UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Nataša Džaleta

Optimalna trajektorija trgovanja kod BB modela

-MASTER RAD-

Novi Sad, 2015.

Sadržaj

1

Uvod

Algoritamsko trgovanje predstavlja opšte prisutan način automatizovanog elektronskog trgovanja korišćen od strane investicionih banaka, penzijskih fondova ili bilo kojeg drugog učesnika na tržištu orjentisanog ka investiranju. Pod pojmom algoritamskog trgovanja podrazumeva se automatizovanje jednog ili više koraka u procesu kupovine ili prodaje finansijskih instrumenata. Ovi koraci obuhvataju: analizu podataka, formiranje strategije i samo izvršenje strategije prilikom kupovine i prodaje. Pod Black Box trgovanjem u ovom radu će se smatrati algoritamsko trgovanje kod kojeg su automatizovana prva dva gore navedena koraka. Pod Black Box trgovanjem podrazumeva se unošenje parametara od strane korisnika u softver koji zatim, na osnovu analize tih parametara korisniku predlaže strategiju koju softver smatra optimalnom. Parametri koje korisnik obezbeđuje mogu biti istorijski podaci vezani za prinos instrumenta koji su u opticaju za trgovanje, ciljani prinos, razna ograničnja vezana za budžet itd. Optimalna strategija sastoji se od težinskih koeficijenata koji korisniku sugerišu koliki udeo sredstava koje poseduje treba da uloži u koji instrument, na taj način formirajući optimalni portfolio tj. skup investicija. Razlog za ime Black Box nalazi se u činjenici da korisnik uglavnom nije informisan na koji način softver dolazi do optimalne strategije, što softver za korisnika čini nekom vrstom crne kutije (engl. Black Box). Upravo je ova osobina Black Box trgovanja predmet kritike među analitičarima. Ovaj rad se bavi onim što se nalazi unutar crne kutije, tj. načinom na koji softver dolazi do optimalne strategije pri čemu se fokus stavlja na optimizaciju portfolija.

Problemom optimizacije portfolija, kao veoma atraktivnom temom, naučnici se bave decenijama. Jedan od mogućih pristupa ovom problemu, a ujedno i pristup koji se razmatra u ovom radu jeste takozvani risk-adjusted model optimizacije na koji je prvi put ukazao Arthur Roy 1952. godine. Ovaj model u funkciju cilja uključuje rizik portfolija, grubo definisan kao rizik od gubitka. Da bi se to postiglo rizik je, kao apstraktan pojam, pre svega neophodno kvantifikovati tj. odabrati odgovarajuću meru rizika, pri čemu će različite mere rizika dati različite modele.

Prirodno se kao mera rizika nameće varijansa prinosa, čije bi veće vrednosti označavale veći rizik, jer je odstupanje prinosa od proseka veće, a samim tim je veća i mogućnost gubitka. Model optimizacije portfolija koji za funkciju cilja uzima upravo varijansu ustanovio je Herry Markowitz [1] pedesetih godina dvadesetog veka na temeljima Roy Arthurovog modela. Nakon njega, istim modelom bavio se William Sharpe [2] formirajući sada već poznati Sharpeov količnik, izveden po uzoru na Roy Arthurov količnik. Iako Sharpeov količnik i dalje važi za zlatni standard pokazatelja uspešnosti aktive, vremenom su uočene i neke mane. Jedna od njih ispoljava se u slučaju kada prinos aktive nema normalnu raspodelu i tada količnik pokazuje veće vrednosti od realnih što u teoriji može dovesti do pogrešnog rangiranja aktiva i konačno do gubitka. Upravo su te mane navele naučnike na izvođenje novih, unapređenih pokazatelja. Jedan on njih je Calmarov količnik osmišljen od strane Terryja Younga [3] 1991. godine.

Kao jedan od pristupa problemu optimizacije portfolija izdvaja se metod u kojem se funkcija cilja predstavlja kao linearna kombinacija prethodno pomenutih mera rizika. Učinkovitost ovakvog pristupa optimizaciji portfolija upoređena je sa onim koji koristi isključivo standardne mere rizika poput Sharpeovog i Calmarovog količnika.

Najzad, pored jednostavne optimizacije portfolija moguće je pomenutom problemu pristupiti kroz složenije algoritme koji se sastoje od niza optimizacija koje se koriste u skladu sa određenim pravilima. Jedan takav algoritam predstavljen je kasnije u ovom radu.

Korišćeni su empirijski podaci prikupljeni za period od deset godina u investicionom fondu koji se bavi investiranjem u razne klase aktive. Podaci se sastoje od dvadeset dve aktive ili strategije. Pri tome, sve strategije su sistematski osmišljene pri čemu petnaest predstavlja investicije u deonice (engl. equity), a sedam investicije u fjučerse (engl. futures). Što se strategija koje ulažu u deonice tiče, one deluju na različitim univerzumima akcija: $S\&P500$, $FTSA100$, statistički univerzum itd. S druge strane, jedan deo strategija sa fokusom na fjučerse u obzir uzima određeni skup od četrdeset fjučersa dok je drugi deo usmeren ka fjučersima vezanim za metale i indekse.

Još je bitno napomenuti da pokazatelji uspešnosti obrađeni u ovom radu predstavljaju samo deo postojećih pokazatelja, te da je sve pokazatelje nemoguće uključiti u jedan rad.

Želela bih izuzetno da se zahvalim dr. Milesu Kumaresanu koji je formulisao problem i obezbedio podatke na kojima smo radili bez kojih rad ne bi imao realni oslonac i težinu, kao i savete koji su bili od velike koristi za uvid u realni sektor.

2

Pregled definicija i osnovnih pojmova

2.1 Pregled osnovnih definicija

Pregled osnovnih definicija korišćenih u radu:

Definicija 2.1.1 (σ-algebra) *Neka je Ω skup svih mogućih ishoda (skup elementarnih događaja) nekog eksperimenta. σ-algebra (σ-polje) nad skupom Ω je podskup $\mathcal{F}$ partitivnog skupa $\mathcal{P}(\Omega)$ ukoliko važe sledeći uslovi:*

1. $\Omega \in \mathcal{F}$,

2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$, *pri čemu je A^c komplement skupa A,*

3. $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Definicija 2.1.2 (Borelova σ-algebra) *Borelova σ-algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ je najmanja σ-algebra koja sadrži sve otvorene podskupove skupa realnih brojeva.*

Definicija 2.1.3 (Funkcija verovatnoće) *Neka je Ω skup elementarnih događaja i $\mathcal{F}$ σ-polje nad Ω. Funkcija $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ se zove verovatnoća na prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ ako zadovoljava uslove:*

1. $P(\Omega) = 1$,

2. $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}, A_i \bigcap A_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, ... \Rightarrow P\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Uređena trojka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ se naziva prostor verovatnoća.

Definicija 2.1.4 (Slučajna promenljiva) *Preslikavanje $X : \Omega \to \mathbb{R}$ je slučajna promenljiva nad prostorom verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ako $X^{-1}(S) \in \mathcal{F}$ za svako $S \in \mathcal{B}$, gde je $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ Borelovo σ-polje. Ekvivalentno, kažemo da je X $\mathcal{F}$-merljivo. Ako je $X(\Omega)$ konačan skup kažemo da je X prosta slučajna promenljiva.*

Definicija 2.1.5 (Diskretna slučajna promenljiva) *Slučajna promenljiva X je diskretna (diskretnog tipa) ako postoji prebrojiv skup različitih vrednosti $R_X = \{x_1, x_2, ...\}$ takav da je $P\{X \in {R_X}^c\} = 0$, gde je ${R_X}^c$ komplementarni skup od R_X. Verovatnoću događaja $\{X = x_i\}$ označavamo sa $p(x_i)$:*

$$p(x_i) = P\{\omega \in \Omega | X(\omega) = x_i\} = P\{X = x_i\}, i = 1, 2, ...$$

Skup vrednosti diskretne slučajne promenljive $\{x_1, x_2, ...\}$ i odgovarajuće verovatnoće $p(x_i)$, i = 1,2,..., čine zakon raspodele slučajne promenljive X.

Definicija 2.1.6 (Apsolutno neprekidna slučajna promenljiva) *Slučajna promenljiva X je apsolutno neprekidnog tipa ako postoji nenegativna integrabilna funkcija $\varphi_X(x), -\infty < x < \infty$, takva da je za svaki skup $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,*

$$P\{X \in S\} = \int_S \varphi_X(x)dx.$$

Funkcija $\varphi_X(x)$ zove se gustina raspodele verovatnoća slučajne promenljive X.

Definicija 2.1.7 (Funkcija raspodele) *Funkcija $F_X(x) : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ definisana sa*

$$F_X(x) = P\{\omega \in \Omega | X(\omega) < x\},$$

naziva se funkcija raspodele slučajne promenljive X. Funkciju raspodele F_X u tački $x \in \mathbb{R}$ kraće zapisujemo $F_X(x) = P\{X < x\}$.

Definicija 2.1.8 (Očekivanje) *Očekivanje slučajne promenljive X, $E(X)$ ili μ, definiše se na sledeći način:*

(i) ukoliko je slučajna promenljiva X diskretnog tipa sa raspodelom verovatnoća $p(x_k), k = 1, 2, ...$ i važi $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k| p(x_k) < \infty$, tada je:

$$\mu = E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p(x_k),$$

(ii) ukoliko je slučajna promenljiva X apsolutno neprekidnog tipa sa gustinom $\varphi_X(x)$ i važi $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x| \varphi_X(x)dx < \infty$, tada je:

$$\mu = E(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\varphi_X(x)dx.$$

Definicija 2.1.9 (Momenat) *Momenat reda $r, r = 1, 2, ...$, slučajne promenljive X, μ_r, definišemo kao:*

$$\mu_r = E(X^r).$$

Tako imamo sledeća dva slučaja:

(i) ukoliko je slučajna promenljiva X diskretnog tipa tada je momenat reda r, r=1, 2, ...:

$$\mu_r = \sum_i x_i^r p_i,$$

(ii) ukoliko je slučajna promenljiva X apsolutno neprekidnog tipa tada je momenat reda r, r=1, 2, ...:

$$\mu_r = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^r \varphi_X(x)dx.$$

Uočimo da je očekivanje slučajne promenljive, μ, momenat prvog reda.

Definicija 2.1.10 (Centralni momenat) *Centralni momenat reda* $r, r = 1, 2, ...$, *slučajne promenljive X,* m_r, *definišemo kao:*

$$m_r = E((X - \mu)^r).$$

Tako imamo sledeća dva slučaja:
(i) ukoliko je slučajna promenljiva X diskretnog tipa tada je centralni momenat reda r, r=1, 2, ...:

$$m_r = \sum i(x_i - \mu)^r p_i,$$

(ii)ukoliko je slučajna promenljiva X apsolutno neprekidnog tipa tada je momenat reda r, r=1, 2, ...:

$$m_r = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^r \varphi_X(x) dx.$$

Definicija 2.1.11 (Disperzija) *Centralni momenat reda dva slučajne promenljive X zove se disperzija (varijansa) slučajne promenljive X i označava se sa D(X) ili* σ_X^2.

Definicija 2.1.12 (Standardno odstupanje) *Standardno odstupanje (standardna devijacija) slučajne promenljive X se definiše kao*

$$\sigma_X = \sqrt{D(X)}.$$

Definicija 2.1.13 (Kovarijansa) *Kovarijansa slučajne promenljive* (X, Y), $cov(X, Y)$ *ili* σ_{XY} *je:*

$$cov(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Definicija 2.1.14 (Koeficijent korelacije) *Koeficijent korelacije slučajne primenljive* (X, Y), ρ_{XY}, *je:*

$$\rho_{XY} = cov(X^*, Y^*) = cov(\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}, \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}).$$

Znamo da važi sledeće:

$$\rho_{XY} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

Teorema 2.1.15 *Za koeficijent korelacije* ρ_{XY} *važi:*

$$|\rho_{XY}| \leq 1.$$

Za slučajne promenljive X i Y čiji je koeficijent korelacije $\rho_{XY} < 0$ kažemo da su negativno korelisane, za $\rho_{XY} = 0$ kažemo da nisu korelisane, a za $\rho_{XY} > 0$ kažemo da su pozitivno korelisane.

Definicija 2.1.16 (Stohastički proces) *Neka je S skup elementarnih događaja nekog eksperimenta E i neka se svakom elementu tog skupa,* $s \in S$, *pridruži funkcija X(t,s), pri čemu t pripada skupu* $T \in \mathbb{R}$. *Skup* $\{X(t, s), t \in T\}$ *naziva se stohastički (slučajni) proces.*

Funkcija X(t,s) je slučajna promenljiva za bilo koju vrednost t.

Definicija 2.1.17 *(i) Ukoliko je T beskonačan prebrojiv skup, skup* $\{X(t,s), t \in T\}$ *naziva se diskretni stohastički proces.*

(ii) Ukoliko je T interval (ili skup intervala), skup $\{X(t,s), t \in T\}$ *naziva se neprekidni stohastički proces.*

Uobičajeno je da se za stohastički proces $\{X(t,s), t \in T\}$ koristi oznaka $\{X(t), t \in T\}$ ili $\{X_n, n \in T\}$.

Definicija 2.1.18 *Skup vrednosti* $S_{X(t)}$ *koje mogu uzeti slučajne promenljive X(t) se naziva skup stanja stohastičkog procesa* $\{X(t), t \in T\}$*. U zavisnosti od toga da li je* $S_{X(t)}$ *konačan (ili beskonačan prebrojiv skup) ili beskonačan neprebrojiv skup, stohastički proces* $\{X(t), t \in T\}$ *je diskretan ili neprekidan, respektivno.*

Definicija 2.1.19 *Ukoliko su slučajne promenljive* $X(t_4) - X(t_3)$ *i* $X(t_2) - X(t_1)$ *nezavisne za svako* $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$*, kažemo da je stohastički proces* $\{X(t), t \in T\}$ *proces sa nezavisnim priraštajima.*

Definicija 2.1.20 (Očekivanje slučajnog procesa) *Očekivanje (srednja vrednost) stohastičkog procesa* $X(t), t \in T$ *je data sa:*

$$\mu_X(t) = \mu(t) = E(X(t)), t \in T.$$

Primetimo da je $\mu_X(t)$ funkcija od t.

Definicija 2.1.21 (Autokovarijansna funkcija stohastičkog procesa) *Autokovarijansna funkcija stohastičkog procesa* $X(t), t \in T$ *data je sa:*

$$K_X(t,s) = K(t,s) = E(X_t X_s) - E(X_t)E(X_s) = E((X_t - \mu(t))(X_s - \mu(s))), t, s \in T.$$

Definicija 2.1.22 (Disperzija stohastičkog procesa) *Disperzija stohastičkog procesa* $X(t), t \in T$ *data je sa:*

$$\sigma_X^2(t) = E((X_t - \mu(t))^2) = E(X_t^2) - E^2(X_t), t \in T.$$

Definicija 2.1.23 *Stohastički proces* $X(t), t \in [t_0, T]$ *je strogo stacionaran ili stacionaran u užem smislu ako su mu konačnodimenzione raspodele invarijantne u odnosu na translaciju vremena:*

$$F_{t_1+h,\dots,t_n+h}(x_1, ..., x_n) = F_{t_1,\dots,t_n}(x_1, ..., x_n), h \in R.$$

Za strogo stacionaran proces znamo da ima konstantnu srednju vrednost jer:

$$\mu_X(t) = E(X(t)) = E(X(t+h)) = \mu(t+h), \forall h \in R.$$

Kako strogo stacionaran proces $X(t), t \in T$ za koji je $E(X(t)^2) < \infty$ za autokovarijansnu funkciju ima funkciju razlike argumenata tj.:

$$K_X(t,s) = E((X(t) - \mu(t))(X(s) - \mu(s))) = E((X(t-s) - \mu)(X(0) - \mu)) = f(t-s),$$

imamo da je disperzija ovakvog procesa takođe konstantna jer je:

$$\sigma_X(t) = K_X(t,t) = f(0), \forall t.$$

Definicija 2.1.24 *Stohastički proces $X(t)$ je slabo stacionaran ili stacionaran u širem smislu ako je ispunjeno:*

$$E(X(t)^2) < \infty,$$
$$\mu_X(t) = const,$$
$$K_X(t,s) = f(t-s).$$

Definicija 2.1.25 (Vremenska serija) *Vremenska serija je jedna realizacija stohastičkog procesa.*

Najbitnija statistička osobina vremenskih serija jeste njihova stacionarnost. Za stacionarne vremenske serije mogu se naći ocene njihovih prvih i drugih momenata kao i autokovarijansna funkcija, jer ne zavise od t.

Definicija 2.1.26 (Kros korelacija) *Kros korelacija između dva stohastička procesa $X(t)$ i $Y(t)$ je funkcija definisana kao:*

$$\phi_{XY}(\tau) = E(X(t) - \mu_X)(Y(t+\tau) - \mu_Y)).$$

Podaci sa kojima radimo u ovom radu vezani su za prinose investicionog fonda na dnevnom nivou, pa ćemo vremenske serije koje taj prinos opisuje posmatrati kao niz slučajnih promenljivih uređenih u odnosu na skup prirodnih brojeva, tj. $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$. Skup $\mathbb{N}$ predstavlja skup dana za koje su nam date vrednosti prinosa.

Od sada pa na dalje u radu pretpostavljamo da su vremenske serije sa kojima radimo stacionarne.

Neka je data vremenska serija $x(t), t = 1, ..., N$ kao realizacija stacionarnog stohastičkog procesa. Svako $x(t), t = 1, ..., N$ predstavlja realizaciju slučajne promenljive $X(t), t = 1, ..., N$. Kako je stohastički proces stacionaran, tj. ima konstantno očekivanje i varijansu vremensku seriju možemo posmatrati kao uzorak. Drugim rečima elemente vremenske serije posmatramo kao realizacije jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih. U tom slučaju ocene glavnih numeričkih karakteristika vremenske serije(stohastičkog procesa) date su sledećim formulama:

Očekivanje:

$$\hat{\mu}_X = \hat{\mu} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} x(t) \tag{2.1}$$

Disperzija:

$$\hat{\sigma}_X^2 = \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}(x(t) - \hat{\mu}_X)^2 \tag{2.2}$$

Korelacija:

$$\hat{\sigma}_{XY} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}(x(t) - \hat{\mu}_X)(y(t) - \hat{\mu}_Y) \tag{2.3}$$

2.2 Normalna raspodela

Normalna raspodela spada u raspodele verovatnoća apsolutno neprekidnih slučajnih promenljivih. Definisana je očekivanjem i standardnim odstupanjem. Očekivanje označavamo sa $\mu \in \mathbb{R}$, a standardno odstupanje sa $\sigma > 0$. Funkcija gustine ove raspodele simetrična je u odnosu na $x = \mu$ i ima oblik zvona, čija širina i spljoštenost zavise od parametra σ u smislu da što je veće σ to je zvono šire i spljoštenije.

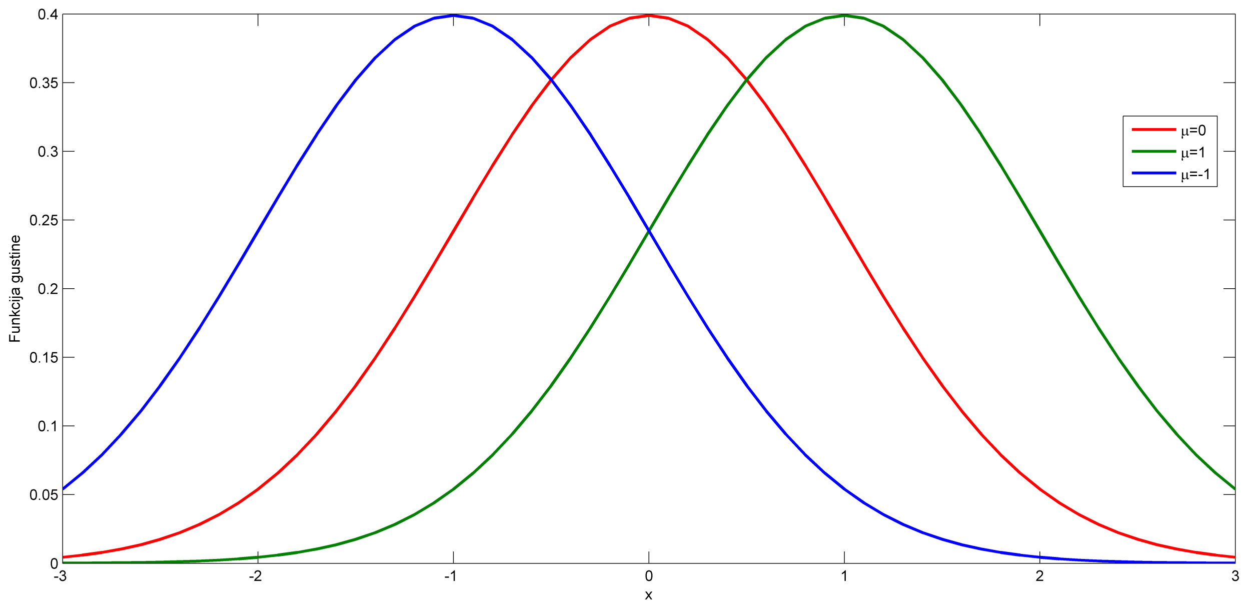
Normalna raspodela je značajna iz razloga što se pomoću nje može modelovati veliki broj kako društvenih tako i prirodnih pojava.

Ako slučajna promenljiva X ima normalnu raspodelu, u oznaci $X : \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$, njena funkcija gustine je data sa:

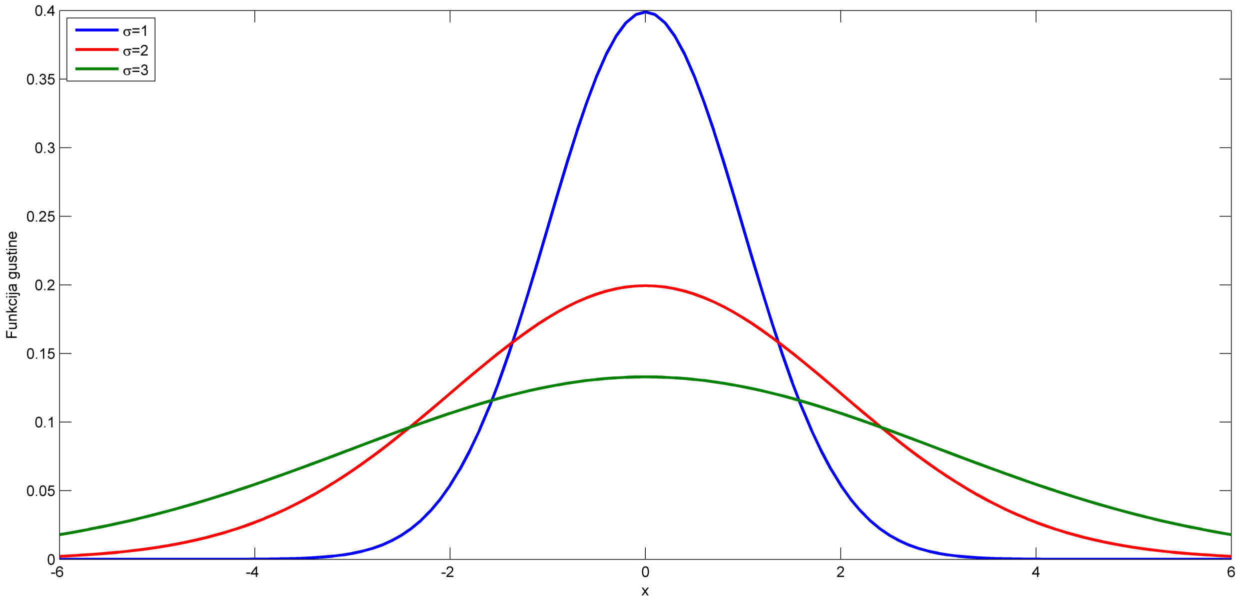
$$\varphi_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}.$$

Specijalan slučaj normalne raspodele kod koje je $\mu = 0$ i $\sigma = 1$ naziva se *standardna normalna raspodela*.

Na sledeća dva grafika dat je prikaz funkcije gustine normalne raspodele za različite vrednosti parametra μ i parametra σ:



Slika 2.1: Normalna raspodela za različite vrednosti parametra μ



Slika 2.2: Normalna raspodela za različite vrednosti parametra σ

Dve veoma bitne osobine funkcije raspodele uopšte su zakrivljenost i spljoštenost:

Zakrivljenost je mera simetrije ili tačnije mera nedostatka simetrije. Ukoliko je raspodela slučajne promenljive X simetrična u odnosu na pravu $x = \mu$, centralni momenti neparnog reda te raspodele biće jednaki nuli tj. važiće:

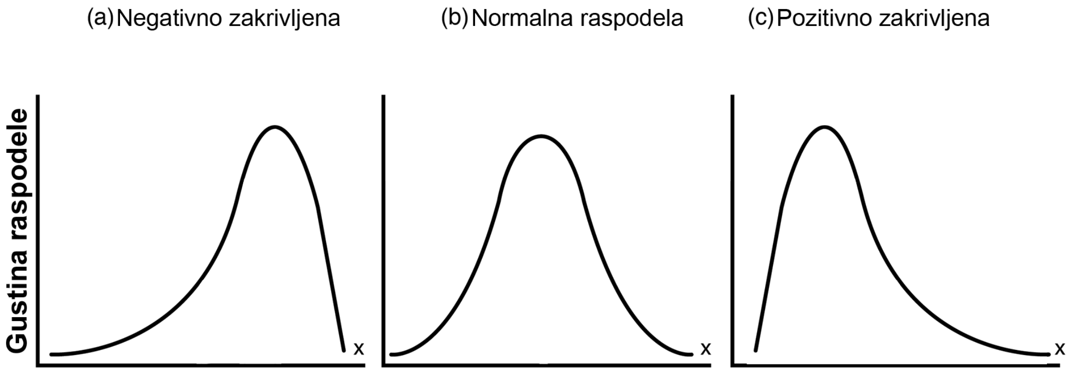
$$m_{2r-1} = 0, r = 1, 2, ...$$

Na osnovu te osobine koeficijent asimetrije se definiše kao:

$$K_A = \frac{m_3}{m_2^{\frac{3}{2}}}.$$

Ovaj koeficijent se još naziva i prvi Pearsonov koeficijent.
Za simetričnu raspodelu važi $K_A = 0$, dok se za raspodelu asimetričnu na desno dobija pozitivna vrednost pokazatelja K_A. Slično za raspodelu asimetričnu na levo koeficijent K_A uzima negativnu vrednost. Bitno je napomenuti da postoje raspodele čiji su neparni centralni momenti jednaki nuli, ali nisu simetrične i u tom slučaju prvi Pearsonov koeficijent nije merodavan.

Na grafiku koji sledi možemo videti grafički prikaz pozitivno i negativno zakrivljene raspodele kao i raspodelu koja nije zakrivljena ni u jednu stranu tj. za koju je $K_A = 0$.



Slika 2.3: Zakrivljenost raspodele

Spljoštenost se meri drugim Pearsonovim koeficijentom koji definišemo pomoću četvrtog centralnog momenta na sledeći način:

$$K_E = \frac{m_4}{m_2^2} = \frac{m_4}{\sigma^2}.$$

Za raspodelu kojoj odgovara koeficijent $K_E = 3$ kažemo da raspodela ima normalnu spljoštenost ili da je mezokurtična. Jedna od raspodela koja zadovoljava prethodno svojstvo je normalna raspodela. Ako je $K_E > 3$ raspodela je izduženija u odnosu na normalnu raspodelu ili leptokurtična, a ako je $K_E < 3$ raspodela je spljoštenija u odnosu na normalnu raspodelu odnosno platikurtična.

Alternativna mera spljoštenosti je ekscesni Pearsonov koeficijent definisan kao:

$$K_E = \frac{m_4}{\sigma^2} - 3.$$

Interpretacija ovog koeficijenta analogna je prethodnoj.

2.3 Sharpeov količnik

Sharpeov količnik razvijen je 1966. godine od strane američkog ekonomiste William Forsyth Sharpe po kojem je količnik i dobio ime. Nastao je na temeljima Roy Arthurovog količnika koji je ovaj naučnik definisao 1952. godine. Sharpeov količnik spada u grupu pokazatelja upešnosti aktive ili mera rizika aktive. Danas je jedna od najčešće korišćenih mera uspešnosti pri rangiranju portfolia i investicionih fondova uglavnom zbog svoje jednostavnosti.

Sharpeov količnik definišemo na sledeći način. Neka je data aktiva A opisana svojim prinosom $R(t), t \in \mathbb{N}$ koji posmatramo kao slučajan proces. Napominjemo da se pod očekivanjem i varijansom aktive podrazumeva očekivanje i varijansa prinosa te aktive kao stohastičkog procesa, tj. vremenske serije. Neka je još poznata bezrizična stopa prinosa $r_f \geq 0$. U realnom svetu ne postoji investicija čiji je rizik jednak nuli, ali postoje investicije čiji je rizik zanemarljiv i njih smatramo bezrizičnim. Primer jedne investicije sa bezrizičnom stopom prinosa je državna obveznica zemlje čija je ekonomija stabilna. Takva stopa prinosa je s obzirom na nizak rizik izuzetno mala. U ovom trenutku to bi bila obveznica Nemačke, Sjedinjenih Američkih Država ili Japana. Tada Sharpeov količnik za aktivu A definišemo kao:

$$Sharpe_A(t) = \frac{E(R(t) - r_f)}{\sqrt{var(R(t) - r_f)}}.$$

Kako varijansa nije osetljiva na dodavanje konstante, u našem slučaju r_f, to Sharpeov količnik zapravo izgleda ovako:

$$Sharpe_A(t) = \frac{E(R(t) - r_f)}{\sqrt{var(R(t))}}.$$

Dakle Sharpeov količnik meri koliko je očekivano da će prinos aktive premašiti bezrizičnu stopu po jedinici odstupanja samog prinosa. U daljem radu ćemo radi jednostavnosti, a bez umanjenja opštosti pretpostaviti da je je $r_f = 0$.

Kako je ovako definisan Sharpeov količnik u obzir uzimao dnevne prinose on predstavlja dnevni Sharpeov količnik koji je neophodno anualizirati radi mogućnosti poređenja sa drugim količnicima. Da bi smo to postigli gore definisan Sharpeov količnik je potrebno pomožiti sa $\sqrt{252}$. Od sada, u formulaciji svih kasnijih modela, korisitmo anualiziran količnik:

$$Sharpe_A(t) = \sqrt{252}\frac{E(R(t) - r_f)}{\sqrt{var(R(t))}}.$$

Ukoliko je $R(t), t \in \mathbb{N}$ stacionaran stohastički proces Sharpeov količnik ne zavisi od t.

Već iz same formule vidimo da će više vrednosti Sharpeovog količnika odgovarati aktivama sa višim prinosom i nižom varijansom i obrnuto. Međutim, visoka varijansa ne mora uvek da bude loša osobina prinosa. Poslužimo se sledećim primerom kao ilustracijom prethodne tvrdnje.

Primer 2.3.1 *Neka su date aktive A_1 i A_2 koje su u proteklih deset dana beležila sledeće prinose:*

$$r(A_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.4 \\ 0.3 \\ 0.6 \\ 0.9 \\ 0.7 \\ 1 \\ 0.9 \end{bmatrix} r(A_2) = \begin{bmatrix} 0.416 \\ 0.481 \\ 0.511 \\ 0.561 \\ 0.541 \\ 0.511 \\ 0.481 \\ 0.491 \\ 0.471 \\ 0.491 \end{bmatrix}$$

Kako očekivanje prinosa modeliramo sa prosečnom vrednošću, a varijansu sa statistikom: $\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}(r_i - \mu)^2$ dobijamo sledeće rezultate:

$$\mu_1 = 0.5$$

$$\mu_2 = 0.5$$

$$\sigma_1 = 0.3712$$

$$\sigma_2 = 0.0314$$

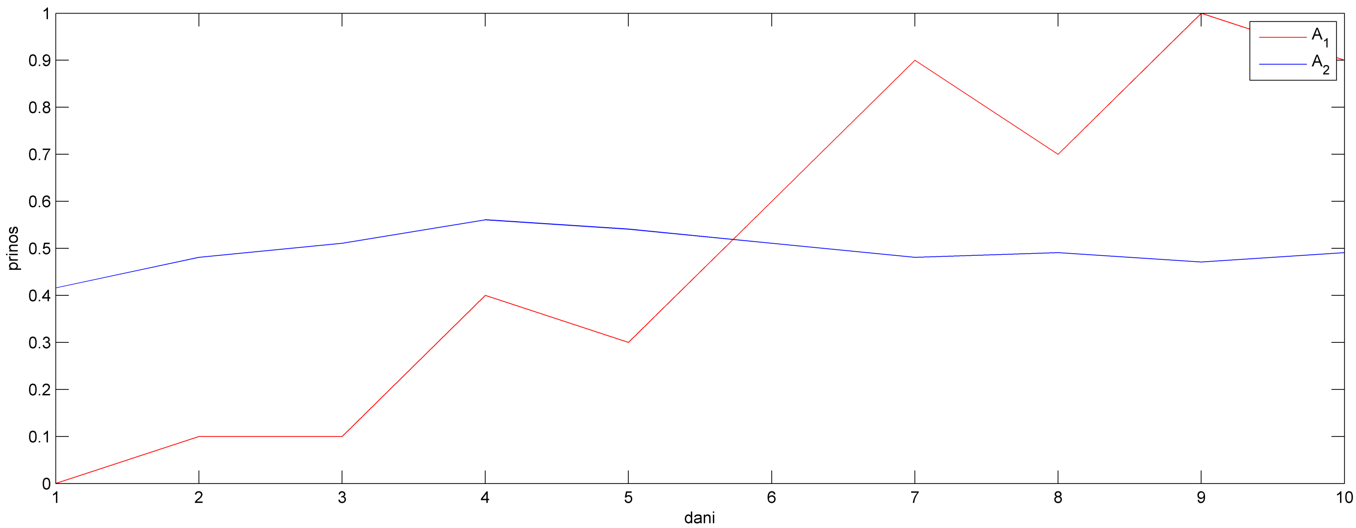
gde su μ_1 i μ_2 očekivane vrednosti aktiva A_1 i A_2 respektivno, a σ_1 i σ_2 standardne devijacije ovih aktiva.

Ukoliko pretpostavimo da je bezrizična stopa prinosa jednaka nuli, Sharpeov količnik za ove dve aktive je:

$$Sharpe(A_1) = \frac{\mu_1}{\sigma_1} = \frac{0.5}{0.3712} = 1.347$$

$$Sharpe(A_2) = \frac{\mu_2}{\sigma_2} = \frac{0.5}{0.0314} = 15.924$$

Grafički prikaz prinosa datih aktiva dat je na sledećoj slici:



Slika 2.4: Primer 1

Ukoliko želimo da rangiramo ove dve aktive koristeći Sharpeov količnik, zaključujemo da je aktiva A_2 bolja od aktive A_1. Kako su očekivane vrednosti ovih aktiva jednake, razlika u Sharpeovom količniku proizilazi iz razlike u varijansama. Prva aktiva beleži znatno veću varijansu, što Sharpeov količnik kažnjava nižom vrednošću količnika. Postavlja se pitanje da li je visoka varijansa u ovom slučaju stvarno loša. Visoka varijansa se ovde, što možemo videti na grafiku, može protumačiti kao potencijal rasta prinosa, jer se odnosi na skokove u prinosu i u tom smislu predstavlja pozitivnu osobinu. Upravo tu osobinu Sharpeov količnik ne uspeva da obuhvati i zbog toga se stvorila potreba da se formiraju količnici koji će se preciznije odnositi prema varijansi. Konzervativni investitori, tj. investitori koji su averzni prema riziku, uvek bi odabrali strategiju A_2, jer im nudi stabilnost. Investitori koji nisu rizik odbojni bi birali strategiju A_1, jer im ona nudi potencijalan rast.

Prinosi aktive se obično modeliraju normalnom raspodelom i u tom slučaju Sharpeov količnik stvarno jeste dobar pokazatelj uspešnosti aktive. Problem nastaje kada prinosi ne prate normalnu raspodelu ili pak poseduju određenu ukošenost. Tada se postavlja pitanje da li je razvijanje i korišćenje unapređenih pokazatelja opravdano. Jedan od radova koji tvrdi da odabir pokazatelja nije bitan pri rangiranju većine investicionih fondova tj. da Sharpeov količnik dovoljno dobro opisuje realnost je "Performance Measurement in the Investment Industry: Does the Measure Matter?" [18]. U našem radu se međutim dobijaju drugačiji rezultati. Rangiranje strategija zavisi od odabira pokazatelja iz čega proizilazi potreba za dodatnim pokazateljima.

2.4 Calmarov količnik

Calmarov količnik je najmlađa mera uspešnosti obrađena u ovom radu. Nastao je 1991. godine kao delo Terryja Younga, a samo ime je skraćenica za **CAL**ifornia **M**anaged **A**ccounts **R**eports. Da bismo definisali Calmarov količnik prvo je neophodno definisati najveći pad u prinosu (engl. worst drawdown), u oznaci WDD, koji će preuzeti ulogu mere rizika koju je do sada imala varijansa.

Pretpostavimo da smo određeni iznos sredstava uložili u aktivu A i da pratimo koliko nam novca takvo ulaganje donosi na dnevnom nivou. Neka je $R(t), t \in \mathbb{N}$ slučajan proces koji predstavlja prinos aktive A. Sa $r(t), t \in \{1, 2, ..., N\}$ označimo realizaciju procesa $R(t)$ na dan t. Radi jednostavnosti recimo da smo uložili jednu novčanu jedinicu. Prvog dana zaradili smo $r(1)$. Već drugog dana zaradili smo $r(2)$, ali, s obzirom na zaradu od prvog dana, drugog dana smo ukupno zaradili $r(1) + r(2)$. Analogno na dan N smo zaradili $r(N)$, ali, ubrajajući i prethodno zarađeno, ukupno smo ostvarili $\sum_{i=1}^{N} r(i)$. Ovde zapravo govorimo o kumulativnom prinosu. Formalno, kumulativni prinos aktive A čiji je prinos predstavljen slučajnim procesom $R(t), t \geq 0$ definišemo kao slučajan proces:

$$c(t) = \sum_{\tau \leq t} R(\tau).$$

Najveći pad u prinosu definisaćemo upravo u smislu kumulatinog prinosa. U trenutku T najveći pad želimo da definišemo kao pad sa najvišeg vrha u najnižu "dolinu" za period $[0, T]$. Tada najveći pad u prinosu aktive A u trenutku T definišemo sledećom formulom:

$$WDD_A(T) = \max_{t \in [0,T]} (\max_{\tau \in [0,t]} c(\tau) - c(t)).$$

Dakle WDD možemo predstaviti kao slučajan proces:

$$WDD_A(s) = \max_{t \in [0,s]} (\max_{\tau \in [0,t]} c(\tau) - c(t)).$$

Sada Calmarov količnik definišemo kao:

$$Calmar_A(t) = \frac{E(R(t) - r_f)}{E(WDD_A(t))}.$$

Kao i kod Sharpeovog količnika, s obzirom na korišćenje dnevnih prinosa u računu, ovako definisan Calmarov količnik predstavlja količnik na dnevnom nivou i potrebno ga je anualizirati. To ćemo ovde učiniti množenjem gornje formule sa 252 i tada dobijamo:

$$Calmar_A(t) = 252 \frac{E(R(t) - r_f)}{E(WDD_A(t))}.$$

Ukoliko je $R(t), t \in \mathbb{N}$ stacionaran slučajan proces Calmarov količnik ne zavisi od t.

Primetimo da smo problem koji smo imali kod Sharpeovog količnika koji jednako kažnjava rasipanje iznad i ispod očekivanja prevazišli tako što smo kao meru rizika umesto varijanse uzeli WDD. Ono što WDD kažnjava je isključivo pad u prinosu(kumulativnom), ali nikako rast koji se smatra poželjnim.

Jedna od mera rizika koja, kao i Calmarov količnik, koristi rizik od pada u prinosu je Sortinov količnik. Osmišljen je nedugo posle Calmarovog količnika, 1993. godine, od strane Brian M. Rom i Kathleen W. Ferguson [4].

3

Opis problema

Neka je dato n aktiva, $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$, koje nam stoje na raspolaganju prilikom formiranja portfolija. Svaka aktiva A_i je opisana svojim prinosom, $r_i(t), i = 1, 2, 3, ..., n, t \geq 0$ koji posmatramo kao slučajan proces. Želimo da formiramo portfolio koji će biti optimalan tj. želimo da pronađemo najbolju kombinaciju gore pomenutih raspoloživih strategija. Naš cilj je, dakle, da odlučimo koliko sredstava treba uložiti u koju aktivu kako bi se postigao optimalan rezultat. Drugim rečima želimo svakoj od aktiva da pridružimo težinski koeficijent $\omega_i, i = 1, 2, 3, ..., n$, koji označava udeo sredstava koji ulažemo u odgovarajuću aktivu. Vrsta optimalnosti igra ključnu ulogu u problemu sa kojim radimo. Optimalnost se posmatra kroz odabir funkcije cilja koju optimiziramo, te je sva težina stavljena upravo na taj odabir. Kako smo ranije rekli, portfolio posmatramo kao kombinaciju aktiva $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ pri čemu je svakoj aktivi pridružen težinski koeficijent $\omega_i, i = 1, 2, 3, ..., n$, pa, s obzirom na to proizvoljan portfolio ima sledeći oblik:

$$\pi = \sum_{i=1}^{n} \omega_i A_i. \tag{3.1}$$

Osvrnimo se na trenutak na osobine težinskih koeficijenata. Čitavu analizu možemo podeliti na tri slučaja:

$\omega_i \geq 0$ Situaciju u kojoj je težinski koeficijent uz odgovarajuću aktivu pozitivan nazivamo *duga pozicija*. U dugoj poziciji investitor kupuje aktivu i priželjkuje rast u ceni aktive kako bi njenom prodajom zaradio na razlici u kupovnoj i prodajnoj ceni. Ukoliko cena aktive uprkos njegovim očekivanjima padne investitor će ostvariti gubitak. Bitno je napomenuti da je gubitak pri dugoj poziciji ograničen, jer cena aktive ne može pasti ispod nule.

$\omega_i = 0$ Ukoliko je težinski koeficijent uz datu aktivu jednak nuli investitor ne ulaže nista u datu aktivu.

$\omega_i \leq 0$ Težinski koeficijenti mogu biti negativni i u tom slučaju označavaju *kratku poziciju*. Kratka pozicija predstavlja situaciju u kojoj investitor ne kupuje aktivu, tj. ne stavlja je u svoj posed već je pozajmljuje od brokera i prodaje u nadi da će moći da je otkupi po nižoj ceni, vrati brokeru i zaradi na razlici u cenama. Ukoliko cena aktive poraste investitor ostvaruje gubitak. Za razliku od duge pozicije u kojoj se investitor nada rastu u ceni, kod kratke pozicije on se nada padu. Kratka pozicija se smatra opasnim potezom i savetuje se isključivo iskusnim trgovcima. Razlog za to je što je rast cene neograničen sa gornje strane, pa je samim tim neograničen i gubitak investitora koji se nalazi u kratkoj poziciji.

Ograničenje na težinskim koeficijentima koje će se nalaziti u svakom modelu koji se razmatra u ovom radu je budžetska jednačina koja ima sledeći oblik:

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1.$$

Ova jednačina opisuje situaciju u kojoj se sredstva namenjena investiranju troše u celosti.

Druga vrsta ograničenja na težinskim koeficijentima vezana je za interval u kojem želimo da se optimalni težinski koeficijenti nađu. Ovakvom vrstom ograničenja sprečavamo preveliko ulaganje u pojedinačne aktive, a sam odabir granica zavisi od karakteristika instrumenata u koje ulažemo novac kao i od naših preferencija. U ovom radu svi težinski koeficijenti imaju isto intervalno ograničenje tj. ovakvo ograničenje možemo zapisati kao:

$$lb \leq \omega_i \leq ub, i = 1, 2, ..., n,$$

gde $lb, ub \in \mathbb{R}$ predstavljaju donju (*lb* - lower bound) i gornju (*ub* - upper bound) granicu težinskih koeficijenata respektivno.

Za početak, prilikom formiranja modela za rešavanje problema optimizacije portfolija bitne su dve numeričke karakteristike prinosa portfolija: očekivani prinos i varijansa. S obzirom na 3.1 prinos portfolija se može prikazati kao:

$$r_\pi(t) = \sum_{i=1}^{n} r_i(t)\omega_i.$$

Neka su $\mu_i(t), i = 1, 2, 3, ..., n$, očekivani prinosi aktiva tj. $\mu_i(t) = E(r_i(t)), i = 1, 2, 3, ..., n$. Tada je očekivani prinos portfolija:

$$\mu_\pi(t) = E(r_\pi(t)) = \sum_{i=1}^{n} E(\omega_i r_i(t)) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i E(r_i(t)) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \mu_i(t).$$

Na osnovu pretpostavke o stacionarnosti očekivani prinos portfolija možemo zapisati i kao:

$$\mu_\pi = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \mu_i.$$

Ako sa σ_{ij} označimo kovarijansu prinosa i-te i j-te aktive tj. $\sigma_{ij}(t) = E((r_i(t) - \mu_i(t))(r_j(t) - \mu_j(t)))$, tada imamo da je varijansa prinosa portfolija:

$$\sigma_\pi(t)^2 = var(\sum_{i=1}^{n} \omega_i r_i(t)) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \omega_i\omega_j\sigma_{ij}(t) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2\sigma_i(t)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j<i} \omega_i\omega_j\sigma_{ij}(t).$$

Ukoliko iskoristimo osobinu stacionarnosti prinosa dobijamo:

$$\sigma_\pi^2 = \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2\sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j<i} \omega_i\omega_j\sigma_{ij}.$$

3.1 Diversifikacija portfolija

Postavlja se pitanje zašto bi investitor uopšte hteo da ulaže u različite aktive kada može da uloži sve u jednu aktivu sa najvećim očekivanim prinosom. Odgovor je u diversifikaciji portfolija. Diversifikacija portfolija predstavlja uključivanje u portfolio više od jedne aktive kako bi se smanjio rizik portfolija kao celine. Ideja se nalazi u činjenici da je investitor, ukoliko ulaže sva sredstva u jednu aktivu, izložen samo riziku date aktive, a da se uključivanjem dodatnih aktiva taj rizik može smanjiti. Bitno je reći da se, uz ograničenja na težinskim koeficijentima, dve aktive ne mogu uvek uključiti u portfolijo čija će varijansa biti manja od varijanse svake od aktiva pojedinačno. Ukoliko ne postoje ograničenja na težinskim koeficijentima to je ipak moguće.

Matematičko objašnjenje diversifikacije leži u prethodno navedenoj formuli varijanse portfolija. Neka su radi jednostavnosti date samo dve aktive A_1 i A_2 čiji su težinski koeficijent redom ω_1 i ω_2. Neka su još njihove varijanse redom σ_1^2 i σ_2^2 i kovarijansa σ_{12}. Tada je varijansa portfolija data formulom:

$$\sigma_\pi^2 = \sigma_1^2\omega_1^2 + \sigma_2^2\omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2\sigma_{12}.$$

Kako imamo ograničenje $\omega_1 + \omega_2 = 1$, ω_2 možemo izraziti kao $\omega_2 = 1 - \omega_1$ i uvrstiti u formulu iznad tako da dobijamo:

$$\sigma_\pi^2 = \sigma_1^2\omega_1^2 + \sigma_1^2(1-\omega_1)^2 + 2\omega_1(1-\omega_1)\sigma_{12} = \omega_1^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}) + 2\omega_1(\sigma_{12} - \sigma_2^2) + \sigma_2^2.$$

Sada varijansu portfolija možemo posmatrati kao kvadratnu funkciju od ω_1. Kako je $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12} > 0$ imamo da je σ_π konveksna parabola čiji se minimum dostiže za $\omega_1^* = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_{12}}$. Varijansa portfolija za $\omega_1 = 0$ i $\omega_1 = 1$ jednaka je redom σ_2^2 i σ_1^2, pa možemo zaključiti da je varijansa portfolija za $\omega_1^* \neq 0, 1$ manja od varijanse pojedinačnih aktiva.
Primetimo da ukoliko imamo ograničenje na težinksim koeficijentima $\omega_i \in [0,1], i = 1,2$ minimalna varijansa portfolija ne mora biti manja od pojedinačnih varijansi ukoliko je $\omega_1^* \notin [0,1]$. U tom slučaju će minimalna varijansa biti jednaka $min\{\sigma_1^2, \sigma_2^2\}$.

Diversifikaciju možemo posmatrati kroz sledeća tri slučaja:

- **Aktive su negativno korelisane**: Kod ove vrste diversifikacije težinski koeficijenti dodeljeni svakoj od aktiva su pozitivni. Drugim rečima investitor obe aktive drži u svom posedu u određenoj proporciji. Tada je drugi deo gore navedene formule za varijansu portfolija negativan i na taj način smanjuje varijansu čitavog portfolija. Ekonomska interpretacija ove vrste diversifikacije je sledeć a: Ukoliko investitor ulaže celokupna sredstva u samo jednu aktivu njegov profit zavisi isključivo od ponašanja date aktive. Ako pak odluči da uloži sredstva u još jednu, sa postojećom aktivom negativno korelisanu aktivu tada će druga aktiva imati ulogu korektora. Drugim rečima ukoliko prva aktiva registruje pad u prinosu tada bi druga aktiva s obzirom na negativnu korelaciju trebala da registruje rast i na taj način ublaži gubitak. Ako međutim prva aktiva ostvari rast, druga aktiva bi trebala da ostvari pad i na taj način ublaži dobitak. Na taj način je rizik, ali i očekivani prinos smanjen. Analogija ostaje ista uključivanjem više aktiva u portfolio.

- **Aktive su pozitivno korelisane**: Diversifikacija u slučaju kada su aktive pozitivno korelisane predstavlja netipičan vid smanjenja rizika. Sprovodi se tako što dozvoljavamo negativne težinske koeficijente tj. kratke pozicije. Vratimo se na primer sa dve aktive. Neka je $\omega_1 > 0$ i $\omega_2 < 0$. Ukoliko prva aktiva ostvari pad, isto bi trebala da učini i druga aktiva, ali kako smo nju kratko prodali pad u njenom prinosu nam donosi dobitak i tako ublažava pad prve aktive. Ukoliko pak prva aktiva ostvari rast, rast će ostvariti i druga aktiva što nam ne ide u korist jer cena po kojoj treba da otkupimo aktivu i vratimo je brokeru raste i samim tim ublažava rast prinosa prve aktive. To je upravo razlog zbog kojeg se držanje kratke pozicije kao način diversifikacije preporučuje uz veliki oprez i u malim količinama.

3.2 Pojam nelinearnog programiranja

Posmatrajmo problem:

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & f(x) \\ \text{t.d.} \quad & x \in S \end{aligned} \tag{3.2}$$

gde je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i $S \subset \mathbb{R}^n$. Skup S nazivamo *dopustiv skup*, a problem 3.2 je opšta forma problema *nelinearnog programiranja*.

Neophodno je znati razliku između dve vrste rešenja ovakvog problema.

Definicija 3.2.1 (Lokalni minimizator) *Tačka $x^* \in S$ je lokalni minimizator funkcije f na S ako i samo ako postoji $\epsilon > 0$ tako da je $f(x) \geq f(x^*)$ za sve $x \in S$ za koje je $\|x - x^*\| < \epsilon$. Ako je $f(x) > f(x^*)$ za sve $x \in S$ za koje je $x \neq x^*$ i $\|x - x^*\| < \epsilon$ onda kažemo da je x^* striktni lokalni minimizator.*

Definicija 3.2.2 (Globalni minimizator) *Tačka $x^* \in S$ je globalni minimizator funkcije f na S ako i samo ako je $f(x) \geq f(x^*)$ za sve $x \in S$. Ako je $f(x) > f(x^*)$ za sve $x \in S$ za koje je $x \neq x^*$ tada kažemo da se radi o striktnom globalnom minimizatoru funkcije f na skupu S.*

Analogno se definišu lokalni i globalni maksimizator.

Napomena: Maksimizacija funkcije f ekvivalentna je minimizaciji funkcije $-f$ pa ćemo na dalje bez umanjenja opštosti govoriti samo o minimizaciji.

Kod problema optimizacije razlikujemo dva slučaja: problem minimizacije bez ograničenja i problem minimizacije sa ograničenjima. Navodimo uslove optimlanosti za oba slučaja.

3.2.1 Uslovi optimalnosti za problem minimizacije bez ograničenja

Posmatrajmo slučaj kada je dopustivi skup $S = \mathbb{R}^n$. Tada je problem 3.2 problem nelinearnog programiranja bez ograničenja.

Teorema 3.2.3 (Potrebni uslovi prvog reda) *Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^1$. Ako je x^* lokalni minimizator funkcije f na $\mathbb{R}^n$ onda je:*

$$\nabla f(x^*) = 0.$$

Teorema 3.2.4 (Potrebni uslovi drugog reda) *Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$. Ako je $x^* \in \mathbb{R}^n$ lokalni minimizator funkcije f na $\mathbb{R}^n$ onda je:*

1. $\nabla f(x^*) = 0$

2. $\nabla^2 f(x^*)$ *je pozitivno semidefinitna matrica.*

Teorema 3.2.5 (Dovoljni uslovi drugog reda) *Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$. Ako je $x^* \in \mathbb{R}^n$, $\nabla f(x^*) = 0$ i $\nabla^2 f(x^*)$ je pozitivno definitna, onda je x^* striktni lokalni minimizator funkcije f na $\mathbb{R}^n$.*

Kako prilikom optimizacije portfolija uvek imamo bar jedno ograničenje na težinskim koeficijentima u vidu budžetske jednakosti u ovom radu ćemo se baviti problemom minimizacije sa ograničenjima.

3.2.2 Uslovi optimalnosti za problem minimizacije sa ograničenjima

Problem minimizacije sa ograničenjima se može podeliti na tri slučaja u zavisnosti od tipa ograničenja: problem sa ograničenjima tipa jednakosti, problem sa ograničenjima tipa nejednakosti, problem sa ograničenjima tipa jednakosti i nejednakosti.

Minimizacija sa linearnim ograničenjima tipa jednakosti

Ovaj tip problema predstavlja najjednostavniji problem optimizacije sa ograničenjima. Posmatramo sledeći problem:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x) \\ \text{t.d.} \quad & Ax = b \end{aligned} \tag{3.3}$$

gde je $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $1 \leq m < n$ i $rang(A) = m$.

Za skup $S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$ kažemo da je dopustiv skup problema 3.3. Dopustiv skup predstavlja skup vektora koji zadovoljavaju sistem linearnih jednačina:

$$Ax = b.$$

Za $n = 2$ dopustiv skup je prava. Za $n = 3$ i $m = 1$ to je ravan, a za $n = 3$ i $m = 2$ prava. Uopšteno ako je $m = n - 1$ radi se pravoj, za $m = n - 2$ imamo ravan.

Skup S je povezan sa skupom rešenja homogenog sistema linearnih jednačina $Ax = 0$. Ovaj skup se naziva nula-prostor matrice A i ozvačava sa $N(A)$. Kako je $rang(A) = m$ to je skup $N(A) \subset \mathbb{R}^n$ dimenzije $n - m$. Kako je $rang(A) = m$ i $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $1 \leq m < n$ vrste matrice A čine skup linearno nezavisnih vektora i generišu potprostor dimenzije m koji je ortogonalan na $N(A)$ (po definiciji nula-prostora). Skup koji vrste matrice A generišu je, u stvari, skup slika matrice A^T u oznaci $Im(A^T)$.

Za potprostore $N(A)$ i $Im(A)$ znamo da važi:

$$\mathbb{R}^n = Im(A) + N(A)$$

i

$$Im(A) \cap N(A) = 0.$$

Ako je $d \in N(A)$ i $\tilde{x}$ je rešenje sistema $Ax = b$ onda je i $x = \tilde{x} + \alpha d$ rešenje istog sistema. Ukoliko d posmatramo kao pravac, α kao dužinu koraka tada prethodnu rečenicu možemo da tumačimo na sledeći način: od tačke $\tilde{x}$ se možemo udaljavati proizvoljno mnogo po pravcu $d \in N(A)$ bez opasnosti da ćemo izaći iz dopustivog skupa S. Zbog toga skup $N(A)$ nazivamo skup dopustivih pravaca.

Neka je $\{z^1, z^2, ..., z^m\}$ baza prostora $N(A)$ i neka je $Z \in \mathbb{R}^{n\times m}$ matrica čije su kolone $z^i, i = 1, 2, ..., m$. Tada za svako $d \in N(A)$ postoji $\gamma \in \mathbb{R}^m$ takvo da važi:

$$d = z\gamma.$$

Ako je $\tilde{x}$ rešenje sistema $Ax = b$ onda skup S možemo zapisati kao:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \tilde{x} + z\gamma, \gamma \in \mathbb{R}^m\}.$$

Ovakva definicija skupa S dovodi nas do definicije sledeće funkcije, $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$:

$$\varphi(\gamma) = f(\tilde{x} + z\gamma).$$

Sada se problem bez ograničenja sa početka svodi na:

$$\min_{\gamma} \quad \varphi(\gamma) \tag{3.4}$$

Teorema 3.2.6 *Vektor γ^* je lokalni (globalni) minimum funkcije φ na $\mathbb{R}^m$ ako i samo ako je $x^* = \tilde{x}+z\gamma^*$ lokalni (globalni) minimum problema 3.3.*

Potreban uslov prvog reda za problem 3.4 je:

$$\nabla\varphi(\gamma*) = 0.$$

S obzirom na definiciju funkcije φ važi $\varphi(\gamma) = f(g(\gamma))$, gde je $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ definisana sa $g(\gamma) = \tilde{x} + z\gamma$. Na osnovu pravila za izvod složene funkcije zaži:

$$\varphi'(\gamma) = f'(g(\gamma))g'(\gamma) = \nabla^T f(g(\gamma))z.$$

pa je gradijent funkcije φ dat sa:

$$\nabla\varphi(\gamma) = z^T\nabla f(g(\gamma)).$$

Sada uslov prvog reda možemo zapisati na sledeći način:

$$\nabla\varphi(\gamma^*) = z\nabla f(\tilde{x} + z\gamma^*) = z^T\nabla f(x^*) = 0.$$

Na osnovu teoreme 3.2.6 prethodnu jednačinu tumačimo ovako: potreban uslov prvog reda da x^* bude lokalni minimizator problema 3.3 je:

$$z^T\nabla f(x^*) = 0. \tag{3.5}$$

Iz 3.5 sledi da je $\nabla f(x^*)$ ortogonalno na $N(A)$ što znači da $\nabla f(x^*) \in Im(A^T)$. Dalje ovo znači da je $\nabla f(x^*)$ linearna kombinacija vrsta matrice A. Drugim rečima, postoji $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ takvo da je:

$$\nabla f(x^*) = A^T\lambda^* \tag{3.6}$$

Zaključujemo da ako je x^* lokalni minimizator problema 3.3, onda je na osnovu 3.6 postoji $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ tako da je (x^*, λ^*) rešenje sledećeg sistema od $n + m$ jednačina:

$$\begin{aligned} f(x^*) &= A^T\lambda^* \\ Ax^* &= b \end{aligned}. \tag{3.7}$$

Znamo da je svako rešenje problema 3.3 ujedno i rešenje sistema 3.7. Obrnuto ne mora da važi i zbog toga je neophodno definisati uslove drugog reda koji će garantovati da je rešenje sistema 3.7 rešenje problema 3.3.

Napomena: $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ se naziva vektor Lagranžovih množitelja pridružen vektoru x^*.

Potreban uslov drugog reda za rešenje problema 3.4 je:

$$\nabla^2\varphi(\gamma^*) \geq 0.$$

Kako je $\nabla\varphi(\gamma) = z^T\nabla f(\tilde{x} + z\gamma)$, na osnovu pravila za izvod složene funkcije imamo:

$$\nabla^2\varphi(\gamma) = z^T\nabla^2 f(\tilde{x} + z\gamma)z.$$

Sada iz uslova $\nabla^2\varphi(\gamma^*) \geq 0$ sledi:

$$z^T\nabla^2 f(x^*)z \geq 0.$$

Matrica $z^T\nabla^2 f(x^*)z \in \mathbb{R}^{m\times m}$ je pozitivno semidefinitna ako je:

$$y^T\nabla^2 f(x^*)y \geq 0, \text{ za sve } y \in N(A).$$

Dakle, dovoljni uslovi drugog reda se mogu definisati na sledeći način:
Vektor x^* je rešenje problema 3.3 ako je $Ax^* = b$ i ako važi:

1. $z^T\nabla f(x^*) = 0$
2. $z^T\nabla^2 f(x^*)z > 0$.

Minimizacija sa linearnim ograničenjima tipa nejednakosti

Posmatrajmo problem:

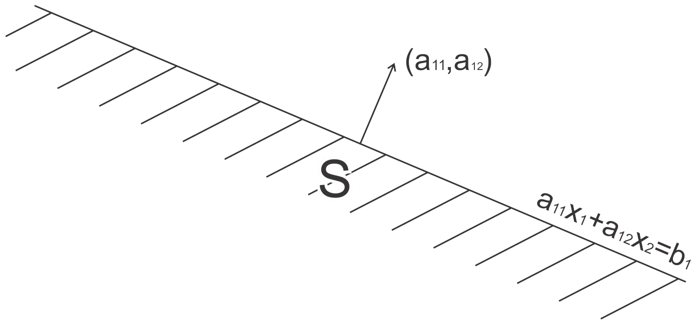
$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x) \\ \text{t.d.} \quad & Ax \leq b \end{aligned} \tag{3.8}$$

gde je $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Neka je $a_i = (a_{i1}, ..., a_{in})$ i-ta vrsta matrice A. Dopustiv skup možemo zapisati kao:

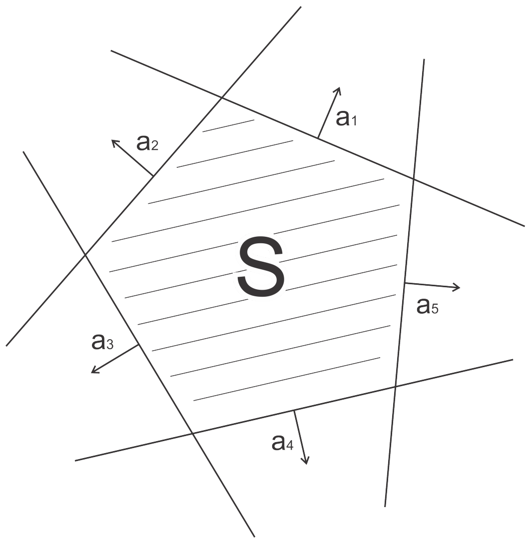
$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i x \leq b_i, i = 1, ..., m\}.$$

Svaka nejednakost $a_i x \leq b_i$ koja definiše dopustiv skup definiše jedan potprostor prostora $\mathbb{R}^n$. Taj potprostor nalazi se sa suprotne strane potprostora $a_i x = b$ koju pokazuje vektor a_i. Prethodno objašnjenje ilustrovano je na sldećem grafiku za $n = 2, m = 1$ tj. za dopustiv skup $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : a_1 x \leq b_1\}$.



Slika 3.1: Primer dopustivog skupa

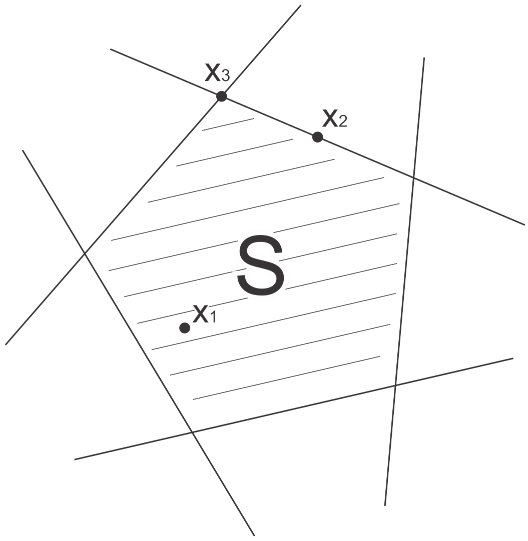
U problemu 3.8 dopustiv skup S se sastoji od preseka m poluprostora. Jedan takav skup S za $n = 2$ i $m = 5$ dat je na sledećem grafiku:



Slika 3.2: Primer dopustivog skupa

Za tačku $x \in S$ treba da odredimo **dopustive pravce**, tj. pravce po kojima se možemo kretati od tačke x tako da ostanemo u skupu S. Matematički zapisano $d \in \mathbb{R}^n$ je dopustiv pravac za tačku $x \in S$ ako i samo ako postoji $\bar{\gamma} > 0$ tako da $x + \gamma d \in S$ za sve $\gamma \in [0, \bar{\gamma}]$.

Svakom elementu dopustivog skupa $x \in S$ možemo pridužiti broj $r(x)$, $0 \leq r(x) \leq m$, koji predstavlja broj restrikcija za koje je ispunjeno $a_i x = b_i$. Za takve restrikcije kažemo da su **aktivne** u tački x. Jedan primer aktivnih ograničenja dat je na slici 3.3:



Slika 3.3: Primer dopustivog skupa

Za tačke na prethodnom grafiku važi: $r(x_1) = 0$, $r(x_2) = 1$ i $r(x_3) = 2$.

Skup dopustivih pravaca za tačku x zavisi od aktivnih ograničenja u tački x. Ukoliko je $r(x) = 0$ onda je svaki pravac u tački x dopustiv.

Neka je $x \in S$ takva da je $r(x) = p$ za $0 < p \leq m$. Definišemo $I(x) \subset \{1, 2, ..., m\} \equiv \mathcal{M}$ na sledeći način:

$$I(x) = \{j \in \mathcal{M} : a_j x = b_j\}.$$

$I(x)$ predstavlja skup indeksa aktivnih ograničenja.

Za pravac $d \in \mathbb{R}^n$ i konstantu (dužinu koraka) $\alpha > 0$ imamo da je $x + \alpha d \in S$ ako i samo ako je $A(x + \alpha d) \leq b$ tj. ako je $a_j(x + \alpha d) \leq b_j$, za svako $j \in \mathcal{M}$.

Neka je dato $x \in S$ tj. tačka x takva da je $a_j x \leq b_j, \forall j \in \mathcal{M}$ i pravac $d \in \mathbb{R}^n$. Tada imamo da je za sve $j \in \mathcal{M}$:

$$a_j x \leq b_j$$

$$a_j x + \alpha a_j d \leq b_j + \alpha a_j d, \alpha > 0$$

$$a_j(x + \alpha d) \leq b_j + \alpha a_j d$$

Sada imamo dve mogućnosti:

1. $a_j d \leq 0, \forall j \in \mathcal{M}$

   Kako je $a_j d \leq 0$ imamo da je:

   $$a_j(x + \alpha d) \leq b_j + \alpha a_j d \leq b_j.$$

   Kako ovo važi za svako $j \in \mathcal{M}$ i za proizvoljno $\alpha > 0$, tačka $x + \alpha d$ se nalazi u dopustivom skupu za svako $\alpha > 0$ tj. po pravcu d možemo da se krećemo beskonačno dugo, a da se i dalje nalazimo u dopustivom skupu. Zaključujemo, dakle, da je d koje zadovoljava $a_j d \leq 0, \forall j \in \mathcal{M}$ dopustiv pravac.

2. $\exists j \in \mathcal{M}, a_j d > 0$

   Neka je $U = \{j_1, j_2, ..., j_k\}$ skup koji se sastoji od indeksa onih ograničenja za koje je $a_{j_i} d > 0$. Uzimimo jedno $j_i \in U$. Za ovakvo j_i imamo da pripadnost tačke $x + \alpha d$ dopustivom skupu zavisi od parametra $\alpha > 0$. Drugim rečima postojaće $\bar{\alpha} > 0$ takvo da za sve $\alpha \in [0, \bar{\alpha}]$ važi $x + \alpha d \in S$ tj. $a_{j_i}(x + \alpha d) \leq b_{j_i}$, dok za $\alpha \in (\bar{\alpha}, \infty)$ važi $x + \alpha d \notin S$ tj. $a_{j_i}(x + \alpha d) > b_{j_i}$. Konstanta $\bar{\alpha}$ predstavlja najveću dužinu koraka po pravcu d sa kojim se i dalje nalazimo u dopustivom skupu, tj. minimalnu dužinu koraka po pravcu d za koji je $a_{j_i}(x + \alpha d) = b_{j_i}$. Stoga parametar $\bar{\alpha}$ dobijamo iz sledeće jednačine:

   $$a_{j_i}(x + \bar{\alpha} d) = b_{j_i}$$

   odakle vidimo da je:

   $$\bar{\alpha} = \frac{b_{j_i} - a_{j_i} x}{a_{j_i} d}.$$

   Neka je sada

   $$\tilde{\alpha} = \min_{\substack{j \in \mathcal{M} \\ a_j d > 0}} \frac{b_j - a_j x}{a_j d}.$$

   Za ovako određeno $\tilde{\alpha}$ sledi da je $a_j(x + \alpha d) \leq b_j$ za sve $j \in \mathcal{M}$, $d \in \mathbb{R}^n$ i $\alpha \in [0, \tilde{\alpha}]$ tj. d je dopustiv pravac.

Kako smo sada odredili dopustive pravce za proizvoljnu tačku $x \in S$ možemo preći na određivanje uslova optimalnosti.

Za dato $x \in S$ neophodno je odrediti dopustive opadajuće pravce. Po dopustivim opadajućim pravcom podrazumevamo pravac $d \in \mathbb{R}^n$ po kojem funkcija $f(x)$ opada tj. za koji važi:

$$\nabla^T f(x) d < 0.$$

Ako takav dopustiv pravac postoji tačka x sigurno nije lokalni minimum, jer bismo od nje mogli da se pomerimo po dopustivom opadajućem pravcu u tačku koja se i dalje nalazi u dopustivom skupu S za koju je vrednost funkcije f manja nego u x. Analiza zavisi od aktivnih ograničenja:

- Ako je $r(x) = 0$ onda se tačka nalazi u unutrašnjosti dopustivog skupa i potrebni uslovi za minimum su isti kao i za problem bez ograničenja.

- Ako je $r(x) \geq 1$, onda su uslovi optimalnosti definisani sledećim tvrđenjem:

  Teorema 3.2.7 *Posmatramo problem:*

  $$\begin{aligned} &\min_x \quad f(x) \\ &t.d. \quad Ax \leq b \end{aligned} \tag{3.9}$$

  gde je $f \in C^1$ i $x^* \in S$ takvo da je $1 \leq r(x^*) \leq m$. Neka je $I(x^*) \subset \mathcal{M}$, $I(x^*) = I = \{i_1, i_2, ..., i_{r(x^*)}\}$ skup aktivnih ograničenja tj.:

  $$a_j x^* = b_j, j \in I(x^*).$$

Neka je dalje $A_I \in \mathbb{R}^{r(x^*)\times n}$ podmatrica matrice A čije su vrste one koje imaju indekse u skupu I. Pored toga, neka je $b_I \in \mathbb{R}^{r(x^*)}$ deo vektora b čije su vrste, takođe one koje imaju indekse u skupu I tj.:

$$b_I = (b_{i_1}, b_{i_2}, ..., b_{i_{r(x^*)}})^T$$

i neka je $r(A_I) = r(x^*)$.
Ako je x^* lokalni minimizator posmatranog problema onda postoji $\lambda \in \mathbb{R}^{r(x^*)}$ tako da je:

$$\nabla f(x^*) = \sum_{k=1}^{r(x^*)} \lambda_k a_{i_k}$$

gde je $\lambda_k \leq 0$ i $1 \leq k \leq r(x^*)$, a a_{i_k} vrste matrice A_I, odnosno:

$$\nabla f(x^*) = A_I^T \lambda$$

gde je $\lambda \in \mathbb{R}^{r(x^*)}$, $\lambda_k \leq 0$ i $1 \leq k \leq r(x^*)$.

Teorema 3.2.8 *Neka je $f \in C^2$, a x^* lokalni minimizator problema 3.9. Tada važi:*

1. *Postoji $\lambda \in \mathbb{R}^{r(x^*)}$ tako da je:*

$$\nabla f(x^*) = A_I^T \lambda,$$

   gde je $\lambda_i \leq 0$, $i \in \{1, 2, ..., r(x^*)\}$

2. *Za sve $y \in N(A_I)$ važi:*

$$y^T \nabla^2 f(x^*) y \geq 0.$$

Teorema 3.2.9 *Neka je $f \in C^2$ i $x^* \in S$. Ako je:*

$$\nabla f(x^*) = A_I^T \lambda$$

za $\lambda_i \leq 0$, $i \in \{1, 2, ..., r(x^*)\}$ i:

$$y^T \nabla^2 f(x^*) y > 0$$

za sve $y \in A_J$, $y \neq 0$ gde je $J = \{i \in \{1, 2, ..., r(x^*)\} : \lambda_i < 0\}$, onda je x^* lokalni minimizator problema 3.9.

Ovim su dati uslovi prvog i drugog reda za lokalni minimizator problema 3.9.

Minimizacija sa linearnim ograničenjima tipa jednakosti i nejednakosti

Opšti oblik problema minimizacije sa ograničenjima tipa jednakosti i nejednakosti može se zapisati u sledećem obliku:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x) \\ \text{t.d.} \quad & Ax = b \\ & Wx \leq c, \end{aligned} \tag{3.10}$$

gde je $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m < n, rang(A) = m$ i $W \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^p$.
Dopustivi skup S je poliedar u $\mathbb{R}^n$ definisan sa:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, Wx \leq c\}.$$

Primetimo da su ograničenja data vrstama matrice A uvek aktivna pa je skup aktivnih ograničenja za dopustivu tačku x dat sa:

$$I(x) = \{1, 2, ..., m, i_1, i_2, ..., i_{S(x)}\}.$$

Sa $J(x) = \{i_1, i_2, ..., i_{S(x)}\}$ označimo skup indeksa koja odgovaraju aktivnim ograničenima datim vrstama matrice W. Važi nejednakost $0 \leq S(x) \leq p$. Ako je $r(x)$ ukupan broj aktivnih ograničenja u tački x onda važi:

$$m \leq r(x) \leq m + p.$$

Koristeći iste argumente kao u prethodnim poglavljima za određivanje dopustivih pravaca polazeći od dopustive tačke x lako se pokazuje da je pravac $d \in \mathbb{R}^n$ **dopustiv** za x ako i samo ako je $Ad = 0$ i ako je $w_j d \leq 0$ za sve $j \in J(x)$.

Potrebni uslovi prvog i drugog reda su u ovom slučaju generalizacija uslova za prethodne dve vrste problema.

Teorema 3.2.10 *Neka je u problemu 3.10 zadovoljeno $f \in C^1$ i neka je $x^* \in S$ takvo da je $m \leq r(x^*) \leq n$ i $S(x^*) \geq 1$. Neka su $I(x) = \{1, 2, ..., m, i_1, i_2, ..., i_{S(x^*)}\}$, $J(x) = \{i_1, i_2, ..., i_{S(x^*)}\}$ skupovi indeksa takvi da je $w_j d = c_j$ ako i samo ako je $j \in J$. Označimo sa W_J podmatrica matrice W čije su vrste one čiji su indeksi u J i sa $c_J \in \mathbb{R}^{S(x^*)}$ vektor formiran od vektora c na isti način.*

Neka je matrica $B \in \mathbb{R}^{(m+S(x^*))\times n}$:

$$B = \begin{bmatrix} A \\ W_J \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

pri čemu je $r(B) = r(x^*)$. Ako je x^* lokalni minimizator za 3.10 onda postoji $\lambda \in \mathbb{R}^m$ i $\mu \in \mathbb{R}^{S(x^*)}$ takvi da je:

$$\nabla f(x^*) = A^T\lambda + W_J^T\mu$$

*gde je $\mu_k \leq 0$, $1 \leq k \leq S(x^*)$. Ovi uslovi nazivaju se **Kuhn–Tuckerovi uslovi**.*

Teorema 3.2.11 *Neka je $f \in C^2$ i x^* lokalni minimizator problema 3.10. Neka su još $r(x^*)$, $s(x^*)$, J i B definisani kao u prethodnoj teoremi. Tada važi:*

1. *Postoji $\lambda \in \mathbb{R}^m$ i $\mu \in \mathbb{R}^{s(x^*)}$ takvi da je:*

$$\nabla f(x^*) = A^T\lambda + W_J^T\mu$$

$$\mu_k \leq 0$$

$$1 \leq k \leq s(x^*)$$

2. *$y^T\nabla^2 f(x^*)y \geq 0$ za sve $y \in N(B)$.*

Teorema 3.2.12 *Neka je $f \in C^2$, $x^* \in S$ i neka x^* zadovoljava:*

1. $\lambda \in \mathbb{R}^m$ *i* $\mu \in \mathbb{R}^{s(x^*)}$ *takvi da je:*

$$\nabla f(x^*) = A^T\lambda + W_J^T\mu$$

$$\mu_k \leq 0$$

$$1 \leq k \leq s(x^*)$$

2. Za sve $y \in N(\tilde{B})$ *je:*

$$y^T\nabla^2 f(x^*)y > 0$$

gde je:

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} A \\ W_K \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

$$K = \{j \in J : \mu_j < 0\}.$$

Tada je x^* *lokalni minimizator problema 3.10.*

3.2.3 Kvadratno programiranje

Kvadratno programiranje predstavlja specijalan slučaj nelinearnog programiranja kod kojeg je funkcija cilja kvadratna, a ograničenja linearna.

Neka je dato $n \in \mathbb{N}$ promenljivih i $m \in \mathbb{N}$ ograničenja na tim promenljivima. Sa $x_i, i \in \{1, 2, ..., n\}$ označimo promenljive, koje možemo zapisati i u vidu vektora $x \in \mathbb{R}^n$. Neka je još dat vektor $f \in \mathbb{R}^n$ i simetrična matrica $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Tada je funkcija cilja data sledećom formulom:

$$\frac{1}{2}x^THx + c^Tx.$$

Ograničenja definišemo pomoću matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ i vektora $b \in \mathbb{R}^m$, a zapisujemo ih na sledeći način:

$$Ax \leq b.$$

Sada problem kvadratnog programiranja možemo predstaviti na sledeći način:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \frac{1}{2}x^THx + c^Tx \\ \text{t.d.} \quad & Ax \leq b \end{aligned} \tag{3.13}$$

Kako je kvadratno programiranje specijalan slučaj nelinearnog programiranja, uslovi optimalnosti za opšti problem kvadratnog programiranja isti su kao i uslovi optimalnosti kod nelinearnog programiranja.

3.3 Algoritmi za rešavanje problema optimizacije

Problem optimizacije moguće je rešiti direktno i iterativno, egzaktno i približno.

Direktno rešavanje moguće je u malom broju slučajeva i to kada funkcija cilja ima "lepe" osobine kao sto su konveksnost i diferencijabilnost. Mnogo zahtevniji i rasprostranjeniji slučaj u stvarnosti jeste iterativno dolaženje do rešenja problema optimzacije. Pod iterativnim rešavanjem problema optimizacije podrazumeva se pronalaženje algoritma pomoću kojeg se u konačnom broju koraka dolazi do rešenja. Generalno govoreći algoritam predstavlja pravilo, $\mathcal{A}$, koje nas od tačke x^k dovodi do tačke x^{k+1} koja je bliža rešenju problema tako da niz $x^1, x^2, x^3, ...$ konvergira ka tačnom rešenju problema optimizacije.

Egzaktno rešavanje problema optimizacije podrazumeva pronalaženje tačnog rešenja problema. Do ovakvog rešenja može se doći direktno i iterativno. Približno rešenje problema optimizacije podrazumeva pronalaženje rešenja koje približno zadovoljava uslove optimalnosti. Tako npr. približno rešenje problema može biti ono za koje je pad po svim dopustivim pravcima manji od tolerisanog. Do približnog rešenja dolazi se uglavnom iterativnim putem.

Odabir algoritma za rešavanje problema nelinearne optimizacije biće od značaja u radu na realnim podacima u softverskom paketu Matlab o kojem će više reči biti u kasnijim poglavljima.

3.4 Model 1 - Markowitzov model

Markowitzov model dobio je ime po američkom ekonomisti Harryju Markowitzu koji je ovaj model optimizacije portfolija objavio 1952. godine u jednom članku, a 1959. godine i u knjizi. Model je nazvao "Teorija portfolija", ali je on danas poznat kao "Moderna teorija portfolija" ili jednostavno "Markowitzov model". Markowitz je Nobelovu nagradu za ekonomiju dobio 1990. godine.

Glavna karakteristika ovog modela je varijansa portfolija kao funkcija cilja koju želimo da minimiziramo. Uključiti samo varijansu u model nije dovoljno jer bi model kao rezultat dao portfolio čija je varijansa jednaka nuli ne obazirući se na prinos portfolija, koji bi mogao biti i negativan. Dakle, neophodno je u ograničenjima modela definisati željani prinos koji bi optimalan portfolio trebalo da ostvari. Od ostalih ograničenja javlja se još budžetsku jednakost koja govori da je suma težinskih koeficijenata jednaka jedan što obezbeđuje trošenje sredstava koje posedujemo u celosti. Poslednje ograničenje predstavlja intervalno ograničenje težinskih koeficijenata. Pretpostavka Markowitzovog modela je da investitori preferiraju nizak rizik i fiksiran nivo očekivanog prinosa. Model sada, uz pretpostavku stacionarnosti, možemo zapisati na sledeći način:

$$
\begin{aligned}
\min_{\omega_i, i=1,2,3,...,n} \quad & \sigma_\pi^2 \\
\text{t.d.} \quad & \mu_\pi = \mu \\
& \sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1 \\
& lb \leq \omega_i \leq ub, i = 1, 2, ..., n
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

ili ekvivalentno:

$$
\begin{aligned}
\min_{\omega_i, i=1,2,3,...,n} \quad & \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j<i} \omega_i \omega_j \sigma_{ij} \\
\text{t.d.} \quad & \sum_{i=1}^{n} \omega_i \mu_i = \mu \\
& \sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1 \\
& lb \leq \omega_i \leq ub, i = 1, 2, ..., n
\end{aligned} \tag{3.15}
$$

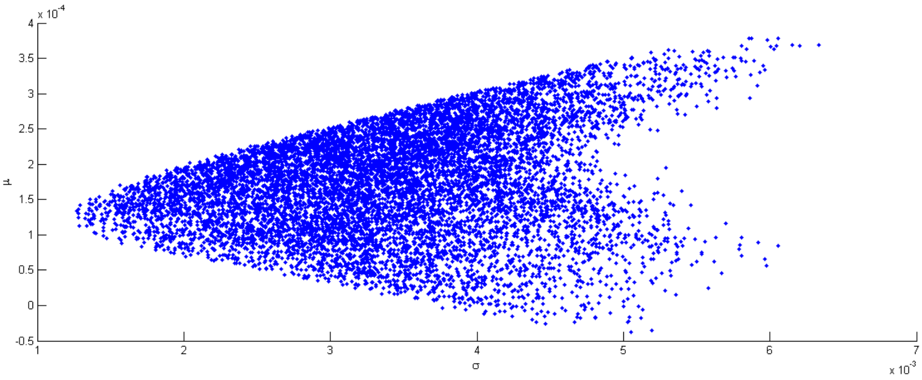
Pri tome μ označava željani prinos investitora.

Ovaj problem dakle predstavlja problem optimizacije nelinearne, kvadratne funkcije od n promenljivih sa ograničenjima tipa jednakosti. S obzirom na to da ćemo u kasnijim poglavljima raditi sa realnim podacima, tj. da ćemo ovaj problem primeniti na uzoraku od n strategija obima N dana i da za očekivani prinos, varijansu i kovarijansu koristimo njihove ranije navedene ocene 2.1, 2.2 i 2.3 navedeni problem se svodi na:

$$
\begin{aligned}
\min_{\omega_i, i=1,2,3,...,n} \quad & \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} (r_i(t) - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} r_i(k))^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j<i} \omega_i \omega_j \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} (r_i(t) - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} r_i(k))(r_j(t) - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} r_j(k)) \\
\text{t.d.} \quad & \sum_{i=1}^{n} \omega_i \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} r_i(t) = \mu \\
& \sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1 \\
& lb \leq \omega_i \leq ub, i = 1, 2, ..., n
\end{aligned} \tag{3.16}
$$

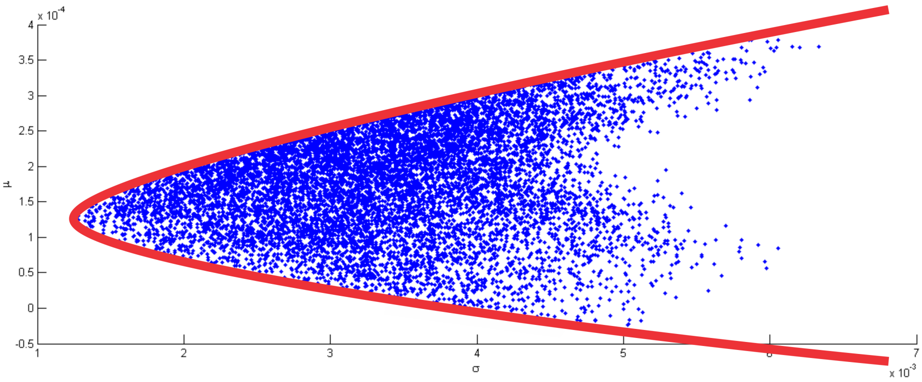
Postavlja se pitanje kako izgleda dopustivi skup ovog problema.

Da bismo to ilustrovali posmatrali smo nasumično izabranih pet strategija kojima smo na slučajan način dodelili težinske koeficijente čiji je zbir jednak jedan. Za tako dobijen portfolio izračunali smo standardnu devijaciju i očekivan prinos, dobijajući na taj način jednu tačku u $\sigma - r$ ravni. Ravan $\sigma - r$ predstavlja ravan na čijoj je x osi predstavljena standardna devijacija, a na y osi očekivani prinos. Postupak smo ponovili hiljadu puta i na taj način dobili hiljadu tačaka koje smo predstavili na sledećem grafiku :



Slika 3.4: Dopustivi skup kod Markowitzovog modela

Ukoliko želimo da za fiksiran očekivani prinos odredimo strategiju sa minimalnom varijansom tada će se ona naći na samoj granici dopustivog skupa koja je prikazana na slici 3.4. Obrnuto, ako želimo da za fiksiran nivo varijanse odredimo portfolio sa maksimalnim očekivanim prinosom tada će se rezultujući portfolio naći ponovo na granici dopustivog skupa i to na gornjoj polovini granice.



Slika 3.5: Granica dopustivog skupa

Upravo gornji deo granice dopustivog skupa nazivamo *efikasnom granicom* (engl. efficient frontier).

Do sada smo u portfolio uključivali samo rizične aktive. Razmortimo sada slučaj u kojem nam na raspolaganju pored n rizičnih aktiva stoji i jedna bezrizična aktiva sa prinosom r_f. Ovakva aktiva nije korelisana ni sa jednom od rizičnih aktiva, a kako joj je varijansa jednaka nuli ona neće uticati na varijansu portfolija u koji je uključena, pa će varijansa portfolija biti:

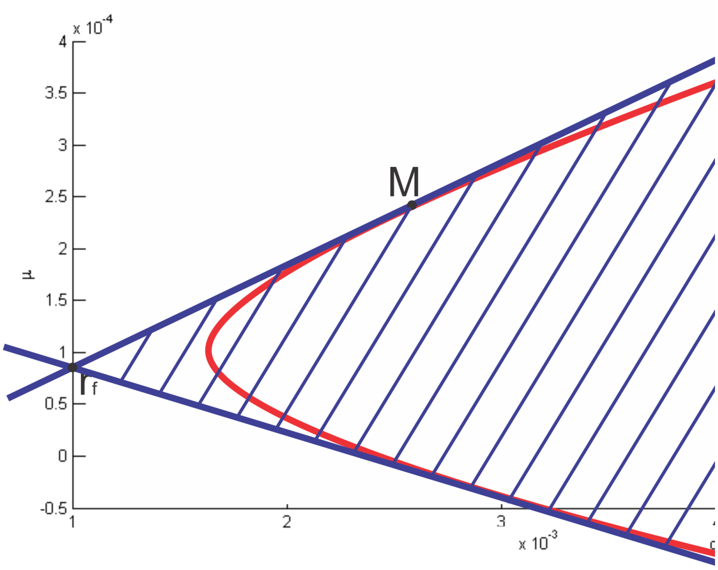
$$\sigma_\pi = \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j<i} \omega_i \omega_j \sigma_{ij}.$$

S druge strane očekivani prinos portfolija od n rizičnih i jedne bezrizične aktive izražen je sledećom formulom:

$$\mu_\pi = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \mu_i + \omega_{n+1} r_f.$$

Kako sada izgleda dopustivi skup? Neka takva aktiva gradi novi portfolio sa nekim od portfolija iz dopustivog skupa problema 3.14. Taj portfolio nalaziće se na pravoj koja prolazi kroz tačke $(0, r_f)$ i

(σ_π, μ_π) gde su σ_π i μ_π redom standardna devijacija i očekivani prinos portfolija iz dopustivog skupa. Ukoliko ovaj postupak ponovimo za svaki portfolio iz dopustivog skupa dobijamo novi dopustiv skup problema u koji je uključena i bezrizična aktiva. Njegov prikaz dat je na sldećem grafiku:



Slika 3.6: Dopustiv skup Markowitzovog modela koji uključuje bezrizičnu aktivu

Efikasna granica ovakvog dopustivog skupa, po analogiji od ranije je gornja granica dopustivog skupa.

3.5 Model 2 - Sharpeov količnik kao funkcija cilja

Kod ovog modela za funkciju cilja uzimamo Sharpeov količnik portfolija. S obzirom na raniju definiciju očekivanog prinosa i varijanse portfolija, a uz pretpostavku o stacionarnosti prinosa imamo da je Sharpeov količnik nezavisan od vremena, pa ima sledeći oblik:

$$Sharpe_\pi = \sqrt{252}\frac{\mu_\pi}{\sigma_\pi} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \mu_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i^2 \sigma_i^2 + 2\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j<i} \omega_i \omega_j \sigma_{ij}}.$$

Iz same formule je jasno da je Sharpeov količnik neophodno maksimizirati ukoliko želimo da ostvarimo što veći očekivani prinos i što manji rizik odnosno varijansu. Tada model izgleda kao što sledi:

$$\begin{aligned} \max_{\omega_i, i=1,2,3,\dots,n} \quad & Sharpe_\pi \\ \text{t.d.} \quad & \sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1 \\ & lb \leq \omega_i \leq ub, i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \tag{3.17}$$

ili ekvivalentno:

$$
\begin{aligned}
\max_{\omega_i, i=1,2,3,\dots,n} \quad & \sqrt{252}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\mu_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i^2\sigma_i^2 + 2\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j<i}\omega_i\omega_j\sigma_{ij}} \\
\text{t.d.} \quad & \sum_{i=1}^{n}\omega_i = 1 \\
& lb \leq \omega_i \leq ub, i = 1, 2, ..., n
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

S obzirom na ocene očekivane vrednosti, disperzije i kovarijanse 2.1, 2.2 i 2.3 imamo da problem zapravo prima oblik:

$$
\begin{aligned}
\max_{\omega_i, i=1,2,3,\dots,n} \quad & \sqrt{252}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\frac{1}{N}\sum\limits_{t=1}r_i(t)}{\sum\limits_{i=1}^{N}\omega_i^2\frac{1}{N}\sum\limits_{t=1}^{N}(r_i(t)-\frac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N}r_i(k))^2 + 2\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j<i}\omega_i\omega_j\frac{1}{N}\sum\limits_{t=1}^{N}(r_i(t)-\frac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N}r_i(k))(r_j(t)-\frac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N}r_j(k))} \\
\text{t.d.} \quad & \sum_{i=1}^{n}\omega_i = 1 \\
& lb \leq \omega_i \leq ub, i = 1, 2, ..., n
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

Rezultujući portfolio ovakvog problema nalazi se na efikasnoj granici dopustivog skupa za slučaj kada nam je na raspolaganju i bezrizična aktiva. On se nalazi baš u tački dodira efikasnih granica dopustivih skupova problema koji uključuje bezrizičnu aktivu i onog koji je ne uključuje. Taj portfolio je prikazan na slici 3.6 i označen je sa M. Kako smo ranije pretpostavili da je bezrizična stopa prinosa jednaka nuli, optimalan portfolio problema 3.17 će se nalaziti u temenu parabole dopustivog skupa problema 3.14.

3.6 Model 3 - Calmarov količnik kao funkcija cilja

Calmarov količnik kao funkcija cilja predstavlja sledeći nivo u optimizaciji portfolija. S obzirom na definiciju Calmarovog količnika i očekivanog prinosa portfolija, Calmarov količnik za ceo portfolio ima sledeći oblik:

$$
Calmar_\pi = 252\frac{\mu_\pi}{E(WDD_\pi(t))} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\mu_i}{E(WDD_\pi(t))}.
$$

Ponovo, iz formule je jasno da želimo da maksimiziramo Calmarov količnik portfolija jer ćemo na taj način maksimizirati očekivani prinos i minimizirati pad u prinosu. Ograničenja i pretpostavke ostaju isti kao i kod ranijih modela, pa model izgleda ovako:

$$
\begin{aligned}
\max_{\omega_i, i=1,2,3,\dots,n} \quad & Calmar_\pi \\
\text{t.d.} \quad & \sum_{i=1}^{n}\omega_i = 1 \\
& lb \leq \omega_i \leq ub, i = 1, 2, ..., n
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

ili ekvivalentno:

$$
\begin{aligned}
\max_{\omega_i, i=1,2,3,...,n} \quad & 252\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\mu_i}{E(WDD_\pi(t))} \\
\text{t.d.} \quad & \sum_{i=1}^{n}\omega_i = 1 \\
& lb \leq \omega_i \leq ub, i = 1,2,...,n
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

Kako u ovom radu podrazumevamo rad na uzorku od N dana i n strategija, s obzirom na statističke ocene očekivanog prinosa portfolija, problem 3.21 možemo zapisati na sledeći način:

$$
\begin{aligned}
\max_{\omega_i, i=1,2,3,...,n} \quad & 252\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\frac{1}{N}\sum\limits_{t=1}^{N}r_i(t)}{E(WDD_\pi(t))} \\
\text{t.d.} \quad & \sum_{i=1}^{n}\omega_i = 1 \\
& lb \leq \omega_i \leq ub, i = 1,2,...,n
\end{aligned}
$$

Primetimo da u zapisu modela nismo koristili nikakvu ocenu za $E(WDD_\pi(t))$. Razlog za to je nemogućnost pronalaženja analitičkog oblika ovog očekivanja. Umesto toga, do vrednosti $E(WDD_\pi(t))$ dolazimo na sledeći način:

Neka je data aktiva sa kumulativnim prinosom $c_i, i = 1,2,...,N$, gde je N broj dana za koje raspolažemo sa podacima. Recimo da hoćemo da izračunamo $E(WDD(t))$ u trenutku $T \leq N$. Sada je neophodno da za svaki od dana $i \in \{1,2,...,T\}$ izračunamo vrednost $max\{c_k, k = 1,2,...,i\} - c_i$. Na taj način dobijamo niz od T vrednosti među kojima je neophodno naći maksimalnu koja će biti vrednost maksimalnog pada u kumulativnom prinosu u trenutku T.

3.7 Model 4 - Linearna kombinacija kao funkcija cilja

Do sada su predstavljeni modeli koji u funkciju cilja uključuju standardne mere rizika. Postavlja se pitanje da li se uspešnost standardnih mera rizika može unaprediti. Pod pretpostavkom da je takvo unapređenje moguće osmišljeni su modeli 4 i 5.

Četvrti model odnosi se na posmatranje konveksne kombinacije varijanse, Sharpeovog i Calmarovog količnika kao funkcije cilja. Funkcija koju ćemo u tu svrhu razmatrati ima sledeći oblik:

$$\phi(a,b,c,\omega_1,\omega_2,...,\omega_n) = -aSharpe_\pi + b\sigma_\pi - cCalmar_\pi,$$

pri čemu važi $a + b + c = 1$. Sada problem optimizacije ima sledeći oblik:

$$
\begin{aligned}
\min_{\omega_i, i=1,2,3,...,n; a,b,c} \quad & -aSharpe_\pi + b\sigma_\pi - cCalmar_\pi \\
\text{t.d.} \quad & \sum_{i=1}^{n}\omega_i = 1 \\
& a + b + c = 1 \\
& lb \leq \omega_i \leq ub, i = 1,2,...,n
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

Primenjujući statističke ocene očekivanja, varijanse i kovarijanse na uzorak od N dana za n strategija dobijamo model sa kojim ćemo kasnije raditi, a čiji je zapis isuviše opširan i nepregledan da bi bio prikazan ovde.

Kod ovog modela je bitno da se optimizacija vrši ne samo po težinskim koeficijentima, već i po koeficijentima a, b i c.

Ovakva optimizacija rezultirala bi portfolijom koji istovremeno ima visoke vrednosti Sharpovog i Calmarovog količnika i nisku varijansu.

3.8 Model 5 - Napredni algoritam

Model 5, pored modela 4, predstavlja drugi pristup pokušaju unapređenja standardnih mera rizika. Za razliku od modela 4, u ovom segmentu koristićemo napredni algoritam podeljen u nekoliko koraka.

Napredni algoritam organizovan je kroz četiri optimizacije:

- **Prva optimizacija**: Prvo biramo okvir optimizacije od N dana. Na njemu vršimo optimizaciju datu u Modelu 2 kod kojeg smo za funkciju cilja birali Sharpeov količnik. Težinski koeficijenti dobijeni iz ove optimizacije služiće nam kao referenca za dalje optimizacije. Označimo tako dobijene težinske koeficijente sa $\omega_{si}, i = 1, 2, ..., n$ gde n označava broj strategija koje su nam na raspolaganju.

- **Druga optimizacija**: Sa drugom optimizacijom ulazimo u niz optimizacija koje nas vode ka optimalnim težinskim koeficijentima po ovom algoritmu. U ovom koraku želimo da vidimo koji su to optimalni težinski koeficijenti na gore pomenutih N dana u smislu varijanse, a da su pri tome ostvarili prinos bar jednak prinosu koji ostvaruju koeficijenti $\omega_{si}, i = 1, 2, ..., n$. Dakle rešavamo sledeći problem:

$$\begin{aligned} \min_{\omega_i, i=1,2,3,...,N} \quad & \sigma_\pi \\ \text{t.d.} \quad & \sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1 \\ & \mu_\pi \geq \mu_{s\pi} \\ & lb \leq \omega_i \leq ub, i = 1, 2, ..., n \end{aligned} \tag{3.23}$$

  Pri tome sa $\mu_{s\pi}$ označavamo očekivan prinos strategije dobijene u prvoj optimizaciji na periodu od prvog do N-tog dana. Težinske koeficijente dobijene u ovom koraku označavamo sa $\omega_{vi}, i = 1, 2, ..., n$.

- **Treća optimizacija**: U trećem koraku se pomeramo za k dana od N-tog dana i posmatramo period od dana $N + 1$ do dana $N + k$. Na tom vremenskom intervalu potražićemo težinske koeficijente optimalne na način koji nije obuhvaćen ni u prvoj ni u drugoj optimizaciji. Sada želimo da nađemo koji su to koeficijenti bili optimalni na prethodno pomenutom periodu od k dana u smislu prinosa, a da su pri tome ostvarili na istom tom periodu manju varijansu nego koeficijenti $\omega_{vi}, i = 1, 2, ..., n$ na periodu od prvog do N-tog dana. Dakle, rešavamo sledeći problem:

$$
\begin{aligned}
&\max_{\omega_i, i=1,2,3,...,n} && \mu_\pi \\
&\text{t.d.} && \sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1 \\
& && \sigma_\pi^2 \leq \sigma_{v\pi}^2 \\
& && lb \leq \omega_i \leq ub, i = 1,2,...,n
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

Pri tome, sa $\sigma_{v\pi}$ označavamo varijansu portfolija čiji su težinski koeficijenti $\omega_{vi}, i = 1,2,...,n$. Ovako dobijene koeficijente označavamo sa $\omega_{pi}, i = 1,2,...,n$. Dakle, do sada imamo dva seta koeficijenata $\omega_{vi}, \omega_{pi}, i = 1,2,...,n$. Sada želimo da vidimo kako je dodatnih k dana uticalo na koeficijente tj. da li ih je promenilo. Ukoliko se posmatrani koeficijenti poklapaju, oni predstavljaju optimalne koeficijente sa kojima počinjemo ulaganje i algoritam staje. Ukoliko se ipak ne poklapaju, prelazimo na četvrti korak tj. na četvrtu optimizaciju.

- **Četvrta optimizacija**: Četvrti korak sprovodimo na dan $N+k$. Ideja je sledeća: Poslednji težinski koeficijenti koje imamo su $\omega_{pi}, i = 1,2,...,n$. Sada želimo da odredimo koji su to težinski koeficijenti najbliži njima takvi da:

  – Maksimiziraju prinos portfolija od $N+1$-og do $N+k$-tog dana.

  – Minimiziraju varijansu portfolija od $N+1$-og do $N+k$-tog dana. Pri tome, varijansu računamo koristeći popravljenu matricu kovarijanse tj. matricu kovarijanse od prvog do N-tog dana na kojoj je učinjena korekcija. Pretpostavljamo da je korekcija ranga jedan dovoljna za približavanje stvarnoj matrici kovarijanse. Pod korekcijom ranga jedan proizvoljne matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ podrazumevamo odabir vektora $x \in \mathbb{R}^n$ koji će matricu A korigovati u matricu A' na sledeći način:

  $$A' = A + xx^T$$

  Drugim rečima, ako je matrica kovarijanse od prvog do N-tog dana označena sa Σ, tada matricu sa korekcijom ranga jedan zapisujemo kao:

  $$\Sigma' = \Sigma + xx^T.$$

  Bitno je napomenuti da ćemo optimizaciju vršiti ne samo po težinskim koeficijentima, već i po vektoru korekcije x.

  Formirajmo sada funkciju cilja koju ćemo koristiti u četvrtom koraku. Ona ima sledeći oblik:

  $$\psi(\omega, x) = \omega(\Sigma + xx^T)\omega^T - \mu_\pi + K\|\omega - \omega_{pi}\|^2.$$

  Primetimo da se u funkciji cilja nalazi i faktor K koji nazivamo kazneni faktor. Njega koristimo kako bismo rastojanje između težinskih koeficijenata sveli na isti red veličine kao i prva dva sabirka u funkciji ψ.

Kod svake od optimizacija u ovom modelu koristimo statističke ocene za očekivanje, varijansu i kovarijansu kao i u dosadašnjim modelima.

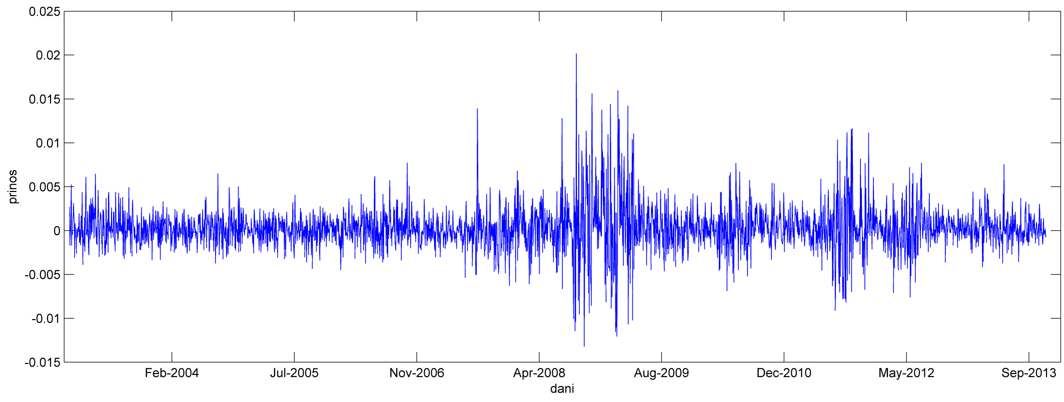
4

Rad na realnim podacima

Realni podaci sa kojima radimo sastoje se od dnevnih prinosa za dvadeset dve strategije za period od januara 2003. godine do decembra 2013. godine. Svaka strategija predstavlja tzv. korpu finansijskih instrumenata čiji su prinosi svakodnevno praćeni i beleženi. Prinosi su dati u obliku matrice dimenzije 2864x22, $P = [p_{ij}], i = 1, 2, ..., 2864, j = 1, 2, ..., 22$ pri čemu $p_{ij}, i = 1, 2, ..., 2864, j = 1, 2, ..., 22$ predstavlja prinos j-te strategije na i-ti dan.

4.1 Stacionarnost

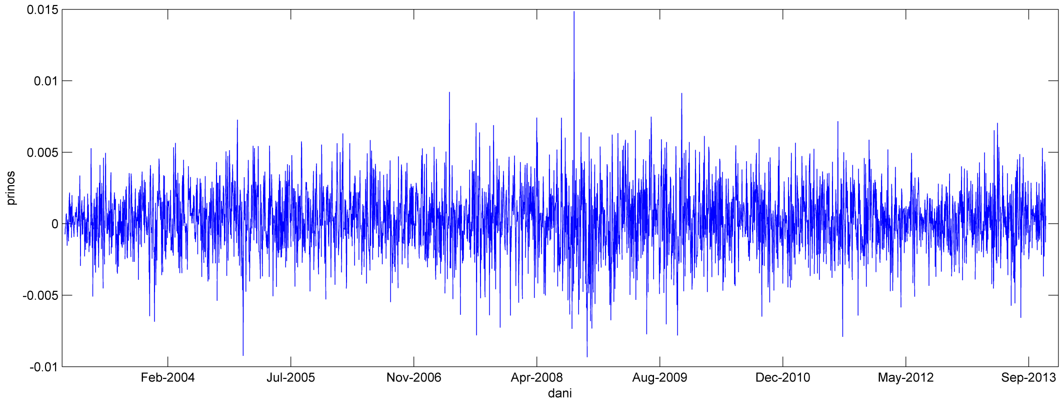
Ukoliko ove podatke posmatramo kroz prizmu ranije pomenutih vremenskih serija svaka kolona matrice P predstavljaće jednu vremensku seriju, tj. realizaciju stohastičkog procesa. Ranije smo takođe napomenuli da ćemo pretpostaviti da su vremenske serije sa kojima radimo stacionarne. Pod stacionarnošću podrazumevamo konstantno očekivanje i disperziju vremenske serije u odnosu na vreme. Ilustracije radi, na sledećem grafiku je prikazana jedna od vremenskih serija sadržanih u matrici P:



Slika 4.1: Vremenska serija sa dve veće krize

Šta možemo zaključiti iz prethodnog grafika? Prvo što uočavamo je da se očekivanje date vremenske serije ne menja puno u odnosu na vreme što se poklapa sa našom pretpostavkom. Druga stvar koja bi trebala da bude ispunjena kako bi važila stacionarnost jeste konstantna disperzija. Možemo primetiti da disperzija doživljava dva "šoka", pri čemu se prvi nalazi na prelazu između 2008. i 2009. godine, što se vremenski poklapa sa početkom svetske ekonomske krize. Sve strategije sa kojima se susrećemo u ovom radu manifestuju upravo ovakvo ponašanje. Razlozi za povećanje disperzije u tom periodu su mnogobrojni i kompleksni, ali većina ih se svodi na nedostatak poverenja investitora u finansijska tržišta na početku krize, što se odrazilo na povećanu volatilnost finansijskih instrumenata. Povećana volatilnost se kod različitih instrumenata manifestovala u različitim vremenskim intervalima. Drugi ”šok” koji možemo da primetimo u kretanju prinosa na prethodnom grafiku dešava se 2011. godine što odgovara evropskoj dužničkoj krizi.

Na sledećem grafiku prikazana je jedna od strategija koja naizgled ne ispoljava uticaj kriza na prinosu, ili je on zanemarljivo mali. Ovakve strategije su dosta retke među strategijama sa kojima radimo, ali i generalno. Pretpostavljamo da je nereagovanje na krizu prouzrokovano specifičnošću strategije u smislu odabira finansijskih instrumenata koji ulaze u nju.



Slika 4.2: Vremenska serija bez uticaja kriza

Većina strategija sa kojima radimo pokazuje reakciju na obe gore pomenute finansijske krize. Mali deo njih pokazuje uticaj samo svetske finansijske krize ili nijedne što zavisi od specifičnosti korpe finansijskih insrtumenata koju čine date strategije. Logično je da korpe koje nisu vezane za evropsko finansijsko tržište ne ispoljavaju uticaj evropske dužničke krize. U ovom trenutku pretpostavljamo da se stacionarnost podrazumeva i da se ne mora proveravati, jer bi u slučaju da je neka od strategija sa kojima radimo nestacionarna došlo do precenjivanja varijanse, što je daleko povoljniji scenario od potcenjivanja iste.

4.2 Backtesting, Out-of-sample i Forwardtesting

Backtesting je metod testiranja modela na istorijskim podacima u cilju provere uspešnosi samog modela. Jedan od razloga koji ovaj metod čini izuzetno korisnim jeste što nam dopušta da učinkovitost modela proverimo, a da pri tom ne moramo da rizikujemo da izgubimo novac.

Out-of-sample testing je metod testiranja modela na podacima koji nisu korišćeni za samu konstrukciju modela. Ovaj metod se koristi prilikom testiranja raznih modela optimizacije tako što se istorijski podaci podele na dva dela: prvi, obično obimniji, in-sample deo, koji služi za optimizaciju i drugi, out-of sample koji služi za testiranje rezultata optimizacije. Na taj način sprečavamo da podaci utiču na evaluaciju modela.

Forward testing je metod testiranja modela koji podrazumeva primenu modela na budućnost tj. deo uzorka koji ne posedujemo u trenutku formiranja modela. Glavna karakteristika ovakvog pristupa testiranju je da se investitor pretvara da koristi model ili, drugim rečima, model testira na papiru i ne izvršava zapravo ono što mu model sugeriše.

Uobičajan redosled pomenutih tehnika testiranja modela je dat na sledećem grafiku:

Slika 4.3: Metode testiranja modela

U ovom radu koristićemo backtesting i out-of-sample metod testiranja. Postupak počinjemo sa okvirom obima dvesto osamdeset dana. Prvih dvesto pedeset dnevnih prinosa posmatraćemo kao in-sample na kojem ćemo sprovoditi optimizaciju portfolija, dobijajući na taj način optimalne težinske koeficijente. Potom ćemo tako dobijene težinske koeficijente testirati na narednih trideset dana koji predstavljaju out-of-sample deo podataka. Pod testiranjem podrazumevamo merenje uspešnosti koristeći Sharpov količnik, varijansu i Calamrov količnik. Postupak ponavljamo pomerajući okvir za trideset dana sve dok se ne iskoriste svi podaci. Ono što ovim želimo da postignemo jeste uočavanje određenog šablona.

4.3 Rad u Matlabu

Kako bismo ranije navedene modele testirali na relanim podacima kreirani su sledeći programi u softverskom paketu Matlab redom za modele od 1 do 5: *opt_markowitz*, *opt_sharp*, *opt_calmar*, *opt_phi_abc* i *iterativno*. Pored njih kreiran je i program koji će modele testirati na način koji je naveden na kraju prethodnog poglavlja pod nazivom *convergence_simple*. Pored ovih osmišljenih programa, od ključnog su značaja i dve već postojeće funkcije u Matlabu pod nazivom *quadprog* i *fmincon* o kojima će više biti rečeno kasnije.

Programi za prva četiri modela su u strukturi gotovo identični i imaju iste ulazne i izlazne parametre. Sva četiri programa za ulazne parametre imaju:

- Matricu prinosa $P = [p_{ij}]$, pri čemu p_{ij} predstavlja prinos j-te strategije za i-ti dan. Broj vrsta matrice P predstavlja broj dana koji su obuhvaćeni podacima, dok broj kolona predstavlja broj strategija čije smo prinose beležili.
- Početni dan perioda na kojem vršimo optimizaciju, tj. prvi dan in-sample perioda.
- Poslednji dan perioda na kojem vršimo optimizaciju, tj. poslednji dan in-sample perioda.
- Broj dana k koji predstavlja broj dana nakon završetka in-sample perioda na kojem testiramo optimalnu strategiju tj. ukupan broj dana u out-of-sample periodu.
- Vektor v koji sadrži indekse onih strategija koje razmatramo prilikom formiranja portfolija. Vektor v dat je u obliku vektor vrste.
- Donju granicu težinskih koeficijenata.
- Gornju granicu težinskih koeficijenata.

Kao izlazne parametre, svaki od ovih programa daje:

- Optimalne težinske koeficijente u obliku vektor kolone.
- Vektor performanse optimalne strategije na out-of-sample u obliku vektor vrste koji sadrži redom Sharpeov količnik, varijansu i Calmarov količnik za optimalnu strategiju na out-of-sample periodu.

Ono što je zajedničko za prva četiri modela jesu konkretne vrednosti ulaznih parametara za koje od sada biramo sledeće vrednosti:

- Za matricu P uzimamo celokupnu matricu prinosa. Deo matrice P koji ćemo zapravo obrađivati definišemo početnim i krajnjim danom in-sample perioda kao i vektorom v.
- Početni i krajnji dan in-sample perioda će se menjati u skladu sa pomeranjem okvira nad kojim vršimo optimizaciju kao što je opisano u poglavlju "Backtesting, Out-of-sample i Forwardtesting". Bitno svojstvo je da je razmak između njih dvestopedeset dana koji čine sam okvir.
- Za broj dana k biramo $k = 30$.
- Za vektor v biramo $v = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & 22 \end{bmatrix}$, tj. razmatramo sve strategije pri formiranju optimalnog portfolija.
- Za donju granicu biramo -0.3, a za gornju 0.3.

Gore navedeni ulazni i izlazni parametri predstavljaju zajedničke osobine programa za prva četiri modela. Ono po čemu se rad sa modelima razlikuje jesu ugrađene funkcije u Matlabu korišćene prilikom same optimizacije, kao i funkcije cilja i ograničenja. Upravo o tim razlikama govore naredna poglavlja.

4.3.1 Model 1

Kao što je opisano ranije, Model 1 podrazumeva korišćenje Markowitzovog modela pri optimizaciji portfolija. Program osmišljen za potrebe optimizacije kod prvog modela pod nazivom opt_markowitz prilikom same optimizacije koristi ugrađenu funkciju u Matlabu *quadprog*. Ova funkcija, po svojoj definiciji, sprovodi optimizaciju kod problema kvadratnog programiranja, što je s obzirom na kvadratnu funkciju cilja i linearna ograničenja tipa jednakosti i nejednakosti, čini pogodnom za ovaj model. Ona naime rešava problem sledećeg oblika:

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & \frac{1}{2}x^T H x + f^T x \\ \text{t.d.} \quad & Ax \leq b \\ & A_{eq}x = b_{eq} \\ & lb \leq x \leq ub \end{aligned} \tag{4.1}$$

Ulazni parametri funkcije quadprog su:

- Simetrična matrica H iz funkcije cilja $\frac{1}{2}x^T Hx + f^T x$.
- Vektor f iz funkcije cilja $\frac{1}{2}x^T Hx + f^T x$.
- Matrica A i vektor b koji opisuju linearna ograničenja tipa nejednakosti.
- Matrica A_{eq} i vektor b_{eq} koji opisuju linearna ograničenja tipa jednakosti.
- Donja granica lb, u vidu vektora, promenljive po kojoj se vrši optimizacija, koja se povlači iz ulaznih parametara funkcije opt_markowitz.
- Gornju granicu ub, u vidu vektora, promenljive po kojoj se vrši optimizacija, koja se povlači iz ulaznih parametara funkcije opt_markowitz.
- Opciono se može uneti i početna tačka iz koje algoritam polazi.
- Specijalna podešavanja vezana za minimalnu dužinu koraka, toleranciju pada po dopustivim pravcima u funkciji cilja itd.

S obzirom na oblik 3.16 Markowitzovog modela ulazni parametri quadprog funkcije u našem slučaju će biti:

- $H = 2\Sigma_\pi$, pri čemu sa Σ_π označavamo matricu kovarijanse za onaj deo matrice P definisan početnim i krajnjim danom in-sample perioda kao i vektorom indeksa v.
- $f = 0$
- $A = 0, b = 0$
- $$A_{eq} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \hat{\mu}_1 & \hat{\mu}_2 & ... & \hat{\mu}_m \end{bmatrix}, b_{eq} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mu \end{bmatrix}$$

  Prva vrsta matrice A_{eq} definiše ograničenje vezano za budžetsku jednakost, dok druga vrsta postavlja ograničenje na željani prinos portfolija.

  Pri tome su sa $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, ..., \hat{\mu}_m$ obeležene ocene očekivane vrednosti svake strategije čiji se indeks nalazi u v na in-sample, dok je sa μ označen željani prinos. Za željani prinos uzimamo dvostruku apsolutnu vrednost proseka svih prinosa iz in-sample dela matrice.
- $$lb = \begin{bmatrix} -0.3 \\ -0.3 \\ \vdots \\ -0.3 \end{bmatrix}, ub = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.3 \\ \vdots \\ 0.3 \end{bmatrix}$$

  Primetimo da smo ograničenja tipa nejednakosti definisali preko donje i gornje granice težinskih koeficijenata, a da smo isti efekat mogli postići odgovarajućim definisanjem matrice A i vektora b.

Što se gornje i donje granice težinskih koeficijenata tiče prvobitno je uzeto -0.1 za donju i 0.1 gornju granicu posle čega smo zaključili da se većina težinskih koeficijenata "zalepi" za te granice te da ih moramo proširiti. Donja granica korišćena dalje u radu kod svih modela je -0.3, a gornja 0.3.

4.3.2 Model 2

Model 2 kao funkciju cilja koristi anualiziran Sharpeov količnik. Za razliku od programa u prošlom modelu ovde za samu optimizaciju koristimo ugrađenu Matlabovu funkciju *fmincon*. Ovu funkciju ćemo pored modela 2 koristiti i u modelima 3 i 4.

fmincon je funkcija koja se bavi pronalaženjem minimuma funkcije s obzirom na ograničenja koja mogu biti data u raznim oblicima. Ova funkcija radi sa problemom optimizacije oblika:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x) \\ \text{t.d.} \quad & Ax \leq b \\ & A_{eq}x = b_{eq} \\ & c(x) \leq 0 \\ & c_{eq}(x) = 0 \\ & lb \leq x \leq ub \end{aligned} \tag{4.2}$$

Pri tome su:

- sa A i b opisana linearna ograničenja tipa nejednakosti
- sa A_{eq} i b_{eq} linearna ograničenja tipa jednakosti
- sa $c(x)$ opisana nelinearna ograničenja tipa nejednakosti

- sa $c_{eq}(x)$ opisana nelinearna ograničenja tipa jednakosti.
- lb i ub vektori koji daju redom donje i gornje granice za x.

Ulazni parametri funkcije fmincon su:

- Funkcija cilja.
- Početna tačka iz koje algoritam kreće.
- Matrica A i vektor b koji opisuju linearna ograničenja tipa nejednakosti $Ax \leq b$.
- Matrica A_{eq} i vektor b_{eq} koji opisuju linearna ograničenja tipa jednakosti $A_{eq}x = b_{eq}$
- Donja i godnja granica za x, redom lb i ub.
- Vektor nelienarnih ograničenja koji definiče nelinearne funkcije $c(x)$ i c_{eq} iz problema 4.2.
- Podešavanja vezana za minimalnu dužinu koraka, odabir algoritma, maksimalan broj iteracija, maksimalan broj evaluacija funkcije cilja itd. Bitno je reći da je unapred postavljeni algoritam po kojem se vrši optimizacija metod unutrašnje tačke.

U ovom modelu, ali i u modelima 3 i 4, s obzirom na njihov opis, koristićemo sledeće ulazne parametre funkcije fmincon:

- Funkciju cilja definičemo kao negativnu vrednost Sharpeovog količnika portfolija koji je funkcija od težinskih koeficijenata. Razlog za negativan predznak je činjenica da se fmincon bavi problemom minimizacije, a mi želimo da maksimiziramo Sharpeov količnik.
- Za početnu tačku algoritma biramo

  $$\omega = \begin{bmatrix} \frac{1}{22} & \frac{1}{22} & \cdots & \frac{1}{22} \end{bmatrix}$$

  Drugim rečima krećemo iz tačke koja označava jednako raspoređena sredstva među strategijama.
- $$A_{eq} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, b_{eq} = 1$$
- Donja i gornja granica težinskih koeficijenata je:

  $$lb = \begin{bmatrix} -0.3 \\ -0.3 \\ \vdots \\ -0.3 \end{bmatrix}, ub = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.3 \\ \vdots \\ 0.3 \end{bmatrix}$$

- Od specijalnih podešavanja menjamo jedino maksimalan broj evaluacija funkcije cilja koje alogritam izračuna pre nego što dođe do rešenja problema. Naime, u svakoj od iteracija algoritma, funkcija fmincon ocenjuje funkciju cilja najmanje jednom. Prvobitnim testiranjem shvatili smo da se algoritam u određenim slučajevima prekida preuranjeno, samim tim praveći veću grešku kod ocene rešenja problema. Podrazumevana vrednost ovog broja je broj promenljivih pomnožen sa 100 za sve algoritme sem za algoritam unutrašnje tačke za koji je ta vrednost jednaka 3000. Kako bismo izbegli prerano zaustavljanje algoritma i povećali tačnost programa maksimalan broj evaluacija funkcije cilja smo podesili na 10000. Ovo je usporilo program, ali nam je obezbedilo preciznije određivanje rešenja.

4.3.3 Model 3

Svi ulazni parametri sem funkcije cilja su isti kao i u modelu 2.

4.3.4 Model 4

Svi ulazni parametri sem funkcije cilja su isti kao i u modelu 2.

4.3.5 Model 5

Kod ovog modela je pored ulaznih parametara navedenih kod modela 2 neophodno definisati i dužinu perioda na kojem vršimo treću optimzaciju naprednog algoritma. Tako su ulazni parametri i njihove vrednosti za ovaj model sledeći:

- Matrica prinosa P, za koju uzimamo celokupnu matricu prinosa kao i kod modela 2. Deo matrice P koji ćemo zapravo obrađivati definišemo početnim i krajnjim danom in-sample perioda kao i vektorom v.
- Početni i završni dan na kojem vršimo prve dve optimizacije naprednog algoritma. Oni će se menjati u skladu sa pomeranjem okvira kroz podatke, ali će opseg koji obuhvataju uvek biti dvesto dvadeset dana. Razlog za odabir ove dužine umesto dužine od dvesto pedeset dana je što po završetku ovog perioda sledi period na kojem vršimo treću optimizaciju, na koji se nadovezuje out-of-sample period.
- Dužina perioda na kojem vršimo treću optimizaciju, k_1, za koji biramo $k_1 = 30$. Nakon završetka ovog perioda sledi out-of-sample. Primetimo da sada kao i kod modela 2 imamo in-sample period u trajanju od dvesto pedeset dana.
- Dužina out-of-sample perioda, k_2, za koji biramo $k_2 = 30$. Ovakvim definisanjem dužine out-of-sample perioda dobijamo iste in-sample i out-of-sample okvire kao i kod prethodnih modela.
- Za vektor v biramo istu vrednost kao i kod prethodnih modela.
- Za donju i gornju granicu biramo iste vrednosti kao kod prethodnih modela.

Pored ovih ulaznih parametara, bitno je naglasiti da je funkciji fmincon neophodno proslediti nelinearna ograničnja definisana u okviru treće optimizacije modela 5.

4.3.6 Konvergencija

Sada kada smo opisali programe koji vrše optimizaciju za svaki od modela navedenih u ovom radu možemo preći na program koji će koristeći te programe izvršiti postupak opisan na kraju poglavlja Backtesting, Out-of-sample i Forwardtesting. Program nosi ime *convergence_simple* i za ulazne parametre ima:

- Matricu prinosa u celosti.
- Dužinu trajanja in-sample perioda, N, u danima. U našem slučaju biramo dužinu od dvesto pedeset dana.
- Dužinu trajanja out-of-sample, k, u danima. Za k biramo dužinu od 30 dana.
- Vektor v koji se sastoji od indeksa onih strategija koje se uzimaju u obzir pri formiranju portfolija. Biramo:
$$v = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & 22 \end{bmatrix}$$
- Donju i gornju granicu težinskih koeficijenata u vidu vektor kolone. Za njih uzimamo:
$$lb = \begin{bmatrix} -0.3 \\ -0.3 \\ \vdots \\ -0.3 \end{bmatrix}, ub = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.3 \\ \vdots \\ 0.3 \end{bmatrix}$$

- Indikator iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ koji određuje po kojem modelu se vrši optimizacija.

Svi ulazni parametri ove funkcije prosleđuju se funkcijama navedenim za svaki model ponaosob.

Ova funkcija izvršava sledeće:

Kreće se sa in-sample periodom počev od prvog do N-tog dana. U našem slučaju radi se o in-sample periodu od prvog do dvesto pedesetog dana, tj. od prve do dvesto pedesete vrste matrice prinosa. Na njemu vršimo optimizaciju u zavisnosti od odabranog modela i dobijamo jedan set optimlanih koeficijenata kao i njihovu učinkovitost na out-of-sample koji čine dani(vrste) od $N+1$-og do $N+k$-tog dana. Konkretna vrednost sa kojom radimo je out-of-sample od dvesto pedeset prvog do dvesto osamdesetog dana. Učinkovitost se meri Sharpeovim količnikom, varijansom i Calmarovim količnikom redom. Optimalni težinski koeficijenti se smeštaju u prvu vrstu matrice koeficijenata, a pokazatelji uspešnosti se smeštaju u prvu vrstu matrice pokazatelja. Zatim početak i kraj in-sample perioda kao i početak i kraj out-of-sample perioda pomeramo za k (trideset) dana unapred i vršimo isti postupak koristeći isti model. Optimalne koeficijente smeštamo u odgovarajuću vrstu matrice koeficijenata, a pokazatelje uspešnosti datih koeficijenata u odgovarajuću vrstu matrice pokazatelja. Postupak nastavljamo dok imamo podataka. Za

$$v = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & 22 \end{bmatrix}$$

i konkretnu matricu prinosa, opisanu na početku poglavlja "Rad na realnim podacima", kao izlazne faktore dobijamo:

- Matricu koeficijenata dimenzije 87×22, koju označavamo sa C.
- Matricu performanse dimenzije 86×3, u oznaci U.

Ponovivši ovaj postupak za svaki od modela dobijamo pet matrica koeficijenata i pet matrica pokazatelja na osnovu kojih možemo da analiziramo modele.

4.4 Rezultati

Kod svakog od modela kao rezultat ranije navedenih programa u Matlabu dobijaju se dve matrice. Prva matrica, C, predstavlja matricu optimalnih težinskih koeficijenata dimenzije 87x22, pri čemu svaka vrsta predstavlja težinske koeficijente optimalnog portfolija za jedan vremenski okvir. Druga matrica, U, dobijena na osnovu prve, predstavlja matricu pokazatelja uspešnosti optimalnog portfolija na out-of-sample periodu. Dimenzija matrice U je 86x3, pri čemu svaka vrsta predstavlja ocenu uspešnosti optimalnog portfolija na out-of-sample periodu, a svaka od tri kolone predstavlja jedan pokazatelj uspešnosti. Tako prva kolona sadrži vrednosti Sharpeovog količnika, druga vrednosti varijanse, a treća vrednosti Calmarovog količnika optimalnog portfolija na out-of-sample periodu. Primetimo da se broj vrsta matrica C i U razlikuje. Razlog za to je sledeći: Svaka vrsta matrice U formira se na osnovu odgovarajuće vrste matrice C tako što se uspešnost koeficijenata sadržanih u vrsti matrice C ocenjuje na out-of-sample periodu koristeći podatke iz matrice prinosa P. Za poslednji set koeficijenata matrice C nećemo više imati podataka u matrici P na kojima bismo mogli da izračunamo uspešnost strategije, te je stoga broj vrsta matrice U za jedan manji nego broj vrsta matrice C.

Matrice težinskih koeficijenata za modele od 1 do 5 označimo redom sa $C_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$, a matrice pokazatelja uspešnosti sa $U_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$ redom. Posmatrajmo matricu U_i. Ona je pokazatelj kvaliteta modela i. Postavlja se pitanje kako na osnovu nje oceniti kvalitet datog modela. Ideja sprovedena u ovom radu je opisana na sledeći način:

Prvo ćemo izračunati srednju vrednost svakog od tri pokazatelja uspešnosti tj. prosečnu vrednost po kolonama matrice U_i. Ukoliko to uradimo za svaki model moći ćemo da uporedimo strategije po proseku pokazatelja. Pored ovakvog načina poređenja strategija, možemo uvesti dodatne kriterijume provere kvaliteta. Jedan od njih je količnik prosečne vrednosti i standardne devijacije pokazatelja uspešnosti. Njega takođe računamo po kolonama matrice U.

Ova dva kriterijuma kvaliteta primenjena na svih pet modela predstavljena su u tabelama 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 i 4.5.

Model 1	**Sharpe**	**Varijansa**	**Calmar**
Srednja vrednost	2.889	0.0000014	21.906
Standardna devijacija	3.172	0.0000021	49.492
Srednja vrednost/standardna devijacija	0.911	0.662	0.443

Tabela 4.1: Rezultati modela 1

Model 2	**Sharpe**	**Varijansa**	**Calmar**
Srednja vrednost	2.579	0.0000026	16.111
Standardna devijacija	3.003	0.0000044	22.484
Srednja vrednost/standardna devijacija	0.859	0.594	0.716

Tabela 4.2: Rezultati modela 2

Model 3	**Sharpe**	**Varijansa**	**Calmar**
Srednja vrednost	2.184	0.0000031	13.464
Standardna devijacija	2.753	0.0000036	19.922
Srednja vrednost/standardna devijacija	0.793	0.849	0.676

Tabela 4.3: Rezultati modela 3

Model 4	**Sharpe**	**Varijansa**	**Calmar**
Srednja vrednost	2.191	0.0000029	13.206
Standardna devijacija	2.789	0.0000033	19.569
Srednja vrednost/standardna devijacija	0.786	0.880	0.675

Tabela 4.4: Rezultati modela 4

Model 5	**Sharpe**	**Varijansa**	**Calmar**
Srednja vrednost	1.569	0.0000062	12.809
Standardna devijacija	3.276	0.0000083	20.721
Srednja vrednost/standardna devijacija	0.479	0.756	0.618

Tabela 4.5: Rezultati modela 5

Ukoliko posmatramo kvalitet strategije koristeći prosek Sharpeovog količnika kao kriterijum, najbolja strategija je ona koja ima najveću prosečnu vrednost Sharpeovog količnika na out-of-sample periodu. To je u našem slučaju strategija dobijena modelom 1, tj. ona koja je koristila Markowitzov model. Prosek Sharpeovog količnika za model 1 je 2.889.

Za varijansu kao pokazatelj uspešnosti dobijamo da je najbolji model onaj čija je prosečna vrednost varijanse na out-of-sample periodu bila minimalna, a to je ponovo model 1. Prosečna vrednost varijanse na out-of-sample periodu za model 1 bila je 0.0000014.

Ako sada kao pokazatelj uspešnosti posmatramo prosek Calmarovog količnika imamo da je model 1 ponovo najbolji uzimajući najveću vrednost koja iznosi 21.906.

Za Sharpeov i Calmarov količnik kao pokazatelje uspešnosti na out-of-sample periodu razumno je koristiti i odnos prosečne vrednosti i standardne devijacije pokazatelja. Ovaj odnos bi istakao model čiji je pokazatelj ne samo najveći po proseku nego i najstabilniji u smislu devijacije. Za varijansu ovaj odnos nema realnu interpretaciju pa ga nećemo ni razmatrati dalje. Ukoliko koristimo navedeni odnos kod Sharpeovog količnika kao pokazatelja dobijamo još jednom da je model 1 najuspešniji, sa vrednosšću 0.911. Korišćenjem ovog odnosa za Calmarov količnik dobijamo da je najbolji model 2, sa vrednošću 0.716.

Prilikom formiranja modela 4 i modela 5 ideja je bila da se modeli koji koriste standardne mere rizika unaprede. U tom smislu očekivali smo da će upravo modeli 4 i 5 dati bolje rezultate od modela 1, 2 i 3. Rezultati koje smo dobili, međutim, govore suprotno. Ono što je kod rezultata začuđujuće je i činjenica da se Markowitzov model, koristeći kriterijume navedene ranije, najčešće pokazao kao najbolji iako je model 2 mnogo ustaljeniji u praksi. Pretpostavlja se da je razlog za to specifičnost podataka, tj. korpi finansijskih instrumenata čiji su prinosi dati matricom P. Pored toga očekivali smo da će pokazatelji uspešnosti biti jednoglasni u rangiranju strategija, što se takođe nije ostvarilo. Na kraju možemo primetiti još jednu specifičnost dobijenih razultata. Naime, model koji je najbolji u smislu proseka Sharpeovog količnika nije model koji je za funkciju cilja koristio Sharpeov količnik.

4.4.1 Zapažanja bitna za buduća istraživanja

Prva opservacija vredna pomena je način na koji se korelacija između strategija odražava na korelaciju između težinskih koeficijenata. Naime, dobija se da se korelacija između strategija ne prenosi na korelaciju između odgovarajućih težinskih koeficijenata. Mislimo da bi od razumne važnosti bilo obratiti pažnju na pomenuti uticaj u budućim istraživanjima, jer se upravo u njemu može nalaziti ono što je neophodno za dobijanje kvalitetnijeg modela.

Možemo primetiti da napredni algoritam nije dao očekivane rezultate ni po jednom kriterijumu kvaliteta. Smatramo da je konstrukcija naprednog algoritma idejno dobra baza za buduće modele. Ono što ovaj model ograničava je pretpostavka da je popravka ranga jedan matrice kovarijanse dovoljno dobra. U model je moguće uključiti precizniju popravku matrice kovarijanse, ali kako bi implementacija takve popravke prevazišla okvire ovog rada, ostavljamo je budućim istraživanjima. Problemom pronalaženja najbliže matrice kovarijanse između ostalih bavio se Nicholas J. Higham [24].

Stacionarnost vremenskih serija je svakako još jedna stvar na koju bi trebala da se obrati pažnja prilikom konstrukcije modela u budućnosti. U realnom svetu se stacionarnost ne proverava posebno, ali je njen uticaj na rezultate modela potencijalno značajan.

5

Zaključak

Optimizacija portfolija predstavlja disciplinu finansijske matematike koja se aktivno izučava od prve polovine dvadesetog veka, a koja se naglo razvija krajem dvadesetog i početkom dvadeset i prvog veka sa razvojem tehnologije. Od svog nastanka do sada uspela je da objedini razne discipline, pa tako danas uključuje korišćenje numeričke optimizacije, ekonomije, stohastike itd.

U ovom radu su se pored modela optimizacije portfolija koji podrazumevaju standardne mere rizika, kao što su Sharpeov količnik, varijansa i Calmarov količnik, izučila i dva nova pristupa problemu. Reč je o modelu koji za funkciju cilja uzima linearnu kombinaciju standardnih mera rizika i o naprednom algoritmu koji se sastoji od niza optimizacija organizovanih u nekoliko koraka. Svaki od modela primenjen je na realnim podacima. Cilj posmatranja modela koji koriste nove mera rizika jeste unapređenje standardnih, te je u tu svrhu za svaki od modela proverena njegova uspešnost. Dobijeni rezultati, iako u suprotnosti sa očekivanim, su od velikog značaja za buduća istraživanja. Zaključujemo da Markowitzov model daje bolje rezultate u odnosu na dodatne modele obrađene u ovom radu, ali i na modele koji za funkciju cilja imaju Sharpeov i Calmarov količnik. Superiornost Markowitzovog modela u odnosu na Sharpeov model koji je dosta zastupljeniji u realnom svetu možemo pripisati specifičnosti podataka, ali ga na taj način ne smemo potceniti.

Za kraj možemo zaključiti da ukoliko model prilagodimo mogućoj nestacionarnosti prinosa i upotrebimo napredne načine pronalaženja najbliže matrice kovarijanse možemo izgraditi model koji bi potencijalno mogao da nadmaši standardne modele.

Literatura

[1] Markowitz, Harry, *Portfolio Selection*, The Journal of Finance, Vol. 7, No. 1, pages 77-91, 1952

[2] Sharpe, William F., *Mutual Fund Performance*, The Journal of Business, Vol. 39, No. 1, Part 2: Supplement on Security Prices, pages 119-138., 1966

[3] Young, Terry W., *Calmar Ratio: A Smoother Tool*, Futures magazine, page 40, 1991

[4] Rom, Brian M.; Ferguson, Kathleen W., *Post-Modern Portfolio Theory Comes of Age*, The Journal of Investing, Vol. 2, No. 4, pages 27-33, 1993

[5] Grinold, Richard C., *Mean-Variance and Scenario-Based Approaches to Portfolio Selection*, The Journal of Portfolio Management, Vol. 25, No. 2, pages 10-22, 1999

[6] Kumaresan, Miles, *Optimization of Conditional Trajectories in a Market Place of Multiple Liquidity Pools*, Phd thesis, University of Novi Sad, Faculty of Science, 2010

[7] Vecer, Jan, *Maximum Drawdown and Directional Trading*, Columbia University, Department of Statistics, New York, USA, 2006

[8] Karatzas, Ioannis; Shreve, Steven E., *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer, 1997

[9] Acar, Emmanuel; James, Shane, *Maximum loss and maximum drawdown in finacial markets*, Int.Conference on Forecasting Finansial Markets, London, UK, 1997

[10] Sornette, Didier, *Why Do Stock Markets Crash: Critical Events in Complex Financial Systems*, Princeton University Press, pages 51-60 2002

[11] Nocedal, Jorge; Wright, Stephen J., *Numerical Optimization*, Springer, 1999

[12] Burghardt, Duncan, Liu, *Deciphering drawdown*, Risk magazine, Risk management for investors, September, S16-S20, 2003

[13] Chekhlov, Uryasev, Zabarankin, *Drawdown Measure in Portfoilo Optimization*, Research Report 2003-15. ISE Dept., Iniveristy of Florida, September 2003

[14] Harding, Nakou, Nejjar, *The Pros and Cons of 'Drawdown' as a Statistical Measure of Risk for Investments*, AIMA Journal, 16-17, April 2003

[15] Magdon-Ismail, Atiya, Pratap, Abu-Mostafa, *On the maximum drawdown of a Brownian motion*, Journal of Applied Probability, Vol. 41, No. 1, pages 147–161, 2004

[16] Douandy, Shiryaev, Yor, *On the probability characteristics of downfalls in a standard Brownian motion*, SIAM, Theory Probability Appl., Vol. 44, pages 29-38, 2000

[17] Dominé, Marco, *First passage time distribution of Wiener process with drift concerning two elastic barries*, Joural of Applied probability, pages 164-175, 1996

[18] Eling, Martin, *Does the Measure Matter in the Mutual Fund Industry?*, Financial Analysis Journal, Vol. 64, No. 3, 2008

[19] Rajter-Ćirić, Danijela (2009), *Verovatnoća*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu

[20] Lozanov-Crvenković, Zagorka, *Statistika*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu

[21] Xiao, Han; Wu, Wei Biao, *Covariance matrix estimation for stationary time series*, The Annals of Statistics, Vol. 40, No. 1, 466–493, 2012

[22] Portela Santos, Andre Alves, *The out-of-sample performance of robust portfolio optimization*, Revista Brasileira de Financas, Vol. 8, No. 2, pages 141–166, 2010

[23] Rapach, David E.; Wohar, Mark E., *In-Sample vs. Out-of-Sample Tests of Stock Return Predictability in the Context of Data Mining*, Journal of Empirical Finance, Vol. 13, Issue 2, 2006, pages 231–247

[24] Higham, Nicholas J., *Computing the Nearest Correlation Matrix—A Problem from Finance*, IMA Journal of Numerical Analysis, Vol. 22, Issue 3, pages 329-343

Biografija

Nataša Džaleta je rođena 25.03.1990. godine u Splitu. Završila je prirodno-matematički smer gimnazije „Isidora Sekulić" u Novom Sadu 2009. godine kao nosilac Vukove diplome nakon čega upisuje Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, smer primenjena matematika - matematika finansija. Osnovne studije završava 2012. godine sa prosekom 9.75 i upisuje master studije na istom fakultetu istog smera i završava ih 2015. godine sa prosekom 9.82. U toku studija biva dva puta izabrana za stipendistkinju Fonda za mlade talente Dositeja.
U toku školovanja posvetila se učenju jezika, te trenutno tečno govori engleski, služi se španskim i uči nemački.
U aprilu 2013. godine biva odabrana kao jedan od deset studenata Univerziteta u Novom Sadu da učestvuje u TEMPUS projektu "Visuality and Mathematics" u Beču. Iste godine kao jedan od tri studenta Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu učestvuje na ECMI nedelji matematičkog modeliranja u Madridu.
2014. godine postaje stipendistkinja Fonda „Dr. Zoran Đinđić" i polaznica programa „Internship Programme of the German Business", podržanog od strane Ost-Ausschuss der Deutschen Wirtschaft, GIZ i BMZ, te dobija šestomesečnu praksu u Minhenu, Nemačka, koju je obavila u UniCredit banci u sektoru za korporativno i investiciono bankarsvo gde je radila na istraživanju evropskog tržista sekjuritizacije. Trenutno obavlja praksu u aktuarskoj direkciji u osiguravajućoj kući DDOR.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Nataša Džaleta
AU

Mentor: prof. dr Nataša Krejić
MN

Naslov rada: Optimalna trajektorija trgovanja kod BB modela
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: s / e
JI

Zemlja publikovanja: Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2015.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno–matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (6, 59, 28, 2, 0, 6, 0)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Numerička optimizacija
ND

Predmetna odrednica / Ključne reči: numerička optimizacija, optimizacija portfolija, stohastička analiza, Matlab

PO

UDK

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno–matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: Ovaj rad bavi se optimizacijom portfolija i unapređenjem postojećih modela koji se u tu svrhu koriste. Ovom temom naučnici se bave od početka dvadesetog veka, ali se prvi pisani radovi pojavljuju tek pedesetih godina dvadesetog veka. Centralni deo rada na optimizaciji portfolija zauzima odabir funkcije cilja, tj. mere rizika po kojoj će se vršiti optimizacija. Prvi radovi kao funkciju cilja koriste ono što danas smatramo standardnim merama rizika, kao što su varijansa, Sharpeov količnik, a kasnije i nešto manje standardan Calmarov količnik. U ovom radu su istražene i druge mogućnosti te je proučen model koji za funkciju cilja ima linearnu kombinaciju pomenutih mera rizika, a potom i algoritam sačinjen od niza optimizacija organizovanih u četiri koraka koji uključuju korekciju matrice kovarijanse. Dobijeni rezultati sugerišu da je za realne podatke na kojima smo radili najuspeňiji model onaj koji za funkciju cilja ima varijansu, tj. Markowitzov model. Dodatni modeli predstavljeni u radu ukazuju na bitnost stacionarnosti i odabira korekcije matrice kovarijanse.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 04.03.2014.
DP

Datum odbrane: April 2015.
DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik:	dr Zorana Lužanin, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član:	dr Nataša Krejić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor
Član:	dr Dora Seleši, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORD DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph documentation
DT

Type of record: Textual printed material
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Nataša Džaleta
AU

Mentor: Nataša Krejić, Ph.D.
MN

Title: Optimal trajectory of trading using BB models
TI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract: en / s
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2015.
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: (6, 59, 28, 2, 0, 6, 0)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Numerical Optimization
SD

Subject / Key words: numerical optimization, portfolio optimization, stochastic analysis, Matlab
SKW

UC:

Holding data: Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: This contribution deals with portfolio optimization and ways to improve existing models concerned with the topic. This topic was examined by scientists from the beginning of twentieth century, but it was not until mid twentieth century that first written works appeared. The focal point of portfolio optimization is the choice of the objective function, or in other words the risk measure regarding to which optimization will be done. First works took what we nowadays call standard risk measures as objective function such as variance, Sharpe ratio and later not so standard Calmar ratio. In this work, other approaches are examined as well including linear combination of aforementioned risk measures and algorithm that consists of consecutive optimizations organized in four steps. This algorithm includes the update of covariance matrix. The results suggest that, for real data we were working on, the best suiting model is the one that involves variance as objective function, or the Markowitz model. The additional models presented point out that the stationarity and matrix update play a big role in formulating a successful model for portfolio optimization.
AB

Accepted by the Scientific Board on: 04.03.2014.
ASB

Defended: April 2015.
DE

Thesis defend board:
DB

President:	Zorana Lužanin, Ph.D., full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member:	Nataša Krejić, Ph.D., full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, supervisor
Member:	Dora Seleši, Ph.D., associate professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad