



Univerzitet u Novom Sadu  
Prirodno-matematički fakultet  
Departman za matematiku i informatiku



# Kubna Šredingerova jednačina

Master rad

Autor: Nataša Mišanović  
Mentor: dr Marko Nedeljkov

2019, Novi Sad

## SADRŽAJ

---

### Sadržaj

<b>1 Predgovor</b>	<b>2</b>
<b>2 Kratak pregled važnijih pojmova</b>	<b>3</b>
2.1 Osnovni pojmovi algebre i diferencijalnih jednačina . . . . .	3
2.2 Osnovni pojmovi kvantne mehanike . . . . .	5
<b>3 Linearni talasi</b>	<b>8</b>
3.1 Matematička definicija . . . . .	8
3.2 Primjeri u fizici i njihova interpretacija . . . . .	9
3.2.1 Harmonijski oscilator . . . . .	9
3.2.2 Elektromagnetni talasi . . . . .	12
3.2.3 Ravni talasi . . . . .	14
3.2.4 Šredingerova jednačina . . . . .	14
<b>4 Nelinearni talasi</b>	<b>16</b>
4.1 Matematički oblik i primjeri . . . . .	16
4.2 Duffing oscilator . . . . .	17
4.3 Rješenje preko perturbovanih nizova (redova) . . . . .	18
<b>5 Kubna Šredingerova jednačina (CSE)</b>	<b>21</b>
5.1 Uvod . . . . .	21
5.2 Izvođenje iz Duffing-Lorentz-ovog modela . . . . .	21
5.3 Svojstva CSE . . . . .	25
5.4 1-solitonsko rješenje CSE . . . . .	27
5.5 Odnos 2 solitona . . . . .	32
<b>6 Metode za rješavanje nelinearnih jednačina</b>	<b>34</b>
6.1 Backlund-ova transformacija . . . . .	34
6.2 Inverzna metoda rasipanja . . . . .	35
6.3 Lax-ovi parovi . . . . .	35
<b>7 Inverzna metoda rasipanja (IST)</b>	<b>37</b>
7.1 Prikaz metode rasipanja . . . . .	39
7.2 Eksplicitno rješenje . . . . .	43
7.3 Primjena na CSE . . . . .	46
<b>A Kodovi za numeričko rješavanje CSE u programu Mathematica</b>	<b>47</b>
A.1 1-solitonsko rješenje . . . . .	47
A.2 Odnos 2 solitona . . . . .	48
<b>8 Biografija kandidata</b>	<b>50</b>
<b>Literatura</b>	<b>51</b>

## 1 Predgovor

Tema ovog rada su nelinearne talasne jednačine sa akcentom na kubnu Šredingerovu jednačinu ali pored njih daćemo i kratak uvid u linearne.

Generalno se smatra da je većina fenomena prirode u principu nelinearna. Linearnost se javlja samo pod posebnim, idealizovanim uslovima. Na primjer, svaka stvarna oscilacija (ili oscilacija u prirodi, oko nas) će biti nelinearna i može se aproksimirati samo linearnom ili harmonijskom (osciluje po zakonu sinusa ili kosinusa) oscilacijom u slučaju malih amplituda. Nasuprot ovoj uobičajenoj situaciji, većina metoda teorijske fizike je ograničena na linearni slučaj, koji je matematički mnogo lakši za rukovanje od nelinearnog slučaja.

Na početku rada, u drugom dijelu dajemo kratak pregled važnijih pojmljiva koji će nam biti značajni za lakše razumijevanje ostatka rada. U trećem dijelu rada smo definisali linearne talase i dali par primjera iz fizike.

Zatim se posvećujemo nelinearnosti, koju smo obradivali u četvrtom dijelu. Iz velike klase nelinearnih talasnih jednačina u fizici izabrali smo dvije: Korteweg-de Vries (KdV) jednačinu i kubnu Šredingerovu jednačinu (CSE). Obje jednačine imaju brojne primjene u fizici. Usredsredili smo se više na kubnu Šredingerovu jednačinu CSE i predstavili detaljna izvođenja iz fundamentalnih jednačina elektromagnetizma, u petom dijelu.

Po pravilu, nelinearne jednačine se ne mogu tačno riješiti. Kao jedan izuzetak ovog pravila, tačna rješenja nekih nelinearnih talasnih jednačina (uključujući i CSE) koja opisuju interakciju n solitona su jedan od vrhunaca matematičke fizike 20-og vijeka. Nažalost, relevantne tehnike kao sto su Lax-ova teorija, inverzni metod rasipanja (IST), Backlund-ova transformacija su previše komplikovane da bi se detaljno prikazale u ovom radu. Zbog toga smo dali grub pregled o metodama koje su navedene (šesti dio), a detaljnije se posvetili IST i rješavanju CSE pomoću ove metode. To je ono što je opisano u sedmom dijelu rada, u kome su i grafički predstavljena specijalna rješenja kubne Šredingerove jednačine, 1-soliton i interakcija 2 solitona.

## 2 Kratak pregled važnijih pojmova

### 2.1 Osnovni pojmovi algebre i diferencijalnih jednačina

Predstavljamo kratak pregled pojmova iz algebre čije definicije će nam značiti u daljem radu sa linearnim i nelinearnim talasima. Većina je preuzeta iz knjiga [23] i [25].

**Toeplitz-ova matrica** je matrica u kojoj je svaka dijagonala, s lijeva na desno, konstantna.

Neka su  $V_1$  i  $V_2$  vektorski prostori nad istim poljem  $F$ . Preslikavanje  $A : V_1 \rightarrow V_2$  takvo da je

- $(\forall a, b \in V_1) A(a + b) = A(a) + A(b),$
- $(\forall \alpha \in F) (\forall a \in V_1) A(\alpha a) = \alpha A(a),$

naziva se **linearna transformacija** (**linearni operator, homomorfizam**) vektorskog prostora  $V_1$  u  $V_2$ .

Suma  $W = W_1 + \dots + W_n$  potprostora  $W_1, \dots, W_n$  vektorskog prostora  $V(F)$  naziva se **direktna suma** ako i samo ako je za svako  $i \in \mathbb{N}_n$

$$W_i \cap (W_1 + \dots + W_{i-1} + W_{i+1} + \dots + W_n) = 0 \quad (2.1.1)$$

i označava se sa  $W = W_1 \oplus \dots \oplus W_n$ .

Neka je  $L(x) := x' - A(t)x$  linearna, homogena diferencijalna jednačina. Tada je  $L := \frac{d}{dt} - A(t)$  **linearni diferencijalni operator**.

**Zakon superpozicije.** Ako su  $x$  i  $y$  rješenja diferencijalne jednačine, tj.  $L(x) = 0$  i  $L(y) = 0$  onda je  $L(\alpha x + \beta y) = 0$ , odnosno linearna kombinacija rješenja je takođe rješenje.

Neka  $x, y, z$  bude sistem pravouglih koordinata u 3-dimenzionalnom Euklidskom prostoru, a neka su  $i, j, k$  odgovarajuće baze jediničnih vektora. **Operator divergencije** funkcije  $\mathbf{F} = U\mathbf{i} + V\mathbf{j} + W\mathbf{k}$  je definisan kao :

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}.$$

**Laplace-ov operator** je diferencijalni operator drugog reda. U trodimenzionalnom Dekartovom koordinatnom sistemu je

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

**Rotor vektorskog polja** definiše se kao:

$$\operatorname{rot}(\vec{v}) = \nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix},$$

## **2.1 Osnovni pojmovi algebre i diferencijalnih jednačina**

---

$$\text{gdje je } \vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} v_x(x, y, z) \\ v_y(x, y, z) \\ v_z(x, y, z) \end{pmatrix}$$

vektor čije su komponente funkcije Dekartovih koordinata.

## 2.2 Osnovni pojmovi kvantne mehanike

---

### 2.2 Osnovni pojmovi kvantne mehanike

Kako bismo imali što bolji uvid u linearne i nelinearne talase i shvatili njihovu fizičku pozadinu biće nam neophodno razumijevanje određenih (osnovnih) pojmoveva kako iz fizike tako i iz kvantne mehanike, koji se pojavljuju u nastavku. Iz tog razloga ćemo ih definisati u ovom dijelu, a o njima se može pročitati u [25] i [26].

**Oscilacija** je periodično mjenjanje neke fizičke veličine, ponavljanje niza stanja u određenim vremenskim razmacima.

**Elongacija** je trenutna udaljenost tačke koja osciluje od ravnotežnog položaja.

**Amplituda** je maksimalna vrijednost elongacije.

**Period oscilovanja** je vrijeme trajanja jedne oscilacije, označićemo ga sa  $T$ .

**Frekvencija**,  $\frac{1}{T}$  je broj oscilacija u jedinici vremena. Oznaka je  $f$ .

**Ugaona frekvencija** je  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ .

Talas se prilikom prostiranja kroz neku sredinu odbija od granične površine sredine i to se naziva **refleksija**. On takođe i prolazi kroz sredinu, što je **transmisija**.

**Drugi Njutnov zakon.** Ubrzanje koje pri kretanju dobija jedno tijelo srazmjerno je sili koja na njega deluje, a obrnuto srazmjerno masi tog tijela. Zapisuje se:

$$F = m \cdot a, \quad (2.2.1)$$

pri cemu je  $m$  masa tijela,  $a$  ubrzanje tijela a  $F$  je sila.

U prostoru oko nanelektrisanog tijela deluje **električno polje**. Uzajamno djelovanje (privlačenje ili odbijanje) nanelektrisanih tijela ostvaruje se posredstvom električnog polja. Električno polje djeluje električnim silama na svako nanelektrisano telo koje se nalazi u njemu. Označavaćemo ga sa  $\mathbf{E}$ .

**Magnetno polje** je oblast djelovanja nekog magneta. Kao što u prostoru oko svake nepokretne nanelektrisane čestice postoji elektrostatičko polje, oko svake nanelektrisane čestice koja se kreće postoji i magnetno polje. To je komponenta električnog polja koja djeluje samo na pokretna nanelektrisanja. Označićemo ga sa  $\mathbf{B}$ .

**Elektromagnetno polje** se može posmatrati kao rezultanta električnog i magnetnog polja. Električno polje izazivaju nanelektrisanja koja miruju, a magnetno polje kretanje nanelektrisanja (električna struja). Stacionarna i pokretna nanelektrisanja se često opisuju kao izvori elektromagnetskog polja.

**Nanelektrisanje** je jedna od osnovnih osobina nekih subatomskih čestica kojom se karakterišu elektromagnetne interakcije (interakcije čestica sa elektromagnetskim poljem). Nanelektrisana materija stvara elektromagnetno polje. Postoje dvije vrste nanelektrisanja. Obilježavaju se znacima „+“ i „-“. Nanelektrisanja različitih znakova se privlače što odgovara činjenici da je proizvod dva broja različitog znaka uvijek negativan. Nanelektrisanja istog znaka se odbijaju što je

## 2.2 Osnovni pojmovi kvantne mehanike

---

u skladu sa činjenicom da je proizvod dva broja istog znaka uvijek pozitivan. Označićemo ga sa  $q$ .

**Magnetska permeabilnost (Magnetic permeability)** je elektromagnetna osobina materijala koja pokazuje intenzitet magnetizacije tijela kada su ona izložena spoljašnjem magnetnom polju. Magnetska permeabilnost (Magnetic permeability) se označava grčkim slovom  $\mu$ .

**Magnetska permeabilnost vakuma (permeability of free space)** je prirodna konstanta magnetske permeabilnosti (magnetic permeability) za vakuum. Označićemo je sa  $\mu_0$ . Jednaka je recipročnoj vrijednosti umnoška dielektrične permitivnosti vakuma (permittivity of free space)  $\epsilon_0$  i kvadrata brzine svjetlosti  $c$  u vakuumu:

$$\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}. \quad (2.2.2)$$

**Dielektrična permitivnost vakuma (permittivity of free space)** ili dielektrična konstanta vakuma je prirodna konstanta koja je jednaka recipročnoj vrijednosti umnoška magnetske permeabilnosti vakuma (permeability of free space)  $\mu_0$  i kvadrata brzine svjetlosti  $c$  u vakuumu:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}. \quad (2.2.3)$$

Označićemo ga sa  $\epsilon_0$ .

**Dipolni moment (dipole moment)** posjeduju tijela kod kojih se centri mase naneletrisanja ili namagnetisanja ne poklapaju. Dipolni moment (dipole moment),  $p$ , se predstavlja kao proizvodom naneletrisanja  $q$  i rastojanja među njima,  $r$ :  $p = qr$ . Dipolni moment (dipole moment) može biti električni i magnetni. Najpoznatiji makroskopski dipol je magnetna igla kompasa.

**Vektor jačine polarizacije ili gustina polarizacije ( electric polarization ili polarization density)** je vektorsko polje koje izražava gustinu stalnih ili indukovanih električnih dipolnih momenata u dielektričnom materijalu. Vektor jačine polarizacije (electric polarization)  $\mathbf{P}$  je definisan kao dipolni momenat po jedinici zapremine.

**Električna indukcija ili vektor dielektričnog pomaka ( dielectric displacement)** je vektorsko polje  $\mathbf{D}$  koje se javlja u Maxwell-ovim jednačinama. Definisana je relacijom:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (2.2.4)$$

gdje je  $\mathbf{E}$  električno polje,  $\epsilon_0$  je dielektrična permitivnost vakuma (permittivity of free space), a  $\mathbf{P}$  je vektor jačine polarizacije materijala (electric polarization).

**Gustina električnog naneletrisanja (charge density)** (oznaka  $\rho$ ) je fizička veličina koja opisuje naneletrisanje ili količinu elektriciteta po zapremini  $V$ :

$$\rho = \frac{Q}{V}. \quad (2.2.5)$$

## **2.2 Osnovni pojmovi kvantne mehanike**

---

**Gustina struje (current density)** je veličina koja opisuje kretanje nanelektrisanih čestica kroz provodnik. Gustina struje (current density) se obilježava slovom  $J$ . Gustina električne struje (current density) brojno je jednaka količiniku jačine struje i površine poprečnog presjeka provodnika kroz koji protiče.

### 3 Linearni talasi

Proces prostiranja oscilacija kroz prostor naziva se talas. Talasi prenose energiju kroz prostor. Talasni front je geometrijsko mjesto tačaka u prostoru koje razdvaja prostor na dva dijela, onaj koji je zahvaćen talasnim procesom i onaj koji nije. Brzina prostiranja talasnog fronta je brzina prostiranja talasa, obično se koristi oznaka  $c$ . Ono čime se talasi još opisuju je i faza talasa. Kretanje talasa matematički modelujemo parcijalnim diferencijalnim jednačinama. Javljuju se u većini naučnih disciplina kao što su: mehanika fluida, optika, elektromagnetizam, kvantna mehanika. Talasi koji se primjenjuju u svim ovim oblastima opisani su rješenjima linearnih ili nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina u zavisnosti od toga da li se radi o linearnim ili nelinearnim talasima. U ovom poglavlju posvetićemo se linearnim jednačinama, tj. linearnim talasima. Detaljnije o sadržaju poglavlja Linearni talasi od 3.1 do 3.2.2 čitalac može da pronađe u knjizi [21], za 3.2.2 u [15] i [22], a za odjeljak 3.2.4 u knjizi [20].

#### 3.1 Matematička definicija

Definiciju linearnosti talasne jednačine ćemo ilustrovati kroz par fizičkih primjera.

Posmatraćemo samo kompleksan slučaj, dok je realan analogan.

Neka su  $\mathcal{V}, \mathcal{W}$  kompleksnoznačni vektorski prostori i  $\mathcal{D}: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  linearni operator. Tada je linearna jednačina oblika

$$\mathcal{D}\phi = 0, \quad \phi \in \mathcal{V}, \tag{3.1.1}$$

a  $\phi$  zovemo rješenje jednačine. Iz tog slijedi da će skup rješenja (3.1.1),  $\mathcal{S}ol_h \subset \mathcal{V}$  biti vektorski potprostor od  $\mathcal{V}$ . To znači da za  $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{S}ol_h$  i  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$  važi

$$c_1\phi_1 + c_2\phi_2 \in \mathcal{S}ol_h \tag{3.1.2}$$

Odgovarajuća nehomogena linearna jednačina će biti oblika

$$\mathcal{D}\phi = \rho, \quad \phi \in \mathcal{V}, \quad \rho \in \mathcal{W}. \tag{3.1.3}$$

Matematički, nehomogena jednačina može biti napisana u formi (3.1.1). Uglavnom,  $\rho$  je "izvor" a  $\phi$  polje koje proizvodi  $\rho$  (proizvedeno). Uopšteno,  $\phi$  nije jedinstveno određena sa  $\rho$  i (3.1.3), pošto  $\mathcal{D}\phi_1 = \rho = \mathcal{D}\phi_2$  implicira  $\mathcal{D}(\phi_1 - \phi_2) = 0$ , tj.  $\phi_1 - \phi_2$  rješava homogenu jednačinu (3.1.1). Stoga se obično zahtjevaju dodatni, granični ili početni uslovi kako bi se odredilo jedinstveno rješenje  $\phi$ .

Matematički, skup rješenja (3.1.3) sa fikisiranim  $\rho$ ,  $\mathcal{S}ol_{i,\rho}$  ce biti afini potprostor od  $\mathcal{V}$ . Ako je  $\rho$  promjenljivo, imaćemo ponovo vektorski potprostor rješenja,  $\mathcal{S}ol_i \subset \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$ , što znači da za  $(\phi_1, \rho_1), (\phi_2, \rho_2) \in \mathcal{S}ol_i$  i  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$  važi

$$(c_1\phi_1 + c_2\phi_2, c_1\rho_1 + c_2\rho_2) \in \mathcal{S}ol_i, \tag{3.1.4}$$

## 3.2 Primjeri u fizici i njihova interpretacija

---

tj. zakon superpozicije za polja i izvore se zadržava.

Linearna n-dimenzionalna talasna jednačina je oblika:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0, \text{ na } \mathbb{R}^n \times [0, \infty], \quad (3.1.5)$$

gdje  $\Delta u$  predstavlja Laplace-ov operator funkcije  $u$  na (Euklidskom) prostoru  $\mathbb{R}^n$ , tj.

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \nabla^2 u \quad (3.1.6)$$

Može se napisati kao (3.1.1), pri čemu je  $\mathcal{D} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ , D'Almbert-ov ili talasni operator na  $\mathbb{R}^n \times [0, \infty]$ .

## 3.2 Primjeri u fizici i njihova interpretacija

### 3.2.1 Harmonijski oscilator

Počinjemo sa primjerom u mehanici koji se takođe koristi kao jednostavan model za interakciju elektromagnetskog zračenja i materije (Lorencov model), koji će se kasnije razmatrati.

Harmonijski oscilator je sistem koji kada se pomjeri iz svog ravnotežnog položaja, doživi silu vraćanja  $F$  proporcionalnu pomaku  $x$ :

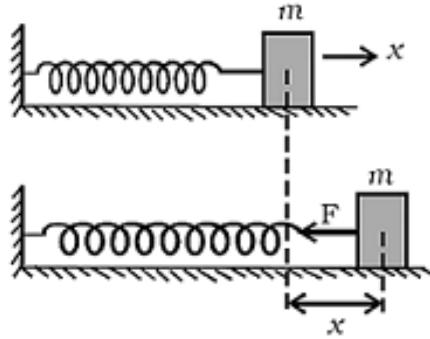
$$F = -kx \quad (3.2.1)$$

gdje je  $k$  pozitivna konstanta.

**3.2.1.1 Najjednostavniji slučaj.** Ako je  $F$  jedina sila koja djeluje na sistem, sistem se naziva jednostavan harmonijski oscilator. On prolazi kroz jednostavno harmonijsko kretanje, tj. sinusoidne oscilacije oko ravnotežne tačke (ekvilibrijuma) sa konstantnom amplitudom i konstantnom frekvencijom, koja ne zavisi od amplitude. Oscilator se sastoji od mase  $m$ , na koju djeluje sila  $F$ , koja vuče masu u smjeru tačke  $x = 0$  i zavisi samo od položaja mase  $x$  i konstante  $k$ . Što je prikazano na slici 3.1.

### 3.2 Primjeri u fizici i njihova interpretacija

---



Slika 3.1: Harmonijski oscilator

Prvo posmatramo jednačinu kretanja 1-dimenzionalnog harmonijskog oscilatora:

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \omega_0^2 x(t) = 0, \quad (3.2.2)$$

gdje je  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . Dobijamo je iz drugog Njutnovog zakona (odjeljak 2.2)

$$F = ma = m \frac{d^2}{dt^2}x = -kx. \quad (3.2.3)$$

Ovo je linearna, homogena jednačina u smislu koji se razmatra u prethodnom paragrafu (3.1), ako uzmemos  $\mathcal{V} = \mathcal{W} =$  prostoru glatkih funkcija  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . U slučaju (3.2.2) operator je

$$\mathcal{D} = \frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2. \quad (3.2.4)$$

Zakon superpozicije u ovom slučaju implicira da pored specijalnih rješenja  $\cos\omega_0 t$  i  $\sin\omega_0 t$

$$x(t) = A \cos\omega_0 t + B \sin\omega_0 t, \quad A, B \in \mathbb{C} \quad (3.2.5)$$

će biti takođe rješenje (3.2.2). Zapravo, rješenje (3.2.5) će biti opšte rješenje.

Ono se može napisati u obliku:

$$x(t) = C \cos(\omega_0 t - \varphi) \quad (3.2.6)$$

gdje je  $C = \sqrt{A^2 + B^2}$  amplituda a  $\varphi$  je faza.

### 3.2 Primjeri u fizici i njihova interpretacija

---

**3.2.1.2 Prigušeni harmonijski oscilator sa pogonskom silom.** Ako je prisutna i sila trenja proporcionalna brzini, harmonijski oscilator je opisan kao prigušeni harmonijski oscilator. Ako je prisutna spoljašnja vremenski zavisna sila, harmonijski oscilator je opisan kao forsiran oscilator.

Sljedeće što posmatramo je jednačina kretanja prigušenog harmonijskog oscilatora sa pogonskom silom:

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + 2\Gamma \frac{d}{dt}x(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t), \quad (3.2.7)$$

$\Gamma > 0$  je konstanta a  $f$  je pogonska sila. Ovo je linearna, nehomogena jednačina sa istim  $\mathcal{V}$  i  $\mathcal{W}$  kao i ranije i

$$\mathcal{D} = \frac{d^2}{dt^2} + 2\Gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2. \quad (3.2.8)$$

Ponovo, zakonom superpozicije (3.1.2) se može doći do opšteg rješenja jednačine (3.2.7) koristeći specijalna rješenja. Označimo sa  $G(t)$  specijalno rješenje jednačine (3.2.7), za  $f(t) = \delta(t)$ . Sa  $\delta(t)$  označavamo Dirakovu delta funkciju čija je fizička definicija

$$\int f(t)\delta(t)dt = f(0). \quad (3.2.9)$$

Njene vrijednosti su

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \quad (3.2.10)$$

S obzirom da je (3.2.7) invarijantna u odnosu vremensku translaciju,  $G(t-s)$  će takođe biti rješenje jednačine (3.2.7) u kojoj je  $f(t) = \delta(t-s)$ , za proizvoljno  $s$ . Tada se rješenje (3.2.7) za opšte  $f(t)$  može zapisati na sljedeći način

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)f(s)ds. \quad (3.2.11)$$

Grinova funkcija odgovarajućih jednačina je predstavljena sa  $G$ . Opšte rješenje jednačine (3.2.7) se dobija dodavanjem rješenja (3.2.11) opštem rješenju odgovarajuće homogene jednačine. Ovo posljednje nestaje kada  $t \rightarrow \infty$ . Ostaje da se pronađe Grinova funkcija za (3.2.7). Pošto je  $\delta(t) = 0$  za  $t > 0$  to će biti rješenje homogene jednačine za  $t > 0$  i izabranio  $G(t) = 0$  za  $t < 0$ . Odgovarajući početni uslovi su  $x(0) = 0$  i  $\dot{x}(0) = 1$ , budući da je tad drugi izvod po  $t$  samo  $\delta(t)$ . To daje rezultat:

$$G(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2}} e^{-t} \sin \sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2} t, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (3.2.12)$$

### 3.2 Primjeri u fizici i njihova interpretacija

---

u slučaju kada je  $\Gamma < \omega_0$ . Zbog nestajanja  $G(t-s)$  za  $s > t$  gornja granica integrala (3.2.11) može biti zamjenjena sa  $t$ .

Važan slučaj je pogonska harmonijska sila:

$$f(t) = Ae^{i\omega t}, A \in \mathbb{C}. \quad (3.2.13)$$

Umjesto izračunavanja integrala (3.2.11) u ovom slučaju lakše nam je da pretpostavimo oblik rješenja koji će se poslije pokazati kao tačan za određene vrijednosti konstanti. Uvrstimo

$$x(t) = Be^{i\omega t}, B \in \mathbb{C} \quad (3.2.14)$$

u jednačinu (3.2.7) koristeći

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = i\omega B e^{i\omega t} \quad (3.2.15)$$

i

$$\frac{d}{dt}x(t) = -\omega^2 B e^{i\omega t}. \quad (3.2.16)$$

Dobićemo da je

$$B = \frac{A}{-\omega^2 + 2i\omega\Gamma + \omega_0^2} \equiv Ar(\omega)e^{i\varphi(\omega)}, \quad (3.2.17)$$

pri čemu je

$$r(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\Gamma^2\omega^2}} \text{ amplituda, a} \quad (3.2.18)$$

$$tg\varphi = \frac{2\Gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}, \varphi \text{ je faza talasa.} \quad (3.2.19)$$

#### 3.2.2 Elektromagneti talasi

Predstavljaju prenošenje oscilacija električnog i magnetnog polja kroz vakuum ili neku sredinu preko nanelektrisanih čestica. Neki od primjera ove vrste linearnih talasa su radio talasi, svjetlosni talasi u optičkim vlaknima, elektricitet u različitim oblicima.

Fundamentalne jednačine elektromagnetizma su Maxwell-ove jednačine koje u diferencijalnom obliku mogu biti zapisane kao:

### 3.2 Primjeri u fizici i njihova interpretacija

---

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (3.2.20)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.2.21)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.2.22)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 J + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (3.2.23)$$

gdje je  $\mathbf{B}$  magnetno polje,  $\mathbf{E}$  električno polje,  $J$  gustina struje (current density),  $t$  vrijeme,  $\epsilon_0$  dielektrična permitivnost vakuum (permittivity of free space),  $\mu_0$  magnetska permeabilnost vakuum (permeability of free space),  $\rho$  je gustina električnog naielktrisanja (charge density).

Uzimajući da je  $J = 0$  i  $\rho = 0$  (u slučaju vakuma) a zatim primjenjujući rotor operator na (3.2.22) i koristeći identitet

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \quad (3.2.24)$$

dobićemo

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial(\nabla \times \mathbf{B})}{\partial t} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad (3.2.25)$$

zbog relacije (3.2.21) za  $\rho = 0$ :

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \nabla^2 \mathbf{E} \quad (3.2.26)$$

Slično, primjenjujući rotor operator na desnu i lijevu stranu jednačine (3.2.23) dobićemo:

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \nabla^2 \mathbf{B}. \quad (3.2.27)$$

Jednačine (3.2.26) i (3.2.27) su linearne električne i magnetne talasne jednačine, respektivno, dok je  $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$  brzina svjetlosti u vakuumu. Kao što vidimo one imaju poznati oblik linearne talasne jednačine (3.1.5). Za dalju diskusiju pogledati [22].

## 3.2 Primjeri u fizici i njihova interpretacija

---

### 3.2.3 Ravni talasi

Smatra se da ravni talas postoji daleko od svog izvora i svih fizičkih granica, tako da se nalazi unutar beskonačnog domena. Njegovo kretanje je opisano 1-dimenzionalnom linearном talasnom jednačinom, (3.1.5) za n=1 tj. :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \quad (3.2.28)$$

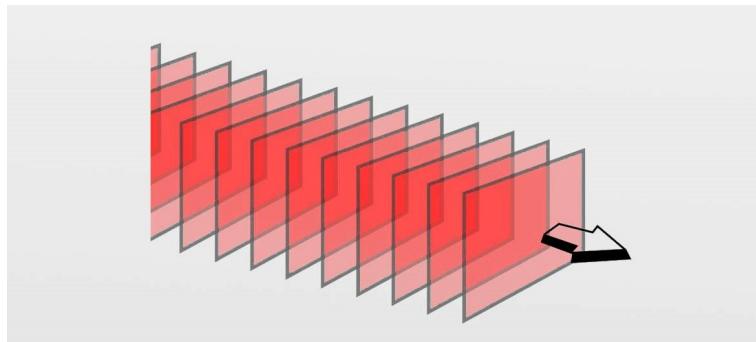
Ravni talas tj. rješenje jednačine (3.2.28) je

$$u = u_0 \cos(\omega t - kx + \phi), \quad (3.2.29)$$

$u_0$  je početni uslov,  $c = \frac{\omega}{k}$  brzina prostiranja talasa,  $\phi$  je faza talasa.

U praksi su pravi ravni talasi rijetki. Međutim, mnogi talasi su približno ravni u lokalizovanom regionu (lokalizovanoj oblasti) prostora. Na primjer, lokalizovani izvor kao što je antena proizvodi polje koje je približno talas daleko od antene u području dalekog polja.

Na slici 3.2 je prikazan talasni front ravnog talasa, tj. beskonačne paralelne ravni konstantne amplitudne normalne na vektor brzine faze.



Slika 3.2: Talasni front ravnog talasa

### 3.2.4 Šredingerova jednačina

Osnovna jednačina kvantne mehanike je Šredingerova jednačina (objavio je Ervin Šredinger 1926. godine). Zbog posjedovanja talasnih osobina ponašanje čestica ne može se opisati jednačinama klasične mehanike. Neophodno je bilo stvaranje nove mehanike koja će uzimati u obzir talasna svojsta čestica.

Šredingerova jednačina je linearna parcijalna diferencijalna jednačina za veličinu koja se zove talasna funkcija tj. kompleksna funkcija koordinata čestice i vremena za datu česticu. Ona je oblika:

### 3.2 Primjeri u fizici i njihova interpretacija

---

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi + V(x)\psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi , \quad (3.2.30)$$

$\hbar$  je redukovana Plankova konstanta,  $m$  masa čestice,  $V(x)$  je potencijalna energija čestice,  $\psi(x, t)$  talasna funkcija tj. funkcija stanja.

Bornova interpretacija talasne funkcije zahtjeva vjerovatnoću:  $\psi(x, t)$  nam ne govori koliko mnogo čestica ćemo naći u položaju  $x$  i vremenu  $t$ , već šta je vjerovatnoća da je nađemo pri  $x$  i vremenu  $t$ .

Fizička interpretacija, u kvantnoj mehanici, je da je kvadrat modula,  $|\psi(x, t)|^2$  gustina vjerovatnoće za nalaženje čestice u vremenu  $t$  i položaju  $x$ . Za prostor  $V$  to je:

$$Vjerovatnoća(čestica je u V pri vremenu t) = \int_V |\psi(x, t)|^2 dx \quad (3.2.31)$$

Šredingerova jednačina u kvantnoj mehanici ima istu ulogu kao drugi Njutnov zakon u klasičnoj dinamici.

Rješavanjem Šredingerove jednačine dobijaju se energija stanja u kojima se čestica može naći i talasne funkcije pomoću kojih se mogu izračunati vjerovatnoće nalaženja čestice u tim energetskim stanjima.

## 4 Nelinearni talasi

### 4.1 Matematički oblik i primjeri

Nelinearni talasi se opisuju rješenjima nelinearnih jednačina za koje zakon superpozicije (odjeljak 2.1) ne važi. To znači da je nelinearne talasne jednačine teže analizirati matematički i da ne postoji opšti analitički metod za njihovo rešavanje. Tako, nažalost, svaka pojedinačna nelinearna talasna jednačina mora biti tretirana zasebno. Detalje o sadržaju ovog poglavlja možete naći u [19] i [26].

Opšti oblik nelinearne talasne jednačine je sljedeći:

$$u_{tt} = [f(u)u_x]_x, \quad (4.1.1)$$

gdje je  $u_{tt}$  oznaka za  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  itd. Ova jednačina se može linearizovati u slučaju malih amplituda, tj. kada malo osciluje od ravnotežnog položaja. Neka rješenja su data u [19].

Primjeri nelinearnih jednačina su:

1. Korteweg-de Vries jednačina (KdV)

- oblik:

$$u_t + uu_x + bu_{xxx} = 0, \quad (4.1.2)$$

$b$  je proizvoljna konstanta

- primjena: različite oblasti fizike, nelinearne mehanike, takođe je pogodna za opisivanje talasa u plitkoj vodi
- specijalna rješenja: familija solitona

$$u(x, t) = 12bk^2 \operatorname{sech}^2 k(x - Vt), \quad (4.1.3)$$

gdje je  $k$  je talasni broj, a  $V$  brzina prostiranja solitona. Više detalja kao i izvođenje rješenja pogledati u [14].

2. Kubna Šredingerova jednačina (CSE)

## 4.2 Duffing oscilator

---

- oblik:

$$iu_t + u_{xx} + q|u|^2u = 0 \quad (4.1.4)$$

$q$  je proizvoljna konstanta, a indeksi predstavljaju parcijalne izvode funkcije  $u$  po  $t$  i  $x$

- primjena: različite oblasti fizike, nelinearne optike, plazma modela
- specijalna rješenja: 1-d soliton

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{\alpha}{q}} \operatorname{sech}(\sqrt{\alpha}(x - Vt)), \quad \alpha > 0, q > 0, \quad (4.1.5)$$

gdje je  $V$  brzina solitona, a  $\alpha$  i  $q$  su proizvoljne konstante.

## 4.2 Duffing oscilator

Duffing oscilator je nelinearna diferencijalna jednačina drugog reda:

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = \gamma \cos \omega t \quad (4.2.1)$$

gdje je nepoznata funkcija  $x = x(t)$  pomak u vremenu  $t$ ,  $\dot{x}$  prvi izvod funkcije po vremenu, tj. brzina,  $\ddot{x}$  drugi izvod funkcije po vremenu, tj. ubrzanje. Brojevi  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  i  $\omega$  su date konstante. U ovom dijelu se koristi literatura [24].

Duffing jednačina je primjer dinamičkog sistema koji pokazuje haotično ponašanje.

Jednačina opisuje kretanje nešto kompleksnijeg prigušenog oscilatora nego što je slučaj u jednostavnom harmonijskom kretanju (3.2.2) (što odgovara slučaju  $\beta = \delta = 0$ ).

Parametri u jednačini (4.2.1) imaju sljedeće značenje:

- $\delta$  kontroliše količinu prigušenja,
- $\alpha$  kontroliše linearu krutost, (tj. stepen do kojeg se objekat opire deformaciji kao odgovor na primjenjenu silu)
- $\beta$  kontroliše količinu nelinearnosti u povratnoj sili, ako je  $\beta = 0$  u pitanju je (3.2.7),

### 4.3 Rješenje preko perturbovanih nizova (redova)

---

- $\gamma$  je amplituda periodične pogonske sile, kada je  $\gamma = 0$  sistem (4.2.1) je bez pogonske sile,
- $\omega$  je ugaona frekvencija periodične pogonske sile.

### 4.3 Rješenje preko perturbovanih nizova (redova)

Posmatramo varijantu Duffing oscilatora sa malom kubnom nelinearnošću i harmonijskom pogonskom silom, koji smo definisali u prethodnom odjeljku. Opširnije o ovom odjeljku možete naći u literaturi [21].

Jednačina njegovog kretanja je

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \alpha x + \lambda x^3 = F e^{i(\omega t + \phi)} + CC, \quad (4.3.1)$$

gdje je  $x = x(t)$ ,  $CC$  je kompleksan konjugant izraza,  $i$  je imaginarna jedinica,  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\omega$  i  $\lambda$  su prozivoljne konstante kao i  $\phi$ .

Prepostavljamo da je  $\lambda x^3$  malo u poređenju sa drugim članovima iz (4.3.1) i tražimo rješenja koja su približna rješenjima odgovarajuće linearne jednačine sa  $\lambda = 0$ .

Teorija perturbacija je jedna od približnih metoda kojom se dobija aproksimativno rešenje zadatog problema. Metoda perturbacije koristi matematičke metode za nalaženje aproksimativnog rešenja i primjenjuje se kod problema koji ne mogu biti riješeni tačno ili je to previše komplikovano. Teorija perturbacija podrazumijeva da je dejstvo na sistem dovoljno malo da sistem zadrži svoje glavne karakteristike.

Metodi teorije perturbacija podrazumijevaju rješavanje pojednostavljenog problema, koji se bira tako da bude tačno rješiv. Zatim se posmatra kako se ponaša tačno rješenje jednostavnijeg problema pri maloj promjeni nekih parametara. Na ovakav način se dobija korekcija tačnog rješenja i taj metod se iterativno ponavlja.

Upravo je teorija perturbacija metoda koju ćemo koristiti u nastavku za rješavanje problema (4.3.1).

Prirodno nam se nameće da rješenje predstavimo preko perturbovanih nizova:

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t) \lambda^i, \quad (4.3.2)$$

gdje bi  $x_0$  bilo poznato rješenje tačno riješene jednačine (4.3.1) za  $\lambda = 0$ , dok su  $x_1, x_2\dots$  jednačine koje se iterativno mogu pronaći nekim postupkom, kako ih izračunavamo objasnićemo u nastavku teksta.

Zamjena ovog reda u jednačinu kretanja (4.3.1) i grupisanje članova sa istim stepenom  $\lambda$  na lijevoj strani jednakosti daje hijerarhiju linearnih, nehomogenih

### 4.3 Rješenje preko perturbovanih nizova (redova)

---

jednačina koje mogu biti eksplisitno rješene. Indukcijom se može pokazati da su sve funkcije zavisne od  $t$  koje su uključene u ovu hijerarhiju jednačina periodične funkcije sa frekvencijom  $\omega$ . Zato one mogu biti napisane preko Furijeovih redova:

$$x(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} x_{n,m} e^{im\omega t}. \quad (4.3.3)$$

Furijeovi redovi služe za približno predstavljanje periodičnih funkcija pomoću sume trigonometrijskih funkcija.

Pošto je  $x(t)$  realna funkcija, možemo da napišemo  $x_{n,-m} = \overline{x_{n,m}}$  i treba da razmatramo samo nenegativne  $n, m$ .

Naredno što radimo je eksplisitno izračunavanje prvih nekoliko izraza kako bismo vidjeli princip rada metoda perturbovanih nizova.

izraz ili jednačina uz  $\lambda^0$

Dovoljno je iskoristiti rezultat (3.2.17) linearog problema, koristeći malo drugačiju notaciju svojstvenu ovom odjeljku,

$$x_0(t) = x_{01} e^{i\omega t} + CC, \quad (4.3.4)$$

$$x_{01} = h(\omega) F e^{i\phi}, \quad (4.3.5)$$

$$h(\omega) \equiv \frac{1}{\alpha - \omega^2 + 2i\gamma\omega}. \quad (4.3.6)$$

izraz uz  $\lambda^1$

Prilikom zamjene reda (4.3.2) u jednačinu (4.3.1) u dijelu gdje je  $\lambda x^3$  imaćemo:

$$\lambda(x_0 + x_1\lambda + \dots)^3 = \lambda x_0^3 + \mathcal{O}(\lambda^2) = \lambda(x_{01}^3 e^{3i\omega t} + 3x_{01}^2 \overline{x_{01}} e^{i\omega t} + CC) + \mathcal{O}(\lambda^2). \quad (4.3.7)$$

Pošto je driving sila  $\mathcal{O}(\lambda^0), \mathcal{O}(\lambda^1)$  izrazi iz (4.3.1), tj. jednačina koja je uz  $\lambda^1$  je:

$$\ddot{x}_1 + 2\gamma\dot{x}_1 + \alpha x_1 = -x_0^3 = -(x_{01}^3 e^{3i\omega t} + 3x_{01}^2 \overline{x_{01}} e^{i\omega t} + CC), \quad (4.3.8)$$

$$\frac{1}{h(\omega)} x_{11} = -3F^3 e^{i\phi} h^2(\omega) \overline{h(\omega)}, \quad (4.3.9)$$

$$x_{11} = -3F^3 e^{i\phi} h^3(\omega) \overline{h(\omega)}, \quad (4.3.10)$$

### 4.3 Rješenje preko perturbovanih nizova (redova)

---

$$\frac{1}{h(3\omega)}x_{13} = -(Fe^{i\phi}h(\omega))^3, \quad (4.3.11)$$

$$x_{13} = -F^3 e^{3i\phi} h^3(\omega) h(3\omega). \quad (4.3.12)$$

izraz uz  $\lambda^2$

Na isti način, kao maloprije, dobijamo:

$$\ddot{x}_2 + 2\gamma\dot{x}_2 + \alpha x_2 = -3x_0^2 x_1 \quad (4.3.13)$$

$$= -3(x_{01}e^{i\omega t} + CC)^2(x_{11}e^{i\omega t} + x_{13}e^{3i\omega t} + CC) \quad (4.3.14)$$

$$\frac{1}{h(5\omega)}x_{25} = -3x_{01}^2 x_{13} \quad (4.3.15)$$

$$x_{25} = 3F^5 e^{5i\phi} h^5(\omega) h(3\omega) h(5\omega) \quad (4.3.16)$$

$$\dots \quad (4.3.17)$$

## 5 Kubna Šredingerova jednačina (CSE)

U ovom dijelu rada korišćena je literatura [21].

### 5.1 Uvod

Kao što smo već vidjeli u poglavlju o nelinearnim talasima (poglavlje 4) kubna Šredingerova jednačina je oblika (4.1.4).

CSE se pojavljuje, na primjer, u kontekstu samo-fokusiranja laserskih zraka u nelinearnim optičkim medijima. Opisuje nelinearnu korekciju linearne polarizacije i širenje određenih optičkih solitonu.

### 5.2 Izvođenje iz Duffing-Lorentz-ovog modela

Lorentz-ov model je jednostavan mehanički model za opisivanje linearne odgovora materije na elektromagnetne talase. Elektroni u komadu materije se smatraju klasičnim prigušenim harmoninijskim oscilatorima koji podliježu pogonskoj sili elektromagnetskog polja. Nastalo oscilujuće kretanje elektrona proizvodi electric polarization  $\mathbf{P}$  koji određuje dielectric displacement  $\mathbf{D}$  i dielektričku funkciju  $\varepsilon(\omega)$ . Iz ovoga je izvedena linearna talasna jednačina. Više o Lorentz-ovom modelu možete pronaći u [8].

U ovom dijelu ćemo ovaj model proširiti na model nelinearnog oscilatora sa kubnom nelinearnošću  $\lambda x^3$  (Duffing oscilator poglavlje 4) i posmatrati rezultate dobijene na osnovu tog poglavlja. Ovaj model zovemo “Duffing-Lorentz-ov model”.

Počinjemo od makroskopskih Maxwell-ovih jednačina koje su varijacije jednačina (3.2.20), (3.2.21), (3.2.22) i (3.2.23), predstavljenih u dijelu 3 o elektromagnetnim talasima, sa nešto drugaćijim oznakama.

Zbog preglednosti i česte upotrebe u ovom odjeljku, zapisaćemo ih ponovo:

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}, \quad (5.2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (5.2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0 \quad (5.2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5.2.4)$$

Koristiće nam i sljedeće relacije:

## 5.2 Izvodenje iz Duffing-Lorentz-ovog modela

---

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad (5.2.5)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}(\mathbf{E}). \quad (5.2.6)$$

Primjenjujući rotor operator na obje strane jednačine (5.2.1) i koristeći (5.2.3), (5.2.4) i (5.2.6) kao i osobinu (3.2.24) dobićemo:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B} \quad (5.2.7)$$

$$= -\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{D} \quad (5.2.8)$$

$$= -\mu_0 (\epsilon_0 \ddot{\mathbf{E}} + \ddot{\mathbf{P}}). \quad (5.2.9)$$

Zatim prepostavljamo specijalnu situaciju gdje su polja  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{P}$  orijentisana u  $z$ - pravcu i zavise samo od  $x$ ,  $y$  i  $t$ . To ćemo zapisati:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E(x, y, t) \end{pmatrix}, \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ P(x, y, t) \end{pmatrix} \quad (5.2.10)$$

Na osnovu  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  i

$$\Delta \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_{xx} + E_{yy} \end{pmatrix} \quad (5.2.11)$$

(5.2.9) se svodi na skalarnu jednačinu

$$E_{xx} + E_{yy} = -\mu_0 (\epsilon_0 \ddot{\mathbf{E}} + \ddot{\mathbf{P}}). \quad (5.2.12)$$

Duffing-Lorentz-ov model definisan je jednačinom kretanja za elektron mase  $m$  i naelektrisanja  $q$ ,

$$m\ddot{z} + 2\Gamma\dot{z} + m\alpha z + \Lambda z^3 = q\tilde{E}e^{i\omega t} + CC \quad (5.2.13)$$

Dijeljenje jednačine (5.2.13) masom elektrona,  $m$  i uvođenje novih parametara daje joj oblik jednačine kretanja koju smo već razmatrali, vidi (4.3.1).

$$\ddot{z} + 2\gamma\dot{z} + \alpha z + \lambda z^3 = F e^{i\omega t} e^{\phi t} + CC. \quad (5.2.14)$$

Prema (4.3.4) - (4.3.12) nelinearani odgovor na harmonijsku pogonsku silu tj. rješenje jednačine (5.2.14) je

## 5.2 Izvodenje iz Duffing-Lorentz-ovog modela

---

$$z(t) = (Fe^{i\phi}h(\omega)e^{i\omega t} - 3\lambda F^3 e^{i\phi} h^2(\omega)\overline{h(\omega)}e^{i\omega t} \\ - \lambda F^3 e^{3i\phi} h^3(\omega)h(3\omega)e^{3i\omega t}) + CC + \mathcal{O}(\lambda^2). \quad (5.2.15)$$

To dovodi do gustine polarizacije:

$$P = qNz(t), \quad (5.2.16)$$

gdje je  $N$  gustina elektrona.

U aproksimaciji prepostavljamo da postoje samo Furijeove komponente za  $E$  i  $P$  sa frekvencijama  $\omega$  i  $3\omega$ , tj. imamo:

$$E = (E_1(x, y)e^{i\omega t} + E_3(x, y)e^{3i\omega t}) + CC, \quad (5.2.17)$$

$$P = (P_1(x, y)e^{i\omega t} + P_3(x, y)e^{3i\omega t}) + CC. \quad (5.2.18)$$

Tada (5.2.12) dobija obilk:

$$E_{1xx} + E_{1yy} = \mu_0(\epsilon_0 E_1 + P_1)(-\omega^2), \quad (5.2.19)$$

$$E_{3xx} + E_{3yy} = \mu_0(\epsilon_0 E_3 + P_3)(-9\omega^2). \quad (5.2.20)$$

Koristeći identitet  $\frac{qE_1}{m} = Fe^{i\phi}$  iz (5.2.15) i (5.2.16) imamo:

$$P_1 = qN \left( \frac{qE_1}{m} h(\omega) - 3\lambda \left( \frac{q}{m} \right)^3 E_1 |E_1|^2 h^2(\omega) \overline{h(\omega)} \right) \quad (5.2.21)$$

$$\equiv \frac{1}{\mu_0} \left( n_1(\omega) E_1 + n_3(\omega) E_1 |E_1|^2 \right), \quad (5.2.22)$$

$$P_3 = qN \left( -\lambda \left( \frac{qE_1}{m} \right)^3 h^3(\omega) h(3\omega) + \frac{qE_3}{m} h(3\omega) \right). \quad (5.2.23)$$

Ako (5.2.22) stavimo u (5.2.19) dobićemo nelinearnu talasnu jednačinu:

$$E_{1xx} + E_{1yy} = -\omega^2 \left( (\epsilon_0 \mu_0 + n_1(\omega)) E_1 - n_3(\omega) E_1 |E_1|^2 \right). \quad (5.2.24)$$

Ako je njeno rješenje zamjenjeno u (5.2.23), (5.2.20) predstavlja oblik linearne nehomogene talasne jednačine za  $3\omega$  komponentu elektromagnetskog talasa. Nećemo dalje ovo razmatrati.

## 5.2 Izvodenje iz Duffing-Lorentz-ovog modela

---

Vraćajući se na (5.2.24) napravićemo da je ravan talas (vidi odjeljak 3) u pravcu  $x$ :

$$E_1(x, y) = \psi(x, y)e^{-ikx} \quad (5.2.25)$$

i dobiti:

$$E_{1x} = (\psi_x - ik\psi)e^{-ikx}, \quad (5.2.26)$$

$$E_{1xx} = (\psi_{xx} - 2ik\psi_x - k^2\psi)e^{-ikx}, \quad (5.2.27)$$

$$E_{1yy} = \psi_{yy}e^{-ikx}. \quad (5.2.28)$$

Tada (5.2.24) dobija oblik:

$$(\psi_{xx} + \psi_{yy} - 2ik\psi_x - k^2\psi)e^{-ikx} \quad (5.2.29)$$

$$= \omega^2(\epsilon_0\mu_0 + n_1(\omega))\psi e^{-ikx} - \omega^2n_3(\omega)\psi|\psi|^2e^{-ikx}. \quad (5.2.30)$$

Upotreboom

$$k^2 = \epsilon_0\mu_0\omega^2 \quad (5.2.31)$$

i

$$\psi_{xx} \ll \psi_{yy} \quad (5.2.32)$$

stizemo do talasne jednačine

$$-2ik\psi_x + \psi_{yy} + \omega^2n_1(\omega)\psi + \omega^2n_3(\omega)|\psi|^2\psi = 0. \quad (5.2.33)$$

Izraz  $\omega^2n_1(\omega)\psi$  može da nestane transformacijom

$$\Psi = \psi e^{-icx}, \quad (5.2.34)$$

za izabrano  $2kc = \omega^2n_1(\omega)$ .

Tako konačno stizemo do kubne Šredingerove jednačine (CSE) oblika:

$$-2ik\Psi_x + \Psi_{yy} + \omega^2n_3(\omega)|\Psi|^2\Psi = 0 \quad (5.2.35)$$

koja je varijacija jednačine (4.1.4) tj. može biti zapisana na sljedeći način:

### 5.3 Svojstva CSE

---

$$-i\Psi_t + \frac{1}{2}\Psi_{xx} + \sigma|\Psi|^2\Psi = 0. \quad (5.2.36)$$

### 5.3 Svojstva CSE

U nastavku ćemo definisati a zatim i dokazati neke od osnovnih svojstava kubne Šredingerove jednačine (5.2.36).

Neka  $\mathcal{CSE}$  označava skup rješenja (5.2.36) u zavisnosti od graničnih ili početnih uslova. Tada za njega važe sljedeće osobine:

1. Linearnost

$$\Psi \in \mathcal{CSE} \text{ i } \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow e^{i\beta}\Psi \in \mathcal{CSE}. \quad (5.3.1)$$

2. Invarijantnost u vremenu

$$\Psi \in \mathcal{CSE} \text{ i } \phi(x, t) = \overline{\Psi(x, -t)} \Rightarrow \phi \in \mathcal{CSE}. \quad (5.3.2)$$

3. Skaliranje

$$\Psi \in \mathcal{CSE} \text{ i } \phi(x, t) = \alpha\Psi(\alpha x, \alpha^2 t), \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \phi \in \mathcal{CSE} \quad (5.3.3)$$

4. Translacija

$$\Psi \in \mathcal{CSE} \text{ i } \phi(x, t) = \Psi(x + a, t + \tau), a, \tau \in \mathbb{R} \Rightarrow \phi \in \mathcal{CSE} \quad (5.3.4)$$

5. Galilejevska invarijantnost

$$\Psi \in \mathcal{CSE} \text{ i } \phi(x, t) = e^{-\frac{i}{2}v^2t + ivx}\Psi(x - vt, t), v \in \mathbb{R} \Rightarrow \phi \in \mathcal{CSE} \quad (5.3.5)$$

Dokaz :

1. Očito, osobina (5.3.1) važi jer množenje  $\Psi$  sa  $e^{i\beta}$  ima isti rezultat kao i isto množenje cijele kubne Šredingerove jednačine.

### 5.3 Svojstva CSE

---

2. Konjugovanjem jednačine (5.2.36) i korišćenjem  $-i\bar{\Psi}_t = i\phi t$  osobina (5.3.2) važi.
3. Da bismo dokazali svojstvo skaliranja uzmimo  $\phi(x, t) = \gamma\Psi(\alpha x, \beta t)$  i razmotrimo sljedeće

$$\phi_t(x, t) = \beta\gamma\Psi_t(\alpha x, \beta t), \quad (5.3.6)$$

$$\phi_{xx}(x, t) = \alpha^2\gamma\Psi_{xx}(\alpha x, \beta t), \quad (5.3.7)$$

$$|\phi|^2\phi = \gamma^2\gamma|\Psi(\alpha x, \beta t)|^2\Psi(\alpha x, \beta t). \quad (5.3.8)$$

Sva tri prethodna izraza zadovoljavaju jednačinu (5.2.36) za  $\beta = \alpha^2$  i  $\alpha = \gamma$ .

4. Očigledno je da translacija važi jer koeficijenti CSE (5.2.36) ne zavise od  $x$  niti  $t$ .

5. Stavimo:

$$\phi(x, t) = e^{(i\lambda t + ikx)}\Psi(x - vt, t) \equiv \mathbf{e}\Psi \quad (5.3.9)$$

zatim nađimo izvode

$$\phi_t = i\lambda\mathbf{e}\Psi + \mathbf{e}\Psi_t - v\mathbf{e}\Psi_x, \quad (5.3.10)$$

$$\phi_x = ik\mathbf{e}\Psi + \mathbf{e}\Psi_x, \quad (5.3.11)$$

$$\Psi_{xx} = -k^2\mathbf{e}\Psi + 2ik\mathbf{e}\Psi_x + \mathbf{e}\Psi_{xx}. \quad (5.3.12)$$

Tada

$$\begin{aligned} i\phi_t + \frac{1}{2}\phi_{xx} + \sigma|\phi|^2\phi &= -iv\mathbf{e}\Psi_x + ik\mathbf{e}\Psi_x - \\ &- \mathbf{e}\Psi - \frac{1}{2}k^2\mathbf{e}\Psi + \mathbf{e}\left(i\Psi_t + \frac{1}{2}\Psi_{xx} + \sigma|\Psi|^2\Psi\right). \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

Vidimo da  $\phi \in \mathcal{CSE} \leftrightarrow \Psi \in \mathcal{CSE}$  ako prva četiri člana izraza (5.3.13) nestanu. To se postiže za  $v = k$  i  $\lambda = -\frac{1}{2}k^2$  i time je dokazana osobina galilejevske invarijantnosti.

## 5.4 1- solitonsko rješenje CSE

---

### 5.4 1- solitonsko rješenje CSE

Tačan termin za talas koji je lokalizovan i zadržava svoju formu tokom dužeg vremenskog perioda je: solitarni talas. Međutim, soliton je usamljeni talas koji ima dodatnu osobinu da drugi solitoni mogu da prođu kroz njega bez promjene oblika. Upravo su solitoni rješenja kubne Šredingerove jednačine koja ćemo tražiti u nastavku.

Kako bismo izveli specijalno rješenje kubne Šredingerove jednačine (5.2.36) koristićemo pretpostavku (ansatz):

$$\psi(x, t) = \phi(x)e^{i\alpha t}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (5.4.1)$$

Uvrstivši (5.4.1) u jednačinu (5.2.36) dobićemo:

$$-\alpha\phi + \frac{1}{2}\phi_{xx} + \sigma\phi^3 = 0. \quad (5.4.2)$$

Pri čemu smo koristili:

$$\psi_t = \phi(x)i\alpha e^{i\alpha t},$$

$$\psi_{xx} = \phi_{xx}e^{i\alpha t}$$

i

$$|\psi|^2\psi = |\phi|^2\phi e^{3i\alpha t}.$$

Zatim ćemo (5.4.2) pomnožiti sa  $4\phi_x$

$$-4\alpha\phi\phi_x + 2\phi_x\phi_{xx} + 4\sigma\phi^3\phi_x = 0,$$

integraliti po  $x$  i dobiti sljedeću jednačinu:

$$\phi_x^2 - 2\alpha\phi^2 + \sigma\phi^4 = C, \quad C \text{ je konstanta.} \quad (5.4.3)$$

Integrale smo rješavali parcijalnom integracijom:

$$\int \phi\phi_x dx = \phi^2 - \int \phi_x\phi dx + C_1 \Rightarrow \int \phi\phi_x dx = \frac{\phi^2}{2} + C_1,$$

$$\int \phi_x\phi_{xx} dx = \phi_x^2 - \int \phi_x\phi_{xx} dx + C_2 \Rightarrow \int \phi_x\phi_{xx} dx = \frac{\phi_x^2}{2} + C_2.$$

## 5.4 1- solitonsko rješenje CSE

---

$$\int \phi^3 \phi_x dx = \phi^4 - 3 \int \phi^3 \phi_x dx + C_3 \Rightarrow \int \phi^3 \phi_x dx = \frac{\phi^4}{4} + C_3.$$

Dobijena jednačina (5.4.3) je obična diferencijalna jednačina koju ćemo rješavati metodom razdvajanja promjenljivih:

$$\phi_x = \sqrt{2\alpha\phi^2 - \sigma\phi^4 + C} \quad (5.4.4)$$

tj.

$$\frac{d\phi}{dx} = \sqrt{2\alpha\phi^2 - \sigma\phi^4 + C} \quad (5.4.5)$$

$$\frac{d\phi}{\sqrt{C - \sigma\phi^4 + 2\alpha\phi^2}} = dx \quad (5.4.6)$$

Još ostaje da integralimo:

$$\int \frac{d\phi}{\sqrt{C - \sigma\phi^4 + 2\alpha\phi^2}} = \int dx. \quad (5.4.7)$$

Na desnoj strani jednakosti (5.4.7) je integral koji se ne može riješiti elementarnim funkcijama za nenula  $C$ , shodno tome solitone dobijamo za  $C = 0$ .

Umjesto rješavanja integrala (5.4.7) iskoristićemo transformaciju  $\phi(x) = f^{-1}(x)$ . Kako je  $\phi_x = -f^{-2}f_x$  diferencijalna jednačina (5.4.3) se transformiše u

$$f^{-4}f_x^2 - 2\alpha f^{-2} + \sigma f^{-4} = 0. \quad (5.4.8)$$

Sljedeće što radimo sa jednačinom (5.4.8) je množenje sa  $f^4$ , diferenciranje po  $x$  a zatim i djeljenje sa  $2f_x$ :

$$f_x^2 - 2\alpha f^2 + \sigma = 0, \quad (5.4.9)$$

$$2f_x - 4\alpha f f_x = 0, \quad (5.4.10)$$

$$f_{xx} - 2\alpha f = 0. \quad (5.4.11)$$

Opšte rješenje jednačine (5.4.11), koja je ista kao jednačina (3.2.2), je:

$$f(x) = A \cos(i\sqrt{2\alpha}(x - x_0)) = A \cosh(\sqrt{2\alpha}(x - x_0)), \quad (5.4.12)$$

## 5.4 1- solitonsko rješenje CSE

---

gdje je  $x_0$  početni uslov, a koristili smo relaciju  $\cos(ix) = \cosh(x)$ .

Bez umanjenja opštosti možemo uzeti  $x_0 = 0$  jer je CSE invarijantna u odnosu na translaciju u pravcu  $x$ - ose (osobina 4).

Još moramo da provjerimo da li  $(5.4.12)$  za  $x_0 = 0$  zadovoljava jednačinu  $(5.4.9)$ , za šta će nam biti potreban izvod funkcije  $f$  po  $x$ . To jeste

$$f_x = A\sqrt{2\alpha}\sinh(\sqrt{2\alpha}x). \quad (5.4.13)$$

$$-f_x^2 + 2\alpha f^2 = 2\alpha A^2(\cosh^2(\sqrt{2\alpha}x) - \sinh^2(\sqrt{2\alpha}x)) = 2\alpha A^2 = \sigma. \quad (5.4.14)$$

Koristili smo da je  $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ .

Stoga, parametri  $A, \alpha, \sigma$  ne mogu biti izabrani nezavisno, već moraju zadowoljiti

$$A = \sqrt{\frac{\sigma}{2\alpha}}. \quad (5.4.15)$$

Gornja transformacija  $\phi(x) = f^{-1}(x)$  i  $(5.4.1)$  daju:

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{\sigma}{2\alpha}} \operatorname{sech}(\sqrt{2\alpha}x)e^{i\alpha t}. \quad (5.4.16)$$

Takođe, iskoristili smo i relaciju  $\operatorname{sech}(x) = \cosh^{-1}(x)$ .

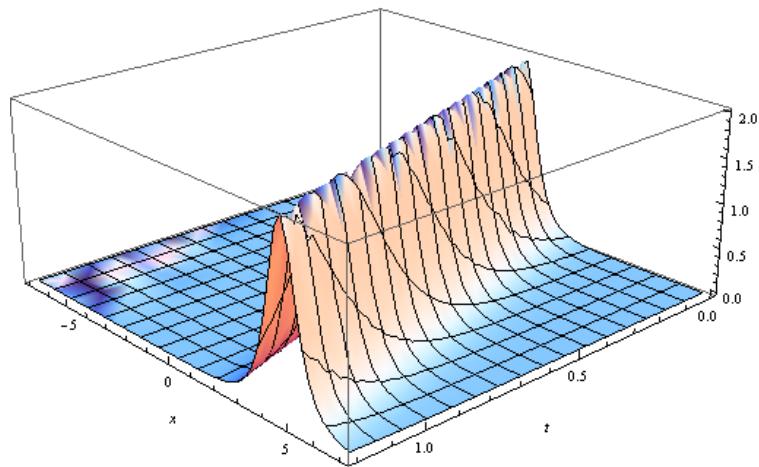
Konačno, primjenjujemo galilejsku invarijantnost  $(5.3.5)$  na  $(5.4.16)$ :

$$\Psi(x, t) = \sqrt{\frac{2\alpha}{\sigma}} e^{(i(\alpha - \frac{1}{2}v^2)t + ivx)} \operatorname{sech}(\sqrt{2\alpha}(x - vt)). \quad (5.4.17)$$

Ovo predstavlja soliton koji se kreće brzinom  $v$  u pravcu  $x$  ose bez promjene njegovog oblika, što možemo vidjeti na slici  $5.2$ . Isto to samo u 3 dimenzije možemo vidjeti na slici  $5.1$ .

#### 5.4 1- solitonsko rješenje CSE

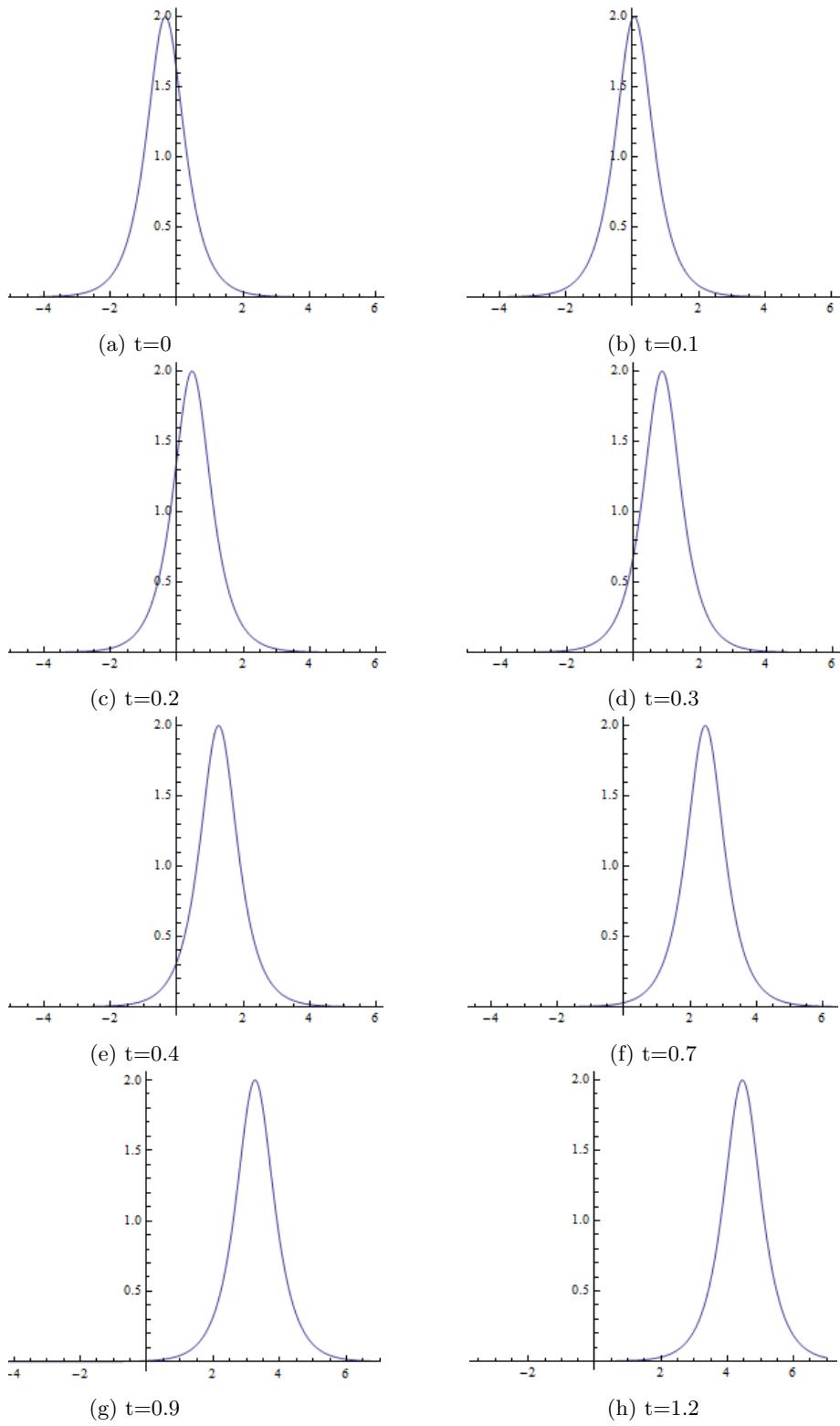
---



Slika 5.1: 1-solitonsko rješenje u 3-dimenziji

#### 5.4 1- solitonsko rješenje CSE

---



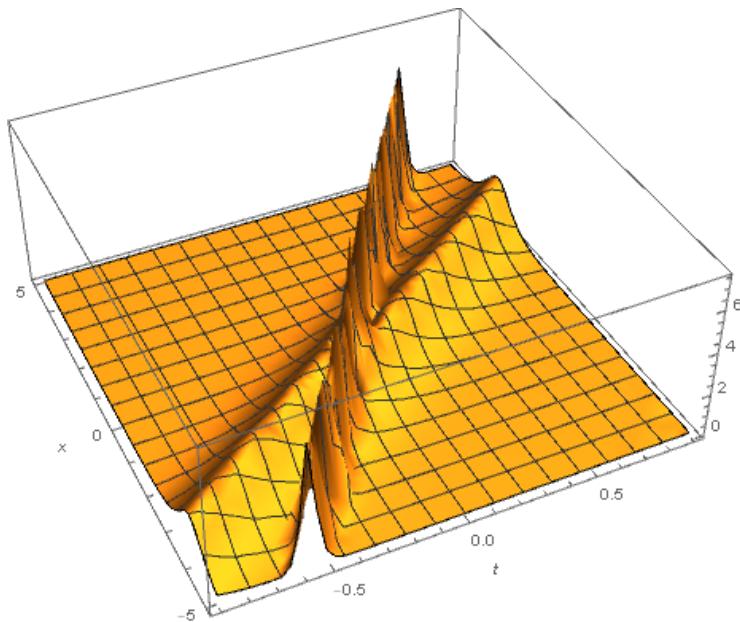
Slika 5.2: Kretanje 1-solitona

## 5.5 Odnos 2 solitona

---

### 5.5 Odnos 2 solitona

Glavni rezultat je da dva solitona koja se približavaju, interaguju a onda se razdvajaju bez promjene oblika. To će biti prikazano na slici 5.3.

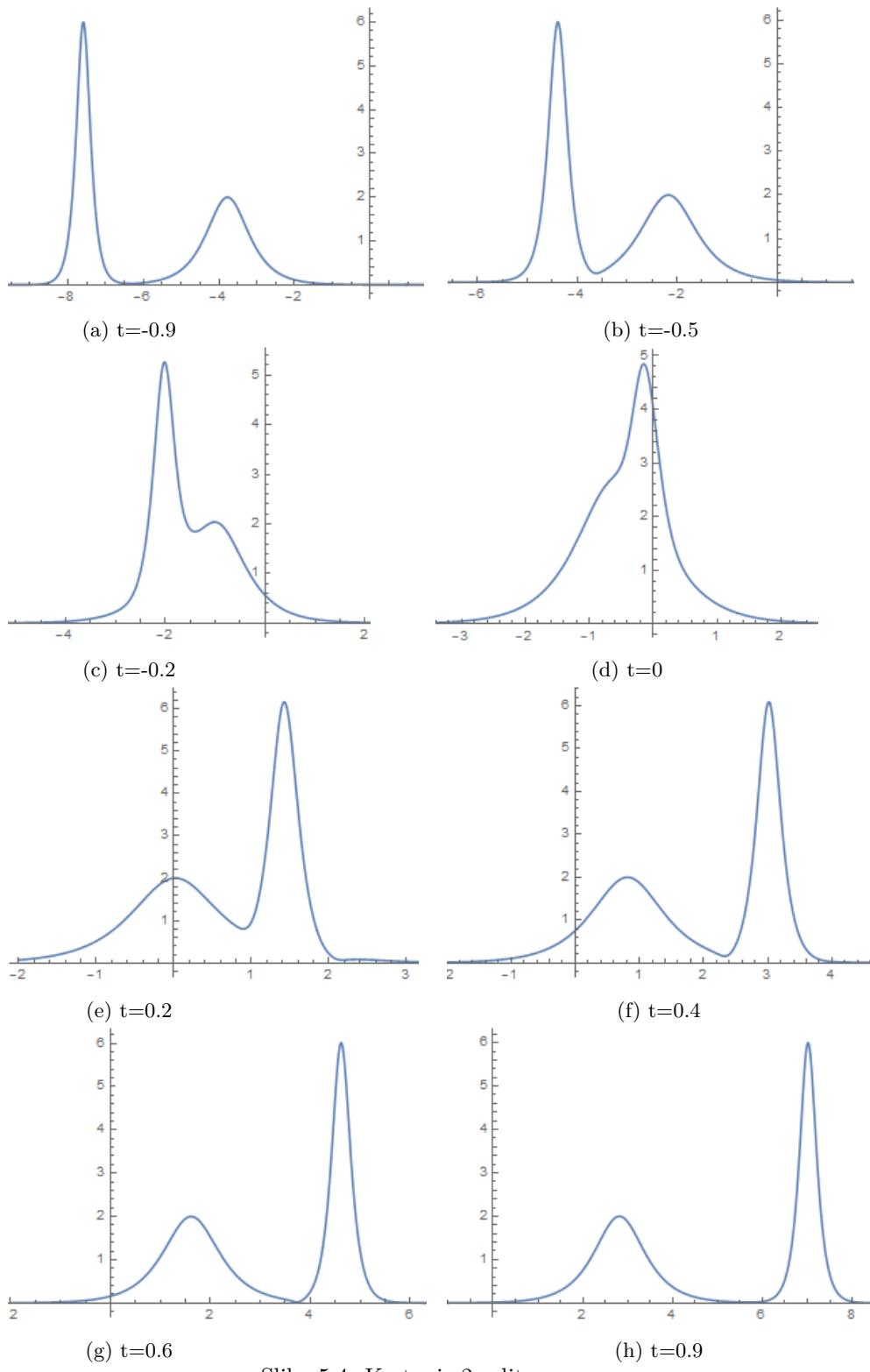


Slika 5.3: Interakcija 2 solitona

Interakcija je prikazana i u 2 dimenzije na slici 5.4.

## 5.5 Odnos 2 solitona

---



Slika 5.4: Kretanje 2-solitona

## 6 Metode za rješavanje nelinearnih jednačina

Kao što smo već spomenuli za nelinearne talasne jednačine zakon superpozicije ne važi, samim tim ih je i teže rješavati.

Ne postoje opšte metode koje garantuju rješenja nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina. Ipak, neki problemi se mogu riješiti pristupom "trial and error". Ovaj metod "hit-and-miss" nastoji da rješava problem tražeći sličnosti u formi njegove jednačine i neke sa već poznatim rješenjem. Ako ona postoji, ovaj pristup može dati korisne rezultate.

U nastavku ćemo prikazati nekoliko metoda rješavanja koje mogu pomoći u određivanju rješenja nelinearne talasne jednačine.

### 6.1 Backlund-ova transformacija

Metoda koja se koristi za pronalaženje rešenja nelinearne parcijalne diferencijalne jednačine ili iz poznatog, partikularnog rješenja za istu jednačinu ili iz rješenja za drugu jednačinu. Ovo može olakšati pronalaženje složenijih rješenja iz jednostavnog rješenja, npr. u slučaju solitona ovom transformacijom se može generisati rješenje sa n-solitonu znajući jedan soliton. Backlund-ova transformacija je uglavnom sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina koji se odnosi na dvije funkcije od kojih je jedna rješenje posmatranog problema a druga dobijena rješavanjem sistema, tj. transformacijom će takođe zadovoljavati nelinearnu jednačinu. To je matematički zapisano u nastavku. Većina sadržaja ovog odjeljka se nalazi u [13], [18] i [19].

Neka je  $\omega = \omega(x, y)$  rješenje jednačine:

$$F_1\left(x, y, \omega, \omega^2, \dots, \omega^n, \frac{\partial \omega}{\partial x}, \frac{\partial \omega}{\partial y}, \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right) = 0, \quad (6.1.1)$$

a  $u = u(x, y)$  rješenje jednačine:

$$F_2\left(x, y, u, u^2, \dots, u^n, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0, \quad (6.1.2)$$

Za jednačine (6.1.1) i (6.1.2) kažemo da su povezane Backlund-ovom transformacijom

$$\Phi_1\left(x, y, \omega, \frac{\partial \omega}{\partial x}, \frac{\partial \omega}{\partial y}, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \quad (6.1.3)$$

$$\Phi_2\left(x, y, \omega, \frac{\partial \omega}{\partial x}, \frac{\partial \omega}{\partial y}, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,$$

## 6.2 Inverzna metoda rasipanja

---

ako kompatibilnost para  $(6.1.1)$ ,  $(6.1.3)$  implicira jednačinu  $(6.1.2)$  i kompatibilnost para  $(6.1.2)$ ,  $(6.1.3)$  implicira  $(6.1.1)$ . Ako za neko specifično rješenje  $u = u(x, y)$  jednačine  $(6.1.2)$ , uspijemo riješiti  $(6.1.3)$  i dobiti  $\omega = \omega(x, y)$ , ova funkcija  $\omega = \omega(x, y)$  će biti rješenje jednačine  $(6.1.1)$ .

## 6.2 Inverzna metoda rasipanja

Koristi se za nelinearne talasne jednačine pod određenim uslovima, kao što su granični i / ili početni uslovi. Ako su podaci koji se odnose na raspršeni talas (biće definisani u posebnom odjeljku o ovoj metodi) poznati, onda je moguće iz ovih podataka utvrditi osnovni potencijal rasipanja. Problem rekonstrukcije potencijala iz podataka rasipanja naziva se inverzna transformacija rasipanja. Inverzna transformacija rasipanja je nelinearni analog Furijeove transformacije koja se koristi za rješavanje linearnih problema. Ovo svojstvo dozvoljava određenim nelinearnim problemima da budu tretirani linearnim metodama. Postupak ćemo detaljnije objasniti u posebnom odjeljku o metodi, kao i primjenu istog na kubnu Šredingerovu jednačinu.

## 6.3 Lax-ovi parovi

Posmatrajmo jednačinu:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = F(\omega), \quad (6.3.1)$$

$F(\omega)$  zavisi od funkcije  $\omega$ , koja nije gore pomenuta ugaona frekvencija, i njenih izvoda po  $x$ .

Osnovna ideja je da predstavimo jednačinu  $(6.3.1)$  u obliku:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = LM - ML. \quad (6.3.2)$$

gdje su  $L$  i  $M$  linearni diferencijalni operatori (nazivaju se Lax-ov par) čiji koeficijenti zavise od  $\omega$  i njenih izvoda po  $x$ , nikako po  $t$ . Desna strana jednakosti  $(6.3.2)$  je komutator operatora  $L$  i  $M$ . Označićemo ga sa  $[L, M]$ .

Pretpostavimo da operatori  $L$  i  $M$  zadovoljavaju jednačinu  $(6.3.2)$ . I posmatrajmo dvije pomoćne linearne diferencijalne jednačine. Prva odgovara karakterističnoj jednačini i sadrži samo izvode po  $x$ :

$$L\varphi = \lambda\varphi. \quad (6.3.3)$$

Ovdje se  $t$  pojavljuje implicitno, kroz funkciju  $\omega$  i označen je kao parametar.

Druga pomoćna jednačina je:

### 6.3 Lax-ovi parovi

---

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -M\varphi. \quad (6.3.4)$$

jednačina operatora (6.3.2) može se smatrati uslovom kompatibilnosti za jednačine (6.3.3) i (6.3.4), pod uslovom da je karakteristični korjen  $\lambda$  nezavisan od vremena  $t$ . Zaista, diferenciranjem (6.3.3) u odnosu na  $t$ , dobijamo  $L_t\varphi + L\varphi_t = \lambda\varphi_t$ . Zamjenjujući (6.3.4) u ovaj izraz, dobijamo  $L_t\varphi - LM\varphi = -\lambda M\varphi$ . Zatim, uzimajući u obzir relacije  $\lambda M\varphi = M(\lambda\varphi)$  i  $\lambda\varphi = L\varphi$  stižemo do jednačine  $L_t\varphi = LM\varphi - ML\varphi$ , što je ekvivalentno (6.3.2).

Gore navedena procedura pokazuje kako analiza početne nelinearne jednačine (6.3.1) može biti svedena na dvije jednostavnije linearne jednačine (6.3.3) i (6.3.4).

**Primjer 1.** U ovom primjeru pokazaćemo kako izgledaju Lax-ov parovi za Korteweg-de Vries-ovu jednačinu

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 6w \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (6.3.5)$$

Definišu se na sljedeći način:

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - w, \quad M = 4 \frac{\partial^3}{\partial x^3} - 6w \frac{\partial}{\partial x} - 3 \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (6.3.6)$$

što ćemo i provjeriti u nastavku

$$\begin{aligned} LM(\varphi) &= 4\varphi_{xxxxx} - 10w\varphi_{xxx} - 15w_x\varphi_{xx} + (6w^2 - 12w_{xx})\varphi_x + (3ww_x - 3w_{xxx})\varphi, \\ ML(\varphi) &= 4\varphi_{xxxxx} - 10w\varphi_{xxx} - 15w_x\varphi_{xx} + (6w^2 - 12w_{xx})\varphi_x + (9ww_x - 4w_{xxx})\varphi, \\ LM(\varphi) - ML(\varphi) &= (w_{xxx} - 6ww_x)\varphi, \end{aligned} \quad (6.3.7)$$

gdje je  $\varphi(x)$  proizvoljna funkcija.

Iz (6.3.6) i (6.3.7) slijedi da je

$$L_t = -w_t,$$

$$LM - ML = w_{xxx} - 6ww_x.$$

Zamjenom ovih izraza u (6.3.2), dolazimo do Korteweg-de Vries-ove jednačine (6.3.5).

Za više detalja o sadržaju ovog odjeljka preporučujemo [I6] i [I9].

## 7 Inverzna metoda rasipanja (IST)

U ovom poglavlju predstavljamo metodu konstruisanja određenih tačnih rješenja jednačine

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2u = 0. \quad (7.0.1)$$

Ideja koja stoji iza naše metode je slična onoj koja se koristi za generisanje tačnih rešenja za Korteweg-de Vriesovu jednačinu [7]. Teoreme i pojmove navedene u ovom poglavlju čitalac može da pronađe u knjigama [5] i [6].

Na početku posmatrajmo Zakharov - Shabat sistem

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -i\lambda & q(x) \\ -q(x) & i\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (7.0.2)$$

gdje ' označava izvod po  $x$ ,  $\lambda$  je spektralni parametar koji ima kompleksnu vrijednost,  $q$  je integrabilni potencijal, takođe kompleksne vrijednosti, a  $\bar{\phantom{x}}$  označava kompleksnu konjugaciju. Postoje dva linearno nezavisna vektorska rešenja za (7.0.2) označena sa  $\psi(\lambda, x)$  i  $\phi(\lambda, x)$ , koja su obično poznata kao Jost rješenja i jedinstveno se dobijaju nametanjem odgovarajućih asimptotskih uslova.

$$\psi(\lambda, x) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{i\lambda x} \end{bmatrix} + o(1), \quad x \rightarrow +\infty, \quad (7.0.3)$$

$$\phi(\lambda, x) = \begin{bmatrix} e^{-i\lambda x} \\ 0 \end{bmatrix} + o(1), \quad x \rightarrow -\infty,$$

Koeficijent transmisije  $T$ , koeficijent lijeve refleksije  $L$  i koeficijent desne refleksije  $R$  se zatim dobijaju:

$$\psi(\lambda, x) = \begin{bmatrix} e^{-i\lambda x} \frac{L(\lambda)}{T(\lambda)} \\ \frac{e^{i\lambda x}}{T(\lambda)} \end{bmatrix} + o(1), \quad x \rightarrow -\infty, \quad (7.0.4)$$

$$\phi(\lambda, x) = \begin{bmatrix} \frac{e^{-i\lambda x}}{T(\lambda)} \\ e^{i\lambda x} \frac{R(\lambda)}{T(\lambda)} \end{bmatrix} + o(1), \quad x \rightarrow +\infty, \quad (7.0.5)$$

Postoje rješenja sistema (7.0.2), takozvana rješenja graničnih stanja (vezano stanje opisuje sistem u kome je čestica teži da ostane lokalizovana u jednom ili više dijelova prostora). Ona se javljaju na polovima  $T$  u gornjoj polovini kompleksne ravni  $\mathbb{C}^+$ . Označimo (različite) polove graničnih stanja  $T$  sa  $\lambda_j$  za  $j = m+1, \dots, m+n$  i prepostavimo da je  $n_j$  višestrukost pola  $\lambda_j$ .

## 7 Inverzna metoda rasipanja (IST)

---

Problem inverznog rasipanja za (7.0.2) sastoji se od oporavka (vraćanja) potencijala  $q(x)$  za  $x \in \mathbb{R}$  iz odgovarajućeg skupa podataka o rasipanju (scattering data) koji se sastoji od koeficijenta refleksije  $R(\lambda)$  za  $\lambda \in \mathbb{R}$  i informacija o graničnim stanjima  $\left\{ \lambda_j, \{c_{js}\}_{s=0}^{n_j-1} \right\}_{j=m+1}^{m+n}$ . Ovaj problem se može riješiti pomoću Marčenkovog metoda na sljedeći način [1, 2, 3, 4, 17, 27]:

1. Formirati takozvano Marčenko jezgro  $\Omega$  na osnovu podataka o rasipanju  $\{R(\lambda), \{\lambda_j\}, \{c_{js}\}\}$ :

$$\Omega(y) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda R(\lambda) e^{i\lambda y} + \sum_{j=m+1}^{m+n} \sum_{s=0}^{n_j-1} c_{js} \frac{y^s}{s!} e^{i\lambda_j y}. \quad (7.0.6)$$

2. Riješiti takozvanu Marčenko jednačinu:

$$K(x, y) - \overline{\Omega(x, y)} + \int_x^\infty dz \int_x^\infty ds K(x, s) \Omega(s + z) \overline{\Omega(z + y)} = 0, \quad y > x. \quad (7.0.7)$$

3. Oporaviti (povratiti) potencijal  $q$  preko rješenja  $K(x, y)$  Marčenko jednačine koristeći

$$q(x) = -2K(x, x). \quad (7.0.8)$$

4. Pomoću određenog  $K(x, y)$  definisati:

$$G(x, y) := - \int_x^\infty dz \overline{K(x, z)} \overline{\Omega(z + y)}. \quad (7.0.9)$$

Zatim, dobijamo Jost rješenje  $\psi(\lambda, x)$  Zakharov - Shabat sistema (7.0.2) - (7.0.3) preko:

$$\psi(\lambda, x) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{i\lambda x} \end{bmatrix} + \int_x^\infty dy \begin{bmatrix} K(x, y) \\ G(x, y) \end{bmatrix} e^{i\lambda y} \quad (7.0.10)$$

Rješenje početnog problema valjda (7.0.1) sastoji se od oporavka  $u(x, t)$  za  $t > 0$  kada je  $u(x, 0)$  poznato. Kada je  $u(x, 0) = q(x)$ , gde je  $q$  potencijal koji se pojavljuje u (7.0.2), poznato je da se takav početni problem može riješiti [1, 2, 3, 4, 17, 27] metodom IST.

Primjena IST obuhvata tri koraka:

## 7.1 Prikaz metode rasipanja

---

- Pomoću odgovarajućeg početnog potencijala  $q(x)$ , tj. početnog uslova, dobijemo podatke o rasipanju u  $t = 0$ ; koeficijent refleksije  $R(\lambda)$ , polove graničnih stanja  $\lambda_j$  od  $T(\lambda)$  i normirane konstante  $c_{js}$ .
- Neka početni podaci o rasipanju evoluiraju u vremenu. Vremenski evoluirani koeficijent refleksije  $R(\lambda; t)$  se dobija iz koeficijenta refleksije  $R(\lambda)$  preko relacije

$$R(\lambda; t) = R(\lambda)e^{4i\lambda^2 t}. \quad (7.0.11)$$

Polovi graničnih stanja  $\lambda_j$  i  $T(\lambda)$  se ne mijenjaju u vremenu. Vremenska evolucija normiranih konstanti graničnih stanja  $c_{js}(t)$  je poznata, kada je  $s = 0$ , kao

$$c_{j0}(t) = c_{j0}e^{4i\lambda_j^2 t}, \quad j = n + 1, \dots, m + n. \quad (7.0.12)$$

- Riješiti problem inverznog rasipanja za  $\boxed{7.0.2}$  sa vremenski evoluiranim podacima rasipanja  $\left\{ R(\lambda; t), \left\{ \lambda_j, \{c_{js}(t)\}_{s=0}^{n_j-1} \right\}_{j=m+1}^{m+n} \right\}$  da bismo dobili potencijal koji je evoluirao u vremenu. Ovaj inverzni problem može se riješiti Marčenkovo metodom kako će biti tek poslije opisano u odjeljku  $\boxed{7.2}$  zamjenjujući jezgro  $\Omega(y)$  sa njegovom vremenom evoluiranom verzijom  $\Omega(y; t)$ , koja se dobija zamjenom  $R(\lambda)$  u  $\boxed{7.0.6}$  sa  $R(\lambda; t)$  i  $c_{js}$  sa  $c_{js}(t)$ .

## 7.1 Prikaz metode rasipanja

Prvo ćemo predstaviti naše podatke o rasipanju u terminima konstantne kvadratne matrice  $A$ , konstantnog vektora kolone  $B$  i konstantnog vektora vrste  $C$ . Zatim ćemo napisati Marčenkovo jezgro  $\Omega(y)$  dato u  $\boxed{7.0.6}$  preko matrica  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Ispostaviće se da će jezgro evoluirano u vremenu  $\Omega(\lambda; t)$  biti povezano sa  $\Omega(\lambda)$  na jednostavan način. Rješavajući Marčenkovo jednačinu  $\boxed{7.0.7}$  sa vremenski evoluiranim jezgrom  $\Omega(\lambda; t)$ , dobićemo vremenski evoluirano rješenje  $K(x, y; t)$ , iz kojeg ćemo oporaviti vremenski evoluirani potencijal  $u(x, t)$  na način analogan  $\boxed{7.0.8}$ .

U ovom odjeljku ćemo pokazati kako konstruisati  $A$ ,  $B$ ,  $C$  iz nekih podataka o rasipanju koji su povezani sa sistemom Zakharov-Shabat. Pokazujemo da se naša tačna rješenja mogu dobiti odabirom  $A$ ,  $B$ ,  $C$  kao u  $\boxed{7.1.6}$  -  $\boxed{7.1.9}$ , gdje su  $\lambda_j$  različiti i  $c_{j(n_j-1)} \neq 0$  za  $j = 1, \dots, m + n$ .

Kada racionalni  $R(\lambda)$  ima polove u  $\lambda_j$  u  $\mathbb{C}^+$  sa višestrukostima  $n_j$  za  $j = 1, \dots, m$ , s obzirom da  $R(\lambda) \rightarrow 0$  kada  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $R(\lambda)$  može se zapisati kao

$$R(\lambda) = \sum_{j=1}^m \sum_{s=1}^{n_j} \frac{(-i)^s r_{js}}{(\lambda - \lambda_j)^s}, \quad (7.1.1)$$

## 7.1 Prikaz metode rasipanja

---

za neke kompleksne koeficijente  $r_{js}$ . Primjetimo da unutrašnju sumu u (7.1.1) možemo predstaviti kao:

$$\sum_{s=1}^{n_j} \frac{(-i)^s r_{js}}{(\lambda - \lambda_j)^s} = -iC_j(\lambda - iA_j)^{-1}B_j, \quad (7.1.2)$$

gdje smo za  $j = 1, \dots, m$  definisali

$$A_j := \begin{bmatrix} -i\lambda_j & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -i\lambda_j & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\lambda_j & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -i\lambda_j & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -i\lambda_j \end{bmatrix}, \quad B_j := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7.1.3)$$

$$C_j := [r_{jn_j} \dots r_{j1}],$$

tako da

$$\lambda - iA_j = \begin{bmatrix} \lambda - \lambda_j & i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - \lambda_j & i & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - \lambda_j & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda - \lambda_j & i \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda - \lambda_j \end{bmatrix}$$

,

$$(\lambda - iA_j)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda - \lambda_j} & \frac{-i}{(\lambda - \lambda_j)^2} & \frac{(-i)^2}{(\lambda - \lambda_j)^3} & \dots & \frac{(-i)^{n_j-2}}{(\lambda - \lambda_j)^{n_j-1}} & \frac{(-i)^{n_j-1}}{(\lambda - \lambda_j)^{n_j}} \\ 0 & \frac{1}{\lambda - \lambda_j} & \frac{-i}{(\lambda - \lambda_j)^2} & \dots & \frac{(-i)^{n_j-3}}{(\lambda - \lambda_j)^{n_j-2}} & \frac{(-i)^{n_j-2}}{(\lambda - \lambda_j)^{n_j-1}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda - \lambda_j} & \dots & \frac{(-i)^{n_j-4}}{(\lambda - \lambda_j)^{n_j-3}} & \frac{(-i)^{n_j-3}}{(\lambda - \lambda_j)^{n_j-2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\lambda - \lambda_j} & \frac{-i}{(\lambda - \lambda_j)^2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\lambda - \lambda_j} \end{bmatrix}$$

Napominjemo da je vektor vrsta  $C_j$  formata  $n_j \times 1$ , vektor kolona  $B_j$   $1 \times n_j$ , a  $A_j$  je  $n_j \times n_j$  kvadratna matrica i da je  $(\lambda - iA_j)^{-1}$  gornja trougaona Toeplitz-ova matrica.

Za  $j = m+1, \dots, m+n$ , upotrebimo (7.1.3) da definišemo  $n_j \times n_j$  matricu  $A_j$  i  $n_j$  vektor kolonu  $B_j$ , i da  $C_j$  bude  $n_j$  vektor vrsta definisana kao

## 7.1 Prikaz metode rasipanja

---

$$C_j := [c_{j(n_j-1)} \dots c_{j0}] \quad (7.1.4)$$

tako da je suma iz (7.0.6) dobijena kao

$$\sum_{s=0}^{n_j-1} c_{js} \frac{y^s}{s!} e^{i\lambda_j y} = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda C_j (\lambda - iA_j)^{-1} B_j e^{i\lambda y}, \quad y > 0. \quad (7.1.5)$$

Definišemo sada  $p \times p$  dijagonalnu blok matricu  $A$ :

$$A := \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & A_{m+n} \end{bmatrix} \quad (7.1.6)$$

$p$  je

$$p := \sum_{j=1}^{m+n} n_j. \quad (7.1.7)$$

Slično, definišemo vektor kolonu  $B$  kao

$$B := \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_{m+n} \end{bmatrix} \quad (7.1.8)$$

i vektor vrstu  $C$

$$C := [C_1 \ C_2 \ \dots \ C_{m+n}]. \quad (7.1.9)$$

Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da su sve  $\lambda_j$  za  $j = 1, \dots, m+n$  različite; u slučaju poklapanja jednog od  $\lambda_k$  za  $k = 1, \dots, m$  sa jednim od  $\lambda_j$  za  $j = m+1, \dots, m+n$ , možemo jednostavno kombinovati odgovarajuće blokove u (7.1.6) da bismo smanjili broj blokova u  $A$  za jedan. U slučaju da se više takvih  $\lambda_j$  podudara, možemo nastaviti na sličan način, tako da svaki blok u (7.1.6) bude povezan sa različitim  $\lambda_j$ . Slično tome, možemo kombinovati odgovarajuće blokove u svakom od (7.1.8) i (7.1.9) tako da se formati matrica  $B$  i  $C$  poklapaju sa formatom matrice  $A$ .

Posmatrajmo (matričnu) funkciju  $P(\lambda)$  definisanu na sljedeći način:

## 7.1 Prikaz metode rasipanja

---

$$P(\lambda) = -iC(\lambda - iA)^{-1}B, \quad , \lambda \in \mathbb{C}, \quad (7.1.10)$$

gdje su matrice  $A, B, C$  konstantne formata  $p \times p, p \times 1, 1 \times p$ , respektivno. Poznato nam je da je reprezentacija (7.1.10) minimalna ako ne postoje neke druge matrice  $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$  formata  $\tilde{p} \times \tilde{p}, \tilde{p} \times 1, 1 \times \tilde{p}$  takve da je  $P(\lambda) = -i\tilde{C}(\lambda - i\tilde{A})^{-1}\tilde{B}$  i  $\tilde{p} < p$ . Uvijek postoje tri matrice koje odgovaraju minimalnoj reprezentaciji (7.1.10). Više o minimalnoj reprezentaciji možete vidjeti u [9].

**Teorema 7.1.** Reprezentacija (7.1.10) je minimalna ako i samo ako su dvije  $p \times p$  matrice definisane na sljedeći način:

$$\text{col}_p(C, A) := \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{p-1} \end{bmatrix}, \quad \text{row}_p(A, B) := [B \ AB \ \dots \ A^{p-1}B] \quad (7.1.11)$$

obje ranga  $p$ .

Sljedeća teorema pokazuje da je, radi konstruisanja tačnih rješenja (7.0.1), dovoljno uzeti u obzir samo triplet  $A, B, C$  dat u (7.1.6) - (7.1.9) sa različitim  $\lambda_j$  za  $j = 1, \dots, m + n$  jer bilo koji druge tri matrice  $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$  formata  $p \times p, p \times 1, 1 \times p$ , respektivno, mogu se ekvivalentno izraziti u terminima  $A, B, C$ .

Sve teoreme koje slijede daćemo bez dokaza, jer se oni svode na gradivo linearne algebre i sam postupak dokazivanja nije od važnosti za ovaj rad nego samo njihov krajnji rezultat.

**Teorema 7.2.** Za bilo koji proizvoljan triplet  $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$  formata  $p \times p, p \times 1, 1 \times p$ , postoji triplet  $A, B, C$  koji ima oblik dat u (7.1.6) - (7.1.9), respektivno, koji daju isto tačno rješenje (7.0.1). Konstruišemo  $A, B, C$  korišćenjem  $\tilde{A} = MAM^{-1}, \tilde{B} = MSB, \tilde{C} = \tilde{C}MS$ , gdje je  $M$  regularna matrica čije se kolone sastoje od generalizovanih karakterističnih vektora matrice  $A$ , matrica  $S$  je gornja trougaona Toeplitz-ova matrica koja komutira sa  $A$ , a elementi matrice  $C$  su izabrani kao u (7.1.9).

U ostatku ovog odjeljka daćemo karakterizaciju minimalnosti reprezentacije u (7.1.10) sa tri matrice  $A, B, C$  date u (7.1.6) - (7.1.9).

**Teorema 7.3.** Tri matrice  $A, B, C$  date u (7.1.6) - (7.1.9) odgovaraju minimalnoj reprezentaciji (7.1.10) ako i samo ako su  $\lambda_j$  različiti i  $c_{j(n_j-1)} \neq 0$  u (7.1.9) za  $j = 1, \dots, m + n$ .

Dokazi svih teorema datih maloprije mogu se pogledati u [5].

## 7.2 Eksplisitno rješenje

---

### 7.2 Eksplisitno rješenje

U prethodnom odjeljku konstruisali smo matrice  $A, B, C$  date u (7.1.6) - (7.1.9) iz nekih podataka o rasipanju sistema Zakharov-Shabat. U ovom odjeljku rješavamo odgovarajuću vremenski evoluiranu Marčenkova jednačinu eksplisitno za  $x \geq 0$  u obliku tih  $A, B, C$ . Ta rješenja vode do eksplisitnih rješenja (7.0.1) preko formule date u (7.2.14).

Za  $y \geq 0$ , uz pomoć (7.1.2), (7.1.5) i konturne integraciju duž granice gornjeg polukruga kompleksne ravni  $\mathbb{C}^+$ , prikazujemo jezgro  $\Omega(y)$  definisano u (7.0.6) kao

$$\Omega(y) = Ce^{-Ay}B, \quad y \geq 0. \quad (7.2.1)$$

Takođe važi i

$$\Omega(x+y) = Ce^{-Ax}e^{-Ay}B, \quad . \quad (7.2.2)$$

Upotrebom (7.0.11) možemo izraziti jezgro vremenski evoluiranog Marčenkova integrala

$$\Omega(y; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda R(\lambda) e^{i\lambda y} e^{4i\lambda^2 t} + \sum_{j=m+1}^{m+n} \sum_{s=0}^{n_j-1} c_{js}(t) \frac{y^s}{s!} e^{i\lambda_j y}. \quad (7.2.3)$$

Dobili smo  $\Omega(y; t)$  tako što  $C$  zamjenimo sa  $Ce^{-4iA^2t}$  u  $\Omega(y)$  u (7.2.1) jer se u  $\Omega(y)$  nalazi samo refleksioni koeficijenti koji evoluiraju u vremenu pa u suštini zamjenimo  $R(\lambda)$  sa  $R(\lambda; t)$  (više o dobijanju  $\Omega$  može se pronaći u knjizi [2]):

$$\Omega(y; t) = Ce^{-4iA^2t - Ay}B, \quad y \geq 0. \quad (7.2.4)$$

Kako je  $\Omega(y; t)$  skalar, kompleksno konjugovanje je isto što i adjungovanje i imaćemo

$$\Omega(y; t)^\dagger = B^\dagger e^{-A^\dagger y + 4i(A^\dagger)^2 t} C^\dagger, \quad (7.2.5)$$

oznaka  $\dagger$  je adjungovanje tj. (kompleksno) konjugovanje i transponovanje kompleksne matrice.

Stoga, Marčenkova integralna jednačina koja je evoluirala u vremenu je:

$$K(x, y : t) - \Omega(x+y; t)^\dagger + \int_x^\infty dz \int_x^\infty ds K(x, s; t) \Omega(s+z; t) \Omega(z+y; t)^\dagger = 0, \quad y > x. \quad (7.2.6)$$

## 7.2 Eksplicitno rješenje

---

Sljedeće što radimo je izračunavanje  $K(x, y; t)$ . Koristeći (7.2.5) u jednačini (7.2.6) vidimo da je  $K(x, y; t)$  oblika:

$$K(x, y; t) = H(x; t)e^{-A^\dagger y + 4i(A^\dagger)^2 t} C^\dagger \quad (7.2.7)$$

U nastavku će biti definisano  $H(x; t)$ . Uvrštavanjem (7.2.7) u (7.2.6), dobijamo:

$$H(x; t)\Gamma(x; t) = B^\dagger e^{-A^\dagger x}, \quad (7.2.8)$$

gdje je

$$\Gamma(x; t) := I + Q(x; t)N(x), \quad (7.2.9)$$

gdje je  $I$  jedinična  $p \times p$  matrica a

$$Q(x; t) := \int_x^\infty e^{-A^\dagger s + 4i(A^\dagger)^2 t} C^\dagger C e^{-As - 4iA^2 t} ds, \quad (7.2.10)$$

$$N(x) := \int_x^\infty e^{-Az} BB^\dagger e^{-A^\dagger z} dz. \quad (7.2.11)$$

Koristeći (7.2.8) u (7.2.7) rješenje (7.2.6) možemo zapisati kao:

$$K(x, y; t) = B^\dagger e^{-A^\dagger x} \Gamma(x; t)^{-1} e^{-A^\dagger y + 4i(A^\dagger)^2 t} C^\dagger, \quad (7.2.12)$$

prepostavljajući da  $\Gamma(x; t)$  ima inverznu matricu. Uslove za to ćemo dati u teoremi 7.5.

Analogno, (7.0.8) dobijamo konačno i potencijal koji je evoluirao u vremenu

$$u(x; t) = -2K(x, x; t) \quad (7.2.13)$$

koji će biti rješenje jednačine (7.0.1) i zapisujemo ga kao:

$$u(x, t) = -2B^\dagger e^{-A^\dagger x} \Gamma(x; t)^{-1} e^{-A^\dagger x + 4i(A^\dagger)^2 t} C^\dagger \quad (7.2.14)$$

Moguće je rješenje (7.2.14) zapisati kao količnik dvije determinante [II]:

$$u(x, t) = \frac{|F(x; t)|}{|\Gamma(x; t)|}, \quad (7.2.15)$$

gdje je  $F(x; t)$  matrica formata  $(p+1) \times (p+1)$ :

## 7.2 Eksplicitno rješenje

---

$$F(x; t) := \begin{bmatrix} 0 & 2B^\dagger e^{-A^\dagger x} \\ e^{-A^\dagger x + 4i(A^\dagger)^2 t} C^\dagger & \Gamma(x; t) \end{bmatrix} \quad (7.2.16)$$

Na kraju ovog poglavlja dajemo neka korisna svojsta matrica  $Q(x; t)$ ,  $N(x)$  i  $\Gamma(x; t)$ .

**Teorema 7.4.** Matrice  $Q(x; t)$  i  $N(x)$  definisane u (7.2.10) i (7.2.11), respektivno zadovoljavaju

$$Q(x; t) = e^{-A^\dagger x + 4i(A^\dagger)^2 t} Q(0; 0) e^{-Ax - 4iA^2 t}, \quad (7.2.17)$$

$$N(x) = e^{-Ax} N(0) e^{-A^\dagger x}. \quad (7.2.18)$$

Sljedeća teorema pokazuje da matrica  $\Gamma(x; t)$  definisana u (7.2.9) ima inverznu matricu za sve  $x, t \in \mathbb{R}$  sve dok karakteristični korijeni matrice  $A$  imaju pozitivne realne dijelove. U tom slučaju je i determinanta  $\Gamma(x; t)$  pozitivna.

**Teorema 7.5.** Pretpostavimo da karakteristični korijeni matrice  $A$  imaju pozitivne realne dijelove. Tada, za sve  $x, t \in \mathbb{R}$  važi sljedeće:

1. Matrice  $Q(x; t)$  i  $N(x)$  definisane u (7.2.10) i (7.2.11), respektivno, su pozitivne i hermitske matrice. Shodno tome, postoje jedinstvene pozitivne, hermitske matrice  $Q(x; t)^{\frac{1}{2}}$  i  $N(x)^{\frac{1}{2}}$  takve da je

$$Q(x; t) = Q(x; t)^{\frac{1}{2}} Q(x; t)^{\frac{1}{2}} \quad (7.2.19)$$

$$N(x) = N(x)^{\frac{1}{2}} N(x)^{\frac{1}{2}}. \quad (7.2.20)$$

2. Matrica  $\Gamma(x; t)$  definisana u (7.2.9) ima inverznu matricu.

3. Determinanta matrice  $\Gamma(x; t)$  je pozitivna.

**Teorema 7.6.** Kvadrat absolutne vrijednosti rješenja kubne Šredingerove jednačine  $|u(x, t)|^2$  može biti napisan preko determinante matrice  $\Gamma(x; t)$  definisane u (7.2.9) na sljedeći način:

$$|u(x, t)|^2 = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \det \Gamma(x; t) / \partial x}{\det \Gamma(x; t)} \right] \quad (7.2.21)$$

Dokaz ove teoreme je komplikovan i prevazilazi naša znanja iz algebre i diferencijalnih jednačina, s toga ga nećemo prikazivati ovdje, ali se može pogledati u knjigama [27] i [10]. Ovaj rezultat ćemo koristiti prilikom traženja rješenja kubne Šredingerove jednačine ispod.

### 7.3 Primjena na CSE

---

#### 7.3 Primjena na CSE

Poslije postupka IST opisanog iznad, primjeničemo ga na rješavanje kubne Šredingerove jednačine (7.0.1) kako bismo dobili  $n - \text{soliton}$  rješenje. Poznato nam je da je u ovom slučaju refleksije nema, tj.  $R(\lambda) \equiv 0$ , a  $T(\lambda)$  ima  $n$  prostih polova graničnih stanja u  $\mathbb{C}$ . Stoga, iz (7.1.6) - (7.1.9) zaključujemo da su matrice  $A$ ,  $B$  i  $C$ :

$$A = \begin{bmatrix} -i\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -i\lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -i\lambda_n \end{bmatrix} \quad (7.3.1)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7.3.2)$$

$$C = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n] \quad (7.3.3)$$

pri čemu su  $\lambda_j$  različiti i leže u gornjem polukrugu kompleksne ravni  $\mathbb{C}^+$ .

Korišćenjem (7.2.9) - (7.2.11), dobijaju se  $(\alpha, \beta)$  elementi matrica  $Q(x; t)$ ,  $N(x)$  i  $\Gamma(x; t)$ :

$$N_{\alpha, \beta} = \frac{ie^{i(\lambda_\alpha - \bar{\lambda}_\beta)x}}{\lambda_\alpha - \bar{\lambda}_\beta}, \quad (7.3.4)$$

$$Q_{\alpha, \beta} = \frac{i\bar{c}_\alpha c_\beta e^{i(\lambda_\beta - \bar{\lambda}_\alpha)x + 4i(\lambda_\beta^2 - \bar{\lambda}_\alpha^2)t}}{\lambda_\beta - \bar{\lambda}_\alpha}, \quad (7.3.5)$$

$$\Gamma_{\alpha, \beta} = \delta_{\alpha, \beta} - \sum_{\gamma=1}^n \frac{\bar{c}_\alpha c_\gamma e^{i(2\lambda_\gamma - \bar{\lambda}_\alpha - \bar{\lambda}_\beta)x + 4i(\lambda_\gamma^2 - \bar{\lambda}_\alpha^2)t}}{(\lambda_\gamma - \bar{\lambda}_\alpha)(\lambda_\gamma - \bar{\lambda}_\beta)}, \quad (7.3.6)$$

gdje je  $\delta_{\alpha, \beta}$  Kronekerova delta, definisana na sljedeći način:

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases}$$

Rješenje  $u(x, t)$  računamo preko (7.2.21), tj. uzimajući korijen tog rješenja (7.2.21) radi lakšeg izračunavanja i ilustrativnog predstavljanja. Ove rezultate smo koristili za grafičko prikazivanje rješenja, 1 solitona i odnos 2 solitona, čije slike su prikazane u dijelu 5.

## **A Kodovi za numeričko rješavanje CSE u programu Mathematica**

### **A.1 1-solitonsko rješenje**

```
n=1;  
  
lambda = {-1 + I};  
  
c = {-I};  
  
cclambda = Conjugate[lambda];  
  
ccc = Conjugate[c];  
  
gammamatrica = IdentityMatrix[n] + Table[ccc[[i]] E^(-I cclambda[[i]]  
x - 4 I (cclambda[[i]])^2 t) Sum[c[[k]] E^(2 I lambda[[k]]  
x + 4 I (lambda[[k]])^2 t)/((cclambda[[i]] - lambda[[k]]))  
(lambda[[k]] - cclambda[[j]])), {k, 1, n}] E^(-I cclambda[[j]] x),  
{i, n}, {j, n}];  
  
detgama = Det[gammamatrica];  
  
izvoddetgama = D[detgama, x];  
  
absukvadr = D[izvoddetgama/detgama, x];  
  
absu = Chop[Sqrt[Abs[absukvadr]]];  
  
Plot[absu /. t -> 0, {x, -7, 7}, PlotRange -> All]  
  
Plot[absu /. t -> 0.1, {x, -7, 7}, PlotRange -> All]  
  
Plot[absu /. t -> 0.2, {x, -7, 7}, PlotRange -> All]  
  
Plot[absu /. t -> 0.3, {x, -7, 7}, PlotRange -> All]  
  
Plot[absu /. t -> 0.4, {x, -7, 7}, PlotRange -> All]  
  
Plot[absu /. t -> 0.7, {x, -7, 7}, PlotRange -> All]  
  
Plot[absu /. t -> 0.9, {x, -7, 7}, PlotRange -> All]  
  
Plot[absu /. t -> 1.2, {x, -7, 7}, PlotRange -> All]  
  
Plot3D[absu, {t, 0, 1.2}, {x, -7, 7}, PlotRange -> All,  
AxesLabel -> Automatic]
```

## A.2 Odnos 2 solitona

---

### A.2 Odnos 2 solitona

```
n=2;

lambda = {-1 + I, -2 + 3 I}

c = {-1 + I, 2 I}

cclambda = Conjugate[lambda];

ccc = Conjugate[c];

gammamatrica = IdentityMatrix[n] + Table[ccc[[i]] E^(-I cclambda[[i]] x - 4 I (cclambda[[i]])^2 t) Sum[c[[k]] E^(2 I lambda[[k]] x + 4 I (lambda[[k]])^2 t)/((cclambda[[i]] - lambda[[k]]) (lambda[[k]] - cclambda[[j]])), {k, 1, n}] E^(-I cclambda[[j]] x), {i, n}, {j, n}];

detgama = Det[gammamatrica];

izvoddetgama = D[detgama, x];

absukvadr = D[izvoddetgama/detgamma, x];

absu = Chop[Sqrt[Abs[absukvadr]]];

Plot3D[absu, {t, -0.9, 0.9}, {x, -5, 5}, PlotRange -> All, AxesLabel -> Automatic]

Plot[absu /. t -> -0.9, {x, -10, 2}, PlotRange -> All, AxesLabel -> Automatic]

Plot[absu /. t -> -0.5, {x, -6.5, 1}, PlotRange -> All, AxesLabel -> Automatic]

Plot[absu /. t -> -0.2, {x, -6, 3}, PlotRange -> All, AxesLabel -> Automatic]

Plot[absu /. t -> 0, {x, -4, 3}, PlotRange -> All, AxesLabel -> Automatic]

Plot[absu /. t -> 0.2, {x, -2, 3.8}, PlotRange -> All, AxesLabel -> Automatic]

Plot[absu /. t -> 0.4, {x, -2, 5}, PlotRange -> All, AxesLabel -> Automatic]

Plot[absu /. t -> 0.6, {x, -1, 7}, PlotRange -> All, AxesLabel -> Automatic]
```

## A.2 Odnos 2 solitona

---

```
Plot [absu /. t -> 0.9, {x, -1, 9}, PlotRange -> All,  
AxesLabel -> Automatic]
```

## **8 Biografija kandidata**

---

### **8 Biografija kandidata**



Nataša Mišanović je rođena 2. decembra 1995. godine u Bijeljini. Završila je Gimnaziju "Filip Višnjić" u Bijeljini, opšti smjer, 2014. godine kao odličan učenik. Iste godine upisuje i Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, smjer Matematika finansija. Zaključno sa septembarskim ispitnim rokom 2017. godine položila je sve predviđene ispite. Potom upisuje master studije na istom fakultetu, smjer Primjenjena matematika, Matematika finansija. Položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom zaključno sa aprilskim ispitnim rokom 2019. godine i time stekla uslov za odbranu master rada.

## LITERATURA

---

### Literatura

- [1] M. J. Ablowitz and P. A. Clarkson. *Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.
- [2] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, and H. Segur. *The inverse scattering transform-Fourier analysis for nonlinear problems*. Stud. Appl. Math. 53, 249–315 (1974).
- [3] M. J. Ablowitz, B. Prinari, and A. D. Trubatch. *Discrete and continuous nonlinear Schrodinger systems*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.
- [4] M. J. Ablowitz and H. Segur. *Solitons and the inverse scattering transform*. SIAM, Philadelphia, 1981.
- [5] Tuncay Aktosun, Theresa Busse, Francesco Demontis and Cornelis van der Mee. *Exact Solutions to the Nonlinear Schrodinger Equation*
- [6] Tuncay Aktosun, Francesco Demontis and Cornelis van der Mee. *Exact solutions to the focusing nonlinear Schrodinger equation*
- [7] T. Aktosun and C. van der Mee. *Explicit solutions to the Korteweg-de Vries equation on the half-line*, Inverse Problems 22, 2165–2174 (2006)
- [8] I.F. Almog, M.S. Bradley, and V. Bulović. *The Lorentz Oscillator and its Applications*
- [9] H. Bart, I. Gohberg, and M. A. Kaashoek. *Minimal factorization of matrix and operator functions*. Birkhauser, Basel, 1979.
- [10] E. A. Coddington and N. Levinson. *Theory of ordinary differential equations*. McGrawHill, New York, 1955.
- [11] R. Courant and D. Hilbert. *Methods of mathematical physics*, Vol. I, Interscience Publ., New York, 1989.
- [12] F. Demontis. *Direct and inverse scattering of the matrix Zakharov-Shabat system*. Ph.D. thesis, University of Cagliari, Italy, 2007.
- [13] Graham W. Griffiths. *Bäcklund Transformation*. City University, UK, April 2012.
- [14] Herman, W. and W. Mal-fliet (2005). *The Tanh Method: A Tool to Solve Nonlinear Partial Differential Equations with Symbolic Software*. 9th World Multiconference on Systemics, Cybernetics, and Informatics (WMSCI 2005), Orlando, Florida, July 10-13, pp. 165-168
- [15] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. Wiley: New York, 1998
- [16] Usama Al Khawaja. *Darboux Transformation, Lax Pairs, Exact Solutions of Nonlinear Schrodinger Equations, and Soliton Molecules*. Physics Department, United Arab Emirates University. 23 Jan. 2012
- [17] S. Novikov, S. V. Manakov, L. P. Pitaevskii, and V. E. Zakharov. *Theory of solitons*. Consultants Bureau, New York, 1984.

## LITERATURA

---

- [18] NPTEL Course: Wave Propagation in Continuous Media, Bäcklund transformation and multi-soliton solutions
- [19] Andrei D. Polyanin, Valentin F. Zaitsev. *Handbook of nonlinear partial differential equations.* 2004 by Chapman Hall/CRC Press. pp 252-255
- [20] Jeffrey Rauch. *Partial differential equations.* Graduate Texts in Mathematics, vol. 128, Springer-Verlag, New York, 1991
- [21] Heinz-Jürgen Schmidt. *Nonlinear wave equations.* Universität Osnabrück
- [22] Shadowitz, A. (1975). *The Electromagnetic Field.* McGraw-Hill
- [23] Z. Stojaković, I. Bošnjak. *Elementi linearne algebre.* Symbol, Novi Sad, 2010.
- [24] J. J. Stoker. *Nonlinear Vibrations.* Interscience Publishers, New York (1950)
- [25] Gerald Teschl. *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*
- [26] G. B. Whitham. *Linear and Nonlinear Waves.* Wiley, New York (1974)
- [27] V. E. Zakharov and A. B. Shabat. *Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media.* Sov. Phys. JETP 34, 62–69 (1972).

UNIVERZITET U NOVOM  
SADU PRIRODNO  
MATEMATIČKI FAKULTET  
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:  
**RBR**

Identifikacioni broj:  
**IBR**

Tip dokumentacije:  
**TD** Monografska dokumentacija

Tip zapisa:  
**TZ** Tekstualni štampani materijal

Vrsta rada:  
**VR** Master rad

Autor:  
**AU** Nataša Mišanović

Mentor:  
**ME** dr Marko Nedeljkov

Naslov rada:  
**NR** kubna Šredingerova jednačina

Jezik publikacije:  
**JP** srpski (latinica)

Jezik izvoda:  
**JI** s/en

Zamjla publikovanja:  
**ZP** Republika Srbija

Uže geografsko područje:  
**UGP** Vojvodina

Godina:  
**GO** 2019.

Izdavač:  
**IZ** Autorski reprint

Mesto i adresa:  
Departman za matematiku i informatiku,

Obradovića 4  
**MA**

Prirodno-matematički fakultet,  
Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja

Fizički opis rada: (7/52/27/0/2/4/0)  
**FOR**  
(broj poglavlja/strana/lit.citata/tabela/slika/grafika/priloga)

Naučna oblast: **Matematika**  
**NO**

Naučna disciplina: **primenjena matematika**  
**ND**

Predmetne odrednica,

Ključne riječi: **kubna Šredingerova jednačina,**  
**kvantna mehanika, parcijalne**  
**diferencijalne jednačine,**  
**Inverzna metoda rasipanja**

**(PO, UDK)**

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i  
informatiku, Prirodno-matematički fakultet,  
Univerzitet u Novom Sadu

**ČS**

Važna napomena: **nema**  
**VN**

Izvod (IZ):

Prvo su definisani pojmovi iz linearne algebre, diferencijalnih jednačina i kvantne mehanike. Zatim su predstavljene linearne parcijalne diferencijalne jednačine, njihova matematička definicija. Dati su primjeri, harmonijski oscilator, elektromagnetni talasi, ravni talasi, linearna Šredingerova jednačina. Nakon toga su definisane nelinearne parcijalne jednačine, kao i njihov oblik a pored toga je i njihova primjena. Definisan je Duffing oscilator i riješena njegova varijanta, Duffing oscilator sa malom kubnom nelinearnošću preko perturbovanih nizova. U petom poglavlju je izvođenje kubne Šredingerove jednačine iz Duffing - Lorentz modela. U nastavku su osobine kubne Šredingerove jednačine

(linearnost, invarijantnost u vremenu, skaliranje, translacija, Galilejevska invarijantnost). Poslije slijedi izvođenje specijalnog rješenja, solitona. Šesto poglavlje je o metodama za rješavanje nelinearnih jednačina, Backlund transformacija, inverzna metoda rasipanja i Laksovi parovi. Dalje je detaljno objašnjena inverzna metoda rasipanja i primjenjena na rješavanje kubne Šredingerove jednačine.

Datum prihvatanja teme  
od strane NN veća:

17.09.2019.

**DP**

Datum odbrane:  
**DO**

Članovi komisije:  
**KO**

Predsednik: dr Srboljub Simić, redovni profesor,  
Prirodno-matematički fakultet,  
Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Ivana Vojnović, docent, Prirodno-matematički  
fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Marko Nedeljkov, redovni profesor,  
Prirodno-matematički fakultet,  
Univerzitet u Novom Sadu mentor

UNIVERSITY OF NOVI SAD  
FACULTY OF SCIENCES  
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:  
**ANO**

Identification number:  
**INO**

Document type:                           Monograph type  
**DT**

Type of record:                           Textual printed material  
**TR**

Contents code:                           Master's thesis  
**CC**

Author:                                   Nataša Mišanović  
**AU**

Mentor:                                   Dr Marko Nedeljkov  
**ME**

Title:                                       Cubic Schrodinger equation  
**TI**

Language of text:                       Serbian (Latin)

**LT**

Language of abstract: s /en  
**LT**

Country of publication: Republic of Serbia  
**CP**

Locality of publication: Vojvodina  
**LP**

Publication year: 2019.  
**PY**

Publisher: author's reprint  
**PU**

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and  
Informatics, Faculty of Sciences, University of  
Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4  
**PP**

Physical description: ( 7/52/27/0/2/4/0)  
**PD**

Scientific field: Mathematics  
**SF**

Scientific discipline: Applied mathematics  
**SD**

Subject Key words: cubic Schrodinger equation,  
quantum mechanics, partial differential  
equations,inverse scattering method  
**SKW**

Holding data: The Library of the Department of Mathematics  
and Informatics, Faculty of Sciences, University  
of Novi Sad  
**HD**

Note:  
**N**

Abstract (**AB**):

In first chapter terms from linear algebra, differential equation and quantum mechanics are defined. Then linear partial differential equations are presented. Examples are given, harmonic oscillator, electromagnetic waves, plane waves and linear Schrödinger equation, nonlinear partial equations are defined, their form and application. Duffing oscillator is defined and its variant, the Duffing oscillator with a small cubic nonlinearity, that we solved using perturbation series. The fifth chapter is a derivation of the cubic Schrödinger equation from the Duffing - Lorentz model. Following are the properties of cubic Schrödinger equations (linearity with respect to phase factors, time reversal invariance, scaling property, translational invariance, Galilean invariance). Subsequently, the derivation of special solutions, solitons. The sixth chapter is about methods for solving nonlinear equations, Backlund transformations, inverse scattering methods and Lax pairs. The inverse scattering method and application to the solution of the cubic Schrödinger equation is further detailed.

Accepted on Scientific board on:

**AS**

17.09.2019.

Defended:

**DE**

Thesis Defend board:

**DB**

President:

Srboljub Simić PhD, full professor,  
Faculty of Sience, University of Novi  
Sad

Member:

Ivana Vojnović PhD, assistant  
professor , Faculty of Sience,  
University of Novi Sad

Member:

Marko Nedeljkov PhD, full  
professor, Faculty of Sience,  
University of Novi Sad

