



UNIVERZITET U NOVOM SADU  
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
DEPARTMAN ZA  
MATEMATIKU I INFORMATIKU



Nataša Mukić

# TEORIJA IGARA: MATEMATIČKE OSNOVE MITOVA I PARADOKSA

-MASTER RAD-

Novi Sad, 2014.

# Sadržaj

|                                                                 |           |
|-----------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Uvod .....</b>                                               | <b>4</b>  |
| <b>1. Osnovni pojmovi .....</b>                                 | <b>6</b>  |
| 1.1 Podela igara .....                                          | 7         |
| 1.2 Istorija teorije igara .....                                | 9         |
| <b>2. Matrične igre .....</b>                                   | <b>11</b> |
| 2.1 Matrične igre nulte sume .....                              | 11        |
| 2.2 Proste matrične igre .....                                  | 12        |
| 2.3 Mešovite matrične igre .....                                | 13        |
| 2.4 Dominacija strategija .....                                 | 17        |
| <b>3. Bimatrične igre .....</b>                                 | <b>19</b> |
| <b>4. Primena teorije igara .....</b>                           | <b>20</b> |
| 4.1 Životne situacije .....                                     | 20        |
| 4.2 Vojne nauke .....                                           | 22        |
| 4.3 Političke nauke .....                                       | 25        |
| 4.4 Primena u pravu .....                                       | 26        |
| 4.5 Primena u ekonomskoj nauci .....                            | 27        |
| <b>5. Modeli nekooperativnih igara .....</b>                    | <b>28</b> |
| <b>6. Određivanje ravnoteže u konfliktnim situacijama .....</b> | <b>31</b> |
| 6.1 Dilema utrke u naoružanju .....                             | 32        |
| 6.2 Igra kukavice .....                                         | 33        |
| 6.2.1 Bertran Raselova varijanta kukavice .....                 | 34        |
| 6.2.2 Herman Kanova metafora za igru kukavice .....             | 36        |
| 6.3 Parabola lova na jelene .....                               | 37        |
| <b>7. Igre protiv vremena .....</b>                             | <b>39</b> |
| 7.1 Teorija dvoboja .....                                       | 39        |
| 7.2 Legenda o Faustu .....                                      | 42        |
| <b>8. Dilema zatvorenika .....</b>                              | <b>45</b> |

# Teorija igara: matematičke osnove mitova i paradoksa

---

|                                                  |    |
|--------------------------------------------------|----|
| 8.1 Strategija „milo za drago“ .....             | 47 |
| 8.2 Unapred viđena ravnoteža .....               | 48 |
| <b>9. Paradoksi povratne indukcije</b> .....     | 51 |
| 9.1 Igra ulaska na tržište .....                 | 51 |
| 9.2 Paradoks lanca prodavnica .....              | 53 |
| 9.3 Igra stonoge .....                           | 55 |
| 9.4 Paradoks đavolka u boci .....                | 57 |
| <b>10. Strateški akcenti teorije igara</b> ..... | 59 |
| 10.1 Prozreti protivnika .....                   | 59 |
| 10.2 Opštepoznate činjenice .....                | 61 |
| <b>11. Mit o Odiseju</b> .....                   | 63 |
| 11.1 Model teorije igre .....                    | 64 |
| 11.2 Analiza strateškog ponašanja .....          | 65 |
| <b>Zaključak</b> .....                           | 69 |
| <b>Literatura</b> .....                          | 70 |
| <b>Biografija</b> .....                          | 71 |

# Uvod

Život nas često stavlja u situacije u kojima moramo doneti neku odluku. U pojedinim slučajevima, posledice donešene odluke zavise samo od strane koja donosi odluku kao što je slučaj npr. kada programer donosi odluku koji će programski jezik koristiti za kodiranje algoritma koji rešava postavljeni problem. Međutim, postoje i odluke čije posledice ne zavise samo od jedne strane nego i od povezanosti sa odlukama koje donose druge strane pa tako ishod odluke jedne strane zavisi i od odluke druge ili drugih strana. Situacije u kojima se ukrštaju, suprotstavljaju, sukobljavaju interesi dve ili više strana nazivamo **konflikti**. Zbog toga često kažemo da su strane koje donose odluke u konfliktu. Na primer, u igri bridža, rezultat igre ne zavisi samo od poteza jednog igrača nego i od poteza drugog. Njihovi interesi su konfliktni jer obe strane žele da pobeđe ([1]).

Neizvesnost u odlučivanju nazivamo **igrom**, a deo operacionih istraživanja koji se bavi analizom ovakvih problema i nalaženjem optimalnog rešenja se naziva **teorijom igara**. Teorija igara je matematička teorija konfliktnih situacija tj. procesa donošenja odluka protivnika koji su u konfliktu ili su uključeni u konkurentne uslove. Analiziranje situacija u kojima učesnici (protivnici, igrači) donose odluke u uslovima sukoba interesa nazvano je teorijom igara jer tipične primere ovakvih situacija srećemo kod društvenih igara kao što su kartaške igre (bridž, poker...), šah, sportske utakmice. Iako se veći deo matematičke teorije igara poklapa sa terminima u društvenim igrama, teorija igara ima mnogo širu primenu i koristi se za modeliranje konfliktnih situacija u ekonomiji, politici, vojnoj strategiji, matematici... **Cilj** teorije igara jeste da se odrede optimalne strategije za svakog učesnika u igri, odnosno, da se preciznim matematičkim algoritmom detaljno preispita konfliktna situacija i odredi razumno ponašanje igrača u toku konflikta ([1]). Više o teoriji igara uopšte možete pronaći u [8].

U prvom delu rada biće dat iscrpan pregled matematičke baze teorije igara, te detaljan pregled relevantnih strateških igara. Potom ćemo se osvrnuti na istoriju kao i na razvoj moderne teorije igara. Završni deo ovog dela činiće primena teorije igara u nekim društvenim naukama kao što su politika, pravo, ekonomija... U ovom delu koristi se literatura [2, 3, 4, 7, 9, 11, 12].

Odeljci 5., 6. i 7. pružaju detaljnu analizu igre staklenih perli (Glass Bead Game). Kada se Herman Heseova (Hermann Hesse) *Igra staklenih perli* pojavila 1943. godine, svako ko bi se usudio da misli da se priča ovog romana igre uma mogla smatrati bilo šta drugo osim književne izmišljotine bio bi potpuno ismejan. Ipak nekoliko meseci kasnije, rođenje teorije igre prenelo je koordinate ljudskog znanja, te su paralele između književne i naučne mašte bile već primetne. Alat koji su koristili Džon fon Nojman (John von Neumann) i Oskar Morgenstern (Oscar Morgenstern) u njihovoj prvobitnoj monografiji *Teorija igara i ekonomsko ponašanje* (Theory of Games and Economic Behavior) da proučavaju vrednosti čovečanstva bila je neosporno matematika. Pa ipak, svako ko prati istoriju ove igre staklenih perli unazad kroz vekove, susreće se na svakom ćošku sa velikim otkrićem motiva i situacija koje su sa doprinosima iz najrazličitijih disciplina, značajno uticale na razvoj teorije igre. Pokušaćemo da razumevanje definicija, strategija rešenja, kao i metoda dokaza, učinimo zanimljivijim korišćenjem bajki, zagonetki, i paradoksa, koji će omogućiti dubok uvid u prirodu stateškog razmišljanja. Literatura korišćena za ovaj deo je [5].

## Teorija igara: matematičke osnove mitova i paradoksa

---

Možemo li se iskreno diviti obrascima teorije igre bez da se setimo zagonetki, paradoksa, i mitova iz kojih su potekli prvi strateški redovi rasuđivanja? Skup modela u sledećem delu rada (odeljci 8. – 11.) može se pružiti kao potporna dokumentacija za međusobnu saradnju (vezu) između matematike konflikta i književne tradicije mitova koji su nam bili ponuđeni, odnosno, prenošeni sa “kolena na koleno”. Počinjemo neobičnim primerom matematičkog modela koji je postao pripovedački mit. U nastavku ćemo se baviti sa paradoksima povratne indukcije i fundamentalnih pitanja strateških akcenata teorije igre. Na kraju, ovaj deo, o mitovima teorije igara, zavređuje dostojan zaključak. U poslednjem poglavlju model teorije igre ponudiće strateško objašnjenje devedeset pete Higinove (Gaius Julius Hyginus) basne. Ovaj deo preuzet je iz sledeće literature [5, 13].

\*\*\*

*Ovom prilikom želela bih da se zahvalim svim profesorima i asistentima, sa kojima sam sarađivala tokom osnovnih i master akademskih studija. Posebno bih se zahvalila svom profesoru i mentoru, dr Ivani Štajner - Papuga, na svim sugestijama i stručnom usmeravanju pri izradi ovog master rada. Takođe, zahvalila bih se članovima komisije, dr Arpadu Takač i dr Milošu Stojakoviću.*

*Veliku zahvalnost dugujem svojoj porodici i prijateljima za podršku i razumevanje tokom celokupnog školovanja.*

*Nataša Mukić*

# 1. Osnovni pojmovi

Teorija igara se koristi pri proučavanju konfliktnih situacija koje se pojavljuju prilikom suprotstavljenih interesa učesnika u igri. Zbog toga, veoma često se kaže da je „**teorija igara**“ zapravo primenjena grana matematike koja je postavila osnove i okvire analitičke interpretacije problema odlučivanja u konfliktnim situacijama.“<sup>1</sup>

**Igru** definišemo kao skup svih pravila pomoću kojih se određuje tok igre i ponašanje igrača. **Igrači** (učesnici) treba da znaju pravila igra i moraju ih se pridržavati, mogu biti pojedinci, grupe, preduzeća, vojne jedinice... Cilj svakog učesnika jeste da postigne u igri onakvo rešenje koje će mu omogućiti da ostvari najbolji mogući rezultat. Ishod igre tj. potencijalne rezultate učesnika obično predstavljamo pomoću tzv. **funkcije plaćanja** koja predstavlja numerički izraz dobitaka odnosno gubitaka učesnika neke igre ([2]).

Osnovni pojam u teoriji igara je strategija. „**Strategija** se definiše kao skup svih alternativa kojima igrač raspolaže pri donošenju odluke.“<sup>2</sup> U toku igre, umesto da igrač donosi odluke u svakom trenutku igre, on može da unapred isplanira kako će voditi igru od samog početka do kraja. Strategija igrača mora sadržati sve moguće slučajeve koji se mogu desiti u toku igre ili prilikom odlučivanja. Takođe, ona mora uzimati u obzir svaku informaciju koju igrač može dobiti u toku igre kao što je, na primer, nova saznanja o protivniku, vojno izviđanje... ([7]). Dakle, igrač bira strategiju na početku igre i time određuje svaku alternativu koju preduzima tokom igre tj. on već na početku igre ima planiran skup mera koji će slediti bez obzira na poteze protivnika ili neke slučajne događaje. Svaka igra se ostvaruje preko pojedinačnih **poteza** igrača (učesnika) dok potez predstavlja jedan izbor moguće alternative od strane igrača. Skup većeg broja poteza čini **partiju**.

Nakon što smo se upoznali sa osnovnim pojmovima koji čine teoriju igara, prelazimo na pregled postojećih analiza samih igara. Pre svega, razmotrićemo različite vrste igara i njihovu podelu prema mnogobrojnim kriterijumima. Postoje brojne podele, a mi ćemo u radu navesti one za koje smatramo da su najvažnije, ukupno **8 podela**. Naglasićemo i dva veoma bitna pojma u teoriji igara – **racionalni igrači** i **Nešov ekvilibrijum**. Na samom kraju, predstavimo kratak **istorijski razvoj** teorije igara. Kao izvor korišćena je literatura [1, 2, 3, 4, 12].

---

<sup>1</sup> Jovanović I., Operaciona istraživanja 2, Dopuna 1 – Teorija igara

<sup>2</sup> Petrić J., Operaciona istraživanja, Izdavačko – štamparsko – knjižarska radna organizacija, Beograd, 1979.

### 1.1 Podela igara

Igre se mogu deliti prema različitim kriterijumima (korišćena literatura za ovu podelu je [2, 3, 4]).

- i. Prema interesima igrača koji učestvuju u igri igre delimo na kooperativne, nekooperativne i igre sa kombinovanim motivima. **Kooperativne igre** su igre u kojima igrači imaju zajednički interes. Oni obrazuju koalicije koje im služe da međusobno usklade ponašanja i izaberu takve strategije koje će im omogućiti postizanje najboljih rezultata. Dobar primer je sa automobilima koji idu jedan drugom u susret. Igrači (vozači) samostalno donose odluku da li će skrenuti levo, desno ili nastaviti pravo ali oni moraju da sarađuju kako ne bi došlo do udesa (što nikome ne odgovara) tako što će signalizirati drugim učesnicima koja je njihova odluka. U mnogim igrama su interesi igrača u potpunosti suprotni tj. ne postoji saradnja pri izboru poteza od strane igrača. Takve igre nazivamo **nekooperative igre**. Dobar primer za njih je šah. Igre u kojima ima elemenata i kooperativnosti i nekooperativnosti istovremeno nazivaju se **igre sa kombinovanim motivima**. U njima igrači moraju da sarađuju do određene mere. Dobar primer za to je odnos sindikata radnika i uprave nekog preduzeća. Ove dve strane u suštini imaju suprotne interese ali moraju da sarađuju jer pripadaju istom preduzeću i samo ako drže određen nivo kooperativnosti mogu doći do postizanja profita koji odgovara i jednoj i drugoj strani. Dakle, možemo reći da igrači u ovom tipu igre imaju istovremeno i zajedničke i suprotne interese.
- ii. Prema kriterijumu prisustva ili odsustva elemenata slučajnosti razlikujemo dva osnovna tipa: **igre na sreću** (igre sa kartama ili kockom), kod kojih igrač svojim sposobnostima ne može da utiče na njihov ishod, i **strateške igre**, kod kojih igrač direktno svojim sposobnostima utiče na ishod igre.
- iii. Prema broju igrača igre se mogu podeliti na **igre sa jednim igračem** (igra soliter), **igre sa dva igrača** (šah) i **igre sa proizvoljnim brojem igrača** (poker i bridž). Pojam „igrača“ definišemo kao broj suprotnih strana u igri (pojedina, grupa, preduzeća, armija...).
- iv. U zavisnosti od broja mogućih strategija, igre se dele na konačne i beskonačne. Igra je **konačna** ako svaki igrač ima samo konačan broj strategija i ako se svaka partija te igre završava u konačno mnogo poteza. U suprotnom, igra je **beskonačna**.
- v. Igre se mogu klasifikovati po karakteru i opsegu informacija koje poseduju igrači prilikom izbora na igre sa potpunom i nepotpunom informacijom. U **igri sa potpunom informacijom** svaki igrač pri svakom potezu zna sve ranije izvedene poteze i stanje u igri u određenom trenutku. Dobar primer za ovakvu igru je šah, gde je tabla sa figurama ispred igrača koji zapisuju sve prethodne poteze. Domino je primer **igre sa nepotpunom informacijom** (simultane igre) jer igrač ne zna koje se pločice nalaze kod protivnika ([2]).

- vi. Prema karakteru funkcije plaćanja igre delimo na igre sa nultom i igre sa nenultom sumom. **Igre sa nultom sumom** (poker) su igre u kojima je suma ukupnog plaćanja jednaka nuli, odnosno, ukupan dobitak jednog ili više igrača jednak je ukupnom gubitku poraženih igrača. Igrač I bira jednu od svojih raspoloživih strategija  $a_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), a istovremeno drugi igrač II odgovara jednom od strategija  $b_j$ , ( $j = 1, 2, \dots, n$ ). Za igrača I kao ishod igre pojavljuje se dobitak  $c_I(a_i, b_j)$ , odnosno, za igrača II gubitak  $c_{II}(a_i, b_j)$ . Uslov nulte sume podrazumeva:

$$c_I(a_i, b_j) + c_{II}(a_i, b_j) = 0,$$

odakle, ako označimo:

$$c_I(a_i, b_j) = C(a_i, b_j),$$

sledi:

$$c_{II}(a_i, b_j) = -C(a_i, b_j).$$

Odavde se jasno vidi da je cilj igrača I maksimizacija funkcije  $C(a_i, b_j)$ , a igrača II minimizacija te iste funkcije.

**U igrama sa nenultom sumom** suma ukupnog plaćanja je različita od nule. Dobar primer za to je igra lutrije u kojoj organizatori zadržavaju za sebe deo ukupnog dobitka ([3]).

- vii. Prema načinu predstavljanja igre možemo zapisati u normalnoj i ekstenzivnoj formi. **Normalna forma** se najčešće koristi za igre u kojima igrači istovremeno povlače svoje poteze i mogući ishodi igre se predstavljaju u obliku matrice. **Ekstenzivna forma** je graf tipa stablo i koristi se u igrama u kojima igrači naizmenično vuku svoje poteze.
- viii. Igra je **simetrična** ako je njena matrica antisimetrična. Za kvadratnu matricu  $A = [a_{ij}]$ , ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) kažemo da je antisimetrična ako na glavnoj dijagonali ima nule, a ostali elementi su u antisimetričnoj relaciji u odnosu na dijagonalu, tj.  $a_{ii} = 0$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ );  $a_{ij} = -a_{ji}$ , ( $i \neq j$ ;  $i, j = 1, 2, \dots, n$ ). U simetričnoj igri oba igrača imaju jednake optimalne strategije. Zato je ta igra "fer", odnosno, njena vrednost je nula. Ukoliko igra nije simetrična, ona je **antisimetrična (asimetrična)** ([4]).

Igrači su **savršeno racionalne** individue koje nastoje da maksimiziraju svoju korist tj. oni žele da postignu što bolji rezultat po njihovim sopstvenim kriterijumima. U ovom slučaju, racionalno ponašanje podrazumeva da se odluka donosi i na osnovu predviđanja mogućih poteza protivnika. Baš zbog toga, učesnici u igri će se često stavljati u poziciju svog konkurenta, kako bi mogli da predvide njegove buduće poteze i da onda na osnovu toga izaberu odgovarajuću strategiju. Da bi se ovo ostvarilo, pretpostavljamo da ne postoje nikakve razlike (intelektualne, iskustvene...) između igrača, odnosno, igrači se smatraju ravnopravnim protivnicima.



U teoriji igara, *Nešov ekvilibrijum*<sup>3</sup> (Nešova ravnoteža) je koncept rešenja igre koja uključuje dva ili više igrača, kod kog se podrazumeva da svaki igrač zna strategije ekvilibrijuma ostalih igrača, i nijedan igrač ništa ne može da dobije tako što samo on promeni svoju strategiju. Ako je svaki igrač izabrao strategiju, i nijedan igrač ne može da profitira promenom svoje strategije pod pretpostavkom da ostali igrači ne promene svoje strategije, onda trenutni skup izabranih strategija, i odgovarajućih dobitaka predstavlja Nešov ekvilibrijum. Prosto rečeno, dva igrača su u Nešovom ekvilibrijumu ako je svaki doneo najbolju moguću odluku, uzevši u obzir odluku protivnika. Slično, više igrača je u Nešovom ekvilibrijumu ako je svaki od njih doneo najbolju moguću odluku uzevši u obzir odluke svih ostalih igrača. Međutim, važno je imati u vidu da Nešov ekvilibrijum ne mora da znači najveću zbirnu dobit za sve igrače; čest je slučaj da svi igrači mogu da povećaju svoju dobit ako bi nekako mogli da se dogovore oko simultane promene svojih strategija. Na primer, konkurentni trgovci mogu da formiraju kartel kako bi povećali svoje profite ([12]).

## 1.2 Istorija teorije igara

Teoriju igara osnivaju matematičari u 17. veku, pokušavajući da reše probleme u raznim kockarskim igrama koje su se igrale na francuskim dvorovima. Osnovne ideje pronalazimo u radovima velikih matematičara Pascala i Fermata oko 1650. godine.

Nemački matematičar Ernst Zermelo je 1912. god. objavio knjigu „*O upotrebi teorije skupova u teoriji šahovske igre*“. On je takođe 1921. godine dokazao važna tvđenja o postojanju pobedničkih strategija. Teorija strateških igara utemeljena je tek 1928. godine kada je Džon fon Nojman u radu „*Ka teoriji društvenih igara*“ definisao i upotrebio neke pojmove iz teorije igara. Temelje teorije igara postavili su Džon fon Nojman i Oskar Morgenstern 1944. godine u knjizi „*Teorija igara i ekonomsko ponašanje*“. Tada su konačno date matematičke osnove teorije, definisani osnovni pojmovi strategije i vrednosti igre, metode za pronalazak optimalnih strategija.

Tokom 50-tih i 60-tih godina modeli teorije igara počinju da se primenjuju u ekonomskoj teoriji. Tada i psiholozi počinju da proučavaju ponašanje ljudi u eksperimentalnim igrama. U radovima L. Sharpley – M. Shubik – a (1954) kao i J. Banzhaf (1965) teorija igara počinje da se primenjuje u oblasti sociologije, najviše za modeliranje rezultata izbora. Te radove karakteriše koncepcija strateškog glasanja koja će kasnije postati jedna od osnovnih koncepcija u političkoj nauci. Ranih 70-tih, teorija igara se javlja i u evolucionoj biologiji.

1994. godine dodeljena je Nobelova nagrada za ekonomiju Džonu Nešu (John Nash), Džonu Harsaniju (John C. Harsanyi) i Rajnhardu Zeltenu (Reinhard Selten) za njihove izvanredne ideje koje su doprinele razvoju teorije igara i njen značaj za analizu ekonomskih pojava ([2, 3, 4]). Ovde je dat kratak istorijski razvoj teorije igara a mnogo više podataka može se pronaći u [1].

---

<sup>3</sup> Nešov ekvilibrijum je predložio američki nobelovac Džon Neš (John Nash) 1950. godine.

## Teorija igara: matematičke osnove mitova i paradoksa

---

Danas, teorija igara predstavlja razvijenu i zrelu teoriju sa jakim matematičkim osnovama koja uspešno objašnjava i predviđa mnoge fenomene u raznim oblastima primene kao što su politika, ekonomija, evolutivna biologija, sociologija, kompjuterska nauka, teorija evolucije prirodnih sistema.

## 2. Matrične igre

Matrične igre su strateške igre u kojima dva igrača imaju suprotne interese. Igra se završava određenim ishodom, koji se predstavlja dobitcima ili nekim ocenama. Nakon svakog odigravanja - odabira po jedne strategije od strane svakog igrača, vrši se obračun i plaćanje, na osnovu matrice plaćanja. Igrač koji gubi plaća igraču koji dobija iznos koji je određen pravilima igre. Matrične igre kod kojih je u svakom ovakvom obračunu zbir dobitaka jednog igrača jednak zbiru plaćanja drugog igrača, nazivaju se igre sa nultim zbirom, što ćemo mi i razmatrati u ovom poglavlju. Pored ovih, postoje i igre sa nenultim zbirom, o kojima ćemo u narednom poglavlju (poglavlje 3.).

Prvo ćemo navesti *proste matrične igre*, definišaćemo pojam *čista strategija*. Nakon toga, definišemo *mešovite matrične igre* i *mešovitu strategiju*. Za kraj, otkrivamo kako uz pomoć *koncepta dominacije strategija* matrične igre većih dimenzija možemo redukovati na manje i time olakšati rad sa njima. Ovo poglavlje je bazirano na literaturi [3].

### 2.1 Matrične igre nulte sume

Igre sa nultom sumom dve strane sa konačnim brojem strategija možemo analizirati u obliku normalne ili strateške forme, predstavljajući funkciju  $C(a_i, b_j)$  kao sledeću matricu:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

gde je:

$$c_{ij} = C(a_i, b_j).$$

Matrica  $C$  se naziva matrica plaćanja i njen elemenat  $c_{ij}$  predstavlja dobitak igrača I, odnosno, gubitak igrača II, kada igrač I bira strategiju  $a_i$  a igrač II strategiju  $b_j$ . Pozitivna vrednost  $c_{ij}$  ukazuje na dobitak igrača I, a negativna njegov gubitak i obrnuto za igrača II.

Normalna forma igre dva igrača sa nultom sumom je trojka  $(A, B, C)$  gde je:

1.  $A = \{ a_i \}$ , ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), neprazan skup strategija (poteza, alternativa) igrača I,
2.  $B = \{ b_j \}$ , ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), neprazan skup strategija (poteza, alternativa) igrača II,
3.  $C$  je funkcija definisana na Dekartovom proizvodu  $A \times B$ , tako da je  $c_{ij} = C(a_i, b_j)$ , realan broj za svako  $a_i \in A$  i  $b_j \in B$ .

Ako igrač I izabere strategiju  $a_i$ , tj. bira red  $i$  u matrici plaćanja, tada, u najgorem slučaju, on ima osiguran dobitak:

$$\alpha_i = \min_j c_{ij}$$

## Teorija igara: matematičke osnove mitova i paradoksa

koji je jednak minimalnom od svih rezultata koji se dobijaju za sve moguće strategije igrača II. Naravno, igrač I želi da maksimizira vrednost dobitka  $\alpha_i$  te bira onu strategiju  $\alpha_i$  koja maksimizira minimalni dobitak:

$$\alpha = \max_i \min_j c_{ij}$$

Veličina  $\alpha$  koja predstavlja zagarantovani dobitak igrača I se naziva **donja granica vrednosti igre** ili njegov nivo bezbednosti. Strategija koja obezbeđuje ostvarenje donje granice cene igre se naziva **maxmin strategija**.

Slično, igrač II birajući svoju strategiju  $b_j$ , tj. kolonu  $j$  u matrici plaćanja, ima osigurano da njegov gubitak maksimalno bude:

$$\beta_j = \max_i c_{ij}$$

Bez obzira koju strategiju bira igrač I igrač II želi da njegov gubitak bude minimalan pa bira svoju strategiju  $b_j$  na osnovu minmax principa, tako da osigurava da njegov gubitak ne bude veći od:

$$\beta = \min_j \max_i c_{ij}$$

Veličina  $\beta$  predstavlja najveći mogući gubitak igrača II i naziva se **gornja granica vrednosti igre** ili nivo bezbednosti za igrača II.

Može se pokazati da je uvek:

$$\alpha \leq \beta$$

jer je očigledno da za bilo koje  $k$  i  $l$  važi:

$$\min_j c_{kj} \leq c_{kl} \leq \max_i c_{il}.$$

## 2.2 Proste matrične igre

Najjednostavniji oblik matričnih igara sa nultom sumom jesu proste matrične igre koje poseduju sedlastu tačku. Naime, ako neki elemenat  $c_{ij}$  matrice plaćanja  $C$  ima osobinu da je:

1.  $c_{ij}$  minimalni elemenat u redu  $i$  matrice  $C$ , i
2.  $c_{ij}$  maksimalni elemenat u koloni  $j$  matrice  $C$ ,

tad kažemo da je  $c_{ij}$  **sedlasta tačka** matrice plaćanja  $C$ .

Formalno, ako u matrici plaćanja  $C = \{ c_{ij} \}$ , ( $i = 1, \dots, m$ ;  $j = 1, \dots, n$ ), postoji par  $(i^*, j^*)$ , takav da je za svako ( $i = 1, \dots, m$ ;  $j = 1, \dots, n$ ):

$$c_{ij^*} \leq c_{i^*j^*} \leq c_{i^*j}$$

## Teorija igara: matematičke osnove mitova i paradoksa

tada je par  $(i^*, j^*)$ , sedlasta tačka i određuje par optimalnih čistih strategija u matrici  $C$ . Pojam **čista strategija** kaže da igrač iz raspoloživog skupa strategija bira jednu jedinstvenu koja predstavlja rešenje igre i dovodi do optimalne vrednosti igre u smislu da jedan igrač osigurava maksimalni od svojih minimalnih dobitaka, a drugi minimalni od svojih maksimalnih gubitaka.

Drugim rečima, u sedlastoj tački  $(i^*, j^*)$  važi:

$$\max_i \min_j c_{ij} = \min_j \max_i c_{ij} = c_{i^*j^*}$$

Znači, kod proste matrične igre optimalna vrednost igre se nalazi u sedlastoj tački te je za oba igrača optimalno da biraju strategije koje su definisane sedlastom tačkom. Jednostrano odstupanje od te strategije će dovesti do manjeg gubitka za igrača I, odnosno, većeg gubitka za igrača II. Ova tačka se još zove i tačka ravnoteže (ili ekvilibrijuma) strategije.

**Primer 1:** ([3]) Neka je data igra sa matricom plaćanja:

$$C = \begin{bmatrix} 10 & -15 & 20 \\ 20 & -30 & 40 \\ 30 & -45 & 60 \end{bmatrix}$$

Odmah uočavamo da je:

$$\max_i \min_j c_{ij} = \max(-15, -30, -45) = -15$$

i

$$\min_j \max_i c_{ij} = \min(30, -15, 60) = -15$$

odnosno, da je par  $(1, 2)$  čistih strategija daje optimalnu vrednost igre  $v = -15$ .

**Primer 2:** ([3]) Matrica plaćanja može da ima više sedlastih tačaka. U matrici:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Elementi na mestu  $(1, 1)$  i  $(1, 3)$  su sedlaste tačke. Primetimo da se sedlaste tačke javljaju kao konjugovani parovi. Naime, ako su sedlaste tačke elementi na mestima  $(i_1, j_1)$  i  $(i_2, j_2)$  tad su sedlaste tačke i na mestima  $(i_1, j_2)$  i  $(i_2, j_1)$ .

## 2.3 Mešovite matrične igre

Postoji veliki broj matričnih igara koje nemaju sedlastu tačku. Primer za to je poznata igra par – nepar. Dva igrača imaju mogućnost da istovremeno odaberu dva broja: 1 ili 2. Tada je skup strategija igrača I  $\{1, 2\}$ , što je takođe i skup strategija igrača II. Pravilo igre kaže da ako je

## Teorija igara: matematičke osnove mitova i paradoksa

zbir izabranih brojeva neparan broj tada iznos dobija igrač I, a ako je paran dobija ga igrač II. Ovo pravilo definiše sledeću matricu plaćanja:

$$C = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{II} \\ \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{I} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \end{matrix} & \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Vidimo da u ovoj matrici ne postoji sedlasta tačka, jer je:

$$\max_i \min_j c_{ij} = \max(-2, -4) = -2$$

i

$$\min_j \max_i c_{ij} = \min(3, 3) = 3$$

te odmah postavljamo pitanje šta je ovde optimalna strategija tj. rešenje igre. Vidimo da se rešenje ne može naći u prostoru čistih strategija, već moramo pokušati sa novim pojmom **mešovita strategija**. Pretpostavimo da se igra ponavlja više puta te se postavlja pitanje koliko puta igrati jednu strategiju i birati broj 1, odnosno, drugu i birati broj 2, kako bi se osigurao maksimalni očekivani dobitak, odnosno, minimalni očekivani gubitak. Odgovor na ovo pitanje daje teorema minimaksa koju je postavio Džon fon Nojman.

**Teorema minimaksa** ([3]): Za svaku konačnu igru dve strane sa nultom sumom važi:

1. postoji realan broj  $v$  koji se naziva vrednost igre,
2. postoji mešovita strategija za igrača I koja mu osigurava najveći očekivani minimalni dobitak jednak vrednosti igre  $v$  bez obzira koju mešovitu strategiju igra igrač II,
3. postoji mešovita strategija za igrača II koja mu osigurava najmanji očekivani maksimalni gubitak jednak vrednosti igre  $v$  bez obzira koju mešovitu strategiju bira igrač I,
4. bilo koja matrična igra sa matricom plaćanja  $C$  ima sedlastu tačku u prostoru mešovitih strategija, tj. postoje vektori verovatnoća  $p$  i  $q$  takvi da je

$$\max_p \min_q p^T C q = \min_q \max_p p^T C q = v$$

Ako je vrednost igre  $v$  pozitivna ona predstavlja dobitak igrača I tj. gubitak igrača II i obrnuto ako je negativna. Igra sa pozitivno  $v$  favorizuje igrača I, a ukoliko je  $v$  negativno favorizuje se igrač II. Kažemo da je igra fer ukoliko je  $v$  jednako nuli.

Mešovitu strategiju za igrača I možemo izraziti preko vektora verovatnoća:

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_m)$$

## Teorija igara: matematičke osnove mitova i paradoksa

gde  $p_i$  predstavlja učestalost sa kojom igrač I igra čistu strategiju  $a_i$ . Za igrača II mešovitu strategiju možemo predstaviti pomoću vektora verovatnoća:

$$q = (q_1, q_2, \dots, q_j, \dots, q_n)$$

gde  $q_j$  predstavlja učestalost sa kojom igrač II igra čistu strategiju  $b_j$ . Uzimajući u obzir definiciju verovatnoća, važi:

$$\sum_{i=1}^m p_i = 1$$

$$\sum_{j=1}^n q_j = 1$$

Očekivani rezultat igrača I kada igra mešovitu strategiju predstavljenu vektorom  $p$  u slučaju kada igrač II igra čistu strategiju  $b_j$  (kolonu  $j$  u matrici plaćanja  $C$ ) je:

$$\sum_{i=1}^m p_i c_{ij}$$

Analogno, očekivani rezultat igrača II kad igra mešovitu strategiju predstavljenu vektorom  $q$  u slučaju da igrač I igra čistu strategiju  $a_i$  (red  $i$  u matrici plaćanja  $C$ ) je:

$$\sum_{j=1}^n q_j c_{ij}$$

U opštem slučaju, kada oba igrača igraju mešovitu strategiju, igrač I  $p$  a igrač II  $q$ , očekivani rezultat igre je:

$$p^T C q = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i q_j c_{ij}$$

Za mešovite matrice igre u kojoj oba igrača imaju po dve strategije može se direktno doći do mešovite strategije. Neka je data matrica plaćanja:

$$C = \begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix}$$

Pošto mešovita matrica igra nema sedlastu tačku, možemo izvesti zaključak na sledeći način. Ako je  $a \geq b$  tada je  $b < c$  inače bi  $b$  bila sedlasta tačka. Kako je  $b < c$  tada mora da je  $c > d$  inače bi  $c$  bila sedlasta tačka. Na isti način, vidimo da je  $d < a$  i  $a > b$ . Drugim rečima, ako je  $a \geq b$ , tad je  $a > b < c > d < a$ . Slično, ako je  $a \leq b$  tad je  $a < b > c < d > a$ . Dakle, ako ne postoji sedlasta tačka tad je ili  $a > b, b < c, c > d$  i  $d < a$ , ili  $a < b, b > c, c < d$  i  $d > a$ .

## Teorija igara: matematičke osnove mitova i paradoksa

---

Ako igrač I igra strategiju u prvom redu matrice sa verovatnoćom  $p$  i strategiju u drugom redu sa verovatnoćom  $(1-p)$ , tj. koristi mešovitu strategiju  $(p, 1-p)$ , tada će ostvariti očekivani rezultat:

$$v = ap + d(1 - p)$$

ukoliko igrač II bira strategiju u prvoj koloni, i očekivani rezultat:

$$v = bp + c(1 - p)$$

ukoliko igrač II bira strategiju u drugoj koloni. Kada izjednačimo ova dva rezultata:

$$ap + d(1 - p) = bp + c(1 - p)$$

i rešavamo po  $p$  dobijamo:

$$p = \frac{c - d}{a - b + c - d}$$

Pošto nemamo sedlastu tačku, onda su  $a - b$  i  $c - d$  ili oba pozitivna ili oba negativna, te je  $0 < p < 1$ . Očekivani rezultat ove mešovite matrice igre je:

$$v = ap + d(1 - p) = bp + c(1 - p) = \frac{ac - bd}{a - b + c - d}$$

Analogno, ako igrač II igra prvu kolonu sa verovatnoćom  $q$ , odnosno, igra mešovitu strategiju  $(q, 1-q)$  i izjednačimo njegove očekivane rezultate kad igrač igra strategije u prvom i drugom redu dobijamo:

$$aq + b(1 - q) = dq + c(1 - q)$$

pa sledi:

$$q = \frac{c - b}{a - b + c - d}$$

**Primer 3:** ([3]) Data je matrica:

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Tada su:

$$p = \frac{-4 - 3}{-2 - 3 - 4 - 3} = \frac{7}{12}$$

$$q = \frac{7}{12}$$

$$v = \frac{8 - 9}{-2 - 3 - 4 - 3} = \frac{1}{12}$$



## 2.4 Dominacija strategija

Koristeći koncept dominacije strategija moguće je ponekad matrične igre većih dimenzija redukovati na manje. Možemo reći da strategija u  $i$  – tom redu matrice plaćanja  $C = (c_{ij})$  dominira nad strategijom u  $k$  – tom redu ako je  $c_{ij} \geq c_{kj}$  za svako  $j$ . Strategija u  $i$  – tom redu striktno dominira nad strategijom u  $k$  – tom redu ako je  $c_{ij} > c_{kj}$ . Strategiju u  $i$  –tom redu nazivamo **dominirajućom**, a strategiju u  $k$  – tom redu **dominiranom**. Analogno, strategija u  $j$  – toj koloni matrice  $C$  dominira (striktno dominira) nad strategijom u  $k$  –toj koloni ako je  $c_{ij} \leq c_{ik}$  ( $c_{ij} < c_{ik}$ ) za svako  $i$ .

Dakle, igrač ne želi da igra dominiranu strategiju jer odgovarajuća dominirajuća strategija daje bolji ili u najgorem slučaju isti rezultat (striktno dominirajuća strategija je sigurno bolja). Tada se može dominirana strategija – red ili kolona – nesmetano izbrisati iz matrice a da se pritom ne menja vrednost igre. Uklanjanje dominirane strategije može prouzrokovati uklanjanje i neke od optimalnih strategija, jer može da ih ima više, ali će ostati najmanje jedna. Uklanjanje striktno dominiranih strategija sigurno ne menja skup optimalnih strategija. Na taj način, pomoću iterativnog postupka za uklanjanje dominiranih strategija moguće je redukovati dimenzije matrice i time uprostiti postupak za pronalaženje optimalne strategije.

U opštem slučaju, ovaj postupak nije uvek moguć zbog toga što postoje matrice u kojima nijedna strategija – čista ili mešovita – nema svojstvo dominacije.

**Primer 4:** ( [3] ) Posmatrajmo matricu:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Treća kolona je dominirana od strane druge te se može ukloniti pa dobijamo redukovanu matricu:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

U ovoj matrici treći red dominira nad prvim, koji se onda može ukloniti te dobijamo novu, redukovanu matricu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Ova matrica se ne može dalje redukovati a kako nema sedlastu tačku traži se mešovita optimalna strategija i dobija se:

$$p = \frac{1 - 4}{1 - 2 + 1 - 4} = \frac{3}{4}$$

$$q = \frac{1 - 2}{1 - 2 + 1 - 4} = \frac{1}{4}$$

$$v = \frac{1 \cdot 1 - 2 \cdot 4}{1 - 2 + 1 - 4} = \frac{7}{4}$$

Znači, u početnoj matrici plaćanja  $C$  igrač I ima optimalnu mešovitu strategiju  $p = (0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ , a igrač II  $q = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0)$  sa optimalnom vrednošću igre  $v = 7/4$ .

### 3. Bimatrične igre

Dosad smo se bavili igrama dve strane sa nultom sumom tj. igrama sa konstantnom sumom (poglavlje 2.). Sada ćemo se osvrnuti i na **igre u kojima suma nije konstantna** odnosno nije jednaka nuli. Drugim rečima, dobitak jednog igrača nije jednak gubitku drugog. Ove igre služe za modeliranje fenomena u ekonomiji i politici, kao što su odnosi sindikata i poslodavaca, konkurencija na tržištu, aukcije, pregovori (cenkanja) kupca i prodavca...

Normalnu ili stratešku formu igara nenulte (opšte) sume definišu dva konačna skupa strategija  $x \in X$  za igrača I i  $y \in Y$  za igrača II i dve funkcije sa realnim vrednostima  $u_1(x, y)$  i  $u_2(x, y)$  koje predstavljaju rezultate igre igrača I i igrača II, respektivno. Znači, ako igrač I izabere strategiju  $x \in X$  a igrač II strategiju  $y \in Y$  oni ostvaruju rezultate  $u_1(x, y)$  i  $u_2(x, y)$ , respektivno. Ovakva igra predstavlja se bimatricom plaćanja  $C$  čiji su elementi uređeni parovi  $(u_1(x, y), u_2(x, y))$ :

$$C = \begin{bmatrix} (u_1(x_1, y_1), u_2(x_1, y_1)) & \cdots & (u_1(x_1, y_n), u_2(x_1, y_n)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (u_1(x_m, y_1), u_2(x_m, y_1)) & \cdots & (u_1(x_m, y_n), u_2(x_m, y_n)) \end{bmatrix}$$

Ako označimo sa:

$$a_{ij} = u_1(x_i, y_j)$$

i sa

$$b_{ij} = u_2(x_i, y_j)$$

Tada se bimatrica plaćanja  $C$  dekomponuje na dve obične matrice:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

I

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

Rešavanje ovih igara je nešto komplikovaniji jer se princip minimaksa ne može primeniti zbog toga što dobitak jednog igrača nije jednak gubitku drugog igrača. U rešavanju bimatričnih igara razlikujemo dva osnovna slučaja – nekooperativne i kooperativne igre. Ovo poglavlje mnogo opširnije možemo pronaći u [3], odakle je i izvučen ovaj najvažniji deo.

## 4. Primena teorije igara

Od igranja šaha do „igranja“ raspoređivanja vojnih baza po svetu, od razmišljanja kojoj devojci u kafiću prići do analiziranja isplativosti ulaska na novo tržište, od odlučivanja na koju stranu šutirati prilikom izvođenja penala u fudbalu do razmatranja koncepta preživljavanja i produžetka vrste u evolutivnoj biologiji i ekologiji. Oblast primenjene matematike koja se koristi u društvenim naukama, pre svega u ekonomiji, ali i biologiji, informatici, filozofiji, nazvana teorija igara nas uči kako da pristupamo rešavanju svih ovih ali i mnogih drugih problema.

Cilj ovog dela rada jeste da pokažemo kako se može doći do zanimljivih saznanja kada se neki problem koji se inače ne analizira pomoću teorije igara, predstavi u ovoj formi. Rezultati koji se dobijaju mogu biti vrlo iznenađujući i zanimljivi. Najpre ćemo predstaviti nekoliko primera iz svakodnevnog života (*životne situacije*), *političke* i *vojne nauke* a potom i primenu teorije igara u *ekonomskoj nauci*. Korišćena literatura je [6, 9, 11].

### 4.1 Životne situacije

Predstavićemo dva primera najjednostavnijih i najčešćih igara, gde ćemo se upoznati i sa vizuelnim načinima predstavljanja strategija i isplativosti.

**Igra koordinacije** ([11]) – Pretpostavimo da su se Marko i Jelena upoznali i oboje bi želeli da se ponovo vide, ali nisu razmenili broj telefona te nisu u mogućnosti da se dogovore za novi sastanak. Ipak, vikend se približava i oboje shvataju da bi se mogli sresti u gradu ako bi posetili isto mesto. Oboje znaju da su najvažniji događaji toga vikenda žurka kod Ivane i koncert klasične muzike. Dakle, naša dva igrača, Marko i Jelena imaju dve strategije – otići na žurku ili otići na koncert. Što se tiče isplativosti ovih strategija, vidimo da se javljaju nematerijalni dobici, pretpostavimo da bi se oboje radije našli nego mimoišli i da bi se oboje radije videli na Ivaninoj žurci. Najčešći način predstavljanja ovakvih igara je putem matrice plaćanja koja pokazuje koji je očekivani dobitak (ili gubitak) svakog igrača u pojedinačnim mogućim ishodima. Igra ovakve strukture matrice plaćanja se naziva igra koordinacije.

Jelenine strategije su označene narandžastom bojom, kao i njeni dobici u slučaju svih mogućih ishoda, dok su Markove strategije i dobici označeni zelenom bojom. Dakle, ako i Marko i Jelena odu na žurku, svako od njih ima dobitak u iznosu 2 (veća vrednost isplativosti znači i veći dobitak). Lako uočavamo da je to ishod igre koji oboje najviše žele i koji se nudi kao optimalno rešenje. Ipak, pošto se oni ne poznaju baš najbolje, moguće je da Marko pomisli da bi Jelena možda pre izabrala koncert nego žurku, i obrnuto, jer ni Jelena ne zna šta Marko više voli. Situacija u kojoj igračima nisu poznate isplativosti koje drugi igrač pripisuje određenim situacijama se može rešiti jedino komunikacijom. Ako i Marko i Jelena znaju da bi se oboje radije našli na žurci, verovatno će oboje i otići na žurku, budući da će oboje zaključiti da se drugi igrač ponaša racionalno i da će hteti da maksimizuje dobitak (slika 1.)

## Teorija igara: matematičke osnove mitova i paradoksa

|                   | Jelena na žurci | Jelena na koncertu |
|-------------------|-----------------|--------------------|
| Marko na žurci    | 2, 2            | 0, 0               |
| Marko na koncertu | 0, 0            | 1, 1               |

**Slika 1.** ([11]) – Igra koordinacije

Ishod gde su svi igrači izabrali svoje strategije i nijedan igrač ne može proći bolje ako jedini promeni svoju strategiju se naziva Nešov ekvilibrijum. U slučaju igre između Marka i Jelene imamo dva Nešova ekvilibrija – prvi kada oboje odlaze na žurku, i drugi, kada oboje odlaze na koncert. Ishod gde oboje odlaze na žurku je pareto – optimalan jer maksimizuje ukupan dobitak oba igrača.

Za kraj diskusije o ovoj igri možemo izvesti zaključak da tačna vrednost isplativosti za igrača nije od presudne važnosti, važni su odnosi između tih vrednosti, odnosno, šta igrači vole i u kom su poretku.

**Borba polova** ([11]) – Neka su Marko i Jelena u vezi i dogovorili su se da izađu, ali još nisu utvrdili gde. Jelena obožava balet te je predložila da odu na predstavu baleta dok je Marko, kao strastveni „grobar“ predložio da odu na fudbalsku utakmicu tzv. „večiti derbi“. Dogodi se situacija u kojoj se pokvare oba telefona te Marko i Jelena nemaju kako da se dogovore, već sami moraju da odluče gde će otići. Pretpostavimo da im je najbitnije da odu zajedno. Matrica plaćanja prikazana je na slici 2.

|                  | Jelena na fudbalu | Jelena na baletu |
|------------------|-------------------|------------------|
| Marko na fudbalu | 2, 1              | 0, 0             |
| Marko na baletu  | 0, 0              | 1, 2             |

**Slika 2.** ([11]) – Matrica plaćanja u igri borba polova

Uočavamo da i ova igra ima dva Nešova ekvilibrija, to su situacije u kojima Marko i Jelena zajedno provode večer, bez obzira da li je to na baletu ili fudbalskoj utakmici. U tim situacijama nijedan igrač ne želi da sam promeni strategiju. Ono po čemu se ova igra razlikuje od prethodne, igre koordinacije, jeste da u borbi polova ne postoji očigledno najbolji ishod. Ako oba igrača žele da udovolje drugoj osobi ili ako oboje smatraju da treba udovoljiti njihovim željama, oboje su na gubitku. Jedino kombinacija u kojoj jedan igrač istraje, a drugi udovolji će rezultovati obostranim dobitkom. Takođe treba razmotriti razloge zbog kojeg bi jedan igrač udovoljio drugom. Ako se to desi bez nekog obećanja ili pretnje, onda taj igrač više ceni dobitak koji se dobija kada učini nešto za svog partnera nego kada prati samo svoje želje, te ta igra nije više igra polova nego igra koordinacije. Za rešavanje ovakvih igara potrebna nam je određena fokusna tačka koju nazivamo *Šelingova<sup>4</sup> tačka*, koja predstavlja ishod koji se iz nekog razloga čini očiglednim. U slučaju Marka i Jelene, Šelingova tačka može biti odlazak na fudbalsku

<sup>4</sup> Tomas Šeling (Thomas Schelling) je američki ekonomista, koji je dobio Nobelovu nagradu za ekonomiju 2005. godine. Nagradu je dobio zbog doprinosa razumevanju konflikata i saradnje analizom uz pomoć teorije igara.

utakmicu, ako su prethodni put bili na baletu, i obrnuto, ako oboje imaju ideju da treba da uzvrate uslugu.

Ukoliko želite da se upoznate sa još nekim primerima preporučujem knjigu [10].

## 4.2 Vojne nauke

Teorija igara je imala veliku primenu u oblasti vojnih nauka. Brojna istraživanja o osnovnim pojmovima same teorije igara bila su zasnovana na traganju za odgovorima na konkretna vojna i bezbedonosna pitanja.

**Bitka u Bizmarkovom moru** ([9]) – Tipičan primer primene igara sa nultom sumom na probleme ratovanja srećemo kod čuvene bitke u Bizmarkovom arhipelagu, koju su vodili Amerikanci, od 1. do 4. marta 1943. godine, uz pomoć vazduhoplovnih snaga Australije, protiv Japanaca. U toku borbe do američke komande stizale su uznemiravajuće informacije u kojima se navodilo da Japanci žele da premeste svoje snage iz luke Rabaul, koja se nalazi na krajnjem istoku Nove Britanije, u drugu luku koja se nalazi u Novoj Gvineji. Do Nove Gvineje može se doći na dva načina: ili uz severni deo Nove Britanije, što je kraći put, ali su lošiji uslovi jer je smanjena vidljivost ili uz njen južni deo gde je vidljivost odlična, ali je put znatno duži. U oba slučaja put će trajati tri dana. Američka komanda se našla pred dilemom: gde smestiti izviđačke i ostale vazduhoplovne trupe – na severnoj ili južnoj putanji. Ako se konvoj otkrije, on će biti bombardovan sve do ulaska u novu luku. Ukoliko se desi da su japanski konvoj i američki avioni na različitim rutama, biće potrebno vremena da se konvoj otkrije i da se angažuje raspoloživa avijacija. Dakle, pred štabovima obe strane nalazi se sledeća igra (rezultati u matrici označavaju dane bombardovanja – slika 3.):

|                 | Severna putanja | Južna putanja |
|-----------------|-----------------|---------------|
| Severna putanja | (2, -2)         | (2, -2)       |
| Južna putanja   | (1, -1)         | (3, -3)       |

**Slika 3.** ([9]) – Matrica plaćanja

Igrač I je dat horizontalno, to su strategije američkih i australijskih snaga, dok je igrač II predstavljen vertikalno i to su strategije japanske trupe. Iz „isplate“ igre možemo zaključiti da je ovo igra sa sumom nula, odnosno, igra u kojoj je dobitak jednog igrača jednak gubitku drugog igrača. Igrači donose svoje odluke istovremeno.

Kakve kombinacije strategija su moguće i koji rezultati? Ako bi se konvoj kretao severnom linijom i ukoliko bi i američke trupe takođe bile smeštene na ovoj liniji, Amerikancima bi bilo potrebno određeno vreme da otkriju konvoj (recimo jedan dan) i da ga u uslovima smanjene vidljivosti nakon toga i bombarduju. U ovom slučaju, japanska komanda može očekivati dva dana teškog bombardovanja. Ukoliko bi američke snage bile smeštene na severnoj liniji, a konvoj išao južnom, takođe bi bilo potrebno određeno vreme da se konvoj otkrije i raspoloživa vojska preusmeri, ali kada se to desi, sledi bombardovanje uz odličnu

## Teorija igara: matematičke osnove mitova i paradoksa

vidljivost. U ovoj situaciji japanski konvoj očekuje sigurno bombardovanje i to u trajanju od dva dana. Situacija koja najviše odgovara japanskoj komandi jeste da Amerikanci budu smešteni na južnoj liniji, a da se oni kreću severnom. Tada bi zbog toga što je potrebno vreme da se konvoj otkrije i snage premeste, kao i zbog slabe vidljivosti došlo do najkraćeg bombardovanja i samim tim i do najmanjih gubitaka po Japance. Najgori mogući ishod za Japance je da krenu južnom linijom, a da su Amerikanci smešteni baš na toj putanji. Tada sledi brzo otkrivanje i uz uslove odlične vidljivosti bombardovanje u trajanju od tri dana.

Šta je ravnoteža tj. rešenje ove igre? Najpre ćemo posmatrati situaciju sa stanovišta američke komande. Za njih nema dominirajuće strategije, tj. ne postoji strategija koja bi donela bolje rešenje od neke druge strategije, bez obzira kako bi postupila druga strana, odnosno, japanska komanda. Ako pak posmatramo situaciju iz ugla japanske komande, uočavamo da postoji strategija koja je slabo dominantna u odnosu na drugu – strategija „južna putanja“ slabo je dominirana strategijom „severna putanja“. Racionalnom igraču nije u interesu da odigra strategiju koja je slabo dominirana nekom drugom strategijom, odnosno, on neće poslati konvoj „južnom putanjom“. Zaključujemo da je ravnoteža ove igre „severna putanja – severna putanja“ sa ravnotežnim rezultatom od dva dana bombardovanja pri uslovima slabe vidljivosti. Do ovog zaključka dolazimo ukoliko igrači imaju pred sobom istu matricu igre i drže se kriterijuma racionalnosti. Upravo ovako se i desilo u stvarnosti. Konvoj je krenuo po severnoj liniji, bio je otkriven tokom prvog dana i žestoko bombardovan naredna dva dana. Iako su Japanci imali velike gubitke (potopljen veći deo konvoja i velike ljudske žrtve), sa stanovišta teorije igara, njihov komandant ne može biti osuđen kao neracionalan igrač.

Ova igra se može rešiti i pomoću maxmin kriterijuma. Krećemo od početne matrice isplate igre i utvrđujemo garantovani dobitak igrača I (Amerikanaca). Prema maxmin kriterijumu, oni će tražiti garantovani dobitak za svaku strategiju (dobitak koje je zagarantovan bez obzira na ponašanje igrača II). Pošto tražimo najmanji dobitak za svaku strategiju igrača I, njega upisujemo u posebnu kolonu matrice isplate igre (min označavamo zelenom bojom). Kod igrača II je sve obrnuto. Kako je ovo igra sa nultom sumom, on želi da minimizira svoj gubitak te će pronaći maksimalnu vrednost gubitka za svaku svoju strategiju (slika 4.). Te vrednosti beležimo u posebnu vrstu matrice isplate igre (max beležimo crvenom bojom).

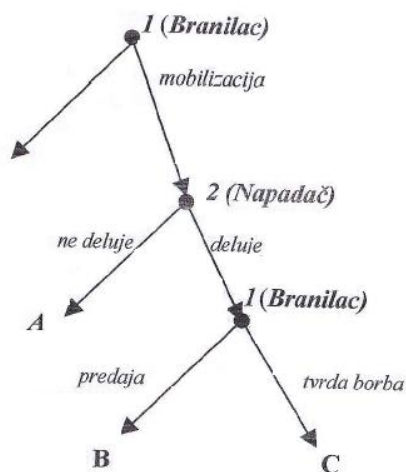
|                 | Severna putanja | Južna putanja | Min |
|-----------------|-----------------|---------------|-----|
| Severna putanja | 2               | 2             | 2   |
| Južna putanja   | 1               | 3             | 1   |
| Max             | 2               | 3             |     |

**Slika 4.** ( [9] ) – Modifikovana matrica plaćanja

Igrač I sada želi da obezbedi maksimalan garantovani dobitak te bira strategiju koja će mu to omogućiti, a to je strategija „severna putanja“. Igrač II nastoji da minimizira gubitak, odnosno, traži najmanji garantovani gubitak te se opredeljuje za strategiju „severna putanja“. Tako smo došli do rešenja igre i rezultata koji nam je poznat od ranije. Igrač I ostvaruje dobitak u vidu dve jedinice, koliko iznosi i gubitak igrača II. Ova tabela se razlikuje od prethodne samo po tome što smo ovde predstavili isplatu igrača I budući da je dobitak jednog jednak gubitku drugog igrača, jer se radi o igri sa nultom sumom.

**Igra zastrašivanja (igra odvrćanja)** ([9]) – U ovoj igri učestvuju dva igrača: država branilac – igrač I i država napadač – igrač II. Odvija se u tri etape i predstavljemo je u ekstenzivnoj formi. Na osnovu brojnih nagoveštaja i određenih političkih događaja, država branilac zaključuje da joj preti opasnost od neke druge države. Napadač ugrožava državu branioca, preti na razne načine da će je napasti.

Igra ne počinje sve dok pretnja ne postane neki konkretan potez u igri. Tek nakon otkrivanja pretnje igra zapravo počinje i tada je na potezu država branilac. Na ove pretnje država branilac može da ne preduzima ništa ali može i da izvrši mobilizaciju svojih raspoloživih vojnih snaga. Sada sledi potez potencijalnog napadača koji može da odgovori na mobilizaciju ili da uopšte ne reaguje. Ukoliko potencijalni napadač ne reaguje na mobilizaciju dolazi do kraja igre (rezultat A). To je situacija u kojoj mobilizacija raspoloživih vojnih trupa odvrća potencijalnog napadača od napada. Ako napadač ipak odluči da reaguje i napadne državu branioca, tada branilac ima dve opcije: ili da se preda ili da se bori sa raspoloživim snagama. Odavde sledi da igra može biti završena ili rezultatom B ili rezultatom C iz izgleda kao na slici 5. Primetimo da je igra sekvencijalna, tj. igrači ne donose odluke istovremeno.



**Slika 5.** ([9]) – Igra zastrašivanja

Analitičari koji se bave vojnim pitanjima odlučili su da testiraju ovu igru na raspoloživom istorijskom materijalu. Ovaj model su testirali na istorijskim podacima od 1885. godine i na osnovu analize došli su do sledećih rezultata: rezultatom A završeno je 58 slučajeva, rezultatom B 10 slučajeva, a rezultatom C 14 slučajeva. Primećujemo da se najviše slučajeva završilo tako da, kada su države branioci „pokazale zube“, potencijalni napadači su odustajali od rata. Odakle sledi direktna pouka: što se branilac jače sprema za otpor to je manja verovatnoća da će do sukoba uopšte doći. Takođe, što je manja verovatnoća da će država koja se brani odgovoriti snažnim otporom, to je veća verovatnoća da će do napada doći. Ova logika može biti narušena kada recimo napadač ipak odluči da uđe u sukob iako postoji nagoveštaj snažnog otpora branioca. Na primer, to se događa kada je napadač posebno motivisan, tj. kada ima veoma jake interese da uđe u sukob, ili kada je razlika u veličini vojske toliko velika da akcije onoga koji je slabiji zapravo nemaju nikakvog smisla.



### 4.3 Političke nauke

Primena teorije igara u političkim naukama usmerena je na područja političke ekonomije, javnog izbora, ratnih pregovaranja, pozitivne političke teorije i teorije društvenog izbora. U svakom od tih područja, naučnici su razvili igru - teorijske modele u kojima su igrači često u ulozi birača, posebnih interesnih grupa i političara. Sledi primer čija je problematika navela analitičare različitih interesovanja da istražuju ne samo u ekonomskoj nauci (problemi državne intervencije u različitim oblastima, subvencije i sl.) već i u obrazovanju, političkoj filozofiji, etici.

**Samarićaninova dilema** ( [9] ) – Ovu dilemu je definisao Džejms Bjukenen (James Buchanan) 1975. godine želeći da ukaže na osnovni problem s kojim se susreće svaka država blagostanja. Problem se javlja zbog toga što veliki broj građana živi od preraspodele (izdržavana lica) i taj broj neprestano raste. Sve to ukazuje da nešto nije u redu sa sistemom podsticaja. U igri učestvuju dva igrača: igrač I - potencijalni Samarićanin i igrač II – onaj koji očekuje pomoć. Igrač I ima na raspolaganju dve strategije : L – da ne pomogne igraču II određenim finansijskim sredstvima ili poklonom i R – da mu pomogne. Takođe, i igrač II ima dve strategije na raspolaganju: l – da radi i r – da ne radi i čeka pomoć (slika 6.).

|   | l      | r      |
|---|--------|--------|
| L | (2, 2) | (1, 1) |
| R | (4, 3) | (3, 4) |

**Slika 6.** ( [9] ) – *Matrica isplate u samarićaninovoj dilemi*

Primetimo da je ovo igra sa nepotpunom informacijom jer igrači odluke donose istovremeno. U ovom slučaju isplate igre nisu dobiti i gubici koje smo ranije srećali, nego su to indikatori ordinalne korisnosti što znači da 1 predstavlja stanje koje igraču donosi najmanju korisnost, dok 4 označava da to stanje igraču donosi najveću korisnost. Takođe, (1, 1) predstavlja situaciju koju oba igrača opisuju kao najnepovoljniju. Postoji i Nešova ravnoteža u čistim strategijama (R, r) što znači da se igrač I ponaša kao Samarićanin, a igrač II ne radi. Bjukenen smatra da je ova situacija tipična za države blagostanja jer ukoliko neko unapred zna da će dobiti pomoć, što bi se on zalagao za nešto.

Glavni razlog zbog koga se javlja dilema jeste uticaj pomoći na promenu ponašanja onog ko očekuje pomoć. S jedne strane, postoji potreba da se pomogne onima koji su u nevolji i koji nisu u stanju da pomognu sami sebi ali opet, sa druge strane, dugoročna pomoć može da ima loš uticaj na onog ko je prima. Problem postaje još jači ukoliko ga postavimo u sledeći kontekst: pretpostavimo da je suma koju Samarićanin želi da da igraču II obrnuto proporcionalna dohotku koji igrač I sam zarađuje (što manje zarađuje to dobija više pomoći). Tada igrač II ne želi da se previše trudi, jer što se on manje zalaže, to dobija veću pomoć. Posmatrajući ovu situaciju dugoročno, lako dolazimo do zaključka da dolazi do povećanja broja onih koji stoje u redu za pomoć. Bjukenen je ovaj tip igre nazvao „aktivnom samarićanskom dilemom“.

## Teorija igara: matematičke osnove mitova i paradoksa

Postoji i druga mogućnost koju je Bjukenen nazvao „pasivnom samarićanskom dilemom“.

|   | l      | r      |
|---|--------|--------|
| L | (4, 2) | (1, 1) |
| R | (2, 3) | (3, 4) |

**Slika 7.** ( [9] ) – Pasivna samarićaninova dilema

U ovoj situaciji nema dominirajuće strategije ni za jednog ni za drugog igrača. Postoje dve Nešove ravnoteže u čistim strategijama (L, l) i (R, r) (slika 7.). Samo ukoliko igrač I očekuje da će igrač II birati strategiju r, želi da mu pomogne. Jedan od načina da se reši dilema jeste da se uvede posrednik – državna agencija čiji bi zadatak bio da prati ponašanje igrača II. Ali, tada se javlja novi problem, da li se može verovati posredniku? Bjukenen je u to izražavao sumnju.

## 4.4 Primena u pravu

Posmatrajmo pojedinca koji treba da odluči da li da se upusti u krađu kojom može da zaradi sumu od milion dolara. Ako se upusti u krađu, on može to da izvede tako efikasno da ne bude uhvaćen. U ovakvoj situaciji nema razloga za dvoumljenje – krađa se čini kao potpuno normalna stvar. Ipak, ovo je preterano optimistična varijanta mogućih događaja te se potencijalni kradljivac ne bi smeo previše oslanjati na nju. On mora da računa na to da će sigurno biti tražen i verovatno uhvaćen od strane policije. Potom sledi suđenje i zatvor. Ukoliko postoji velika verovatnoća da će se upravo ovo desiti, potencijalni kradljivac će odustati od krađe. Na njegovu konačnu odluku presudni momenat ima saznanje da li je policija potkupljiva ili nije. Ukoliko potencijalni kradljivac pretpostavi da je policija nekorumpirana odustaje od svoje namere da krađe jer će biti uhvaćen, osuđen i završiće u zatvoru. Ako bi pošao od toga da je policija podmitljiva, njegovo razmišljanje i konačna odluka se menjaju. Dolazi do zaključka da će kada bude uhvaćen deo novca dati policajcu da ga pusti. Sada imamo složeniju situaciju, sa novim faktorima koji utiču na proces odlučivanja.

U ovoj situaciji dolazi do pregovaranja o tome koliko novca treba dati policajcu da ne bi prijavio kradljivca. Tu se, dakle, javlja tipična igra pregovaranja sa svim njenim standardnim elementima. Postoji još jedna opcija za policajca tzv. „spoljašnja opcija“. On ne želi da uzme mito nego kradljivca privodi i tako ostvaruje dobitak jednak nuli. Uključimo sada u priču i opciju da zatvorske kazne mogu biti različite dužine, u zavisnosti od težine učinjenog dela. Sad se postavlja pitanje da li ukoliko je kazna velika, policajac može da ucenjuje kradljivca da će ga prijaviti i tako iznudi viši iznos mita. Racionalan igrač je svestan da je ovakva ucena policajca prazna: ukoliko bi ga policajac prijavio, on sam ne bi ostvario nikakav dobitak, nema mita, što znači da takvo ponašanje nije u njegovom ličnom interesu. Dakle, pretnja kaznom je prazna bez obzira na visinu predviđene kazne za određeno delo. Drugim rečima, visina predviđene kazne nema uticaja na visinu mita koji će potencijalni kradljivac isplatiti policajcu.

Nakon svih mogućih analiza opcija i situacija, kradljivac odlučuje da ipak ukrade novac i, ukoliko bude uhvaćen, ponudiće jedan deo novca potkupljivom policajcu. Kakav zaključak možemo sada izvesti? Ovim prostim primerom može se istaći da nivo predviđene zatvorske kazne neće sprečiti kriminalno ponašanje ukoliko su policajci skloni mitu i korupciji, pa se efikasna rešenja moraju tražiti na drugoj strani. Za ovo poglavlje koristili smo literaturu [9].

### 4.5 Primena u ekonomskoj nauci

Teorija igara je ostvarila takav stepen primene u ekonomiji da su analitičari koji su najviše doprineli tome nagrađeni i Nobelovom nagradom<sup>5</sup>. Brojni su primeri primene teorije igara u ekonomiji. Na primer, Nešova ravnoteža se koristi za analizu brojnih konkretnih ekonomskih situacija kao što su opis ponašanja monopola i različitih rešenja (ravnoteža) koji mogu da se ostvare, problem javnih dobara, aukcije, osiguranje i slično ([9]).

U modernoj ekonomiji, gde je vidljiva međuzavisnost, profit jednog subjekta ne zavisi samo od njegovog ponašanja, od njegove odluke, nego i od toga kako se ponašaju ostali subjekti odlučivanja. Zbog toga donosilac odluke mora stalno da prati i analizira strategije koje su odabrali ili će odabrati njegovi oponenti, kao i analizu strategija koje će doneti drugi subjekti odlučivanja, kao odgovor na strategiju koju on tek treba da odabere. Teorija igara daje priliku ekonomistima da privredne procese posmatraju kao složenu i dinamičku igru, koja je dosta nepredvidiva za brojne učesnike na tržištu, a ne kao mašina čije je ponašanje relativno lako prikazati, koje se ponavlja i koje je kao takvo predvidivo. Daljom analizom primene teorije igara u ekonomiji ovaj put se nećemo baviti ali mnoge informacije o tome možete pronaći u knjizi [6].

Dakle, možemo zaključiti da su brojni problemi sa kojima se susrećemo u ekonomiji, bolje objašnjeni korišćenjem znanja iz teorije igara, nego nekim drugim klasičnim postupcima. Zbog svega toga, teoriju igara svrstavamo u moćna sredstva bez kojih bi ekonomska nauka bila znatno siromašnija i manje uspešna.

---

<sup>5</sup> 1994. godine dodeljena je Nobelova nagrada za ekonomiju Džonu Nešu, Džonu Harsaniju i Rajnhardu Zeltenu za njihove izvanredne ideje koje su doprinele razvoju teorije igara i njen značaj za analizu ekonomskih pojava.

## 5. Modeli nekooperativnih igara

Najjednostavniji model za predstavljanje nekooperativne igre, njenu normalnu ili stratešku formu pretpostavljaju 3 uslova ([5]):

1. podaci o igračima,
2. celokupan opis strategija dostupnih svakom igraču,
3. podaci o upotrebnoj vrednosti koje se gomilaju raznim igračima za svaku moguću stratešku priliku.

Predstavljamo čuvenu igru **Papir - kamen - makaze**. Ova igra je u brojnim kulturama postala tradicija, najčešće se igra u osnovnoj školi ali se koristi i kada „na brzinu“ želimo da donesemo neku odluku, na primer, na fudbalskoj utakmici dva igrača ne mogu da se odluče koji će od njih dvojice šutirati slobodan udarac pa se dogovore da odigraju ovu igru. Ko pobeđi – šutira. Međutim, igra Papir – kamen – makaze nije samo igra u kojoj pobeđuje onaj koji ima više sreće sa odgovarajućim izborom već i igra umeća. Moguće je odrediti strategiju koja će igraču osigurati sigurnu dobit. Kao izvor za ovo poglavlje koristili smo literaturu [5].

U veoma poznatoj dečjoj igri Papir – kamen - makaze ([5]) dva igrača, svaki istovremeno, pokazuju ruku u jednoj od tri konfiguracije. Ravna ruka predstavlja list papira, pesnica znači kamen, a ispruženi kažiprst i srednji prst predstavljaju makaze. Mogući ishodi igre su dati pomoću sledećeg pravila: makaze seku papir; papir obavića kamen; kamen razbija makaze.

Igrač kolone

|            |                                                                                     |                                                                                     |                                                                                     |
|------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
|            |  |  |  |
| Igrač reda |  |  |  |
|            | 0                                                                                   | -1                                                                                  | 1                                                                                   |
|            |  | 1                                                                                   | 0                                                                                   |
|            |  | -1                                                                                  | 1                                                                                   |

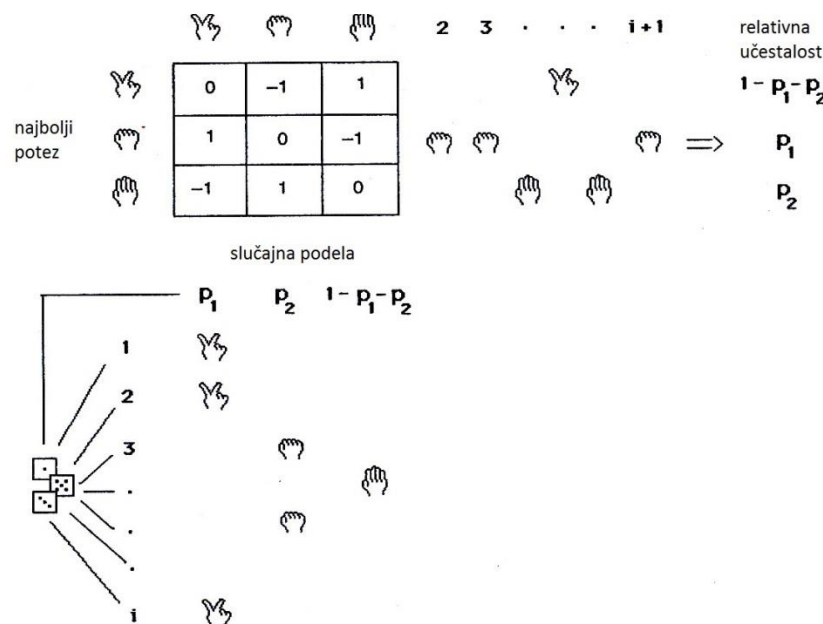
**Slika 8.** ([5]) – *Papir – kamen - makaze*

Normalni oblik ove igre može se prikazati jednostavnom tabelom, kao što je prikazano na slici 8., čije su upotrebne vrednosti za pobeđu 1, poraz -1, i nerešeno 0 prikazane sa gledišta prvog igrača (’redni’ igrač – igrač reda). Ovakva tabela je poznata i kao matrica igre  $A = (a_{ij})$  dotične igre. Igra Papir – kamen - makaze pripada kategoriji igara za 2 igrača sa nultom sumom. Bilo šta da dobije jedan igrač je istovremeno izgubio onaj drugi. Ako uzmeo da je  $B = (b_{ij})$  matrica upotrebne vrednosti drugog igrača, tada u igri za 2 igrača sa nultom sumom odnos matrica je uvek isti, odnosno,  $B = -A$ . Igra Papir – kamen - makaze može se poistovetiti sa simetričnom igrom za 2 igrača.

## Teorija igara: matematičke osnove mitova i paradoksa

Intuitivan pristup rešavanju ove igre počinje sa sledećim razmatranjima. Redni igrač ima jedinstven najbolji odgovor za svaku akciju igrača u koloni (npr. uvek odabrati kamen kada protivnik odabere makaze). On time uvek može izaći kao pobednik, pod pretpostavkom da, naravno, unapred zna koji će izbor njegov protivnik načiniti. Stoga je igrač u koloni prisiljen da sakrije svoje postupke. U igri sa ponavljanjem, takvo skrivanje može se postići igračevim slučajnim odabirom raznih mogućnosti koje su mu dostupne. Pravila igre su takva da način na koji igrači dozvoljavaju da slučaj odredi njihove poteze mora biti očigledan svim igračima. Igrač kolone može sada da poseduje makaze sa mogućnošću  $p_1$  i kamen sa mogućnošću  $p_2$ . Da je ova mešovita strategija poznata protivniku, tada bi on zauzvrat odabrao makaze, kamen, i papir sa relativnom učestalošću  $1 - p_1 - p_2$ ,  $p_1$ , i  $p_2$ .

Ovaj zaključak ne možemo zasnovati na samo jednom primeru igre. Zbog toga sada pratimo rednog igrača koji, kako je prikazano na slici 9., uz pomoć igre koja se proteže kroz mnogo rundi, odgovara na svaku akciju njegovog protivnika u jednoj rundi odgovaranjem sa najboljim odgovorom na tu akciju u sledećoj rundi.



**Slika 9.** ([5]) – Odgovori rednog igrača

Ovo razmatranje nas ponovo vodi do doslednog izbora sa mogućnostima  $p_2$ ,  $1 - p_1 - p_2$ , i  $p_1$ , za akcije igrača kolone. Međutim, ovaj zaključak slaže se sa prvobitnom pretpostavkom o ponašanju ovog igrača, tj. da važi odnos  $p_2 = 1 - p_1 - p_2$ ,  $p_2 = 1 - p_1 - p_2$  i  $p_1 = p_2$ . Kada se reši ovaj sistem jednačina dobija se važeća mešovita strategija  $p^* = (1/3, 1/3, 1/3)$ .

Koje osobine možemo pripisati strategiji  $p^*$ ? Ni jedna druga strategija nije bolja od nje! Naravno, postoje i druge strategije, npr. među (beskrajno mnogo) drugih tzv. čistih strategija, tj. strategija zasnovana na ustaljenom principu, kao što je uvek pokazivanje makaza, koje deluju baš kako treba. Druga osobina ove mešovite strategije jeste da igrač koji primeni strategiju  $p^*$

## Teorija igara: matematičke osnove mitova i paradoksa

---

postiže barem ***sigurnosni nivo igre***. Ova vrednost je najveći mogući dobitak koji se igraču može zagarantovati da postigne bez obzira na akciju protivnika.

Nakon razmatranja ove jednostavne igre, možemo izvući nekoliko ***saveta*** ( [5] ) za igrače u igri staklene perle (u modelima nekooperativnih igara):

1. potrebno je prozreti svog protivnika i čuvati se,
2. nikada ne podbaciti i uvek dati svoj najbolji odgovor .

## 6. Određivanje ravnoteže u konfliktnim situacijama

U ovom poglavlju razmatramo 3 poznate društvene konfliktne situacije i njihovu Nešovu ravnotežu. Sve 3 imaju osobine simetrije, koje smo već sreli u igri Papir – kamen – makaze. Suštinska razlika od te igre pokazivanja rukama je ta da se ovde bavimo sa situacijom bez nulte sume: oba igrača mogu biti pobjednici, ili oboje mogu da izgube. Svaki igrač ima 2 opcije: prva opcija, koju ćemo nazvati **strategija lava**, predstavlja fundamentalno kooperativan stav.

Na slici 10. imamo naznačene isplative vrednosti koje se nagomilavaju kod prvog igrača (rednog igrača) za različite strateške mogućnosti. Na osnovu simetrije možemo odrediti isplative vrednosti za drugog igrača.

|                                                                                     |                                                                                   |                                                                                   |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                     |  |  |
|    | $(V-D)/2$                                                                         | $V$                                                                               |
|  | $0$                                                                               | $(V+W)/2$                                                                         |

**Slika 10.** ([5]) – Igra lav - jagnje

Na primer, ako igrač kolone preuzima lavovski stav dok je redni igrač jagnje, tada njegova isplativa vrednost odgovara onoj rednog igrača u funkciji lava koji se susreće sa igračem kolone preuzimajući ulogu jagnjeta.

**Igra lav – jagnje** može poslužiti, kao metafora za Darvinovu<sup>6</sup> teoriju evolucije. U nizu knjiga o teoriji igara ovo se pojavljuje, kao *Igra jastreb – golub*. Evoluciona parabola je brzo pokazana. Dva nasumice odabrana pojedinca ulaze u sukob oko neke nagrade. Samo posедovanje ovog resursa povećaće Darvinovu sposobnost (ova sposobnost nam služi da razumemo očekivani broj potomaka pojedinaca u datom stanovništvu) za iznos  $V$ . Dok "jagnje" predaje posедovanje nagrade "lavu" bez borbe, 2 "lava" će se uvek izboriti do kraja. Ako  $D$  predstavlja količinu pomoći za koju je Darvinova sposobnost poraženog pojedinca smanjena u toku takve borbe, tada nakon susreta sa još jednim "lavom", "lav" može računati na prosečnu promenu sposobnosti za  $(V - D) / 2$ . Dva "jagnjeta" će jednostavno podeliti resurs jednako bez borbe. Iz ovog razloga možemo očekivati prosečan porast u sposobnosti za dva "jagnjeta" za  $(V + W) / 2$ , gde  $W/2$  označava prosečan porast u sposobnosti zbog toga što je mirotvorac ([5]).

<sup>6</sup> Čarls Robert Darvin (Charles Darwin) je bio britanski naučnik koji je postavio temelje moderne teorije evolucije po kojoj se svi životni oblici razvijaju putem prirodne selekcije.

## Teorija igara: matematičke osnove mitova i paradoksa

Igre koje ćemo sada istraživati mogu se shvatiti odmah u smislu tabele igre lav – jagnje sa zadatkom specifičnih vrednosti parametara. Specifični slučajevi ( [5] ) igre lav – jagnje:

1.  $V = 4, D = 2, W = 0$  - Dilema utrke u naoružanju,
2.  $V = 2, D = 4, W = 0$  - Igra kukavice,
3.  $V = 4, D = 0, W = 6$  - (Rusoova) parabola lova na jelene.

Za prikaz ovih specifičnih slučajeva koristićemo bimatrični prikaz. U *donjem levom uglu* svake ćelije pišemo isplativost rednog igrača, dok se ona igrača kolone pojavljuje u *gornjem desnom uglu*. Date isplative vrednosti ne predstavljaju prosečne promene u sposobnosti. One su samo izraz sređivanja mogućih ishoda igre prema proceni određenih igrača ( [5] ).

Dakle, najpre ćemo dati pregled postojećih analiza **Dileme utrke u naoružanju** koja će nam pokazati kako jedinstvena Nešova ravnoteža ne mora da bude i najbolje rešenje u smislu vrednosti isplate (veću vrednost igrači dobijaju ako ne teže ravnoteži). Potom sledi **Igra kukavice**. Rešenje ove igre prikazujemo pomoću dva primera – **Bertran Raselove varijante kukavice** i **Herman Kanove metafore za igru kukavice**. Prvi primer predstavlja igru kukavice kao bimatričnu igru sa 2 Nešove ravnoteže. Naglasak će biti na najboljim odgovorima rednog igrača (Džejmsa). Drugi primer se oslanja na proročanstvo. Kao poslednja igra koju ćemo predstaviti u ovom poglavlju jeste **Parabola lova na jelene** a literatura koju smo koristili prilikom izrade ovog dela je [5].

### 6.1 Dilema utrke u naoružanju

Dve velike sile, Liliput (Lilliput) i Blefuskijska (Blefuscu), upleteni su u zavadu oko važnog ideološkog pitanja koji bi kraj meko kivanog jajeta, širi ili uži, trebao da se odseče da bi onaj koji obeduje dosegao optimalni užitek svog doručka. Zajedničko razoružanje ova 2 politička subjekta mogao bi zapravo imati uticaj na pogoršanje sukoba. Ipak, uticajne grupe u svakoj državi veruju da jednostrano razoružanje od protivnika uz istovremeno povećanje naoružanja njihove sopstvene države predstavlja najbolje od svih mogućih svetova. Na slici 11. predstavljamo svaku stratešku mogućnost, sa tačke gledišta svakog suparnika, prema njegovom stepenu stabilnosti ( [5] ).

|         |                                                                                     | Blefuskija                                                                                           |                                                                                                       |
|---------|-------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|         |                                                                                     |                   |                    |
| Liliput |  | 1↓ ↗ 4↓                                                                                              | 0← ↗ 4←                                                                                               |
|         |  | 0↑ ↗ 2↑                                                                                              | 2← ↗ 2←                                                                                               |
|         |                                                                                     |  ..... naoružanje |  ..... razoružanje |

**Slika 11.** ( [5] ) – Bimatrični prikaz utrke u naoružanju



## Teorija igara: matematičke osnove mitova i paradoksa

---

Ako država može očekivati poboljšanje svoje strateške pozicije, tada prikazujemo ovo u odgovarajućoj ćeliji bimatrice pomoću *strelice* koja pokazuje u pravcu veće isplativosti. Ako se, s druge strane, može očekivati pogoršanje, tada označavamo odgovarajuću ćeliju sa *precrtanom strelicom*. Igrači kolone se uvek pomeraju horizontalno, dok se redni igrači pomeraju vertikalno u bimatrici.

Postoji jedinstven završetak ove igre u kojoj nijedna nacija ne oseća potrebu da igra strategiju osim one koja je odabrana, u tolikoj meri da mora pretpostaviti da će protivnik nastaviti sa svojom strategijom. Ovaj završetak odgovara Nešovoj ravnoteži (**lav, lav**) pri čemu se obe strane naoružavaju. Drugi način da se kaže ovo je da, sa tačke gledišta svakog igrača, *strategija naoružavanja (lav)* snažno dominira *strategijom razoružavanja (jagnje)*. Slučaj (**lav, lav**) nazvaće se ravnotežom u strategijama jake dominacije.

Možemo dodati u našu listu *saveta* ( [5] ) za igrače igre staklene perle (poglavlje 5.) jednu dodatnu zabranu:

1. potrebno je prozreti svog protivnika i čuvati se,
2. nikada ne podbaciti i uvek dati svoj najbolji odgovor,
  - (a) nikada ne upotrebljavati veoma dominantnu strategiju, jer nikad ne može biti komponenta najboljeg odgovora,
3. odigrati igru u sopstvenom umu.

Kako svaki razuman igrač ima potrebe za savetom 2(a), otklanjanjem veoma dominantne strategije dobija se uprošćeni ali ekvivalentan, u smislu rešenja, prikaz originalne igre. Proces brisanja je započet od strane proizvoljnog igrača, i tada igrači naizmenično brišu strategije sve dok se ne dođe u situaciju da skraćenje pojednostavljene igre nije više moguće.

Uprkos jedinstvenosti Nešove ravnoteže, naša bimatrična igra ne čini se baš u redu. Uzrok je ishod kooperativne igre (*jagnje, jagnje*) koji vrednuju oba igrača mnogo više nego strategiju ravnoteže (*lav, lav*). Kooperacija se ne može dostići ako igrači, nepodnošljivim kršenjem pretpostavke racionalnosti, odlutaju sa puta najboljeg odgovora ( [5] ).

Ovaj paradoks pokazuje, između ostalog, da smo sa dilemom utrke u naoružanju istražili samo jednu od mnogobrojnih maski zatvorenikove dileme koju ćemo kasnije detaljno razraditi (poglavlje 8.). Tada ćemo ispričati ovaj možda najpoznatiji mit teorije igre, koji je dugo vremena ometao razne istražitelje.

## 6.2 Igra kukavice

U filmu "*Buntovnik bez razloga*" Džeјms Din (James Dean) glumi tinejdžera koji je izazvan na smrtonosnu trku kolima. Dva učesnika trkaju se u ukradenim kolima prema litici. Gubitnik (proglašen za *kukavicu*) je prvi koji iskoči iz kola u pokretu. U filmu Dž. Dina je pobedio protivnik, čiji se rukav kožne jakne zakačio za bravu od kola, uranjajući onog ko je nosi

u ambis. Pogodan prevod ovih stanja doveo bi do tzv. *igre utrke sa vremenom*. Slede primeri koji će prikazati rešenje igre kukavice i to sa stanovišta jednog filozofa - Bertran Rasela (Bertrand Russell) i jednog sociologa i futurologa Hermana Kana (Herman Kahn). Ovi primeri su bazirani na literaturi [5].

## 6.2.1 Bertran Raselova varijanta kukavice

*Na seoskom putu zatvorenom za javnost dva vozila se utrkuju jedno prema drugom. Oba vozača voze svoja kola sredinom puta u pravcu sudara. Gubitinik, kukavica, je onaj koji prvi skrene.*

Na slici 12. formulisali smo ovo kao bimatričnu igru. Vrednovanje ishoda igre donosi sledeću simetričnu skalu:

1. preživeli heroj,
2. isti takav kukavica kao i onaj drugi,
3. kukavica (ali živ),
4. mrtav heroj.

Analizirajući ovu igru pomoću strelica vidimo da postoje 2 moguća ishoda za koja nijedan igrač ne oseća potrebu da menja svoju trenutnu čistu strategiju. Ali da li su ove stvarno jedine strateške ravnoteže naše bimatrice? Gde god kriterijum dominacije ne dozvoljava pojednostavljenje igre, na ovo pitanje se može odgovoriti predstavljanjem funkcija reakcije. Na račun simetrije igre kukavice dovoljno je da se razmotri najbolji odgovor rednog igrača.

|                        |                                                                                     |                                                                                     |                                                                                     |
|------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
|                        |                                                                                     | Din                                                                                 |                                                                                     |
|                        |                                                                                     |  |  |
| Dž<br>e<br>j<br>m<br>s |  | $\begin{matrix} -1 \\ \downarrow \end{matrix}$                                      | $\begin{matrix} 2 \\ \downarrow \end{matrix}$                                       |
|                        |  | $\begin{matrix} 0 \\ \downarrow \end{matrix}$                                       | $\begin{matrix} 1 \\ \uparrow \end{matrix}$                                         |

 ..... heroj  
 ..... kukavica

**Slika 12.** ([5]) – Igra kukavice

Sada, neka je  $q$  verovatnoća da igrač kolone odabere ulogu heroja (strategija „lav“). Koje opcije ima redni igrač? Ako odabere čistu strategiju „lava“, tada je njegova očekivana korist:

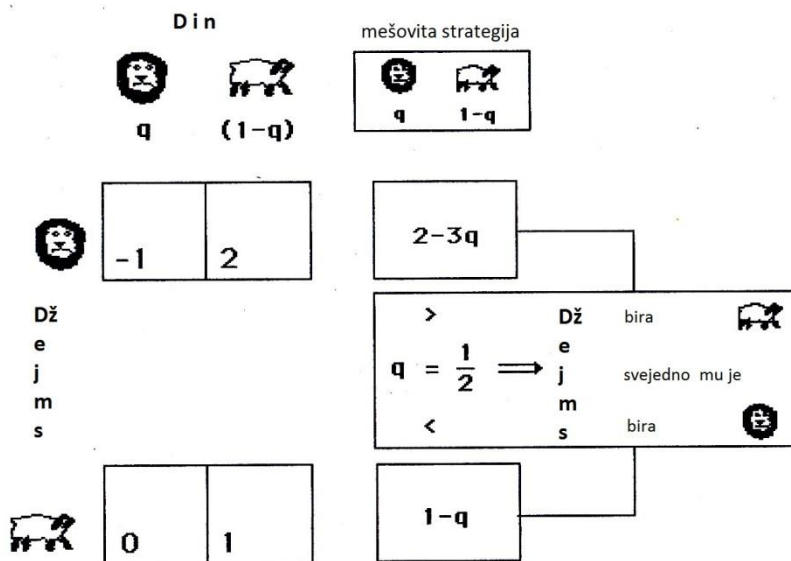
$$(-1) \times q + 2 \times (1 - q) = 2 - 3q.$$

Inače, njegov jasan izbor kukavice vodi do upotrebne vrednosti  $1 - q$ .

## Teorija igara: matematičke osnove mitova i paradoksa

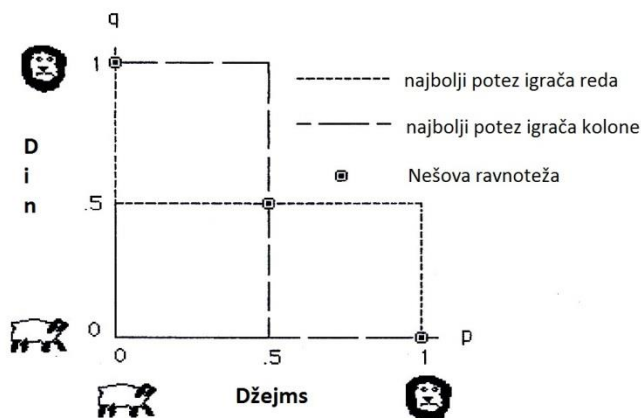
Razuman igrač će uvek uzvratiti u skladu sa njegovim najboljim odgovorom i tako uvek odgovoriti strategijom sa najvećom koristi. Ovo je „jagnje“ za  $q > \frac{1}{2}$ , dok za  $q < \frac{1}{2}$  je „lav“. Samo u slučaju  $q = \frac{1}{2}$  je jedinstvenost najboljeg odgovora izgubljena. Rednom igraču je svejedno koju će strategiju tada odabrati, postiže istu upotrebnu vrednost za obe strategije.

Na slici 13. prikazali smo razmatranja koja vode do najboljeg odgovora rednog igrača. Igrač kolone reaguje slično u skladu sa verovatnoćom  $p$  sa kojom redni igrač preuzima ulogu junaka.



**Slika 13.** ([5]) – Najbolji odgovor igrača reda

Poređenje najboljih odgovora u igri kukavice pojavljuje se na slici 14. Preseci dve krive reakcije predstavljaju celokupan skup Nešove ravnoteže igre. Pored već diskutovane ravnoteže u čistim strategijama, simetrična ravnoteža može se prikazati u slučaju celokupne mešovite strategije.



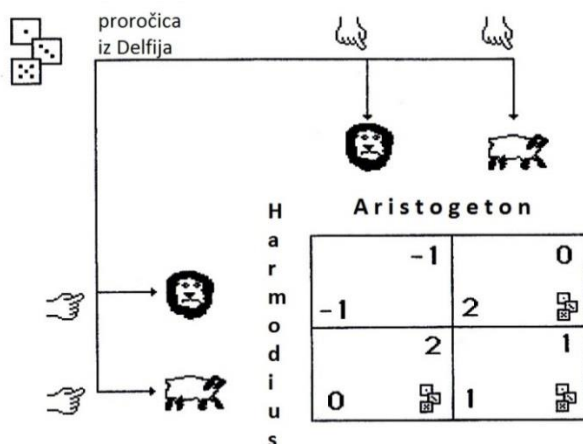
**Slika 14.** ([5]) – Najbolji odgovori u igri kukavica

Može li neko reći da igrači u simultanoj igri kukavice znaju šta rade? U slučaju asimetrične ravnoteže heroj mora da se pouzda u činjenicu da njegov protivnik preuzima ulogu kukavice. Ali kako možemo biti sigurni u to? Simetrična ravnoteža, sa druge strane, pretpostavlja da svaki igrač odabire svoju strategije, bez da njegov protivnik zna koja je, bacanjem novčića. Ovo može zaista biti zanimljivo, ali teško da je efikasno. Nije čudno što umerene veštine teorije igre glasaju za promenu mogućih napora za koordinaciju (nepostojeće) predigre. U njihovim opisima igre kukavice kao metafori za sukobe nuklearnog doba, Herman Kan je stvorio zaista đavolsku metaforu čiji opis upravo sledi.

### 6.2.2 Herman Kanova metafora za igru kukavice

*Sada smo u poslednjoj fazi trke. Džejms Din već može prepoznati odlike svog protivnika kako se trka prema njemu velikom brzinom. Samo tri, možda dve sekunde do fatalnog sudara. Iznenada Din spušta prozor i pompezno baca volan iz kola. Heroj je rođen! Gest je potpuno ubedljiv. Džejms više nema opciju da skrene. Ali šta bi se desilo da njegov dvojnik, Dinov klon, sledeći istu osnovnu strategiju i u isto vreme, baci volan kroz prozor?*

U ovom slučaju igrači bi napustili svu kontrolu nad igrom. Tako u igri *ornitheios* (starogrčka reč za „kukavicu“), obmanuti tinejdžeri Harmodius i Aristogeton<sup>7</sup> imaju mogućnost, pre nego što se popnu na bojna kola, da se posavetuju sa proročicom iz Delfija. Obojica znaju da je proročanstvo verovatno već odabralo jednu od tri označena ishoda (kako je prikazano na slici 15. sa slikama kockica). Ipak proročanstvo kao i uvek, ostaje prilično nejasno i tajno otkriva svakom igraču čistu strategiju koju je dužan da prihvati. Da li će se Harmodius i Aristogeton obazirati na reči proročanstva? Ako hoće, tada sigurno ne zbog straha od bogova, ili zato što im piše u horoskopu. Najbolji razlog za sve je taj iz teorije igre: to će uraditi jer tako uraditi je razuman pravac delovanja.



**Slika 15.** ([5]) – Postizanje ravnoteže u korelaciji

<sup>7</sup> Harmodius (grčki: Ἀρμόδιος) i Aristogeton (grčki: Ἀριστογείτων) su bili atinski heroji koji su pokušali da ubiju tirane Hiparha i Hipiju, sinove Pizistrata. Ovaj atentat se smatrao činom rođenja atinske demokratije.

## Teorija igara: matematičke osnove mitova i paradoksa

---

Ako je strategija „lava“ preporučena Harmodiusu, tada on zna sigurno da će njegov protivnik preuzeti ulogu kukavice. Tada bi se obazreo na proročanstvo. Ako proročanstvo kaže „jagnje“, tada će se Hermodius odlučiti za lava ili jagnje, svaki sa verovatnoćom  $\frac{1}{2}$ . Njegova očekivana upotrebna vrednost od:

$$\left(0 \times \frac{1}{2}\right) + \left(1 \times \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

ne može se poboljšati promenom strategije. Tako da će se ove instrukcije takođe slušati. Kao najprijatniji ishod ove povinovanosti, svaki igrač može se obradovati očekivanoj koristi od:

$$\left(2 \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\right) = 1 ;$$

dvostruko više nego u simetričnoj Nešovoj ravnoteži. Ništa od ovoga ne menja činjenicu da u originalnom formulisanju igre samo tri Nešove ravnoteže dolaze u obzir kao rešenja. Evolutivni dokazi, odbacuju asimetričnu ravnotežu i predlažu da se posmatra simetrična ravnoteža u mešovitim strategijama kao rešenje igre.

## 6.3 Parabola lova na jelene

Žan Žak Ruso (Jean Jacques Rousseau), jedan od najuticajnijih predstavnika političke filozofije 18. veka, smislio je sledeću strategiju konflikta između ciljeva pojedinca i zajedničke volje u svom govoru o poreklima nejednakosti:

### Rusoova parabola lova na jelene

*Grupa lovaca uspela je opkoliti jelena i par zečeva. Opkoljene, životinje se pokušavaju osloboditi. Svaki lovac sada ima izbor: da pusti da zečevi pobegnu i tako spreče da jelen pobegne ili da se odluče za drugo i krenu na zečeve i puste da veći plen pobegne. Jelen se može uhvatiti samo ako svaki lovac odoli iskušenju da lovi lakši plen. Ako i jedan lovac ima preveliku žudnju prema zečjem paprikašu tada će svi oni koji promovišu opšte blagostanje definitivno dobiti najgore ([5]).*

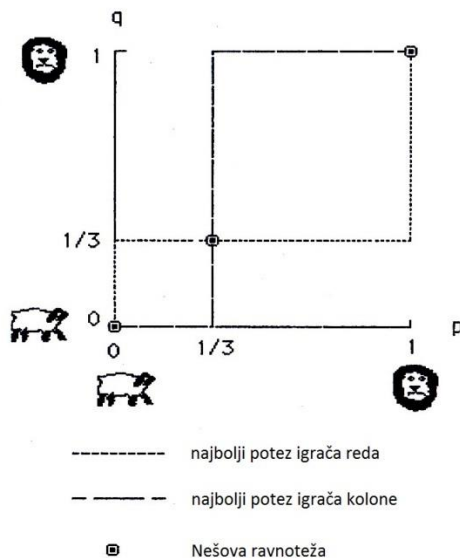
Primena parabole lova na jelene vidljiva je u brojnim društvenim neprilikama. Savremen primer mogao bi biti taj kada se grupa kongresmena složi da bude protiv predloga zakona koji bi im smanjio plate. Ali svaki pojedinačni član Kongresa može samo sa velikom teškoćom da odoli iskušenju da podrži zakon u interesu svog sopstvenog ugleda, do te mere da procenjuje opasnost da će predlog zakona proći kao ne previše značajan. Što je veći broj kongresmena koji odole ovom iskušenju, sve je verovatnije da će se neprijatna odluka doneti (jednostavnom većinom).

|                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |  |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|--|
|                                                                                   |  |  |  |
|  | 2 ↗<br>2 ↘                                                                        | 4 ↓<br>0 ←                                                                        |  |
|  | 0 ↑<br>4 ⇒                                                                        | 5 ↗<br>5 ↘                                                                        |  |

 ..... jurnjava za zečevima  
 ..... lov na jelene

**Slika 16.** ([5]) – Bimatrični prikaz igre lova na jelene

Na slici 16. smanjili smo parabolu lova na jelene na nivo igre za dve osobe, tzv. *igru lova na jelene*. Analizom utvrđujemo da se Nešova ravnoteža javlja kod simetralnih parova (*lav, lav*) i (*jagnje, jagnje*). Grafička analiza najboljeg odgovora na slici 17. potvrđuje ovu preporuku i identifikuje dodatnu simetričnu ravnotežu u mešovitu strategiju. Štaviše, (*jagnje, jagnje*) dominira (sa tačke gledišta oba igrača) nad ostale dve ravnoteže ([5]).



**Slika 17.** ([5]) – Najbolji potezi u igri lova na jelene

## 7. Igre protiv vremena

Na granici između teorije igre i klasične primenjene matematike pojavila se 1950-tih teorija diferencijalnih igara. Koncepti i ideje Rufusa Ajzeka (Rufus Isaacs) korišćene su za zasnivanje brojnih izraza na polju teorije optimalne kontrole koja se paralelno razvijala. Nasuprot konfliktnim situacijama koje smo do sada predstavili, diferencijalne igre naglašavaju ulogu vremena. Pre nego što potražimo važne uticaje uz pomoć dva književna konflikta pozabavićemo se klasičnim igrama sa gubitkom, uz pomoć teorije dvoboja.

Prvo čime ćemo se baviti u ovom poglavlju jeste **dvoboj** gde ćemo modelirati vreme, odnosno, odrediti vrednost borbe (igre) u zavisnosti od vremena, a potom u sukob uključiti i trećeg igrača čime se poenta igre menja. Glavni faktor igre više nije vreme već akcenat stavljamo na redosled igrača prilikom pucanja (za vreme borbe tj. sukoba). Naime, u sukobu se suočavaju 3 protivnika, svaki sa beskrajnom zalihom municije i svaki od njih pokušava da preživi trostruki sukob. Našim protivnicima daćemo imena iz čuvenih kaubojških filmova a potom ćemo prikazati rešenje **trostrukog sukoba** sa stanovišta M. Šubika (M. Shubik), R. Gardnera i Donalda Knuta. Za kraj, predstavimo **legendu o Faustu**<sup>8</sup> i to sa dva stanovišta – književnog i naravno, pomoću teorije igara. U oba slučaja, razmotrićemo tumačenje Fausta sa stanovišta čuvenih pisaca – K. Marloa i J. Getea a kao izvor koristili smo literaturu [5].

### 7.1 Teorija dvoboja

U kaubojском filmu „*Neoprostivo*“ (Unforgiven) Klint Istvud (Clint Eastwood) je u ulozi revolveraša Viliijema Manija (William Munny), koji u dramatičnom kraju filma ubija petoro ljudi koji su potegli revolvere na njega. Kada se smirila situacija, Bošamp (W. W. Beauchamp), svedok sukoba, pita: „Koga si prvo ubio? Kada se suoči sa brojnim neprijateljima, iskusni revolveraš će uvek prvo pucati na najboljeg strelca.“ Na ovo V. Mani lakonski odgovara: „Imao sam sreće u redosledu. Ali uvek imam sreće kada dođe do ubijanja ljudi.“

Kasnije, u vezi sa sukobom u igri sa 3 osobe, podržaćemo Bošampovu tačku gledišta. U igri dve osobe ili dvoboju, pitanje redosleda je mimo suštine, pošto je uvek jasno na koga neko puca. Umesto redosleda, ovde je pitanje vremena koje visi u ravnoteži.

U saglasnosti sa tradicionalnim pravilima modela 2 osobe, protivnici prilaze jedan drugom sa početne razdaljine  $A$  koracima. Označavamo verovatnoću prvog igrača da pogodi protivnika sa  $p(x)$  i onog drugog sa  $q(x)$ , gde je razdaljina među njima smanjena na  $x$ . Obe

---

<sup>8</sup> Faust je protagonista klasične nemačke legende. Faust je veoma uspešan učenjak, ali je nezadovoljan svojim životom, pa zato pravi dogovor sa đavolom. Menja svoju dušu za neograničeno znanje i zemaljska zadovoljstva. Faustova priča je osnova za mnoga literarna, umetnička, filmska i muzička dela. Izraz faust ili faustovska osoba se koristi kada se govori o ambicioznoj osobi koja gubi moralni integritet kako bi postala uspešna i moćna. Odatle je nastao i izraz: „Dogovor sa đavolom.“



## Teorija igara: matematičke osnove mitova i paradoksa

funkcije verovatnoće rastu kako se  $x$  približava nuli, na kojoj tački obe postaju potpuno sigurne činjenice. Ako postavimo vrednost  $+1$  za samo preživljavanje,  $-1$  za sam bliski susret sa smrću, i  $0$  za sve druge mogućnosti, naime, da obojica prežive ili poginu, i ako dalje pretpostavimo da svaki igrač ima samo  $1$  metak na raspolaganju, koji kada opali jako se čuje, tada možemo izračunati  $N_1(x, y)$ , korisnost koja se gomila kod prvog igrača ako je  $x$  razdaljina sa koje prvi igrač puca a  $y$  odgovarajuća razdaljina za njegovog protivnika.

Za  $x > y$  prvi igrač će preživeti drugog samo ako njegov hitac (sa verovatnoćom  $p(x)$ ) pogodi. Ako promaši (sa verovatnoćom  $1 - p(x)$ ), tada bez straha od odmazde njegov protivnik može smanjiti razdaljinu  $y$  za svoj hitac na  $0$  i pucati sa verovatnoćom uspeha  $q(0) = 1$ . Obrnuto, ako je  $y > x$  tada će prvi igrač preživeti svog protivnika sa verovatnoćom  $1 - q(y)$ . Ako igrači pucaju istovremeno, tada će prvi preživeti samo ako njegov hitac pogodi metu bez da ga protivnikov hitac pogodi. Tako da imamo:

$$N_1(x, y) = \begin{cases} 2p(x) - 1 & \text{ako } x > y, \\ p(x) - q(x) & \text{ako } x = y, \\ 1 - 2q(y) & \text{ako } y > x. \end{cases}$$

U igrama dvoboja bez dobitka drugi igrač će uvek težiti da smanji ovu funkciju korisnosti. Do ovog kraja ispaljuje sa razdaljine  $\hat{y}(x)$  za koju je:

$$N_1(x, \hat{y}(x)) = \min_{0 \leq y \leq A} N_1(x, y)$$

Sada, preciznost prvog igrača se povećava što duže čeka (i tako biva sve bliži). Ni u kom slučaju razdaljina  $\hat{y}(x)$  ne bi trebala da pređe  $x$ . Neka  $d^*$  označava jedinstvenu razdaljinu za koju je  $p(d^*) + q(d^*) = 1$ . Tada je recept za smanjenje korisnosti  $N_1(x, y)$ :

$$\hat{y}(x) = \begin{cases} x & \text{ako } x \leq d^*, \\ 0 & \text{ako } x > d^*. \end{cases}$$

Prvi duelista mora se zadovoljiti sa korisnošću na rastojanju  $x$  od:

$$N_1(x, \hat{y}(x)) = \begin{cases} 1 - 2q(x) & \text{ako } x \leq d^*, \\ 2p(x) - 1 & \text{ako } x \geq d^*. \end{cases}$$

Pa ipak, sa pogodnim izborom razdaljine za pucanje on može uvećati ovu vrednost. Maxmin vrednost funkcije korisnosti  $N_1(x, y)$  data je pomoću:

$$\max_{0 \leq x \leq A} \min_{0 \leq y \leq A} N_1(x, y) = N_1(d^*, d^*) = p(d^*) - q(d^*)$$

Strateški par ( $x = d^*$ ,  $y = d^*$ ) je time jedinstvena tačka prevoja dvoboja, pošto zadovoljava sledeće svojstvo tačke prevoja:

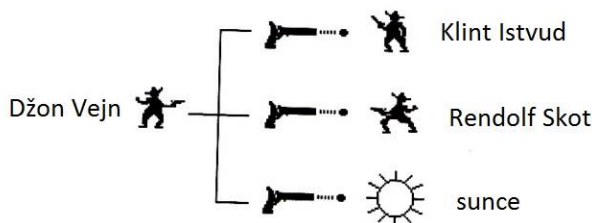
$$\max_{0 \leq x \leq A} \min_{0 \leq y \leq A} N_1(x, y) = \min_{0 \leq y \leq A} \max_{0 \leq x \leq A} N_1(x, y) = N_1(d^*, d^*)$$



## Teorija igara: matematičke osnove mitova i paradoksa

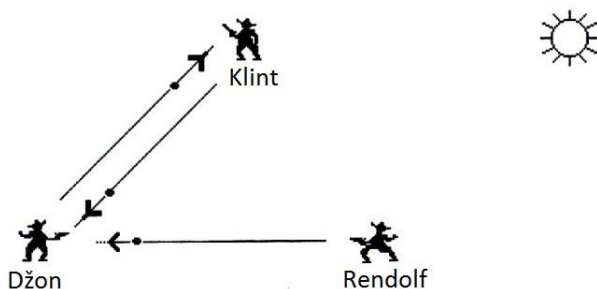
U ovom slučaju maxmin je jednak minmax-u. Stoga, vrednost  $p(d^*) - q(d^*)$ , koja predstavlja i pobedu prvog i poraz dugog igrača, zove se vrednost igre. Do sada navedeno nalazi se u [5].

Uvođenje još jednog revolveraša u igru dovoljno je da promeni situaciju iz temelja. Ova igra opisana je u [5]. U sukobu trojice sada su 3 protivnika koja se suočavaju, svaki sa beskrajnom zalihom municije. Svaki od njih pokušava da preživi trostruki sukob. Daćemo našim učesnicima sukoba imena 3 najveća glumca u kaubojskim filmovima: *Džon Vejn* (John Wayne), *Klint Istvud* (Clint Eastwood) i *Rendolf Skot* (Randolph Scott). Džon je, pretpostavimo, najbolji strelac, pa zatim Klint i onda Rendolf. Naši učesnici će stajati na vrhovima jednakostraničnog trougla, a ove pozicije će ostati fiksne tokom čitave razmene vatre. Tako funkcije verovatnoće za troje može biti smanjena na konstante  $j > c > r$  (oznake su početna slova imena 3 protivnika).



**Slika 18.** ([5]) – Džon Vejnova čista strategija

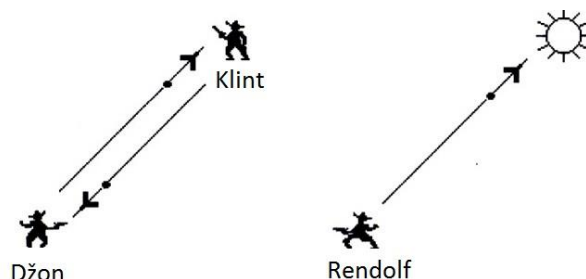
Učesnici sukoba izvlačenjem šibica određuju redosled pucanja i ovog redosleda će se strogo pridržavati tokom sukoba. Na slici 18. pokazali smo moguće strategije Džona Vejna. Kada je na redu da puca, ako su oba njegova protivnika još živa, kao najbolji strelac, odlučuje da puca na Klinta i pogađa ga sa verovatnoćom  $j$ . Džon bi mogao da eliminiše i Rendolfa, ali gledajući unapred, postaje jasno da bi Džonova verovatnoća za pobedu nestala u ovom slučaju, pošto kako pucnjava odmiče Džon bi postao meta protivnika koji bolje puca. U neprijateljskom sukobu u kojem su dozvoljene mete samo drugi igrači, ispostavlja se da je strategija pucanja na najjačeg protivnika uvek najpovoljnija. Na slici 19. prikazali smo dobijenu (jedinственu) Nešovu ravnotežu.



**Slika 19.** ([5]) – Nešova ravnoteža

Postavlja se pitanje da li je Džon u dobroj situaciji? Iako je Džon daleko najbolji strelac, mogao bi se naći, što se verovatnoće preživljavanja tiče, iza Rendolfa (da ga prati). Ovaj paradoksnu ishod je prvo opisao M. Šubik.

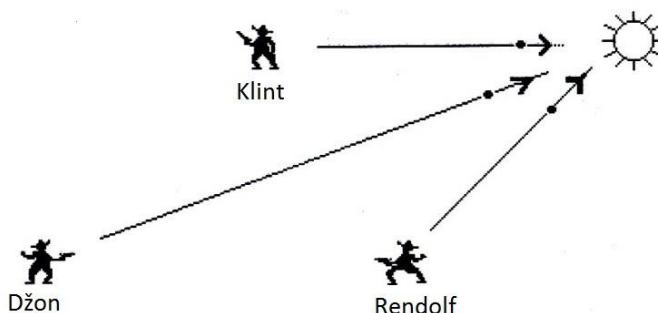
Za sukobe tri osobe sa kooperativnim potezima R. Gardner kaže da dokle god su 3 protivnika živa, treći igrač puca u vazduh umesto u jednog od suparnika. Okolnosti pod kojima je dobrovoljno protraćeni pucanj optimalni odgovor na strategije protivnika, kako je prikazan na slici 20., zavisi, prema Kilgorovoj (D. Marc Kilgour) obimnoj analizi troboja, i od redosleda pucanja i od veštine drugog najboljeg strelca.



**Slika 20.** ([5]) – Gardnerova opcija za sukob tri osobe

Naime, ako Klint nije tako dobar strelac, tada će Rendolf, još gori od njega uvek ciljati na Džona. Ako je Klint vešt strelac i na redu je nakon Rendolfa, tada će Rendolf stalno pucati na sunce dok jedan od njegovih jačih protivnika ne bude eliminisan. U tom trenutku Rendolf može naciljati na preživelog i dati mu zaslužen.

Donald Knut, pruža istinski mirnu završnicu za najkooperativniji od svih mogućih troboja (slika 21.). Svaki igrač je ravnodušan u odnosu na ostale igrače, „baš ga briga“ da li ostaje sam, sa još jednim igračem ili sva trojica preživljavaju.



**Slika 21.** ([5]) – Knutovo rešenje troboja

## 7.2 Legenda o Faustu

U osnovi Fausta kao književne teme stoji motiv sklapanja pakta sa đavolom i arhetip čoveka sumnje. Budući da postoji nebrojeno dela iz različitih umetnosti koja se direktno naslovom ili nekim drugim oblikom strukture pozivaju na ovo ime, bez obzira na varijabilne pojedinosti, Faust postaje univerzalni znak za njegovu osnovnu temu – pakt sa đavolom, odnosno prodaju duše. Iako je najstarija priča o Faustu zapravo nemačka legenda u kojoj junak

## Teorija igara: matematičke osnove mitova i paradoksa

---

sklapa pakt sa đavolom dajući svoju dušu za znanje, kroz vreme se menjala i svoju prvu štampanu verziju doživela 1578. godine u obliku knjižice pod naslovom „Istorija o doktoru Johanu Faustu.“ Interesovanje za ovu knjižicu ne jenjava ni tokom 18.veka, u kom dobija mnoge varijante, i biva prevođena. Jedan od prevoda verovatno je poslužio kao osnova za dramu „Tragična istorija o doktoru Faustusu“ Šekspirovog savremenika Kristofera Marloa, objavljenu 1604. godine.

Dvesta godina kasnije Johan Wolfgang fon Gete (Johann Wolfgang von Goethe) objavljuje svoju verziju legende o Faustu u obliku drame, koja se i danas smatra remek - delom nemačke književnosti. Za razliku od Marloovog, Geteov Faust ne sklapa ugovor sa đavolom tako što ga uzima u službu na određeno vreme, već obećava večnu službu u paklu u zamenu za Mefistofelesovu (Mephisto) službu na zemlji. Ugovor potpisuje krvlju, uz dogovor da opkladu (tj. dušu) gubi trenutno ukoliko doživi momenat istinske sreće, onaj u kom će poželeti da ostane večno. Pored osnovnog motiva sklapanja pakta sa đavolom, Gete unosi i motiv ljubavi između Grete i Fausta koja se završava tragično. Njenom smrću se završava prvi deo drame. Drugi deo nema direktne veze sa prvim, već ga čini pet činova, donekle nezavisnih epizoda koje prikazuju Fausta na putovanjima. Za razliku od Marloovog tragičnog lika koji odlazi u pakao, Geteov Faust na kraju ipak spasava dušu činom božanske milosti.

Sada, kada smo razmotrili pojam Fausta u književnosti, da vidimo kako se on tumači u teoriji igara. Sklopljeni đavolski pakt doživljava transformaciju u opkladi čiji je suštinski kriterijum određivanje trenutka u vremenu kada će Faust izgubiti dušu. Mefisto pretpostavlja da se trenutak istine može ostvariti pomoću sredstava zavodljivih mahinacija, i procenjuje verovatnoću ovog (za njega) potpuno priyatnog ishoda kako je direktno proporcionalan sadašnjim intenzitetom zavoda  $u_1(t)$ , koji je:

$$\dot{x}_1 = c_1 u_1 (1 - x_1),$$

gde je  $c_1$  konstanta i početna vrednost je data sa  $x_1(0) = 0$ . Faust, sa druge strane sumnja u Mefistovu tačku gledišta. Svestan je da se trenutak istine može dostići samo pokajanjem, to je u slici ogledala đavolove formule:

$$\dot{x}_2 = c_2 u_2 (1 - x_2),$$

gde je  $c_2$  konstanta, početna vrednost data je pomoću  $x_2(0) = 0$ , a  $u_2(t)$  je trenutno pokajanje.

Direktne izjave o kraju đavolje opklade mogu biti izvedene samo pod pretpostavkom koju su dali Melman (Mehlmann) i Viling (Willing) u njihovom matematičkom prvobitnom Faustu:

### **Faustovsko - Mefistofelejska teorema doslednosti ( [5] )**

**1.** Što više pokajanje razdražuje Mefistu i što više postavi očekivano nakupljeno zavoda  $1/c_1$ , koje bi bilo proizvedeno u trenutku istine, tim veća mora biti cena za Faustovu dušu da bi se opklada odigrala kako treba.

2. Što je veće postavljen Faustov libido, manje zavođenja će upotrebiti Mefisto, ili, preciznije, manje će zadovoljenja pokajanje doneti Faustu, ali, s druge strane veće pokajanje će razdražiti Mefistu, ili će, preciznije, zavođenje mamiti Fausta.

3. Vrednovanje Faustove korisnosti koja proizilazi iz zavođenja mora doći do najmanje tri četvrtine procene dobitka koji mu se nagomilava kroz pokajanje.

U slučaju veće procene korisnosti koju Faust dobija od zavođenja, ravnoteža uzajamnog zavođenja i pokajanja može se opisati na sledeći način. Iako Faust može dobiti više od zavođenja, njegova strategija ravnoteže satoji se od previše pokajanja. Ovo prividno paradoksalno ponašanje može se objasniti kao što sledi. Pošto je Mefisto tako uznemiren Faustovim pokajanjem, mora brzo završiti igru. Tako da isuviše procenjuje svoje mahinacije i smanjuje ih samo kada vrednost duše  $V$  nije suviše primamljiva ( [5] ).

U stvarnosti Faust ne izvlači nikakvu korisnost od onoga što mu đavo nudi. Pošto je beskorisnost od prevelikog zavođenja najmanje 2 puta veća, sam Faust ima veliki interes za skraćivanje opklade putem previše pokajanja. Ovo bi takođe mogao biti razlog zašto je u drugom delu Fausta ishod tako neutešan za Mefistu. On shvata da je njegovo viđenje igre bilo lažno i da je to bio on ko je prevaren.

Sada ćemo predstaviti pandan Geteovoj tregediji. Održivo tumačenje ove situacije može se stvoriti pozivanjem na prvobitni Faustov motiv, kako ga je predstavio Kristofer Marlou velikim dramskim efektom. Mefisto primorava Fausta na đavolski način na podpokajanje, iskoristivši svoju jaču procenu korisnosti pokajanja. Nasuprot ranijem razmatranju, Faustova totalna korisnost je time pozitivna, dok je Mefistova umanjena, situacija koja čini blagovremeno okončanje opklade neizvesnom. Pre isteka vremena Mefisto za vreme beleži smanjenje intenziteta zavođenja, dok Faust povećava pokajanje da bi se iščupao iz kandži đavola. Za relativno visoku vrednost duše možemo posmatrati kod Marloa smanjenje đavolovih aktivnosti i Faustovo prekasno i time besmisleno pokajanje ( [5] ).

## 8. Dilema zatvorenika

Šta je nagnalo mladog Alberta Takeru (Albert William Tucker), matematičara sa Prinstauna, kada je jednog lepog majskog jutra 1950. godine otkrio psiholozima na Stanfordu tajnu perspektivne mlade discipline zvane teorija igre? Sve što je mogao da uradi čiste savesti kada se suočio sa publikom specijalista ne polju njemu stranom bilo je da predstavi čudnu eksperimentalnu igru u koju su ga njegove kolege iz RAND-a uputile kada je radio tamo kao savetnik. Meril Flud (Merill Flood) i Melvin Drešer (Melvin Dresher) su saterali, za veću slavu nauke, dva nevina ljudska zamorčeta u bitku od sto rundi oko smešne sume. U toku ovog legendarnog sukoba nesrećni borci naslutili su razvoje koji su skoro pola veka oblikovali razvoj moderne teorije igre. U uzajamnom dejstvu saradnje, kršenja vere, osvete, i opraštanja jedinstveni rezultat se iskristalisao na statističku srednju vrednost, tendencija ka nastavku saradnje, koja se čvrsto držala u grubom kršenju rešenja očekivanog od svih strana: Nešove ravnoteže ([5]).

Taker je tačno pretpostavio da se ovo ponašanje pripisivalo samo interaktivno - dinamičnom karakteru (ponovljene) igre. Smanjio je vremenski okvir u jedno suočenje i tako doveo opravdanost teorije njegovog omiljenog studenta ponovo u usklađenje. Njegova sledeća varijacija, prouzrokovala je nešto mnogo presudnije: transformisala je čist šematski matematički primer u živu mitologiju dileme zatvorenika. Kao igra telefona, preobražena pri svakom prepričavanju u još jednu formulaciju, Takerova protejska anegdota putovala je tokom vremena iz udžbenika u udžbenik, korisna tradicija koju ne želimo izostaviti u ovom radu.

### Takerova anegdota

*Boni (Bonnie) i Klajd (Clyde) su uhvaćeni nakon što je pljačka banke pošla naopako i smešteni su u okružni zatvor u zasebne ćelije. Ako ne priznaju zločin, šerif može dokazati samo nelegalno posjedovanje oružja. Za takav prekršaj kazna je 3 godine zatvora. Ako jedno od njih bude čvrsto i ćuti ali drugi prizna, tada onaj koji je priznao, kao svedok gonjenja, provešće samo 1 godinu u zatvoru, ali njegov partner jake volje dobiće 9 godina zatvora. Ako oboje priznaju, tada ih čeka po 7 godina zatvora. Kako će reagovati na ove izbore? ([5])*

|                  |                                                                                     |                                                                                     |                                                                                     |
|------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
|                  |                                                                                     | Klajd                                                                               |                                                                                     |
|                  |                                                                                     |  |  |
| B<br>o<br>n<br>i |  | -7                                                                                  | -9                                                                                  |
|                  |  | -1                                                                                  | -3                                                                                  |
|                  |                                                                                     | -9                                                                                  | -3                                                                                  |
|                  |                                                                                     |  | ..... priznati                                                                      |
|                  |                                                                                     |  | ..... ne priznati                                                                   |

**Slika 22.** ([5]) – Bimatrični prikaz Takerove anegdote

## Teorija igara: matematičke osnove mitova i paradoksa

Na slici 22. prebacili smo zatvorsku kaznu u negativnu upotrebnu vrednost (prebacivanjem u negativnu vrednost ne menjamo suštinu igre, mogli smo i da dodamo npr. 7 svakoj vrednosti, a opet ne bismo uticali na igru).

$1 < v < d+2$   
 $d > 0$

Klajd

|                  |                                                                                                                |                                                                                                               |
|------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                  |                               |                              |
| B<br>o<br>n<br>i |                               |                              |
|                  | <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <span>0</span> <span><math>-d</math></span> </div> | <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <span><math>v</math></span> <span>1</span> </div> |
|                  | $-d$                                                                                                           | 1                                                                                                             |

 ..... priznati  
 ..... ne priznati

**Slika 23.** ( [5] ) – „majka svih dilema zatvorenika“

Matrica igre prikazana na slici 23. može se s pravom nazvati „majkom svih dilema zatvorenika“. Ovde  $-d$  označava isplatu naivčine, dok  $v$  predstavlja isplatu izdajici. Za kazne koje se dobijaju u Takerovoj anegdoti jedan dobija, nakon predložene pozitivne linearne transformacije  $d = \frac{1}{2}$  i  $v = \frac{3}{2}$  ( [5] ). Trebalo bi primetiti da 2 igrača nisu u mogućnosti da komuniciraju jedno sa drugim ( nije moguće ni doturanje tajnih poruka između 2 ćelije, a nemaju ni mobilne telefone) i za svakog igrača je više nego sumnjivo da li će se drugi uzdržati od davanja izjave. Na jeziku teorije igre, kaže se da nema ni razmene informacija niti dogovora koji veže igrače. Za bimatricu dileme zatvorenika se zna da poseduje jedinstvenu Nešovu ravnotežu. Naime, ako pretpostavimo da Boni prizna, tada bi bila čista ludost da i Klajd ne prizna, pošto u ovom slučaju smanjuje svoju korisnost, isplatu naivčine, od 0 do  $-d$ . Isti takav argument se može primeniti u slučaju Klajdovog priznanja. Postoji tačno jedan ishod koji bi igračima doneo više nego što bi postigli ravnotežom. Ako oboje odbiju da priznaju, povećali bi dobitke sa 0 na 1. Ovaj način igre ne vodi u ravnotežu. Ako Boni ne prizna, tada bi Klajd bez sumnje odmah priznao, pošto to povećava njegovu pobedu sa 1 na  $v$ , isplatu izdajici. Iako kooperativni stil igre nepriznanja dominira ravnotežom kada se meri standardom isplativosti, nekooperativna teorija igara normalne forme ne može izabrati ovaj ishod kao rešenje za dilemu zatvorenika ( [5] ).

Dakle, možemo zaključiti da je zatvorenikova dilema zapravo primer kako racionalnost pojedinca vodi ka iracionalnom kolektivu; odluke pojedinca jesu dobre za pojedince, ali nisu dobre za kolektiv.

Ova činjenica je ozbiljna mana u teoriji rešenja igara sa dobitkom. U onom što sledi raspravljamo o dva (Strategija „milo za drago“, Unapred viđena ravnoteža) od mnoštva pristupa koji nam mogu pomoći u savlađivanju ovog navodnog nedostatka. Zajedničko za sve takve pristupe je odbacivanje statičke forme, koja pretpostavlja da je svakom igraču dozvoljen jedan (zadnji) potez. **Strategija „milo za drago“** koju je uveo R. Akselrod (Robert Axelrod) je veoma značajna jer nam pruža sledeće informacije:

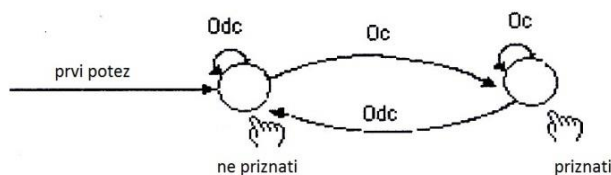
1. kako se u igri učenje i memorija mogu povećati,
2. kako strategije čak i u beskrajno ponovljenim igrama, zahtevaju informaciju zasnovanu samo na konačno mnogo uslova okoline da bi reagovalе uspešno,
3. da „taktika je tačno ono što ti protivnik dozvoli da igraš“,
4. da uspeh zavisi od broja i tipova protiv - strategija u evolucionom smislu.

Kao još jedno moguće rešenje dileme zatvorenika predstavljamo *Unapred videnu ravnotežu* u kojoj da bi se mogao pregledati dostupan izbor strategija svaki igrač ponovo igra produžene igre koje dozvoljavaju odstupanje od polaznih tačaka igre. Optimalnu strategiju određujemo pomoću novog pojma – *povratne indukcije*, koju ćemo detaljnije kasnije objasniti (u delu 8.2). Korišćena literatura je [5].

### 8.1 Strategija „milo za drago“

Robert Akselrod je analizirao interesantan pristup rešenju dileme zatvorenika koji se sastoji u dozvoljavanju mogućeg ponavljanja igre. Matematički, ovo znači da postoji pozitivan broj  $w^{n-1}$  koji predstavlja mogućnost da Boni i Klajd završe u  $n$ -tom vremenu u istoj lošoj situaciji. Ako je to slučaj, tada oni mogu dovesti u razmatranje i pozitivna i negativna iskustva prethodnih ishoda i tako razviti strategije zasnovane na ovim informacijama. Ovo dovodi do povratka opisanim korenima dileme zatvorenika. Umesto suočavanja sa 2 alternative u statičkoj igri, Boni sada ima na raspolaganju strategije opremljene sa memorijom za igru koja nikada ne prestaje. Da bi dobio pregled pogodnih strategija koje imaju u sebi mogućnost da predstavе kooperaciju kao željeni cilj u dilemi zatvorenika, Akselrod je objavio kompjuterski turnir gde bi se te strategije mogle takmičiti jedna protiv druge. Strategije, koje su predstavljene u obliku kraćih i dužih kompjuterskih programa, imale su mogućnost ulaska u zapise datoteka protiv sebe i protiv svih drugih programa. Pobednici su trebale biti one strategije koje su se pojavile sa najvećim brojem bodova nakon što su sve borbe završene. Broj ponavljanja jednostepene dileme koji je planiran za svaki susret bio je sakriven od svih učesnika. Dok je Akselrod prvobitno dao učesnicima prospekt od 200 rundi u svom turniru, konačno je oblikovao duel u beskrajno ponovljivu igru. Da bi umanjio moguće proteste protiv ove javne promene u pravilima, pobrinuo se da očekivani broj ponavljanja odgovara najmanje prvobitno predloženom broju rundi ([5]).

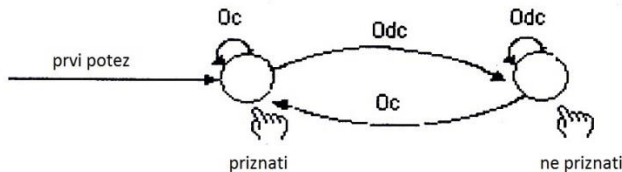
*Milo za drago (Tit – for – tat)* ([5]), strategija koju je uveo Anatol Rapoport, postigla je pobedu uprkos svojoj jednostavnosti. Njen strateški program može se izraziti ovako: *sarađuj u prvoj rundi, i u svakoj sledećoj rundi uradi ono što je protivnik u prethodnoj rundi.*



**Slika 24.** ([5]) – Strategija Milo za drago



Prvi potez inicijalizuje strateško ponašanje igrača. Promene iz jednog aktivnog stanja ponašanja u drugi su izazvane akcijom protivnika u prethodnoj rundi. Dostupna informacija je ili **Oc** (protivnik priznao) ili **Odc** (protivnik nije priznao). Igrač je sada pronašao, u obliku konačnog automata, idealnog predstavnika za borbu u kompjuterskom turniru.



**Slika 25.** ([5]) – Strategija Milo za drago

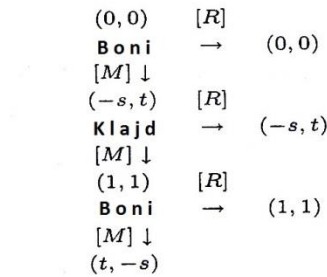
## 8.2 Unapred viđena ravnoteža

Pre nego što krenemo sa analizom ovog dela, definišaćemo novi pojam – **povratna indukcija (backward induction)**. Povratna indukcija je proces rezonovanja unazad u vremenu, od kraja problema ili situacije, kako bi se utvrdila optimalna akcija. Najpre se u poslednjem koraku odredi najbolja odluka za igrača, potom se razmatra predzadnji korak i najbolja odluka u tom trenutku uzimajući u obzir odluku iz poslednjeg koraka. Ovaj proces se nastavlja unazad sve dok se ne odredi najbolja akcija za svaku moguću situaciju u svakom trenutku za određenog igrača. U teoriji igara, povratna indukcija je metoda koja se koristi za izračunavanje savršene ravnoteže podigre.

Mark Kilgor (D. Marc Kilgour) predlaže sledeću proceduru: da bi se mogao pregledati dostupan izbor strategija svaki igrač nanovo igra (u svom umu) produžene igre koje dozvoljavaju odstupanje od datog para strategija (tj. polaznih tačaka igre). Pretpostavimo sada da Boni izabere ishod (*priznati, priznati*), koji ćemo u nastavku označavati sa  $(0, 0)$ , kao početnu tačku za njena razmatranja. Boni predstavlja sebe u ulozi prvog igrača koji je na redu u produženoj igri koja se odvija kao što sledi. Ona ima 2 mogućnosti: **[M]** - da se odvoji od početne tačke  $(0, 0)$ , ili **[R]** - da ostane na početnoj tački  $(0, 0)$ . Ako Boni odabere **[M]**, tada je data nova početna tačka pomoću  $(-s, t)$  (pošto se Boni može kretati dalje samo u istoj koloni bimatrice), a Klajd sada može da odluči da li da se zadovolji sa  $(-s, t)$ , ili da se pomakne (u tome što se on kreće na sledeću početnu tačku koja se javlja u istom redu kao  $(-s, t)$ ).

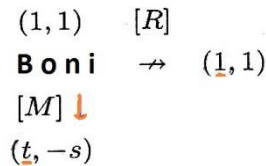
Sada ćemo staviti vremensko ograničenje na ovu igru, pretpostavljajući da je nakon  $k$ -te odluke **[M]** stablo produžene igre skraćeno. Igra je sada pri kraju ako igrač koji je na redu odluči da ostane. Za poseban slučaj  $k = 3$  pokazali smo na slici 26. stablo produžene igre koje opisuje odluku Boni uzimajući u obzir poziciju  $(0, 0)$ .





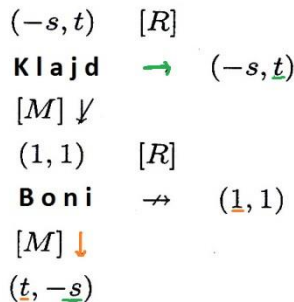
**Slika 26.** ( [5] ) – Bonini potezi sa pozicije  $(0,0)$

Ova produžena igra može biti rešena relativno lako uvođenjem *povratne indukcije*. Počinjemo sa igračem kod njegovog ili njenog poslednjeg poteza i odlučujemo u korist poteza koji očigledno nudi najveću zaradu. U našem primeru, taj igrač je Boni (slika 27.). Bonine poteze označavamo sa narandžastom bojom, a Klajdove sa zelenom bojom.



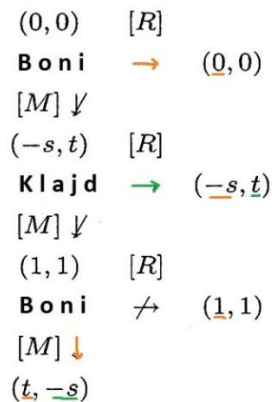
**Slika 27.** ( [5] ) – Bonin poslednji potez

Boni bi trebala da izabere  $[M]$  (za  $s$  uzimamo vrednost  $1/2$  a za  $t$   $3/2$ , ove vrednosti su preuzete iz ( [5] )). Potez  $[R]$  se tada eliminiše (ovo se postiže jednostavno crtanjem linije kroz njega). U pretposlednjoj fazi Klajd je na potezu (slika 28.).



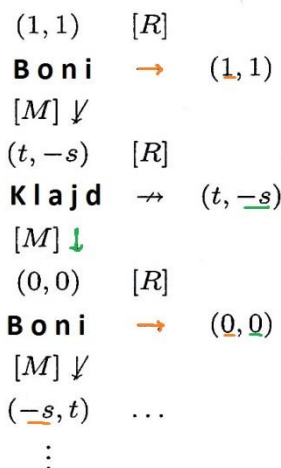
**Slika 28.** ( [5] ) – Klajdov potez

Ako Klajd odabere  $[R]$ , tada može računati na isplatu  $t$ . S druge strane, ako odabere  $[M]$ , tada dobija isplatu naivčine  $-s$ , pošto je odluka Boni u poslednjem koraku vezana za  $[M]$ . Tako će Klajd odabrati  $[R]$ , i odsecamo preostalu granu stabla igre. Došli smo sada na početak i možemo Boni osigurati isplatu od  $0$  ako izabere  $[R]$ . Ali ako više voli  $[M]$ , tada će ona dostići vrednost  $-s$ . Tako za  $k = 3$  imamo odluku opisanu na slici 29.



**Slika 29.** ( $[5]$ ) – Bonina odluka

Boni ostaje pri  $(0, 0)$ . Ova odluka se neće promeniti ako je broj poteza ( $k$ ) povećan. Ako Klajd krene prvi, tada će on takođe da glasa za ostajanje na  $(0, 0)$ . Ako za svaki dati ishod igre za oba igrača dobijemo prirodni broj 1 takav da za svako  $k \geq 1$  analiza stabla igre preporučuje ostajanje na početnoj tački igre, tada ćemo govoriti o unapred viđenoj tački ravnoteže. Da odredimo da li je  $(0, 0)$  jedina unapred viđena tačka ravnoteže za dilemu zatvorenika, moramo izvršiti analizu stabla igre za preostale početne tačke (slika 30.).



**Slika 30.** ( $[5]$ ) – Bonini ostaci u poziciji  $(1, 1)$

Nakon drugog poteza dostigli smo stablo igre koje je već analizirano. Po simetriji bimatrice, za početnu tačku  $(1, 1)$  - (*ne priznaj, ne priznaj*), svaki igrač ima isti obrazac odluka. Tačka  $(1, 1)$  je takođe unapred viđena tačka ravnoteže. Pošto dominira unapred viđenom početnom tačkom  $(0, 0)$  u smislu svoje vrednosti, može se smatrati za jedino rešenje dileme zatvorenika. Konačno, kako vrednujemo 2 preostale početne tačke? Boni bi ostala na  $(t, -s)$ , Klajd bi više voleo da se odmakne od  $(t, -s)$ . Za početni uslov  $(-s, t)$ , Klajd je jedini ko ne želi da se odmakne. Tako ni početna tačka nije unapred viđena tačka ravnoteže ( $[5]$ ).

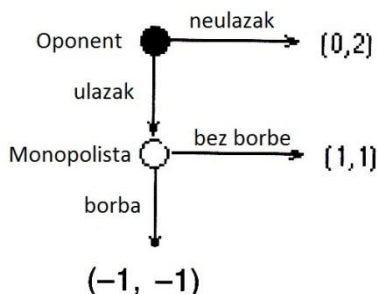
## 9. Paradoksi povratne indukcije

Već 1913. godine Ernst Zermelo je predložio metode za analizu šaha, pri čemu je počeo od povoljnih situacija završne igre, koje bi neko mogao da upotrebi za povratnu indukciju, da se dođe do, bar teoretski, čistih opimalnih strateških početaka kod prvog poteza. Povratna indukcija je takođe bila metoda izbora Belmanovog (Richard Ernest Bellman) dinamičkog programiranja da se osigura princip optimalnosti.

Sledeća jednostavna *igra ulaska na tržište* će nam dobro poslužiti kao osnovni sastavni deo složene konkurentne situacije, iznad svega u objašnjavanju paradoksalnih posledica povratne indukcije. Potom sledi prikaz *paradoksa lanca prodavnica* (chain – store paradox) koji zapravo predstavlja složeni oblik igre ulaska na tržište. Na kraju ovog dela dajemo prikaz postojećih analiza za *igru stonoge*. U igri stonoge dva igrača igraju naizmenično. Njihov izbor u svakom potezu je stati (dole) ili nastaviti igru (desno). Svaki igrač preferira stati u trenutku  $t$  ako njegov protivnik staje u trenutku  $t + 1$ , ali radije će nastaviti ako njegov protivnik takođe nastavi. Drugim rečima, obojica žele igrati što duže, ali ne žele zaustavljanje igre prepustiti protivniku. Univerzalno, optimalno rešenje ove igre ne postoji! Igre koje slede preuzete su iz [5, 9].

### 9.1 Igra ulaska na tržište

Firma vidi svoju dosad neprikosnovenu poziciju na tržištu (monopol) ugroženu od strane konkurenta koji ima 2 opcije: da uđe na tržište ili ne. Ako protivnik pokuša da probije tržište monopoliste, on može odreagovati ili sa jakim protivudarom ili sramno istrpeti novu situaciju na tržištu. U prvom slučaju profit koji je celokupno išao monopolisti sada će se podeliti jednako između 2 učesnika, dok bi sukob između njih doveo do štetnog dejstva po oboje. Kako je prikazano na slici 31., igra ulaska na tržište može biti formulisana kao produžena igra sa savršenom informacijom i memorijom.



**Slika 31.** ([5]) – Stablo igre ulaska na tržište

Strategije igrača kolone u normalno predstavljenom obliku ove produžene situacije biće protumačene kao reakcije na poteze rednog igrača. Tako npr. neka  $F$  označava da monopolista

## Teorija igara: matematičke osnove mitova i paradoksa

počinje borbu, a  $E$  da konkurent ulazi na tržište. Tako  $F/E$  označava situaciju da konkurent ulazi na tržište i monopolista reaguje započinjanjem borbe. Stavićemo – da označava negaciju akcije, odakle npr.  $-F/E$  predstavlja slučaj da se monopolista ne bori oko ulaska konkurenta na tržište. Ishodi označeni zvezdicom na slici 32. pokazuju ravnoteže bimatrice.

|          |  |             |            |  |
|----------|--|-------------|------------|--|
|          |  | borba       | nema borbe |  |
| ulazak   |  | -1          | 1          |  |
|          |  | -1          | 1 *        |  |
| neulazak |  | 2           | 2          |  |
|          |  | 0 *         | 0          |  |
|          |  | monopolista |            |  |

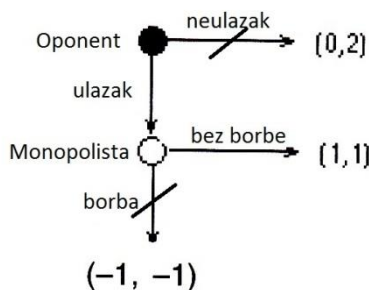
konkurent

\* ako je konkurent ušao na tržište

**Slika 32.** ([5]) – Normalna forma igre ulazak na tržište

Igra ulaska na tržište poseduje, kako je vidljivo iz normalnog oblika, samo 2 Nešove ravnoteže  $(-E, F)$  i  $(E, -F)$ . Intuicija nam govori da je u ravnoteži  $(-E, F)$  razumno da monopolista snažno odgovori na prve izazove i tako signalizira kasnijim izazivačima da je „tvrd“ igrač, odnosno, da ih očekuje nemilosrdna bitka ukoliko uđu na tržište. Gubitak koji bi usledio zbog takve strategije u prvim stadijumima igre bio bi nadoknađen kasnije – ne bi se pojavljivale pridošlice na tržištu i ne bi bilo podele tržišta. Primena povratne indukcije pokazuje da je ovo očekivanje pogrešno.

Sprovođenjem povratne indukcije za igru ulaska na tržište, kako je prikazano na slici 33., samo verodostojna (i istovremeno savršena u podigri) ravnoteža  $(E, -F)$  preživljava.

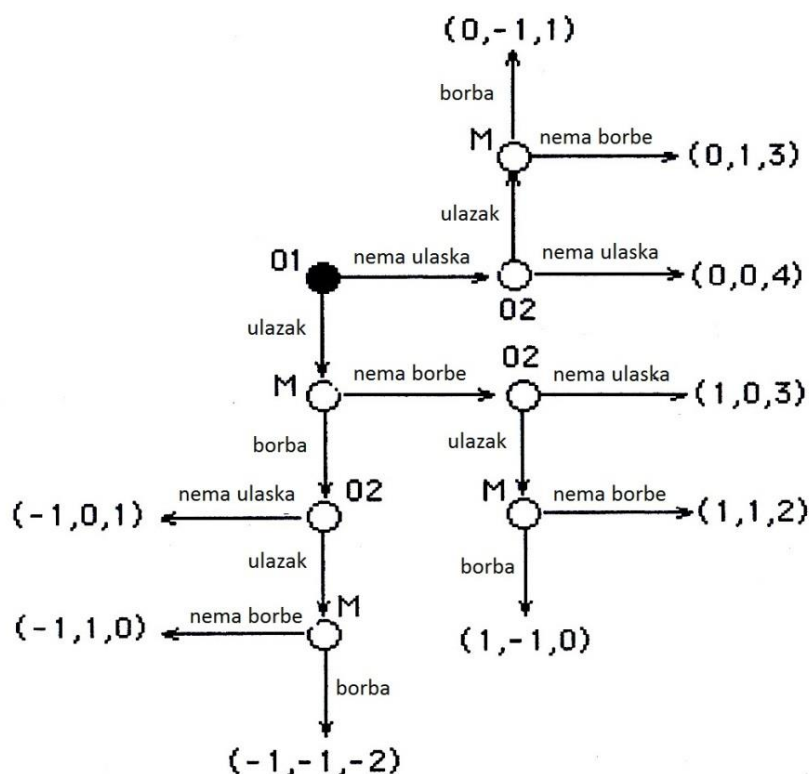


**Slika 33.** ([5]) – Indukcija unazad u igri ulaska na tržište

## 9.2 Paradoks lanca prodavnica

Selten (Reinhard Justus Reginald Selten) je predložio sledeće interesantno produženje igre ulaska na tržište. Nakon uspešnog nastupa ekspanzije pomoću koga je došao u posed jednog broja ogranka prodavnica koje se zajedno mogu smatrati lokalnim monopolom na raznim tržištima, vlasnik ove zbirke lanca prodavnica mora ponovo da se suoči sa dobro poznatim izazovom. Ovoga puta u svakoj od njegovih ogranka prodavnica se mora pozabaviti sa različitim konkurentom, gde sukob počinje sa igrom ulaska na tržište u prvo tržište koje je ponovljeno tržište za tržište protiv sledećeg potencijalnog nametljivca.

Stablo igre lanca prodavnica je teško pratiti u slučaju skromnog broja ogranka prodavnica. Stablo u slučaju dve prodavnice je opisano kao što sledi. Dodali smo novu produženu igru ulaska na tržište na svakom terminalnom listu prvobitnog stabla igre. Povratna indukcija doprinosi igri na slici 34. jedinstvenu, za podigru savršenu Nešovu ravnotežu koja predlaže vlasniku lanca prodavnica da se pomiri sa nametljivcem na svakom tržištu.



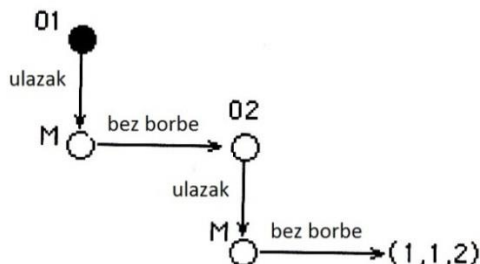
**Slika 34.** ([5]) – Stablo igre lanca prodavnica sa 2 tržišta

Prvi broj u zagradama predstavlja upotrebnu vrednost konkurenta 1, drugi broj upotrebnu vrednost konkurenta 2, a poslednji, treći broj je vrednost koju dobija monopolista. Koristeći

## Teorija igara: matematičke osnove mitova i paradoksa

povratnu indukciju dolazimo do zaključka da je idealna putanja: konkurent 1 ulazi → monopolista se ne bori → konkurent 2 ulazi → monopolista se ne bori.

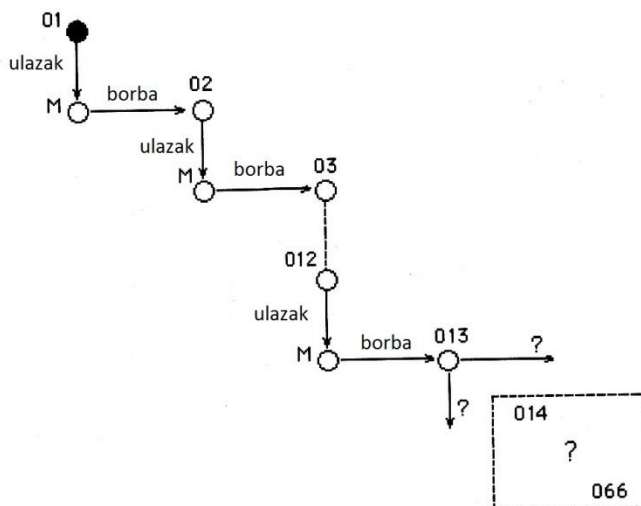
Put do ravnoteže prikazan na slici 35. može se nastaviti na isti način za proizvoljno (ali ograničeno) mnogo prodavnica. Intuitivno ovo se može utvrditi kao što sledi.



**Slika 35.** ([5]) – Savršena putanja ravnoteže u podigri igre ulaska na tržište

Nezavisno od istorije, u poslednju prodavnicu osiguran ulazak na tržište od strane konkurenta neće biti osporen. Naime, borba bi samo donela troškove, a pošto igra nema nastavak, ovo ne može imati efekat signalizacije za ostala tržišta. To znači u stvari da je horizont igre lanca prodavnica skraćen za jedan period, a argumenti koje smo napravili važe bez promene za prvobitno preposlednje tržište. Logičkim razmišljanjem dolazimo najzad na početak lanca prodavnica. Što je veći broj spornih prodavnica, tim pre je gubitak u verodostojnosti savršenog rešenja podigre. Da razumemo ovaj uticaj, razmotrićemo slučaj igre lanca prodavnica koji je odlučan redom u 66 prodavnica.

Potencijalni nametljivac na tržištu koji je na redu, npr. kod 13. tržišta mogao je posmatrati praistoriju prikazanu na slici 36. Kako bi se 13. konkurent trebao ponašati? Upasti kao što je propisano povratnom indukcijom? Monopolista sa svoje strane treba da izbegava borbu. Ali u prvih 12 tržišta ovo se nije desilo.



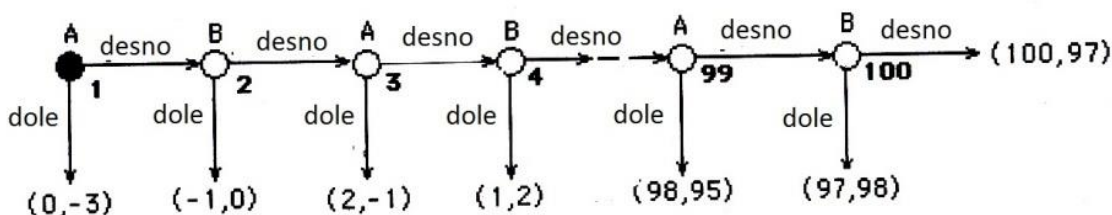
**Slika 36.** ([5]) – Praistorija 13. tržišta

Monopolista je ostavio jedno tržište za drugim u rasulu bez osvrtnja na svoje gubitke. Ako uzima u obzir samo svoju reputaciju, onda da bi bio siguran, kod desetog tržišta treba da uzvikne „bori se!“, pa makar i da samo zaplaši preostala pedeset tri konkurenta. Da li bi ovo zaista mogla biti pogrešna borba? Čudna greška zaista, koju je napravio redovno 12 puta zaredom. Da li je ljut, ili još gore, nerazuman? Može li osoba da ima poverenja uopšte u razumne pretpostavke povratne indukcije?

Postojali su brojni pokušaji da se reši paradoks povratne indukcije. Jedan od njih je koncept „ograničene racionalnosti“. Neophodno je da jedan od igrača ima reputaciju „iracionalnog“ igrača, tj. igrača koji će u nekom periodu igre odigrati strategiju suprotno stavu koji zahteva kriterijum ravnoteže. Pokazalo se da se uz ovu pretpostavku može podstaći kooperativno ponašanje. Dodatni način da se prevaziđe paradoks povratne indukcije jeste da se uvede neizvesnost o tome kada će se igra završiti. Iako je trajanje igre ograničeno, ne zna se kada će se ona završiti. Šta postizemo ovim razmišljanjem? Pošto se nijedan period igre ne može predstaviti kao poslednji, nije moguće odrediti polaznu tačku odakle bismo primenili povratnu indukciju. Pomenuti paradoks se gubi.

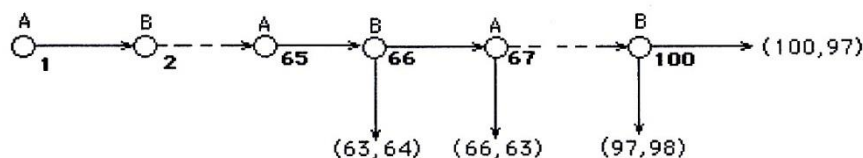
### 9.3 Igra stonoge

Da li je Rozentalova (Robert W. Rosenthal) igra stonoge u toliko drugačijoj situaciji u poređenju sa igrom lanca prodavnica? Dok signali koji dolaze od monopoliste koji zapostavlja logiku savršenstva podigre mogu biti protumačeni prvobitno kao sredstva zastrašivanja, svaka praistorija u igri stonoge koja sadrži potez na desno doprinosi pozitivnim impulsima za intuitivno očekivanu saradnju. U eksperimentima sa ovom igrom potvrđeno je u raznim situacijama da su igrači potpuno podložni, nasuprot teorijski predviđenom ponašanju, da rizikuju manji gubitak da otvore put ka mogućnosti znatnog profita. Pitanje razuma se javlja ponovo u dužim praistorijama u kojima oba igrača u više navrata deluju protivno komandama povratne indukcije.



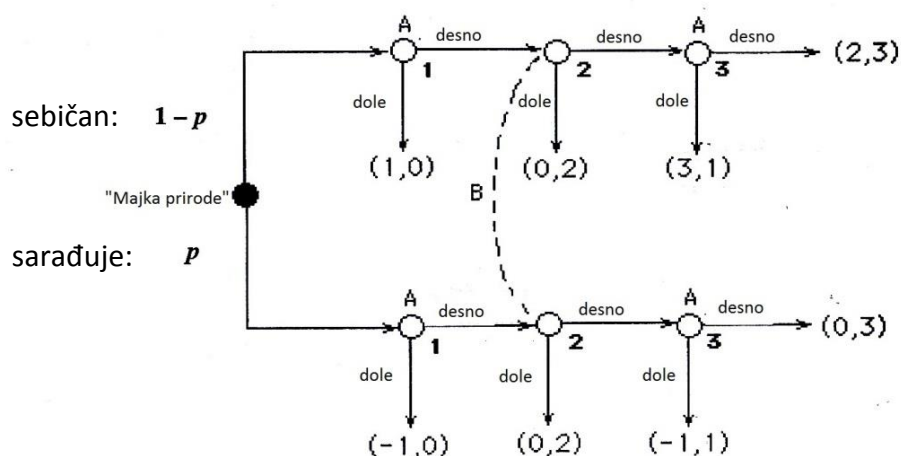
**Slika 37.** ([5]) – Igra stonoge

Kod čvorišta odluke 66 bilo bi prilično teško povratiti poverenje igrača *B* u razumnost savršene strategije podigre. Nije li igrač *A* dokazao da je spreman da napravi potez na desno da dostigne veće vrednosti isplate koje se mogu dokupiti kroz uzajamnost poverenja? Ali da li je *B* s druge strane spreman da izvrši svoju dokazanu nerazumnost kod stotog čvorišta? Njegov poslednji potez dolazi kao „amen“ u molitvi i deluje na protivnika *A* sa samo 97 jedinica korisnosti umesto očekivanih 100.



**Slika 38.** ([5]) – Praistorija igre stonoge

Dejvid Kreps (David Kreps) je predložio pristup koji se čini da premošćuje dubok ponor između eksperimentalno uočljivih načina igre i teoretski preporučenog rešenja. Na slici 39. sproveli smo ovaj predlog u slučaju tronoge.



**Slika 39.** ([5]) – Igra tronoge sa nepotpunom informacijom

Igrač B pretpostavlja da igrač A ima dve duše. Jedna od njih je sebična i razumna, dok je druga spremna na saradnju. Obe orijentacije mogu se simulirati odgovarajućim rukovanjem korisnosti. Stoga prva orijentacija ima tačno iste upotrebne vrednosti kao u prvobitnoj igri stonoge. Drugi, zbog pretpostavljenih upotrebnih vrednosti će se uvek predati potezu na desno. Na ovaj način racionalnost nije nikada u opasnosti za bilo koju od duša.

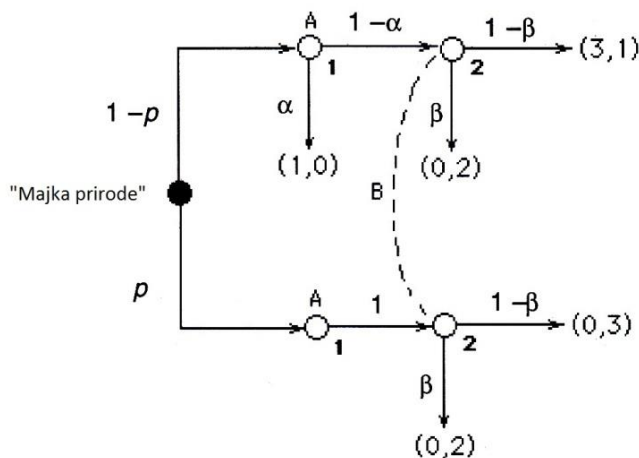
Dok igrač A ima prednost privatne informacije na raspolaganju (zna koja će od njegove dve duše biti aktivirana hirovima prirode) igrač B zna samo mogućnost sa kojom će jedna ili druga duša biti odabrana. Na osnovu savršenstva podigre strateško ponašanje obe duše je predvidljivo kod trećeg čvorišta odluke. Sebična duša će se kretati dole, dok će ona koja sarađuje odabrati potez udesno. Duša koja sarađuje će takođe više voleti potez na desno u prvom čvorištu, pošto to sa sigurnošću, bez obzira šta će B uvek preduzeti u drugom čvorištu, može samo dobiti. Rezultat ove kombinacije indukcija unapred i unazad je prikazan na slici 39.

Ravnoteža u strategijama ponašanja može biti odmah odbijena od stabla igre prikazanog na slici 40. Naime, ako je sebična duša u čvorištu 1 ravnodušna između poteza dole ili na desno, tada jednačina korisnosti  $1 = 0 \times \beta + 3(1 - \beta)$  treba da važi. Tako u ravnoteži, B odabire potez



## Teorija igara: matematičke osnove mitova i paradoksa

na desno sa verovatnoćom  $1/3$  (ovaj broj se dobija rešavanjem gornje jednačine). S druge strane, ravnodušnost igrača  $B$  se može dobro iskoristiti.



**Slika 40.** ([5]) – Redukovana igra tronoge

Prema ovoj pretpostavci, on se nalazi sa verovatnoćom zavisnom od iskustva:

$$\gamma = \frac{p}{p + (1-p)(1-\alpha)}$$

u nižem čvorištu njegove postavke informacija. Pošto bi trebao da dobije istu korisnost nezavisno od njegovog izbora poteza, jednačina  $3\gamma + 1 \times (1-\gamma) = 2$  važi. Kod ravnoteže sebična duša igrača  $A$  odabire potez na desno sa verovatnoćom  $p / (1-p)$ , (za  $p < 1/2$ ).

Trebalo bi primetiti da čak i najmanja sumnja u vezi sa namerama protivnika dovoljna je da podstakne oba igrača da odstupe sa pozitivnom verovatnoćom od puta ravnoteže. Isti efekat može se posmatrati u igri lanca prodavnica. Ovo nije ni najmanje iznenađujuće pošto u oba slučaja igrači kojima se više puta nude nove odluke mogu pažljivo sagraditi svoje reputacije.

Paradoksi povratne indukcije mogu se pojaviti i u konfliktnim situacijama gde igrači ne mogu posmatrati celu istoriju igre. U ovoj vrsti igara nivo budućeg očekivanja zamagluje svaki uticaj prošlih razvoja igre. Priča o đavolku u boci analizirana ispod dokazuje da je značajna parabola za takav mehanizam.

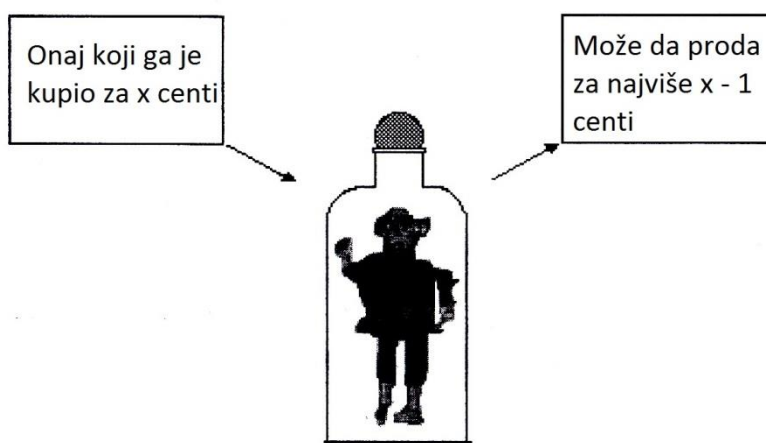
## 9.4 Paradoks đavolka u boci

Jednom davno, bio je čovek koji je živio na Havajima. Jednog dana, ponudili su mu na prodaju bocu za koju se govorilo da poseduje čudesne osobine. Govorilo se da ju je sam đavo poslao da putuje svetom, i ranije je vredela ogromnu sumu. Iako je bila ponuđena po jeftinoj

## Teorija igara: matematičke osnove mitova i paradoksa

ceni, njena vrednost bi trebala biti viša jer je u njoj bio sam đavo (vidi sliku 41.) koji bi svakom ko bi posedovao ovu bocu ispunio bilo koju želju. Ali ako bi vlasnik umro pre nego što bi se oslobodio od boce prodajom za cenu manju od one koju je platio, tada bi bio bačen u pakao.

Kiavi (Keawe), kako se čovek zvao, je prvo oklevao. Ali pošto je cena boce pala tokom vekova na jedva 89,99 USD i pošto je shvatio da ako bude potrebe mogao bi imati dobru šansu da pronade kupca, Kiavi i vlasnik boce su sklopili dogovor. Neočekivano rešenje teorije igre moglo bi ovog momenta objasniti Kiavi da je njegova odluka suprotna od principa povratne indukcije. Ako bi boca bila ponuđena po ceni od 1 centa, tada je jasno da se ne bi mogao naći kupac, pošto nema kovanice manje vrednosti u opticaju. Ipak ako niko nije spreman da kupi bocu za 1 cent, tada je sigurno niko ne bi kupio za 2, i induktivno, niko ne bi bio voljan da je kupi za bilo koju cenu uopšte.



**Slika 41.** ( [5] ) – *Cena prokletstva*

Presudna razlika između igre stonoge i igre đavolka u boci leži u pravilu koje je trebalo da izazove savršeno ponašanje podigre. U igri đavolka u boci savršena strategija podigre „ne kupi“ ne stoji u suprotnosti sa prethodnim razvojem igre, pošto igrač o kome je reč nije bio izložen mnoštvu odluka da li da kupi. S druge strane, u igri stonoge igrač A npr. će biti u obavezi da se pomeri dole u 99-tom čvorištu odluke, iako zna savršeno dobro da on, zbog svog spostvenog savršeno dobrog ponašanja podigre u korenu stabla igre, neće nikada biti u poziciji da izvrši ovaj potez ( [5] ).

Klasična teorija igre pokušava (paradoksalno) da istera paradokse povratne indukcije upravo uz pomoć takvih odluka protiv toka događaja.

## 10. Strateški akcenti teorije igara

Dva veoma značajna aspekta u teoriji igara, koji omogućavaju dubok uvid u strateško delovanje jesu „prozreti protivnika“ i „opštepoznate činjenice“.

Prvi od navedenih aspekata – **prozreti protivnika** možemo najpre uočiti u jednostavnim primerima poput ovog što sledi ( [5] ). Može li strepnja golmana pre penala naposljetku biti opisana kao fundamentalni strah od donošenja pogrešne odluke u ciklusu naslućivanja? Golman kineske ženske fudbalske selekcije, Gao Hong, mogla se naposljetku baciti u levi ugao gola da odbrani odlučujući penal Brendi Čestejn (SAD) pod pretpostavkom da je možda bivša napadačica ženske ekipe naginjala da šutira desno. Pod pretpostavkom da su fudbalski igrači razumna bića i, štaviše, sklona da planiraju unapred, Brendi se mogla odlučiti za drugi ugao ili zabiti loptu posred gola. Dakle, možemo zaključiti da je veoma važno prozreti protivnika kako bi ostvarili dobit, odnosno, osigurali sebi pobjedu.

Koliko su **opštepoznate činjenice** značajne pokazuje to što se sa njima može opisati veći deo dogmi koje drže zajedno svet igara. Obično određene igre iskoriste mudru osobu da postave sve igrače na put opštepoznatih činjenica. Definišimo sada *principe* ( [5] ) opštepoznatih činjenica:

1. Ako neko zna sve, tada nema onoga što ne zna.
2. Neko može da zna samo ono što se desilo.
3. Pre nego što neko može znati nešto, taj neko mora da zna da neko to zna.
4. Ako neko ne zna da se nešto nije desilo, tada neko zna makar to.

Sada sledi detaljnija obrada navedenih značajnih aspekata a kao izvor korišćena je literatura [5].

### 10.1 Prozreti protivnika

Šerlok Holms (Sherlock Holmes) i profesor Džejms Morijarti (James Moriarty) se sukobljavaju i otvoreno raspravljaju o onome što im je opštepoznato. Na Morijartiju je, matematičaru, da predloži prvu pretpostavku: „Sve što imam da kažem ti je već palo na pamet“. Na šta prvi svetski privatni savetodavni detektiv odgovara lakonski: „Tada je moguće da je moj odgovor prešao tvoj.“ Ovde se intelekt suprotstavlja intelektu. Holms beži u ekspresnom vozu za Dover da bi dostigao sigurnost Kontinenta. Morijarti priča da Holms kreće sa stanice Viktorija. Holms je ubeđen da ga je njegov neprijatelj prozreo i da će ga slediti do Dovera u privatnom vozu. Da bi izbegao ovaj Morijartijev potez, Holms silazi u Kenterberiju. Da bi spasao ugled Morijartija i Holmsa, Oskar Morgenstern, nastavio je igru prozirući protivnika na sledeći način.

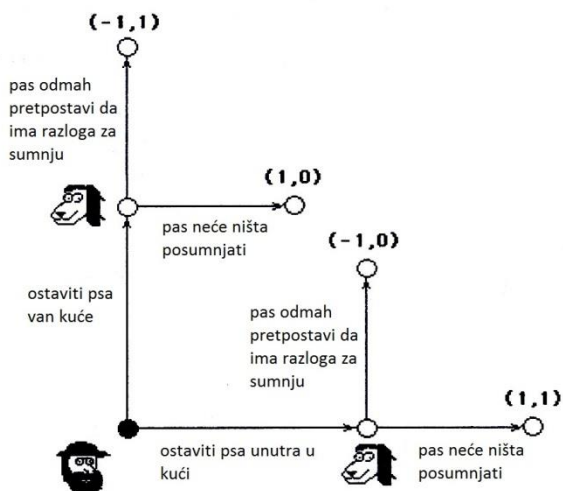
Ako je Holms odlučio da siđe u Kenterberiju, tada bi Morijarti trebao „ponovo da uradi šta bih ja uradio“ i takođe siđe na toj stanici. Očekivajući ovo, Holms bi trebao nastaviti put do Dovera, što bi podstaklo Morijartija da ne izađe u Kenterberiju, što bi dalo Holmsu ideju da se

## Teorija igara: matematičke osnove mitova i paradoksa

iskrca uostalom na toj stanici, i tako dalje, i tako dalje, i tako dalje... Tako je Morgerstern stigao do naivnog zaključka da nema izlaza iz ovog začaranog kruga međusobnog naslućivanja ( [5] ).

Dok možemo razumeti napor da se prozre protivnik kao važan deo strategije, uvođenje sreće dovodi do kontradiktornih tumačenja strateških načina mišljenja. Igre su iznad svega odlučene u nečijoj sopstvenoj glavi. Primer koji je neobičan u teoriji igre može se otkriti u Makrebskim pričama ( [5] ) Gregora fon Recorija (Gregor von Rezzori).

Jednog dana rabin iz Sadagare je neočekivano pozvan u grad. On je na taj način suočen sa sledećom konfliktnom situacijom. Oskudan deo mesa koji je izdvojio za svoj podnevni obrok će verovatno u njegovom odsustvu privući pažnju njegovog psa Bela. Jedini izbori koji su mu dostupni su ovi: 1 - ostaviti psa van kuće, 2 - ostaviti ga unutra. Ako rabin odabere ono prvo, tada će (po njegovom mišljenju) Belo odmah pretpostaviti da ima razloga za ovu neobičnu akciju. Stoga, on će težiti da uđe u kuću, i tada će nanjušiti meso i na kraju ga proždrti. Ako rabin odabere drugu opciju, tada Belo neće imati razloga ništa da posumnja i tako neće ni nanjušiti meso niti ga pojesti. Na slici 42. predstavili smo igru kako bi trebala da se odvija sa tačke gledišta mudrog rabina.



**Slika 42.** ( [5] ) – Makrebska varijanta pogleda kroz protivnika

Rešenje bi bilo ostaviti Bela u kući, što se, zaista i desilo. Kada se rabin vratio kući, Belo je pojeo meso. Tada se rabin okrenuo svom psu, potapšao ga po čelu i rekao prekorno ali nežno: „Belo glava ti je zašrafljena unazad.“

### 10.2 Opštepозnate činjenice

Pre nego što je igra počela, rabin iz Sadagure je bio siguran da je Belo razuman igrač u produženoj igri sa slike 42. Ova izvesnost, međutim, se čini da je bila nekako jednostrana. Da bi odigrao ravnotežu u produženoj igri ili igri normalne forme potrebna je izvesnost većeg kvaliteta. Ojman (Robert John Aumann) i Brandenburger (Adam M. Brandenburger) su predstavili sledeće dovoljne uslove za pojavu ravnoteže u slučaju igre sa 2 igrača u normalnom obliku. Svaki igrač mora biti siguran o upotrebnim vrednostima, utiscima, i racionalnosti svog protivnika. Ovaj kognitivni nivo može se takođe nazvati uzajamno znanje. Međutim, čim broj pojedinaca upletenih u igru premašuje broj 2, stanje uzajamnog znanja neće nas više odvesti daleko. Da bi se dostigla ravnoteža, igrač ne samo da mora da zna određene osobine svojih protivnika, nego i protivnici moraju biti sigurni o sigurnosti prvog protivnika; on, zauzvrat mora biti siguran o sigurnosti svog protivnika; i tako dalje, doveka.

Dugo pre nego što je pojam o opštepозnatim činjenicama zahvatio maštu teoretičara odluke i teoretičara igre, dao je svetu nešto o čemu treba da se razmišlja u obliku logičko-matematičkih zagonetki. Najstariji primer dolazi nam iz Litlvudove zbirke. To je priča o tri dame koje su smeštene u kupe putničkog voza i iznenada su prasnule u histeričan smeh, svaka na račun lica umrljanog čađu druge dve ( [5] ). Iznenada, smeh jedne od dama joj se sledio u grlu i pocrvenela je od srama. Objasnićemo kasnije zašto je ovo čudno ponašanje neposredna posledica opštepозnatih činjenica. Pre toga, želeli bismo da protumačimo savremenu varijantu ove priče.

#### Kakanijska krtica

*Peta kolona kakanijske tajne službe, u poređenju sa kojom se čak i Drugi Biro francuske armije može smatrati samo drugorazrednim, imala je na svom vrhuncu više krtica nego Londonski MI-5. Da bi priveli kraju ovakvo neizdrživo stanje stvari, specijalista u kontrašpijunaži je prokrijumčaren u kolonu. Za manje od nedelju dana on je pozvao svoje saradnike i dao sledeći izveštaj: „Moja gospodo! Najmanje jedna krtica je otkrivena među nama. On sam ne sumnja u ovo, ali ime svake izložene krtice dato je njegovim kolegama. Čim pojedinac ili pojedinci o kome je reč dostignu izvesnost da su otkriveni, imaju tačno jedan sat da izvuku neophodan zaključak. Idite svaki od vas u svoju kancelariju i napustite je samo kada čujete izveštaj službenog revolvera.“ Trinaest časova kasnije pucnji su odzvanjali iz kancelarija pete kolone. Šta se dogodilo? ( [5] )*

Da bi rešili kakanijsku zagonetku moramo proceniti informacionu situaciju pojedinaca pete kolone. Pre nego što je specijalista u kontrašpijunaži dao objavu, svaki zaposleni je informisan o tome koji su od njegovih kolega otkrivene krtice. Međutim pre objave, ova informacija bila je jednostrana izvesnost. Samo sa objavom je proces prepoznavanja pokrenut. Informacija da je postojala barem jedna otkrivena krtica postala je opštepозnata činjenica. Sada, broj otkrivenih krtica bio je sigurno veći nego jedan. Da je bilo drugačije, usamljena krtica koja nije imala informaciju o jednoj ili više drugih otkrivenih kolega znala bi odmah da je otkrivena i ubila bi se u roku od jednog sata. Da je bilo dve otkrivene krtice, tada bi svako primio imena dvojice otkrivenih kolega, osim dvojice otkrivenih krtica, koji bi primili po jedno ime svaki. Međutim, pošto broj otkrivenih krtica nije bio na početku stvar opštepозnatih činjenica ni za

## Teorija igara: matematičke osnove mitova i paradoksa

koga, prvi sat je prošao bez zvuka. Na početku drugog sata svaki od dvojice koji su dobili tačno jedno ime postigao bi izvesnost da je otkriven. Na kraju ovog sata bila bi dakle dva pucnja. Ako pretpostavimo da će se  $k - 1$  otkrivene krtice ubiti na kraju  $(k - 1)$  - og sata, tada  $k$  zaposlenih u petoj koloni kojima su data samo  $k - 1$  imena dolaze do zaključka na kraju  $(k - 1)$  - og sata da su otkriveni. Tokom sledećeg sata napunili bi revolvere, napisali poslednju želju i testament, i tada bi se ubili. Stoga, pomoću potpune indukcije zagonetka kakanijske krtice je rešena. Bilo je tačno trinaest otkrivenih krtica.

Funkcija javne prilike koja stavlja svakoga u poziciju da postigne opštepoznate činjenice je zamenjena Litlvudovom zagonetkom ženskog histeričnog smeha. Time je jasno da sve tri putnice tj. bar jedna od njih ima čađavo lice, i da svi znaju da one to znaju, i tako dalje. Bez logičnog niza crvenjenja, koji možemo razjasniti na slici 43., Litlvudovo rešenje zagonetke nema osnovu.

|                | <b>a</b> | <b>b</b> | <b>c</b> | <b>d</b> | <b>e</b> | <b>f</b> | <b>g</b> | <b>h</b> |
|----------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <b>Osoba 1</b> | čisto    | čađavo   | čisto    | čisto    | čađavo   | čađavo   | čisto    | čađavo   |
| <b>Osoba 2</b> | čisto    | čisto    | čađavo   | čisto    | čađavo   | čisto    | čađavo   | čađavo   |
| <b>Osoba 3</b> | čisto    | čisto    | čisto    | čađavo   | čisto    | čađavo   | čađavo   | čađavo   |

**Slika 43.** ( [5] ) – Stanje u Litlvudovim „puzlama“

Ako situacija **b**, **c** ili **d** dobija, tada jedna i samo jedna žena ima čađavo lice. Druge dve (i samo ove dve) imaju razlog da se smeju. Tako bi žena sa čađavim licem trebala pocrveneti odmah, pošto joj je očigledno da joj se drugi smeju. S druge strane, ako se nađemo u situaciji **e**, **f** ili **g**, tada su dve žene čađavog lica, svaka čeka da vidi da li će druga pocrveneti. Svaka prvo pretpostavlja da situacija **b**, **c**, ili **d**, može biti na snazi (i da ona sama ima čisto lice). Ali pošto druga žena ne crveni, ova početna pretpostavka je viđena kao lažna (i neka sama ima čađavo lice). U trenutku prepoznavanja, dve žene crvene istovremeno. U situaciji **h** sve tri dame čekaju da vide da li druge dve crvene istovremeno. Kada se ovo dvostruko crvenjenje ne materijalizuje, izvesnost napokon stiže svakoj od njih da je njeno lice takode čađavo, i da njih tri crvene istovremeno. Ovako je Litlvud potcenio broj dama koje se crvene ( [5] ).

## 11. Mit o Odiseju

Početna tačka naših razmatranja je priča o Odisejevom<sup>9</sup> ludilu koje je opisano u devedeset i petoj Higinovoj (Gaius Julius Hyginus) basni.

Prohladnog jesenjeg dana godine 1260. pre naše ere moćni zaveslaji odveli su Mikenski borbeni brod u napuštenu luku Porkis na ostrvu Itaka. Nakićen bronzom i kožom, vrhovni kralj Agamemnon zakoračio je na ostrvo. Kraj njega su bili Palamedes, oštroumni sin Naupliosa, koga su Ahejci s pravom smatrali pronalazačem azbuke, kocke i društvenih igara. Ispred napuštene drvene stražare nije bilo ništa da se vidi sem ovaca kako pasu. Sin Atreusa sigurno nije bio pripremljen za ovakav prijem.

Paris je, kao što znamo, odveo prelepu Jelenu u Troju. Drsko prisvajanje imovine drugoga bilo je neprijatno Jeleninom rogomu mužu, a pošto su se Jelenini prosci jednom zakleli da će stati pored njenog muža ako dođe do svađe, u kratkom vremenu znatna sila se okupila da učestvuje u kampanji osвете i povratka. Samo nekoliko njih nije čulo poziv na oružje. Jedan od njih, Odisej, ostavio je tri hitne poruke Ahejskog glavnog štaba neodgovorenim. Prema glasinama, proročanstvo iz Delfija je proreklo da ako bi Odisej učestvovao u ratu, bio bi osuđen na 20 godina u izgnanstvu. Sada, Agamemnon njegov imenovani komandant, stigao je u Itaku da mu saopšti lično, njemu koji je bio sposoban za vojnu službu sveopšte mobilizacije.

Mikenska delegacija našla je ostrvo u napuštenom stanju. Neobično fina berba je trunula na lozi. Kraljevska palata na planini Atos skrivala je samo svoje slugе. Silazeći duž zapadne padine oružane snage susrele su Penelopu, Odisejevu ženu, izbezumljenu, u suzama, noseći sina Telemaha u rukama. „Gde ti je muž?“ upitao je Agamemnon. Kraljica Itake pokazala je klimanjem glavom put do usamljene plaže gde su konji i volovi bili upregnuti u plug. Čovek koji je orao nosio je zašiljenu kapu i bez prestanka je sejao so. Bio je to Odisej, koga su bogovi očigledno kaznili ludilom. „Nesposoban za vojnu službu“, prokomentarisao je Agamemnon. Tada je Palamedes uhvatio dete i stavio ga ispred raonika. Da li bi Odisej prešao plugom preko svog sina?

Razmatranje ovog poglavlja počinjemo predstavljanjem **Odisejeve dileme** (da li žrtvovati ili poštediti sina Telemaha) kao modela u teoriji igara. Najpre ćemo definisati moguće strategije Odiseja i Palamedesa a potom i prikazati neke njihove preferencije, odnosno, koje bi strategije odabrali u zavisnosti od upotrebnih vrednosti koje dobijaju izborom određenih strategija. U delu 11.2 predstavljamo **analizu strateškog ponašanja** oba učesnika sukoba koristeći dva slučaja – Telemah je pošteđen i Telemah je žrtvovan. Korišćena literatura za ovo poglavlje je [5].

---

<sup>9</sup> Odisej (grč. Ὀδυσσεύς) - heroj Homerovog epа „Odiseja“. Po Homeru Odisej je bio kralj Itake, sin Laerta i Antikleje, Penelopin muž i Telemahov otac.

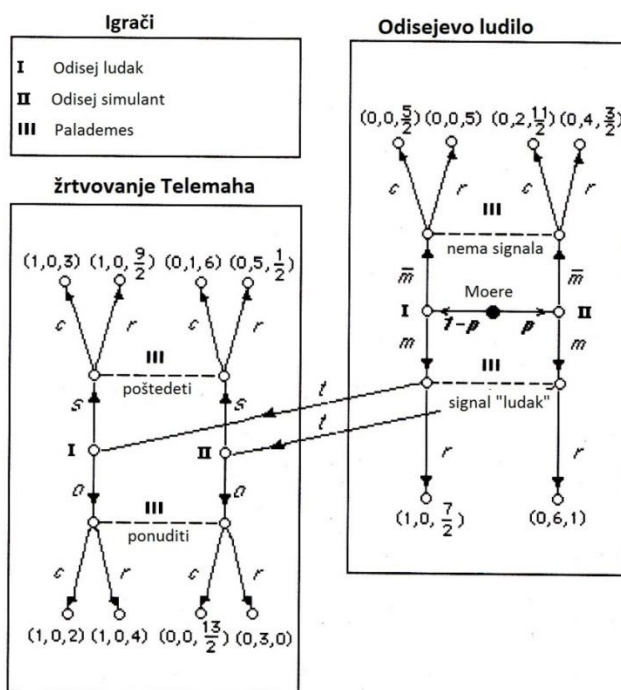


## 11.1 Model teorije igre

Bez namere da učestvujemo u daljim melodramatičnim događajima, sada je vreme da predstavimo neka razmatranja teorije igre. Protumačićemo Odisejevu dilemu kao rezultat produženih poteza u dvofaznoj igri za tri osobe sa nepotpunim informacijama. Mikensku ekipu predstavljaće *Palamedes*. Njegovi protivnici su *Odisej simulant* i *Odisej ludak*. Na početku igre Palamedesu fali informacija koji je od ove dve osobe pravi Odisej. Međutim, ovaj nedostatak se može nadoknaditi igrajući mađioničarski trik. U tradiciji Haršanjija (John Charles Harsanyi), slučajni potez će biti predstavljen na početku igre. Tako, bacajući kocku prema raspodeli spreda poznatoj svima, Palamedesov protivnik biće izabran. Struktura informacija ove nove igre sada je potpuna. Međutim nesavršena je, pošto Palamedes zna samo verovatnoću  $p$  (odnosno  $1 - p$ ) da je to potez Odiseja simulanta (odnosno Odiseja ludaka). Međutim, njegova dva protivnika uvek znaju tačno ko je na potezu.

Jednom kada sudbina odluči, tada Odisej ima mogućnost da napravi prvi signal. Nezavisno od njegovog slučajno odlučnog tipa ega, može ili da se uzdrži od bilo kakvog iskaza - strategije  $\bar{m}$ , ili, ako tako odabere, izigrava ludaka - strategiju  $m$ . Sada je Palamedesov red. Ako mu ništa nije signalizirano, tada mora odlučiti između odricanja i regrutovanja, strategije  $r$  i  $c$ . S druge strane, ako primi signal „ludak“, tada može ili odreći se Odiseja, strategija  $r$ , ili staviti Telamaha u igru, strategija  $t$ . Odisej je primoran da da novi signal. Može ponuditi Telemaha, strategija  $o$ , ili ga poštediti, strategija  $s$ . Palamedes će tada odreagovati ili sa odricanjem ili sa regrutovanjem.

Napomena: Dobijene vrednosti i nazivi strategija preuzeti su iz knjige [5].



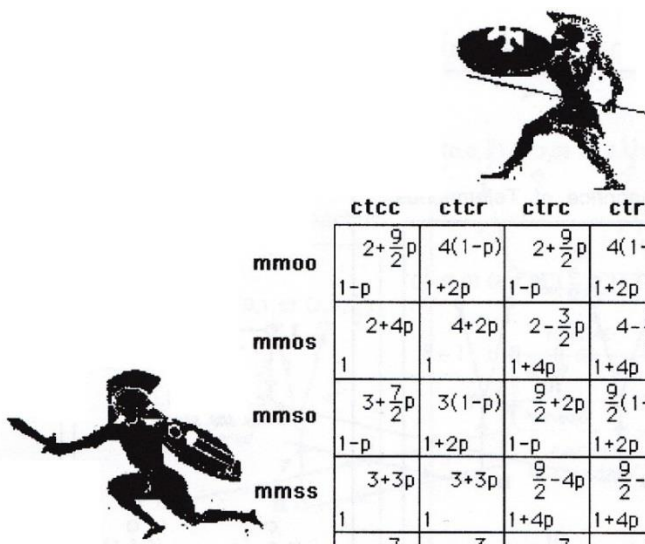
**Slika 44.** ([5]) – Odisej odlazi u rat (stablo igre sa 3 lica)



Slika 44. opisuje produženu igru predstavljajući odgovarajuće stablo igre. Upotrebne vrednosti tri igrača pokazuju njihove prednosti među mogućim ishodima igre. Tako, na primer, Odisej simulant, ceni uspešno obmanjivanje svog protivnika najviše, pod uslovom da Palamedes odrekne igranja na kartu Telemaha. Ova druga najveća vrednost se stavlja na uspešnu obmanu kojoj sledi pošteđa potomka. I konačno, simulant do samog kraja mora postaviti najnižu vrednost da bude regrutovan. S druge strane, nakon signaliziranja ludila, ludak je ravnodušan na sve ishode koji se mogu dogoditi u igri (u bilo kojem slučaju Odisej ludak dobija istu vrednost). Samo pomoću prevare može završiti bez dobitka. Sa svoje strane, Palamedes od svih ishoda najviše voli one koji će najviše povrediti simulanta. Voleo bi više regrutovati ludaka, nego da regrutuje simulanta ([5]).

## 11.2 Analiza strateškog ponašanja

U principu, bilo bi sasvim moguće uvesti umesto stabla igre na slici 44. prikaz normalne forme. Redni igrač u ovom slučaju bi vukao konce za dve individue: Odiseja ludaka i Odiseja simulanta. Igrač kolone bi imao zadatak dovođenja Palamedesa u igru. Dobijamo za svakog potezača kanapa 16 čistih strategija, koje predlažu određeni tok radnje za svako čvorište odluke. Tako, na primer, čista strategija  $m - m - o - s$  ostavlja dvojici Odiseja da daju signal „ludaku“ u prvoj fazi igre. Posle toga, ludak bi ponudio Telemaha, dok bi ga simulant poštedeo. Na slici 45. odredili smo (zasnovano na smanjenoj normalnoj formi lutkara) za svaku konfiguraciju čistih strategija odgovarajuće odmerene upotrebne vrednosti (shodno prethodno datim raspodelama spreda). Vrednosti iz sledeće tablice su takođe preuzete iz [5].

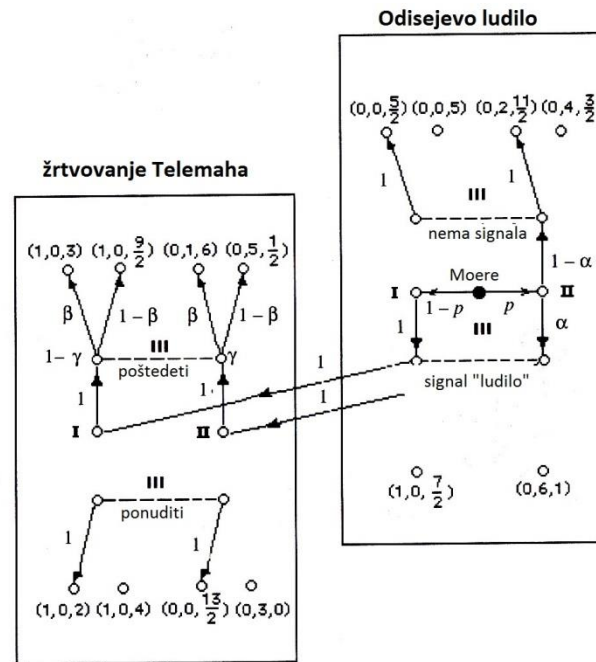


|      | ctcc                        | ctcr                        | ctrc                         | ctrr                         | cr●●                                   |
|------|-----------------------------|-----------------------------|------------------------------|------------------------------|----------------------------------------|
| mmoo | $2 + \frac{9}{2}p$<br>$1-p$ | $4(1-p)$<br>$1+2p$          | $2 + \frac{9}{2}p$<br>$1-p$  | $4(1-p)$<br>$1+2p$           | $\frac{7}{2} - \frac{5}{2}p$<br>$1+5p$ |
| mmos | $2+4p$<br>$1$               | $4+2p$<br>$1$               | $2 - \frac{3}{2}p$<br>$1+4p$ | $4 - \frac{7}{2}p$<br>$1+4p$ | $\frac{7}{2} - \frac{5}{2}p$<br>$1+5p$ |
| mmso | $3 + \frac{7}{2}p$<br>$1-p$ | $3(1-p)$<br>$1+2p$          | $\frac{9}{2} + 2p$<br>$1-p$  | $\frac{9}{2}(1-p)$<br>$1+2p$ | $\frac{7}{2} - \frac{5}{2}p$<br>$1+5p$ |
| mmss | $3+3p$<br>$1$               | $3+3p$<br>$1$               | $\frac{9}{2} - 4p$<br>$1+4p$ | $\frac{9}{2} - 4p$<br>$1+4p$ | $\frac{7}{2} - \frac{5}{2}p$<br>$1+5p$ |
| mm●● | $2 + \frac{7}{2}p$<br>$1+p$ | $4 + \frac{3}{2}p$<br>$1+p$ | $2 + \frac{7}{2}p$<br>$1+p$  | $4 + \frac{3}{2}p$<br>$1+p$  | $\frac{7}{2} + 2p$<br>$1+p$            |
| mm●● | $3 + \frac{5}{2}p$<br>$1+p$ | $3 + \frac{5}{2}p$<br>$1+p$ | $\frac{9}{2} + p$<br>$1+p$   | $\frac{9}{2} + p$<br>$1+p$   | $\frac{7}{2} + 2p$<br>$1+p$            |

**Slika 45.** ([5]) – Prikaz normalne forme

## Teorija igara: matematičke osnove mitova i paradoksa

Na slici 46. dali smo jedan primer ove procedure (primer je preuzet iz [5]). Nakon što je Moere, u korenu igre, odabrao tip Odiseja (shodno sa raspodelom igre spreda  $(1 - p, p)$ ), ludak daje sa verovatnoćom  $1$ , simulant sa (još nepoznatom) verovatnoćom  $\alpha$ , signal „ludak“.



$(\alpha, 1 - \alpha)$  – Strategija simulatora u prvoj fazi

$(\beta, 1 - \beta)$  – Strategija Palamedesa nakon što je Telemah pošteđen

$(\gamma, 1 - \gamma)$  – Odluka dvojice Odiseja prilikom poštede Telemaha

**Slika 46.** ([5]) – Moć strateške analize

U zavisnosti od ovog (pretpostavljenog) ponašanja, Palamedes će pretpostaviti da ako je on na potezu u informacionoj postavci „nema signala“, tada će se naći (sa verovatnoćom  $1$ ) u desnom čvorištu odluke. Sada njegov najbolji odgovor na ovu situaciju je da regrutuje Odiseja (simulanta) sa verovatnoćom  $1$ .

Međutim, šta se javlja u postavci informacija „ludilo je signal“? Verovatnoća da će biti dostignuto je  $\alpha p + 1 \times (1 - p)$ . Kao raspodela tipova spreda možemo izvesti zaključak  $(1 - \gamma, \gamma)$  sa

$$\gamma = \frac{\alpha p}{\alpha p + (1 - p)}.$$

Ova raspodela bi se zadržala kao i za postavku informacija „pošteđen“ ako bi pretpostavili da Palamedes odlučuje da igra na kartu Telemaha sa verovatnoćom  $1$  i ako oba tipa

## Teorija igara: matematičke osnove mitova i paradoksa

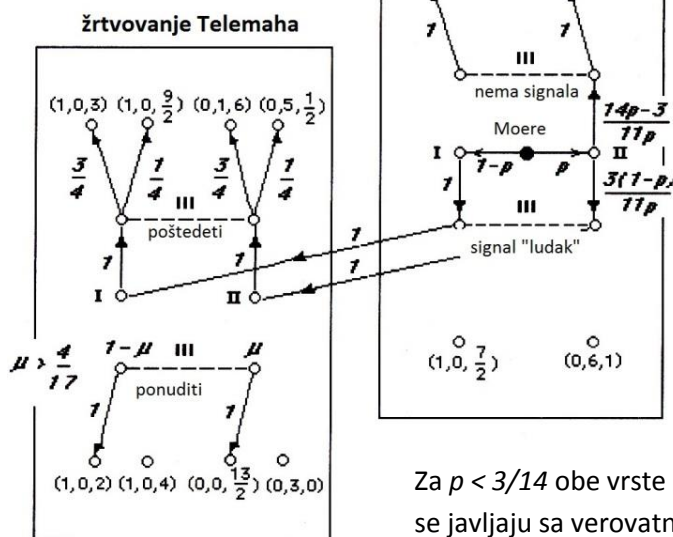
poštete Telemaha sa istom verovatnoćom 1. Sada, konačno, da li će Palamedes odreagovati postavkom „pošteđen“? Iz ponašanja simulanta možemo odrediti Palamedesovu nepoznatu strategiju ponašanja koja mu omogućava da izabere sa verovatnoćom  $\beta$  regrutovanje za Odiseja. Pošto je Odisej simulator ravnodušan između signala koje može odabrati, sledeća jednačina korisnosti se može zadržati:  $1 \times \beta + 5(1 - \beta) = 2$ . Kada rešimo ovu jednačinu, dobija se za  $\beta$  vrednost  $\frac{3}{4}$ . Iz ravnodušnosti Palamedesa u postavci „pošteđen“ može se konačno izračunati vrednost  $\alpha$ . Za ovo se upotrebljava raspodela spreda  $(1 - \gamma, \gamma)$ . Ako je Odisej regrutovan, tada Palamedes postiže korisnost  $3(1 - \gamma) + 6\gamma$ . U slučaju odricanja, on dobija  $\frac{9(1-\gamma)}{2} + \frac{\gamma}{2}$ . Ako se ove vrednosti slažu, tada je:

$$\alpha = \frac{3(1 - p)}{11p}.$$

Konačno, hajde da skrenemo pažnju na postavku informacija „žrtvovan“. Ako igrači koriste strategije dosada opisane, ova postavka informacija ne bi bila dostignuta. Neko sada može misliti da Palamedesovo ponašanje u ovoj postavci ne igra ulogu. Kakav bi to bio lažan zaključak! Naime, ako bi se Palamedes odrekao Odiseja, tada bi simulant mogao dobiti veću korisnost promenom signala. Ravnoteža u strategijama ponašanja opisana na slici 47. bila bi uništena ([5]).

### Prva ravnoteža – Telemah je pošteđen

Samo će simulant žrtvovati svoju krv i meso ( $\mu = 1$ )



**Slika 47.** ([5]) – Telemah je pošteđen

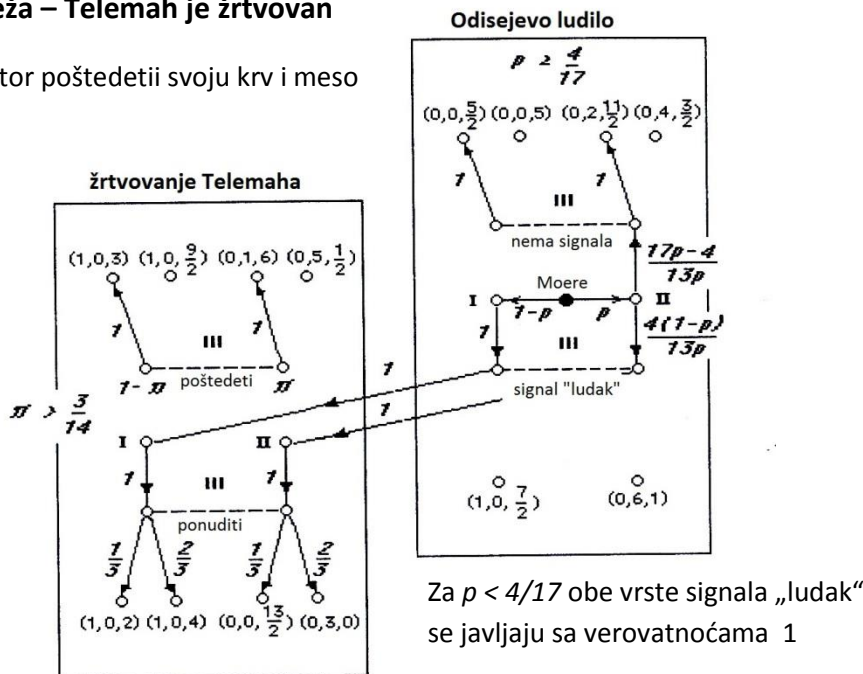
## Teorija igara: matematičke osnove mitova i paradoksa

Međutim, održaće se pomoću pretpostavke koju Palamedes izdaje kao naređenje o regrutaciji u postavci „žrtvovan“ (afeta regrutacije kasnije će Palamedesa koštati skupo - on će (zahvaljujući lukavoj izdaji Odiseja) biti lažno optužen za krađu i pogubljen). Ovo bi moglo, na primer, krenuti kao što sledi: Samo bi simulant mogao žrtvovati svoje dete.

U svakom slučaju, u mitu Telemah je pošteđen. Suočen sa izborom žrtvovanja svog sina, Odisej priznaje poraz i otkriven je kao simulant. Legenda nam daje jasno tumačenje Palamedesove pretpostavke. Samo bi ludak žrtvovao Telemaha. Sada znamo kako bi opasna i štetna ova pretpostavka bila. Mogla bi odvesti pravo u ravnotežu na slici 48. ([5]).

### Druga ravnoteža – Telemah je žrtvovan

Samo će simulator pošteđetii svoju krv i meso  
( $\pi = 1$ )



**Slika 48.** ([5]) – Telemah je žrtvovan

# Zaključak

Veći deo života provodimo u kretanju kroz svojevrsno „more“ igara. Teorija igara nam na tom putovanju može poslužiti i kao kompas, i kao mapa, budući da se njome koristimo da bismo modelovali mnoge situacije iz realnog života, a zatim upotrebom analitičkih alata dolazimo do smjera u kojem treba da se krećemo i situacija koje treba da izbegavamo. Na prvi pogled može da deluje kao da su ti alati previše jednostavni, ali upravo ta jednostavnost i njihova pristupačnost nam omogućavaju da njihovim rešavanjem steknemo određenu intuiciju o kompleksnim problemima sa kojima se susrećemo svakodnevno.

Teoriju igre mnogo više interesuju interakcije donosilaca odluka od interakcije nosilaca definicija. Mnogi primeri u teoriji igre potiču iz mitova, legendi, priča, zagonetki, paradoksa i dilema koje se prenose sa generacije na generacije. Najpoznatiji primer u teoriji igre, takozvana „zatvorenikova dilema“ zahvatila je samo šire naučne krugove kada ju je Albert V. Taker „preobukao“ u priču u pismu napisanom za Melvina Drešera. Ne bi trebalo da iznenadi to što teoretičari igre „takođe vole priče“, jer se priče tiču uglavnom likova koji se suočavaju sa teškim odlukama, nemogućim moralnim izborima i konfliktima sa rivalima. Konflikti, strateški proračuni, kao i zla i dobra sreća kojima narativi obiluju, tiču se „matematike konflikta“ zbog toga što se čitaoci, gledaoci i teoretičari igre sučeljavaju sa pitanjima tipa: „Šta bi ti učinio?“; „Koji je najbolji način delovanja?“; „Šta je heroina trebalo da uradi?“. Paradoksi i zagonetke svojevrsna su istorija napredovanja ljudske civilizacije, oslobađanja duha i utemeljenja ekonomskog poretka suočenog u uslovima globalnog društva – sa neizvesnošću, rizicima i nesavršenom konkurencijom. Ovaj pasus se malazi u literaturi [13].

Sve prethodno navedeno, navelo me je da se dublje upoznam sa teorijom igara, proučim, možda ne tako popularne, ali prilično zanimljive delove ove discipline. Nadam se da ste uživali u otkrivanju svih ovih interesantnih priča, da sam uspela „približiti“ čitaocima naizgled nerešive probleme i sve to pomoću mitova, paradoksa, dilema za koje ste možda nekada i čuli ali niste znali kako ih rešiti.

Za kraj ovog rada, navodim jednu izreku koja možda nije direktno vezana za moju temu, ali kako je teorija igara deo primenjene matematike, svakako da ima veze sa njom i da pokazuje svu lepotu i raskoš koju matematika kao nauka poseduje!

*“Ne postoji grana matematike, koliko god bila apstraktna, da jednog dana ne bi mogla biti primenjena u praksi”.*

Nikolaj Ivanovič Lobačevski

# Literatura

- [1] Hykšova M., Several Milestones in the History of Game Theory, VII. Österreichisches Symposion zur Geschichte der Mathematik, 2004.
- [2] Jovanović I., Operaciona istraživanja 2 (knjiga), Dopuna 1 – Teorija igara
- [3] Krčevinac S., Čangalović M., Kovačević M., Operaciona istraživanja 2, Fakultet organizacionih nauka, Beograd, 2006.
- [4] Martić Lj., Primjena matematičkih metoda u ekonomskoj analizi (Zbirka zadataka), Informator, Novinsko – izdavački, štamparski i birotehnički zavod, Zagreb, 1971.
- [5] Mehlmann A., The Game's Afoot! Game Theory in Myth and Paradox, American Mathematical Society, USA, 2000.
- [6] Morgenstern O., Neumann J., Theory of Games and Economic Behavior, Princeton University Press, USA, 1953.
- [7] Petrić J., Operaciona istraživanja (knjiga druga), Izdavačko – štamparsko – knjižarska radna organizacija, Beograd, 1979.
- [8] Stanford Encyclopedia of Philosophy, [plato.stanford.edu](http://plato.stanford.edu)
- [9] Stojanović B., Teorija igara: elementi i primena, Službeni glasnik, Beograd, 2005.
- [10] Veselinović D., Osnove teorije ravnoteže interesa, Mediterran Publishing, Novi Sad, 2008.
- [11] [www.b92.net/zivot/nauka.php?nav\\_id=475706](http://www.b92.net/zivot/nauka.php?nav_id=475706)
- [12] [www.wikipedia.org](http://www.wikipedia.org)
- [13] [www.polja.rs/polja465/465-10.pdf](http://www.polja.rs/polja465/465-10.pdf)

# Biografija



Nataša Mukić je rođena 5. oktobra 1990. godine u Subotici. Završila je Osnovnu školu „Matko Vuković“ u Subotici 2005. godine kao nosilac Vukove diplome.

Potom upisuje Gimnaziju „Svetozar Marković“ u Subotici, prirodno – matematički smer, koju završava 2009. godine, sa odličnim uspehom.

Iste godine upisuje Prirodno – matematički fakultet u Novom Sadu, smer matematika finansija. Zaključno sa septembarskim ispitnim rokom 2012. godine položila je sve predviđene ispite sa prosečnom ocenom 9.08 i stekla zvanje Matematičar primenjene matematike.

Nakon toga, oktobra 2012. godine upisuje master studije na istom fakultetu, smer primenjena matematika. Položila je sve ispite predviđene planom i programom zaključno sa junskim ispitnim rokom 2014. godine sa prosečnom ocenom 9.58 i time stekla uslov za odbranu master rada.

Nataša Mukić  
Novi Sad, 2014. godine

UNIVERZITET U NOVOM SADU  
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET  
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

**RBR**

Identifikacioni broj:

**IBR**

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

**TD**

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

**TZ**

Vrsta rada: Master rad

**VR**

Autor: Nataša Mukić

**AU**

Mentor: dr Ivana Štajner - Papuga

**MN**

Naslov rada: Teorija igara: matematičke osnove mitova i paradoksa

**NR**

Jezik publikacije: srpski (latinica)

**JP**

Jezik izvoda: s / e

**JI**

Zemlja publikovanja: Srbija

**ZP**

Uže geografsko područje: Vojvodina

**UGP**

Godina: 2014.

**GO**

Izdavač: Autorski reprint

**IZ**



# Teorija igara: matematičke osnove mitova i paradoksa

---

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno – matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4

**MA**

Fizički opis rada: (11, 71, 13, 0, 48, 0, 0)

**FO**

Naučna oblast: Matematika

**NO**

Naučna disciplina: Teorija odlučivanja

**ND**

Predmetna odrednica / Ključne reči: Konflikti, igra, igrači, matrica plaćanja, strategija, potezi, odabir najbolje strategije, dileme, paradoksi, povratna indukcija

**PO**

**UDK**

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno–matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu

**ČU**

Važna napomena:

**VN**

Izvod: U prvom delu rada je dat iscrpan pregled matematičke baze teorije igara, te detaljan pregled relevantnih strateških igara. Potom se osvrćemo na istoriju, razvoj moderne teorije i primenu teorije igara u nekim društvenim naukama kao što su politika, pravo, ekonomija. Drugi deo pruža detaljnu analizu igre staklenih perli (Glass Bead Game). Pokušaćemo da razumevanje definicija, strategija rešenja, kao i metoda dokaza, učinimo zanimljivijim korišćenjem bajki, zagonetki, i paradoksa, koji će omogućiti dubok uvid u prirodu strateškog razmišljanja. Treći deo obuhvata skup modela predstavljenih kao potporna dokumentacija za međusobnu saradnju (vezu) između matematike konflikta i književne tradicije mitova koji su nam bili ponuđeni, odnosno, prenošeni sa “kolena na koleno”. Počinjemo čudnim primerom matematičkog modela koji je postao pripovedački mit. U nastavku ćemo se baviti sa paradoksima povratne indukcije i fundamentalnih pitanja skolastike teorije igre. U poslednjem poglavlju model teorije igre ponudiće strateško objašnjenje devedeset pete Higinove basne.

**IZ**

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 10.4.2014.

**DP**

Datum odbrane:

**DO**

## Teorija igara: matematičke osnove mitova i paradoksa

---

Članovi komisije:

**KO**

Predsednik: dr Arpad Takač, redovni profesor, Prirodno - matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Ivana Štajner – Papuga, vanredni profesor, Prirodno - matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor

Član: dr Miloš Stojaković, vanredni profesor, Prirodno - matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD  
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS  
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

**ANO**

Identification number:

**INO**

Document type: Monograph type

**DT**

Type of record: Printed text

**TR**

Contents Code: Master's thesis

**CC**

Author: Nataša Mukić

**AU**

Mentor: Ivana Štajner - Papuga

**MN**

Title: Game theory: mathematical basis of myths and paradoxes

**TI**

Language of text: Serbian

**LT**

Language of abstract: English

**LA**

Country of publication: Serbia

**CP**

Locality of publication: Vojvodina

**LP**

Publication year: 2014.

**PY**

Publisher: Author's reprint

**PU**

# Teorija igara: matematičke osnove mitova i paradoksa

---

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4

**PP**

Physical description: (11, 71, 13, 0, 48, 0, 0)

**PD**

Scientific field: Mathematics

**SF**

Scientific discipline: Decision theory

**SD**

Subject / Key words: Conflicts, the game, the players, the matrix of payments, strategy, strokes, select the best strategies, dilemmas, paradoxes, backward induction

**SKW**

**UC:**

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

**HD**

Note:

**N**

Abstract: The first part of the thesis presents mathematical basis of game theory and gives detailed explanation of relevant strategic games through dealing with historical moments, development of modern technologies and application of game theory in Politics, Law and Economics. The central topic of second part is Glass Bead Game through which we will try to make theory of Mathematics more interesting and comprehensive by using fairy tales, enigmas and paradoxes as examples. Third part of the paper contains different models which showcase connection between Mathematics of conflict and literal tradition of myths passed down the generations. We will begin with a strange example of one mathematical model which now presents a narrative myth. Additionally, the paradoxes of backward induction and fundamental questions regarding scholastic of theory of game will be presented. Finally, in the last chapter, the model of game theory will derive a strategic explanation of ninety fifth fable of Hyginus.

**AB**

Accepted by the Scientific Board on: 10.4.2014.

**ASB**

Defended:

**DE**

## Teorija igara: matematičke osnove mitova i paradoksa

---

Thesis defend board:

**DB**

President: Dr Arpad Takači, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

Member: Dr Ivana Štajner - Papuga, associate professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, supervisor

Member: Dr Miloš Stojaković, associate professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad