако организатор гласања направи бинарну шему, која узима у обзир све стратешке опције, тада стратешко гласање неће променити исход гласања. Питање је само може ли се могућим манипулацијама на гласању супротставити управо стратегијом. Консултована литература је [8], [14] и [27].

Пример 23. Доста је примера из живота који отварају могућности за манипулацију. У основној школи једна од битнијих ставки о којој се преговара је избору уџбеника за наредну школску годину, па се наставници појединачно изјашњавају о сопственим преференцијама. У опцији ове године биле су издавачке куће Клет (a), Математископ (b) и Завод (c). Прво се гласало између a и b, а потом победник са c.

Наташа	Ленка	Душан
a	c	b
b	a	c
c	b	a

Табела 11.



Слика 16. [14]

Те преференције могу се приказати једним бинарним стаблом, где је видљива стратегија која води до победе b. Ако је a изабрано у фази 1, c ће бити изабрано у фази 2. А ако је b изабрано у фази 1, b ће победити у фази 2. То значи да ће наставник, који

Неки математички аспекти теорије гласања

жели да Математископ, победи гласати за b у фази 1 (видети [14] и [27]).

Остаје нада да ће људи, што више се упознајући са овом темом и начинима функционисања изборних система, успети да, пратећи знакове поред пута, пронађу онај прави пут којим ће се изборити против диктирања правила и наметања туђег мишљења. Није гласање само пуко излагање на изборе и добијање хемијске оловке како би се заокружило пар бројева. Требало би свако да уложи себе и свој глас на право место, јер ако није на правом месту, онда његова вредност нестаје.

Несумњиво је да се сваки човек досад макар једном нашао у незгодној и незавидној ситуацији да мора да гласа и да свој глас даје оном кандидату који највероватније неће победити. Једино питање у том тренутку је да ли је боље да победи неко ко је представљао гласачу други избор или трећи. Уколико гласачу тај детаљ није важан, глас који даје постаје занемарљив јер апсолутно ништа не може променити, али, ако је бирачу ипак битније да победи други, а не трећи избор, најбоље би било да искористи већ добро постојану тактику. Уместо да гласа за свог миљеника, требало би да гласа за неког другог зарад личне сатисфакције.

Као што је до сада наглашено, свака процедура, гласање, али и сваки изборни исход оставља простор за тактизирање и за манипулацију. Како резултати избора углавном не показују вољу гласача, већ о самом исходу одлучује изборна процедура, потребно је да сваки појединац барем покушава да се ухвати у коштац са изборном процедуром и да оствари главни разлог њеног постојања, а то је демократија и резултат одређен вољом гласача.

Једна веома забрињавајућа чињеница је да победа кандидата и са чак 60% гласова у већинском систему гласања, не мора бити увек победник, довољно је да се промени распоред гласања и он ће изгубити. Чињеница је да када постоји само два кандидата и нема неке могућности за тактизирање јер има само две опције, али, већ са три кандидата, ситуација се мења.

Сари тврди да се чак у 69% случајева, када учествује три кандидата, може мењати победника, и то у складу са избором изборне процедуре. Требало би се изборити против неправде и манипулација, али је, ипак, и у самоодбрани све дозвољено. Велики је улог на зеленом чаршаву, а народ има само сићу, гласове. Чак су и карташке игре доказ да се од малих улога може освојити све на столу. Ко не рескира, не профитира.

Ако се ревидира један од претходних примера, примера о избору одељенског председника, уочљиво је да су чак и ученици оставили простора за манипулацију. Наравно, избори су били регуларни, као и гласови, али и такви гласови су мењањем изборне процедуре мењали резултате.

Гибарт – Статервајтова теорема нуди одговор на питање о организацији гласања у коме ће гласач осетити потребу да буде тактичан.

Теорема 14. (Гибарт, Статервајт [8]) *Ако на изборима учествују три или више кандидата, где сваки од њих може бити победник, и ако земља у којој се одржавају избори није под влашћу диктатора, онда постоји ситуација у којој је у најбољем интересу неког гласача да гласа тактички, а не искрено.*

Логично се, размишљајући о овој проблематици, намеће питање шта се дешава када се изборна процедура већ изабере, има ли и тада места за манипулацију и тактизирање. Заправо, методе које су склоне манипулацијама и које то омогућавају су елиминациона метода и већински систем гласања, док је БЦ метода најмање склона манипулацијама и тактизирању.

Теорема 15. (Сари [8]) *Претпоставка је да само мали проценат гласача покушава да буде тактичан на изборима у којим учествују три кандидата. Методе које су најсклоније успешним манипулацијама јесу већинска и елиминациона метода. Једина процедура која има убедљиво најмању склоност ка успешним манипулацијама јесте Борда рачун.*

Поред овога, битно је да се истакне да није могуће сваки пут тактизирати. Један од главних услова за тактизирање је да, у случају постојања три кандидата А, В и С, довољан број гласача стави или В или С на друго место, тако да збир њихових првих и других места буде већи од броја првих места кандидата А. Јасно је да је примарни услов, нерешен број гласова, између два кандидата.

Али, поставља се питање да ли сваки пут треба да се избегавају изборне методе којима је могуће манипулисати и применити начин гласања где нема тактизирања, а то је неизоставно диктатура. Некада је довољно проверити искреност гласача и самим тим смањити могућности за тактизирање. Заправо, боље је изабрати неку методу у којој ће бити мала количина тактизирања, јер је у таквим методама немогуће искоренити тактику, али су ове методе свакако бољи избор од диктатуре.

Можда би најбоља опција била вишекружна БЦ метода. То значи да гласачи гласају и тај њихов распоред кандидата се не мења, већ се у првом кругу избаци најлошији. Потом се организује други круг избора, где се редослед који су изабрали гласачи у првом кругу не мења, већ се само избаци кандидат који је избачен у првом кругу и поново, БЦ методом, избаци се други кандидат, а избацивање се настави све док се не добије победник.

6. Процедуралне разлике

Све ово претходно објашњено и изанализирано почиње да добија смисао тек када свако од гласача схвати шта жели. Као и сваки проблем у животу, па ни овај не може се анализирати док га не раставимо на најмање могуће делове. Демократија, која је полазиште и срж ове проблематике, политички је систем базиран на могућности да народ (грађани) може да бира своје представнике, и управо због тога је и најбољи државни облик.

Сваки грађанин има једнако право да учествује у избору председника државе. Наравно, принцип је сличан и у свим другим гласањима, али фокус овог рада биће председнички избори јер то некако има највише утицаја на човеково бивствовање. Протагора је говорио: „Што се тиче народа, он ништа не види, него само понавља оно што му вође кажу.“

Још један делић овог проблема је наметање и нетачно представљање стања ствари у јавности. Гласачки листић може попунити свака пунолетна особа, али исправна је и веродостојна запитаност да ли свака особа може одговорно да размишља и донесе прави избор. Жеље гласача се не могу објаснити услед немогућности сваког гласач да свесно формира сопствене жеље. Како је немогуће мислити у име других, преостаје само да се жеље гласача, ма какве оне биле, репрезентују уз помоћ математике. Ако постоји метода која одговара на питање шта гласачи желе, онда је то Борда рачун. Коришћена литература за ово поглавље је [8].

6.1. Поништавање гласова

Пример 24. Ако се узме за пример гласање чији је крајњи резултат 30 гласова за Николу, а 40 гласова за Ивана, очито је да је изгласан победник са 10 бодова више, а то је Иван. Ако би се поништили гласови, поништено би било оних 20, јер они доводе до нерешеног резултата, а преосталих 10 би одредило победника.

Ова метода поништавања можда је и једна од бољих могућности када је реч о изборној процедури, једини проблем је што је она временски доста неекономична. Ипак, потребно је доста труда и времена да се прегледају сви гласови и пронађу сви они који се међусобно поништавају. Тада се долази до оних гласова који су изједначени и могли би да се анализирају одређене изборне процедуре.

Пример у коме су сва три кандидата по једном на првом месту, када кандидате распоређују сами гласачи, а једном на последњем месту, најпогоднији је за расветљавање овог модела. Тада постоје три различите преференције:

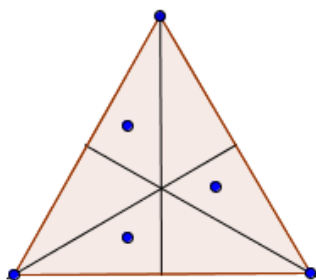
Неки математички аспекти теорије гласања

$$A > B > C, \quad B > C > A, \quad C > A > B,$$

који се називају Кондорсеова тројка (видети [8]).

Поништавање када постоји три кандидата могуће је примереније објаснити приказом једног точка у коме су тачке А, В и С распоређене око точка, док се у точку налазе бројеви 1, 2 и 3. Бројеви 1, 2 и 3 су тако распоређени да је угао између два суседна једнак 120° и они представљају позицију (ранг) кандидата А, В и С. Што значи да када се помери точка, он се помера заједно са ранг местима и тиме се добијају све могуће позиције кандидата А, В и С.

Као и до сада, ово се може сликовито објаснити коришћењем геометрије, тачније већ употребљаваним једнакостраничним троуглом (слика 17). Са слике се види да су тачке у троуглу на растојању од 120° . На овај начин представљено је поништавање гласова које доводи до нерешеног исхода (видети [8]).



Слика 17.

Вектор позиционе методе, раније примељиван у раду, јесте $w_s = (1, s, 0)$, из чега следи да променом изборне процедуре сваки кандидат добија исти број гласова $1 + s$. Самим тим, резултат ће увек бити исти:

$$A \approx B \approx C.$$

Ако се гласа за само два кандидата, онда ће бити:

$$A > B, \quad B > C, \quad C > A.$$

Из тога произилази да победник постоји и то је онај кандидат који побеђује са односом гласова 2:1. Очито је да у овом случају нема нерешене ситуације, већ да је редослед цикличан.

Ситуација се не би променила ни када би се бирало између осам кандидата и када би свако од њих барем једном био на првом и једном на последњем месту, опет би били изједначени, а применом бинарне методе резултат би био циклични распоред (видети [8]).

Пример 25. Сливовитије се претходно речено може објаснити примером у ком се три детета отимају око једне играчке, при том се свако дете налази на растојању од 120° у односу на суседно. Уколико су подједнако јаки, тј. уколико је сила вуче коју производе деца једнака, доћи ће до узајамног поништавања. У том случају нико се неће изборити за играчку, јер ниједна сила неће превладати другу. Дакле, сви имају једнаке шансе да је узму. Таква појава се може назвати симетријом, сличном оној у гласању са три кандидата од којих је свако једном прва позиција, једном друга позиција и једном трећа позиција.

Али, ситуација би била компликованија ако би се два од три детета удружило, што би нарушило постојану симетрију. Очито је да би они узели играчку. Аналогно овоме, комбиновањем бинарних резултата поново се може доћи до нерешеног резултата, што ће у наставку текста бити подробније расветљено.

Одсуство ове симетрије, које настаје када се пореде само парови, тј. применом Кондорсеа, могуће је објаснити посматрањем **разлике у профилу p између свих парова A, B и C** . Ова разлика биће означена као: $\tau([A, B]; p)$ (видети [8]).

Пример 26. Профил p и девет гласача са својим преференцијама приказани су у следећој табели:

Број гласача дате преференције	Преференција
4	$A > B > D > C$
3	$D > B > A > C$
2	$C > A > D > B$

Табела 12. [8]

Сада постоји:

$$\tau([A, B]; p) = (4 + 2) - 3 = 3,$$

$$\tau([B, A]; p) = 3 - (4 + 2) = -3,$$

$$\tau([C, D]; p) = 2 - (4 + 3) = -5,$$

$$\tau([B, C]; p) = (4 + 3) - 2 = 5,$$

$$\tau([A, C]; p) = (4 + 3) - 2 = 5.$$

Ова функција мери удаљеност само између два кандидата и ту настаје проблем јер не важи оно што би важило за распоред тачака на једној дужи, те према томе ова функција превазилази транзитивност. Требало би да разлика између A и B плус разлика између B и C буде једнака разлици A и C , али:

$$3 + 5 \neq 5.$$

Како и бинарни распоред није трензитиван, ова функција би могла да послужи када је реч о гласању.

Дефиниција 15. (Сари [8]). Ако за све тројке кандидата $[A, B, C]$, профил p има особину да:

$$\tau([A, B]; p) + \tau([B, C]; p) = \tau([A, C]; p),$$

онда се за овај профил каже да задовољава (бинарну) сабирну транзитивност.

Приметно је да постоје профили који могу бити сабирно транзитивни, али са гласовима и није баш тако, те због тога следи теорема:

Теорема 16. (Сари [8]) За било који број кандидата, сви бинарни гласачки циклуси и сви парадокси који се тичу исхода бинарних метода су проузроковани компонентама Кондорсеових профила.

Уистину, за дати профил p , претпоставља се да су све компоненте у Кондорсеовим правцима уклоњене. Овај део профила „без Кондорсеа“ биће означен са p^* . Не само да су бинарни редоследи p^* увек транзитивни, већ и разлике у резултатима задовољавају сабирну транзитивност, тј. понашају се као делови дужи између одређених тачака на њој.

Ипак, Кондорсеове променљиве стварају проблеме и на неки начин спречавају да победи кандидат који представља жељу самих гласача.

6.2. Борда или Кондорсе

Не може се рећи ни за било коју методу која је поменута у претходним поглављима да је супериорна, али се свакако може издвојити она која узрокује минималне проблеме, а то је Борда рачун. Ни Борда рачун није свемогућ, нити се може рећи да је најбољи, али свакако има највише предности у односу на остале. Сваки метод има мане и предности, само је разлика у њиховом броју и важности, односно самим њиховим последицама. Управо је Борда рачун метода која на најбољи начин презентује предности и минимизира постојеће мане. Поред ње, неизоставно је поменути и Кондорсеову методу. Дакле, најприхваћеније методе су БЦ метода и Кондорсе.

Кондорсеова метода и њена суштина је објашњена поглављу 2. Оно што је карактерише је да се свако гласање у коме нема Кондорсеовог победника може довести у питање, а можда и сама регуларност тих избора. Углавном се доводи у питање изборна процедура која је коришћена како би се одредио победник. Кондорсе је направио велики корак у теорији гласања представивши ову методу. Захваљујући чврстим и убедљивим аргументима, ова метода је једна од најпримењенијих. Уколико

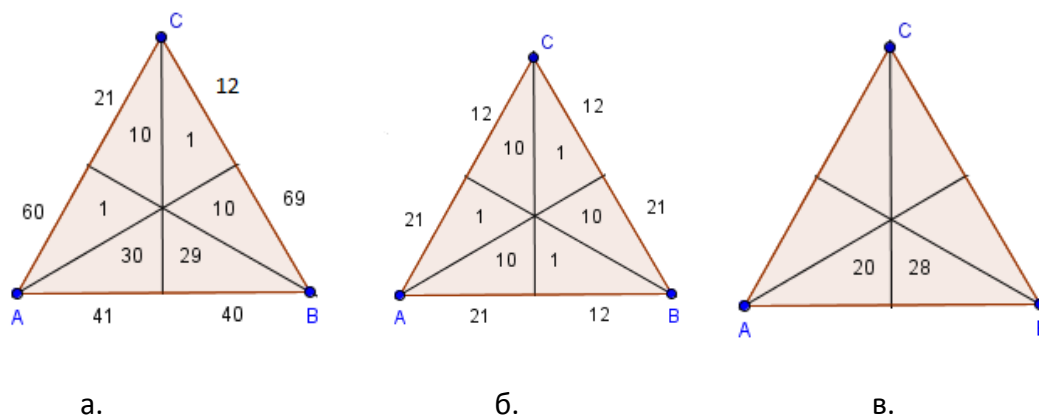
Неки математички аспекти теорије гласања

нека метода нема Кондорсеовог победника, то моментално постаје њена озбиљна мана и то је оно са чиме се суочавају остале изборне процедуре које су у раду помињане.

Једино валидно питање тиче се опредељења између Бордове и Кондорсеове методе. Први корак у одабиру методе би био да се одреде циљеви и да се усклади тренутна ситуација са методом у оној мери у којој је то могуће. Питање јесте јасно формулисано, али истовремено врло је неправедно. Оно што краси ове две методе је то што се оне могу међусобно допуњавати. Управо такве ситуације су објашњене у претходном поглављу. Објашњени су случајеви када не постоји Кондорсеов победник, али, чак и тада, могуће је доћи до коначног исхода уз помоћ позиционог гласања, Борда рачуна.

Иако је позициона метода једна од бољих метода, може се десити да не може да одреди Кондорсеовог победника. Упоредивање бинарне методе и позиционе методе најрепрезентативније је реконструкцијом једног историјског, чувеног примера (слика 18).

Пример 27. Како је већ на почетку овог поглавља објашњено поништавање гласова, на сличан начин се може објаснити ток поништавања гласова у датом профилу. Гласови у профилу се поништавају све док је то могуће, тј. све док на самом крају не остану они гласови који се не могу поништити.



Слика 18. [8]

Троугао ABC се састоји из шест мањих троуглова, што се јасно види са слике. Посматрајући троуглове (шест малих), видљиво је да се гласови поништавају тако што се из три троугла одузму они гласови са идентичним бројем у сваком троуглу (слика 18. а).

Најпре, проучавајући троуглове са бројевима 1, 1, 29, постаје очигледно да се из сваког троугла може скинути само по један глас, тј. овај пут је могуће поништити само један глас у сваком троуглу. Следећа три троугла би били троуглови са бројевима 30, 10, 10. Како сваки од та три троугла има по десет гласова најмање, могуће је поништити по десет у сваком троуглу, тако да ће у њима остати 20, 0 и 0 непоништених

гласова.

Када се одузму поништени гласови, троугао са преосталим бројем гласова, који нису поништени, приказан је на слици 16. в.

На слици б је Кондорсеов победник А, а на слици в је Кондорсеов победник В. То значи да троугао који доводи до поништавања гласова одређује Кондорсеовог победника. Сада уместо критике БЦ рачуна, доминантнија је збуњеност око Кондорсеа и његов бинарног начина гласања, који не препознаје симетрију, јер управо бинарни начин гласања доводи до цикличних резултата.

Потешкоће које доноси бинарно гласање могу се издвојити у неколико црта:

- ❖ Немогуће је са сигурношћу рећи да Кондорсеов профил, који се добија помоћу точка рангирања, даје скуп гласова који би требало да се међусобно поништи и резултира нерешеним исходом.
- ❖ Како бинарне методе не препознају симетрију Кондорсеовог профила, бинарни исход је круг.
- ❖ Бинарни круг се догађа јер бинарна метода не може да направи разлику да ли Кондорсеов део профила обухвата и циљане транзитивне гласаче или гласача са кружним редоследима.
- ❖ Директна последица је да било која процедура која се заснива на бинарном гласању, укључујући и Кондорсеовог победника, носи са собом ризик да на њен исход у озбиљној мери могу утицати ставови непостојећих кружних гласача (видети [8]).

6.3. Кондорсе и Ероу

Ероуова теорема, о којој је већ било речи, тврди да не постоји савршена изборна процедура и да има доста услова, између осталог и услов транзитивности и ИИА услов. Када се користи бинарна метода, тј. када се пореде у паровима, увек је испуњен ИИА услов и занемарује се транзитивност гласова. Важно је да се поново истакне да ова заблуда о постојању кружних гласача јесте резултат Кондорсеовог дела профила. То имплицира да ће ствари деловати много боље кад уклонимо Кондорсеов ефекат из профила. Резултат тога дат је у следећим теоремама:

Теорема 17. (Сари [8]) *За било који број кандидата, претпоставља се да се Кондорсеова компонента може уклонити из свих профила. Претпоставке Ероуове теореме су задовољене Борда рачуном.*

Види се да Ероуова теорема не каже да су све процедуре лоше, већ да треба само уклонити Кондорсеову компоненту која доводи до кружења гласова.

Теорема 18. (Сари [8]) *Претпоставка је да Ероуов ИИА услов може да се модификује*

Неки математички аспекти теорије гласања

тако да процедура зависи не само од тога како сваки гласач гласа за неки од парова кандидата, већ, такође, да зависи и од података који потврђују да гласачи имају транзитивне жеље – конкретно, тако да користи и број кандидата које гласач рангира између два одређена кандидата. Борда рачун задовољава овај измењени облик ИИА и других услова које поставља Ероу. Ниједна друга позициона метода не задовољава ове услове.

Пример када су резултати такви да се међусобно поништавају, тј. када постоје само два гласача, а резултати су дијаметрално супротни, погодан је за разоткривање боље методе.

Пример 28. Иван и Наташа су размишљали како да проведу свој одмор и имали су у оптицају да иду на море, планину или село. Наташа је увек за море, а Иван за село. Њихове преференције су дате у табели:

Преференције	
Наташа	Море > Планина > Село
Иван	Село > Планина > Море

Табела 13.

Исход је, наравно, нерешен, али питање је да ли би све изборне процедуре дале нерешен исход. Позиционе методе дају следеће резултате:

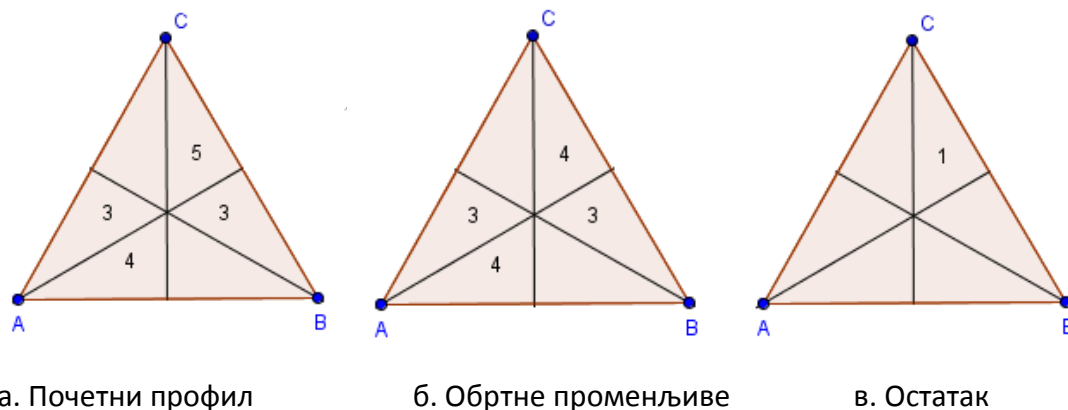
	Море	Планина	Село
Наташа	1	s	0
Иван	0	s	1
Укупно	1	2s	1

Табела 14.

Све зависи од тога да ли ће распоред поена бити $(1, \frac{1}{2}, 0)$ или $(1, \frac{5}{6}, 0)$ или неки други распоред. Само један распоред гласова доводи до нерешеног исхода, а то је $(1, \frac{1}{2}, 0)$, тј. када је $s = \frac{1}{2}$. Што значи да је за $s = \frac{1}{2}$, резултат: Море $\approx$ Планина $\approx$ Село. Код осталих позиционих метода се не долази до нерешеног исхода, тако да код њих нема симетрије, тј. поништавања гласова до очекиваног нерешеног исхода.

Пример 29. Разлике у исходима могуће је приближније објаснити у случају када постоји три кандидата. Враћањем на пример 14, о избору председника одељења, где су добијени различити изборни исходи. Те разлике могу се објаснити управо на основу поништавања гласова и обртних променљивих, које су, заправо, и одговорне за варирање резултата.

Неки математички аспекти теорије гласања



Слика 19.

Поништавање гласова започиње од почетног троугла и то посматрајући напоредне троуглове и скидајући највећи могући број гласова. Прво се посматрају троуглови са бројем 5 и 4, број гласова који се могу поништити у овом случају је 4. Потом, посматрају се троуглови са гласовима 3 и 3, те је очито, пошто је једнак број гласова, да се они међусобно поништавају. На тај начин добијена је слика б), односно троугао који представља обртне променљиве, оне које воде до нерешеног исхода. Последња слика в) представља остатак поништавања, који би требало да одлучи победника. Значи онај гласач који има преференцију $C > B > A$ требало би да одлучи изборе.

У наведеном примеру кандидат С је победио применом Борда рачуна, и на основу слике в) приметно је да је након поништавања кандидат С опет победник. Једини закључак је да обртне променљиве не утичу на БЦ методу гласања. Поред БЦ методе, и на бинарни начин гласања обртне променљиве немају утицај. А за све остале процедуре које дају различите исходе, управо су обртне променљиве најодговорније.

Обртне променљиве утичу на различите резултате и код процедуралне дужи (Пример са три кандидата у ком је утврђено седам различитих исхода). Тако да базна тачка процедуралне дужи представља нормализовани резултат Бординог гласања, док остатак дужи дефинишу обртне променљиве. Према томе, једина метода која је отпорна и на Кондорсеове и обртне променљиве је Бордина метода.

7. Примена вероватноће и статистике у теорији гласања

Немогуће је проучавати теорију гласања без примене ове две веома битне научне гране. И једна и друга грана имају широке спектре примене, не постоји особа која се са овим научним гранама није сусрела бар једном у свом животу и раду.

7.1. Вероватноћа пресудности утицаја једног гласача

Вероватноћа је грана математике која се бави анализом случајних феномена, као што су бацање коцке или бацање новчића и слично. Дакле, она пружа могућност да се анализом прошлих случајних догађаја на основу испољене статистичке правилности утврди вероватноћа понављања неких од њих. Две математичке теореме представљају основу вероватноће, а то су закон великих бројева и Централна гранична теорема. Консултована литература [5].

Аксиома 8. (Аксиома σ – поље [5]) Подскуп $\mathcal{F}$ партитивног скупа $\mathcal{P}(\Omega)$ је σ – поље над Ω ако важе услови:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$,
2. ако $A \in \mathcal{F}$ онда $\bar{A} \in \mathcal{F}$,
3. ако $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$, онда $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Аксиома 9. (Аксиома вероватноће [5]) Нека је Ω скуп елементарних догађаја и $\mathcal{F}$ σ – поље над Ω . Функција $P: \mathcal{F} \rightarrow [0,1]$ се зове вероватноћа на простору $(\Omega, \mathcal{F})$ ако задовољава услове:

1. $P(\Omega) = 1$,
2. ако $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots$, онда

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Употребљаваће се ознаке:

$$\{a \leq X < b\} = \{\omega | a \leq X(\omega) < b\} = X^{-1}([a, b)).$$

Дефиниција 16. [5] Пресликавање $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ је случајна променљива на простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ако $X^{-1}(S) \in \mathcal{F}$ за свако $S \in \mathcal{B}$, где је $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ Борелово σ – поље. Еквивалентно, каже се да је X $\mathcal{F}$ – мерљиво.

Нека је пресликавање $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ случајна променљива. Ако је $X(\Omega)$ коначан скуп кажемо да је X **проста случајна променљива**.

Дефиниција 17. [5] **Очекивање** $E(X)$ дискретне случајне променљиве X са расподелом $p(x_k)$, $k = 1, 2, \dots$, дефинише се са

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p(x_k),$$

и постоји ако и само ако

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| p(x_k) < \infty.$$

Дефиниција 18. [5] Моменат реда k , $k \in \mathbb{N}$, случајне променљиве X је $E(X^k)$. Централни моменат реда k , $k \in \mathbb{N}$, случајне променљиве X је

$$E\left((X - E(X))^k\right).$$

Дефиниција 19. [5] Централни моменат реда 2 случајне променљиве X зове се **дисперзија** случајне променљиве X и означава се са $D(X)$.

$$\text{Дакле, } D(X) = E\left((X - E(X))^2\right).$$

Теорема 19. (Неједнакост Чебишева [5]) Ако случајна променљива X има други моменат, $E(X^2)$, тада је за свако $\varepsilon > 0$,

$$P\{|X| \geq \varepsilon\} \leq \frac{E(X^2)}{\varepsilon^2}.$$

Ако се у неједнакост Чебишева уместо X стави $X - E(X)$ добија се да, за свако $\varepsilon > 0$ важи

$$P\{|X - E(X)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{E\left((X - E(X))^2\right)}{\varepsilon^2} = \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Теорема 20. (Закон великих бројева Чебишева [5]) Ако су случајне променљиве $X_1, X_2, \dots$ независне и имају униформно ограничене дисперзије (што значи да постоји константа C таква да је $D(X_n) \leq C$, $n = 1, 2, \dots$) онда за дати низ важи слаби закон великих бројева, то јест, за свако $\varepsilon > 0$,

$$P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i)\right| \geq \varepsilon\right\} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Доказ. [5] На основу Чебишеве неједнакости, за свако $\varepsilon > 0$,

$$P\{|X - E(X)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Зато је, за свако $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} & P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E(X_i)\right| \geq \varepsilon\right\} \\ &= P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right)\right| \geq \varepsilon\right\} \\ &\leq \frac{D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n D(X_i)}{\varepsilon^2} \\ &\leq \frac{nC}{n^2\varepsilon^2} = \frac{C}{n\varepsilon^2} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \quad \square \end{aligned}$$

Теорема 21. (Закон великих бројева Хинчина [5]) Ако независне случајне променљиве $X_1, X_2, \dots$ имају исту расподелу и коначно очекивање: $E(X_n) = a, n = 1, 2, \dots$, онда важи слаби закон великих бројева, то јест

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j \xrightarrow{p} a, n \rightarrow \infty.$$

Теорема 22. (Централна гранична теорема [5]) Ако су $X_1, X_2, \dots$, независне случајне променљиве са истом расподелом и коначном дисперзијом $D(X_n) = \sigma^2, n = 1, 2, \dots$, онда важи

$$P\left\{\frac{\sum_{k=1}^n X_k - E(\sum_{k=1}^n X_k)}{\sqrt{D(\sum_{k=1}^n X_k)}} < x\right\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, n \rightarrow \infty.$$

Политикин забавник, један од најбољих часописа за децу, својевремено је објавио текст Стевеа Селвина, у ком је он објаснио вероватноћу помоћу врло познатог *Проблема Монтија Хола*. Следи пример из популарне литературе који илустративно показује примену вероватноће.

Пример 30. Наиме, идеју за ово објашњење је добио гледајући амерички ТВ квиз, чији водитељ је управо био Хол, по коме је овај проблем назван. Учесник квиза је добијао могућност да изабере једна од троје врата и да на тај начин добије речену награду. Стеве је убацио могућност промене избора, који није био могућ у квизу, али који је овог водитеља убацио у другачији круг људи састављен од математичара, љубитеља загонетки, психолога и других. Стеве је тврдио да играч на срећу из телевизијског студија може изаћи са наградом ако примени стечено знање о вероватноћи из средње школе.

Када је учесник квиза суочен са избором врата 1, 2, или 3, вероватноћа да ће изабрати врата иза којих је награда износи $\frac{1}{3}$ за било која изабрана врата. Ако је, нпр. изабрао

врата 1, шанса да се иза њих налази награда износи $\frac{1}{3}$, а да се иза њих не налази награда износи $\frac{2}{3}$, што је исто што и шанса да се награда налази иза врата 2 или врата 3 ($\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$). Затим, Монти, који зна где је награда, отворио је, на пример, врата 3 да покаже да иза њих није награда и, након тога, питао је потенцијалног срећног добитника жели ли да се предомисли и да сада изабере врата 2. У овој прилици такмичар треба увек да се определи за врата 2, а не да се задржи на свом првобитном избору, зато што је вероватноћа да се награда налази иза врата 2, када је Монти открио да није иза врата 3, $\frac{2}{3}$, док вероватноћа да је иза врата 1, остаје $\frac{1}{3}$.

Променом избора у датим околностима такмичар има два пута већу шансу за освајање аута. Забуна у глави учесника квиза може да настане уколико он помисли да сада бира између врата 1 и врата 2 и да му је шанса у оба случаја по $\frac{1}{2}$, то јест да му је свеједно хоће ли или неће променити избор. Међутим, учесник све време бира између троја врата, а Монти му отварањем врата даје додатно обавештење, то јест да награда сигурно није иза врата 3.⁹

Могуће је вероватноћу ближе објаснити и у мало комплекснијим ситуацијама, као што је гласање. Грађани имају моралну, али не и обавезну одговорност да изађу на гласање. Врло је важно да је коначна одлука донета од већине грађана, али, ако се посматра појединачни глас, јасно је да његов утицај постаје мали.

Свако би требало да размисли шта је то што жели да постигне гласањем, односно требало би да процени колика је његова корист од тога. Некада се на основу разних статистичких процена и тестова предвиди победник, а затим се ти статистички подаци прикажу у јавности. Чак и када се предвиђа да ће победник однети убедљиву победу, не треба се водити тиме јер је све то само теорија, а у стварности је све могуће. Све процене су ослоњене на вероватноћу да ће излазност бити у већинском броју, зато један глас заједно са осталим има велику важност иако један на све њих не мења ништа. Данас би у многим државама, било штошта другачије да је сваки појединац гласао због личне користи.

Ради лакшег појашњења, узета су само два од многобројних кандидата као два могућа избора која имају гласачи. Ознаке су следеће:

- ❖ E^1 – очекивана корист коју доноси кандидат 1;
- ❖ E^2 – очекивана корист коју доноси кандидат 2;
- ❖ B – вредност победе кандидата 1 ($B = E^1 - E^2$);
- ❖ P – вероватноћа да ће гласачев глас пресудити;
- ❖ PB – очекивана корист од гласања;

⁹Преузето из: www.politikin-zabavnik.rs

Неки математички аспекти теорије гласања

❖ c – трошак гласања.

Неки гласач види већу корист у кандидату 1 од кандидата 2, а неки обрнуто. У тексту ће бити разматран само први случај, према томе је $E^1 > E^2$. Рационалан гласач ће гласати само ако ће његов глас утицати на исход избора и ако је $PB > c$ (ако је његова очекивана корист већа од трошкова). Вероватноћа да ће гласач који подржава кандидата 1 пресудити изборе дата је следећом формулом:

$$P = \frac{1}{2}Pr(X_1 = X_2) + \frac{1}{2}Pr(X_1 = X_2 - 1),$$

где је X_1 број гласача који су гласали за кандидата 1, а X_2 број гласача који су гласали за кандидата 2 (видети [27]).

Ова формула показује да ли гласач треба да изађе на изборе или не. У првој загради је представљена вероватноћа да резултат буде нерешен, а у другој загради вероватноћа да кандидат 1 изгуби за један глас. Управо су то две ситуације када је глас појединца битан, тј. када он може утицати на коначан резултат. У првом случају гласач може да пресуди у корист свог кандидата ако је резултат нерешен без његовог гласа, а у другом случају може допринети нерешеном исходу ако његов кандидат има један глас мање од противника.

Пример 31. [27] Нека је N број потенцијалних гласача, σ_1 проценат гласача који подржавају кандидата 1, а σ_2 проценат гласача који подржавају кандидата 2 ($0 \leq \sigma_1 + \sigma_2 \leq 1$).

Претпоставка је да је $N = 4$, $\sigma_1 = \frac{1}{4}$ и $\sigma_2 = \frac{3}{4}$, тада су вероватноће излазности дате у следећој табели.¹⁰

	$X_2=0$	$X_2=1$	$X_2=2$	$X_2=3$
$X_1=0$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$
$X_1=1$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$

Табела 22.

Вероватноћа да ће један гласач одлучити, исход је:

$$P = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{16} + \frac{1}{16} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{16} + \frac{3}{16} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{16} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{16} = \frac{5}{16}.$$

¹⁰ $P\{X_1 = 1, X_2 = 1\} = \frac{3}{16}$.

7.2. Неке статистичке методе у теорији гласања

У овом делу следи приказ резултата из [3] који су везани за примену статистичких метода попут Крускал – Валисовог теста и Мен – Витнијевог теста (Kruskal – Wallis, Mann – Whitney, видети [9]). Као и поређење са резултатима које је Сари открио у процесу гласања [8].

У складу са појмовима из теорије вероватноће, популација $\mathcal{E}$ се може посматрати као скуп свих могућих исхода неког експеримента, а само обележје X као случајна променљива

$$X : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Дефиниција 20. [9] Нека се на популацији $\mathcal{E}$ посматра обележје X . Прост случајан узорак обима n за обележје X је n – торка независних случајних променљивих $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ од којих свака има исту расподелу као и обележје X .

Приликом статистичког закључивања на основу узорака, користе се разне трансформације $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ простог случајног узорака.

Дефиниција 21. [9] Нека $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ прост случајан узорак обима n за обележје u $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\xi$ Борелова функција. Случајне променљиве $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ је статистика ако у њој не фигурише непознати параметар.

Тестирање хипотеза је област статистичке анализе која у широкој употреби јер омогућује систематично доношење одлука о проблемима који у себи садрже неодређеност.

Дефиниција 22. [9] Статистичка хипотеза је свака претпоставка о томе да обележје X има расподелу која припада неком подскупу скупа допустивих расподела.

Нека је допустива фамилија расподела обележја $X \{f(x, \theta), x \in R, \theta \in \Theta\}$. Ако је претпоставка да θ припада скупу $\Lambda \subset \Theta$ то се записује као $H_0(\theta \in \Lambda)$ и ова хипотеза се назива **нулта хипотеза**. Хипотеза да θ припада неком другом подскупу $\bar{\Lambda} \subset \Theta$, $\Lambda \cap \bar{\Lambda} = \emptyset$, $H_1(\theta \in \bar{\Lambda})$ назива се **алтернативна хипотеза** [9].

Поступак одбацивања статистичких хипотеза на основу реализованог узорака $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ назива се статистички тест, $\mathcal{T}$. Тест се спроводи тако што се најпре бира област $C_{\mathcal{T}} \subset \mathbb{R}^n$ која се назива критична област за нулту хипотезу и одлука се доноси на следећи начин:

- Ако регистровани узорак $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ не припада $C_{\mathcal{T}}$, нема разлога да се одбаци хипотеза H_0 .
- Ако регистровани узорак $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ припада $C_{\mathcal{T}}$, хипотеза H_0 се

одбацује.

Мен – Витнијев тест. [9] Користи се у ситуацијама када се желе открити разлике између две популације на бази случајних узорака из тих популација. Најпре се два узорка споје, али тако да новодобијени узорак буде поређан у варијациони низ (од најмањег до највећег). Елементима у варијационом низу се придружују рангови и то од највећег до најмањег, без обзира којој популацији припадају.

Ранг – редни број тог елемента у варијационом низу.

У Мен – Витнијевом тесту подаци се састоје од два случајна узорка. Нека $X_1, X_2, \dots, X_n$ означава случајан узорак обима n из прве популације, и нека $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ означава случајан узорак обима m из друге популације. Основне претпоставке су:

1. Оба узорка су случајни узорци из одговарајућих популација,
2. Осим независности унутар сваког узорка и два узорка су међусобно независна,
3. Скала мерења за свако обележје је бар ординална.

Нека је F_X функција расподеле која одговара првој популацији, а F_Y функција расподеле која одговара другој популацији. Нулта хипотеза је да

$$H_0(F_X(t) = F_Y(t), \text{ за свако } t \in \mathbb{R}).$$

Нулта хипотеза је да обележје X и Y имају исту расподелу вероватноћа. Супротна хипотеза је да једно обележје има систематски веће (или мање) вредности од другог, то јест да је X стохастички веће од Y , што се записује $X > Y$, тада је $F_X(t) < F_Y(t)$. Ако је X стохастички мање од Y , што се записује $X < Y$, $F_X(t) > F_Y(t)$. Формираном варијационом низу од $n + m$ елемената додељују се рангови са вредностима од 1 до $n + m$. Нека су $R(X_i)$ рангови придружени X_i , $i = 1, 2, \dots, n$, а $R(X_j)$ рангови придружени X_j , $j = 1, 2, \dots, m$. Тест статистика је

$$W = \sum_{i=1}^n R(X_i).$$

Крускал – Валисов тест. [9] Представља проширење Мен – Витнијевог теста за два независна узорка на проблем анализирања k независних узорака. Подаци се састоје од k случајних узорака који могу бити различите димензије. Означимо i – ти случајан узорак обима n_i са $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in_i}$. Тада се подаци могу поређати у колоне

Узорак 1	Узорак 2	...	Узорак k
X_{11}	X_{21}	...	X_{k1}
X_{12}	X_{22}	...	X_{k2}

...	...	...	...
X_{1n}	X_{2n}	...	X_{kn}

Нека је n укупан број регистрованих вредности:

$$n = \sum_{i=1}^k n_i.$$

Ранг 1 се придружује најмањој од n регистрованих вредности, ранг 2 следећој најмањој, и тако до највеће од свих n вредности којој се придружује ранг n . Нека $R(X_{ij})$ представља ранг придружен вредности X_{ij} . Нека је R_i сума рангова придружених i – том узорку.

$$R_i = \sum_{j=1}^{n_i} R(X_{ij}), i = 1, 2, \dots, k.$$

Рачуна се R_i за сваки узорак и на крају се упоређују суме рангова придружених елементима једне популације.

Основне претпоставке су:

1. Оба узорка су случајни узорци из одговарајућих популација,
2. Осим независности унутар сваког узорка и два различита узорци су међусобно независни,
3. Скала мерења за свако обележје је бар ординална.
4. Или су свих k функција распоедела обележја на популацијама идентичне, или нека обележја теже да имају веће вредности од осталих.

Тест статистика H је:

$$H = \frac{1}{Q^2} \left(\sum_{i=1}^k \frac{R_i^2}{n_i} - \frac{n(n+1)2}{4} \right) \cdot Q^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{\text{по свим ранговима}} R^2(X_{ij}) - n \frac{n+1}{4} \right).$$

Хипотезе код Крускал – Валисов теста су:

H_0 : Свих k функција распоеделе обележја на посматраним популацијама су идентичне,

H_1 : Немају свих k обележја идентичне средње вредности.

Пример 32. Бацање медицинке у средњој школи на физичкој култури послужиће као добар пример. Сваки резултат сваког ученика записује се у метрима са тачношћу центиметра. Насумично су изабрана три ученика који бацају медицинку на сваком часу. Дакле, први и наредни час бацали су лопту и постигли следеће резултате приказане у табели 15.

Неки математички аспекти теорије гласања

	Ученик 1	Ученик 2	Ученик 3
Резултати	6,78	6,72	6,70
	6,87	6,80	6,89

Табела 15.

Водећи се принципом Крускал – Валисовог теста, први корак је да се сви подаци поређају од најмање до највеће вредности. Потом се свакој од њих, у складу са позицијом коју заузима, додељује број од 1 до 6. На крају се саберу добијене вредности за сваког ученика појединачно, те ће добијена сума одредити победника. Као што се може закључити из табеле, победу односи ученик 1 (видети [8]).

	Ученик 1	Ученик 2	Ученик 3
	3	2	1
	5	4	6
Укупно:	8	6	7

Табела 16.

Редослед је следећи: $U_1 > U_3 > U_2$.

Ако се посматрају резултати које су изабрани ученици постигли на следећа два часа, и исти се поређају у растући низ, опет ће се добити исти победник, тј. ученик 1.

	Ученик 1	Ученик 2	Ученик 3
Резултати	6,58	6,52	6,51
	6,63	6,62	7

Табела 17.

И у том случају редослед је следећи: $U_1 > U_3 > U_2$.

Међутим, када се добијени подаци из претходне две табеле споје у једну и на такву примени КВ тест, онда се посматра 12 добијених резултата, који се обрађују на сличан начин као у примеру са 6 резултата. Добијени резултати се поређају у растући низ и додељују им се вредности од један до дванаест. Сада ће се променити победник, неће више победник бити ученик 1, већ ученик 3. Дакле, други могући резултат ће бити: $U_3 > U_1 > U_2$ (видети [3] и [8]).

Ако би се постигнути резултати ученика упоредили по паровима, тј. ако би се упоредили U_1 и U_2 , затим U_2 и U_3 , и U_1 и U_3 , користио би се Мен – Витнијев тест, који је општији од Крускал – Валисовог теста и ради по истом принципу као и Крускал – Валисов тест. Мен – Витнијев тест се користи када постоји само два кандидата, док се за више кандидата користи Крускал – Валисов тест.

Неки математички аспекти теорије гласања

	Ученик 1	Ученик 2
Резултати	6,78	6,72
	6,87	6,80
	6,58	6,52
	6,63	6,62

Табела 18.

Сваки ученик је бацао медицинку четири пута, што доводи до осам података (по четири за сваког) које је потребно обрадити. Као што се може претпоставити, сада се сваки резултат изједначава са вредностима од један до осам, потом се изврши сумирање за ученика 1 и ученика 2. Ово се може једноставно приказати.

	Ученик 1	Ученик 2
	6	5
	8	7
	2	1
	4	3
Укупно:	20	16

Табела 19.

Аналогно претходном начину, долази се до односа између преостала два пара.

	Ученик 2	Ученик 3
	6,72 (5)	6,70 (4)
	6,80 (6)	6,89 (7)
	6,52 (2)	6,51 (1)
	6,62 (3)	7,00 (8)
Укупно:	16	20

Табела 20.

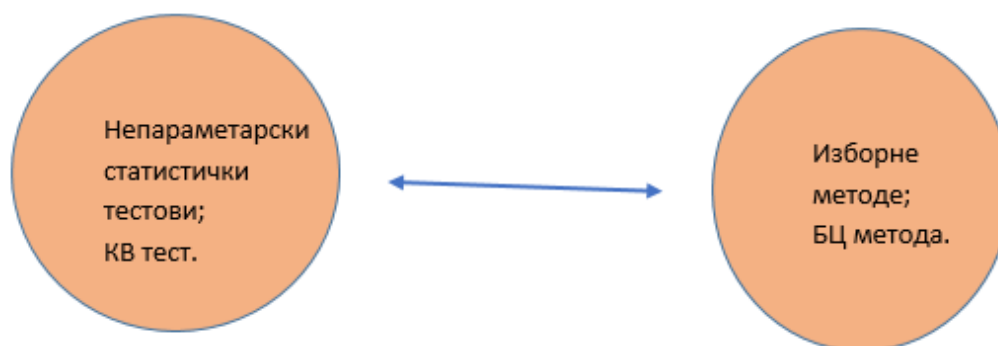
	Ученик 1	Ученик 3
	6,78 (5)	6,70 (4)
	6,87 (6)	6,89 (7)
	6,58 (2)	6,51 (1)
	6,63 (3)	7,00 (8)
Укупно:	16	20

Табела 21.

Из сваке табеле се може видети однос међу паровима, и на тај начин доћи до коначног победника међу њима. Очито, када се упореде U_1 и U_2 , види се да је U_1 победник и то са односом гласове 20:16. На сличан начин, U_3 је бољи у односу на U_2 , као и у односу на U_1 . Тако да се као коначни резултат добија следећи однос: $U_1 > U_3 > U_2$.

Слично као што скоро свака изборна процедура без обзира на добијене гласове оставља простора за манипулацију и тактику, тако се и у тестовима може наићи на такав простор. Јасно је да постигнути резултати нису мењани. Прво су коришћена два узорка која, када се обраде, дају победника – ученик 1, други пут су коришћена четири узорка који доводе до идентичног резултата. Међутим, трећи пут су сви узорци обједињени и исход је промењен, тј. победник је ученик 3. Нажалост, резултат се мења када се промени начин обраде и количина података која се узима у обзир. Тужна истина је да је овакве манипулације могуће користити у свакодневним ситуацијама.

Могуће је повући следећу паралелу:



Очито да се резултат мења додавањем или одузимањем неких вредност. Сада, када се упореди овај закључак са гласањем, изразито је јасно да одустајање или додавање неких кандидата може озбиљно променити редослед.

7.3. Двокружни систем (runoff method)

Овај систем има два корака. У првом кругу најпре се бирају два најбоље позиционирана кандидата. Потом, долази други круг, у коме су само два кандидата. Након тога, већинским гласањем, бира се победник. Ово је метод који не препознаје Кондорсеовог победника.

Пример 33. Нека је девет другара одлучивало у који ће ресторан отићи. Бирали су између три ресторана, који ће бити означени као а, b и с.

Неки математички аспекти теорије гласања

У табели 23, где је приказан избор ресторана, види се да с има 4 гласа, b 3 гласа, а свега 2 гласа има ресторан а. Према томе, а бива елиминисан у првом кругу гласања, а други круг се организује између с и b. Присталице ресторана а пребацују своје гласове на ресторан b. Тада, ресторан b добија нова два гласа и односи победу над с. Иако је ресторан а Кондорсеов победник, овим методом он испада у првом кругу (видети [14]).

2	3	4
a	b	c
b	a	a
c	c	b

Табела 23.

Поред гласања у паровима, могуће је применити и елиминационо гласање у коме нема победника у већинском систему гласања. Према томе, ако у првом кругу ни један кандидат нема већину, неопходно је применити други круг и у њему је избор сужен само на две опције, и то две опције које су биле прве у првом кругу гласања.

Пример 34.

Број гласача који су гласали одређену преференцију	6	5	4	2
	a	c	b	b
	b	b	c	a
	c	a	a	c

Табела 24.

Како не постоји победник у првом кругу ($a = 6$, $b = 6$, $c = 5$), примењује се други круг гласања, у коме је очито победник кандидат а ($a = 11$, $b = 6$). Али, да су гласачи дали предност кандидату а у односу на b, односно да је последња преференција била другачијег редоследа, валидно је запитати се да ли би и тада био исти победник а (видети [14]).

Број гласача који су гласали одређену преференцију	6	5	4	2
	a	c	b	a
	b	a	c	b
	c	b	a	c

Табела 25.

Ако би се остало при томе да два најбоља иду у други круг гласања, сада би најбољи били a и c ($a = 8$, $b = 4$, $c = 5$). У другом кругу гласања би ипак победник био кандидат c ($a = 8$, $c = 9$). Дакле, довољно је било наговорити само два кандидата да промене редослед a и b , и већ би се променили кандидата. Овим је само још једном потврђено како редослед кандидата може да промени резултат, чак и када има само два круга гласања (видети [14]).

Постоје само две могућности када су у питању избори и сама њихова организација. Прва могућност је да се гласа за исти скуп кандидата и да се, користећи добијене гласове, примењују различите могуће изборне процедуре како би се дошло до различитих коначних исхода гласања. Друга могућност је коришћење једне процедуре гласања где се уводи промена скупа гласова, тј. гласа се у више кругова и у сваком кругу се избацује неки од кандидата за које се гласа. На тај начин сваки од кругова гласања има различит број кандидата, односно сваки нови круг има мање кандидата од претходног и самим тим другачији скуп кандидата. Било да се користи прва или друга могућност, долази се до идентичног закључка – никада није сигурно да ли је победник заиста победник.

Поред могућности да гласач гласа за сваког победника, постоји још опција. Постоји велики број процедура које користе различите позиционе методе са истим скупом кандидата. Једна од њих је Борда рачун. У Борда методи, ако је гласачима дозвољено да гласају за само једног од три кандидата, могуће је користити један од система, тј. или $(2, 1, 0)$ или $(2, 0, 0)$. Код кумулативног гласања, сваки гласач субјективно распоређује дати број поена. На пример, сваки гласач распоређује два гласа између кандидата и може да бира између система $(2, 0, 0)$ и $(1, 1, 0)$. Док је код гласања одобравањем, гласачу понуђено да бира систем $(1, 0, 0)$ или $(1, 1, 0)$, тако да може гласати за једног или два кандидата. Поред великог броја процедура има и још могућности, тј. свака изборна процедура има своје подскупе које дају опет велики број могућности (видети [8]).

Закључак

Теорија гласања је једна од најзанимљивијих поља примењене математике, која пружа бројна решења тамо где се она ни не називу. У мору свакодневних, наизглед обичних момената које сваки човек проживи, нађе се и понеки који промени предстојећа дешавања у будућем времену. О томе најверодостојније могу посведочити старије генерације данашњих породица, које су прошле ратове, осетиле државну руку политичке моћи, промене председника и остале неминовне догађаје.

Неки математички аспекти пружају јасан увид и приказ скелета машинерије изборног процеса. Некада се не може борити против наметнутих процеса, али увек се могу анализирати. Како су изборни системи настали под различитим околностима, могуће их је поделити у три групе. Свака од те три групе је независна и другачија од друге две. Која ће се користити од њих, зависи од избора државе и њених становника. Проблем мењања процедура узрокује низ промене исхода, али мењање процедуре је неизоставно на путу ка проналажењу најбоље за одређену државу. Међутим, промена процедуре није увек у сврси бољитка, већ је некад и средство малверзације.

Изборни систем би требало у највећој могућој мери да осликава вољу оних који учествују у њему, односно вољу гласача, због којих је и основан. Разлог све веће употребе теорије гласања је добијање потпуно контрадикторних исхода од оних очекиваних. Велику заслугу за развој ове области и њене примене носи различита политика у различитим државама. Није потребно бити велики научник, математичар, економиста и слично да би се манипулисало народом. Многи политичари су кроз историју мењали изборне процедуре не би ли однели победу, која би по вољи гласача отишла неком другом. Политичку моћ, коју многи свесно користе, могуће је измерити ако ништа друго.

Некако се манипулације врше сразмерно величини државе. Но, свакако су присутне у једној од најбројнијих држави, у САД – у. Легитимно се у свести намеће питање да ли је настанак изборног колеџа био циљно постављање основа за даље маневрисање. Главни проблем изборног колеџа је мишљење да ће електори *пренети* својим гласом вољу гласача, или још већи проблем лежи у томе што су гласачи немоћни уколико се то не деси.

Постоји мноштво изборних процедура које су широко распрострањене и користе се у многобројним ситуацијама. Заједничко за све њих је да су потпуне независне и тотално другачије. Тешко је кроз један једини пример демонстрирати и елиминационо гласање и гласање одобравањем, затим кумулативно, Борда рачун, Кондорсеовог победника и слично и стога је свака од ових метода објашњена на различитим примерима у раду.

Неки математички аспекти теорије гласања

Циљ помињања свих метода је био да се покаже колико је важан избор саме процедуре, помоћу које се долази до победника. Нажалост, победника не одлучују само гласачи већ добрим делом и изборни процес. Ова сурова чињеница је многим могла или већ јесте променила ток живота.

Председнички избори... Гласаћу. Нећу! Победиће сигурно. Ипак, неће.

Бујица мисли просечног гласача не да се у потпуности реконструисати иако је његова улога прилично мала, пуко попуњавање хартије, но не и без тежине коју он сам осећа. Колико год да је изборни процес машинерија у коју народ упада и иде током који је испрограмиран, она не ради без гласача. Један глас може да промени много или ништа јер сви гласови у глобалу више вреде и јасније кристализују победника.

Једном је неко рекао *Суштина математике је у њеној вечитој младости*. И у овој, поприлично изученој области – теорији игара, свако ново откриће је учини млађом или, можда, она уопштени не стари.

Литература

- [1] Б. Боричић, *Логичко и историјско одређење теорема немогућности Ероуа и Сена*
- [2] Б. Шешеља, А. Тепавчевић, *Алгебра 1*, Департман за математику и информатику, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду, 2004.
- [3] D. B. Haunsperger, D. G. Saari, *The lack of consistency for statistical decision procedures*, *The American Statistician*, 1991.
- [4] D. Easley, J. Kleinberg, *Networks, Crowds, and Markets: Reasoning about a Highly Connected World*, Cambridge University Press, 2010, chapter 23 Voting
- [5] Д. Рајтер – Ђирић, *Вероватноћа*, Департман за математику и информатику, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду, 2009.
- [6] D.G. Saari, *Basic Geometry of Voting*. (Springer-Verlag: Berlin), 1995.
- [7] D. G. Saari, M. Tataru, *The likelihood of dubious election outcomes*, *Economic Theory*, 1999, <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.39.3813&rep=rep1&type=pdf>
- [8] D. G. Saari, *Chaotic elections*, A mathematician looks at Voting, American Mathematical Society, 2001.
- [9] З. Лозанов–Црвенковић, *Статистика*, Универзитет у Новом Саду, 2012.
- [10] З. Лужанин, *Математички модели у економији*, Департман за математику и информатику, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду, писани материјал, 2007.
- [11] A. Rubinstein, *Lecture Notes in Microeconomic Theory*, Princeton University, 2006.
- [12] J. von Neumann, O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton, NJ. Princeton University Press, 1953.
- [13] J. Geanakopolis, *Three Brief Proofs of Arrow's Impossibility Theorem*, *Economic Theory*, 2005.
- [14] J. Hindriks, G.D. Myles, *Intermediate Public Economics*. (Cambridge: MIT Press) Chapter 11, 2013.
- [15] J. Špirková, P. Král', *Aggregation Functions and Personal Utility Functions in General Insurance*, Department of Quantitative Methods and Information Systems, Faculty of Economics, Matej Bel University,

Неки математички аспекти теорије гласања

- [16] K. J. Arrow, *Social Choice and Individual Values*, други део, Wiley, New York, 1963.
- [17] М. Гачановић, *Устав и право грађана*, Клет, 2014. Београд
- [18] М. Ступар, *Рационалност и демократија*, Београд 2008.
- [19] М. Hykšova, *Several Milestones in the History of Game Theory*, VII. Österreichisches Symposion zur Geschichte der Mathematik, 2004.
- [20] R. Fuller, *Decision Making under Uncertainty –Tutorial*, Institute for Advanced Management Systems Research Department of Information Technologies Åbo Akademi University, 2010.
- [21] С. Орловић, *Изборни систем и институционални дизајн*, Универзитет у Београду
- [22] Теорија одлучивања и игара, *Математичке релације*, <http://www.ualberta.ca/~vladan/Teorija%20odlucivanja%20i%20igara%20Uvod.pdf>
- [23] izbornareforma.rs/.../Recnik%20osnovnih%20pojmov...
- [24] <http://apprendre-math.info/serbe/historyDetail.htm?id=Borda>
- [25] <http://katzman.staff.shef.ac.uk/MAS301/voting%20systems.docx>
- [26] <http://uni-obuda.hu/users/fuller.robert/sda12.pdf>
- [27] www.ekof.bg.ac.rs/.../2.-Politicka-ekonomija-glasanje
- [28] www.econport.org
- [29] www.math.uci.edu/~dsaari/
- [30] www.wikipedia.org

Биографија



Наташа Рикаловић рођена је 15. маја 1990. године у Лозници. Завршила је 2005. године основну школу „Свети Сава” у Липничком Шору, близу Лознице.

Потом је уписала гимназију „Вук Караџић” у Лозници, природно–математички смер, коју је завршила са одличним успехом 2009. године.

Исте године уписала је Природно–математички факултет у Новом Саду, смер математика финансија. Закључно са септембарским испитним роком 2012. године положила је све предвиђене испите са просечном оценом 8,64 и стекла звање

Математичар примењене математике.

Након тога, у октобру 2012. године, уписала је мастер академске студије на истом факултету, смер примењена математика. Положила је све испите предвиђене планом и програмом закључно са јануарским испитним роком 2015. године са просечном оценом 8,84 и тиме стекла услов за одбрану мастер рада.

Наташа Рикаловић
Нови Сад, 2015. године

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije:

Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa:

Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada:

Master rad

VR

Autor:

AU

Mentor:

dr Ivana Štajner-Papuga

ME

Naslov rada:

NR

Jezik publikacije:

srpski (ćirilica)

JP

Jezik izvoda:

s/en

JI

Zamlja publikovanja: Republika Srbija

ZP

Uže geografsko područje:

Vojvodina

UGP

Godina:

2015.

GO

Izdavač:

autorski reprint

IZ

Неки математички аспекти теорије гласања

Mesto i adresa: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (7/87/30/15/19/0/0)
FOR (broj poglavlja/strana/lit.citata/tabela/slika/grafika/priloga)

Naučna oblast: matematika
NO

Naučna disciplina: primenjena matematika
ND

Predmetne odrednica, ključne reči: (PO, UDK) relacija preferencije, funkcija korisnosti, proces glasanja

Čuva se: u biblioteci Departmana za matematiku i informatiku
ČS

Važna napomena: nema
VN

Izvod (IZ): U ovom radu su izloženi osnovni pojmovi vezani za relacije preferencije i funkcije korisnosti, te za sam proces glasanja. Razrađeni su pojmovi poput funkcije izbora, izbornog koledža, te teoreme Eroua. Dati su geometrijski prikazi izbornih lista i izbornih rezultata. Razmatrane su strategije glasanja, te primena verovatnoće i statistike u teoriji glasanja.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 13.05.2014.
DP

Datum odbrane: septembar 2015.
DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik: dr Arpad Takači, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Član: dr Miloš Stojaković, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Mentor: dr Ivana Štajner-Papuga, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF NATURAL SCIENCES & MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type:

DT

Monograph type

Type of record:

TR

Textual printed material

Contents code:

CC

Master's thesis

Author:

AU

Mentor:

ME

Dr Ivana Štajner-Papuga

Title:

TI

The basics of fuzzy arithmetic and fuzzy PERT method

Language of text:

LT

Serbian (Cyrillic)

Language of abstract:

LT

s /en

Country of publication:

CP

Republic of Serbia

Locality of publication:

LP

Vojvodina

Publication year:

PY

2015.

Неки математички аспекти теорије гласања

Publisher: author's reprint

PU

Publ. place: Novi Sad, Trd D. Obradovića 4

PP

Physical description: (7/87/30/15/19/0/0)

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Applied mathematics

SD

Subject Key words: preference relation, utility function, voting process

SKW

Holding data: In the library of Department of Mathematics and Informatics

HD

Note:

N

Abstract (**AB**): This paper presents the basic concepts of preference relations and corresponding utility functions and of voting process. Notions like function of choice and Arrow theorem are considered. Geometrical approach to voting lists and results is given. Overviews for different strategies are given, as well as for some aspects of probability theory and statistics with respect to voting issues.

Accepted on Scientific board on: 13.05.2014.

AS

Defended: September 2015.

DE

Thesis Defend board:

DB

President: dr Arpad Takači, full profesor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Member: dr Miloš Stojaković, associate professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Mentor: dr Ivana Štajner-Papuga, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad