UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Gajinov Nataša

Banahov prncip kontrakcije-primene i generalizacije

-Master rad-

Mentor: Prof. dr Ljiljana Gajić

Novi Sad,
Decembar 2010.

Sadržaj

Uvod

Ovaj rad predstavlja moj završni rad na master studijama Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu. Funkcionalna analiza je jedna od najvažnijih oblasti savremene matematike čije se metode i razultati primenjuju u gotovo svim matematičkim disciplinama, u numeričkoj i primenjenoj matematici kao i u raznim oblastima fizike i tehnike. Funkcionalna analiza je nastala na prelazu iz devetnaestog u dvadeseti vek kao nadgradnja linearne algebre i područja klasične analize, kao što su integralne i diferencijalne jednačine, varijacioni račun, razvijanja funkcija u redove itd. U funkcionalnoj analizi proučava se skup funkcija koje imaju određeno svojstvo, a ne individualna funkcija kako se to ranije radilo.

Prvi deo rada sadrži osnovne pojmove u vezi sa metričkim i Banahovim prostorima. U drugom delu formulisana je i dokazana Banahova teorema o nepokretnoj tački koja garantuje postojanje i jedinstvanost nepokretne tačke određenih preslikavanja iz nekog metričkog prostora u samog sebe i daje konstruktivni metod za pronalaženje nepokretne tačke. Banahova teorema predstavlja jedan od klasičnih rezultata teorije nepokretne tačke koja zauzima značajno mesto u matematici. Treći deo govori o primeni Banahove teoreme u dokazu egzistencije i jedinstvenosti rešenja za jednačine različitog tipa. Primenom teoreme daje se i postupak približnog nalaženja tog rešenja poznat kao metod sukcesivnih aproksimacija. Četvrti deo sadrži neke generalizacije teoreme o nepokretnoj tački u metričkim prostorima.

Zahvalila bih se, ovom prilikom, svima koji su na bilo koji način doprineli izradi ovog rada. Zahvaljujem se akademiku Olgi Hadžić na korisnim savetima i primedbama. Posebnu zahvalnost dugujem svom mentoru dr Ljiljani Gajić za profesionalno usmeravanje i pomoć pri izradi ovog rada kao i za znanje koje sam stekla radivši sa njom

1. Osnovni pojmovi i definicije

Maurice Frechet je 1906. godine uveo klasu metričkih prostora. Metrički prostor je skup na kome je definisan pojam rastojanja dve tačke (metrike). Pojam granice, po svom istorijskom razvoju, je dugo bio vezan za pojam rastojanja dve tačke. Zato su gotovo svi klasični prostori snabdeveni definicijom rastojanja dva elementa. Takav je slučaj sa skupom realnih i kompleksnih brojeva, skupom uređenih n-torki, skupom ograničenih realnih funkcija...

Na skupu R, realnih brojeva, rastojanje d dve tačke x i y merili smo apsolutnom vrednošću razlike odgovarajućih brojeva $d(x,y)=|x-y|$. U n-dimenzionalnom Euklidskom prostoru, rastojanje d između tačaka $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ i $y=(y_1,y_2,...,y_n)$ definišemo sa

$$d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

U skupu ograničenih funkcija, definisanih nad intervalom (a,b), definišemo rastojanje između dva elementa f i g kao

$$d(f,g)=\sup|f(x)-g(x)|,\qquad x\in(a,b).$$

Naveli smo samo neke primere rastojanja i interesovaće nas koje su njihove najvažnije zajedničke osobine.

Vidimo da je rastojanje u nekom skupu definisano za po dva elementa. Za svaka dva elementa u datom skupu X opredeljujemo jedan broj $d(x,y)$ koji nazivamo rastojanjem. U stvari, svakom uređenom paru (x,y) opredeljujemo realan broj. Traženje rastojanja je, dakle, operacija preslikavanja skupa X^2 u skup realnih brojeva.

U klasi metričkih prostora je kasnije, 1922. godine, Stefan Banach formulisao i dokazao teoremu o nepokretnoj tački za kontraktivna preslikavanja. Ona ima veliki značaj u matematici i predstavlja klasičan rezultat teorije nepokretne tačke.

Definicija 1.1: Neka je $X\neq\emptyset$ i $d:X\times X\to[0,\infty)$ tako da važe sledeći uslovi:

- $d(x,y)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=y$,
- Za svako $x,y\in X$, $\quad d(x,y)=d(y,x)$, (**simetričnost**),
- Za svako $x,y,z\in X$, važi nejednakost
  $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$, (**nejednakost trougla).**

Tada kažemo da je preslikavanje d **metrika** na skupu X a broj $d(x,y)$ je **rastojanje** tačaka x i y. Par (X,d) je **metrički prostor**.

Primer 1.1: (R^n, d_p) je metrički prostor gde za $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $y=(y_1,y_2,...,y_n)\in R^n$ definišemo rastojanje $d_p(x,y)$, $p\geq 1$, na sledeći način

$$d_p(x,y)=\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p}\ .$$

Za $p=1$ i $n=1$ dibijamo metrički prostor (R,d_1),

$$d_1(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|.$$

Primer 1.2: Neka je $C[a,b]$ skup neprekidnih realnih funkcija definisanih na intervalu $[a,b]\subset R$. Za $f,g\in C[a,b]$ definiše se $d(f,g)$ na sledeći način:

$$d(f,g)=\max_{x\in[a,b]}|f(x),g(x)|.$$

Tada je $(C[a,b],d)$ metrički prostor.

Napomena: $C[a,b]$ i sa metrikom d_r, $r\geq 1$, definisanom na sledeći način

$$d_r(f,g)=(\int_a^b|f(x)-g(x)|^r dx)^{\frac{1}{r}},\qquad\qquad \text{za sve } f,g\in C[a,b],$$

je takođe metrički prostor.

Primer 1.3: Neka je l^∞ prostor ograničenih nizova u R ili C. Ako je za $x,y\in l^\infty$

$$d(x,y)=\sup_{i\in N}|x_i-y_i|,$$

gde je $x=\{x_i\}_{i\in N}=(x_i)$, $y=\{y_i\}_{i\in N}=(y_i)$, tada je (l^∞,d) metrički prostor.

Definicija 1.2: Neka je (X,d) metrički prostor. **Otvorena lopta** $L(x_0,r)$ $(a\in X, r>0)$ sa centrom u x_0 i poluprečnikom r je svaki skup oblika

$$L(x_0,r)=\{\ x:\ \ x\in X,\ \ d(x_0,x)<r\}.$$

Definicija 1.3: **Zatvorena lopta** $B(x_0,r)$ $(a\in X, r>0)$ sa centrom u x_0 i poluprečnikom r je svaki skup oblika

$$B(x_0,r)=\{\ x:\ \ x\in X,\ \ d(x_0,x)\leq r\}.$$

Definicija 1.4: Neka je $X\neq$ Ø i τ neka familija podskupova skupa X sa sledećim osobinama:

1. $X \in \tau$, $\emptyset \in \tau$,
2. Ako je za sve $i \in I$ (I proizvoljan skup) $A_i \in \tau$ tada je
$$\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau ,$$
3. Ako su $A_1, A_2, ..., A_n \in \tau$ (n je proizvoljan prirodan broj) tada je
$$\bigcap_{i \in I} A_i \in \tau .$$

Tada je uređeni par (X, τ) **topološki prostor**, a elementi familije τ su **otvoreni skupovi**. τ se zove **topologija** na prostoru X .

Neka je (X, d) metrički prostor. Definišemo familiju τ_d podskupova od X na sledeći način:
$\emptyset \in \tau_d$ i $O \in \tau_d$ ako i samo ako važi $(za \;\; svako \;\; x \in O)(postoji \; r_x > 0)(\; L(x, r_x) \subset O))$.

*Tvrđenje 1.1:*Familija τ_d definiše topologiju u metričkom prostoru (X, d) .

Za topologiju $\tau = \tau_d$ kažemo da je generisana (indukovana) metrikom d .

Definicija 1.5: Za topološki prostor (X, τ) kažemo da je **metrizabilan** ako postoji metrika d u skupu X koja definiše topologiju τ .

Tvrđenje 1.2: Neka je (X, d) metrički prostor. Podskup V skupa X je **okolina tačke** $x_0 \in X$ ako postoji $r > 0$ tako da važi
$$L(x_0, r) \subset V .$$
Definicija 1.6: U prostoru (X, τ) familija
$$B(x_0) = \{L(x_0, r) ; \; r > 0\},$$
je baza okolina tačke $x_0 \in X$ što znači da za svaku okolinu V tačke x_0 postoji $L(x_0, r)$, $r > 0$, tako da je $L(x_0, r) \subset V$.

U metričkom prostoru (X, d) jedna od baza okolina tačke $x_0 \in X$ je familija
$$B(x_0) = \{ \; L(x_0, 1/n), \; n \in N\},$$
što znači da svaki metrički prostor zadovoljava I Aksiom prebrojivosti.

Definicija 1.7: Metrike d i ρ su ekvivalentne ako indukuju istu topologiju.

Tvrđenje 1.3: Metrike d i ρ su ekvivalentne, ako postoje konstane m , $M > 0$ takve da važi

$$md(x,y) \le \rho(x,y) \le Md(x,y),$$

Na osnovu prethodnog tvrđenja metrike na R^n date sa

- $d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$,
- $d_\infty(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \ldots, |x_n - y_n|\}$,
- $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$ gde je $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$,

su ekvivalentne jer važi

$$d_\infty(x,y) \le d_2(x,y) \text{ i } d_2(x,y) \le \sqrt{n} d_\infty(x,y),$$

pa su d_∞ i d_2 ekvivalentne.

Takođe, zbog
$$d_\infty(x,y) \le d_1(x,y) \text{ i } d_1(x,y) \le n d_\infty(x,y),$$

sledi da su metrike d_∞ i d_1 ekvivalentne.
Dakle, sledi da su sve tri metrike d_2, d_∞ i d_1 ekvivalentne.

Definicija 1.8: U metričkom prostoru (X,d) kažemo da niz $\{a_n\}_{n\in N}$ u X **konvergira** ka $a \in X$, što označavamo sa $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, ako je $\lim_{n\to\infty} d(a_n, a) = 0$, odnosno

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} d(a_n, a) = 0.$$

Umesto oznake $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ upotrebljava se i oznaka $a_n \to a$, $n \to \infty$

Definicija 1.9: Niz $\{x_n\}_{n\in N}$ iz X je **Košijev** ako važe sledeći uslov:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in N)(\forall m,n \in N)(m,n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon). \tag{1}$$

Ekvivalentan uslov uslovu (1) je:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in N)(\forall n,p \in N)(n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow d(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon).$$

Tvrđenje 1.4: Ako je niz $\{x_n\}_{n\in N}$ iz X konvergentan on je Košijev.

Dokaz: Neka je niz $\{x_n\}_{n\in N}$ konvergentan što znači da je $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, odnosno

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in N)(\forall n \in N)(n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon). \quad (2)$$

Primenjujući (2) za $\frac{\varepsilon}{2}$ dobijamo da postoji $n_0 \in N$ tako da je

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ za sve } n > n_0(\frac{\varepsilon}{2}). \quad (3)$$

Iz (3) sledi za sve $m, n > n_0(\frac{\varepsilon}{2}) = n_0'(\varepsilon)$ da je

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Što znači da je niz $\{x_n\}_{n \in N}$ Košijev.■

Napomena: Obrnuto ne mora da važi, tj. Košijev niz ne mora da konvergira.

Definicija 1.10: Ako u metričkom prostoru (X, d) za svaki Košijev niz $\{x_n\}_{n \in N}$ postoji $\lim_{n \to \infty} x_n = x \in X$, kažemo da je (X, d) **kompletan metrički prostor**.

Tvrđenje 1.5: Zatvoreni podskup kompletnog metričkog prostora je kompletan.

Definicija 1.11: Neka je X vektorski prostor nad poljem F, ($F = R$ ili $F = C$). Preslikvanja $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ za koje važe sledeći sulovi uslovi:

1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, za sve $\lambda \in F$, i sve $x \in X$;
3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, za sve $x, y \in X$;

zovemo **norma** nad X a uređeni par $(X, \|\cdot\|)$ normiran prostor.

Svaki normiran prostor $(X, \|\cdot\|)$ je metrički prostor sa metrikom d koja je efinisana na sledeći način:

$$d(x, y) = \|x - y\|, \text{ za sve } x, y \in X .$$

Ako je normiran prostor $(X, \|\cdot\|)$ kompletan metrički prostor kažemo da je **Banahov** prostor.

Primer 1.4: R^n sa normama $\|\cdot\|_p$ ($p \geq 1$) i $\|\cdot\|_\infty$ definisane sa

$$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}},$$
$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|,$$

gde je $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$ je Banahov prostor.

Primer 1.5: l^∞ vektorski prostor ograničenih nizova u R ili C sa operacijama sabiranja i skalarnog množenja koje su definisane na sledeći način: Ako je $x = (x_n)$, $y = (y_n) \in l^\infty$ i $\alpha \in F$

$$x + y = (x_n + y_n) \in l^\infty,$$
$$\alpha x = (\alpha x_n) \in l^\infty,$$

sa normom $\|(x_n)\|_{l^\infty} = \sup_{n \in N} |x_n|$ je Banahov prostor.

Primer 1.6: Na prostoru $C[a,b]$ neprekidnih funkcija nad intervalom $[a,b]$ definisaćemo normu na sledeći način

$$\|x\| = \max\{ \ |f(x)| : x \in [a,b] \ \},$$

$(C[a,b], \|\cdot\|)$ je Banahov prostor.

Napomena: Prostror $C[a,b]$ je Banahov i sa normom

$$\|f\| = \int_a^b |f(x)| dx$$

2. Banahov princip kontrakcije

Jedan od važnijih problema u matematici je ispitati da li neka funkcija ima fiksnih tačaka i kakva je njihova priroda. Mnogi rezultati o egzistenciji rešenja jednačina različitog tipa mogu se formulisati kao pitanja o postojanju fiksnih tačaka za neke pridružene funkcije. Banahova teorema o nepokretnoj tački (takođe poznata kao teorema o kontrakcionom preslikavanju ili princip kontrakcionog preslikavanja) je važan alat u teoriji metričkih prostora. Ona garantuje postojanje i jedinstvenost nepokretne tačke određenog preslikavanja iz nekog metričkog prostora u samog sebe, i daje konstruktivni metod za pronalaženje te nepokretne tačke.

Definicija 2.1: Neka je $f : X \to X$ i $X \neq \emptyset$. Elemenat $x \in X$ je **nepokretna tačka** preslikavanja f ako važi:

$$x = f(x).$$

Primer 2.1: Linearna funkcija $f : R \to R$ definisana sa $f(x) = ax + b$ za realne brojeve a i b ima tačno jednu fiksnu tačku $x_0 = \dfrac{b}{1-a}$ za $a \neq 1$, za $a = 1$, $b \neq 0$ nema fiksnix tačaka dok za $a = 1$ i $b = 0$ svaka tačka je istovremeno i nepokretna tačka.

Kvadratna funkcija $g : R \to R$ definisana sa $g(x) = ax^2 + bx + c$ za realne brojeve a, b i c uz $a \neq 0$ ima jednu, dve ili nema fiksnih tačaka što zavisi od toga da li je izraz $(b-1)^2 - 4ac$ jednak nuli, pozitivan ili negativan.

Banahova teorema o fiksnoj tački za posebne funkcije (tzv. kontrakcije) na kompletnim metričkim prostorima garantuje postojanje (jedinstvene) fiksne tačke. Kontrakcije preslikavaju tačke tako da je udaljenost slika bilo kojeg para tačaka bitno manja od udaljenosti tih tačaka. Formalna definicija je sledeća:

Definicija 2.2: Preslikavanje metričkog prostora (X, d) u samog sebe zadovoljava Lipšicov uslov ako postoji $\lambda \geq 0$ tako da za sve $x, y \in X$ važi nejednakost

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda \cdot d(x, y).$$

Ako je $\lambda < 1$ tada je preslikavanje f $\lambda - kontrakcija$ ili kraće kontrakcija.

Napomena: Primetimo da je svaka funkcija koja zadovoljava Lipšicov uslov (a samim tim i svaka kontrakcija) uniformno neprekidna funkcija na prostoru X.

Teorema 2.1- Banahov princip kontrakcije: Neka je (X,d) kompletan metrički prostor, M neprazan i zatvoren podskup od X i $f: M \to M$ kontrakcija nad M. Tada postoji jedinstvena nepokretna tačka preslikavanja f i važi $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = x$ gde je x_0 proizvoljan elemenat iz M.

Dokaz: Neka je $x_0 \in M$ i $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), ..., x_{n+1} = f(x_n), ...$. Niz $\{x_n\}_{n\in N}$ se naziva niz sukcesivnih aproksimacija. Dokazaćemo redom sledeće:

- Niz $\{x_n\}_{n\in N}$ je Košijev u M;
- $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ je jedinstvena nepokretna tačka preslikavanja f;

Šta više pokazaćemo da važi i sledeća nejednakost

$$d(x,x_n) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_0,x_1), \text{ za sve } n \in N \cup \{0\}.$$

Kako je preslikavanje f kontrakcija nad skupom M za svako $n \in N$ važi nejednakost

$$d(x_{n+1},x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq \lambda d(x_n,x_{n-1}), \qquad (n \geq 1).$$

Sukcesivnom primenom ove nejednakosti sledi nejednakost

$$d(x_{n+1},x_n) \leq \lambda^n d(x_1,x_0), \qquad \text{za sve } n \in N \cup \{0\},$$

a odavde, primenom nejednakosti trougla, za svako $p \in N$ i $n \in N \cup \{0\}$ važi

$$d(x_{n+p},x_n) \leq \sum_{k=1}^{p} d(x_{n+k}, x_{n+k-1}) \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \lambda^k d(x_1,x_0) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_1,x_0). \tag{1}$$

Kako je $\lim_{n\to\infty} \lambda^n = 0$ ($\lambda < 1$) iz (1) sledi da je niz $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ Košijev te postoji $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, a na osnovu zatvorenosti skupa M sledi da $x \in M$.

Iz

$$x_n = f(x_{n-1}),$$

na osnovu neprekidnosti preslikavanja f, sledi da je

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f(x_{n-1}) = f(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}) = f(x).$$

Ako u (1) $p \to \infty$ dobija se da je

$$d(x, x_n) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_1, x_0), \tag{2}$$

za svako $n \in N \cup \{0\}$.

Treba još pokazati jedinstvenost nepokretne tačke: Predpostavićemo suprotno, tj. da postoje dve nepokretne tačke. Neka je $y = f(y)$ tako da je $x \neq y$. Sledi

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y) < d(x, y),$$

što je kontradikcija. Dakle $x = y$ ■

Napomena: Pored klasičnog dokaza Banahove teoreme navešćemo i noviji, jednostavniji dokaz da je niz sukcesivnih aproksimacija Košijev.

Kako je preslikavanje $f : X \to X$, metričkog prostora (X, d) u samog sebe kontrakcija važi

$$d(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda d(x_1, x_2), \qquad \text{za sve } x_1, x_2 \in X, \qquad \text{gde je } \lambda < 1.$$

tj.

$$d(f^m(x_1), f^m(x_2)) \leq \lambda^m d(x_1, x_2), \qquad \text{za sve } x_1, x_2 \in X, \qquad \text{gde je } \lambda < 1.$$

Na osnovu nejednakosti trougla imamo da je

$$d(x_1, x_2) \leq d(x_1, f(x_1)) + d(f(x_1), f(x_2)) + d(f(x_2), x_2),$$

stoga je

$$(1-\lambda) d(x_1, x_2) \leq d(x_1, f(x_1)) + d(x_2, f(x_2)).$$

Kako je $\lambda < 1$, za sve $x_1, x_2 \in X$ važi

$$d(x_1, x_2) \leq \frac{1}{1-\lambda} (d(x_1, f(x_1)), d(x_2, f(x_2))). \tag{3}$$

Pokažimo sada da je niz $\{f^n x\}_{n \in N}$ Košijev. Neka je $x_1 = f^n(x)$ i $x_2 = f^m(x)$ tada na osnovu (3) imamo da je

$$d(f^n(x), f^m(x)) \leq \frac{1}{1-\lambda} (d(f^n(f(x)), f^n(x))) + d(f^m(f(x)), f^m(x)))$$
$$\leq \frac{\lambda^n + \lambda^m}{1-\lambda} d(x, f(x)).$$

Kako je $\lambda < 1$, $\lambda^n \to 0$ kada $n \to \infty$, pa $d(f^n(x), f^m(x)) \to 0$ kada $m,n \to \infty$. Time smo pokazali da je niz $\{f^n x\}_{n\in N}$ Košijev.

Napomena: Primetimo da ako za sve x, $y = Tx \in O(x_0)$, $x_0 \in X$, važi

$$d(Fx, Fy) \le \lambda d(x, y), \qquad \lambda \in [0,1), \tag{4}$$

tada niz $\{f^n x_0\}_{n\in N}$ konvergira ka $z \in X$. Takođe na osnovu Teoreme 2.1 imamo da je

$$d(f^n x_0, z) \le \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_0, fx_0) \ , \qquad n \in N.$$

Šta više, ako je f orbitalno neprekidno u z ili (4) važi za sve $x, y \in \bar{O}(x_0)$ tada je z nepokretne tačka preslikavanja f. Ako imamo da važi (4) na $\bar{O}(x_0)$ tada je

$$\begin{aligned} &d(z, fz) \le d(z, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, fz) = \\ &d(z, x_{n+1}) + d(fx_n, fz) \le d(z, x_{n+1}) + \lambda d(x_n, z). \end{aligned}$$

Pa kada $n \to \infty$ imamo da je $d(z, fz) = 0$, odnosno z je nepokretne tačka preslikavanja f.

Ako je f orbitalno kompletno tada je

$$z = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}x = f(\lim_{n\to\infty} f^n x) = f(z).$$

Napomena: Ako u nejednakost (2) stavimo da je $n = 0$ zaključujemo da se rešenje x jednačine $x = f(x)$ nalazi u lopti

$$B(x_0, \frac{d(x_1, x_0)}{1-\lambda}) = \left\{ \ x \mid \ d(x, x_0) \le \frac{d(x_1, x_0)}{1-\lambda} \right\},$$

što navodi na sledeći zaključak.

Tvrđenje 2.1: Neka je (X, d) kompletan metrički prostor i $f : B(x_0, r) \to X$ tako da važi sledeće:

$$\begin{aligned} &d(f(x_0), x_0) \le (1-\lambda)\cdot r, \\ &d(f(x_1), f(x_2)) \le \lambda \cdot d(x_1, x_2). \end{aligned} \tag{5}$$

Tada postoji jedinstvena nepokretna tačka $x \in B(x_0, r)$ preslikavanja f.

Dokaz: Dokaz je sliča dokazu Teoreme 2.1. Treba jedino pokazati da za $\{x_n\}_{n\in N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \in N \cup \{0\}$, važi

$$x_n \in B(x_0, r), \qquad \text{za sve } n \in N,$$

Odnosno da je

$$d(x_n, x_0) \le r, \qquad \text{za sve } n \in N.$$

Iz uslova (5) sledi da je $x_1 = f(x_0) \in B(x_0, r)$. Predpostavimo da su svi članovi niza $\{x_n\}_{n\in N}$ do člana x_{n-1} u skupu $B(x_0, r)$.

Kako je

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_0) &\le d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \ldots + d(x_1, x_0) \\
&\le (\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} + \ldots + 1) d(x_0, x_1) \\
&< \frac{1}{1-\lambda} d(x_0, x_1) \\
&= \frac{1}{1-\lambda} d(x_0, f(x_0)) \le r,
\end{aligned}$$

što znači da je $x_n \in B(x_0, r)$. Time smo matematičkom indukcijom pokazali da je niz $\{x_n\}_{n\in N} \subseteq B(x_0, r)$. Preostaje samo primenuti Banahovu teoremu za $M = B(x_0, r)$.

Tvrđenje 2.2: Neka je (X, d) kompletan metrički prostor i $f : X \to X$. Ako postoji $n \in N$ tako da važi

$$d(f^n(x), f^n(y)) \le \lambda d(x, y), \qquad x, y \in X, \tag{6}$$

tada postoji jedinstvena nepokretna tačka preslikavanja f.

Dokaz: Definišimo preslikavanje f^* na sledeći način

$$f^*(x) = f^n(x), \qquad x \in X.$$

Tada na osnovu (6) imamo da je

$$d(f^* x, f^* y) \le \lambda d(x, y), \qquad x, y \in X$$

Na osnovu Banahovog principa kontrakcije znamo da preslikavanje f^* ima jedinstevnu nepokretnu tačku, tj. da postoji $x \in X$ takvo da je

$$f^* x = x,$$

odnosno

$$f^n x = x.$$

Iz

$$f^n(fx) = f(f^n x) = fx,$$

Sledi da je i fx nepokretna tačka preslikavanja f^* pa je zbog jedinstvenosti nepokretne tačke $fx = x$.

Primetimo da su uslovi Banahovog principa dovoljni ali ne i potrebni za egzistenciju i jedinstvenost nepokretne tačke. Tako recimo realna funkcija $f:[0,1] \to [0,1]$ definisana sa $f(x) = x^2 - x + 1$, $x \in [0,1]$, ima jedinstvenu nepokretnu tačku $x = 1$ ali nije kontrakcija.

Napomena: U Teoremi 2.1 pojavljuje se uslov $f(M) \subseteq M$.Međutim postoje klase metričkih prostora u kojima je dovoljno predpostaviti da je $f(\partial M) \subseteq M$ odnosno da preslikavanje f ima osobinu da rub skupa M, skup ∂M, preslikava u M.

Tvrđenje 2.3: Neka je $D = [a,b]$ i $f : D \to R$ neprekidna funkcija sa osobinom $f(a) \in D$, $f(b) \in D$. Tada postoji nepokretna tačka $x \in D$, preslikavanja f.

Dokaz: Kako je $f(a) \in D$, $f(b) \in D$, sledi da je

$$f(a) \geq a \qquad \text{i} \qquad f(b) \leq b.$$

Ako je $f(a) = a$ ili $f(b) = b$ tvrđenje je dokazano.

Neka je $f(a) = A > a$ i $f(b) = B < b.$ Kako je f neprekidno na intervalu D sledi da je funkcija $\varphi(x) = x - f(x)$ takođe neprekidna na intervalu D.
Imamo

$$\varphi(a) = a - f(a) = a - A < 0$$
$$\varphi(b) = b - f(b) = b - B > 0,$$

pa na osnovu Teoreme o suprotnim znacima sledi da postoji $x \in D$ takvo da je $\varphi(x) = 0$, odnosno, takvo da je $f(x) = x$.

Tvrđenje 2.4: Neka je $f : D \to R$, $D = [a,b]$, kontrakcija sa konstantom λ. Neka je $f(a), f(b) \in D$ i

- $x_0 = a, \quad f(a) + f(b) < a + b,$
- $x_0 = b, \quad f(a) + f(b) \geq a + b.$

Tada niz sukcesivnih aproksimacija $\{x_n\}_{n \in N}$ konvergira ka jedinstvenom rešenju $z \in D$ jednačine $f(x) = x$.

Dokaz: Treba dokazati $f(x) \geq a$ za sve $x \in D$, ili $f(x) \leq b$ za sve $x \in D$.
Razmotrimo slučaj

$$f(a) + f(b) \geq a + b.$$

Tada važi

$$f(a) + f(b) - b \geq a.$$

Takođe je, za $x \in D$,

$$f(a) - f(x) \leq |f(a) - f(x)| \leq \lambda \cdot |a - x| < a - x,$$

i

$$f(b) - f(x) \leq |f(b) - f(x)| \leq \lambda \cdot |b - x| < b - x,$$

pa je

$$f(a) + f(b) - 2f(x) \leq b - a$$

odnosno

$$2a \leq f(a) + f(b) - b + a \leq 2f(x),$$

što daje $f(x) \geq a$ za sve $x \in D$. Analogno se pokazuje da iz

$$f(a) + f(b) < a + b,$$

sledi $f(x) \leq b$ za sve $x \in D$.
Indukcijom ćemo pokazati da $x_k \in D$, $k = 0,1,2,\ldots.$

Neka je $f(a) + f(b) \geq a + b$, tj. $x_0 = b$. (Slučaj $f(a) + f(b) > a + b$ se razmatra analogno, pri čemu se za x_0 uzima a).

Po pretpostavci je $f(b) \leq b$. Tada je $x_1 = f(x_0) \leq x_0$ i

$$x_2 - x_1 \leq |f(x_1) - f(x_0)| \leq \lambda \cdot |x_1 - x_0| \leq x_0 - x_1$$

pa je $x_2 \leq x_0$. Neka je $x_i \leq x_0$, za $i = 0,1,2,\ldots,k$, $k \geq 2$. Treba dokazati da je $x_{k+1} \leq x_0$.
Predpostavimo suprotno, tj. da je $x_{k+1} > x_0$.
Tada je

$$\begin{aligned} &0 \leq x_0 - x_2 < x_{k+1} - x_2 = |x_{k+1} - x_2| \leq \\ &\lambda \cdot |x_k - x_1| \leq \lambda^2 \cdot |x_{k-1} - x_0|, \end{aligned}$$

i

$$0 \le x_0 - x_{k-1} < x_{k+1} - x_{k-1} \le$$
$$\lambda \cdot |x_k - x_{k-2}| \le \ldots \le \lambda^{k-1} \cdot |x_2 - x_0| = \lambda^{k-1}(x_0 - x_2),$$

te je

$$x_0 - x_2 < \lambda^{k+1}|x_2 - x_0| \le x_0 - x_2 \,,$$

što je kontradikcija.

Dokazali smo da važi $x_k \in D,\ k = 0,1,2,....$ Kako je f kontrakcija na D, imamo za svako $m \ge 1$ i $k \ge 1$

$$|x_{m+1} - x_m| = |f(x_m) - f(x_{m-1})| \le \lambda \cdot |x_m - x_{m-1}| \le \ldots \le \lambda^m \cdot |x_1 - x_0|$$

$$|x_{k+m} - x_{k+m-1}| = |f(x_{k+m-1}) - f(x_{k+m-2})| \le$$
$$\lambda \cdot |x_{k+m-1} - x_{k+m-2}| \le \ldots \le \lambda^m \cdot |x_k - x_{k-1}|.$$

Očigledno je

$$|x_{k+m} - x_k| \le |x_{k+m} - x_{k+m-1}| + |x_{k+m-1} - x_{k+m-2}| + \ldots + |x_{k+1} - x_k|.$$

Odatle dobijamo

$$|x_{k+m} - x_k| \le \lambda^m \cdot |x_k - x_{k-1}| + \lambda^{m-1} \cdot |x_k - x_{k-1}| + \ldots + \lambda \cdot |x_k - x_{k-1}| \,,$$

odnosno

$$|x_{k+m} - x_k| \le |x_k - x_{k-1}| \sum_{j=1}^{m} \lambda^j = \lambda \cdot \frac{1-\lambda^m}{1-\lambda} |x_k - x_{k-1}| \,.$$

Pa imamo da je

$$|x_{k+m} - x_k| \le \frac{\lambda}{1-\lambda} |x_k - x_{k-1}| \le \frac{\lambda^m}{1-\lambda} |x_1 - x_0|.$$

Zbog $0 \le \lambda < 1$ za $k \ge K(\varepsilon)$ i svako $m \ge 1$ važi

$$|x_{k+m} - x_k| < \varepsilon$$

To znači da je niz $\{x_k\}_{k \in N}$ Košijev, pa prema tome i konvergentan odnosno važi

$$z = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(\lim_{k\to\infty} x_k) = f(z) \,.$$

Odnosno $z \in D$ je rešenje jednačine $f(x) = x$

Slučaj Lipšicove funkcije za $\lambda = 1$ zauzima posebno mesto u teoriji nepokretne tačke.

Definicija 2.3: Preslikavanje F metričkog prostora (X,d) u samog sebe je **neekspanzivno** ako je za svako $(x,y) \in X$ zadovoljena nejednakost

$$d(Fx,Fy) \le d(x,y).$$

Neekspanzivno preslikavanje kompletnog metričkog prostora (X,d) u samog sebe ne mora imati nepokretnu tačku, kao što pokazuje preslikavanje $F: x \to x+a$ $(a \neq 0)$, u Banahovom prostoru $(X,\|\cdot\|)$. Takođe nepokretna tačka ukoliko postoji ne mora biti jedinstvena- što se lako vidi ako se posmatra preslikavanje $Fx = x$ za sve $x \in X$.

Tvrđenje 2.5: Neka je M ograničen, zatvoren i konveksan podksup Banahovog prostora $(X,\|\cdot\|)$ i F neekspanzivno preslikavanje M u M. Tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji $x(\varepsilon) \in X$ tako da je

$$\|Fx(\varepsilon) - x(\varepsilon)\| < \varepsilon.$$

Dokaz: Bez gubitka opštosti može se predpostaviti da je $0 \in M$ i $M \subset B(0,R)$. Kako je preslikavanje F neekspanzivno, sledi da je za $r \in (0,1)$ preslikavanje rF kontrakcija te postoji $y(r)$ tako da je

$$rFy(r) = y(r).$$

Odavde je

$$\|Fy(r) - y(r)\| = \|Fy(r) - rFy(r)\| = (1-r)\|Fy(r)\| \le (1-r)R,$$

te je $x(\varepsilon) = y(r)$ za $r > 1 - \dfrac{\varepsilon}{R}$.

Iz ove teoreme imamo da će preslikavanje F imati nepokretnu tačku ako je skup $(I-F)X$ zatvoren, jer je 0 tačka nagomilavanja skupa $(I-F)X$ sledi egzistencija elementa $x \in X$ tako da je $Fx - x = 0$ odnosno $Fx = x$.

Čak šta više ni stroga nejednakost nam ne garantuje postojanje nepokretne tačke za neekspanzivna preslikavanja što ćemo ilustrovati sledećim primerom.

Primer 2.2: Neka je (X,d) metrički prostor i $f: X \to X$ neprekidno preslikavanje za koje važi:

$$d(f(x), f(y)) < d(x,y), \qquad \text{za sve } x,y \in X, \quad x \neq y$$

Pokazaćemo da preslikavanje f ne mora da ima nepokretnu tačku.

Neka je $X=[1,\infty)$ a $d(x,y)=|x-y|$, za sve $x,y\in[1,\infty)$. Ako je $f(x)=x+\frac{1}{x}$ za sve $x\in[1,\infty)$, tada je $f:X\to X$ i:

$$\left|f(x)-f(y)=\left|x+\frac{1}{x}-y-\frac{1}{y}\right|\right|=\left|1-\frac{1}{\theta^2}\right|\cdot|x-y|,\qquad \theta\in(x,y)$$

odakle sledi:

$$|f(x)-f(y)|<|x-y|,\qquad \text{za sve } x\neq y\ x,y\in X .$$

Međutim preslikavanje f nema nepokretnu tačku jer iz $f(x)=x$ sledi:

$$x=x+\frac{1}{x},$$

te bi bilo $\frac{1}{x}=0$.

Tvrđenje 2.6: Neka je (X,d) kompaktan metrički prostor i f preslikavanje X u X tako da je:

$$d(f(x),f(y))<d(x,y),\qquad \text{za sve } x,y\in X,\ x\neq y .$$

Tada postoji nepokretna tačka preslikavanja f.

Dokaz: Iz neprekidnosti preslikvanja f sledi neprekidnost preslikavanja

$$x\to d(x,f(x)),\qquad x\in X \tag{7}$$

Kako je prostor X po pretpostavci kompaktan preslikavanje definisano u (7) dostiže infimum odnosno postoji $x_0\in X$ tako da je

$$\inf_{x\in X} d(x,f(x))=d(x_0,f(x_0)), \tag{8}$$

Neka je $x_0\neq f(x_0)$.

Iz (7) sledi

$$d(f(x_0),f(f(x_0)))<d(x_0,f(x_0)),$$

što je u suprotnosti sa (8). Prema tome $d(x_0,f(x_0))=0$, što znači da je x_0 nepokretna tačka preslikavanja f.

2.1. Neprekidna zavisnost nepokretne tačke od parametara

U primeni često preslikavanje zavisi od parametra α koji pripada nekom skupu pa je od interesa da se ispita kako promena parametra α utiče na promenu nepokretne tačke x_α preslikavanja f_α. Jedan odgovor na to pitanje daće nam sledeća teorema.

Teorema 2.1.1: Neka je (X,d) kompletan metrički prostor, M zatvoren podksup od X, (A,τ) topološki prostor i $f : A \times M \to M$ tako da su zadovoljeni sledeći uslovi:

i. za svako $x \in M$ preslikavanje $\alpha \to f(\alpha, x)$ je neprekidno preslikavanje iz A u M;

ii. $d(f(\alpha,x), f(\alpha,y)) \leq \lambda d(x,y)$, za svako $(x,y,\alpha) \in M \times M \times A$ gde je $\lambda < 1$ i ne zavisi od $\alpha \in A$.

Tada postoji jedno i samo jedno neprekidno preslikavanje $x^* : A \to M$ ($x^* = \{x(\alpha)\}$) tako da je $x(\alpha) = f(\alpha, x(\alpha))$ za svako $\alpha \in A$.

Dokaz: Egzistencija i jedinstvenost preslikavanja $x^* = x(\alpha), \alpha \in A$, takvog da je $x(\alpha) = f(\alpha, x(\alpha))$ za svako $\alpha \in A$ sledi iz Teoreme 2.1. Ostaje da pokažemo neprekidnost preslikavanja x^*. Neka je α_0 proizvoljan elemenat iz A. Na osnovu Teoreme 2.1. znamo da je $x(\alpha) = \lim_{n\to\infty} x_n(\alpha)$ gde je $x_{n+1}(\alpha) = f(\alpha, x_n(\alpha))$ $n = 0,1,\ldots$. U Teoremi 2.1 je pokazano da važi nejednakost

$$d(x(\alpha), x(\alpha_0)) \leq \frac{d(x_1(\alpha), x(\alpha_0))}{1-\lambda} = \frac{1}{1-\lambda} d(f(\alpha, x(\alpha_0)), f(a_0, x(\alpha_0))).$$

Sada iz neprekidnosti preslikavanja $\alpha \to f(\alpha, x)$ sledi i neprekidnost preslikavanja $x^* = x(\alpha)$ ■

3. Neke primene Banahove teoreme

Teoremu o nepokretnoj tački možemo primetniti u dokazima teorema o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja za jednačine različitog tipa. Primetimo da dokazivanje egzistencije i jedinstvenosti rešenja jednačine $f(x)=x$ primenom Teoreme o nepokretnoj tački daje i postupak približnog nalaženja tog rešenja poznat kao metod sukcesivnih aproksimacija.

Posmatrajmo prvo najjednostavniji slučaj realne funkcije jedne realne promenljive

Ako za realnu funkciju $f:[a,b]\to[a,b]$ postoji postoji realan broj $\lambda\in[0,1)$ tako da važi

$$|f(x_1)-f(x_2)|\le\lambda|x_1-x_2|,$$

tada postoji jedinstveno rešenje jednačine $f(x)=x$ koje se dobija metodom sukcesivnih aproksimacija. Specijalno, ako je funkcija f diferencijabilna nad $[a,\,b]$ i pri tom važi $|f^{/}(x)|\in[0,\,1)$, $x\in(a,b)$, tada na osnovu Lagranžove teoreme važi

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|f^{/}(\xi)||x_1-x_2|,\qquad \text{za neko } \xi\in(x_1x_2)\subset[a,\,b],$$

pa postoji jedinstveno rešenje jednačine $f(x)=x$ čiju približnu vrednost možemo odrediti metodom sukcesivnih aproksimacija.

Primer 3.1: Pokažimo da je funkcija $f(x)=(1-\sin x)^{1/2}$ kontrakcija koja preslikava interval $[0.4\,,\;0.8]$ u samog sebe te ima jedinstvenu nepokretnu tačku.
Potražićemo prvi izvod funkcije f

$$f^{/}(x)=-\cos x/(2(1-\sin x)^{1/2})<0,$$

za $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ funkcija f je opadajuća u ovom intervalu.

Kako je $f(0.8)=0.5532...\ge 0.4$ i $f(0.4)=0.782...\le 0.8$ funkcija f preslikava interval $[0.4\,,\;0.8]$ u samog sebe. Kako je R kompletan prostor, takođe je i zatvoreni interval $[0.4\,,\;0.8]$ kompletan.

Prvi izvod funkcije f nad intervalom $[0.4,\,0.8]$ je

$$|f^{/}(x)|\le\cos 0.4/(2(1-\sin 0.8)^{1/2})=0.86624<0.87.$$

Na osnovu Langražove Teoreme o srednjoj vrednosti važi da je

$$|f(x)-f(y)| \leq \frac{\cos 0.4}{2(1-\sin 0.8)^{1/2}}\ |x-y| \leq 0.87\ |x-y|.$$

To znači da je funkcija f kontrakcija sa koeficijentom kontrakcije $\lambda = 0.87$ pa na osnovu Banahove teoreme o nepokretnoj tački postoji jedinstvena nepokretna tačka preslikavanja f na datom intervalu. Za polaznu tačku možemo uzeti bilo koju tačku datog intervala. Ako je $x_0 = 0.6$ tada je $x_1 = f(x_0) = 0.6598$, $x_2 = f(x_1) = 0.6221...$

Aproksimacije i ocene grešaka aproksimacija su date u sledećoj tabeli.

k	x_k	A_k	B_k
0	0.6	-	-
1	0.65981	0.40027	0.40027
2	0.62211	0.2523	0.34823
3	0.64595	0.15955	0.30296
4	0.63091	0.10065	0.26358
5	0.64041	0.06358	0.22931
6	0.63441	0.04015	0.1995

Gde je

$$A_k = \frac{\lambda}{1-\lambda}|x_k - x_{k-1}|,$$

$$B_k = \frac{\lambda^k}{1-\lambda}|x_1 - x_0|.$$

Vrednost A_k naziva se aposteriorna ocena greške, a vrednost B_k apriorna ocena greške.

Primer 3.2: Neka je data jednačina

$$4 - x + \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} = 0.$$

Pokažimo da ova jednačina ima rešenje na intervalu $[4,\ 5]$.

Neka je

$$f(x) = 4 - x + \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}},$$

a $$\varphi(x)=4+\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}, \qquad x\in[4,5]$$

Jednačine $f(x)=0$ i $\varphi(x)=x$ su ekvivalentne na intervalu $[4,5]$. Za ovakvo definisano φ ispunjen je i uslov $\varphi([4,5])\subset[4,5]$ jer je $\varphi(4)=4.84...$ i $\varphi(5)=4.87...$

Kako je

$$\varphi'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)^4}},$$

za $x\in[4,5]$ imamo da je

$$|\varphi'(x)|\le\frac{2}{15\sqrt[3]{45}}<0.037...<1.$$

Na osnovu Langražove Teoreme o srednjoj vrednosti važi

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|\le 0.037|x-y|.$$

To znači da je funkcija φ kontrakcija sa koeficijentom kontrakcije $\lambda=0.037$.

Postupkom sukcesivnih aproksimacija dobijaju se približne vrednosti rešenja posmatrane jednačine. Aproksimacije i ocene grešaka aproksimacija su date u sledećoj tabeli

k	x_k	A_k	B_k
0	4	-	-
1	4.843432665	0.0324	0.03241
2	4.869661833	$1.008\cdot10^{-3}$	$1.199\cdot10^{-3}$
3	4.870335391	$2.5879\cdot10^{-5}$	$4.4364\cdot10^{-5}$
4	4.870353983	$7.1433\cdot10^{-7}$	$1.6414\cdot10^{-6}$
5	4.87035307	$3.5079\cdot10^{-8}$	$6.0734\cdot10^{-8}$

Primer 3.3: Neka je data jednačina $f(x)=0$ gde je

$$f(x)=x^3+4x^2+4x-1.$$

Pokažimo da ova jednačina ima približno rešenje na intervalu $[0,\ 0.4]$ koje određujemo postupkom sukcesivnih aproksimacija $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ gde je

$$\varphi(x)=\frac{1}{(x+2)^2}.$$

Kako je

$$|\varphi'(x)|=\left|\frac{-2}{(x+2)^3}\right|\le\frac{1}{4}=0.25,\quad x\in[0,0.4],$$

može se uzeti $\lambda=0.25$.

Aproksimacije i ocene grešaka aproksimacija su date u sledećoj tabeli.

k	x_k	A_k	B_k
0	0.4	-	-
1	0.173611	0.075463	0.075463
2	0.211659	0.012683	0.018866
3	0.204439	0.002407	0.004716
4	0.205780	0.000447	0.001179
5	0.205530	0.000083	0.000295
6	0.205577	0.000016	0.000074

Primer 3.4: Posmatrajmo sistem linearnih jednačina po $x_i,\ i\in\{1,2,...,n\}$.

$$x_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i,\qquad \text{za sve}\quad i\in\{1,2,...,n\}\tag{1}$$

gde $a_{i,j},b_i\in R$, za sve $i,j\in\{1,2,...,n\}$.

Sistem (1) se može zapisati u obliku

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Uvodeći oznake:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

sistem je moguće zapisati u sledećoj formi

$$X = AX + B.$$

Ako je preslikavanje $f : R^n \to R^n$ definisano sa

$$f(X) = AX + B,$$

tada je rešenje sistema (1) istovremeno i nepokretna tačka preslikavanja f.

Pokažimo da ako važi

$$\max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} \left| a_{ij} \right| = \lambda < 1,$$

tada preslikavanje $f(X) = AX + B$ ima jedinstvenu nepokretnu tačku.

Neka je metrika na R^n data na sledeći način

$$d_\infty(X,Y) = \max_{1 \le i \le n} \left| x_i - y_i \right|,$$

gde je

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Pokazaćemo da je

$$d(f(X_1), f(X_2)) \le \lambda \cdot d(X_1, X_2), \qquad \text{za sve } X_1, X_2 \in R^n .$$

Ukoliko je $Y_1 = f\ (X_1)$ i $Y_2 = f\ (X_2)$.

$$Y_1 = \begin{bmatrix} y_1^1 \\ y_2^1 \\ . \\ . \\ . \\ y_n^1 \end{bmatrix}, \quad Y_2 = \begin{bmatrix} y_1^2 \\ y_2^2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n^2 \end{bmatrix}, \quad X_1 = \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n^1 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n^2 \end{bmatrix},$$

važi

$$y_i^1 = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^1 + b_i \quad \text{za sve } i \in \{1,2,...,n\},$$

$$y_i^2 = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^2 + b_i \quad \text{za sve } i \in \{1,2,...,n\}.$$

Odavde je

$$\begin{aligned} \left|y_i^1 - y_i^2\right| &= \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j^1 - x_j^2)\right| \\ &\le \max_{1\le j\le n}\left|x_j^1 - x_j^2\right| \cdot \sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|, \end{aligned} \qquad \text{za sve } i \in \{1,2,...,n\}.$$

Sledi da je

$$\begin{aligned} d(Y_1, Y_2) &= \max_{1\le i\le n}\left|y_i^1 - y_i^2\right| \\ &\le \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right| \cdot \max_{1\le j\le n}\left|x_j^1 - x_j^2\right| = \lambda \cdot d(X_1, X_2). \end{aligned}$$

Preslikavanje f je kontrakcija pa preostaje samo primeniti Banahov princip.

Da bi smo mogli primeniti Banahovu teoremu o fiksnoj tački na funkciju $F : X \to X$ kompletnog metričkog prostora (X, d) u samog sebe moramo znati da je F kontrakcija u odnosu na metriku d na X. Ako zadana funkcija F nije kontrakcija u odnosu na metriku d ponekad je ipak moguće naći neku drugu metriku ρ u odnosu na koju F postaje kontrakcija što ćemo ilustrovati sledećim primerom.

Primer 3.5 : Neka $F : R^2 \to R^2$ je linearna funkcija definisana na sledeći način

$$F(x, y) = \left(\frac{8x}{10} + \frac{8y}{10}, \frac{x}{10} + \frac{y}{10} \right), \qquad \text{za sve } (x, y) \in R^2 .$$

Neka su metrike d_2, d_1 definisane na sledeći način

$$d_2((x, y), (u, v)) = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2},$$
$$d_1((x, y), (u, v)) = |x-u| + |y-v|.$$

za sve $(x, y), (u, v) \in R^2$. Funkcija F nije kontrakcija u odnosu na metriku d_2 jer je razmera rastojanja

$$d_2(F((0,0)), F((-6,-2))) = \sqrt{\left(\frac{48}{10} + \frac{16}{10}\right)^2 + \left(\frac{6}{10} + \frac{2}{10}\right)^2} = \frac{4}{5}\sqrt{65} ,$$

slika tačaka $(0,0)$ i $(-6,-2)$ i rastojanja tih tačaka

$$d_2((0,0), (-6,-2)) = \sqrt{6^2 + 2^2} = \frac{4}{5}\sqrt{\frac{125}{2}} ,$$

veći od 1. Sa druge strane u odnosu na metriku d_1 funkcija F je kontrakcija sa koeficijentom kontrakcije $\frac{9}{10}$ jer je

$$d_1(F(x, y), F(u, v)) \leq \frac{9}{10} d_1((x, y), (u, v)) .$$

za sve $(x, y), (u, v) \in R^2$.

Dakle svaka metrika d na metričkom prostoru (X, d) određuje klasu $K(d)$ funkcija $F : X \to X$ koje su kontrakcije u odnosu na metriku d. Pri tome je očigledno da $K(d) \neq K(\rho)$ čak i ako su metrike d i ρ ekvivalentne.

Ako je X Banahov prostor, norme $|\cdot|$ i $\|\cdot\|$ su ekvivalentne ako možemo naći pozitivne konstante m i M takve da važi

$$m|x| \le \|x\| \le M|x|, \qquad \text{za sve } x \in X$$

Sada je jasno da će bilo koja Lipšicova funkcija u odnosu na neku normu biti Lipšitcova funkcija i u odnosu na svaku njoj ekvivalentnu normu. Zato je u Banahovim prostorima, za proučavanje Lipšitcove funkcije $F : X \to X$ vrlo često korisno naći, ako je to moguće, ekvivalentnu normu u odnosu na koju je funkcija F kontrakcija. Takav pristup ilustrovaćemo u sledeća dva primera

Primer 3.6: Posmatrajmo linearan sistem od n-jednačina sa n-nepoznatih

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ &. \\ &\ldots \\ &. \\ &a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{aligned} \tag{2}$$

Kao što znamo sistem ima jedinstveno rešenje ako i samo ako je determinanta sistema različita od nule. Postavlja se pitanje kako se može približno rešiti dati sistem sa određenom tačnošću.

Posmatrajmo ekvivalentan sistem

$$\begin{aligned} &x_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n + b_1 \\ &x_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n + b_2 \\ &. \\ &\ldots \\ &. \\ &x_n = c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \ldots + c_{nn}x_n + b_n. \end{aligned}$$

gde je

$$\begin{aligned} c_{ii} &= 1 - a_{ii}, \qquad && i = 1,2,\ldots,n, \\ c_{ij} &= -a_{ij}, && i \ne j. \end{aligned}$$

Definišimo preslikavanje $f : R^n \to R^n$ koje preslikava tačku $\xi = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ u tačku $\eta = (y_1, y_2, \ldots y_n)$ gde je

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j + b_i \, .$$

Tačka $x \in R^n$ je rešenje sistema (2) ako i samo ako je fiksna tačka preslikavanja f. Postavlja se pitanje kada je funkcija f kontrakcija u datom metričkom prostoru (R^n, d).

Neka je:

a) Metrički prostor (R^n, d_∞), sa $d_\infty(x,y) = \max\limits_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|, \quad x, y \in R^n$.

$$\begin{aligned}
d_\infty(\eta', \eta'') &= \max_{1 \le i \le ni} |y_i' - y_i''| \\
&= \max_{1 \le i \le n} \left| \sum_{j=1}^{n} c_{ij} (x_j' - x_j'') \right| \\
&\le \max_{1 \le i \le n} \left(\sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| |x_j' - x_j''| \right) \\
&\le \max_{1 \le k \le n} |x_k' - x_k''| \cdot \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| \\
&= \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| \cdot d_\infty(\xi', \xi'').
\end{aligned}$$

Prema tome, ako važi da je

$$\sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| \le \lambda < 1, \qquad i = 1,2,\ldots,n,$$

funkcija f ima jedinstvenu nepokretnu tačku tj. naš sistem ima jedinstveno rešenje.

b) Metrički prostor (R^n, d_1), gde je $d_1(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \quad x, y \in R^n$.

$$\begin{aligned}
d_1(\eta', \eta'') &= \sum_{i=1}^{n} |y_i' - y_i''| \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} c_{ij} (x_j' - x_j'') \right| \\
&\le \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| |x_j' - x_j''| \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |c_{ij}| |x_j' - x_j''| \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(|x_j' - x_j''| \sum_{i=1}^{n} |c_{ij}| \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(|x_j' - x_j''| \cdot \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |c_{ij}| \right) = \lambda \cdot d_1(\xi', \xi'').
\end{aligned}$$

Ako je

$$\sum_{i=1}^{n} \left| c_{ij} \right| \le \lambda < 1, \qquad j = 1,2,\dots,n,$$

preslikavanje f ima jedinstvenu nepokretnu tačku.

c) Metrički prostor (R^n, d_2), sa $d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$, $x, y \in R^n$.

Koristićemo Koši-Švarcovu nejednakost

$$\sum_{j=1}^{n} a_j b_j \le \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{n} b_j^2} .$$

Imamo

$$\begin{aligned}
& d_2^2(\eta', \eta'') = \sum_{i=1}^{n} (y_i' - y_i'')^2 \\
& = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} c_{ij} (x_j' - x_j'')\Big)^2 \\
& \le \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2 \cdot \sum_{j=1}^{n} (x_j' - x_j'')^2\Big) \\
& = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2 \cdot d_2^2(x', x'')\Big) \le \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2 \cdot d_2^2(\xi', \xi'').
\end{aligned}$$

Ako je

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2 \le \lambda < 1 ,$$

preslikavanje f ima jedinstvenu nepokretnu tačku tj sistem (2) ima jedinstveno rešenje
Iz datih uslova sledi da je

$$\begin{vmatrix}
c_{11} - 1 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\
c_{21} & c_{22} - 1 & \dots & c_{2n} \\
. & & & . \\
. & \dots & \dots & . \\
. & & & . \\
c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} - 1
\end{vmatrix} \ne 0,$$

jer preslikavanje f ima jedinstvenu nepokretnu tačku, sistem je određen, pa mu je determinanta različita od nule.

Primer 3.7: Posmatrajmo sada beskonačan sistem linearnih jednačina

$$\|x\|_\infty = \sup_{i \in N} |x_i| , \qquad x = \{x_1, x_2, ...\} \in l^\infty ,$$

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \tag{3}$$

Neka je $c_{ij} = \delta_{ij} - a_{ij}$, $(i, j = 1,2,...)$, gde je $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

Ako postoje brojevi q i B takvi da važi:

$$|b_i| \leq B , \qquad (i = 1,2,...),$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |c_{ij}| \leq q < 1 , \qquad (i = 1,2,...),$$

pokazaćemo da postoji jedno i samo jedno rešenje $\{ x_1^*, x_2^*,... \}$ sistema (3) za koje važi da postoji $M > 0$ takvo da je $|x_j^*| \leq M$, za sve $j \in N$.

Problem ćemo rešavati u prostoru l^∞ ograničenih nizova sa normom $\|x\| = \sup_{i \in N} |x_i|$ za $x = \{ x_1^*, x_2^*,..., \} \in l^\infty$ s obzirom da se za rešenje traži da je ograničen niz.

Pre svega potrebno je sistem zapisati u sledećem obliku

$$x_i = \sum_{j=1}^{\infty} c_{ij} x_j + b_i , \quad i \in N .$$

Za $x \in l^\infty$ označimo sa $Tx = \{\mu_i\}$ gde je $\mu_i = \sum_{j=1}^{\infty} c_{ij} x_j + b_i$, za sve $i \in N$. Pokazaćemo da $Tx \in l^\infty$, za sve $x \in l^\infty$. Kako je $|x_i| \leq A$ ($i \in N$) sledi da je za sve $i \in N$

$$|\mu_i| \le \sum_{j=1}^{\infty} |c_{ij}||x_j| + |b_i| \le Aq + B,$$

a to znači da $\{\mu_i\} \in l^{\infty}$. Šta više može se pokazati da je T i kontrakcija.
Neka je $x_1 = \{x_i^1\}$, $x_2 = \{x_i^2\}$, $Tx_1 = \{\mu_i^1\}$ i $Tx_2 = \{\mu_i^2\}$.

Tada je

$$\|Tx_1 - Tx_2\|_{l^{\infty}} = \sup_{i \in N} |\mu_i^1 - \mu_i^2| = \sup_{i \in N} \left| \sum_{j=1}^{\infty} c_{ij}(x_j^1 - x_j^2) \right| \le$$

$$\sup_{i \in N}(\sup_{j \in N} |x_j^1 - x_j^2| \cdot \sum_{j=1}^{\infty} |c_{ij}|) \le q \sup_{j \in N} |x_j^1 - x_j^2| = \|x_1 - x_2\|_{l^{\infty}}.$$

Kao posledica Banahovog principa kontrakcije sada se dobija egzistencija i jedinstvenost rešenja jednačine $Tx = x$. Rešenje ove jednačine u prostoru l^{∞} je traženo rešenje sistema (3).

Primer 3.8: Primenom princiipa kontrakcije rešićemo početni problem

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0, \tag{4}$$

gde je funkcija f definisana i neprekidna nad pravugaonikom

$$[x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] = P, \qquad a, b > 0.$$

Neka je $K = \max_{(x,y) \in P} |f(x, y)|$. Tada važi sledeće tvrđenje.

*Tvrđenje 3.1:*Predpostavimo da postoji $M > 0$ tako da je

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le M|y_1 - y_2|, \qquad \text{za sve } (x, y_1), (x, y_2) \in P.$$

Tada u intervalu $[x_0 - h, x_0 + h]$ gde je $h < \min\left\{a, \frac{b}{K}, \frac{1}{M}\right\}$ postoji jedinstveno rešenje početnog problema (4).

Dokaz: Neka je $C[x_0 - h, x_0 + h]$ skup svih neprekidnih preslikavanja

$$s : [x_0 - h, x_0 + h] \to R,$$

a $A = \{\ s;\ \ s \in C[x_0 - h, x_0 + h], |s(x) - y_0| \le b, \qquad \text{za sve } x \in [x_0 - h, x_0 + h]\ \}.$

U prostoru $C[x_0 - h, x_0 + h]$ defisaćemo metriku na sledeći način

$$d(s,r)=\max_{t\in[x_0-h,x_0+h]}|s(t)-r(t)|, \qquad \text{za sve } s,r\in C[x_0-h,x_0+h].$$

Prostor $C[x_0-h,x_0+h]$ sa datom metrikom d je kompletan. Skup A je zatvoren podskup od $C[x_0-h,x_0+h]$. Naime, skup A je zatvorena lopta $B(y_0,b)$ u prostoru $C[x_0-h,x_0+h]$.

Preslikavanje $F:A\to A$, čiju ćemo nepokretnu tačku tražiti, definisaćemo na sledeći način

$$F(s)(t)=y_0+\int_{x_0}^{t} f(u,s(u))du, \qquad t\in[x_0-h,x_0+h], \qquad s\in M. \tag{5}$$

Ako je $s=F(s)$, tada je na osnovu (5)

$$s(t)=y_0+\int_{x_0}^{t} f(u,s(u))du, \quad t\in[x_0-h,x_0+h], \tag{6}$$

i iz (6) sledi da je

$$\frac{ds}{dt}=f(t,s(t)) \qquad \text{i} \qquad s(x_0)=y_0.$$

Dakle nepokretna tačka s^* preslikavanja F je rešenje početnog problema (4). Treba pokazati da je za sve $s\in A$, $F(s)\in A$, i da je F kontrakcija sa koeficijentom kontrakcije $\lambda=hM$.

Prema definiciji skupa A, treba da dokažemo nejednakost

$$|F(s)(t)-y_0|\le b, \qquad \text{za sve } t\in[x_0-h,x_0+h].$$

Iz (5) sledi, na osnovu $h<\dfrac{b}{K}$, da je

$$\left|y_0+\int_{x_0}^{t} f(u,s(u))du-y_0\right|\le|t-t_0|\max_{(u,v)\in P}|f(u,v)|\le h\cdot K<b.$$

Dokažimo da je za proizvoljna dva elementa $s,r\in A$

$$d(F(s),F(r))\le\lambda\cdot d(s,r).$$

Na osnovu (5) sledi da je za sve $t\in[x_0-h,x_0+h]$,

$$\begin{aligned}|F(s(t))-F(r(t))|&=\left|y_0+\int_{x_0}^{t} f(u,s(u))du-y_0-\int_{x_0}^{t} f(u,r(u))du\right|\\&\le\int_{t_0}^{t}|f(u,s(u))-f(u,r(u))|du\\&\le h\cdot M\cdot\max_{u\in[x_0-h,x_0+h]}|s(u)-r(u)|=h\cdot M\cdot d(s,r)\end{aligned}$$

za sve $u \in [x_0 - h, x_0 + h]$. Odavde je

$$d(F(s), F(r)) \le h \cdot M \cdot d(s,r) = \lambda \cdot d(s,r), \qquad \lambda < 1 .$$

Primer 3.9: Dokažimo sada i egzistenciju rešenja za Volteronu integralnu jednačinu.

Neka je T pozitivan realan broj i predpostavimo da za neprekdinu funkciju $F : [0,T] \times [0,T] \times R \to R$ postoji realan broj L takava da je

$$|K(t,s,x) - K(t,s,y)| \le L|x - y|,$$

za sve $t,s \in [0,T]$ i sve $x, y \in R$. Onda za svaku neprekidnu funkciju $v : [0,T] \to R$ integralna jednačina

$$u(t) = v(t) + \int_0^t K(t,s,u(s))ds, \quad 0 \le t \le T ,$$

ima jedinstveno rešenje $u : [0,T] \to R$ u skupu $C[0,T]$ svih neprekidnih realnih funkcija na intervalu $[0,T]$. Pored toga, odaberemo li bilo koju funkciju $u_1 \in C[0,T]$ i definišemo li niz funkcija $u_n \in C[0,T]$.

$$u_{n+1}(t) = v(t) + \int_0^T K(t,s,u_n(s))ds, \quad t \in [0,\ T],$$

za $n \in N$, niz $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergira uniformno na intervalu $[0,T]$ prema tom jedinstvenom rešenju u .

Neka je $X = C[0,T]$, prostor svih neprekidnih realnih funkcija na intervalu $[0,T]$ sa normom definisanom na sledeći način:

$$\langle h \rangle = \max\{e^{-Lt}|h(t)| : 0 \le t \le T\}, \quad h \in C([0,\ T]).$$

Ta norma je ekvivalentna sup-normi $\|h\|$ jer za svaki $h \in X$ važi

$$e^{-Lt}\|h\| \le \langle h \rangle \le \|h\|,$$

I prostor $(X, \langle\cdot\rangle)$ je Banahov.

Definišimo funkciju $F : X \to X$ na sledeći način:

$$F(h)(t) = v(t) + \int_0^t K(t,s,h(s))ds. \qquad t \in [0, T].$$

Pokazaćemo da je funkcija F kontrakcija. Tada na osnovu Banahove teoreme o nepokretnoj tački slediće da funckija F ima fiksnu tačku što je dovoljno za egzistenciju rešenja zadate integralne jednačine.

Imamo redom

$$\begin{aligned}
\langle F(h) - F(k) \rangle &\le \max_{0 \le t \le T} e^{-Lt} \int_0^t |K(t,s,h(s)) - K(t,s,k(s))| ds \\
&\le L \max_{0 \le t \le T} e^{-Lt} \int_0^t |h(s) - k(s)| ds \\
&= L \max_{0 \le t \le T} e^{-Lt} \int_0^t e^{Ls} e^{-Ls} |h(s) - k(s)| ds \\
&\le L \langle h - k \rangle \max_{0 \le t \le T} e^{-Lt} \int_0^t e^{Ls} ds \\
&= L \langle h - k \rangle \max_{0 \le t \le T} e^{-Lt} \frac{e^{Lt} - 1}{L} \\
&\le (1 - e^{-LT}) \langle h - k \rangle,
\end{aligned}$$

za sve h , $k \in X$. Budući da je $1 - e^{-Lt} < 1$ zaključujemo da je funkcija F kontrakcija pa nam Banahova teorema o nepokretnoj tački osigurava pre svega egzistenciju jedinstvene fiksne tačke u za F , a zatim i to da niz sukcesivnih aproksimacija $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergira u normi $\langle \cdot \rangle$ a samim tim i u njoj ekvivalentnoj sup-normi $\|\cdot\|$ prema toj fiksnoj tački.

***Napomena**:* Primetimo da kada bi smo u prethodnom dokazu umesto norme $\langle \cdot \rangle$ koristili njoj ekvivalentnu sup-normu $\|\cdot\|$ onda bi funkcija F bila kontrakcija jedino ako bi se posmatrala kao funkcija prostora $C[0,S]$ u samog sebe gde je $S \le \min\left\{T, \frac{1}{L}\right\}$.

Dakle ako je $T > \frac{1}{L}$ onda nam Banahova teorema o nepokretnoj tački primenjena na uobičajenu sup-normu osigurava jedinstveno rešenje samo na nekom podintervalu intervala $[0,T]$, dok smo modifikacijom norme uspeli zaključiti da jedinstveno rešenje postoji na čitavom intervalu $[0,T]$.

Primer 3.10: Neka je $\{G(s,t)\}$ realna funkcija dve realne promenljive s i t koja je neprekidna na skupu A gde je

$$A = \{ \ (s,t) \mid s \in [a,b], t \in R \}.$$

Za datu funkciju ćemo predpostaviti da ima parcijalni izvod G_t nad A tako da važi

$$0 < m \le G_t(s,t) \le M \,, \qquad \text{za sve } s,t \in A\,.$$

Neka je $x = \{x(s)\} \in C[a,b]$.

Primenjujući Banahov princim kontrakcije pokazaćemo da postoji jedna i samo jedna neprekidna funkcija

$$x^* \in C[a,b] \text{ tako da je } G(s,x^*(s)) = 0\,, \quad s \in [a,b]$$

Pokažimo da je funkcija $y = Tx$ definisana sa

$$y(s) = x(s) - \frac{2}{m+M} G(s,x(s)), \qquad s \in [a,b].$$

kontrakcija prostora $C[a,b]$ u samog sebe.

Ako je

$$(T(x_i))(s) = y_i(s) \,, \quad i = 1,2,.... \,, \quad \text{za svako } s \in [a,b] \,,$$

Sledi na osnovu Teoreme o srednjoj vrednosti

$$|y_1(s) - y_2(s)| = \left| x_1(s) - x_2(s) - \frac{2}{m+M} G_t^{'}(s,\theta(s))(x_1(s) - x_2(s)) \right|$$
$$= |x_1(s) - x_2(s)| \cdot \left| 1 - \frac{2}{m+M} G_t^{'}(s,\theta(s)) \right|,$$

gde je

$$x_1(s) < \theta(s) < x_2(s)\,, \qquad s \in [a,b].$$

Dalje je

$$\frac{2}{m+M} G_t^{'}(s,\theta(s)) \le \frac{2M}{m+M}\,, \qquad s \in [a,b],$$

te je

$$1 - \frac{2}{m+M} G_t^{'}(s,\theta(s)) \ge 1 - \frac{2M}{m+M}\,.$$

Sa druge strane je

$$\frac{2}{m+M}G_t^{'}(s,\theta(s)) \geq \frac{2m}{m+M},$$

te je

$$1-\frac{2}{m+M}G_t^{'}(s,\theta(s)) \leq 1-\frac{2m}{m+M}.$$

Kako je

$$1-\frac{2M}{m+M} > -1,$$

jer je $m>0$ i

$$1-\frac{2m}{m+M} < 1,$$

sledi da je

$$-1 < 1-\frac{2M}{m+M} < 1-\frac{2}{m+M}G_t^{'}(s,\theta(s)) < 1-\frac{2m}{M+m} < 1.$$

Odavde sledi da je preslikavanja T kontrakcija te postoji $x^* \in C[a,b]$ tako da je

$$x^*(s) = x^*(s) - \frac{2}{m+M}G(s,x^*(s)), \qquad s \in [a,b],$$

tj.

$$G(s,x^*(s)) = 0, \qquad s \in [a,b].$$

Primer 3.11: Primenom principa kontrakcije pokazaćemo da integralna jednačina

$$u(x) = 1+\lambda\int_x^1 u(s-x)u(s)ds, \qquad x\in[0,1], \ \ \lambda \in (0,\frac{3}{8}), \qquad (7)$$

ima rešenje u prostoru $C[0,1]$.

Definisaćemo preslikavanje $A: C[0,1] \to [0,1]$ na sledeći način:

$$(Au^*)(x) = 1+\lambda\int_x^1 u(s-x)u(s)ds, \qquad u^* \in C[0,1], \quad x \in [0,1].$$

Ako je $u^* \in C[0,\ 1]$ neka je

$$I(u^*) = \int_0^1 u(x)dx\ .$$

Predpostavimo da je $u^* \in C[0, 1]$ rešenje integralne jednačine (7).

Tada je

$$I(u^*) = \int_0^1 u(x)dx = 1 + \lambda \int_0^1 dx \int_x^1 u(s-x)u(s)ds =$$

$$1 - \lambda \int_0^1 ds \int_s^0 u(s)u(x)dx = 1 - \lambda \int_0^1 u(s)ds \int_s^0 u(x)dx =$$

$$1 + \frac{1}{2}\lambda (\int_0^s u(x)dx)^2 \Big|_0^1 = 1 + \frac{1}{2}\lambda I^2(u^*).$$

Dakle ako je $u^* \in C[0, 1]$ rešenje integralne jednačine (7) tada je zadovoljena jednakost:

$$\frac{1}{2}\lambda I^2(u^*) - I(u^*) + 1 = 0\ . \tag{8}$$

Ako je $\lambda = 0$ imamo linearnu jednačunu $I(u^*) = 1$ odnosno jednačina (7) se svodi na

$$u(x) = 1\ , \qquad x \in [0,\ 1].$$

Predpostavimo sada da je $\lambda \neq 0$.

Iz (8) sledi da je

$$I(u^*) = \frac{1}{2}(1 \overset{+}{-} (1-2\lambda)^{\frac{1}{2}})\ .$$

Ako je $\lambda > \dfrac{1}{2}$ jednačina (7) nema rešenje.

Ako je $u(x) \geq 0$ tada je $(Au^*)(x) \geq 1$ ($x \in [0,1]$) što znači da je $C([0,1], R_+)$ podskup od $C[0,1]$ koji je invarijantan u odnosu na preslikavanje A.

Neka je $X \subset C[0,1]$ i definisan na sledeći način

$$X = \left\{ u^* \in C[0,1]\ \middle|\ |u(x)| \geq 1,\ za\ \ svako\ \ x \in [0,1],\ I(u^*) = \frac{1}{2}\left[1-(1-2\lambda)^{1/2}\right] \right\}.$$

Skup X je zatvoren podksup u $C[0,1]$ sa uobičajenom normom:

$$\|u^*\| = \max_{x\in[0,1]} |u(x)|.$$

Lako je videti da je skup X invarjantan u odnosu na preslikavanje A jer je:

$$I(Au^*) = 1 + \frac{1}{2}\lambda I^2(u^*) = 1 + I(u^*) - 1 = I(u^*) \qquad \text{za svako } u^* \in X$$

te je:

$$AX \subseteq X$$

Dokazećmo da preslikavanje A zadovoljava Lipšicov uslov. Neka su u^* i v^* dva elementa iz X. Tada je:

$$\left|(Au^*)(x) - (Av^*)(x)\right| \le |\lambda|(\int_x^1 |u(s-x)u(s) - v(s-x)v(x)|ds) \le$$

$$|\lambda|\int_x^1 |u(s-x) - v(s-x)|u(s)ds + |\lambda|\int_x^1 |u(s) - v(s)|v(s-x)ds \le$$

$$|\lambda|\|u-v\|\int_x^1 u(s)ds + |\lambda|\|u-v\|\int_x^1 v(s-x)ds \le$$

$$|\lambda|\|u-v\|(\max_{x\in[0,1]}\int_x^1 u(s)ds + \max_{x\in[0,1]}\int_0^{1-x} v(s)ds) \le$$

$$|\lambda|\|u-v\|(I(u) - I(v)) = |\lambda|\|u-v\| \cdot 2I,$$

gde je

$$I = \frac{1}{2}\left[1 - (1-2\lambda)^{\frac{1}{2}}\right].$$

Kako je:

$$2I|\lambda| < 1$$

za $0 < \lambda < \frac{3}{8}$, što se može lako proveriti, sledi u skupu X egzistencija jedinstvenog rešenja integralne jednačine (7) pri čemu se rešenje može dobiti primenom metode sukcesivnih aproksimacija.

Primer 3.12: Neka je $f:[a,b] \to R$ neprekidno preslikavanje nad intervalom $[a,b]$ i ima izvod nad otvorenim intervalom (a,b) tako da je:

$$\left|f'(x)\right| \le \alpha < 1, \qquad \text{za svako } x \in (a,b).$$

Pokazećemo da uslov

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{a+b}{2} \right| \leq (1-\alpha)\frac{b-a}{2}$$

obezbeđuje postojanje nepokretne tačke preslikavanja f.

Na osnovu Lagranžove Teoreme o srednjoj vrednosti važi

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\theta(x,y))||x-y| \leq \alpha|x-y|, \qquad \text{za sve } x, y \in [a,b],$$

gde je $\theta(x,y)$ tačka iz intervala (x,y).

Neka je

$$x_0 = \frac{a+b}{2} \qquad \text{i} \qquad r = \frac{b-a}{2},$$

tada je

$$|f(x_0) - x_0| \leq (1-\alpha)r.$$

Što znači da preslikavanje $f:[a,b] \to R$ ispunjava uslov (5) iz Tvrđenja 2 iz glave 2. Odavde zaključujemo da preslikavanje f ima nepokretnu tačku.

Definicija 3.1: Za algebru A kažemo da je normirana algebra ako postoji norma $\|\cdot\|$ sa osobinama.

1) $\|a \cdot b\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$, za sve $a, b \in A$,
2) $\|e\| = 1$.

Normirana algebra $(A, \|\cdot\|)$ je Banahova algebra ako je $(A, \|\cdot\|)$ Banahov prostor.

Napomena: U svakoj normiranoj algebri A, množenje je neprekidno, zato što je za svako (a,b), $(c,d) \in A \times A$

$$\|ab - cd \leq \|(a-c)b + c(b-d)\|\| \leq \|a-c\| \cdot \|b\| + \|c\| \cdot \|b-d\|.$$

Primer 3.13: Banahov princip kontrakcije može se uspešno primeniti na određivanje inverznog elementa a^{-1} gde je a invertibiilan elemenat Banahove algebre $(A, \|\cdot\|)$ sa jediničnim elementom. Neka je $q[0,1)$, a invertibilan elemenat iz A i

$$M = \left\{ x \mid x \in A, \|e - ax\| \leq \frac{q}{2} \right\}.$$

Jasno je da je skup M neprazan jer je $a^{-1} \in M$. Definišimo preslikavanje $S : M \to M$ na sledeći način:

$$Sx = 2x - ax^2, \qquad\qquad x \in M .$$

Lako je videti da je $S(M) \subseteq M$ a iz nejednakosti

$$\|Sx - Sy\| \le \left\|2x - ax^2 - 2y + ay^2\right\| = \|2(x-y) - a(x-y)(x+y)\| \le$$

$$\|x-y\|(\|e-ax\| + \|e-ay\|) \le \|x-y\|(\frac{q}{2} + \frac{q}{2}) = q\|x-y\|,$$

sledi da je preslikavanje S kontrakcija. Kako je skup M na osnovu Banahovog principa kontrakcije sledi egzistencija elementa $x^* \in M$ tako da je $Sx^* = x^*$ odakle je:

$$x^*(e - ax^*) = 0 \qquad . \tag{9}$$

Kako je $\left\|e - ax^*\right\| < 1$ sledi da je elemenat ax^* invertibilan te je elemenat $x^* = a^{-1}(ax^*)$ takođe invertibilan. Iz jednakosti (9) sledi da je $e - ax^* = 0$ te je $x^* = a^{-1}$. Na osnovu Teoreme 2.1 sledi da je

$$\lim_{n\to\infty} S^n x_0 = a^{-1},$$

gde je x_0 proizvoljan elemenat skupa M .

4. Neka uopštenja Banahovog proncipa kontrakcije

Pored klasične Banahove teoreme o fiksnoj tački koja nam garantuje egzistenciju, jedinstvenost nepokretne tačke kao i način na koji se dolazi do nje, postoje brojna uopštenja Banahovog principa konktrakcije. U ovom delu navešćemo neka od njih.

4.1 Φ-kontrakcija

Definicija 4.1.1.: Preslikavanje f metričkog prostora (X,d) u samog sebe je $\phi-kontrakcija$ ako je

$$d(fx,fy) \le \phi(d(x,y)), \qquad \text{za svako } x,y \in X,$$

gde je ϕ od gorepoluneprekidno preslikavanje nad $[0,\infty)$ tako da je $\phi(t) < t$, za sve $t \neq 0$.

Definicija 4.1.2: Funkcija $\phi : X \to X$: je od gore poluneprekidna na X ako za svako $x \in X$ i svaki niz $\{x_n\} \subseteq X$ takav da je $x_n \to x$ važi

$$\limsup_{n\to\infty} \phi(x_n) \le \phi(x).$$

Teorema 4.1.1: Neka je $F : X \to X$ $\phi-kontrakcija$, a prostor (X,d) kompletan. Tada postoji jedna i samo jedna nepokretna tačka z preslikavanja F i $\lim_{n\to\infty} F^n x_0 = z$, za sve $x_0 \in X$.

Dokaz: Ako je preslikavanje F ϕ-kontrakcija pokažimo redom:

1) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ gde je $\alpha_n = d(F^n x, F^{n-1}x)$ $n \in N$ i x proizvoljan elemenat iz X;
2) Niz $\{F^n x\}_{n\in N\cup\{0\}}$ je Košijev niz;
3) Ako je $\lim_{n\to\infty} F^n x = z$ tada je $Fz = z$ a iz $Fz^* = z^*$ sledi $z = z^*$.

1.Pokazaćemo prvo da je niz $\{\alpha_n\}_{n\in N}$ monotono opadajući niz realnih brojeva koristeći pretpostavku da je preslikavanje F ϕ-kontrakcija. Sledi da je:

$$\alpha_n = d(F^n x, F^{n-1}x) \le \phi(d(F^{n-1}x, F^{n-2}x)) < d(F^{n-1}x, F^{n-2}x) = \alpha_{n-1},$$

pri tome smo koristili uslov da je

$$d(F^{n-1}x, F^{n-2}x) > 0,$$

jer iz $d(F^{n-1}x, F^{n-2}x) = 0$ sledi $F(F^{n-2}) = F^{n-2}x$ te je $F^{n-2}x$ nepokretna tačka preslikavanja F. Dakle $\alpha_n < \alpha_{n-1}$ za sve $n \in N$, pa na osnovu Teoreme o monotonim nizovima postoji $\alpha \geq 0$ tako da je

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha .$$

Pokazaćemo da je $\alpha = 0$ tako što ćemo dokazati da pretpostavka da je $\alpha > 0$ dovodi do kontradikcije.

Iz nejednakosti

$$\alpha_n \leq \phi(\alpha_{n-1}), \qquad n = 1,2,...,$$

i poluneprekidnosti preslikvanja ϕ sledi

$$\alpha \leq \lim_{t\to\alpha_+} \sup \phi(t) \leq \phi(\alpha) < \alpha ,$$

što je kontradikcija. Dakle pokazali smo da je $\alpha = 0$.

2. Pokazećemo sada da je niz $\{F^n x\}_{n\in N\cup\{0\}}$ Košijev.

Predpostavimo suprotno. Tada postoji $\varepsilon > 0$ i nizovi $\{m_k\}_{k\in N}$ i $\{n_k\}_{k\in N}$ prirodnih brojeva tako da su za svako $k \in N$ zadovoljeni sledeći uslovi:

i. $m_k > n_k \geq k$;
ii. $\beta_k = d(F^{m_k}x, F^{n_k}x) \geq \varepsilon$,

pri čemu je m_k najmanji prirodan broj za koji ovi uslovi važe. To znači da je

$$d(F^{m_k-1}x, F^{n_k}x) < \varepsilon . \tag{1}$$

Koristeći nejednakost (1) dobijamo

$$\beta_k \leq d(F^{m_k}x, F^{m_{k-1}}x) + d(F^{m_k-1}x, F^{n_k}x) \leq \alpha_{m_k} + \varepsilon . \tag{2}$$

Kako je $m_k > k$ sledi $\alpha_{m_k} < \alpha_k$ jer je niz $\{\ \alpha_n\ \}_{n\in N}$ opadajući te iz (2) sledi

$$\beta_k \leq \alpha_k + \varepsilon, \qquad \text{za sve } k \in N. \tag{3}$$

Iz nejednakosti (3) sledi da je

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = \varepsilon.$$

Dokazaćemo sada da je

$$\beta_k \leq 2\alpha_k + \phi(\beta_k), \qquad \text{za sve } k \in N. \tag{4}$$

Koristeći nejednakost trougla i definiciju niza $\{\beta_k\}_{k\in N}$ imamo da je

$$\beta_k = d(F^{m_k}x, F^{n_k}x) \leq d(F^{m_k}x, F^{m_k+1}x) + d(F^{m_k+1}x, F^{n_k+1}x) +$$
$$d(F^{n_k+1}x, F^{n_k}x) \leq 2\alpha_k + \phi(d(F^{m_k}x, F^{n_k}x)) = 2\alpha_k + \phi(\beta_k),$$

čime je nejednakost (4) dokazana.

A u (4) $k \to \infty$ na osnovu od gorepoluneprekidnosti preslikavanja ϕ i uslova *i*, sledi

$$\varepsilon \leq \phi(\varepsilon) < \varepsilon,$$

čime smo dobili kontradikciju. Dakle niz $\{F^n x\}_{n\in N}$ je Košijev niz.

3. Neka je

$$\lim_{n\to\infty} F^n x = z,$$

tada je

$$z = \lim_{n\to\infty} F^{n+1}x = F(\lim_{n\to\infty} F^n x) = Fz.$$

Pokazaćemo sada i jedinstvenost nepokretne tačke

Neka je $Fz^* = z^*$ i $z \neq z^*$,

tada je

$$d(z, z^*) > 0,$$

te je

$$d(z^*, z) = d(Fz^*, Fz) \leq \phi(d(z^*, z)) < d(z^*, z),$$

što je kontradikcija.

4.2 Lokalna uniformna (ε,λ) kontrakcija

Definicija 4.2.1: Prostor (X,d) je $\varepsilon-$**lančast** ako za svake dve tačke $x,y \in X$ postoji konačno mnogo tačaka $x_0 = x$, $x_1,...,x_n = y$ tako da je

$$d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon, \qquad i = 0,1,...,n-1.$$

Definicija 4.2.2: Preslikavanje $f : X \to X$ kompletnog metričkog prostora (X,d) u smog sebe je **lokalna uniformna** (ε,λ) kontrakcija ako važi implikacija

$$d(x,y) < \varepsilon \Rightarrow d(fx,fy) \le \lambda d(x,y), \qquad \text{za sve } x,y \in X, \qquad \lambda \in (0,1). \tag{5}$$

Teorema 4.2.1: Ako je F je lokalna uniformna (ε,λ) kontrakcija $\varepsilon-$lančastog kompletnog metričkog prostora (X,d) u samog sebe, tada postoji jedna i samo jedna nepokretna tačka preslikavanja F.

Dokaz: Ako je preslikavanje F lokalna uniformna (ε,λ) kontrakcija na ε- lančastom kompletnom metričkom prostoru pokažimo da važi

1) da za svako $x \in X$ i $m \in N$, $d(F^m x, F^{m+1}x) \le n\varepsilon\lambda^m$, gde je $n = n(x) \in N$;
2) Niz $\{F^n x\}_{n\in N\cup\{0\}}$ je Košijev;
3) Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} F^n x = z$ tada je $Fz = z$ i iz $Fz^* = z$ sledi da je $z = z^*$.

1. Neka je $x \in X$ i $\{x_0, x_1,..., x_{n(x)}\}$ $(x_0 = x, x_{n(x)} = Fx)$ konačan $\varepsilon-$lanac. To znači da je

$$d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon, \quad i = 0,1,...,n-1, \qquad n = n(x),$$

tada iz implikacije (5) sledi

$$d(Fx_i, Fx_{i+1}) \le \lambda d(x_i, x_{i+1}), \qquad i = 0,1,...,n-1. \tag{6}$$

Kako je

$$d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon,$$

a $\lambda \in [0,1)$ iz nejednakosti (6) sledi

$$d(Fx_i, Fx_{i+1}) < \varepsilon, \qquad i = 0,1,...,n-1.$$

Primenom implikacije (5) zaključujemo da je

$$d(F(Fx_i),F(Fx_{i+1})) < \lambda d(Fx_i,Fx_{i+1}) \le \lambda^2 d(x_i,x_{i+1}) < \lambda^2 \varepsilon .$$

Neka je za $m \in N$ zadovoljena nejednakost:

$$d(F^m x_i, F^m x_{i+1}) \le \lambda^m \varepsilon , \qquad i = 0,1,...,n-1 .$$

Tada na osnovu uslova $0 \le \lambda < 1$

$$d(F^m x_i, F^m x_{i+1}) < \varepsilon , \qquad i = 0,1,...,n-1 .$$

te primenom implikacije (5) sledi

$$d(F(F^m x_i), F(F^m x_{i+1})) \le \lambda d(F^m x_i, F^m x_{i+1}) \le \lambda^{m+1} \varepsilon , \quad i = 0,1,...,n-1 .$$

Dakle koristeći princip matematičke indukcije dokazali smo da je za svako $m \in N$ zadovoljena nejednakost:

$$d(F^m x_i, F^m x_{i+1}) \le \varepsilon \lambda^m , \quad i = 0,1,...,n-1 .$$

Odavde je

$$d(F^m x, F^{m+1} x) \le \sum_{i=0}^{n-1} d(F^m x_i, F^m x_{i+1}) \le n \varepsilon \lambda^m , \qquad \text{za svako } m \in N .$$

2. Za svako $m \in N$ sledi da je

$$\begin{aligned} & d(F^m x, F^k x) \le \sum_{i=m}^{k-1} d(F^i x, F^{i+1} x) \le \\ & n\varepsilon(\lambda^m + \lambda^{m+1} + ... + \lambda^{k-1}) \le n\varepsilon \frac{\lambda^m}{1-\lambda}, \end{aligned} \qquad \text{za } k > m \;\; m,k \in N .$$

Odavde sledi da je niz $\{F^m x\}_{m \in N}$ Košijev.

3. Neka je $\lim_{n\to\infty} F^n x = z$. Na osnovu neprekidnosti preslikavanja F sledi

$$Fz = F(\lim_{n\to\infty} F^n x) = \lim_{n\to\infty} F^{n+1} x = z .$$

Ostaje da se pokaže jedinstvenost nepokretne tačke preslikavanja F . Neka je $z \ne z^*$, $Fz^* = z^*$ i $\{x_0, x_1, x_2, ..., x_{k-1}, x_k\}$, $x_k = z^*$ ε -lanac takav da je

$$d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon \,, \qquad i = 0,1,\dots,k-1 \,, \qquad (x_0 = z) \,.$$

Tada je

$$d(z, z^*) = d(Fz, Fz^*) = d(F^p x, F^p z^*) \le \sum_{i=0}^{k-1} d(F^p x_i, F^p x_{i+1}) \le \lambda^p k\varepsilon \,.$$

Kako je $\lambda < 1$ može se odrediti p tako da je

$$\lambda^p k\varepsilon < d(z, z^*) \,,$$

čime smo dobili da je

$$d(z, z^*) < d(z, z^*) \,,$$

što je kontradikcija, te je nepokretna tačka preslikavanja F je jedinstvena.

4.3 Uopštena kontrakcija

Definicija 4.3.1: Preslikavanje $f: X \to X$ metričkog prostora (X,d) u samog sebe je **uopštena kontrakcija** ako je $d(fx, fy) \le l(\alpha,\beta)\cdot d(x,y)$, za svako $x, y \in X$, $\alpha \le d(x,y) \le \beta$, gde je $l(\alpha,\beta)$ funkcija definisana za $0 < \alpha \le \beta < \infty$ i $l(\alpha,\beta) < 1$.

Teorema 4.3.1: Ako je (X,d) kompletan metrički prostor i preslikavanje $f: X \to X$ uopštena kontrakcija, tada postoji jedna i samo jedna nepokretna tačka preslikavanja f.

Dokaz: Pokazaćemo prvo da preslikavanje f preslikava neku loptu $\{x : d(x,x_0) \le r)\}$ za svako $r > 0$ u samu sebe. Predpostavimo suprotno, tj. Da za neko $r > 0$ i svako $x \in X$ postoji $x_1 \in X$ tako da je

$$d(x_1, x) \le r \quad \text{i} \quad d(fx_1, x) > r\,.$$

Sada postoje dve mogućnosti: ili je $d(x_1,x) \le \dfrac{r}{2}$ ili je $d(x_1,x) > \dfrac{r}{2}$.

U prvom slučaju iz

$$d(x, fx_1) \le d(x, fx) + d(fx_1, fx)\,,$$

sledi

$$d(fx, x) \ge d(x, fx_1) - d(fx_1, fx) \ge r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}\,.$$

U drugom slučaju je

$$d(x, fx) \ge r - l(\frac{r}{2}, r)\; r$$

te je za svako $x \in X$

$$d(x, fx) \ge \min\left\{\frac{r}{2}, r - r\; l(\frac{r}{2}, r)\right\} = a > 0$$

Odavde sledi da za svako $x_0 \in X$ važi

$$d(f^{k+1}x_0, f^k x_0) \le \{l(a, d(x_0, fx_0))\}^k \cdot d(x_0, fx_0), \qquad k = 1,2,...,$$

te postoji elemenat $x \in X$ takav da je $d(x, fx) < a$ što je kontradikcija.

Neka je B_1 invarjantna za f lopta radijusa 1. Pokazali smo da postoji lopta $B_2 \subset B_1$ radijusa $\dfrac{1}{2}$ koja je takođe invarjantna za f. Nastavljajući ovaj postupak, dobićemo opadajući niz skupova $B_1 \supset B_2 \supset ...$ čiji radijusi teže nuli i $f: B_k \to B_k$ za svako $k \in N$.

Pošto je X kompletan prostor $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$ je neprazan i jednočlan skup. Iz $\{z\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$ sledi da je $f(z) \in \bigcap_{k=1}^{\infty} f(B_k) \subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$. Sada zbog jedinstvenosti tačke preseka je $f(z) = z$.

4.4 O *n*-lokalnim kontrakcijama

Definicija 4.4.1: Neka je (X,d) metrićki prostor i $f: X \to X$. Kažemo da je f $n-$**lokalna** kontrakcija ako za svako $x \in X$ postoji $n = n(x) \in N$ tako da je

$$d(f^n x, f^n y) \le k \cdot d(x,y), \qquad \text{za sve } x, y \in X.$$

za svako $y \in X$, gde je $k \in [0,1)$ i k je nezavisno od x i y.

Teorema 4.4.1.: Neka je (X,d) kompletan metrički prostor i $F: X \to X$ neprekidna $n-$lokalna kontrakcija. Tada postoji jedinstvena nepokretna tačka preslikavanja f i za svako $z \in X$ je

$$\xi = \lim_{n\to\infty} F^n z = F\xi .$$

Dokaz: Pokažimo sledeće:

1) Za svako $x \in X$ postoji realan broj $d(x)$ takav da je $\sup_{i\in N}\{d(x,F^i x)\} = d(x)$;
2) Niz $\{x_n\}_{n\in N}$ definisan na sledeći
$$x_1 = F^{n(x_0)}x_0,\ \ x_2 = F^{n(x_1)}x_1, ..., x_{p+1} = F^{n(x_p)}x_p,$$
x_0 je proizvoljana elemenat iz X je Košijev;
3) Ako je $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ tada je $Fz = z$;
4) z je jedino rešenje jednačine $Fx = x$ i $\lim_{n\to\infty} F^n x_0 = z$.

1. Neka je $q = n(x)$. Za svako $n > q$ postoji $p, r \in N$ i $r < q$ tako da je $n = pq + r$.

Tada je

$$\begin{aligned}
d(F^n x, x) &\le d(F^n x, F^q x) + d(F^q x, x) = d(F^{pq+r}x, F^q x) + d(F^q x, x)\\
&\le kd(F^{(p-1)q+r}x, x) + d(F^q x, x)\\
&\le k\big(kd(F^{(p-2)q+r}x, x) + d(F^q x, x)\big) + d(F^q x, x)\\
&\le k^2 d(F^{(p-2)q+r}x, x) + (1+k)d(F^q x, x).
\end{aligned}$$

Ako je

$$M(x) = \max_{1\le i\le q} d(x, F^i x),$$

tada je

$$d(F^n x, x) \le (1 + k + k^2 + ...)M(x) = \frac{M(x)}{1-k}, \qquad \text{za sve } n > q$$

odakle sledi da je

$$d(x) = \max\left\{M(x), \frac{M(x)}{1-k}\right\} = \frac{M(x)}{1-k}.$$

2. Pokazaćemo sada da je niz $\{x_n\}_{n\in N}$ Košijev. Za svako $n \in N$

$$\begin{aligned}
&d(x_{n+1}, x_n) = d(F^{n(x_n)}x_n, F^{n(x_{n-1})}x_{n-1}) = \\
&d(F^{n(x_{n-1})}F^{n(x_n)}x_{n-1}, F^{n(x_{n-1})}x_{n-1}) \le \\
&kd(F^{n(x_n)}x_{n-1}, x_{n-1}) \le \\
&k^2 d(F^{n(x_n)}x_{n-2}, x_{n-2}) \le ... \le \\
&k^n d(F^{n(x_n)}x_0, x_0) \le \\
&k^n d(x_0),
\end{aligned}$$

odakle sledi da je

$$d(x_{n+p}, x_n) \le \sum_{i=n}^{n+p-1} k^i d(x_0) \le \frac{k^n d(x_0)}{1-k},$$

za svako $n \in N$ i $p \in N$ što na osnovu uslova $k \in [0,1)$ ima za posledicu da je niz $\{x_n\}_{n\in N}$ Košijev.

3. Kako je (X, d) kompletan prostor postoji $z \in X$ takvo da je

$$\lim_{n\to\infty} x_n = z .$$

Dokazaćemo da je $Fz = z$.

Kako je

$$\begin{aligned}
&d(Fx_n, x_n) = d(FF^{n(x_{n-1})}x_{n-1}, F^{n(x_{n-1})}x_{n-1}) = \\
&d(F^{n(x_{n-1})}Fx_{n-1}, F^{n(x_{n-1})}x_{n-1}) \le kd(Fx_{n-1}, x_{n-1}) \le \\
&k^2 d(Fx_{n-2}, x_{n-2}) \le ... \le k^n d(Fx_0, x_0),
\end{aligned}$$

za svako $n \in N$ sledi da je

$$\lim_{n\to\infty} d(Fx_n, x_n) = 0 .$$

Pošto je F neprekidno preslikavanje imamo da je

$$\lim_{n\to\infty} Fx_n = Fz = \lim_{n\to\infty} x_n = z .$$

4. Predpostavimo da je $z^* \neq z, Fz^* = z^*$. Iz relacije $Fz = z$, $Fz^* = z^*$ sledi

$$z = F^{n(z)}z\ ,\ F^{n(z)}z^* = z^* ,$$

odakle je:

$$d(z,z^*) = d(F^{n(z)}z, F^{n(z)}z^*) \leq k \cdot d(z,z^*) .$$

Kako je $k \in [0,1)$ sledi da je $d(z,z^*) = 0$ odakle je $z = z^*$.

Pokazaćemo sada da je

$$\lim_{n\to\infty} F^n x_0 = z .$$

Ako je

$$A = \max_{0\leq i\leq q-1} d(z, F^i x_0) ,$$

gde je $q = n(z)$ i $n = pq + r$, $r < q$ tada je

$$d(F^n x_0, z) = d(F^{pq+r}x_0, F^q z) = d(F^{q+(p-1)q+r}x_0, F^q z) ,$$

odnosno imamo da je

$$d(F^n x_0, z) \leq kd(F^{(p-1)q+r}x_0, z) \leq \ldots \leq k^p d(F^r x_0, z) \leq k^p A \ . \tag{7}$$

Ako $n \to \infty$ iz jednakosti $n = pq + r$ sledi i da $p \to \infty$ te na osnovu nejednakosti (7) sledi da je

$$\lim_{n\to\infty} d(F^n\ x_0, z) = 0 ,$$

odakle je:

$$\lim_{n\to\infty} F^n x_0 = z .$$

Primer 4.4.1: Neka je $X=[0,1]$ i $d(x,y)=|x-y|$. Tada je (X,d) kompletan metrički prostor i važi

$$X=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}}\right]\cup\{0\}.$$

Definišimo preslikavanje $F:X\to X$ na sledeći način:

$$Fx=\begin{cases}0, & x=0\\ \dfrac{n+2}{n+3}(x-\dfrac{1}{2^{n-1}})+\dfrac{1}{2^n}, & x\in\left[\dfrac{3n+5}{2^{n+1}(n+2)},\dfrac{1}{2^{n-1}}\right]\\ \dfrac{1}{2^{n+1}}, & x\in\left[\dfrac{1}{2^n},\dfrac{3n+5}{2^{n+1}(n+2)}\right].\end{cases}$$

Iz ove definicije sledi da

$$F:\left[\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}}\right]\to\left[\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^n}\right],$$

pošto je funkcija F neopadajuća i

za $x=\dfrac{1}{2^{n-1}}$ je

$$F(x)=F(\frac{1}{2^{n-1}})=\frac{n+2}{n+3}(\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^{n-1}})+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^n}.$$

a za $x=\dfrac{1}{2^n}$ je

$$F(x)=\frac{1}{2^{n+1}}.$$

Funkcija F je i neprekidna jer za $x=\dfrac{3n+5}{2^{n+1}(n+2)}$ je

$$F(x)=F(\frac{3n+5}{2^{n+1}(n+2)})=\frac{n+2}{n+3}(\frac{3n+5}{2^{n+1}(n+2)}-\frac{1}{2^{n-1}})+\frac{1}{2^n}$$
$$=\frac{n+2}{n+3}(\frac{3n+5-4n-8}{2^{n+1}(n+2)})+\frac{1}{2^n}=\frac{n+2}{n+3}\cdot(-\frac{n+3}{2^{n+1}(n+2)})+\frac{1}{2^n}$$
$$=-\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{n+1}}.$$

Ako je $x\in\left[\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}}\right]$ a y proizvoljan elemenat iz $[0,1]$ pokažimo da je

$$|Fx-Fy|\le\frac{n+3}{n+4}|x-y|,\qquad \text{za svako } y\in X.$$

Uzmimo $x\in\left[\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}}\right]$, $y\in\left[\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}}\right]$.

1. Neka x, y pripadaju istom podintervalu $\left[\frac{1}{2^n},\frac{3n+5}{2^{n+1}(n+2)}\right]$ tada imamo da je

$$|Fx-Fy|=\left|\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2^{n+1}}\right|=0.$$

2. Predpostavimo da je $x\in\left[\frac{3n+5}{2^{n+1}(n+2)},\frac{1}{2^{n-1}}\right]$, $y\in\left[\frac{1}{2^n},\frac{3n+5}{2^{n+1}(n+2)}\right]$ tada imamo da je

$$|Fx-Fy|=\left|\frac{n+2}{n+3}(x-\frac{1}{2^{n-1}})+\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n+1}}\right|=\left|(\frac{n+2}{n+3}x-\frac{3n+5}{2^{n+1}(n+3)})\cdot\frac{n+2}{n+2}\right|$$
$$=\frac{n+2}{n+3}\left|x-\frac{3n+5}{2^{n+1}(n+2)}\right|\le\frac{n+2}{n+3}|x-y|\le\frac{n+3}{n+4}|x-y|.$$

3. Predpostavimo da je $x\in\left[\frac{3n+5}{2^{n+1}(n+2)},\frac{1}{2^{n-1}}\right]$, $y\in\left[\frac{3n+5}{2^{n+1}(n+2)},\frac{1}{2^{n-1}}\right]$. Tada imamo da je

$$|Fx-Fy|=\left|\frac{n+2}{n+3}(x-\frac{1}{2^{n-1}})+\frac{1}{2^n}-\frac{n+2}{n+3}(y-\frac{1}{2^{n-1}})-\frac{1}{2^n}\right|.$$
$$\le\frac{n+2}{n+3}|x-y|\le\frac{n+3}{n+4}|x-y|.$$

4. Neka je $x \in \left[\frac{1}{2^n}, \frac{3n+5}{2^{n+1}(n+2)}\right]$, $y \in \left[\frac{3n+5}{2^{n+1}(n+2)}, \frac{1}{2^{n-1}}\right]$. Tada imamo da je

$$|Fx - Fy| = \left|\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{n+2}{n+3}(y - \frac{1}{2^{n-1}}) - \frac{1}{2^n}\right| = \frac{n+2}{n+3}\left|\frac{3n+5}{2^{n+1}(n+2)} - y\right|$$
$$\leq \frac{n+2}{n+2}|x-y| \leq \frac{n+3}{n+4}|x-y|.$$

Slično se proveravaju i slučajevi $y \in \left[\frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^{m-1}}\right]$ za $m < n$ i $m > n$.

Kako funkcija $F : \left[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right] \to \left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right]$ sledi da

$$F^{n+3} : \left[\frac{1}{2^{2n+2}}, \frac{1}{2^{2n+1}}\right] \to \left[\frac{1}{2^{2n+3}}, \frac{1}{2^{2n+2}}\right].$$

Odatle sledi da je

$$\left|F^{n+3}x - F^{n+3}y\right| = \left|FF^{n+2}x - FF^{n+2}y\right| \leq \frac{n+3+n+2}{n+4+n+2}\left|F^{n+2}x - F^{n+2}y\right| \leq \dots$$
$$\leq \frac{2n+5}{2n+6} \cdot \frac{2n+4}{2n+5} \cdot \ldots \cdot \frac{n+3}{n+4}|x-y| = \frac{n+3}{2n+6}|x-y| = \frac{1}{2}|x-y|.$$

Pokazali smo da je F $n-$kontrakcija za $k = \frac{1}{2}$ i $n(x) = n+3$. Ako je $x = 0$ tada je $n(0)$ prirodan broj veći od 1.

Nepokretna tačka preslikavanja F je 0. Može se takođe pokazati da ne postoji $n_0 \in N$ tako da je

$$\left|F^{n_0}x - F^{n_0}y\right| \leq k|x-y|, \qquad x, y \in [0,1],\ k \in [0,1],$$

te da se u ovom slučaju ne može primeniti Tvrđenje 2.2.

4.5 Kvazi kontrakcija

Jedno od značajnih uopštenja Banahovog principa kontrakcije dao je naš poznati matematičar Lj. Ćirić $[5]$.

Definicija 4.5.1: Neka je (X, d) metrički prostor i $f : X \to X$. Kažemo da je f **kvazi kontrakcija** ako važi

$$d(fx, fy) \le k \cdot \max\{d(fx, x), d(fy, y), d(fx, y), d(fy, x), d(x, y)\},$$

za svako $x, y \in X$, gde je $k \in [0,1)$.

Teorema 4.5.1: Ako je f je kvazi kontrakcija kompletnog metričkog prostora (X, d) u samog sebe, tada postoji jedna i samo jedna nepokretna tačka preslikavanja f.

Dokaz:
Prvo ćemo pokazati da je niz definisan sa $x_{n+1} = fx_n$, $n \in N$, x_0 proizvoljna tačka iz X ograničen tako što ćemo pokazati da je

$$d(f^n x, fx) \le \frac{\lambda}{1-\lambda} d(x, fx) \quad , \qquad \text{za sve } n \in N. \tag{8}$$

Dokaz ćemo dati matematičkom indukcijom.
Za $n = 1$

$$d(fx, fx) \le \frac{\lambda}{1-\lambda} d(x, fx),$$

što je tačno.

Predpostavimo da je (8) tačno za sve $m \le n_0 - 1$ i pokažimo da (8) važi za $m = n_0 \ge 2$.
Pošto je f kvazi kontrakcija, postoji $i_0 \le n_0$ takvo da je

$$d(f^{n_0} x, fx) \le \lambda d(x, f^{i_0} x). \tag{9}$$

<u>I slučaj</u>: Ako je $i_0 < n_0$ tada na osnovu (8) i (9) na osnovu induktivne pretpostavke sledi da je

$$\begin{aligned} d(f^{n_0} x, fx) &\le \lambda d(x, f^{i_0} x) \le \lambda(d(x, fx) + d(fx, f^{i_0} x)) \\ &\le \lambda d(x, fx) + \frac{\lambda^2}{1-\lambda} d(x, fx) = \frac{\lambda}{1-\lambda} d(x, fx), \end{aligned}$$

pa je (8) tačno i ta $n = n_0$.

<u>II slučaj:</u> Neka je $i_0 = n_0$. Tada iz (9) sledi

$$d(f^{n_0}x, fx) \le \lambda d(x, f^{n_0}x) \le \lambda d(x, fx) + \lambda d(fx, f^{n_0}x),$$

te je

$$(1-\lambda)d(f^{n_0}x, fx) \le \lambda d(x, fx),$$

Što znači da (8) važi i u ovom slučaju. Time smo matematičkom indukcijom pokazali da (8) važi za sve $n \in N$.

Pokažimo da je

$$d(f^n x, x) \le \frac{1}{1-\lambda} d(x, fx), \qquad \text{za sve } n \in N. \tag{10}$$

Pošto važi (8) primenom nejednakosti trougla imamo da je

$$d(f^n x, x) \le d(f^n x, fx) + d(fx, x) \le \frac{\lambda}{1-\lambda} d(x, fx) + d(fx, x) = \frac{1}{1-\lambda} d(x, fx),$$

što smo i želeli da dokažemo.

Pokažimo sada da je niz $\{f^n x\}_{n\in N}$ Košijev.
Za proizvoljno n koristeći (17) važi da je

$$\begin{aligned} &d(f^n x, f^{n+1}x) = d(f(f^{n-1}x), f(f^n x)) \\ &\le \lambda \max\{d(f^{n-1}x, f^n x), d(f^n x, f^{n+1}x), d(f^{n-1}x, f^{n+1}x), d(f^n x, f^n x)\} \\ &= \lambda \max\{d(f^{n-1}x, f^n x), d(f^{n-1}x, f^{n+1}x)\} \le \ldots \le \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x, fx). \end{aligned} \tag{11}$$

Sada iz (11) primenom nejednakosti trougla dobija se da je za sve $m > n$

$$d(f^n x, f^m x) \le \sum_{k=n}^{m-1} d(f^k x, f^{k+1}x) \le \frac{\lambda^n}{(1-\lambda)^2} d(x, fx).$$

Pošto $\lambda^n (1-\lambda)^{-2} d(x, fx) \to 0$, kada $n \to \infty$, pokazali smo da je $\{f^n x\}_{n\in N}$ Košijev niz, pa kako je prostro kompletan postoji z takvo da je $\lim_{n\to\infty} f^n x = z$.

Pokažimo da je z nepokretna tačka prelikavanja f.

Pošto je f kvazi kontrakcija važi da je

$$d(f^n x, fz) \le \lambda \max\{\ d(f^{n-1}x, z), d(f^{n-1}x, f^n x), d(z, fz), d(f^{n-1}x, fz), d(f^n x, z)\ \}.$$

Koristeći neprekidnost metrike kada $n \to \infty$,

$$d(z, fz) \le \lambda \max\{d(z,z), d(z,z), d(z, fz), d(z, fz), d(z,z)\} = \lambda \max\{0, d(z, fz)\}.$$

Zbog $\lambda < 1$ dobija se da je $d(z, fz) = 0$ odnosno $fz = z$.

Ostaje je još da pokažemo da je z jedinstvena nepokretna tačka preslikavanja f. Predpostavimo suprotno, da postoji $u \in X$ takvo da je $fu = u$. Tada iz

$$\begin{aligned} d(z,u) = d(fz, fu) &\le \lambda \max\{d(z,u), d(z, fz), d(u, fu), d(z, fu), d(u, fz)\} \\ &= \lambda \max\{d(z,u), 0\}, \end{aligned}$$

sledi da je $u = z$ što je i trebalo dokazati.

Napomena: Neka interesantna uopštenja Banahovog principa kontrakcije možemo pronaći i u radovima [4], [11] i [12]

5. O Stefanu Banahu

Stefan Banah je poljski matematičar koji je radio između dva svetska rata. Kao samouki matematički genije, bio je osnivač moderne funkcionalne analize. Među njegovim najistaknutijim dostignućima je delo teorija linearne operacije iz 1932. godine koja predstavlja prvu monografiju o teoriji linearnih metričkih prostora.

Rođen je 30. marta 1892. godine u Krakovu. Detinjstvo je proveo sa bakom u Ostrowskom, a kada se razbolela otac ga je preselio u Krakov. Kao dete Banah je upoznao Juliusz Mien, Francuskog intelektualca koji se takođe 1870. godine preselio u Krakov. Mien je podučavao Banaha matematičkim veštinama, kao i francuskim jezikom kako bi se kasnije mogao lakše sporazumevati sa svojim kolegama. U Krakovu je sa deset godina (1902. godine) upisao IV Gimnaziju gde je bio poznat kao genije. Škola je bila specializovana za društvene nauke kao što su istorija, geografija, ali i jezike poput grčkog, latinskog, nemačkog. Pored toga nastavio je da izučava i matematiku. Banah i njegov najbolji prijatelj Witold Wiłkosz rešavali su matematičke probleme tokom školskeog odmora i posle škole. Sa 14 godina (1906.) Banah je već studirao matematiku, a dve godine kasnije to je činio i na više jezika. Nakon toga, 1910. godine se sa Witold Wiłkosz preselio u Lwów, glavni grad tadašnje Galicije, zainteresovan da upiše inženjerstvo na tamošnoj na politehničkoj akademiji. Ipak, u tome je usled nedostatka novca uspeo tek 1914. godine, a sa samo 22 godine položio sve ispite na prvom nivou studija.

Kada je izbio Prvi svetski rat Banah je nije učestvovao u vojnim operacijama jer je bio levoruk i imao loš vid. Kada je ruska vojska otvorila ofanzivu na Lwów, Banah je ponovo prešao u Krakov. Tu i u još nekoliko gradova Galicije proveo je ostatak rata. Radio je kao učitelj u lokalnim školama i prodavac u jednoj knjižari. Tokom ovog perioda pohađao je i predavanja na Jangelonskom univerzitezu u Krakovu, ali se o ovom periodu njegovog života veoma malo zna..

U Krakovu je 1916. godine upoznao profesora Huga Steinhausa jednog od uglednih matematičara toga doba koji je bio fasciniran njegovim znanjem. Ovaj susret je rezultirao dugoročnu saradnju i prijateljstvo. Preko Huga Steinhausa Banah je upozna i svoju buduću suprugu Łuciju Braus. Steinhaus ga je uveo i u akademske krugove, što je znatno ubrzalo njegovo profesionalno usavršavanje.

Nakon što je što je Poljska povratila nezavisnost (1920. godine) dobio je mesto asistenta na Jangelonskom univerzitetu u Krakovu. Steinhausova podrška mu je pomogla da dobije doktorsku titulu, za koju nije morao da završava posebne studije. Njegova doktorska disertacija prihvaćena je od strane Univerziteta kralja Jovana II Kazimira u

Lwów. Objavljena je 1922. godine i sadržala osnovne ideje o funkcionalnoj analizi, koja je ubrzo postala potpuno nova grana matematike. Od 1922. godine bio asistent profesora Antoni Łomnicki na politehničkoj akademiji, a od 1927. godine dobio i mesto profesora. Godine 1924. postao je i član Poljske akademije nauka. U isto vreme Banah je bio i na čelu katedre za matematiku Univerziteta u Lwów .

Mladi i talentovani Banah sarađivao je sa puno matematičara. Njihova neformalana okuplanja kasnije su prerasla u "Lwów školu matematike". Nekoliko godina kasnije počinje objavljivanje časopisa "Matematička analiza" posvećena pre svega Banahovoj oblasti interesovanja-funkcionalnoj analizi.

Nakon početka II Svetskog rata, Lwów je bio pod sovjetskom okupacijom skoro dve godine. Banah je od 1939. godine bio dopisni član Akademije nauka u Ukrajini i u dobrim odnosima sa sovjetskim matematičarima. Da bi zadržao svoje mesto na univerzitetu i nastavio akademske aktivnosti morao učiti ukrajinski jezik.

Nakon preuzimanja Lwów 1941. godine u operaciji "Barabarossa" svi univerziteti bili su zatvoreni. Banah je zajendo sa svojim kolegama i sinom bio zaposlen kod profesora Rudolfa Weigla na Institutu za istraživanje bolesti tifusa. Na ovom Institutu bili su angažovani mnogi nezaposlene univerzitetski profesori i njihovi saradnici, a time zaštitićeni od slučajnog hapšenja i deportacije u nacističke koncetracione logore.

Nakon što je Crvena armija povratila Lwów Banah se vratio na Univerzitet i pomogao njegovom ponovnom osnivanju u posleratnom periodu. S obzirom sa su Sovjeti iseljsavali Poljake sa nekadašnjih poljskih teritorija, Banah je otpočeo pripreme za napuštanje grada i ponovnu selidbu u Krakov, gde mu je bilo obećano mesto na Jangelosnkom univerzitetu. Bio je i kandidat za ministra obrazovanaj u Poljskoj.

Kada mu je 1945. godine diagnosticiran kancer pluća, lekari su mu savetovali da da ostane u Lwów. Umro je 31. avgusta 1945. godine u 53. godini života. Njegova sahrana prerasla je u patriotske demostracije Poljaka koji su ostali u Lwów.

Literatura

1. Dragoslav Herceg, Nataša Krejić, Numerička analiza za informatičare, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 2006
2. Ilija Kovačevič, Nebojša Ralević, Funkcionalna analiza, Fakultet tehničkih nauka, 1997.
3. Iva Kričković, Nepokretna tačka u R, diplomski rad, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 2010.
4. Ljiljana Gajić, Zagorka Lozanov-Crvenković, A fixed point result for mappings with contractive iterate at a point in G-metric spaces, Filomat, (prihvaćen za štampu)
5. Ljubomir Ćirić, A generalization of Banach's contraction principle, Proceedings of the American Mathematical Society, volume 45, number 2, 1974.
6. Olga Hadžić, Osnovi teorije nepokretne tačke, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 1978.
7. Olga Hadžić, Zbirka rešenih zadataka iz funkcionalne analize, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 1980.
8. Olga Hadžić, Stevan Pilipović, Uvod u funkcionalnu analizu, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 1996.
9. S. Park, A unified approach to fixed points of contractive maps, Journal of the Korean Mathematical Society, volume 16, number 2, 1980.
10. V. M. Sehgal, A fixed point theorem for mapping with a contractive iterate, Proceedings of the American Mathematical Society, 1969.
11. Z. Mustafa and B.Sims, Fixed point theorems for contractive mapping in complete G-metric spaces, Fixed Point Theory and Applications, Vol. 2009.
12. Z. Mustafa, W. Shatanawi and M. Bataineh, Existence of Fixed Point Results in G-metric Spaces, Inter. J.Math.Sciences, Vol. 2009.

BIOGRAFIJA

Rođena sam u Novom Sadu 03.04.1986. Završila sam osnovnu školu „“Vuk Karadžić“ u Novom Sadu 2001. godine a nakon toga i srednju ekonomsku školu “Svetozar Miletić“ 2005. godine u Novom Sadu. Od oktobra 2005. godine sam redovan student Prirodno – matematičkog fakulteta u Novom Sadu, departman za matematiku i informatiku, na smeru matematika – finansija. U septembru 2009. godine završila sam osnovne studije sa prosečnom ocenom 9.36. Iste godine na istom fakultetu upisala sam master studije primenjene matematike. Zaključno sa junskim ispitnim rokom 2010.godine uspešno sam položila sve predviđene ispite master studija sa prosečnom ocenom 9.43.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Master rad
VR
Autor: Nataša Gajinov
AU
Mentor: Prof. dr Ljiljana Gajić
MN
Naslov rada: Spektralna teorija operatora
MR
Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: srpski/engleski
JI
Zemlja publikovanja: Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2010.
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, PMF, Trg Dositeja Obradovića 4
MA
Fizički opis rada: 5 glava, 6 poglavlja, 59 strana
FO
Naučna oblast: Matematika
NO
Naučna disciplina: Funkcionalna analiza
ND
Ključne reči: kontrakcija, nepokretna tačka, kompletni metrički prostor, ϕ – kontrakcija, lokalna uniformna (ε, λ) – kontrakcija, uopštena kontrakcija, n – lokalna kontrakcija, kvazi kontrakcija.
PO
UDK:
Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku
ČU
Važna napomena:

VN
Izvod:
IZ
Tema ovog rada je Banahov princip kontrakcije-primene i generalizacije. Prvi deo rada sadrži osnovne pojmove u vezi sa metričkim i Banahovim prostorima. U drugom delu formulisana je i dokazana Banahova teorema o nepokretnoj tački koja garantuje postojanje i jedinstvanost nepokretne tačke određenih preslikavanja iz nekog metričkog prostora u samog sebe i daje konstruktivni metod za pronalaženje nepokretne tačke. Banahova teorema predstavlja jedan od klasičnih rezultata teorije nepokretne tačke koja zauzima značajno mesto u matematici. Trećo deo govori o primeni Banahove teoreme u dokazu egzistencije i jedinstvenosti rešenja za jednačine različitog tipa. Primenom teoreme daje se i postupak približnog nalaženja tog rešenja poznat kao metod sukcesivnih aproksimacija. Četvrti deo sadrži neke generalizacije teoreme o nepokretnoj tački u metričkim prostorima.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 15.10.2010.
DP
Datum odbrane:.
DO
Članovi komisije:
KO
Predsednik: Akademik prof. dr Olga Hadžić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu.
Član: Prof. dr Ljiljana Gajić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, mentor,
Član: Prof. dr Zagorka Lozanov-Crvenković, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu.
Član: Prof. dr Sanja Rapajić, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu.