UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU-INFORMATIKU

Natalija Ramač

MODELIRANJE EKSTREMNIH RIZIKA

-završni rad-

Novi Sad, oktobar 2009.

PREDGOVOR

Tema ovog rada je aktuarsko modeliranje nastanka ekstremno velikih šteta koje se dešavaju sa veoma malom verovatnoćom, ali kada se dogode, iznosi zahteva za odštetu dostižu ekstremne razmere koje redovno osiguranje ne može nadoknaditi. Po svom karakteru, u pomenute štete možemo svrstati prirodne katastrofe (zemljotres, uragan), požar, poplavu... Štete nastale usled prirodnih katastrofa se delimično nadoknađuju iz reosiguranja, pa je njihovo modeliranje veoma značajno za poslovanje reosiguravajućih kompanija. Funkcije raspodela koje služe za modeliranje ekstremno velikih šteta (kao, na primer, Paretova i Weibullove raspodela) imaju deblji rep od raspodela koje se koriste u životnom osiguranju ili osiguranju imovine.

U prvom poglavlju je razrađen problem propasti. Uveden je Cramer-Lundbergov model i pojam procesa obnavljanja, kao i pojam verovatnoće propasti procesa u konačnom i beskonačnom vremenskom intervalu. Takođe je izvršena Cramer-Lundbergova procena verovatnoće propasti u beskonačnom vremenskom intervalu pod pretpostavkom o malim iznosima zahteva za odštetu. Uvedena je i veoma značajna Laplace-Stieltjesova transformacija.

U drugom poglavlju su detaljno opisane osobine regularno varirajućih funkcija. Regularno varirajuće funkcije su funkcije koje se asimptotski ponašaju kao stepene funkcije. Izuzetno je značajna Karamatina teorema koja omogućava da se integracija regularno varirajućih funkcija izvši na isti način kao i integracija stepenih funkcija. Takođe je veoma značajna i Karamatina teorema o reprezentaciji regularno varirajućih funkcija.

U trećem poglavlju je razrađen pojam subeksponencijalnih funkcija. Subeksponencijalne funkcije su funkcije sa debelim repom, njihovi repovi opadaju prema nuli mnogo sporije od repova eksponencijalnih raspodela.

U četvrtom poglavlju je opisan proces kome se bliži propast. Putanja takvog procesa se ponaša na svoj uobičajen način, kao i putanje procesa koji nikad neće stići do propasti. Propast se tada dešava sasvim neočekivano, pojavom jedne jedine ekstremno velike velike štete. Propast procesa se dešava sa veoma malom verovatnoćom, ali kada se dogodi, nastupa veoma naglo.

Ovom prilikom bih želela da se zahvalim profesorima na ukazanoj pomoći tokom osnovnih i master studija. Zahvaljujem se i svom mentoru, dr Dori Seleši, koja mi je pomogla pri izradi master rada.

UVOD

Osnovni model osiguranja od rizika je prvi put opisan u radu Filipa Lundberga, koji je u svojoj poznatoj tezi sa univerziteta Uppsala 1903. godine postavio kamen temeljac aktuarske teorije rizika. Lundberg je shvatio da Poissonovi modeli leže u središtu modela neživotnog osiguranja. Uz pomoć korisne vremenske transformacije (takozvanog operacionog vremena), mogao je ograničiti svoju analizu na homogen Poissonov proces.

Ovo otkriće je slično Bachelierovom opažanju iz 1900. godine da je proces Brownovog kretanja ključni proces za razvoj finansijskih modela. Kasnije je Harold Cramer u njegovoj školi u Stockholmu ugradio Lundbergove ideje u brzo razvijajuću teoriju stohastičkih procesa. Time je Cramer značajno doprineo postavljanju fundamenata matematike neživotnog osiguranja i teorije verovatnoće. Osnovni model koji proizilazi iz ovih prvih doprinosa je Cramer-Lundbergov model.

Jovan Karamata je takođe značajno doprineo razvoju aktuarstva. Rođen je 1902. godine u Zemunu, srednju školu je završio u Švajcarskoj, a 1920. godine je upisao studije na Mašinskom fakultetu u Beogradu, gde se vrlo intenzivno bavio matematikom. Radio je kao asistent matematike u Parizu 1927-1928. godine, zatim na Univerzitetu u Beogradu, gde je 1950. godine postao redovni profesor. Predavao je, takođe, i na Novosadskom univerzitetu. Bio je član švajcarsko-francusko-nemačkog udruženja matematičara. Proširio je teoriju sporo varirajućih funkcija, teoriju regularno varirajućih nizova, uveo teoreme Tauberovog tipa.

INDEKS POJMOVA

Stohastički proces (u oznaci $(X_t)_{t\geq 0}$ ili $(X_t(\omega):\ t\geq 0, \omega\in\Omega)$) je familija slučajnih promenljivih, gde je za svaki fiksirani vremenski trenutak $t\geq 0$ X_t jedna slučajna promenljiva. Skup Ω je skup svih stanja stohastičkog procesa $(X_t)_{t\geq 0}$. Za svako fiksirano $\omega\in\Omega$ dobijamo jednu realnu funkciju $(X_t(\omega))_{t\geq 0}$ koja se naziva **putanja** ili **trajektorija** stohastičkog procesa.

Proces prebrajanja je stohastički proces $(X_t)_{t\geq 0}$ u kome za fiksirani vremenski trenutak t, $t\geq 0$ slučajna promenljiva X_t predstavlja broj događaja koji se desio do tog vremenskog trenutka t.

Poissonov proces sa stopom rasta ili intenzitetom λ je proces prebrajanja za koji važi:
a) $X_0 = 0$ (na početku vremenskog intervala se još nije desio nijedan događaj, tj. započinjemo prebrajanje događaja od nule);
b) proces $(X_t)_{t\geq 0}$ ima nezavisne priraštaje (broj događaja koji se desio u jednom intervalu vremena ne zavisi od broja događaja koji su se desili u nekom drugom intervalu);
c) broj događaja u proizvoljnom vremenskom intervalu dužine t ima Poissonovu raspodelu $P\left[X_{t+s} - X_s = k\right] = \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{\lambda t}$ sa srednjom vrednošću $E\left[X_t\right] = \lambda t$.

Brownovo kretanje (ili Wienerov proces) je stohastički proces $(X_t)_{t\geq 0}$ za koji važi:
a) $X_0 = 0$ skoro sigurno;
b) za sve fiksirane vremenske trenutke $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$ priraštaji $X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, ... X_n - X_{n-1}$ procesa su nezavisni;
c) za sve fiksirane $t, s\geq 0$, priraštaji $X_t - X_s$ imaju normalnu $\mathcal{N}(0, t - s)$ raspodelu.

Lanac Markova je stohastički proces sa konačnim ili prebrojivim skupom stanja $\{x_1, x_2, ...\}$ kod kojeg za proizvoljno $r\in N$, $k_1 < k_2 < ... < k_r < n$, važi $P\left[X_n = x_n \middle| X_{k_r} = x_r, ..., X_{k_1} = x_1\right] = P[X_n = x_n \mid X_{k_r} = x_r]$, tj. kod kojeg stanje procesa u budućnosti ne zavisi od stanja u kojima je proces bio u prošlosti, samo od stanja procesa u sadašnjosti.

Proces slučajnog hoda je lanac Markova sa skupom stanja $\{0,\pm1,\pm2...\}$ kod kojeg za neko $p \in (0,1)$ važi $p_{i,i+1} = 1 - p_{i,i-1}$, gde je $p_{i,i+1}$ verovatnoća da proces pređe iz i-tog u i+1. stanje. Ovakav proces se naziva procesom slučajnog hoda, jer ga možemo posmatrati kao šetnju po ravnoj liniji u kojoj u svakom trenutku možemo napraviti slučajan korak udesno sa verovatnoćom p ili korak ulevo sa verovatnoćom $1-p$.

Proces obnavljanja je stohastički proces kod kojeg se nakon određenog intervala vremena stanje procesa ponavlja, proces se ponovo vraća u stanja u kojima je bio.

1. TEORIJA RIZIKA

Za većinu problema razmatranih u aktuarskoj matematici teorija rizika predstavlja suštinsku matematičku osnovu. U ovom poglavlju će biti predstavljeni osnovni modeli teorije rizika, sa akcentom na slučajeve gde je značajna podela na male i velike iznose šteta. Danas postoji mnoštvo dostupne literature koja se bavi teorijom rizika na raznim matematičkim nivoima.

Nakon uvođenja procesa obnavljanja, Cramer-Lundbergovog modela i osnovnog modela rizika u Odeljku 1.1, u Odeljku 1.2 uvodimo Cramer-Lundbergovu teoremu i pojam Laplace-Stieltjesove transformacije. Pomoću Cramer-Lundbergove teoreme ćemo izvršiti procenu verovatnoća propasti procesa u beskonačnom vremenskom intervalu zasnovanog na pretpostavci o malim zahtevima za odštetu. Primena Laplace-Stieltjesove transformacije u Cramer-Lundbergovoj teoremi će omogućiti da dokažemo jedinstvenost Lundbergovog eksponenta, ako on postoji.

1.1 PROBLEM PROPASTI

Definicija 1.1.1 (Cramer-Lundbergov model i proces obnavljanja):
Cramer-Lundbergov model je dat sledećim uslovima:

a) Proces iznosa šteta:

Iznosi šteta $(X_k)_{k\in N}$ su pozitivne, iid[1] slučajne promenljive koje imaju uobičajenu ne-mrežastu[2] funkciju raspodele F, konačna očekivanja $\mu = E[X_1]$ i disperzije $\sigma^2 = \text{var}[X_1] \le \infty$;

b) Trenuci u kojima se javljaju zahtevi za odštetu:

Zahtevi za odštetu se javljaju u slučajnim vremenskim trenucima

$$0 < T_1 < T_2 < \dots \quad \text{s.s.}$$

c) Proces pristizanja zahteva za odštetu:

Broj zahteva za odštetu u vremenskom intervalu $[0,t]$ se obeležava sa

$$N(t) = \sup\{n \ge 1,\ \ T_n \le t\}, \quad t \ge 0$$

gde je, prema dogovoru, $\sup\varnothing = 0$.

d) Vremena između dolazaka (između pristizanja zahteva za odštetu),

$$Y_1 = T_1, \ \ Y_k = T_k - T_{k-1}, \quad k=2,3... \qquad (1.1)$$

---

[1] nezavisne slučajne promenljive sa istom raspodelom

[2] funkcija raspodele F slučajne promenljive X je mrežasta ako postoje $a, d \ge 0$ takvi da $\sum_{n=0}^{\infty} P[X = a + nd] = 1$.

su iid, imaju eksponencijalnu raspodelu sa konačnim očekivanjem

$$E[Y_1] = \frac{1}{\lambda}.$$

e) Nizovi $(X_k)_{k\in N}$ i $(Y_k)_{k\in N}$ su međusobno nezavisni.
Model obnavljanja je dat sa (a)-(c), (e) i
d') Vremena između dolazaka $\mathrm{Y_k}$ data u 1.1. su iid sa konačnim očekivanjem

$$E[Y_1] = \frac{1}{\lambda}.$$

Primedba 1.1.1.1: Posledica gornje definicije je da je $N(t)_{t\geq 0}$ homogen Poissonov proces sa intenzitetom $\lambda > 0$.
Zbog toga važi

$$P[N(t) = k] = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad \mathrm{k=0,1,2...}$$

Primedba 1.1.1.2: Model obnavljanja je generalizacija Cramer-Lundbergovog modela koji omogućava procese prebrajanja. Procesi prebrajanja su opštiji od Poissonovog procesa pristizanja zahteva za odštetu.

Proces ukupnih iznosa zahteva za odštetu $S(t),\ \mathrm{t} \geq 0$ se definiše kao

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, & N(t) > 0 \\ 0, & N(t) = 0 \end{cases}. \tag{1.2}$$

Jasno je da se detaljnije informacije o procesu $S(t),\ \mathrm{t} \geq 0$ mogu dobiti pomoću Cramer-Lundbergovog modela. Zbog toga ćemo ovaj slučaj posmatrati kao osnovni primer na kom se može testirati najnovije uvedena metodologija. U ovom kontekstu je značajna **raspodela ukupnog (agregatnog) iznosa šteta**

$$G_t(x) = P[S(t) \leq x] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} F^{n*}(x), \quad \mathrm{x} \geq 0,\ \mathrm{t} \geq 0, \tag{1.3}$$

gde je

$$F^{n*}(x) = P\left[\sum_{i=1}^{\infty} X_i \leq x\right]$$

konvolucija n-tog reda funkcije F. U daljem tekstu, za funkciju raspodele H na intervalu $(-\infty, \infty)$ važi

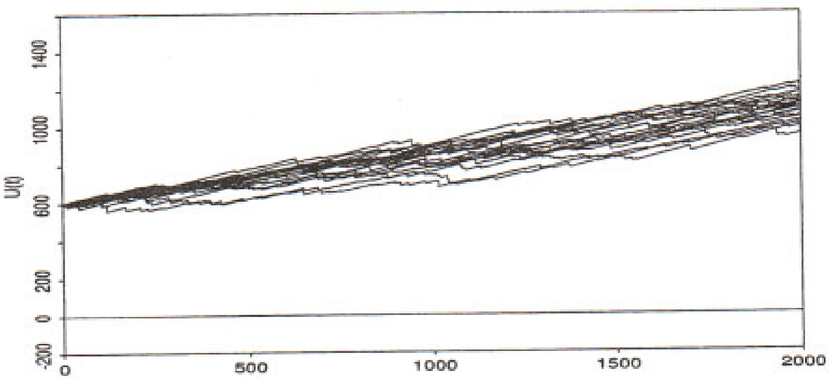
$$H^{0*}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Proces rizika $U(t)_{\mathrm{t}\geq 0}$ se definiše kao

$$U(t) = u + ct - S(t), \quad \mathrm{t} \geq 0. \tag{1.4}$$

U relaciji (1.4) $u \geq 0$ označava početni kapital, a $c > 0$ je stopa prihoda od premije. Izbor konstante c će biti razmotren kasnije u relaciji (1.7). Ovakav izbor determinističke (linearne) stope prihoda od premije u aktuarskoj matematici postavio je Buhlmann u svom radu. Na grafiku 1.1.2 date su neke realizovane vrednosti za $U(t)_{t\geq 0}$ u slučaju eksponencijalne raspodele iznosa šteta.

Grafik 1.1.2 Neke realizovane vrednosti za $U(t)_{t\geq 0}$ za eksponencijalnu raspodelu iznosa šteta:



Vreme t

U klasičnom Cramer-Lundbergovom modelu, sledeće osobine su značajne za različite probleme vezane za osiguranje.

Definicija 1.1.3 (Verovatnoća propasti):
Verovatnoća propasti u konačnom vremenskom intervalu (ili nad konačnim horizontom) $[0,T]$ se definiše kao:

$$\psi(u,T) = P\left[U(t) < 0 \quad \text{za neko } t \leq T\right], \quad 0<T<\infty, \; u \geq 0.$$

Verovatnoća propasti u beskonačnom vremenskom intervalu (ili nad beskonačnim horizontom) je:

$$\psi(u) = \psi(u,\infty), \quad u \geq 0.$$

Vremena (trenuci) propasti su definisani sa

$$\tau(T) = \inf\left\{t, \; 0 \leq t \leq T, \; U(t)<0\right\}, \quad 0<T \leq \infty,$$

gde je po dogovoru $\inf \varnothing = \infty$. Obično se koristi zapis $\tau = \tau(\infty)$ za trenutak propasti na beskonačnom horizontu.

Dolazimo do sledećeg elementarnog rezultata:

Lema 1.1.4: Za model obnavljanja važi

$$E\left[U(t)\right] = u + ct - \mu E\left[N(t)\right], \tag{1.5}$$

a za Cramer-Lundbergov model važi

$$E\left[U(t)\right] = u + ct - \lambda\mu t. \tag{1.6}$$

Dokaz:
Pošto je $E\left[U(t)\right] = u + ct - E\left[S(t)\right]$ i

$$E\left[S(t)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} E\left[S(t) \middle| N(t) = k\right] P\left[N(t) = k\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} X_i \middle| N(t) = k\right] P\left[N(t) = k\right] = \sum_{k=1}^{\infty} E\left[\sum_{i=1}^{k} X_i\right] P\left[N(t) = k\right] =$$

$$= \mu \sum_{k=1}^{\infty} k \; P\left[N(t) = k\right] = \mu E\left[N(t)\right]$$

dokazana je relacija (1.5).
Pošto za homogen Poissonov proces važi $E\left[N(t)\right] = \lambda t$, iz navedenog odmah sledi i relacija (1.6).

Ova elementarna lema daje prvi nagoveštaj za vrednost stope premije c u (1.1). Određivanje odgovarajuće stope premije u osiguranju zavisi od mere solventnosti koju želimo da optimizujemo nad datim intervalom vremena. Očigledne (ali nikako ne i jedine) nama dostupne mere su verovatnoće propasti $\psi(u,T)$ za sve $T \leq \infty$. Stopu premije c treba izabrati tako da za date u i T dobijemo malu verovatnoću propasti $\psi(u,T)$.

Prvi korak u ovom smeru bi bio zahtev $\psi(u) < 1$ za sve $u \geq 0$. Međutim, pošto je $\psi(u) = P\left[\tau < \infty\right]$, to je ekvivalentno sa $P\left[\tau = \infty\right] > 0$, tj. kompaniji je prognozirana strogo pozitivna verovatnoća opstanka u beskonačnom vremenskom intervalu. Prilagođavanja ovoj strategiji moraju biti urađena pre nego što se prave premije unovče.

Propozicija 1.1.5 (Momenti procesa obnavljanja):
Za proces obnavljanja $N(t)_{t\geq 0}$ važe sledeće relacije:
a) $E\left[N(t)\right] = \left(\lambda + o(1)\right)t, \;\; t \to \infty$
b) Neka je $\sigma_Y^2 = \operatorname{var}\left[Y\right] < \infty$.
Tada važi

$$E\left[N(t)\right] = \lambda + O(1), \;\; t \to \infty,$$
$$\operatorname{var}\left[N(t)\right] = \sigma_Y^2 \lambda^3 t + o(t), \;\; t \to \infty.$$

Iz prethodne propozicije i (1.5) neposredno sledi da u modelu obnavljanja, za $t \to \infty$ važi

$$E\left[U(t)\right] = u + (c - \lambda\mu)\; t\; (1 + o(1)) = u + (\frac{c}{\lambda\mu} - 1)\; \lambda\mu t\; (1 + o(1))$$

Zbog toga,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{E[U(t)]}{t}=c-\lambda\mu,$$

i očigledan uslov solventnosti $c-\lambda\mu>0$ implicira da $U(t)_{t\geq 0}$ ima pozitivan drift parametar za $t\to\infty$. Ovo dovodi do osnovnog uslova neto profita u modelu obnavljanja:

$$\rho=\frac{c}{\lambda\mu}-1>0. \tag{1.7}$$

Konstanta ρ se naziva koeficijent opterećenja premije i može se interpretirati kao stopa premije procesa rizika. Zaista, prihod od premije u intervalu $[0,t]$ iznosi $ct=(1+\rho)\lambda\mu t$.

Prema definiciji procesa rizika, propast se može desiti samo u trenucima propasti T_i, dakle uz početni kapital $u\geq 0$ verovatnoća propasti iznosi

$$\psi(u)=P[u+ct-S(t)<0 \text{ za neko } t]=P[u+cT_n-S(T_n)<0 \text{ za neko n}\geq 1]=$$

$$=P\left[u+\sum_{k=1}^{n}(cY_k-X_k)<0 \text{ za neko n}\geq 1\right]=P\left[\sup_{n\geq 1}\sum_{k=1}^{n}(X_k-cY_k)>u\right].$$

Zbog toga je uslov $\psi(u)<1$ ekvivalentan uslovu

$$1-\psi(u)=P\left[\sup_{n\geq 1}\sum_{k=1}^{n}(X_k-cY_k)\leq u\right]>0,\ \ \text{u}\geq 0. \tag{1.8}$$

Iz (1.8) sledi da je, u modelu obnavljanja, procena verovatnoće preživljavanja $1-\psi(u)$ svedena na proučavanje funkcije raspodele krajnjeg maksimuma procesa slučajnog hoda. Zaista, posmatrajmo niz iid slučajnih promenljivih $Z_k=X_k-cY_k,\ \ \text{k}\geq 1$ i njemu odgovarajući proces slučajnog hoda

$$R_0=0,\ \ \text{R}_\text{n}=\sum_{k=1}^{n}Z_k,\ \ \text{n}\geq 1. \tag{1.9}$$

Primetimo da je $E[Z_1]=\mu-\frac{c}{\lambda}<0$ u stvari uslov neto profita (1.7). Tada je verovatnoća preživljavanja data sa

$$1-\psi(u)=P[\sup_{n\geq 1}R_n\leq u].$$

Poznato je (iz Fellerovog rada) da verovatnoću preživljavanja možemo izraziti kao složenu geometrijsku funkciju raspodele, tj.

$$1-\psi(u)=(1-\alpha)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n H^{n*}(u) \tag{1.10}$$

za neku konstantu $\alpha\in(0,1)$ i za neku funkciju raspodele H. Kao i pre, H^{n*} označava n-tu konvoluciju od H.

U sledećem odeljku ćemo se koncentrisati na Cramer-Lundbergov model, prvo pokazujući kako izgledaju tipične procene $\psi(u)$ pod pretpostavkom malih iznosa šteta. Zatim ćemo razmatrati kakva se teorija može primeniti da se proceni verovatnoća propasti $\psi(u)$ kod velikih iznosa šteta.

1.2 CRAMER-LUNDBERGOVA PROCENA

U prethodnom poglavlju smo spomenuli opšti metod za izvođenje procene verovatnoće propasti $\psi(u)$ u modelu obnavljanja. Ako suzimo naša posmatranja na Cramer-Lundbergov model, možemo izvesti formulu za $\psi(u)$ uključujući funkciju raspodele F iznosa šteta. Zaista, za Cramer-Lundbergov model uz uslov neto profita, može se pokazati da važi

$$1-\psi(u)=\frac{\rho}{1+\rho}\sum_{n=0}^{\infty}(1+\rho)^{-n}F_I^{n*}(u)\,, \tag{1.11}$$

gde
$$F_I(x)=\frac{1}{\mu}\int_0^x \overline{F}(y)dy,\quad \mathrm{x}\geq 0 \tag{1.12}$$

označava integral repa raspodele i gde $\overline{F}(x)=1-F(x)$, $\mathrm{x}\geq 0$ označava rep funkcije raspodele F. Kasnije ćemo pokazati da je formula (1.11) ključni alat za procenu verovatnoća propasti pod pretpostavkom velikih iznosa šteta. U Teoremi 1.2.2 će takođe biti dat dokaz relacije (1.11). U produžetku će glavnu ulogu imati pojam Laplace-Stieltjesove transformacije.

Definicija 1.2.1 (Laplace-Stieltjesova transformacija):
Neka je funkcija raspodele H definisana na $(0,\infty)$, tada

$$\widehat{h}(s)=\int_0^{\infty}e^{-sx}dH(x),\quad \mathrm{s}\in \mathrm{D},$$

gde je D domen definisanosti, označava Laplace-Stieltjesovu transformaciju funkcije raspodele H.

Primedba 1.2.1.1: Zavisno od ponašanja $\overline{H}(x)$ za velike vrednosti x, može biti $D\supseteq[0,\infty)$. Generalno, $\widehat{h}(s)<\infty$ za sve $s>-\gamma$, gde je $0\leq\gamma<\infty$ apscisa konvergencije za $\widehat{h}(s)$.

Sledeće Cramer-Lundbergove procene verovatnoće propasti su fundamentalne u teoriji rizika.

Teorema 1.2.2 (Cramer-Lundbergova teorema):
Pretpostavimo da Cramer-Lundbergov model uključuje uslov neto profita $\rho>0$.
Pretpostavimo da postoji $\nu>0$ takvo da

$$\widehat{f}_I(-\nu) = \int_0^\infty e^{\nu x} dF_I(x) = \frac{c}{\lambda\mu} = 1 + \rho . \tag{1.13}$$

Tada važe sledeće relacije:
a) Za sve $u \geq 0$, važi

$$\psi(u) \leq e^{-\nu u} \tag{1.14}$$

b) Ako još važi

$$\int_0^\infty x e^{\nu x} \overline{F}(x) dx < \infty , \tag{1.15}$$

onda

$$\lim_{u \to \infty} e^{\nu u} \psi(u) = C < \infty , \tag{1.16}$$

gde je

$$C = \left[\frac{\nu}{\rho\mu} \int_0^\infty x e^{\nu x} \overline{F}(x) dx \right]^{-1} . \tag{1.17}$$

c) U slučaju eksponencijalne funkcije raspodele $F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\mu}}$, relacija (1.11) se redukuje na

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\rho} \exp(-\frac{\rho}{\mu(1+\rho)} u), \quad \text{u} \geq 0 . \tag{1.18}$$

Primedba 1.2.1.2: Iz definicije Laplace-Stieltjesove transformacije neposredno sledi da, kad god postoji ν u (1.13), ono je jedinstveno određeno.

Primedba 1.2.1.3: Iako se gornji rezultati mogu pronaći u svakoj jednostavnoj knjizi iz oblasti teorije rizika, korisno je prokomentarisati dokaz pod b) da bismo ukazali kako nastaju teorijski argumenti obnavljanja.
Zbog velikog značaja za osiguranje, rešenje ν za (1.13) je dobilo poseban naziv Lundbergov eksponent.

Definicija 1.2.3 (Lundbergov eksponent):
Za dat iznos štete koji ima funkciju raspodele F, konstanta $\nu > 0$ koja zadovoljava $\int_0^\infty e^{\nu x} \overline{F}(x) dx = \frac{c}{\lambda}$ se naziva Lundbergov eksponent ili koeficijent prilagođavanja posmatranog procesa rizika.

Definicija 1.2.4 (dualna definicija Lundbergovog eksponenta):
Lundbergov eksponent ν je najmanje pozitivno rešenje jednačine

$$1 + \rho = \int_0^\infty e^{\nu x} f_e(x) dx = \frac{M_X(\nu) - 1}{\mu\nu} ,$$

gde je $f_e(x)=\dfrac{1-F_X(x)}{\mu}$ ekvilibrijumska gustina, a

$$M_X(s)=E\left[e^{sX}\right]=\int_0^\infty e^{sX}f_X(x)dx$$

funkcija generatrisa momenata.

Dokaz Teoreme 1.2.2 a):
Kao što znamo, $\psi(u)$ je verovatnoća propasti u beskonačnom vremenskom intervalu. Definisaćemo niz verovatnoća $\left(\psi_n(u)\right)_{n\in N_0}$ gde je $\psi_n(u)$ verovatnoća propasti pre ili pri n-tom pristiglom zahtevu za odštetu. Pokazaćemo indukcijom po n da za svako $n\in N_0$ važi $\psi_n(u)\le e^{-\nu u}$:

- $n=0$, $\psi_0(u)=0<e^{-\nu u}$;
- pretpostavljamo da $\psi_k(u)\le e^{-\nu u}$ važi za sve $k=1,...,n$
- $k=n+1$, pokazujemo da važi $\psi_{n+1}(u)\le e^{-\nu u}$:

Pri prvom zahtevu za odštetu se dešava propast ako važi

$$X>u+cT,$$

tj. ako je iznos štete X veći od zbira ukupnog kapitala u akumuliranog do trenutka T i ukupne premije cT isplaćene do trenutka T po stopi c, a do propasti ne dolazi ako važi $0<X\le u+cT$.

$\psi_{n+1}(u)=P[X>u+ct]\cdot$ verovatnoća propasti ako se propast desi pri prvom zahtevu+
$+P[0<X\le u+ct]\cdot$ verovatnoća propasti ako se propast desi pri 2.,3. ili n-tom zahtevu.

Tako imamo

$$\psi_{n+1}(u)=\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\int_{u+ct}^\infty f_X(x)\cdot 1\,dxdt+\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\int_0^{u+ct} f_X(x)\psi_n(u+ct-x)dxdt,$$

gde je f_X funkcija gustine za slučajnu promenljivu X iznosa štete.
U prvom sabirku je $x\in\left[u+ct,\infty\right)$, tj. $u+ct-x<0$, pa važi $1=e^0\le e^{-\nu(u+ct-x)}$.
U drugom sabirku, po indukcijskoj hipotezi, imamo $\psi_n(u+ct-x)\le e^{-\nu(u+ct-x)}$.
Sada dobijamo

$$\psi_{n+1}(u)\le\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\left[\int_{u+ct}^\infty f_X(x)\,e^{-\nu(u+ct-x)}dxdt+\int_0^{u+ct} f_X(x)e^{-\nu(u+ct-x)}dxdt\right]=$$

$$\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}e^{-\nu(u+ct-x)}\left[\int_{u+ct}^\infty f_X(x)dxdt+\int_0^{u+ct} f_X(x)dxdt\right]=\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}e^{-\nu(u+ct-x)}\left[\int_0^\infty f_X(x)dx\right]dt.$$

Podsetimo se definicije funkcije generatrise momenata $M_X(s)$ iz Definicije 1.2.4.
Važi da je

$$\psi_{n+1}(u) \le e^{-\nu u}\int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+c\nu)t}dt\cdot\int_0^\infty e^{\nu x}f_X(x)dx \;= e^{-\nu u}\int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+c\nu)t}dt\cdot M_X(\nu),$$

gde je $c = \lambda(1+\theta)\nu = M_X(\nu)$.

Sada sledi

$$\psi_{n+1}(u) \le e^{-\nu u}\int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+c\nu)t}dt\cdot\int_0^\infty e^{\nu x}f_X(x)dx \;= e^{-\nu u}\int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+c\nu)t}dt\cdot M_X(\nu),$$

tj. $$\psi_{n+1}(u) \le e^{-\nu u}\left[\int_0^\infty \lambda M_X(\nu)\cdot e^{-\lambda M_X(\nu)t}dt\right] = e^{-\nu u},$$

pošto je $\int_0^\infty \lambda M_X(\nu)\cdot e^{-\lambda M_X(\nu)t}dt$ integral funkcije gustine za eksponencijalnu

$\mathcal{E}\left(\lambda M_X(\nu)\right)$ raspodelu, pa važi $\int_0^\infty \lambda M_X(\nu)\cdot e^{-\lambda M_X(\nu)t}dt = 1$.

Konačno, dobijamo $\psi_{n+1}(u) \le e^{-\nu u}$, čime je indukcija po n završena.

Propast procesa u beskonačnom vremenskom intervalu će se dogoditi ako se dogodi pri bilo kom zahtevu za odštetu, pa možemo koristiti graničnu vrednost

$$\psi(u) = \lim_{n\to\infty}\psi_n(u).$$

Sada dobijamo

$$\psi(u) = \lim_{n\to\infty}\psi_n(u) \le \lim_{n\to\infty} e^{-\nu u} = e^{-\nu u},$$

čime je dokaz za a) završen.

Dokaz Teoreme 1.2.2 b):

Označimo sa $\delta(u) = 1-\psi(u)$. Podsetimo se iz (1.8) da se $\delta(u)$ može izraziti preko procesa slučajnog hoda generisanog sa $(X_i - cY_i)$. Tada

$$\delta(u) = P\left[S(t)-ct \le u \;\text{ za sve } t>0\right] = P\left[\sum_{k=1}^{n}(X_k - cY_k) \le u \;\text{ za sve n} \ge 1\right] =$$

$$= P\left[\sum_{k=2}^{n}(X_k - cY_k) \le u + cY_1 - X_1 \text{ za sve n} \ge 2,\; \mathrm{X}_1 - cY_1 \le u\right] =$$

$$= P\left[S'(t) - ct \le u + cY_1 - X_1 \;\; za\ sve\ t>0,\;\; X_1 \text{-} cY_1 \le u\right],$$

gde je S' kopija procesa S nezavisna od S.

Tako, dobijamo

$$\delta(u) = E\left[P\left[S'(t)\text{-}ct \le u + cY_1 \text{-} X_1 \;\; za\ sve\ t>0,\; X_1 \text{-} cY_1 \le u \middle| Y_1, X_1\right]\right] =$$

$$= \int_0^\infty\int_0^{u+cs} P\left[S'(t) - ct \le u + cs - x \;\text{ za sve } t>0\right] dF(x)\lambda e^{-\lambda s}ds =$$

$$= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda s}\int_0^{u+cs}\delta(u+cs-x)\; dF(x)ds = \frac{\lambda}{c}e^{\frac{\lambda u}{c}}\int_u^\infty e^{-\frac{\lambda z}{c}}\left[\int_0^z \delta(z-x)\; dF(x)\right]dz, \tag{1.19}$$

gde smo koristili smenu $u + cs = z$.

To pokazuje da je δ apsolutno-neprekidna sa gustinom

$$\delta'(u) = \frac{\lambda}{c}\delta(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u-x)dF(x)\,. \tag{1.20}$$

Iz ove jednačine za $1-\psi(u)$ se može izvesti celokupna teorija propasti klasičnog Cramer-Lundbergovog modela. Ključni momenat je da je integral u (1.20) tipa konvolucije; to otvara vrata teoriji obnavljanja. Integralimo (1.20) na intervalu $(0,t)$ u odnosu na Lebesguevu meru da bismo dobili

$$\delta(t) = \delta(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^t \delta(u)du - \frac{\lambda}{c}\int_0^t\int_0^u \delta(u-x)dF(x)du =$$

$$= \delta(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^t \delta(t-u)du - \frac{\lambda}{c}\int_0^t \delta(t-x)F(x)dx\,.$$

Konačno, dolazimo do rešenja

$$\delta(t) = \delta(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^t \delta(t-x)\overline{F}(x)dx\,. \tag{1.21}$$

Primetimo da je vrednost $\delta(0)$ još uvek nepoznata. Svakako, kad $t \to \infty$ u (1.21), i korišćenjem uslova neto profita (koji iznosi $\delta(\infty) = 1-\psi(\infty) = 1$), dobijamo $1 = \delta(0) + \frac{\lambda\mu}{c}$, pa je $\delta(0) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c} = \frac{\rho}{1+\rho}$. Iz toga sledi

$$\delta(t) = \frac{\rho}{1+\rho} + \frac{1}{1+\rho}\int_0^t \delta(t-x)\, dF_I(x)\,, \tag{1.22}$$

gde je u (1.12) definisan integral repa raspodele F_I. Primetimo da, iz (1.22) korišćenjem Laplace-Stieltjesove transformacije direktno sledi formula (1.11). Jednačina (1.22) izgleda kao jednačina obnavljanja; postoji, doduše, jedna ključna razlika i to tačno u onom delu dokaza gde je uveden uslov malih iznosa šteta tipa (1.13).

Prvo, preformulišimo (1.22) kao što sledi koristeći $\psi(u) = 1-\delta(u)$, stavljajući da

$$\alpha = \frac{1}{1+\rho} < 1\,,$$

$$\psi(u) = \alpha\overline{F}_I(u) + \int_0^u \psi(u-x)\ \mathrm{d}(\alpha\overline{F}_I(x))\,. \tag{1.23}$$

Ovu jednačinu treba da pretvorimo u standardnu jednačinu obnavljanja. Dokaz ćemo nastaviti nakon kratkog uvoda u teoriju obnavljanja.

Definicija 1.2.5 (Funkcija obnavljanja):

Neka je $Y_1, Y_2, \ldots$ niz pozitivnih iid slučajnih promenljivih koje predstavljaju vremenske intervale između pojedinačnih obnavljanja i imaju nedefektivnu funkciju raspodele F, tj. za njih važi

$$F(0) < 1 \text{ i } E[Y_1] = \frac{1}{\lambda} \leq \infty .$$

Neka je, dalje,

$$N(t) = card\{n \geq 1 : Y_1 + Y_2 + ... + Y_n \leq t\}$$

proces obnavljanja, gde $N(t)$ predstavlja broj obnavljanja stanja procesa pre vremenskog trenutka t. Funkcija

$$V(t) = E[N(t)]$$

je funkcija obnavljanja i predstavlja očekivani broj obnavljanja procesa u vremenskom intervalu $[0, t]$. Za nju važi

$$\lim_{t \to \infty} \frac{V(t)}{t} = \lambda = \frac{1}{E[Y_1]} .$$

Teorema 1.2.6 (Elementarne osobine funkcije obnavljanja):
a) Funkcija V je neopadajuća i neprekidna s desne strane,

b) $V(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t) < \infty$ za sve $t \geq 0$,

c) $V(t)$ zadovoljava **jednačinu obnavljanja**[3] datu na sledeći način:

$$V(t) = F(t) + \int_0^t V(t-x) dF(x), \quad t \geq 0 .$$

Teorema 1.2.7 (Blackwellova teorema obnavljanja):
Ako je funkcija raspodele F ne-mrežasta, onda za sve $h > 0$ važi

$$\lim_{t \to \infty} \left(V(t+h) - V(t) \right) = \lambda h .$$

Teorema 1.2.8 (Smithova ključna teorema obnavljanja):
Neka važi $\frac{1}{\lambda} = E[Y_1] < \infty$ i neka je $V(t) = E[N(t)]$ funkcija obnavljanja asocirana sa ne-mrežastom funkcijom raspodele F.

a) Ako je h direktno Riemann integrabilna, onda

$$\lim_{t \to \infty} \int_0^t h(t-x) dV(x) = \lambda \int_0^{\infty} h(x) dx .$$

b) Posmatrajmo jednačinu obnavljanja oblika

$$g(t) = h(t) + \int_0^t g(t-x) dF(x), \ t \geq 0,$$

gde je h lokalno ograničena. Tada je jedinstveno rešenje jednačine dato sa

[3] Mora se jako oprezno primenjivati Lebesgue-Stieltjesovu integraciju nad konačnim intervalima, jer funkcije raspodela mogu imati nagle skokove u krajnjim tačkama intervala.

$$g(t) = \int_0^t h(t-x)dV(x)\,,\ t \geq 0\,.$$

Štaviše, ako je h direktno Riemann integrabilna, onda

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = \lambda \int_0^\infty h(x)dx\,.$$

Nastavljamo dokaz Teoreme 1.2.2 b):

Da bismo jednačinu (1.23) pretvorili u standardnu jednačinu obnavljanja datu u Teoremi 1.2.6 b), definišemo Esscherovu transformisanu funkciju raspodele $F_{I,\nu}$.

$$F_{I,\nu}(x) = e^{\nu x} d(\alpha F_I(x))\,,$$

gde je ν eksponent iz uslova (1.13). Koristeći ovaj zapis, relacija (1.23) postaje

$$e^{\nu u}\psi(u) = \alpha e^{\nu u}\overline{F}_I(u) + \int_0^u e^{\nu(u-x)}\psi(u-x)\ \mathrm{d}(\alpha \mathrm{F}_{\mathrm{I},\nu}(\mathrm{x}))\,,$$

koja je, prema uslovu (1.13), standardna jednačina obnavljanja. Neposredna primena ključne teoreme obanavljanja, (Teoreme 1.2.6 b)) daje

$$\lim_{u\to\infty} e^{\nu u}\psi(u) = \left[\frac{\nu}{\rho\mu}\int_0^\infty x e^{\nu x}\overline{F}(x)dx\right]^{-1},$$

što je tačno (1.16)-(1.17). Uslovi potrebni za primenu Teoreme 1.2.6 se jednostavno proveravaju. Parcijalnom integracijom, i koristeći (1.15), dobijamo

$$\alpha e^{\nu u}\overline{F}_I(u) = \int_u^\infty e^{\nu x} d(\alpha F_I(x)) - \nu \int_u^\infty e^{\nu x}\alpha \overline{F}_I(x)dx\,.$$

Pošto je $\alpha e^{\nu u}\overline{F}_I(u)$ razlika dveju nerastućih Riemann-integrabilnih funkcija, ona je i sama Riemann-integrabilna. Štaviše, važi

$$\int_0^\infty \alpha e^{\nu u}\overline{F}_I(u)du = \alpha\frac{1-\widehat{f}_I(-\nu)}{-\nu} = \frac{\rho}{\nu(1+\rho)} < \infty \quad \text{i}$$

$$\int_0^\infty x dF_{I,\nu}(x) = \frac{1}{\mu(1+\rho)}\int_0^\infty x e^{\nu x}\overline{F}(x)dx < \infty$$

prema (1.15). Time je završen dokaz pod b).

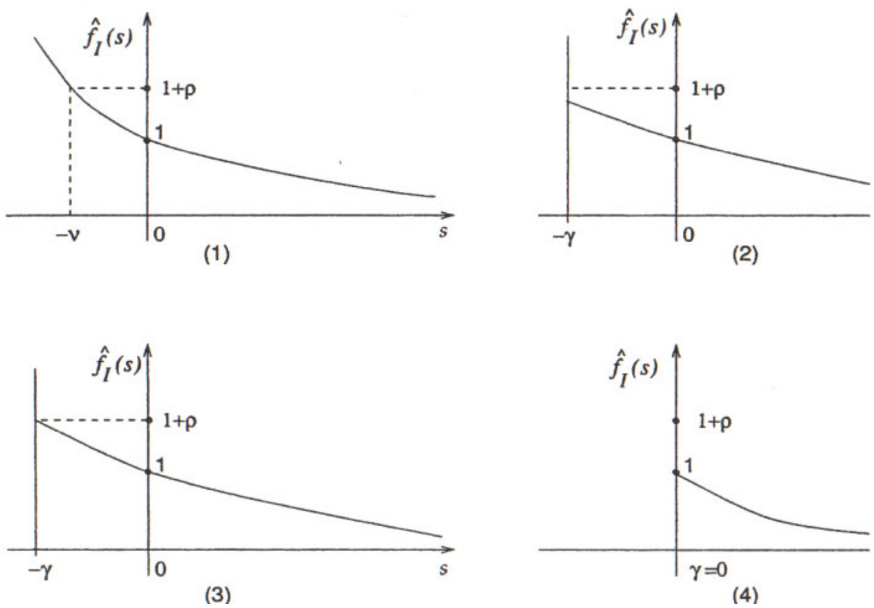
Što je mnogo značajnije, želimo da objasnimo zašto uslov (1.13) mora biti uveden. Vraćamo se na (1.13). Očigledno, postojanje konstante ν implicira da $\widehat{f}_I(s)$ mora postojati u nepraznoj okolini nule, a to implicira da su rep integrala funkcije raspodele $\overline{F}_I$ iznosa štete, kao i rep $\overline{F}$, eksponencijalno ograničeni. Zaista, iz Markove nejednakosti sledi

$$\overline{F}(x) \leq e^{-\nu x} E\left[e^{\nu X_1}\right],\ \ \mathrm{x}>0\,.$$

Ova nejednakost znači da se velike štete veoma retko javljaju (sa eksponencilajno malim verovatnoćama). Iz tog razloga se (1.13) često zove uslov malih iznosa šteta.

Cramer-Lundbergov uslov se lako može grafički prokomentarisati. Postojanje konstante ν u (1.13) veoma zavisi od leve apscise konvergecije $-\gamma$ za funkciju $\widehat{f}_I$. Mogu se desiti razne situacije, kao što je prikazano na Grafiku 1.2.9.

Grafik 1.2.9 (Specijalni slučajevi pod Cramer-Lundbergovim uslovima):



Najčešći slučaj, potpuno pokriven Teoremom 1.2.2, odgovara Grafiku 1.2.9 (1). Tipične funkcije raspodela i funkcije gustina iznosa štete pod datim uslovima su date u Tabeli 1.2.10.

Tabela 1.2.10: Funkcije raspodela malih iznosa šteta. Sve funkcije raspodela imaju nosač $x \in (0, \infty)$.

Naziv raspodele	Rep $\bar{F}$ ili gustina f	Parametri
Eksponencijalna	$\bar{F}(x) = e^{-\lambda x}$	$\lambda > 0$
Gamma	$f(x) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$	$\alpha, \beta > 0$
Weibullova	$\bar{F}(x) = e^{-cx^{\tau}}$	$c > 0, \tau \geq 1$
Normalna odsečena	$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{\frac{x^2}{2}}$	—
Bilo koja raspodela sa ograničenim nosačem		

Nećemo detaljno razmatrati srednje slučajeve grafika 1.2.9 (2) i (3) nevažne za primene. Ako se brzim pregledom literature zapitamo: koje raspodele u stvari odgovaraju podacima o veličini šteta, onda ćemo najčešće pronaći neke raspodele čije su funkcije raspodele nabrojane u Tabeli 1.2.11.

Tabela 1.2.11 predstavlja funkcije raspodela velikih iznosa šteta. Sve funkcije raspodela imaju nosač $(0,\infty)$, osim Benktanderove i gama-logaritamske raspodele koje imaju nosač $(1,\infty)$.

Tabela 1.2.11

Naziv raspodele	Rep $\bar{F}$ ili gustina f	Parametri
Lognormalna	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\mu\in R$, $\sigma>0$
Paretova	$\bar{F}(x)=\left(\frac{k}{k+x}\right)^{\alpha}$	$\alpha,k>0$
Burrova	$\bar{F}(x)=\left(\frac{k}{k+x^{\tau}}\right)^{\alpha}$	$\alpha,k,\tau>0$
Benktanderova tipa I	$\bar{F}(x)=(1+2\frac{\beta}{\alpha}\ln x)e^{-\beta(\ln x)^2-(\alpha+1)\ln x}$	$\alpha,\beta>0$
Benktanderova tipa II	$\bar{F}(x)=e^{\frac{\alpha}{\beta}}x^{-(1-\beta)}e^{-\frac{\alpha x^{\beta}}{\beta}}$	$\alpha>0$ $\beta\in(0,1)$
Weibullova	$\bar{F}(x)=e^{-cx^{\tau}}$	$c>0$ $\tau\in(0,1)$
gama-logaritamska	$f(x)=\frac{\alpha^{\beta}}{\Gamma(\beta)}(\ln x)^{\beta-1}x^{-\alpha-1}$	$\alpha,\beta>0$
Odsečena α-stabilna	$\bar{F}(x)=P\left[\lvert X\rvert>x\right]$, gde je X α-stabilna slučajna promenljiva	$\alpha\in(1,2)$

Sve funkcije raspodele iz Tabele 1.2.10 omogućavaju konstruisanje Lundbergovog eksponenta. Za funkcije iz Tabele 1.2.11 Lundbergov eksponent ne postoji. Zaista, slučaj (4) na Grafiku 1.2.9 je primenljiv. Iz tog razloga smo istakli dve tabele, sa "malim" i "velikim" iznosima šteta, respektivno. Još preciznije razmatranje ovih raspodela sledi u Odeljku 3.2.1.

Radi dokazivanja, pretpostavimo da imamo portfolio koji prati Cramer-Lundbergov model za koji se individualni iznosi šteta mogu modelirati pomoću Paretove funkcije raspodele.

$$\bar{F}(x)=(1+x)^{-\alpha},\quad x\geq 0,\quad \alpha>1.$$

Tada sledi da $E\left[X_1\right]=\int_0^\infty (1+x)^{-\alpha}dx=(\alpha-1)^{-1}$ i uslov neto profita daju

$$\rho=\frac{c(\alpha-1)}{\lambda}-1>0\,.$$

Postavlja se pitanje: da li možemo odrediti Cramer-Lundbergovu procenu u ovom slučaju za datu stopu premije c koja ispunjava gornji uslov? Odgovor na ovo pitanje je odričan. Zaista, u ovom slučaju za svako $\nu>0$ važi

$$\int_0^\infty e^{\nu x}(1+x)^{-\alpha}dx=\infty\,,$$

tj. u ovom slučaju ne postoji eksponencijalna Cramer-Lundbergova procena. Mi smo pod okolnostima Grafika 1.2.9 (4), nula je esencijalni singularitet funkcije $\widehat{f}_I$, tj. $\widehat{f}_I(-\varepsilon)=\infty$ za sve $\varepsilon>0$. Vidimo da Paretova raspodela narušava Cramer-Lundbergov uslov (1.13), tako da se Teorema 1.2.2 ne može primeniti na nju. Međutim, ispostavlja se da se većina najindividualnih podataka o iznosima šteta modelira pomoću ovakvih funkcija raspodela.

2. REGULARNA VARIJACIJA

Teorija o regularno varirajućim funkcijama je odgovarajući matematički alat za analize pojava raspodela sa debelim repom. U ovom poglavlju pretpostavljamo da sve slučajne promenljive imaju pozitivne vrednosti i da imaju beskonačan nosač $(0,\infty)$, tj. $F(x)<1$ za sve $x>0$. Sa R_α označavamo klasu regularno varirajućih funkcija sa indeksom $\alpha \in R$. Slučaj $\alpha = 0$ odgovara takozvanim sporo varirajućim funkcijama.

2.1 UVOD U TEORIJU REGULARNE VARIJACIJE

U ovom poglavlju ćemo navesti neke značajne rezultate počevši od uniformne konvergencije, apsolutne neprekidnosti i osobina monotonih funkcija.

Definicija 2.1.1 (Uniformna konvergencija):
Ako su $\{f_n,\ n\geq 0\}$ realne funkcije jedne realne promenljive, onda niz funkcija $(f_n)_{n\in N}$ uniformno konvergira ka f_0 nad $A\subset R$ ako

$$\sup_{x\in A}\left|f_0(x)-f_n(x)\right|\longrightarrow 0,\ \ n\to\infty\,. \tag{2.1}$$

Za funkcije realne promenljive izraz lokalna uniformna konvergencija znači da (2.1) važi na svakom kompaktnom skupu A.

Veoma korisna činjenica je da monotone funkcije koje tačkasto konvergiraju ka neprekidnoj granici u stvari konvergiraju lokalno uniformno.

Propozicija 2.1.2: Neka su $\{U_n,\ n\geq 0\}$ neopadajuće realne funkcije jedne realne promenljive i neka je U_0 neprekidna funkcija. Ako je za sve $x\in R$ ispunjeno

$$U_n(x)\to U_0(x),\ \ n\to\infty\,,$$

onda $U_n \to U_0$ lokalno uniformno, tj. za sve $a<b$ važi

$$\sup_{x\in[a,b]}\left|U_n(x)-U_0(x)\right|\longrightarrow 0\,.$$

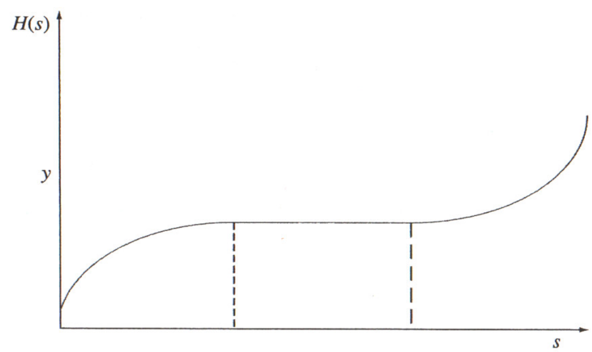
Definicija 2.1.3 (Apsolutna neprekidnost): Merljiva funkcija $F:R\to R$ je apsolutno neprekidna ako njen prvi izvod postoji u klasi lokalno-integrabilnih funkcija, tj. ako postoji $f:R\to R$ tako da važi $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ (za fisksirano $a\in\mathbb{R}$).

Inverzne funkcije monotonih funkcija

Neka je $H: R \mapsto (a,b)$ neopadajuća funkcija realne promenljive sa vrednostima iz intervala (a,b), gde je $-\infty \le a < b \le \infty$. Koristeći dogovor da infimum praznog skupa iznosi $+\infty$, definišemo inverznu funkciju za H koja je neprekidna s leve strane, $H^{-1}:(a,b) \mapsto R$, kao

$$H^{-1}(y) = \inf\{s \in R: \ H(s) \ge y\}.$$

Grafik 2.1.4 Vrednost inverzne funkcije u tački y je na dnu leve isprekidane vertikale



U slučaju da je funkcija H neprekidna s desne strane, imamo sledeće željene osobine:

$$A(y) := \{s : H(s) \ge y\} \text{ je zatvoren,} \tag{2.2}$$

$$H(H^{-1}(y)) \ge y, \tag{2.3}$$

$$H^{-1}(y) \le t \text{ ako i samo ako } y \le H(t). \tag{2.4}$$

Konvergencija monotonih funkcija

Za bilo koju funkciju $H: R \to R$ definišimo skup

$$C(H) = \{x \in R, \text{ H ima konačnu vrednost i neprekidna je u x }\}.$$

Niz $(H_n)_{n\ge 0}$ neopadajućih funkcija na R slabo konvergira ka H_0 kad $n \to \infty$ ako važi da

$$H_n(x) \to H_0(x)$$

za sve $x \in C(H_0)$. To označavamo sa $H_n \to H_0$. Osim slabe konvergencije monotonih funkcija, nećemo se baviti drugim oblicima konvergencije. Ako su $(F_n)_{n\ge 0}$ funkcije raspodela verovatnoće na R, onda su kompletna konvergencija i slaba konvergencija ekvivalentne. Ako su $(X_n)_{n\ge 0}$ slučajne promenljive i ako X_n imaju funkcije raspodela F_n, $n \ge 0$, onda $X_n \to X_0$ znači $F_n \to F_0$.

Propozicija 2.1.5: Ako su $(H_n)_{n\geq 0}$ neopadajuće funkcije realne promenljive sa vrednostima iz intervala (a,b) i ako $H_n \to H_0$, onda i $H_n^{-1} \to H_0^{-1}$ u smislu da za $t \in (a,b) \bigcap C(H_0^{-1})$ važi $H_n^{-1}(t) \to H_0^{-1}(t)$.

Cauchyjeva funkcionalna jednačina

Neka je $k(x)$, $x \in R$, funkcija koja zadovoljava

$$k(x+y) = k(x) + k(y), \quad x, y \in R.$$

Ako je funkcija k merljiva funkcija i ograničena nad skupovima koji imaju pozitivnu meru, onda je $k(x) = cx$ za neko $c \in R$.

2.2 REGULARNA VARIJACIJA: DEFINICIJA I PRVE OSOBINE

Teorija regularno varirajućih funkcija je neophodan analitički alat za proučavanje raspodela sa debelim repom. U ovom odeljku ćemo uvesti pojmove regularne varijacije i spore varijacije merljivih funkcija i dati definiciju maksimalnog domena atrakcije. Izvešćemo sledeći zaključak: Funkcija raspodele verovatnoće F pripada maksimalnom domenu atrakcije Frechetove raspodele ekstremnih vrednosti ako i samo ako je rep funkcije raspodele F regularno varirajući sa eksponentom $-\alpha$. U Fisher-Tippettovoj teoremi ćemo istaći tri značajne vrste raspodela ekstremnih vrednosti: Frechetovu, Weibullovu i Gumbelovu.

Sada ćemo se pozabaviti samo realnim funkcijama jedne realne promenljive.

Definicija 2.2.1: Merljiva funkcija $U : R_+ \to R_+$ je regularno varirajuća u ∞ sa indeksom $\alpha \in R$ (u zapisu $U \in R_\alpha$), ako za $x > 0$ važi

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(tx)}{U(t)} = x^\alpha.$$

Indeks α nazivamo eksponent varijacije.

Ako $\alpha = 0$, onda je U sporo varirajuća funkcija. Sporo varirajuće funkcije se uglavnom obeležavaju sa $L(x)$. Ako $U \in R_\alpha$, onda $\frac{U(x)}{x^\alpha} \in R_0$ i ako stavimo

$$L(x) = \frac{U(x)}{x^\alpha}, \quad x > 0,$$

vidimo da se α-varirajuća funkcija uvek može predstaviti u obliku $x^\alpha L(x)$.

Grubo govoreći, regularno varirajuće funkcije su funkcije koje se asimptotski ponašaju kao stepene funkcije.

Primedba 2.2.1.1: Definisali smo regularnu varijaciju u beskonačnosti, tj. za $t \to \infty$. Slično možemo definisati regularnu varijaciju u nuli zamenom $t \to \infty$ sa $t \to 0$, ili u bilo kojoj pozitivnoj tački a. Zaista, regularna varijacija funkcije U u tački $a > 0$ se definiše kao regularna varijacija funkcije $U_a(x) = U\left(a - \frac{1}{x}\right)$ u beskonačnosti.

U slučaju da treba napraviti razliku, možemo govoriti o regularnoj varijaciji u fiksnoj tački a. Kadgod je na osnovu konteksta jasno značenje, koristićemo pojam regularna varijacija.

Primedba 2.2.1.2: Uslov $\lim_{t\to\infty} \frac{U(tx)}{U(t)} = x^{\alpha}, \;\; x > 0$ se može oslabiti na više načina, najvažnije je specifikovati samo da granična vrednost postoji i da je pozitivna, ne mora se zahtevati da ima funkcionalni oblik x^{α}. Zaista, ako u navedenom uslovu pretpostavimo da granična vrednost postoji za sve $x > 0$ i da je jednaka $\chi(x)$, onda direktno sledi da

$$\chi(sx) = \chi(s)\chi(x), \;\; x > 0,$$

prema tome, $\chi(x) = x^{\alpha}$ za neko $\alpha \in R$.

Primedba 2.2.1.3: Tipični primeri sporo varirajućih funkcija su pozitivne konstante ili funkcije koje konvergiraju ka pozitivnoj konstanti, logaritmi i iterativni logaritmi.

Primer 2.2.2: Funkcija x^{α} je kanonička α-varirajuća funkcija. Funkcije

$$\ln(1+x), \;\; \ln(\ln(e+x)), \text{ kao i } \exp\left\{(\ln x)^{\beta}\right\}, \;\; \beta \in (0,1)$$

su sporo varirajuće.
Bilo koja funkcija U za koju granična vrednost

$$\lim_{x\to\infty} U(x) =: U(\infty)$$

postoji kao konačna i pozitivna vrednost, je sporo varirajuća.
Sledeće funkcije nisu regularno varirajuće:

$$e^{x}, \;\; \sin(x+2).$$

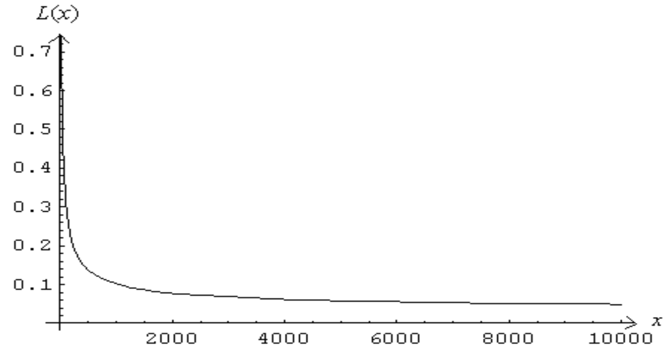
Primetimo da je $[\log x]$ sporo varirajuća, ali da $e^{[\log x]}$ nije regularno varirajuća, gde je $[\;\;]$ oznaka za najveći ceo deo broja.

Možda je interesantno primetiti da sporo varirajuća funkcija L može imati beskonačne oscilacije i da se može desiti da

$$\liminf_{x\to\infty} L(x) = 0 \text{ i } \limsup_{x\to\infty} L(x) = \infty.$$

Dat je primer za ovakvu funkciju L i njen grafik:

$$L(x)=\exp\left\{(\ln(1+x))^{\frac{1}{2}}\cos\left(\ln(1+x))^{\frac{1}{2}}\right)\right\},$$



U terminima verovatnoća, govorimo o raspodelama čiji repovi su regularno varirajući. Dajemo neke primere:

$$1-F(x)=x^{-\alpha},\quad x\geq 1,\quad \alpha>0$$

i raspodela ekstremnih vrednosti

$$\Phi_\alpha(x)=\exp\left\{-x^{-\alpha}\right\},\ x\geq 0.$$

Raspodela $\Phi_\alpha(x)$ ima osobinu $1-\Phi_\alpha(x)\sim x^{-\alpha},\ x\to\infty$.

Cauchyjeva funkcija gustine $f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$ ima funkciju raspodele F sa osobinom $1-F(x)\sim(\pi x)^{-1}$.

Ako je $\mathcal{N}(x)$ funkcija standardne normalne raspodele, onda ni $1-\mathcal{N}(x)$, ni rep Gumbelove raspodele ekstremnih vrednosti $1-\exp\left\{-e^{-x}\right\}$ nisu regularno varirajući.

Propozicija 2.2.3:

a) Merljiva funkcija $U:R_+\to R_+$ je regularno varirajuća ako postoji funkcija h takva da za sve $x>0$ važi $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{U(tx)}{U(t)}=h(x)$. U tom slučaju je $h(x)=x^\alpha$ za neko $\alpha\in R$ i $U\in R_\alpha$.

b) Monotona funkcija $U:R_+\to R_+$ je regularno varirajuća ako postoje dva niza pozitivnih brojeva $(\lambda_n)_{n\in N}$, $(b_n)_{n\in N}$ koji zadovoljavaju

$$b_n\to\infty,\qquad \lambda_n\sim\lambda_{n+1},\quad n\to\infty \tag{2.5}$$

i za sve $x>0$ granična vrednost

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n U(b_n x)=:\chi(x) \tag{2.6}$$

postoji i konačna je. U tom slučaju je $\dfrac{\chi(x)}{\chi(1)}=x^\alpha$ i $U\in R_\alpha$ za neko $\alpha\in R$.

Često ćemo se pozivati na (2.6) kao na sekvencijalni oblik regularne varijacije. Ona je najkorisnija za raspodele verovatnoća. Tipično, U će biti rep raspodele, $\lambda_n = n$, a b_n će biti kvantili te raspodele.

Dokaz: a) Funkcija h je merljiva, jer je granica familije merljivih funkcija. Za $x > 0,\ y > 0$ važi

$$\frac{U(txy)}{U(t)} = \frac{U(txy)}{U(tx)} \cdot \frac{U(tx)}{U(t)}$$

i za $t \to \infty$ dobijamo $h(xy) = h(x)\, h(y)$. Funkcija H zadovoljava Hamelovu jednačinu koja se smenom promenljive može prevesti u Cauchyjevu jednačinu. Zbog toga, oblik funkcije h je $h(x) = x^{\alpha}$ za neko $\alpha \in R$.

b) Zbog jednostavnosti, pretpostavimo da je U neopadajuća. Neka važe (2.5) i (2.6), pokazaćemo da je funkcija U regularno varirajuća. Pošto $b_n \to \infty$, za svako t postoji $n(t)$ koje ima konačnu vrednost i definisano je sa

$$n(t) = \inf\left\{ m \in N:\ b_{m+1} > t \right\}$$

tako da važi

$$b_{n(t)} \le t \le b_{n(t)+1}.$$

Zbog monotonosti funkcije, za $x > 0$ važi

$$\left(\frac{\lambda_{n(t)+1}}{\lambda_{n(t)}}\right)\left(\frac{\lambda_{n(t)} U\left(b_{n(t)} x\right)}{\lambda_{n(t)+1} U\left(b_{n(t)+1}\right)}\right) \le \frac{U(tx)}{U(t)} \le \left(\frac{\lambda_{n(t)}}{\lambda_{n(t)+1}}\right)\left(\frac{\lambda_{n(t)+1} U\left(b_{n(t)+1} x\right)}{\lambda_{n(t)} U\left(b_{n(t)}\right)}\right).$$

Neka sada $t \to \infty$, koristimo (2.5) i (2.6) i dobijamo $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{U(tx)}{U(t)} = 1 \cdot \frac{\chi(x)}{\chi(1)}$. Sada iz a) sledi regularna varijacija.

Primedba 2.2.3.1: Propozicija 2.2.3 b) će važiti i ako pretpostavimo da je (2.6) ispunjeno na gustom skupu. To je značajno u slučaju kada je U neopadajuća funkcija i $\lambda_n U(b_n x)$ slabo konvergira.

2.2.1 Maksimalni domen atrakcije

Neka su $\left(X_n\right)_{n\ge 0}$ iid slučajne promenljive sa funkcijom raspodele $F(x)$. Njihova ekstremna vrednost je

$$M_n = \max\left\{X_1, ..., X_n\right\}.$$

Jedna od raspodela ekstremnih vrednosti je Frechetova raspodela

$$\Phi_{\alpha}(x) := \exp\left\{-x^{-\alpha}\right\},\ x \ge 0,\ \alpha > 0.$$

Kakve uslove treba postaviti na F, tzv. uslove domena atrakcije, da bi postojalo $b_n > 0$ tako da

$$P\left[\frac{M_n}{b_n}\le x\right]=F^n(b_nx)\to\Phi_\alpha(x) \tag{2.7}$$

slabo konvergira? Kako treba okarakterisati normalizujući niz $(b_n)_{n\in N}$?

Neka je $x_0=\sup\{x:\ F(x)<1\}$ desna krajnja tačka raspodele F. Dokažimo da je $x_0=\infty$. U suprotnom, ako $x_0<\infty$, onda iz (2.7) dobijamo da za sve $x>0$ važi

$$b_nx\to x_0,\ \text{tj. } b_n\to\frac{x_0}{x}.$$

Pošto je $x>0$ proizvoljno, sledi da $b_nx\to 0$ odakle sledi da je $x_0=0$. Ali tada za $x>0$ važi $F^n(b_nx)=1$, što narušava (2.7). Sledi da je $x_0=\infty$.

Nadalje, $b_n\to\infty$ jer u suprotnom za podniz n' važi $b_{n'}\le K$ za neko $K<\infty$. Tada iz $F(K)<1$ sledi

$$0<\Phi_\alpha(1)=\lim_{n'\to\infty}F^{n'}(b_{n'})\le\lim_{n'\to\infty}F^{n'}(K)=0,$$

što je kontradikcija.

Logaritmovaćemo (2.7) da bismo za $x>0$ dobili $\lim_{n\to\infty}n(-\log F(b_nx))=x^{-\alpha}$.

Sada ćemo iskoristiti relaciju $-\log(1-z)\sim z,\quad z\to 0$ na osnovu koje je (2.7) ekvivalentno sa

$$\lim_{n\to\infty}n(1-F(b_nx))=x^{-\alpha},\quad x>0. \tag{2.8}$$

Iz Propozicije 2.2.3 i (2.8) dobijamo

$$1-F(x)\sim x^{-\alpha}L(x),\quad x\to\infty \tag{2.9}$$

za neko $\alpha>0$. Da bismo okarakterisali $\{b_n\}$, stavljamo

$$U(x)=\frac{1}{1-F(x)}$$

i tada je (2.8) ekvivalentno sa $\dfrac{U(b_nx)}{n}\to x^\alpha,\ \ x>0$. Uvodeći inverznu funkciju, pomoću Propozicije 2.2.3 dobijamo

$$\frac{U^{-1}(ny)}{b_n}\to y^{\frac{1}{\alpha}},\quad y>0. \tag{2.10}$$

Tako $U^{-1}(n)=\left(\dfrac{1}{1-F(x)}\right)^{-1}(n)\sim b_n$ i to određuje b_n.

Suprotno, ako važi (2.9), definišimo $b_n=U^{-1}(n)$ kao i pre. Tada je

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-F(b_nx)}{1-F(b_n)}=x^{-\alpha}$$

i dobijamo (2.8) pod uslovom da je $1-F(b_n)\sim\frac{1}{n}$, što je isto kao $U(b_n)\sim n$, tj. $U(U^{-1}(n))\sim n$. Podsetimo se iz (2.4) da $z<U^{-1}(n)$ ako i samo ako $U(z)<n$. Stavljajući $z=U^{-1}(n)(1-\varepsilon)$, a zatim $z=U^{-1}(n)(1+\varepsilon)$, dobijamo

$$\frac{U\left(U^{-1}(n)\right)}{U\left(U^{-1}(n)(1+\varepsilon)\right)}\leq\frac{U\left(U^{-1}(n)\right)}{n}\leq\frac{U\left(U^{-1}(n)\right)}{U\left(U^{-1}(n)(1-\varepsilon)\right)}.$$

Neka $n\to\infty$ i neka je, kao što se sećamo, $U=\frac{1}{1-F}\in R_\alpha$. Tada je

$$(1+\varepsilon)^{-\alpha}\leq\liminf_{n\to\infty}\frac{U\left(U^{-1}(n)\right)}{n}\leq\limsup_{n\to\infty}\frac{U\left(U^{-1}(n)\right)}{n}\leq(1-\varepsilon)^{-\alpha},$$

i pošto je $\varepsilon>0$ proizvoljno, sledi traženi rezultat.

Definicija 2.2.4 (Maksimalni domen atrakcije):
Funkcija raspodele F slučajne promenljive X pripada domenu atrakcije raspodele ekstremnih vrednosti H ako postoje konstante $b_n>0$, $\alpha_n\in R$ takve da važi $\frac{M_n-\alpha_n}{b_n}\to H$, $n\to\infty$ (konvergencija u raspodeli). Maksimalni domen atrakcije raspodele H ćemo označavati sa $MDA(H)$ i zapisivati $F\in MDA(H)$.

Na primer, gornja razmatranja pokazuju da neka raspodela F pripada $MDA(\Phi_\alpha)$ za izbor konstanti $\alpha_n=0$, $b_n=U^{-1}(n)$, $n\in N$. Iz dokaza je takođe jasno da je $MDA(\Phi_\alpha)$ potpuno okarakterisan raspodelama čije rep je regularno varirajući sa indeksom $-\alpha$.

Teorema 2.2.5: $F\in MDA(\Phi_\alpha)$ ako i samo ako $\bar{F}\in R_{-\alpha}$, gde je $\bar{F}(x)=1-F(x)$.

Slično kao što centralne granične teoreme govore o konvergenciji zbira slučajnih promenljivih ka normalnoj raspodeli, teoreme Fisher-Tippett tipa govore o konvergenciji maksimuma niza slučajnih promenljivih. Granične raspodele se nazivaju raspodelama ekstremnih vrednosti i može se pokazati da postoje samo tri vrste ovakvih raspodela: Frechetova, Weibullova i Gumbelova.

Teorema 2.2.6 (Fisher-Tippett):
Neka je $\left(X_n\right)_{n\in N}$ niz iid slučajnih promenljivih. Ako postoje normirajuće konstante $b_n>0$, $\alpha_n\in R$ i nenegativna slučajna promenljiva H takva da

$$\frac{M_n-\alpha_n}{b_n}\xrightarrow{r}H,\ n\in N,$$

tada H ima jednu od sledećih raspodela:

1) Frechetova $\Phi_\alpha(x) = e^{-x^{-\alpha}}$, $x > 0,\ \alpha > 0$.
2) Weibullova $\Psi_\alpha(x) = e^{-(-x)^\alpha}$, $x \le 0,\ \alpha > 0$.
3) Gumbelova $\Lambda(x) = e^{-e^{-x}}$, $x \in R$.

2.3 REGULARNA VARIJACIJA. DALJI REZULTATI. KARAMATINA TEOREMA

Asimptotske procene su sveprisutne u aktuarstvu i matematici finansija. U mnogim slučajevima transformacije (Laplaceova, Fourierova, Mellinova) igraju veoma značajnu ulogu. One su ulazna vrata za klasičnu Abel-Tauberovu teoriju. Teorija o regularnoj varijaciji počinje radom Karamate, Feller u nju uvodi teoriju verovatnoće i ona danas predstavlja standardnu teoriju i za probabilističare i za statističare. Nadalje ćemo sažeto predstaviti neke od glavnih rezultata značajnih za našu primenu.

Postoji nekoliko detaljnijih rezultata koji poboljšavaju kvalitet i primenjivost teorije regularne varijacije: uniformna konvergencija, Karamatina teorema koja tvrdi da regularno varirajuću funkciju možemo integraliti na način na koji integralimo stepenu funkciju, i konačno, Karamatina teorema o reprezentaciji.

2.3.1 Uniformna konvergencija

Propozicija 2.3.1: Ako $U \in R_\alpha$ za neko $\alpha \in R$, onda

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(tx)}{U(t)} = x^\alpha$$

važi lokalno uniformno po x na $(0,\infty)$.
Ako je $\alpha > 0$, onda uniformna konvergencija važi na intervalima oblika $(0,b]$ za sve $b > 0$. Za $\alpha < 0$ je konvergencija uniformna na $(b,\infty),\ b > 0$.

Značajan rezultat je činjenica da je konvergencija u Propoziciji 2.3.1 uniformna na svakom kompaktnom podskupu od $(0,\infty)$. Ako je U monotona funkcija, rezultat sledi direktno iz diskusije Odeljka 2.1, jer imamo familiju monotonih funkcija koje konvergiraju ka neprekidnoj granici.

2.3.2 Integracija i Karamatina teorema

Sledeći rezultati ispituju osobine integrala regularno varirajućih funkcija. Za potrebe integracije, α-varirajuće funkcije se, grubo govoreći, ponašaju kao i stepene funkcije oblika x^{α}. Pretpostavićemo da su sve funkcije koje posmatramo lokalno integrabilne, i pošto nas zanima ponašanje ovih funkcija u ∞, pretpostavljamo njihovu integrabilnost i na intervalima koji sadrže nulu.

Teorema 2.3.2 (Karamatina teorema):

a) Neka je $\alpha \geq -1$ i $U \in R_{\alpha}$. Tada je za $x > 0$, $\int_{0}^{x} U(t)dt \in R_{\alpha+1}$ i

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x\, U(x)}{\int_{0}^{x} U(t)dt} = \alpha + 1. \tag{2.11}$$

Ako je $\alpha < -1$ (ili ako je $\alpha = -1$ i $\int_{x}^{\infty} U(s)ds < \infty$), tada iz $U \in R_{\alpha}$ sledi da $\int_{x}^{\infty} U(s)ds$ ima konačnu vrednost, $\int_{x}^{\infty} U(t)dt \in R_{\alpha+1}$ i

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x\, U(x)}{\int_{x}^{\infty} U(t)dt} = -\alpha - 1. \tag{2.12}$$

b) Ako U zadovoljava

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x\, U(x)}{\int_{0}^{x} U(t)dt} = \lambda \in (0, \infty), \tag{2.13}$$

onda $U \in R_{\lambda-1}$. Ako $\int_{x}^{\infty} U(t)dt < \infty$ i ako

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x\, U(x)}{\int_{x}^{\infty} U(t)dt} = \lambda \in (0, \infty), \tag{2.14}$$

onda $U \in R_{-\lambda-1}$.

Primedba 2.3.2.1: Teorema 2.3.2 nam govori da se, za potrebe integracije, sporo varirajuće funkcije mogu izvući izvan integrala. Na primer, da bismo zapamtili i interpretirali (2.11), koristimo zapis $U(x) = x^{\alpha} L(x)$ i onda posmatramo $\int_{0}^{x} U(t)dt = \int_{0}^{x} t^{\alpha} L(t)dt$. Sada podintegralnu funkciju $L(t)$ izvlačimo izvan integrala kao faktor $L(x)$ i dobijamo

$$\int_{0}^{x} U(t)dt = \int_{0}^{x} t^{\alpha} L(t)dt \sim L(x)\int_{0}^{x} t^{\alpha} dt = L(x)\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} = xx^{\alpha}\frac{L(x)}{\alpha+1} = \frac{x\, U(x)}{\alpha+1},$$

što je ekvivalentno tvrdnji (2.11).

Dokaz:

a) Za određene vrednosti α, za uniformnu konvergenciju je dovoljno zapisati, npr.

$$\frac{\int_0^x U(s)ds}{x\,U(x)} = \int_0^1 \frac{U(sx)}{U(x)}ds \sim \int_0^1 s^\alpha ds = (\alpha+1)^{-1}.$$

b) Ako $\alpha > -1$, pokazujemo da $\int_0^\infty U(t)dt = \infty$. Iz $U \in R_\alpha$ imamo

$$\lim_{s\to\infty} \frac{U(2s)}{U(s)} = 2^\alpha > 2^{-1}.$$

Zbog toga, postoji s_0 takvo da iz $s > s_0$ sledi $U(2s) > 2^{-1}U(s)$. Za n takvo da $2^n > s_0$ imamo

$$\int_{2^{n+1}}^{2^{n+2}} U(s)ds = 2\int_{2^n}^{2^{n+1}} U(2s)ds > \int_{2^n}^{2^{n+1}} U(s)ds,$$

i tako, stavljajući $n_0 = \inf\{n,\ \ 2^n > s_0\}$, dobijamo

$$\int_{s_0}^{\infty} U(s)ds \geq \sum_{n,2^n>s_0} \int_{2^{n+1}}^{2^{n+2}} U(s)ds > \sum_{n\geq n_0} \int_{2^{n_0+1}}^{2^{n_0+2}} U(s)ds = \infty.$$

Tako, za $\alpha > -1$, $x > 0$ i za bilo koje $N < \infty$ važi

$$\int_0^t U(sx)ds \sim \int_N^t U(sx)ds, \quad t \to \infty$$

jer je $U(sx)$ α-varirajuća funkcija po s. Za fiksirano x i dato ε postoji N takvo da za sve $s > N$ važi

$$(1-\varepsilon)x^\alpha U(s) \leq U(sx) \leq (1+\varepsilon)x^\alpha U(s)$$

i tako

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\int_0^{tx} U(s)ds}{\int_0^t U(s)ds} = \limsup_{t\to\infty} \frac{x\int_0^t U(sx)ds}{\int_0^t U(s)ds} = \limsup_{t\to\infty} \frac{x\int_N^t U(sx)ds}{\int_N^t U(s)ds} \leq$$

$$\leq \limsup_{t\to\infty} (1+\varepsilon)\ x^{\alpha+1} \frac{\int_N^t U(s)ds}{\int_N^t U(s)ds} = (1+\varepsilon)\ x^{\alpha+1}.$$

Analogni argument se primenjuje za $\liminf$, i tako smo za $\alpha > -1$ pokazali

$$\int_0^x U(s)ds \in R_{\alpha+1}.$$

Ako $\alpha = -1$, onda ili $\int_0^\infty U(s)ds < \infty$, pa $\int_0^x U(s)ds \in R_{-1+1} = R_0$, ili $\int_0^\infty U(s)ds = \infty$, pa se onda može primeniti prethodan argument. Tako smo proverili da za sve $\alpha \geq -1$

važi $\int_0^x U(s)ds \in R_{\alpha+1}$.

Sada ćemo se skoncentrisati na dokazivanje (2.11) kada $U \in R_\alpha$, $\alpha \geq -1$.
Definišemo funkciju

$$b(x) := \frac{x\ U(x)}{\int_0^x U(t)dt}, \tag{2.15}$$

tako da integracijom izraza $\frac{b(x)}{x}$ dobijamo reprezentaciju

$$\int_0^x U(s)ds = c\exp\left\{\int_1^x \frac{b(t)}{t}dt\right\},$$

$$U(x) = c\frac{b(x)}{x}\exp\left\{\int_1^x \frac{b(t)}{t}dt\right\}. \tag{2.16}$$

Moramo pokazati da $b(x) \to \alpha+1$. Primetimo prvo da

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{1}{b(x)} = \liminf_{x\to\infty} \frac{\int_0^x U(t)dt}{x\ U(x)} = \liminf_{x\to\infty} \int_0^1 \frac{U(sx)}{U(x)}ds.$$

Nakon uvođenja smene $s = \frac{t}{x}$, korišćenjem Fatouove leme, dobijamo

$$\liminf_{x\to\infty} \int_0^1 \frac{U(sx)}{U(x)}ds \geq \int_0^1 \liminf_{x\to\infty} \frac{U(sx)}{U(x)}ds = \int_0^1 s^\rho ds = \frac{1}{\alpha+1}$$

i iz toga zaključujemo da je

$$\limsup_{x\to\infty} b(x) \leq \alpha+1. \tag{2.17}$$

Ako $\alpha = -1$, onda $b(x) \to 0$, kao što se očekuje.

Sada pretpostavimo da $\alpha > -1$.

Primetimo da važe sledeće osobine za $b(x)$:

- $b(x)$ je ograničena u semi-beskonačnoj okolini od ∞ (na osnovu (2.17);
- $b(x)$ je sporo varirajuća, jer $x\ U(x) \in R_{\alpha+1}$;
- $b(xt) - b(x) \to 0$, $x \to \infty$ i konvergencija po t je uniformno ograničena nad konačnim intervalima. Poslednja tvrdnja c) sledi na osnovu slabe varijacije, tj. $\lim_{x\to\infty} \frac{b(xt)-b(x)}{b(x)} = 0$, i imenilac je ograničen na nekom intervalu oblika (x_0, ∞), $x_0 > 0$.

c) Iz treće osobine i dominirane konvergencije sledi $\lim_{x\to\infty} \int_1^s \frac{b(xt)-b(x)}{t}dt = 0$ i leva strana se može raspisati da bismo dobili

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\int_1^s \frac{b(xt)}{t}dt - b(x)\log s\right\} = 0\,. \tag{2.18}$$

Iz (2.16) sledi $c\exp\left\{\int_1^x \frac{b(t)}{t}dt\right\} = \int_0^x U(s)ds \in R_{\alpha+1}$ i iz osobine regularne varijacije

$$(\alpha+1)\log s = \lim_{x\to\infty}\log\left(\frac{\int_0^{xs} U(t)dt}{\int_0^x U(t)dt}\right) = \lim_{x\to\infty}\int_x^{xs}\frac{b(xt)}{t}dt = \lim_{x\to\infty}\int_1^s \frac{b(xt)}{t}dt\,;$$

kombinujući to sa (2.18) dolazimo do značajnog zaključka da $b(x)\to\alpha+1$.

b) Pretpostavljamo da (2.13) važi i proveravamo da li $U\in R_{\lambda-1}$. Stavimo $b(x) = \dfrac{x\,U(x)}{\int_0^x U(t)dt}$ tako da $b(x)\to\lambda$. Iz (2.16) dobijamo

$$U(x) = c\frac{b(x)}{x}\exp\left\{\int_1^x \frac{b(t)}{t}dt\right\} = cb(x)\exp\left\{\int_1^x \frac{(b(t)-1)}{t}dt\right\},$$

a pošto $b(x)-1\to\lambda-1$, U je po definiciji $(\lambda-1)$-varirajuća. (Videti Posledicu 2.3.3).

2.3.3 Karamatina teorema o reprezentaciji

Teorema 2.3.2 nas direktno uvodi u Karamatinu reprezentaciju regularno varirajućih funkcija.

Posledica 2.3.3 (Karamatina teorema o reprezentaciji):

a) Funkcija L je sporo varirajuća ako i samo ako L ima sledeću reprezentaciju

$$L(x) = c(x)\exp\left\{\int_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t}dt\right\}, \quad x>0\,, \tag{2.19}$$

gde $c: R_+ \mapsto R_+$, $\varepsilon: R_+\mapsto R_+$ i

$$\lim_{x\to\infty} c(x) = c\in(0,\infty)\,, \tag{2.20}$$

$$\lim_{x\to\infty}\varepsilon(x) = 0\,. \tag{2.21}$$

b) Funkcija $U: R_+\mapsto R_+$ je regularno varirajuća sa indeksom α ako i samo ako U ima sledeću reprezentaciju

$$U(x) = c(x)\exp\left\{\int_1^x \frac{\alpha(t)}{t}dt\right\}, \tag{2.22}$$

gde $c(\cdot)$ zadovoljava (2.20) i $\lim_{t\to\infty}\alpha(t) = \alpha$. (To je izvedeno iz a) korišćenjem $U(x) = x^{\alpha}L(x)$ i korišćenjem reprezentacije za L).

Dokaz: Ako L ima reprezentaciju (2.19), onda L mora biti sporo varirajuća, jer za $x > 1$ važi

$$\lim_{t\to\infty} \frac{L(tx)}{L(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{c(tx)}{c(t)} \exp\left\{ \int_t^{tx} \frac{\varepsilon(s)}{s} ds \right\}.$$

Za dato ε na osnovu (2.21) postoji t_0 takvo da

$$-\varepsilon < \varepsilon(t) < \varepsilon \,,\ t \geq t_0 \,,$$

pa stoga važi

$$-\varepsilon \log x = -\varepsilon \int_t^{tx} \frac{1}{s} ds \leq \int_t^{tx} \frac{\varepsilon(s)}{s} ds \leq \varepsilon \int_t^{tx} \frac{1}{s} ds \leq \varepsilon \log x \,.$$

Zaključujemo da $\lim\limits_{t\to\infty} \int_t^{tx} \frac{\varepsilon(s)}{s} ds = 0$ i $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{L(tx)}{L(t)} = 1$.

Obrnuto, pretpostavimo da $L \in R_0$. Na sličan način kao u (2.15), definišemo

$$b(x) := \frac{x\, L(x)}{\int_0^x L(s) ds}$$

i prema Karamatinoj teoremi $b(x) \to 1,\ \ x \to 0$. Primetimo da

$$L(x) = \frac{b(x)}{x} \int_0^x L(s) ds \,.$$

Stavimo $\varepsilon(x) = b(x) - 1$, tada $\varepsilon(x) \to 0$ i

$$\int_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t} dt = \int_1^x \left(\frac{L(t)}{\int_0^t L(s) ds} \right) dt - \log x = \int_1^x d\left(\log \int_0^t L(s) ds \right) - \log x = \log\left(\frac{1}{x} \frac{\int_0^x L(s) ds}{\int_0^1 L(s) ds} \right),$$

odakle je

$$\exp\left\{ \int_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t} dt \right\} = \frac{1}{x} \frac{\int_0^x L(s) ds}{\int_0^1 L(s) ds} = \frac{L(x)}{b(x) \int_0^1 L(s) ds} \,, \tag{2.23}$$

i reprezentacija sledi sa

$$c(x) = b(x) \int_0^1 L(s) ds \,.$$

Primer 2.2: Cauchyjeva funkcija gustine $F'(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{1+x^2} \right),\ \ x \in R$ zadovoljava $F'(x) \sim \frac{1}{2\pi} x^{-2},\ \ x \to \infty$ i tako $1 - F(x) \sim \frac{1}{2\pi} x^{-1},\ \ x \to \infty$.

2.3.4 Diferenciranje

Prethodni rezultati opisuju asimptotske osobine neodređenog integrala regularno varirajuće funkcije. Sada ćemo opisati šta se dešava kod diferenciranja α-varirajuće funkcije.

Sledeći rezultat je neophodan za diferenciranje regularno varirajućih funkcija:

Teorema 2.3.4 (Teorema o monotonoj gustini):

Neka je $U(x)=\int_0^x u(y)dy$ (respektivno $U(x)=\int_x^\infty u(y)dy$), gde je u monotona u beskonačnosti (tj. u je monotona na (z,∞) za neko $z>0$). Ako $U(x)\sim cx^\alpha L(x),\ x\to\infty,$ za $c\ge 0,\ \alpha\in R,\ L\in R_0$, onda $u(x)\sim c\alpha x^{\alpha-1}L(x),\ x\to\infty$. Za $c=0$ gornje relacije se interpretiraju kao $U(x)=o\left(x^\alpha L(x)\right)$ i $u(x)=o\left(x^{\alpha-1}L(x)\right)$.

Za primene u teoriji verovatnoće, uslovi oblika $\overline{F}\in R_{-\alpha}$ za $\alpha\ge 0$ gde je F funkcija raspodele, su česti. Saželi smo neke teoreme koje će nadalje biti potrebne.

Propozicija 2.3.5: Neka je $U:R_+\mapsto R_+$ apsolutno neprekidna funkcija sa gustinom u tako da $U(x)=\int_0^x u(t)dt$.

a) Ako važi

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\,u(x)}{U(x)}=\alpha, \tag{2.24}$$

onda je $U\in R_\alpha$.

b) Ako $U\in R_\alpha$, $\alpha\in R$, i ako je funkcija gustine u monotona, onda je (2.24) ispunjeno i, ako $\alpha\ne 0$, onda $|u|(x)\in R_{\alpha-1}$.

Dokaz: a) Stavimo $b(x)=\dfrac{x\,u(x)}{U(x)}$. Dolazimo do zaključka da

$$U(x)=U(1)\exp\left\{\int_1^x\frac{b(t)}{t}dt\right\},$$

pa U zadovoljava teoremu o reprezentaciji α-varirajuće funkcije.

b) Neka je gustina u neopadajuća. Analogni dokaz se može izvesti i ako je u nerastuća. Neka je $0<a<b$ i posmatrajmo da $\dfrac{U(xb)-U(xa)}{U(x)}=\int_{xa}^{xb}\dfrac{u(y)dy}{U(x)}$.

Zbog monotonosti dobijamo

$$\frac{u(xb)x(b-a)}{U(x)}\ge\frac{U(xb)-U(xa)}{U(x)}\ge\frac{u(xa)x(b-a)}{U(x)}. \tag{2.25}$$

Iz (2.25) i činjenice da je $U \in R_\alpha$ zaključujemo da važi

$$\limsup_{x\to\infty} x\frac{u(xa)}{U(x)} \le \frac{b^\alpha - a^\alpha}{b-a} \tag{2.26}$$

za bilo koje $b > a > 0$. Neka $b \to a$, što se svodi na diferenciranje. Tada (2.26) postaje

$$\limsup_{x\to\infty} x\frac{u(xa)}{U(x)} \le \alpha a^{\alpha-1} \tag{2.27}$$

za bilo koje $a > 0$. Slično, iz leve jednakosti u (2.25) za $a \to b$ dobijamo

$$\liminf_{x\to\infty} x\frac{u(xb)}{U(x)} \le \alpha b^{\alpha-1} \tag{2.28}$$

za bilo koje $b > 0$. Tada (2.24) dobijamo za $a = 1$ u (2.27) i za $b = 1$ u (2.28).

2.4 REGULARNA VARIJACIJA. DALJE OSOBINE

Dosad smo razmatrali regularnu varijaciju pozitivnih funkcija na $[0,\infty)$. Postoje mnoga proširenja koja uključuju:
-regularnu varijaciju na R ili R^k,
-regularno varirajuće nizove,
-brzu varijaciju sa indeksom $+\infty$ ili $-\infty$.
Od ovih mogućih generalizacija mi razmatramo samo one koje nalaze primene u modeliranju ekstremnih rizika.

Definicija 2.4.1 (Brza varijacija): Merljiva funkcija $U : R_+ \mapsto R_+$ brzo varirajuća, tj. varirajuća sa indeksom ∞ ($U \in R_\infty$) ako je za svako $x > 0$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(tx)}{U(t)} = x^\infty = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 1 & x = 1, \\ \infty, & x > 1. \end{cases}$$

Slično, $U \in R_{-\infty}$ ako

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(tx)}{U(t)} = x^{-\infty} = \begin{cases} \infty, & x < 1, \\ 1 & x = 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Primer za funkciju $U \in R_{-\infty}$ je $U(x) = e^{-x}$. U sledećoj teoremi smo saželi neke glavne osobine za $R_{-\infty}$.

Teorema 2.4.2 (Osobine funkcije brze varijacije):
a) Neka je $U \in R_{-\infty}$ nerastuća funkcija. Tada za neko $z > 0$ i za sve $\alpha \in R$ važi

$$\int_z^{\infty} t^{\alpha} U(t)dt < \infty \text{ i } \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\alpha+1}U(x)}{\int_x^{\infty} t^{\alpha} U(t)dt} = \infty . \qquad (2.29)$$

Ako za neko $\alpha \in R$ važe $\int_1^{\infty} t^{\alpha} U(t)dt < \infty$ i (2.29), onda $U \in R_{-\infty}$.

b) Funkcija $U \in R_{-\infty}$ ako i samo ako postoje funkcije c i δ takve da

$$c(x) \to c_0 \in (0,\infty), \ \delta(x) \to -\infty \text{ kad } x \to \infty$$

i za neko $z > 0$ važi

$$U(x) = c(x)\exp\left(\int_z^x \frac{\delta(u)}{u} du\right), \ x \geq z . \qquad (2.30)$$

Primedba 2.4.2.1: Neka je $\overline{F} \in R_{-\infty}$. Tada iz Teoreme 2.4.2 a) sledi da su svi stepeni momenti od F konačni i

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_x^{\infty} \overline{F}(t)dt}{x\overline{F}(x)} = 0 .$$

Poslednja granična veza karakteriše $\overline{F} \in R_{-\infty}$.

Primedba 2.4.2.2: Klase $R_{-\alpha}$, $\alpha > 0$ igraju ključnu ulogu u izračunavanju fluktuacija suma i maksimuma slučajnih promenljivih. Na primer, uslov $\overline{F} \in R_{-\alpha}$ karakteriše maksimalni domen atrakcije Frechetove raspodele Φ_{α}, dok se klasa $R_{-\infty}$ uvodi kroz karakterizaciju maksimalnog domena atrakcije Gumbelove raspodele. Reprezentacija (2.30) takođe može biti zapisana kao $\overline{F}(x) = c(x)\exp\left(\int_z^x \frac{1}{a(u)} du\right)$, gde $a'(x) \to 0$ (a' je gustina za a, pod pretpostavkom da ona postoji).

Definicija 2.4.3 (Regularno varirajući nizovi):
Niz pozitivnih brojeva $(c_n)_{n\in N}$ je regularno varirajući sa indeksom $\alpha \in R$ ako

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{[tn]}}{c_n} = t^{\alpha}, \ t > 0 .$$

Kadgod je $(c_n)_{n\in N}$ regularno varirajući niz sa indeksom α, tada $c(x) = c_{[x]}$ pripada klasi R_{α}. Zahvaljujući ovoj osobini, mnogi rezultati za R_{α} se prenose na nizove.

U sledećoj propoziciji su sakupljene korisne osobine regularno varirajućih funkcija.

Propozicija 2.4.4:
a) Ako $U \in R_\alpha$, $-\infty \le \alpha \le \infty$, onda

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log U(x)}{\log x} = \alpha$$

tako da

$$\lim_{x\to\infty} U(x) = \begin{cases} 0, & \alpha < 0, \\ \infty, & \alpha > 0 \end{cases}.$$

b) (Potterove granice): Neka $U \in R_\alpha$, $\alpha \in R$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji t_0 tako da za sve $x \ge 1$ i sve $t \ge t_0$ važi

$$(1-\varepsilon)x^{\alpha-\varepsilon} < \frac{U(tx)}{U(t)} < (1+\varepsilon)x^{\alpha+\varepsilon}. \tag{2.31}$$

c) Ako $U \in R_\alpha$, $\alpha \in R$ i ako nizovi $(a_n)_{n\in N}$ i $(b_n)_{n\in N}$ zadovoljavaju

$$0 < a_n \to \infty,\ 0 < b_n \to \infty,\ \text{i } b_n \sim ca_n \text{ kad } n \to \infty$$

za $0 < c < \infty$, onda

$$U(b_n) \sim c^\alpha U(a_n).$$

Ako $\alpha \ne 0$, onda rezultat takođe važi za $c = 0$ ili ∞. Analogni rezultati će važiti ako se nizovi zamene funkcijama.
d) Ako $U_1 \in R_{\alpha_1}$ i $U_2 \in R_{\alpha_2}$, $\alpha_2 < \infty$ i ako $\lim_{x\to\infty} U_2(x) = \infty$, onda $U_1 \circ U_2 \in R_{\alpha_1\alpha_2}$.
e) Neka je U neopadajuća funkcija i neka je

$$U(\infty) = \infty,\ U \in R_\alpha,\ 0 \le \alpha \le \infty.$$

Tada $U^{-1} \in R_{\alpha^{-1}}$.
f) Neka su U_1, U_2 neopadajuće, α-varirajuće funkcije, $0 \le \alpha \le \infty$. Tada za $0 \le c \le \infty$ važi

$$U_1(x) \sim cU_2(x),\ x \to \infty,$$

ako i samo ako

$$U_1^{-1}(x) \sim c^{-\alpha^{-1}} U_2^{-1}(x),\ x \to \infty.$$

g) Ako $U \in R_\alpha$, $\alpha \ne 0$, onda postoji funkcija U^* koja je apsolutno neprekidna, strogo monotona i za koju važi

$$U(x) \sim U^*(x),\ x \to \infty.$$

Dokaz:
a) Izvodimo dokaz u slučaju $0 < \alpha < \infty$. Neka je funkcija U data Karamatinom reprezentacijom oblika

$$U(x) = c(x)\exp\left\{\int_1^x \frac{\alpha(t)}{t}dt\right\},$$

gde $c(x) \to c > 0$ i $\alpha(t) \to \alpha$. Tada

$$\frac{\log U(x)}{\log x} = o(1) + \frac{\int_1^x \frac{\alpha(t)}{t}\,dt}{\int_1^x \frac{1}{t}\,dt} \longrightarrow \alpha .$$

b) Koristeći Karamatinu reprezentaciju, dobijamo

$$\frac{U(tx)}{U(t)} = \frac{c(tx)}{c(t)} \exp\left\{\int_1^x \frac{\alpha(ts)}{s}\,ds\right\},$$

a rezultat je nadalje očigledan, jer možemo izabrati t_0 tako da za $t > t_0$ važi

$$\alpha - \varepsilon < \alpha(ts) < \alpha + \varepsilon \text{ za } s > 1 .$$

c) Ako je $c > 0$, onda iz osobine uniformne konvergencije iz Propozicije 2.4.4 sledi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U(b_n)}{U(a_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{U\left(a_n \frac{b_n}{a_n}\right)}{U(a_n)} = \lim_{t\to\infty} \frac{U(tc)}{U(t)} = c^{\alpha} .$$

d) Opet, na osnovu osobine uniformne konvergencije, za $x > 0$,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U_1\left(U_2(tx)\right)}{U_1\left(U_2(t)\right)} = \lim_{t\to\infty} \frac{U_1\left(U_2(t)\frac{U_2(tx)}{U_2(t)}\right)}{U_1\left(U_2(t)\right)} = \lim_{y\to\infty} \frac{U_1\left(yx^{\rho_2}\right)}{U_1\left(y\right)} = x^{\alpha_2\alpha_1} .$$

e) Neka je $U_t(x) = \dfrac{U(tx)}{U(t)}$, tako da ako je $U \in R_\alpha$ i ako je U neopadajuća, onda za $0 < \alpha < \infty$ važi

$$U_t(x) \to x^{\alpha},\ t \to \infty ,$$

što, na osnovu Propozicije 2.1.5, implicira da

$$U_t^{-1}(x) \to x^{\alpha^{-1}},\ \ t \to \infty \text{ i}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U^{-1}(xU(t))}{t} = x^{\alpha^{-1}} .$$

Zbog toga,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U^{-1}(x\ U\left(U^{-1}(t)\right)}{U^{-1}(t)} = x^{\alpha^{-1}} .$$

Ta granica važi lokalno uniformno, pošto monotone funkcije konvergiraju ka neprekidnoj granici. Sada $U \circ U^{-1}(t) \sim t,\ \ t \to \infty$, pa ako zamenimo x sa $\dfrac{xt}{U \circ U^{-1}(t)}$ i iskoristimo uniformnu konvergenciju, dobijamo

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U^{-1}(tx)}{U^{-1}(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{U^{-1}\left(\frac{xt}{U \circ U^{-1}(t)} U \circ U^{-1}(t)\right)}{U^{-1}(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{U^{-1}\left(x\ U \circ U^{-1}(t)\right)}{U^{-1}(t)} = x^{\alpha^{-1}} ,$$

iz čega sledi $U^{-1} \in R_{\alpha^{-1}}$.

f) Ako je $c > 0$, $0 < \alpha < \infty$, onda za svako $x > 0$ imamo

$$\lim_{t\to\infty}\frac{U_1(tx)}{U_2(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{U_1(tx)}{U_2(tx)}\frac{U_2(tx)}{U_2(t)}=cx^{\alpha}.$$

Uvođenjem inverznih funkcija, za svako $y>0$ dobijamo

$$\lim_{t\to\infty}\frac{U_1^{-1}(y\,U_2(t))}{t}=\left(\frac{y}{c}\right)^{\alpha^{-1}}, \text{ i tako}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{U_1^{-1}\left(y\,U_2\circ U_2^{-1}(t)\right)}{U_2^{-1}(t)}=\left(\frac{y}{c}\right)^{\alpha^{-1}}$$

a pošto $U\circ U^{-1}(t)\sim t,$ onda važi

$$\lim_{t\to\infty}\frac{U_1^{-1}(yt)}{U_2(t)}=\left(\frac{y}{c}\right)^{\alpha^{-1}}.$$

Za $y=1$ je tvrdnja dokazana.

g) Na primer, ako $U\in R_{\alpha}$, $\alpha>0$, definišemo

$$U^{*}(t)=\int_1^t\frac{U(s)}{s}ds.$$

Tada $\frac{U(s)}{s}\in R_{\alpha-1}$, i na osnovu Karamatine teoreme,

$$\frac{U(x)}{U^{*}(x)}\to\alpha.$$

Funkcija U^{*} je apsolutno neprekidna, i pošto $U(x)\to\infty$ kad $\alpha>0$, onda je U^{*} strogo rastuća u beskonačnosti, tj. postoji interval (x_0,∞), $x_0>0$ tako da je U^{*} strogo rastuća na (x_0,∞).

Sledeće pitanje je veoma značajno za primene: Neka $U\in R_{\alpha}$. Da li možemo pronaći glatku funkciju $U_1\in R_{\alpha}$ tako da $U_1(x)\sim U(x)$ dok $x\to\infty$?

U Karamatinoj teoremi o reprezentaciji imamo određenu fleksibilnost pri konstruisanju funkcija c i ε. Ako npr. uzmemo da je c konstantna funkcija, već imamo (parcijalni) pozitivan odgovor na ovo pitanje. Može se izvesti mnogo više, što pokazuje sledeća propozicija:

Propozicija 2.4.5 (Glatke verzije spore varijacije):
Neka $L\in R_0$. Tada postoji $L_1\in C^{\infty}$ (C^{∞}je prostor beskonačno diferencijabilnih funkcija) tako da $L(x)\sim L_1(x)$ kad $x\to\infty$. Ako je L monotona, onda je i L_1 monotona funkcija.

Sledeći Karamatin rezultat se često primenjuje. On iznosi suštinsko tvrđenje da su integrali regularno varirajućih funkcija i sami regularno varirajući, ili preciznije, sporo varirajuću funkciju možemo izvući ispred integrala.

Teorema 2.4.6 (Karamatina teorema o ograničenoj funkciji): Neka je $L \in R_0$ lokalno ograničena na $[x_0, \infty)$ za neko $x_0 \geq 0$. Tada

a) za $\alpha > -1$ važi $\int\limits_{x_0}^{x} t^{\alpha} L(t)dt \sim \dfrac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)} L(x),\ \ x \to \infty$,

b) za $\alpha < -1$ važi $\int\limits_{x}^{\infty} t^{\alpha} L(t)dt \sim -\dfrac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)} L(x),\ \ x \to \infty$.

Primedba 2.4.6.1: Teorema 2.4.6 važi i za $\alpha = -1$ u smislu da za $\alpha = -1$ važi

$$\frac{1}{L(x)} \int\limits_{x_0}^{x} \frac{L(t)}{t} dt \to \infty, \quad x \to \infty \text{ i } \int\limits_{x_0}^{x} \frac{L(t)}{t} dt \in R_0 .$$

Ako $\int\limits_{x_0}^{\infty} \dfrac{L(t)}{t} dt < \infty$, onda važi $\dfrac{1}{L(x)} \int\limits_{x}^{\infty} \dfrac{L(t)}{t} dt \to \infty, \quad x \to \infty$ i $\int\limits_{x}^{\infty} \dfrac{L(t)}{t} dt \in R_0$.

Primedba 2.4.6.2: Zaključci Teoreme 2.4.6 se alternativno mogu formulisati na sledeći način. Neka je $U \in R_{\alpha}$ za neko $\alpha \in R$ i neka je U lokalno ograničena nad $[x_0, \infty)$ za neko $x_0 \geq 0$. Tada:

a') za $\alpha > -1$ važi $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\int_{x_0}^{x} U(t)dt}{xU(x)} = \dfrac{1}{\alpha+1}$,

b') za $\alpha < -1$ važi $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\int_{x}^{\infty} U(t)dt}{xU(x)} = -\dfrac{1}{\alpha+1}$.

Svaki put kad je $\alpha \neq -1$ i kad važi granični uslov a') ili b') za neku pozitivnu funkciju U koja je lokalno ograničena nad $[x_0, \infty)$, $x_0 \geq 0$, tada je $U \in R_0$.

Propozicija 2.4.7 (Regularna varijacija repova funkcija raspodele):
Neka je F funkcija raspodele takva da $F(x) < 1$ za sve $x \geq 0$.

a) Ako nizovi (a_n) i (x_n) isupnjavaju uslove $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} \to 1$ i $x_n \to \infty$ i ako za neku realnu funkciju g i sve λ iz gustog podskupa od $(0, \infty)$ važi

$$\lim_{n\to\infty} a_n \overline{F}(\lambda x_n) = g(\lambda) \in (0,\infty), \text{ onda je } g(\lambda) = \lambda^{-\alpha}$$

za neko $\alpha \geq 0$ i $\overline{F}$ je regularno varirajuća.

b) Neka je F apsolutno neprekidna sa gustinom f takva da za neko $\alpha > 0$ važi $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x f(x)}{\overline{F}(x)} = \alpha$. Tada $f \in R_{-1-\alpha}$ i $\overline{F} \in R_{-\alpha}$.

c) Neka je $f \in R_{-1-\alpha}$ za neko $\alpha > 0$. Tada je

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\,f(x)}{\overline{F}(x)}=\alpha .$$

Poslednje tvrđenje takođe važi ako je $\overline{F}\in R_{-\alpha}$ za neko $\alpha>0$ i gustina f je monotona u beskonačnosti.

d) Neka je X nenegativna slučajna promenljiva sa repom raspodele $\overline{F}\in R_{-\alpha}$ za neko $\alpha>0$. Tada

$$E\left[x^{\beta}\right]<\infty \text{ ako } \beta<\alpha,$$

$$E\left[x^{\beta}\right]=\infty \text{ ako } \alpha<\beta .$$

e) Neka $\overline{F}\in R_{-\alpha}$ za neko $\alpha>0$, $\beta\geq\alpha$. Tada

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\beta}\overline{F}(x)}{\int_0^x y^{\beta}dF(y)}=\frac{\beta-\alpha}{\alpha}.$$

Obrnuto važi u slučaju da je $\beta>\alpha$. Ako je $\beta=\alpha$, možemo samo zaključiti da $\overline{F}(x)=o\left(x^{-\alpha}L(x)\right)$ za neko $L\in R_0$.

f) Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

1) $\int_0^x y^2 dF(y)\in R_0$,

2) $\overline{F}(x)=o\left(x^{-2}\int_0^x y^2 dF(y)\right),\ x\to\infty .$

Primetimo da su tvrđenja b) i c), e) i f) specijalni slučajevi opšte verzije Karamatine teoreme i teoreme o monotonoj gustini.

Teorema 2.4.8 (Karamata-Tauberova teorema za Laplace-Stieltjesove transformacije): Neka je U nerastuća funkcija neprekidna s desne strane definisana na $[0,\infty)$. Ako $L\in R_0$, $c\geq 0$, $\alpha\geq 0$, onda su sledeća tvrđenja ekvivalentna:

a) $U(x)\sim\dfrac{cx^{\alpha}L(x)}{\Gamma(1+\alpha)},\ x\to\infty,$,

b) $\widehat{u}(s)=\int_0^x e^{-sx}dU(x)\sim cs^{-\alpha}L\left(\dfrac{1}{s}\right),\ s\to 0 .$

Za $c=0$ tvrđenje a) se interpretira kao $U(x)=o\left(x^{\alpha}L(x)\right)$, $x\to\infty$, a pod b) je slično.

To je značajan rezultat ne samo zbog očuvanja stepenog koeficijenta α nakon primene Laplace-Stieltjesove transformacije, već i zbog očuvanja sporo varirajuće funkcije L. Iz a) ili b) za $c>0$ sledi

c) $U(x) \sim \dfrac{\widehat{u}\left(1/x\right)}{\Gamma(1+\alpha)}, \quad x \to \infty$.

Iznenađujući je rezultat da obrnuto (da c) implicira a) i b)) takođe važi.

Posledica 2.4.9: Neka je F funkcija raspodele sa Laplace-Stieltjesovom transformacijom $\widehat{f}$. Za $\alpha \in [0,1)$ i $L \in R_0$ su ekvivalentna sledeća tvrđenja:

a) $1-\widehat{f}(s) \sim s^{\alpha} L\left(\dfrac{1}{s}\right), \ s \to 0$,

b) $\overline{F}(x) \sim \left(\dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\right) x^{-\alpha} L(x), \quad x \to \infty$.

3. SUBEKSPONENCIJALNOST

U ovom poglavlju ćemo detaljno razraditi klasu subeksponencijalnih raspodela, kandidate za raspodele gubitka sa debelim repom. Zbog njihove značajnosti u modeliranju velikih šteta, uključićemo veoma detaljnu analizu njihovih osobina. Koristeći Cramer-Lundbergov pristup, izvršićemo prvu procenu asimptotskih verovatnoća rizika u slučaju regularno varirajućih funkcija raspodela iznosa šteta. Predstavićemo ekvivalent velikih iznosa šteta za Cramer-Lundbergovu procenu. Drugim rečima, izvršićemo procenu verovatnoće propasti procesa u beskonačnom vremenskom intervalu uz pretpostavku o velikim zahtevima za odštetu.

Detaljno razmatranje teorije subeksponencijalnih raspodela je prilično formalno, tako da ćemo se zadovoljiti pregledom dela teorije koji se najlakše primenjuje konkretno u teoriji rizika i generalno u osiguranju i finansijama.

3.1 NEKI PRELIMINARNI REZULTATI

Započinjemo naše razmatranje osobinom zatvorenosti regularno varirajućih funkcija raspodela u odnosu na konvoluciju.

Lema 3.1.1: Klasa raspodela sa regularno varirajućim repovima je zatvorena u odnosu na konvoluciju. Ako su $F_{1,}$ F_2 dve funkcije raspodela takve da

$$\overline{F}_I(x) = x^{-\alpha} L_i(x) \text{ za sve } \alpha \geq 0 \text{ i } L_i \in R_0, \ \text{i}=1,2,$$

onda konvolucija $G = F_1 * F_2$ ima regularno varirajući rep takav da

$$\overline{G}(x) \sim x^{-\alpha}(L_1(x) + L_2(x)), \quad \text{x} \to \infty .$$

Dokaz: Neka su X_1, X_2 dve nezavisne slučajne promenljive sa funkcijama raspodela F_1 i F_2, respektivno. Koristeći $\{X_1 + X_2 > x\} \supset \{X_1 > x\} \bigcup \{X_2 > x\}$, može se lako proveriti da važi $\overline{G}(x) \geq (\overline{F}_1(x) + \overline{F}_2(x))\ (1 - o(1))$.

Ako je $\delta \in (0, \dfrac{1}{2})$, onda iz

$\{X_1 + X_2 > x\} \subset \{X_1 > (1-\delta)x\} \bigcup \{X_2 > (1-\delta)x\} \bigcup \{X_1 > \delta x, X_2 > \delta x\}$ sledi

$$\overline{G}(x) \leq \overline{F}_1((1-\delta)x) + \overline{F}_2((1-\delta)x) + \overline{F}_1(\delta x) + \overline{F}_2(\delta x) =$$
$$= (\overline{F}_1((1-\delta)x) + \overline{F}_2((1-\delta)x))(1 + o(1)) .$$

Tako je

$$1 \leq \liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{G}(x)}{\overline{F}_1(x) + \overline{F}_2(x)} \leq \limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{G}(x)}{\overline{F}_1(x) + \overline{F}_2(x)} \leq (1-\delta)^{-\alpha},$$

što pokazuje rezultat kada $\delta \to 0$. Lako se pokazuje da je $L_1 + L_2$ sporo varirajuća funkcija.
Alternativni dokaz ovog rezultata se može zasnivati na Karamata-Tauberovoj teoremi (Teoremi 2.4.8). Sledi značajna posledica izvedena indukcijom po n:

Posledica 3.1.2: Ako je $\bar{F}(x) = x^{-\alpha} L(x)$ za sve $\alpha \geq 0$ i $L \in R_0$, onda za sve $n \geq 1$ važi

$$\overline{F^{n*}}(x) \sim n\bar{F}(x), \quad x \to \infty .$$

Sada pretpostavimo da su $X_1, X_2, ..., X_n$ iid sa funkcijama raspodele F kao i u prethodnoj posledici. Označimo parcijalnu sumu od $X_1, X_2, ..., X_n$ sa $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ i njihov maksimum sa $M_n = \max\{X_1, X_2, ..., X_n\}$. Tada za sve $n \geq 2$

$$P[S_n > x] = \overline{F^{n*}}(x),$$

$$P[M_n > x] = \overline{F^n}(x) = \bar{F}(x) \sum_{k=0}^{n-1} F^k(x) \sim n\bar{F}(x), \quad x \to \infty . \tag{3.1}$$

Prema tome, koristeći prethodan zapis, Posledica 3.1.2 može biti preformulisana u

$$\bar{F} \in R_{-\alpha},\ \alpha > 0 \ \to \ P[S_n > x] \sim P[M_n > x],\ x \to \infty .$$

Ovo implicira da je, za funkcije raspodele sa regularno varirajućim repovima, rep funkcije raspodele sume S_n uglavnom određen repom funkcije raspodele maksimuma M_n. To je upravo jedna od intuitivnih predstava o raspodelama sa debelim repom ili velikim iznosima šteta.

"Pod pretpostavkom regularne varijacije, rep maksimuma slučajnih promenljivih određuje rep sume tih slučajnih promenljivih."

Podsetimo se da u Cramer-Lundbergovom modelu važi sledeća relacija (videti (1.11)):

$$\psi(u) = \frac{\rho}{1+\rho} \sum_{n=0}^{\infty} (1+\rho)^{-n} \overline{F_I^{n*}}(u), \quad u \geq 0,$$

gde je $F_I(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x \bar{F}(y)dy$ integral repa raspodele. Pod uslovom $\bar{F}_I \in R_{-\alpha}$ za neko $\alpha \geq 0$, možemo se nadati da važi sledeća asimptotska procena:

$$\frac{\psi(u)}{\bar{F}_I(u)} = \frac{\rho}{1+\rho} \sum_{n=0}^{\infty} (1+\rho)^{-n} \frac{\overline{F_I^{n*}}(u)}{\bar{F}_I(u)} \tag{3.2}$$

$$\to \frac{\rho}{1+\rho} \sum_{n=0}^{\infty} (1+\rho)^{-n} n = \frac{1}{\rho}, \quad u \to \infty . \tag{3.3}$$

Ključni problem koji ostaje otvoren u prethodnom izračunavanju je korak iz (3.2) u (3.3).

Da li možemo izvršiti "bezbednu" razmenu graničnih vrednosti i suma? Odgovor je potvrdan. Zbog toga je (3.3) prirodna procena propasti kadgod je F_I regularno varirajuća. Pokazaćemo da slična procena važi za mnogo širu klasu funkcija raspodele. Ovom prilikom, (3.3) se može preformulisati na sledeći način:

Za raspodele iznosa šteta sa regularno varirajućim repovima, verovatnoća konačne propasti $\psi(u)$ uz veliki uloženi početni kapital u je potpuno određena repom $\overline{F}(y)$ raspodele iznosa štete za velike vrednosti y, tj.

$$\psi(u) \sim \frac{1}{\rho\mu}\int_0^\infty \overline{F}(y)dy,\ u \to \infty .$$

Iz Tabele 1.2.11 izdvajamo sledeće tipične raspodele iznosa šteta pokrivene sledećim rezultatom: Paretovu, Burrovu, gama-logaritamsku, odsečene stabilne raspodele.

3.1.1 Cramer-Lundbergova teorija za subeksponencijalne raspodele

Kao što je pre bilo navedeno, ključan korak u izvođenju relacije (3.3) je bio u dokazivanju osobine $\overline{F^{n*}}(x) \sim n\overline{F}(x)$, za $x \to \infty$ i $n \geq 2$. To nas prirodno dovodi do klase funkcija raspodele koja omogućava veoma opštu teoriju procene propasti za velike iznose šteta. Glavni rezultat u ovom okruženju je Teorema 3.1.1.4 koju ćemo ubrzo navesti.

Definicija 3.1.1.1 (Subeksponencijalna funkcija):
Funkcija raspodele F sa nosačem $(0,\infty)$ je subeksponencijalna ako za sve $n \geq 2$ važi

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{F^{n*}}(x)}{\overline{F}(x)} = n . \tag{3.4}$$

Klasu subeksponencijalnih raspodela ćemo označavati sa S .

Primedba 3.1.1.1.1: Relacija (3.4) daje sledeću intuitivnu karakterizaciju subeksponencijalnosti (videti (3.1)):

$$\text{Za sve } n \geq 2,\ P[S_n > x] \sim P[M_n > x],\ x \to \infty \tag{3.5}$$

Da bismo proverili subeksponencijalnost, ne moramo pokazati (3.4) za sve $n \geq 2$.

Lema 3.1.1.2 (Dovoljan uslov za subeksponencijalnost):

$$\text{Ako } \limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\overline{F}(x)} \leq 2, \text{ onda } F \in S .$$

Dokaz: Pošto F označava funkciju raspodele pozitivne slučajne promenljive, direktno sledi

$$\overline{F^{2*}}(x) \le F^2(x),\ \text{tj. } \overline{F^{2*}}(x) \ge \overline{F^2}(x) \text{ za sve } x \ge 0.$$

Stoga je $\liminf\limits_{x\to\infty} \dfrac{\overline{F^{2*}}(x)}{\bar{F}(x)} \ge 2,$, pa prema uslovima leme granična relacija (3.4) važi za $n = 2$. Dokaz se onda izvodi indukcijom po n. Za $x \ge y > 0$,

$$\frac{\overline{F^{(n+1)*}}(x)}{\bar{F}(x)} = 1 + \frac{F(x) - \overline{F^{(n+1)*}}(x)}{\bar{F}(x)} \tag{3.6}$$

$$= 1 + \int_0^x \frac{\overline{F^{n*}}(x-t)}{\bar{F}(x)} dF(t) = 1 + \int_0^x \frac{\overline{F^{n*}}(x-t)}{\bar{F}(x)} dF(t)$$

$$= 1 + \left(\int_0^{x-y} + \int_{x-y}^x \right) \left(\frac{\overline{F^{n*}}(x-t)}{\bar{F}(x-t)} \frac{\bar{F}(x-t)}{\bar{F}(x)} \right) dF(t) = 1 + I_1(x) + I_2(x),$$

gde je $I_1(x) = \int_0^{x-y} \dfrac{\overline{F^{n*}}(x-t)}{\bar{F}(x-t)} \dfrac{\bar{F}(x-t)}{\bar{F}(x)} dF(t)$, a $I_2(x) = \int_{x-y}^{x} \dfrac{\overline{F^{n*}}(x-t)}{\bar{F}(x-t)} \dfrac{\bar{F}(x-t)}{\bar{F}(x)} dF(t)$.

Dodajući $-n+n$ u I_1 i primetivši da se $\dfrac{\overline{F^{n*}}(x-t)}{\bar{F}(x-t)} - n$ može napraviti proizvoljno malo za sve $0 \le t \le x-y$ i za dovoljno veliko y, sledi

$$I_1(x) = (n + o(1)) \int_0^{x-y} \frac{\bar{F}(x-t)}{\bar{F}(x)} dF(t).$$

Sada $\displaystyle\int_0^{x-y} \frac{\bar{F}(x-t)}{\bar{F}(x)} dF(t) = \frac{F(x) - F^{2*}(x)}{\bar{F}(x)} - \int_{x-y}^{x} \frac{\bar{F}(x-t)}{\bar{F}(x)} dF(t) = \frac{F(x) - F^{2*}(x)}{\bar{F}(x)} - J(x,y) =$

$= (1 + o(1)) - J(x,y)$, gde $J(x,y) \le \dfrac{F(x) - F(x-y)}{\bar{F}(x)} \to 0$ kad $x \to \infty$ prema Lemi 3.1.1.3 a), koja će uslediti. Zbog toga je $\lim\limits_{x\to\infty} I_1(x) = n$.

Konačno, pošto je $\dfrac{\overline{F^{n*}}(x-t)}{\bar{F}(x-t)}$ ograničeno kad $x - y \le t \le x$ i pošto je $\lim\limits_{x\to\infty} J(x,y) = 0$, onda $\lim\limits_{x\to\infty} I_2(x) = 0$, čime je dokaz završen.

Primedba 3.1.1.2.1: Uslov u Lemi 3.1.1.2 je trivijalno potreban za sve $F \in S$.

Primedba 3.1.1.2.2: Na početku gornjeg dokaza koristili smo činjenicu da za funkciju raspodele F pozitivne slučajne promenljive uvek važi $\liminf\limits_{x\to\infty} \dfrac{\overline{F^{2*}}(x)}{\bar{F}(x)} \ge 2$. Lako je pokazati da u ovom slučaju za sve $n \ge 2$ važi

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{n*}}(x)}{\overline{F}(x)} \geq n .$$

Zaista, važi $S_n \geq M_n$, što povlači $\overline{F^{n*}}(x) = P[S_n > x] \geq P[M_n > x] = \overline{F^n}(x)$. Zbog toga

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{n*}}(x)}{\overline{F}(x)} \geq \lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F^n}(x)}{\overline{F}(x)} = n .$$

Sledeća lema je neophodna ako želimo izvesti (3.3) iz (3.2) za subeksponencijalnu funkciju F_I.

Lema 3.1.1.3 (Neke osnovne osobine subeksponencijalnih funkcija):

a) Ako $F \in S$, onda uniformno na kompaktnim y-skupovima na $(0,\infty)$ važi

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} = 1 . \tag{3.7}$$

b) Ako važi (3.7), onda za sve $\varepsilon > 0$ važi

$$e^{\varepsilon x}\overline{F}(x) \to \infty,\ x \to \infty .$$

c) Ako $F \in S$, onda za dato $\varepsilon > 0$ postoji konačna konstanta K takva da za sve $n \geq 2$ važi

$$\frac{\overline{F^{n*}}(x)}{\overline{F}(x)} \leq K(1+\varepsilon)^n,\ x \geq 0 . \tag{3.8}$$

Dokaz: a) Za $x \geq y > 0$, prema (3.6)

$$\frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\overline{F}(x)} = 1 + \int_0^y \frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)} dF(t) + \int_y^x \frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)} dF(t) \geq 1 + F(y) + \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}(F(x)-F(y)) .$$

Tako, za dovoljno veliko x za koje je $F(x)-F(y) \neq 0$, važi

$$1 \leq \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} \leq \left(\frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\overline{F}(x)} - 1 - F(y) \right)(F(x)-F(y))^{-1} .$$

U poslednjoj proceni, desna strana izraza teži ka 1 kad $x \to \infty$. Uniformnost odmah sledi iz monotonosti po y. Alternativno, koristićemo da se osobina (3.7) može preformulisati u $\overline{F} \circ \ln \in R_0$ i onda ćemo primeniti Propoziciju 2.3.1.

b) Na osnovu a), $\overline{F} \circ \ln \in R_0$. Ali, tada zaključak $x^{\varepsilon}\overline{F}(\ln x) \to \infty, x \to \infty$ sledi direktno iz teoreme o reprezentaciji za R_0. (Videti Teoremu 2.3.3).

c) Neka je $\alpha_n = \sup_{x\geq 0} \frac{\overline{F^{n*}}(x)}{\overline{F}(x)}$. Koristeći (3.6), za svako $T > 0$ izvodimo

$$\alpha_{n+1} = 1 + \sup_{0\leq x\leq T} \int_0^x \frac{\overline{F^{n*}}(x-y)}{\overline{F}(x)} dF(y) + \sup_{x\geq T} \int_0^x \frac{\overline{F^{n*}}(x-y)}{\overline{F}(x-y)} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} dF(y) \leq$$

$$\leq 1 + A_T + \alpha_n \sup_{x\geq T} \frac{F(x) - F^{2*}(x)}{\overline{F}(x)} ,$$

gde je $A_T = \dfrac{1}{\overline{F}(T)} < \infty$. Sada, pošto $F \in S$, možemo za dato $\varepsilon > 0$ izabrati T takvo da $\alpha_{n+1} \le 1 + A_T + \alpha_n(1+\varepsilon)$. Odavde sledi $\alpha_n \le (1+A_T)\dfrac{(1+\varepsilon)^n}{\varepsilon}$, što implicira (3.8).

Primedba 3.1.1.3.1: Lema 3.1.1.3 b) opravdava naziv subeksponencijalna za $F \in S$. Zaista, $\overline{F}(x)$ opada prema nuli sporije od bilo koje eksponencijalne funkcije $e^{-\varepsilon x}$ za sve $\varepsilon > 0$. Štaviše, pošto za bilo koje $\varepsilon > 0$

$$\int_y^\infty e^{\varepsilon x} dF(x) \ge e^{\varepsilon y}\overline{F}(y),\ y \ge 0,$$

iz Leme 3.1.1.3 b) sledi da za $F \in S$ važi $\widehat{f}(-\varepsilon) = \infty$ za sve $\varepsilon > 0$.
Zbog toga Laplace-Stieltjesova transformacija subeksponencijalne funkcije raspodele obavezno ima singularitet u nuli. Kao što sledi iz dokaza Leme 3.1.1.3 b), poslednji uslov je ispunjen za veću klasu funkcija raspodele koje zadovoljavaju (3.7). Dalje proučavanje ovih klasa će biti dato u Odeljku 1.4.

Podsetimo se da za funkciju raspodele F sa konačnim očekivanjem μ važi

$$F_I(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x \overline{F}(y)dy\,.$$

Sledi još jedna značajna posledica gornjeg rezultata.

Teorema 3.1.1.4 (Cramer-Lundbergova teorema za velike iznose šteta, I):
Posmatrajmo Cramer-Lundbergov model uz uslov neto profita $\rho > 0$ i funkciju $F_I \in S$. Tada

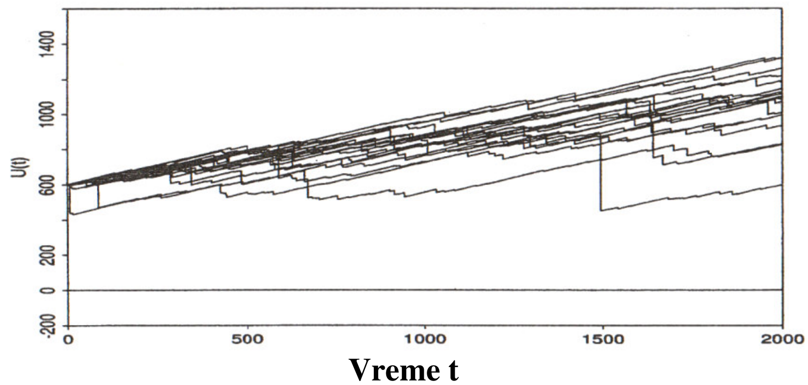
$$\psi(u) \sim \frac{1}{\rho}\overline{F}_I(u),\ \ \mathrm{u} \to \infty\,. \tag{3.9}$$

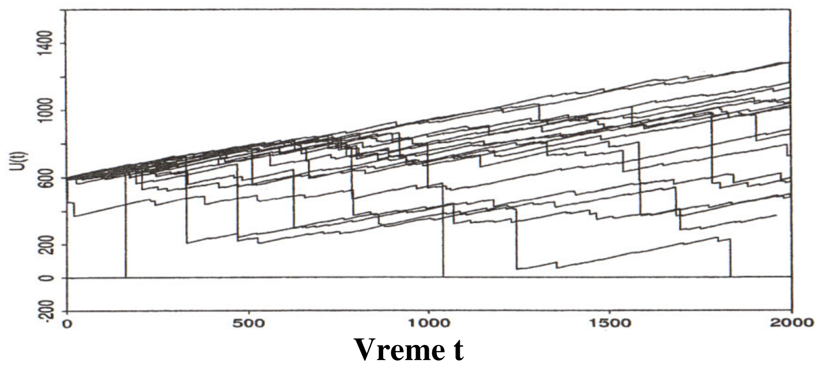
Dokaz: Pošto je $\dfrac{1}{1+\rho} < 1$, onda postoji neko $\varepsilon > 0$ takvo da $\dfrac{1+\varepsilon}{1+\rho} < 1$. Tako zbog (3.8) važi

$$(1+\rho)^{-n}\frac{\overline{F_I^{n*}}(u)}{\overline{F}_I(u)} \le K\frac{(1+\varepsilon)^n}{(1+\rho)^n},\ \ u \ge 0,$$

što zbog dominirane konvergencije omogućava razmenu graničnih vrednosti i suma u (3.2), što nas dovodi do željenog rezultata.

Grafik 3.1.1.5: Realizovane putanje procesa rizika $(U(t))_{t\geq 0}$ u slučaju lognormalne (gore) i Paretove (dole) raspodele iznosa šteta:





Ove realizacije treba uporediti sa realizacijama iz Grafika 1.1.2 (sa realizacijama eksponencijalnih raspodela).

Teorema 3.1.1.4 završava naš zadatak pronalaženja Cramer-Lundbergovog oblika procene u slučaju raspodela sa debelim repom. Za raspodele iznosa šteta sa subeksponencijalnim integralom repa raspodele, verovatnoća krajnje propasti je data relacijom (3.9).

Kao dodatak ovim funkcijama raspodela sa regularno varirajućim repovima, sledeći primeri iz Tabele 1.2.11 daju procenu za (3.9): lognormalna, Benktanderova raspodela tipa I, Benktanderova tipa II, Weibullova raspodela za $0 < \tau < 1$. To će biti pokazano u Odeljku 1.4.

Primer 3.1.1.6 (Regularna varijacija za složene Poissonove funkcije raspodela): Radi primenljivosti u osiguranju, ograničavamo pomenutu funkcionelu T da bude složena Poissonova raspodela, tj. pretpostavljamo da za neko $\lambda > 0$ važi

$$G(x) = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}F^{k*}(x),\ x \geq 0, \tag{3.10}$$

a to je funkcija raspodele za $\sum_{i=1}^{N} X_i$, gde su X_i iid slučajne promenljive sa funkcijom raspodele F, nezavisne od Poissonove slučajne promenljive N.

Primenjujući Laplace-Stieltjesove transformacije u (3.10), dobijamo $\widehat{g}(s)=e^{-\lambda(1-\widehat{f}(s))},\ s\geq 0$ i samim tim

$$1-\widehat{g}(s)\sim\lambda(1-\widehat{f}(s)),\ s\to 0\,. \qquad (3.11)$$

Klasu funkcija regularno varirajućih u beskonačnosti obeležavamo sa R^{∞}, a klasu regularno varirajućih funkcija u nuli sa R^{0}. Primenom Posledice 2.4.9 i (3.11), za $\alpha\in[0,1)$ sledi

$$\overline{G}\in R^{\infty}_{-\alpha}\rightleftarrows 1-\widehat{g}\ \in R^{0}_{\alpha}\longrightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{1-\widehat{g}\left(\frac{1}{x}\right)}{\overline{G}(x)}=\Gamma(1-\alpha)$$

$$\rightleftarrows 1-\widehat{f}\in R^{0}_{\alpha}\longrightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{1-\widehat{g}\left(\frac{1}{x}\right)}{1-\widehat{f}\left(\frac{1}{x}\right)}=\lambda$$

$$\rightleftarrows \overline{F}\in R^{\infty}_{-\alpha}\longrightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{1-\widehat{f}\left(\frac{1}{x}\right)}{\overline{F}(x)}=\Gamma(1-\alpha)\,.$$

Konačno, dobijamo

$$\overline{F}\in R^{\infty}_{-\alpha}\rightleftarrows \overline{G}\in R^{\infty}_{-\alpha}\longrightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{G}(x)}{\overline{F}(x)}=\lambda\,.$$

Propozicija 3.1.1.7 (Zatvorenost klase S u odnosu na konvolucioni koren):
Ako je $F^{n*}\in S$ za neki prirodan broj n, onda je $F\in S$.
Dokaz: Pošto $F^{n*}\in S$, iz Leme 3.1.1.3 a) znamo da

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{F^{n*}}(x-t)}{\overline{F^{n*}}(x)}=1, \qquad (3.12)$$

uniformno na kompaktnim skupovima koji sadrže t. Fiksirajmo $A>0$. Za $x>A$ imamo

$$1+\left(\int_0^A+\int_A^x\right)\frac{\overline{F^{n*}}(x-t)}{\overline{F^{n*}}(x)}d\overline{F^{n*}}(t)=\frac{\overline{F^{2n*}}(x)}{\overline{F^{n*}}(x)}\to 2,\quad x\to\infty\,.$$

Iz osobine dominirane konvergencije i iz (3.12) prvi integral konvergira ka $\overline{F^{n*}}(A)$, tako da

$$\lim_{x\to\infty}\int_A^x\frac{\overline{F^{n*}}(x-t)}{\overline{F^{n*}}(x)}dF^{n*}(t)=\overline{F^{n*}}(A)\,. \qquad (3.13)$$

Fiksirajmo $u>0$ tako da $\overline{F^{(n-1)*}}(u)>0$. Tada za $x>u$

$$\overline{F^{n*}}(x)=\overline{F}(x)+\left(\int_0^u+\int_u^x\right)\overline{F^{(n-1)*}}(x-t)dF(t)=$$

$$=\overline{F}(x)+J_1(x)+J_2(x)\,. \qquad (3.14)$$

Pokazujemo da za dato $\varepsilon > 0$ postoji $x_0 = x_0(u,\varepsilon)$ tako da

$$\frac{J_1(x)}{\overline{F^{n*}}(x)} \le 1 - \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2}, \quad x \ge x_0 \tag{3.15}$$

$$\frac{J_2(x)}{\overline{F^{n*}}(x)} \le \frac{\overline{F^{n*}}(u)}{F^{(n-1)*}(u)} + \frac{\varepsilon}{2}, \quad x \ge x_0 . \tag{3.16}$$

Da bismo dokazali (3.15), primetimo da

$$\frac{J_1(x)}{\overline{F^{n*}}(x)} \le \frac{\overline{F^{(n-1)*}}(x-u)}{\overline{F^{n*}}(x)} F(u) \le \frac{\overline{F^{(n-1)*}}(x-u)}{\overline{F^{(n-1)n*}}(x-u)} \frac{\overline{F^{(n-1)n*}}(x-u)}{\overline{F^{n*}}(x-u)} \frac{\overline{F^{n*}}(x-u)}{\overline{F^{n*}}(x)} .$$

Na desnoj strani, prvi količnik ima vrednost najviše $\frac{1}{n}$, na osnovu Primedbe 3 nakon Leme 3.1.1.2, dok drugi količnik konvergira ka $n-1$ jer $F^{n*} \in S$. Konačno, treći količnik konvergira ka 1 prema (3.12). Iz toga sledi (3.15). Za (3.16), na nekom skupu verovatnoća, neka S_{n-1}, X_n i S_n' budu nezavisne slučajne promenljive sa odgovarajućim funkcijama raspodela $F^{(n-1)*}$, F i F^{n*}. Neka je $S_n = S_{n-1} + X_n$. Tada

$$F^{(n-1)*}(u) J_2(x) \le F^{(n-1)*}(u) \int_u^x \overline{F^{n*}}(x-t) dF(t) = P\left[S_{n-1} \le u\right] P\left[u < X_n \le x < X_n + S_n'\right] =$$

$$= P\left[S_{n-1} \le u < X_n \le x < X_n + S'\right] \le P\left[u < S_n \le x + u < X_n \le x < X_n + S_n{}'\right] =$$

$$= P\left[u < S_n \le x < S_n + S_n{}'\right] + P\left[x < S_n \le x + u\right], \text{ tako da}$$

$$\frac{F^{(n-1)*}(u) J_2(x)}{\overline{F^{n*}}(x)} \le \int_u^x \frac{\overline{F^{n*}}(x-t)}{\overline{F^{n*}}(x)} dF^{n*}(t) + \frac{\overline{F^{n*}}(x) - \overline{F^{n*}}(x+u)}{\overline{F^{n*}}(x)} .$$

Desna strana konvergira ka $\overline{F^{n*}}(u)$ na osnovu (3.12) i (3.13). Tada sledi (3.16).
Iz (3.14)-(3.16) dobijamo

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x)}{\overline{F^{n*}}(x)} \ge 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{\overline{F^{n*}}(u)}{\overline{F^{(n-1)*}}(u)},$$

Desna strana konvergira ka $\frac{1}{n}$ kad $u \to \infty$, pa $\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{n*}}(x)}{\overline{F}(x)} \le n$. Zbog toga na osnovu Leme 3.1.1.2 sledi $F \in S$.

Definicija 3.1.1.8 (Složeni Poissonov proces):
Neka je Λ slučajna promenljiva sa $P\left[\Lambda > 0\right] = 1$ i neka je $N = (N(t))_{t\ge 0}$ homogeni Poissonov proces sa intenzitetom 1, nezavisan od Λ. Proces $(N(\lambda t))_{t\ge 0}$ je složen Poissonov proces.

Slučajna promenljiva Λ u gornjoj definiciji se može interpretirati kao slučajna promena u vremenu. Procesi opštiji od složenog Poissonovog procesa, kao Coxovi procesi, su dugo bili alati aktuara. Složeni Poissonovi procesi su susreću u svakoj standardnoj literaturi iz teorije rizika. Homogen Poissonov proces sa intenzitetom $\lambda > 0$ je specijalan slučaj složenog Poissonovog procesa za degenerisanu slučajnu promenljivu, tj. za Poissonovu slučajnu promenljivu za koju važi $P[\Lambda = \lambda] = 1$.

Teorema 3.1.1.9 (Subeksponencijalnost i složene Poissonove funkcije raspodela): Neka su F, G i λ povezani na osnovu relacije (3.10). Tada su sledeće tvrdnje ekvivalentne:

a) $G \in S$,

b) $F \in S$,

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\overline{G}(x)}{\overline{F}(x)} = \lambda$.

Dokaz: Deo $b) \to a) \wedge c)$ sledi slično kao u dokazu Teoreme 3.1.1.4, na osnovu Leme 3.1.1.3, dominirane konvergencije i Leme 3.1.1.2.

Deo $a) \to b)$: prvo pretpostavimo da $0 < \lambda < \ln 2$. Razmotrimo funkciju raspodele

$$R(x) = \frac{1}{e^{\lambda} - 1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} F^{k*}(x),\ x \geq 0.$$

Nakon uvođenja Laplace-Stieltjesovih transformacija, za sve $s \geq 0$ dobijamo

$$\widehat{r}(s) = \frac{e^{\lambda \widehat{f}(s)} - 1}{e^{\lambda} - 1},$$

$$\lambda \widehat{f}(s) = \ln(1 - (1 - e^{\lambda})\widehat{r}(s)),$$

i pošto je $e^{\lambda} - 1 < 1$, imamo

$$\lambda \widehat{f}(s) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{\lambda})^k}{k} \widehat{r}^{\,k}(s).$$

Inverzijom dobijamo da za sve $x \geq 0$ važi

$$\frac{\lambda \overline{F}(x)}{\overline{R}(x)} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{\lambda})^k}{k} \frac{\overline{R^{k*}}(x)}{\overline{R}(x)}. \tag{3.17}$$

Štaviše, $e^{\lambda}\overline{G}(x) = (e^{\lambda} - 1)\overline{R}(x)$, pa iz $G \in S$ sledi $R \in S$. Birajmo $\varepsilon > 0$ tako da $(e^{\lambda} - 1)(1 + \varepsilon) < 1$. Na osnovu Leme 3.1.1.3 c) postoji $K = K(\varepsilon) < \infty$ tako da $\dfrac{\overline{R^{n*}}(x)}{\overline{R}(x)} \leq K(1 + \varepsilon)^n$ važi za sve $x \geq 0$ i sve n. Dakle, korišćenjem dominirane konvergencije u (3.17) dobijamo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x)}{\overline{R}(x)} = \frac{e^{\lambda} - 1}{\lambda e^{\lambda}},$$

pa iz Leme 3.1.1.2 sledi $F \in S$.

Uzmimo sada $\lambda > 0$ proizvoljno, sledi da za λ postoji ceo broj $l = l(\lambda) > 0$ takav da $\frac{\lambda}{l} < \ln 2$. Definišimo za sve $x \geq 0$ funkciju

$$H(x) = e^{-\lambda/l} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda/l\right)^k}{k!} F^{k*}(x),$$

pa $\widehat{h}(s) = \left(\exp\left\{-\lambda\left(1 - \widehat{f}(s)\right)\right\}\right)^{1/l} = \widehat{g}^{1/l}(s), \quad s \geq 0$.

Ovo implicira da $G = H^{l*} \in S$, iz čega na osnovu Propozicije 3.1.1.7 sledi $H \in S$. Iz prvog dela dokaza dobijamo $F \in S$ (jer je $\frac{\lambda}{l} < \ln 2$).

Deo dokaza $c) \to b)$: Za sve $x \geq 0$,

$$\overline{F^{2*}}(x) = \frac{2}{\lambda^2} e^{\lambda} \left(\overline{G}(x) - e^{-\lambda} \sum_{k \neq 2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \overline{F^{k*}}(x) \right).$$

Deljenjem obeju strana sa $\overline{F}(x)$ dobijamo $\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\overline{F}(x)} \leq 2$, pa na osnovu (3.18) sledi $F \in S$.

Teorema 3.1.1.10 (Subeksponencijalnost i složene funkcije raspodela):
Neka je (p_n) mera verovatnoće na N_0 takva da za neko $\varepsilon > 0$ važi $\sum_{n=0}^{\infty} p_n (1+\varepsilon)^n < \infty$. Stavimo $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n F^{n*}(x), \quad x \geq 0$.

a) Ako $F \in S$, onda $G \in S$ i

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{G}(x)}{\overline{F}(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} n\, p_n \,. \tag{3.18}$$

b) Obrnuto, ako važi (3.18) i ako postoji $l \geq 2$ takvo da je $p_l > 0$, onda $F \in S$.

Dokaz: a) Primenjuje se isti argument kao i u dokazu Teoreme 3.1.1.4.

b) Za fiksirano l, $p_l \frac{\overline{F^{l*}}(x)}{\overline{F}(x)} \leq \frac{\overline{G}(x)}{\overline{F}(x)} - \sum_{k=0}^{\infty} p_k \frac{\overline{F^{k*}}(x)}{\overline{F}(x)} + p_l \frac{\overline{F^{l*}}(x)}{\overline{F}(x)}$.

Pošto iz (3.18) i Fatouove leme sledi $p_l \limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{l*}}(x)}{\overline{F}(x)} \leq p_l l$, onda na osnovu Leme 3.1.1.2 i $p_l > 0$ dobijamo $F \in S$.

Teorema 3.1.1.10 je uopštenje Teoreme 3.1.1.4 jer se bilo koja složena geometrijska raspodela

$$G(x) = (1-\alpha)\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n F^{n*}(x), \; 0 < \alpha < 1 \tag{3.19}$$

može zapisati kao složena Poissonova raspodela. Zaista, korišćenjem Laplace-Stieltjesovih transformacija se dobija $\widehat{g}(s)=(1-\alpha)\left(1-\alpha\widehat{f}(s)\right)$, što je složenog Poissonovog oblika $\widehat{g}(s)=\exp\left\{-\lambda\left(1-\widehat{h}(s)\right)\right\}$, gde je $\lambda=\ln\left(\dfrac{1}{1-\alpha}\right)$, a $\widehat{h}(s)=-\dfrac{\ln\left(1-\alpha\widehat{f}(s)\right)}{\lambda}$. U distributivnom obliku to postaje

$$G(x)=e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}H^{n*}(x),$$

gde

$$H(x)=-\frac{1}{\ln(1-\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n}F^{n*}(x).$$

Posledica 3.1.1.11 (Subeksponencijalnost i složene geometrijske funkcije raspodela): Neka $0<\alpha<1$ i neka su F i G povezane relacijom iz (3.19). Tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:

a) $F\in S$,

b) $G\in S$,

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\overline{G}(x)}{\overline{F}(x)}=\dfrac{\alpha}{1-\alpha}$.

Sa matematičkog stanovišta, rezultat Teoreme 3.1.1.4 se može znatno popraviti. Posledica 3.1.1.11 dovodi do sledećeg rezultata.

Teorema 3.1.1.12 (Cramer-Lundbergova teorema za velike iznose šteta II): Posmatrajmo Cramer-Lundergov model uz uslov neto profita $\rho>0$. Tada su ekvivalentna sledeća tvrđenja:

a) $F_I\in S$,

b) $1-\psi(u)\in S$,

c) $\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{\psi(u)}{\overline{F}_I(u)}=\dfrac{1}{\rho}$.

Stoga, procena (3.9) je moguća jedino pod pretpostavkom $F_I\in S$. U slučaju Cramer-Lundbergove teorije, S je, dakle, prirodna klasa što se tiče procena propasti kad god je Cramer-Lundbergov uslov narušen. U Odeljku 1.4 ćemo se vratiti na uslov $F_I\in S$ i povezati ga sa uslovima na F.

3.1.2 Ukupan iznos šteta u slučaju subeksponencijalne raspodele

U Odeljku 3.1.1 smo istakli značaj klase S za procenu verovatnoća propasti za velike iznose šteta. Sa stanovišta matematike je značajno da se u Cramer-Lundbergovom modelu $1-\psi(u)$ može izraziti kao složena geometrijska suma data u (1.11). Iste metode kao metode korišćene u dokazu Teoreme 3.1.1.4 daju ocenu raspodele ukupnog iznosa šteta za velike iznose šteta. Zaista, u Odeljku 1.1. smo konstatovali da u Cramer-Lundbergovom modelu za sve $t \geq 0$ važi

$$G_t(x) = P\left[S(t) \leq x\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} F^{n*}(x),\ x \geq 0\,, \tag{3.20}$$

gde je $S(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} X_k$ ukupan (agregatni) iznos šteta nastalih do trenutka t.

Proces nastajanja šteta $(N(t))_{t\geq 0}$ u (3.20) je homogen Poissonov proces sa intenzitetom $\lambda > 0$, tako da

$$P\left[N(t) = n\right] = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t},\ n \geq 0\,. \tag{3.21}$$

Istim izračunavanjem koje dovodi do (3.20) bi se, za uopšten proces nastanka šteta (po pretpostavci nezavisan od procesa iznosa šteta $(X_k)_{k\in N}$), dobila formula

$$G_t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_t(n) F^{n*}(x),\ \ x \geq 0\,, \tag{3.22}$$

gde $p_t(n) = P\left[N(t) = n\right],\ n \in \mathrm{N}_0$ definiše meru verovatnoće na N_0. U slučaju subeksponencijalne funkcije raspodele F, isti argument koji je dat u dokazu Teoreme 3.1.1.4 dovodi nas do sledećeg rezultata:

Teorema 3.1.2.1 (Ukupan iznos šteta u slučaju subeksponencijalne raspodele):

Posmatrajmo (3.22) sa $F \in S$, fiksirajmo $t > 0$ i pretpostavimo da $p_t(n)$ ispunjava

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1+\varepsilon)^n p_t(n) < \infty \tag{3.23}$$

za neko $\varepsilon > 0$. Tada je $G_t \in S$ i

$$\overline{G}_t(x) \sim E\left[N(t)\overline{F}(x)\right],\ \mathrm{x} \to \infty\,. \tag{3.24}$$

Primedba 3.1.2.1.1: Uslov (3.13) je ekvivalentan činjenici da je funkcija generatrisa verovatnoća $\sum_{n=0}^{\infty} s^n p_t(n) < \infty$ realna analitička u okolini od $s = 1$.

Primer 3.1.2.2 (Ukupan iznos šteta u Cramer-Lundbergovom modelu):

Neka je $(N(t))_{t\geq 0}$ homogen Poissonov proces sa individualnim verovatnoćama (3.21), tako da $p_t(n)$ trivijalno zadovoljava (3.13). Tada za sve $F \in S$

$$\overline{G}_t(x) \sim \lambda t \overline{F}(x),\ x \to \infty\,.$$

Primer 3.1.2.3 (Ukupan iznos šteta u slučaju negativne binomne raspodele):

Negativni binomni proces je proces pristizanja zahteva za odšetu koji zadovoljava

$$p_t(n)=\binom{\gamma+n-1}{n}\left(\frac{\beta}{\beta+t}\right)^{\gamma}\left(\frac{t}{\beta+t}\right)^{n},\ \mathrm{n}\in \mathrm{N}_0,\ \beta,\gamma>0. \tag{3.25}$$

Negativni binomni proces je, za razliku od homogenog Poissonovog procesa, glavni realističan model za raspodelu broja zahteva za odštetu primenjivan u osiguranju. Lako se može proveriti da

$$E\left[N(t)\right]=\frac{\gamma t}{\beta}, \qquad \operatorname{var}\left[N(t)\right]=\frac{\gamma t(1+\frac{t}{\beta})}{\beta}.$$

Označivši sa $q=\dfrac{\beta}{\beta+t}$, $p=\dfrac{t}{\beta+t}$, korišćenjem Stirlingove formule $\Gamma(x+1)\sim\sqrt{2\pi x}\left(\dfrac{x}{e}\right)^{x}$, $\mathrm{x}\to\infty$ iz (3.25) izvodimo

$$p_t(n)\sim\frac{p^n q^{\gamma} n^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)},\ \mathrm{n}\to\infty.$$

Time je uslov (3.13) zadovoljen, pa za sve $F\in S$ važi

$$\overline{G}_t(x)\sim\frac{\gamma t}{\beta}\overline{F}(x),\ x\to\infty.$$

Podsetimo se da u homogenom Poissonovom procesu

$$E\left[N(t)\right]=\lambda t=\operatorname{var}\left[N(t)\right].$$

Za negativni binomni proces,

$$\operatorname{var}\left[N(t)\right]=\left(1+\frac{t}{\beta}\right)E\left[N(t)\right]>E\left[N(t)\right],\ t>0. \tag{3.26}$$

Uslov (3.26) predstavlja prerasipanje (over-dispersion) procesa. Prerasipanje se može pojaviti na više različitih načina:

a) prilikom posmatranja homogenog Poissonovog procesa nad intervalom čija dužina je slučajna, a ne fiksirana.

b) kada su podaci dobijeni pomoću spljoštenog Poissonovog procesa, ili

c) u proučavanju ponašanja i naklonosti ka nesrećnim slučajevima gde postoji varijabilnost između subjekata.

Najčešće se c) pronalazi u analizama podataka u osiguranju. Osobine pomenute pod c) se mogu modelirati pomoću složenih Poissonovih procesa. Njihova precizna definicija data u produžetku je motivisana sledećim primerom:

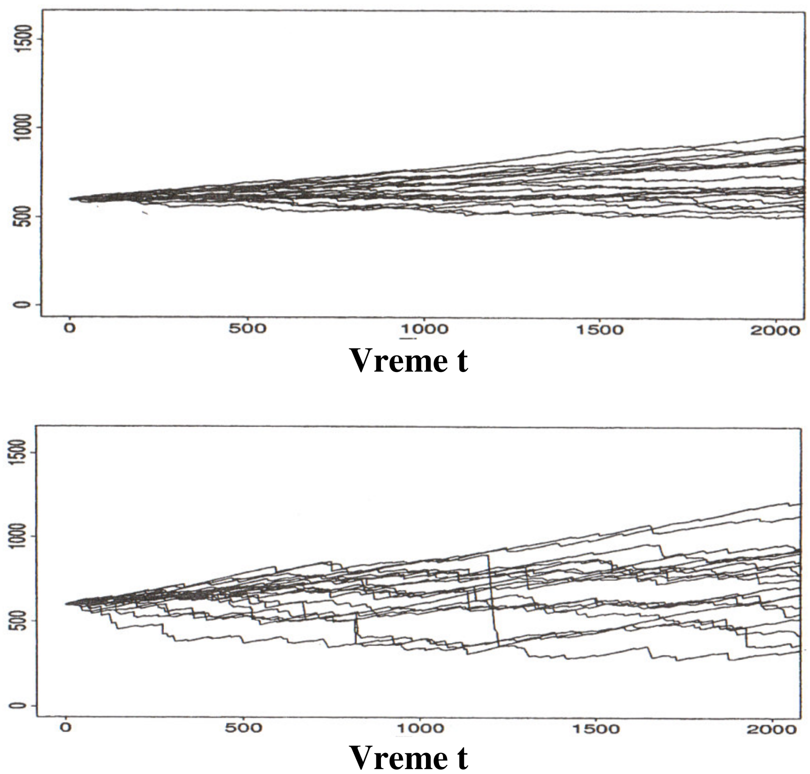
Primer 3.1.2.4: Pretpostavimo da je Λ slučajna promenljiva sa $\Gamma(\gamma,\beta)$ raspodelom i gustinom $f_{\Lambda}(x)=\dfrac{\beta^{\gamma}}{\Gamma(\gamma)}x^{\gamma-1}e^{-\beta x},\ x>0$. Tada

$$\int_0^{\infty}\frac{(xt)^n}{n!}e^{-xt}f_{\Lambda}(x)dx=\frac{\Gamma(n+\gamma)}{n!\Gamma(\gamma)}\left(\frac{\beta}{\beta+t}\right)^{\gamma}\left(\frac{t}{\beta+t}\right)^{n},\ n=0,1,2...$$

Poslednja formula je jednaka $p_t(n)$ u (3.15). Tako smo izveli negativno-binomne verovatnoće uvodeći slučajnost u Poissonov parametar λ i posmatrajući ga kao slučajnu promenljivu u gama raspodeli. To je upravo primer složenog Poissonovog procesa.

Grafik 3.1.2.5 predstavlja realizovane putanje procesa rizika $U(t)_{t\geq 0}$ sa linearnim prihodom od premije i procesom ukupnog iznosa šteta $S(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} X_i$, gde je $N(t)_{t\geq 0}$ negativan binomni proces. Raspodela veličina šteta je ili eksponencijalna (gornji grafik), ili lognormalna (donji grafik).

Grafik 3.1.2.5:



Poređenjem sa Grafikom 1.1.2, gornji deo grafika jasno pokazuje efekat prerasipanja. Ako uporedimo donji deo Grafika 1.1.2 sa odgovarajućim Grafikom 3.1.1.5, primećujemo nagomilavanje većeg broja manjih iznosa šteta.

U narednom odeljku ćemo pokazati da je uslov $F_I \in S$ takođe zadovoljen za lognormalnu raspodelu F. Kad god je F Paretova raspodela, odmah sledi da $F_I \in S$. U ovim oblicima (Paretova, lognormalna funkcija raspodele F), Teorema 3.1.1.4 ima interesantnu istoriju koju možemo pronaći u delu Olofa Thorina. U ovom radu, ocena $\psi(u) \sim k\int_u^{\infty} \overline{F}(x)dx, \quad u \to \infty$ za neku konstantu k je izvedena za široku klasu raspodela pretpostavljajući određene uslove regularnosti:

$$F(y) = \int_0^{\infty} (1 - e^{-yt})V'(t)dt, \; y \geq 0,$$

gde je V' neprekidna, pozitivna za $t > 0$ za koju važi

$$V'(0) = 0, \text{ i } \int_0^{\infty} V'(t)dt.$$

Interesantan specijalan slučaj je izveden birajući da $V'(t)$ bude funkcija gustine za gama raspodelu sa parametrom oblika većim od 1, koja daje Paretov slučaj. Teorema 3.1.1.12 se može formulisati u najopštijem obliku za model obnavljanja omogućavajući realne, ali ne obavezno pozitivne vrednosti šteta. Ispostavlja se da tako i u ovom slučaju, pod pretpostavkom da $F_I \in S$, važi ocena

$$\psi(u) \sim \frac{1}{\rho} \overline{F}_I(u).$$

U modelu obnavljanja nemamo potpune relacije ekvivalencije kao u Cramer-Lundbergovom modelu.

Neke metode aproksimacije za $\overline{G}_t(x)$ su na primer: brza Fourierova transformacija, Panjerova rekurzija, tzv. aproksimacija sedlaste tačke. Pored navedenih analitičkih metoda, mogu se koristiti i statističke procene vrednosti $\overline{G}_t(x)$.

3.2 CRAMER-LUNDBERGOVA TEORIJA ZA VELIKE IZNOSE ŠTETA

3.2.1 Neke srodne klase raspodela sa debelim repom:

Da bismo postavili direktne uslove na F tako da važi Cramer-Lundbergova procena raspodele sa debelim repom u Teoremi 3.1.1.4, prvo ćemo proučiti neke srodne klase funkcija raspodela sa debelim repom.

Klasa dominirano varirajućih raspodela se definiše kao

$$\mathcal{D} = \left\{ F \text{ raspodela na } (0,\infty): \; \limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}\left(\frac{x}{2}\right)}{\overline{F}(x)} < \infty \right\}.$$

Već smo naišli na elemente sledećih familija:

$$\mathcal{L}=\left\{F \text{ raspodela na } (0,\infty)\text{: } \lim_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}=1 \textit{ za sve } y>0\right\},$$

$$\mathcal{R}=\left\{F \text{ raspodela na } (0,\infty)\text{: } \overline{F}\in R_{-\alpha} \text{ za neko } \alpha\geq 0\right\},$$

$$\mathcal{K}=\left\{F \text{ raspodela na } (0,\infty)\text{: } \widehat{f}(-\varepsilon)=\int_0^\infty e^{\varepsilon x}dF(x)=\infty \text{ za sve } \varepsilon>0\right\}.$$

Iz definicija sporo varirajućih funkcija sledi da

$$F\in\mathcal{L} \textit{ ako i samo ako } \overline{\mathrm{F}}\circ\ln\in\mathrm{R}_0.$$

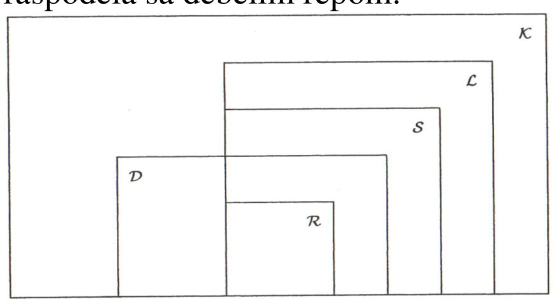
Važe sledeće relacije:

a) $\mathcal{R}\subset\mathcal{S}\subset\mathcal{L}\subset\mathcal{K}$,

b) $\mathcal{L}\cap\mathcal{D}\subset\mathcal{S}$,

c) $\mathcal{D}\not\subset\mathcal{S}$ i $\mathcal{S}\not\subset\mathcal{D}$.

Grafik 3.2.1.1 Klase raspodela sa debelim repom:



Situacija je sažeto prikazana na Grafiku 3.2.1.1. Većina implikacija je jednostavna i neke od njih su već dokazane ($\mathcal{R}\subset\mathcal{S}$ u Posledici 3.1.2 i $\mathcal{L}\subset\mathcal{K}$ u Primedbi 3.1.1.3.1 posle dokaza Leme 3.1.1.3). U literaturi se često nailazi na grešku da $\mathcal{D}\subset\mathcal{S}$; sledeća funkcija raspodele daje kontraprimer:

Primer 3.2.1.2 (Peter and Paul raspodela):

Posmatrajmo igru gde prvi igrač (Peter), baca fer novčić sve dok prvi put ne padne glava novčića, i pritom od drugog igrača (Paula) dobija 2^k rubalja ako je glava pala u k-tom pokušaju. Funkcija raspodele Peterovog dobitka je

$$F(x)=\sum_{k:\,2^k\leq x}2^{-k},\ x\geq 0.$$

Problem koji se javlja u ovoj igri je čuveni St. Petersburški paradoks (Detaljno je opisan u radu Fellera). Direktno sledi da za sve $k\in N$ važi $\frac{\overline{F}(2^k-1)}{\overline{F}(2^k)}=2$, tako da $F\notin\mathcal{L}$, a samim tim $F\notin\mathcal{S}$. S druge strane, lako se pokazuje da $F\in\mathcal{D}$.

Rezultat $\mathcal{S} \neq \mathcal{L}$ nije trivijalan. Što se tiče relacije između $\mathcal{S}\, i\, \mathcal{L}$, pretpstavimo da za $x \geq 0$ važi

$$\frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\overline{F}(x)} = 1 + \int_0^x \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} dF(y).$$

Prema definiciji, $F \in \mathcal{L}$ implicira da za svako fiksno y gornja podintegralna funkcija konvergira ka 1. Na osnovu Teoreme o uniformnoj konvergenciju sporo varirajućih funkcija (Propozicija 2.3.1), ova konvergencija takođe važi uniformno na kompaktnim intervalima za y. Da bismo izvršili razmenu graničnih procesa i integrala, potreban nam je neki uslov uniformne integrabilnosti (dominirana konvergencija, monotonost po x...). Generalno, za $F \in \mathcal{L}$ ovi uslovi ne važe.

Prvo razmotrimo pripadanje klasi $\mathcal{S}$ uopšteno. Već smo utvrdili da $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ i $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$ (Lema 3.1.1.3), što implicira da za sve $\varepsilon > 0$ važi $e^{\varepsilon x}\overline{F}(x) \to \infty,\ \mathrm{x} \to \infty$. Iz toga direktno sledi da eksponencijalna funkcija raspodele $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ ne pripada klasi $\mathcal{S}$. Naravno, to se može jednostavno proveriti direktno, ili iskoristiti činjenicu da $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$ i odmah zaključiti da $F \notin \mathcal{L}$.

3.2.2 Osobine subeksponencijalnih funkcija raspodele

Klasu subeksponencijalnih funkcija S smo uveli u Definiciji 3.1.1.1, relacijom (3.4). Iako je subeksponencijalnost u osnovi uslov postavljen na funkciju raspodele nenegativnih slučajnih promenljivih, potrebna nam je verzija slučajne promenljive sa realnim vrednostima.

Definicija 3.2.2.1: Funkciju raspodele G sa nosačem $(-\infty, \infty)$ ćemo nazvati subeksponencijalnom funkcijom nad R ako postoji nenegativna subeksponencijalna funkcija raspodele F takva da $\overline{F}(x) \sim \overline{G}(x)$ kad $x \to \infty$.

U Lemi 3.1.1.2 smo dokazali da ako $F \in S$, onda je dovoljno proveriti (3.4) za $n = 2$ ili proveriti uslov

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\overline{F}(x)} \leq 2. \tag{3.27}$$

Malo uopštenje za (3.27) je sadržano u sledećem rezultatu.

Lema 3.2.2.2 (Zatvorenost klase S pod uslovima ekvivalencije repova raspodela): Neka su F i G funkcije raspodela definisane nad $(0, \infty)$.

Ako $F \in S$ i $\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{G}(x)}{\overline{F}(x)} = c \in (0, \infty)$, tada i $G \in S$.

Dokaz: Neka je $v>0$ fiksirano i neka $x>2v$, neka su X,Y nezavisne slučajne promenljive sa funkcijom raspodele G. Tada

$$\{X+Y>x\}=\{X\le v, X+Y>x\}\cup\{Y\le v, X+Y>x\}\cup$$
$$\cup\{v<X\le x-v, X+Y>x\}\cup\{Y>v, X>x-v\}.$$

gde su gornji događaji disjunktni, pa stoga

$$\frac{\overline{G^{2*}}(x)}{\overline{G}(x)}=2\int_0^v\frac{\overline{G}(x-y)}{\overline{G}(x)}dG(y)+\int_v^{x-v}\frac{\overline{G}(x-y)}{\overline{G}(x)}dG(y)+\frac{\overline{G}(x-v)}{\overline{G}(x)}\overline{G}(v)= \tag{3.28}$$
$$=I_1(x,v)+I_2(x,v)+I_3(x,v)$$

Prema Lemi 3.1.1.3 a), $I_1(x,v)\to 2G(v)$ i $I_3(x,v)\to\overline{G}(v)$ kad $x\to\infty$. Za $\varepsilon>0$ postoji $x_0=x_0(\varepsilon)$ takvo da za sve $x\ge x_0$ važi

$$c-\varepsilon\le\frac{\overline{G}(x)}{\overline{F}(x)}\le c+\varepsilon.$$

Zbog toga, za dovoljno veliko v, $v\le y\le x-v$, važi

$$\frac{\overline{G}(x-y)}{\overline{F}(x-y)}\le c+\varepsilon \text{ i } \frac{\overline{F}(x)}{\overline{G}(x)}\le\frac{1}{c-\varepsilon}.$$

Sledi da

$$I_2(x,v)\le\frac{c+\varepsilon}{c-\varepsilon}\int_v^{x-v}\frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}dG(y)=\frac{c+\varepsilon}{c-\varepsilon}\left(\frac{\overline{F}(x-v)}{\overline{F}(x)}\overline{G}(v)-\frac{\overline{F}(v)}{\overline{F}(x)}\overline{G}(x-v)+\int_v^{x-v}\frac{\overline{G}(x-t)}{\overline{F}(x)}d\overline{F}(t)\right)\le$$
$$\le\frac{c+\varepsilon}{c-\varepsilon}\left(\frac{\overline{F}(x-v)}{\overline{F}(x)}\overline{G}(v)-\overline{F}(v)\frac{\overline{G}(x-v)}{\overline{G}(x)}\frac{\overline{G}(x)}{\overline{F}(x)}+(c+\varepsilon)\int_v^{x-v}\frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)}dF(t)\right)\to$$
$$\to-\frac{c+\varepsilon}{c-\varepsilon}\left(\overline{F}(v)c-\overline{G}(v)-(c+\varepsilon)o_v(1)\right),\quad x\to\infty$$, gde $o_v(1)$ znači $\lim_{v\to\infty}o_v(1)=0$, što sledi iz $F\in S$. Zbog toga,

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{G^{2*}}(x)}{\overline{G}(x)}\le 2G(v)-\frac{c+\varepsilon}{c-\varepsilon}\left(\overline{F}(v)c-\overline{G}(v)-(c+\varepsilon)o_v(1)\right)+\overline{G}(v)\to 2,\quad v\to\infty,$$ jer je $G\in S$ na osnovu (3.27).

Propozicija 3.2.2.3: (Teorema o karakterizaciji klase S):
Neka je F apsolutno neprekidna funkcija raspodele sa gustinom f i hazardnom stopom $q(x)$ koja u beskonačnosti opada prema nuli. Tada

a) $F\in S$ ako i samo ako

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x e^{yq(x)}f(y)dy=1. \tag{3.29}$$

b) Ako je funkcija $x\mapsto\exp\{xq(x)\}$ integrabilna nad $[0,\infty)$, onda $F\in S$.

Dokaz: Označimo sa $Q(x)=\int_0^x q(y)dy=-\ln\overline{F}(x)$ asociranu hazardnu funkciju. Tada

$$\frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\overline{F}(x)}-1\geq\int_0^x e^{yq(x)-Q(y)}q(y)dy\geq\int_0^x e^{-Q(y)}q(y)dy=F(x).$$

Pomoću ovih nejednakosti smo dokazali da je uslov (3.20) potreban za $F\in S$.Da bismo dokazali dovoljan uslov, pretpostavimo da važi uslov (3.29). Nakon razdvajanja gornjeg integrala nad intervalom $[0,x]$ na dva integrala nad podintervalima $\left[0,\frac{x}{2}\right]$ i $\left(\frac{x}{2},x\right]$ i nakon uvođenja smene u drugom integralu, dobijamo

$$\int_0^x e^{Q(x)-Q(x-y)-Q(y)}q(y)dy=\int_0^{\frac{x}{2}} e^{Q(x)-Q(x-y)-Q(y)}q(y)dy+\int_0^{\frac{x}{2}} e^{Q(x)-Q(x-y)-Q(y)}q(x-y)dy=$$
$$=I_1(x)+I_2(x).$$

Na osnovu istog argumenta o monotonosti sledi $I_1(x)\geq F\left(\frac{x}{2}\right)$. Štaviše, za $y\leq\frac{x}{2}$ i $x-y\geq\frac{x}{2}$ važi

$$Q(x)-Q(x-y)\leq yq(x-y)\leq yq\left(\frac{x}{2}\right).$$

Zbog toga

$$F\left(\frac{x}{2}\right)\leq I_1(x)\leq\int_0^{\frac{x}{2}} e^{yq\left(x/2\right)-Q(y)}q(y)dy,$$

a iz (3.20) sledi da

$$\lim_{x\to\infty}I_1(x)=1. \tag{3.30}$$

Podintegralna funkcija u $I_1(x)$ tačkasto konvergira ka $f(y)=q(y)e^{-Q(y)}$. Tako možemo preformulisati (3.30) u "podintegralna funkcija u $I_1(x)$ konvergira u f-srednjem ka 1." Podintegralna funkcija u $I_2(x)$ tačkasto konvergira ka 0, a svakako je ograničena podintegralnom funkcijom od $I_1(x)$. Iz ove konstatacije i iz Prattove leme dobijamo da $\lim_{x\to\infty}I_2(x)=0$. Sledi da $\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\overline{F}(x)}-1=1$, tj. $F\in S$, čime smo dokazali dovoljan uslov za (3.29) i tvrdnju a).

b) Tvrdnja sledi neposredno iz Lebesgueove teoreme o dominiranoj konvergenciji, jer je $q(x)\leq q(y)$ za sve $y\leq x$.

Tako, zasad znamo da funkcije raspodele sa repom asimptotskog ponašanja stepene funkcije (tj. $F\in\mathcal{R}$) pripadaju klasi $\mathcal{S}$. S druge strane, eksponencijalne funkcije (i funkcije raspodele F čiji repovi rastu brže od eksponencijalnih) ne pripadaju klasi $\mathcal{S}$. Šta se može reći za klase koje se po obliku nalaze "između", kao što je npr. značajna klasa slučajnih promenljivih sa raspodelama Weibullovog tipa kod kojih $\bar{F}(x) \sim e^{-x^{\tau}}$ za $\tau \in (0,1)$?

Propozicija 3.2.2.3, formulisana u terminima gustine f od F, stope hazarda $q = \frac{f}{\bar{F}}$ i hazardne funkcije $Q(x) = \int_0^x q(y)dy$ odmah daje sledeći primer u $\mathcal{S}$. Primetimo da, koristeći gornji zapis, $\bar{F}(x) = e^{-Q(x)}$.

Primer 3.2.2.4 (Primeri subeksponencijalnih funkcija):
a) Neka je F Weibullova raspodela sa parametrima $\tau \in (0,1)$, $c > 0$, tj. neka

$$\bar{F}(x) = e^{-cx^{\tau}},\ x \geq 0.$$

Tada je $f(x) = c\tau x^{\tau-1} e^{-cx^{\tau}}$, $Q(x) = cx^{\tau}$ i $q(x) = c\tau x^{\tau-1}$, koja opada do 0 ako je $\tau < 1$. Odmah možemo primeniti Propoziciju 3.2.2.3 b), jer je

$$x \to e^{xq(x)} f(x) = e^{c(\tau-1)x^{\tau}} c\tau x^{\tau-1}$$

integrabilna na $(0,\infty)$ za $\tau \in (0,1)$. Zbog toga $F \in S$.
b) Koristeći Propoziciju 3.2.2.3, može se takođe dokazati da ako $\bar{F}(x) \sim e^{-x(\ln x)^{-\beta}}$, x $\to \infty$, $\beta > 0$, onda $F \in S$. Ovaj primer pokazuje da raspodela može imati rep oblika veoma sličnom eksponencijalnom, a da ipak pripada klasi S.
c) U ovoj fazi bismo se mogli nadati da će za $\bar{F}(x) \sim e^{-x^{\tau}L(x)}$, x $\to \infty$, $\tau \in [0,1)$, $L \in R_0$, F pripadati klasi S. Još jednom, uopšten odgovor na ovo pitanje je odričan. Mogu se konstruisati primeri za $L \in R_0$ tako da odgovarajuća F čak ni ne pripada klasi $\mathcal{L}$.

Propozicija 3.2.2.5 (Veza između dominirane varijacije i subeksponencijalnosti):
a) Ako $F \in \mathcal{L} \cap \mathcal{D}$, onda $F \in \mathcal{S}$.
b) Ako F ima konačno očekivanje μ i ako $F \in \mathcal{D}$, onda $F_I \in \mathcal{L} \cap \mathcal{D}$. Zbog toga iz a) sledi $F_I \in \mathcal{S}$.
Dokaz: a) Iz (3.28), za sve $x \geq 0$ važi

$$\frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\bar{F}(x)} = 2\int_0^{\frac{x}{2}} \frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)} dF(y) + \frac{\left(\bar{F}\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}{\bar{F}(x)} = 2\int_0^{\frac{x}{2}} \frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)} dF(y) + o(1),$$ gde $o(1)$ sledi iz uslova $F \in \mathcal{D}$. Sada za sve $0 \leq y \leq \frac{x}{2}$ važi $\frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)} \leq \frac{\bar{F}(\frac{x}{2})}{\bar{F}(x)}$, tako da zbog $F \in \mathcal{D}$

možemo primeniti dominiranu konvergenciju, koja za $F \in \mathcal{L}$ daje konvergenciju integrala ka 1. Tako je $F \in \mathcal{S}$.

b) Zbog jednostavnosti zapisa, i bez gubitka na opštosti, stavljamo $\mu = 1$. Pošto je za sve $x \geq 0$

$$\overline{F}_I(x) = \int_x^\infty \overline{F}(y)dy \geq \int_x^{2x} \overline{F}(y)dy \geq x\overline{F}(2x), \tag{3.31}$$

iz $F \in \mathcal{D}$ sledi da $\limsup_{x\to\infty} \frac{x\overline{F}(x)}{\overline{F}_I(x)} \leq \limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x)}{\overline{F}(2x)} < \infty$.

Štaviše, $\frac{\overline{F}_I\left(\frac{x}{2}\right)}{\overline{F}_I(x)} = \frac{\int_{\frac{x}{2}}^\infty \overline{F}(y)dy}{\int_x^\infty \overline{F}(y)dy} = 1 + \frac{\int_{\frac{x}{2}}^x \overline{F}(y)dy}{\int_x^\infty \overline{F}(y)dy} \leq 1 + \frac{\frac{\overline{F}\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}}{\overline{F}_I(x)} = 1 + \frac{1}{2}\frac{\overline{F}\left(\frac{x}{2}\right)}{\overline{F}(x)}\frac{x\,\overline{F}(x)}{\overline{F}_I(x)}$,

odakle je $\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}_I\left(\frac{x}{2}\right)}{\overline{F}_I(x)} < \infty$, tj. $F_I \in \mathcal{D}$.

Fiksirajmo $y > 0$, tada za sve $x \geq 0$ važi $1 = \frac{\int_x^{x+y} \overline{F}(u)du + \int_{x+y}^\infty \overline{F}(u)du}{\overline{F}_I(x)}$, pa iz (3.31) dobijamo $1 \leq \frac{y\overline{F}(x)}{\overline{F}_I(x)} + \frac{\overline{F}_I(x+y)}{\overline{F}_I(x)} \leq \frac{y\overline{F}(x)}{x\overline{F}(2x)} + \frac{\overline{F}_I(x+y)}{\overline{F}_I(x)}$. Prvi sabirak u poslednjem zbiru je $o(1)$ kad $x \to \infty$, jer $F \in \mathcal{D}$. Zato,

$$1 \leq \liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F}_I(x+y)}{\overline{F}_I(x)} \leq \limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}_I(x+y)}{\overline{F}_I(x)} \leq 1, \text{ tj. } F_I \in \mathcal{L}.$$

3.2.3 Ponovni pregled slučaja raspodela sa debelim repom u Cramer-Lundbergovom modelu:

Dosad smo videli da, sa analitičkog stanovišta, klase $\mathcal{R}$ i $\mathcal{S}$ daju prirodne modele raspodela iznosa šteta kod kojih je narušen Cramer-Lundbergov uslov (1.13). U ovom odeljku diskutujemo pripadnost klasi S u odnosu na date standardne klase funkcija raspodele. Držaćemo se Cramer-Lundbergovog modela da bismo ilustrovali kako funkcioniše nova metodologija. Podsetimo se glavnih rezultata odeljka 1.3 iz Cramer-Lundbergovog okruženja, tj. iz Teoreme 3.1.1.4: Ako je $F_I \in \mathcal{S}$, onda $\psi(u) \sim \frac{1}{\rho}\overline{F}_I(u),\ u \to \infty$.

Eksponencijalne Cramer-Lundbergove procene (1.14) i (1.16), uz uslov malih iznosa šteta (1.13), daju iznenađujuće dobre procene za $\psi(u)$, ne samo za male nego i srednje vrednosti u. Procena za velike iznose šteta $\psi(u) \sim \frac{1}{\rho}\overline{F}_I(u)$ je uglavnom teorijska i zaista se još može poboljšati. Prvi problem u odnosu na praktičnu primenljivost se odnosi na uslov $F_I \in \mathcal{S}$.

Prirodna pitanja koja se postavljaju u ovoj fazi su:
1) Da li iz $F \in \mathcal{S}$ sledi $F_I \in \mathcal{S}$?
i pitanje ne toliko značajno za naša ispitivanja,
2) Da li iz $F_I \in \mathcal{S}$ sledi $F \in \mathcal{S}$?

Ispostaviće se da je nažalost, generalno, odgovor na oba pitanja odričan. To nas odmah dovodi do sledećeg zadatka: postaviti dovoljne uslove na F tako da važi $F_I \in \mathcal{S}$.
Posmatrajući poslednji problem, postoje brojni odgovori na tu temu koji se mogu naći u literaturi. Prodiskutovaćemo neke od njih. Mnoge klase funkcija raspodele navedene u prethodnom odeljku će ovde igrati važnu ulogu.
Sledeći rezultat je direktna posledica Propozicije 3.2.2.5.

Posledica 3.2.3.1 (Cramer-Lundbergova teorema za velike iznose šteta, III):
Posmatrajmo Cramer-Lundbergov model uz uslov neto profita $\rho > 0$ i neka $F \in \mathcal{D}$. Tada važi

$$\psi(u) \sim \frac{1}{\rho}\overline{F}_I(u),\ u \to \infty .$$

Uslov $F \in \mathcal{D}$ se može lako proveriti na svim bitnim primerima; za razliku od netrivijalnog zadatka proveravanja da li $F_I \in \mathcal{S}$. U Odeljku 2.4 je pokazano da za bilo koje $F \in \mathcal{D}$ postoji $k \in N$ tako da $\int_0^\infty x^k dF(x) = \infty$, tj. da uvek postoje divergentni (viši) momenti. Iz Karamatine teoreme (Teoreme 2.4.6 6) odmah sledi da iz $F \in \mathcal{R}$ sledi $F_I \in \mathcal{R}$ i samim tim $F_I \in \mathcal{S}$. Takođe se mogu dati dovoljni uslovi za $F_I \in \mathcal{S}$ izraženi u terminima hazardne stope $q = \frac{f(x)}{\overline{F}(x)}$ za funkciju raspodele F sa gustinom f ili hazardnom funkcijom $Q = -\ln \overline{F}$.

Lema 3.2.3.2 (Dovoljni uslovi za $F_I \in \mathcal{S}$):
Ako važi jedno od sledećih tvrđenja:
a) $\limsup_{x\to\infty} x\, q(x) < \infty$,
b) $\lim_{x\to\infty} q(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} x\, q(x) = \infty$ i ako još važi jedan od uslova

1) $\limsup_{x\to\infty} \frac{x\, q(x)}{Q(x)} < 1$,

2) $q \in R_\delta$, $\delta \in [-1,0)$,

3) $Q \in R_\delta$, $\delta \in (0,1)$ i q opada u beskonačnosti,

4) q u beskonačnosti opada ka 0, $q \in R_0$ i $Q(x) - xq(x) \in R_1$,

onda važi $F_I \in \mathcal{S}$.

Primer 3.2.3.3 (Primeri za $F_I \in \mathcal{S}$):
Korišćenjem Leme 3.2.3.2 b) se lako vidi da $F_I \in \mathcal{S}$ važi u slučajevima sledećih raspodela:
-Weibullova raspodela sa parametrom $\tau \in (0,1)$,
- Benktanderova raspodela tipa I i II,
- lognormalna raspodela.

Posledica 3.2.3.4 (Cramer-Lundbergova teorema za velike iznose šteta IV):
Posmatrajmo Cramer-Lundbergov model uz uslov neto profita $\rho > 0$ gde funkcija F zadovoljava jedan od uslova a) ili b) Teoreme 3.2.2.2. Tada važi

$$\psi(u) \sim \frac{1}{\rho} \overline{F}_I(u),\ u \to \infty .$$

Još nam predstoji dati odgovore na pitanja 1) i 2). Razmatrajući pitanje
2) Da li iz $F_I \in \mathcal{S}$ sledi $F \in \mathcal{S}$? i koristeći Propoziciju 3.2.2.5 b), zaključujemo da modifikacija Peter i Paul raspodele daje primer funkcije raspodele F sa konačnim očekivanjem takvim da $F_I \in \mathcal{S}$, ali $F \notin \mathcal{S}$.

Rezimirajmo neke osobine klase $\mathcal{S}$. S jedne strane, pokazali smo da je to prava klasa funkcija raspodela koju treba proučavati u teoriji propasti pod uslovima velikih iznosa šteta (videti Teoremu 3.1.1.12 gde c) implicira a)). S druge strane, moramo biti jako pažljivi pri izvođenju opštih iskaza o klasi $\mathcal{S}$ i njenoj vezi s ostalim klasama funkcija raspodele.

Za naše trenutne potrebe, dovoljno je primetiti da za raspodelu F sa konačnim očekivanjem iz familije Paretovih, Weibullovih ($\tau < 1$), lognormalnih, Benktanderovih tipa I i II, Burrovih ili gama-logaritamskih raspodela, važi $F \in \mathcal{S}$ i $F_I \in \mathcal{S}$.

Posmatrajući definiciju za S, ne postoji prvobitan razlog za pretpostavku da $\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\overline{F}(x)} = 2$. Interesantna klasa raspodela se javlja kao rezultat kada dopustimo da ova granična vrednost bude bilo koja vrednost veća od 2.

Definicija 3.2.3.5: Funkcija raspodele F nad $(0,\infty)$ pripada klasi $S(\gamma),\ \gamma \geq 0$ ako

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\overline{F^{2*}}(x)}{\overline{F}(x)} = 2d < \infty$,

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} = e^{\gamma y},\ y \in \mathrm{R}$.

Može se pokazati da $d = \int\limits_0^\infty e^{\gamma y} dF(y) = \widehat{f}(-\gamma)$, tako da $S = S(0)$. Ispostavlja se da ove klase funkcija raspodele pokrivaju sve klase ilustrovane na Graficima 1.2.9 (2) i (3), koji se nalaze između slučaja raspodela sa tankim repom i slučaja raspodela sa debelim repom (subeksponencijalni slučaj).

Često se dešava sledeća situacija: neka u nekom probabilističkom modelu postoji neka ulazna slučajna promenljiva sa funkcijom raspodele F i izlazna slučajna promenljiva sa funkcijom raspodele G. Neka su funkcije F i G u modelu povezane nekom relacijom funkcionalne zavisnosti, npr. $G = T(F)$. U mnogim slučajevima se može pokazati ekvivalencija sledećih tvrđenja:

a) $\overline{F}$ je regularno varirajuća,

b) $\overline{G}$ je regularno varirajuća

Štaviše, ako važi a) ili b), onda je ispunjeno i

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\overline{G}(x)}{\overline{F}(x)} = c \in (0,\infty)$. (3.32)

Sada se postavlja ključno pitanje: Koliko se najviše može proširiti klasa regularno varirajućih funkcija u (3.32) da bi ove implikacije još uvek važile?

U nekoliko prilično uopštenih situacija odgovor na ovo pitanje je da osobinu regularne varijacije možemo zameniti subeksponencijalnošću i u tom slučaju uslov c) postaje ekvivalentan uslovima a) i b). To su tzv. Merceriove teoreme.

4 KADA I KAKO PROCES DOLAZI DO PROPASTI

4.1 UVOD

U ovom odeljku nastavljamo analizu procesa rizika u osiguranju koji smo uveli u Poglavlju 1. Tamo smo, uglavnom pomoću analitičkih metoda, proučavali asimptotsko ponašanje verovatnoće propasti kada uloženi početni kapital teži beskonačnosti. U ovom odeljku ćemo prvo dati pregled ovih rezultata sa probabilističkog aspekta. Vratićemo se verovatnoćama propasti definisamim u Odeljku 1.1. Opisujemo $\psi(u)$ pomoću raspodele krajnjeg supremuma slučajnog hoda. Štaviše, okarakterisaćemo uzoračku putanju procesa rizika koji teži propasti.

Konkretno, interesuje nas pitanje: Kako izgleda uzoračka putanja procesa rizika kome se bliži propast? Odgovore na ovo pitanje ćemo naći u Odeljcima 4.2 i 4.3, i za slučaj raspodele sa tankim, i za slučaj raspodele sa debelim repom. Važna tema naše analize su iznosi šteta koje dovode do propasti. Podsetimo se klasičnog Cramer-Lundbergovog modela datog Definicijom 1.1.1:

a) Iznosi šteta $X_1, X_2, ..., X_n$ su pozitivne iid slučajne promenljive sa zajedničkom ne-mrežastom funkcijom raspodele F i konačnim očekivanjem $E\left[X_1\right]=\mu$.
b) Šteta X_k se dešava u trenutku $T_k = Y_1 + ... + Y_k$, gde su $Y, Y_1, Y_2...$ iid slučajne promenljive sa eksponencijalnom raspodelom sa parametrom $\lambda > 0$. Odgovarajući brojevi zahteva za odštetu $N(t) = \sup\{k \geq 1,\ T_k \leq t\}$ čine homogen Poissonov proces sa intenzitetom $\lambda > 0$.
c) Procesi $\left(N(t)\right)_{t\geq 0}$ i $\left(X_k\right)_{k\in N}$ su nezavisni.
Tada je odgovarajući proces rizika definisan sa

$$U(t) = u + ct - S(t), \quad t \geq 0,$$

gde je u početni uložen kapital, $S(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} X_n$ ukupan iznos štete do vremenskog trenutka t, a $c > 0$ stopa prihoda od premije. Takođe pretpostavljamo da važi uslov neto profita $\lambda\mu - c < 0$.

U Poglavlju 1 smo se uglavnom koncentrisali na procenu verovatnoće propasti u beskonačnom vremenskom intervalu $\psi(u) = P\left[\inf_{t\in[0,\infty)} U(t) < 0\right]$. Za naše potrebe je pogodno izraziti $\psi(u)$ u terminima Levyjevog procesa R, gde je

$$R(t) = S(t) - ct = u - U(t), \quad t \geq 0.$$

Zbog toga se proces R može smatrati vremenski neprekidnom analogijom procesu slučajnog kretanja sa negativnim drift parametrom. Iz tog razloga očekujemo da će razni rezultati Teorije slučajnog hoda biti korisni u ovom kontekstu; pogledati takođe Poglavlje 1, jednakost (1.9) i s njom povezane relacije. U nekim slučajevima translacija se direktno primenjuje u metodi diskretnog skeleta čiji opis sledi.

Pošto $c > 0$, propast se može desiti samo u trenucima pristizanja zahteva za odštetu T_k kada proces R napravi skok nagore (videti gornji deo Grafika 3.1.2). Na osnovu uslova neto profita, diskretan vremenski proces

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} (X_k - cY_k) = \sum_{k=1}^{n} Z_k, \quad n \in N$$

konstituiše proces slučajnog hoda sa negativnim drift parametrom sačinjen od niza iid slučajnih promenljivih $Z_1, Z_2 ....$ Štaviše,

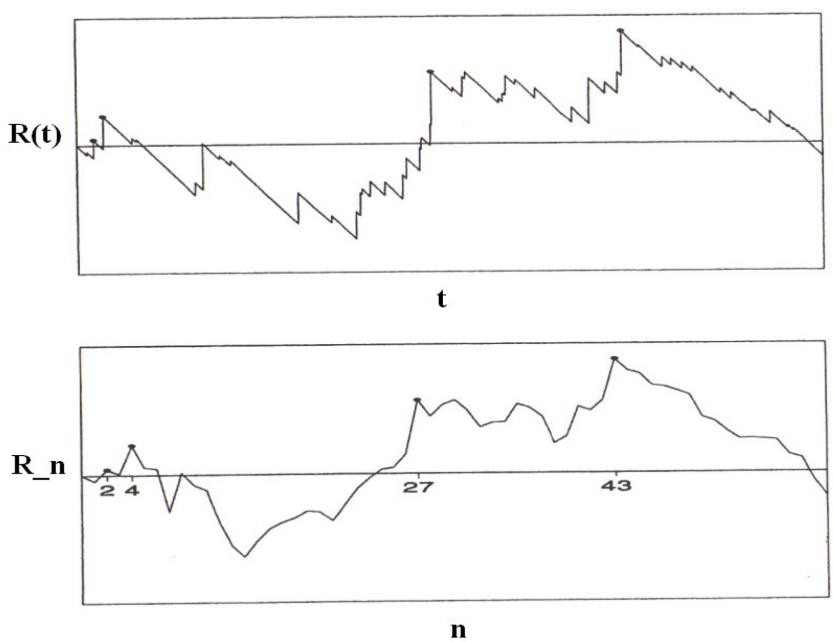
$$\psi(u) = P\left[\sup{}_{t\geq 0} R(t) > u\right] = P\left[\sup{}_{n\geq 1} R_n > u\right]. \tag{4.1}$$

Neposredna posledica jakog zakona velikih brojeva je da

$$M = \sup{}_{t\geq 0} R(t) = \sup{}_{n\geq 1} R_n \quad s.s. \tag{4.2}$$

Slučajan hod se naziva diskretnim skeletom sadržanim u neprekidnom vremenskom Levyjevom procesu R.

Grafik 4.1.1 Uzoračka putanja procesa $(R(t))_{t\geq 0}$ (gornji grafik) i putanja njegovog diskretnog skeleta procesa slučajnog hoda (R_n) (donji grafik).



Tačke stepenika su označene sa $\bullet$. One se javljaju kod diskretnog skeleta slučajnog hoda $(R_n)_{n\in N}$ i odgovaraju indeksima (tj. iznosima šteta) $n = 2, 4, 27, 43$. Visine stepenika se kod $(R_n)_{n\in N}$ i $(R(t))_{t\geq 0}$ poklapaju. One takođe predstavljaju rekordne vrednosti za (R_n).

Ovakva konstrukcija nam omogućava upotrebu argumenata teorije obnavljanja na skeletu i translaciju rezultata na proces R. Tako reprezentacija (4.1) predlaže korišćenje standardne teorije za maksimum procesa slučajnog hoda sa negativnim drift parametrom. Nadalje ćemo predstaviti neke od glavnih ideja.

Podsetimo se iz jednačine (1.11) u Poglavlju 1 da važi

$$1-\psi(u)=(1-\alpha)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n F_I^{n*}(u), \quad u\geq 0 \tag{4.3}$$

gde

$$\alpha=\psi(0)=\frac{\lambda\mu}{c}\in(0,1)\,. \tag{4.4}$$

Ovde je, kao i ranije, $F_I(u)=\mu^{-1}\int_0^u \overline{F}(y)dy$.

U tekstu koji sledi ćemo dati probablilstičku interpretaciju za (4.3) tako što ćemo iskoristiti relaciju $1-\psi(u)\leq P\left[M\leq u\right]$. Počinjemo uvođenjem još jednog diskretnog skeleta za proces R. Veličine koje se prirodno nameću su temena stepenika

$\tau_+(0)=0$,

$\tau_+(1)=\inf\{t>0:\ R(t)>0\}$,

$\tau_+(k+1)=\inf\{t>\tau_+(k):\ R(t)>R(\tau_+(k))\},\ \ k\in N$

i visine stepenika $R(\tau_+(k))$ (videti vrh Grafika 4.1.1). Ovde je, kao i obično, $\inf\varnothing=\infty$. Visina $R(\tau_+(k))$ stepenika se još naziva rekord neprekidnog vremenskog procesa R, a $\tau_+(k)$ je odgovarajuće rekordno vreme.

Deo procesa između dva uzastopna temena stepenika je segment stepenika. Zbog osobine nezavisnosti i stacionarnosti priraštaja procesa R, intuitivno je jasno da se na svakoj tački stepenika $(\tau_+(k),R(\tau_+(k)))$ proces obnavlja i segmenti stepenika čine niz iid stohastičkih procesa. U detaljnom dokazu ovih rezultata se koristi jako Markovsko svojstvo, ali ovde nećemo zalaziti u detalje.

Pre nego što se vratimo na formulu (4.3), prikupljamo neke korisne činjenice o prvom segmentu stepenika. Iz zapisa $V=R(\tau_+(1))$ i $\widehat{Z}=-R(\tau_+(1)-)$ sledi da je $A=V+\widehat{Z}$ veličina iznosa štete koja dovodi do propasti za dat početni kapital $u=0$.

Neka je

$$P^{(u)}\left[\cdot\right]=P\left[\cdot\,\middle|\,\tau(u)<\infty\right],\ u\geq 0\,, \tag{4.5}$$

gde je $\tau(u)=\inf\{t>0:\ R(t)>u\}$ trenutak propasti za dati iznos početnog kapitala u.

Propozicija 4.1.2 (Propast uz početni kapital $u=0$):
Važe sledeća tvrđenja:
a) $P^{(0)}\left[V\le x\right]=P^{(0)}\left[\widehat{Z}\le x\right]=F_I(x)$,

b) $P^{(0)}\left[A\le x\right]=\mu^{-1}\int\limits_0^x y\;dF(y)$,

c) Neka je U uniformno na (0,1), nezavisno od A. Tada vektori $(V,\widehat{Z})$ i $(UA,\ (1-U)A)$ imaju iste raspodele u odnosu na $P^{(0)}$.

Primedba 4.1.2.1: Tvrđenje c) se može prevesti u

$$P^{(0)}\left[V>v,\widehat{Z}>z\right]=\frac{1}{\mu}\int\limits_{v+z}^{\infty}P^{(0)}\left[\frac{v}{y}\le U\le 1-\frac{z}{y}\right]y\;dF(y)=$$
$$=\frac{1}{\mu}\int\limits_{v+z}^{\infty}(y-z-v)\;dF(y)=\overline{F}_I(v+z)\quad \text{za } v,z\ge 0, \tag{4.6}$$

gde smo na poslednju jednakost primenili parcijalnu integraciju. U slučaju raspodele sa debelim repom, za iznos početnog kapitala koji teži beskonačnosti ćemo izvesti formulu sličnu (4.6).

Sada se vraćamo formuli (4.3). Iz (4.2) sledi da visine stepenika $R(\tau_+(k))$ određuju raspodelu maksimuma M. Precizna formulacija osobine obnavljanja procesa R u njegovim tačkama stepenika implicira da su $R(\tau_+(k))-R(\tau_+(k-1))$ pozitivne iid slučajne promenljive. Prema Propoziciji 4.1.2a), raspodele ovih slučajnih promenljivih imaju rep $P\left[R(\tau_+(1))>x\right]=P\left[\tau(0)<\infty\right]P^{(0)}\left[V>x\right]=\alpha\overline{F}_I(x),\ \ x>0$, gde je $\alpha\in(0,1)$ definisano u (4.4). Ovde smo koristili da, ako je $\tau(0)=\infty$, onda je $R(t)\le 0$ za sve $t>0$. Temena stepenika čine proces obnavljanja koji je privremen[4]. To znači da ukupan broj obnavljanja K ima geometrijsku raspodelu sa parametrom $1-\alpha$, gde je $\alpha=\psi(0)=P\left[\tau_+(1)<\infty\right]$. Koristeći iid osobinu priraštaja $\tau_+(k)-\tau_+(k-1)$, dobijamo

$$P\left[K=n\right]=P\left[\tau_+(n)<\infty,\ \tau_+(n+1)=\infty\right]=$$
$$=P\left[\max_{k=1,\dots,n}\left\{\tau_+(k)-\tau_+(k-1)\right\}<\infty,\ \tau_+(n+1)=\infty\right]=\alpha^n(1-\alpha),\ \ n\ge 0.$$

Pošto je $M=\sum\limits_{k=1}^{K}\left(R(\tau_+(k)-R(\tau_+(k-1))\right)$, onda

$$\psi(u)=P\left[M>u\right]=\sum_{n=1}^{\infty}P\left[M>u,\ K=n\right]=P\left[\sum_{k=1}^{K}\left(R(\tau_+(k)-R(\tau_+(k-1))\right)>u,\ K=n\right]=$$
$$=(1-\alpha)\sum_{k=1}^{n}\alpha^n\left(1-\overline{F}_I^{n*}(u)\right),\ u\ge 0.$$ Iz toga dobijamo (4.3).

[4] Slučajna promenljiva V ima defektivnu funkciju raspodele, tj. $V(\infty)<1$, pa se proces obnavljanja okončava sa verovatnoćom 1.

U sledećim odeljcima ćemo dalje primenjivati strukturu slučajnog hoda procesa R. Proučavaćemo uzoračku putanju procesa rizika kome predstoji propast. Problem i njegovo rešenje će biti formulisani u terminima mera uslovne verovatnoće $P^{(u)}$, kako je definisano u (4.5). Dajemo kratak pregled dostupnog opisa uzoračke putanje i propasti u uslovima malih i velikih iznosa šteta. Ovi rezultati će takođe dati asimptotske izraze za verovatnoću propasti u konačnom vremenskom intervalu, tj.

$$\psi(u,T) = P\left[\sup_{t\in[0,T]} R(t) > u\right] = P\left[\tau(u) \le T\right],\ \ 0 < t < \infty .$$

4.2 CRAMER-LUNDBERGOV SLUČAJ

U ovom poglavlju pretpostavljamo da važe pretpostavke Cramer-Lundbergove teoreme 1.2.2. To konkretno znači da X ima funkciju generatrisu momenata koja ima konačnu vrednost u nekoj okolini nule i da Lundbergov eksponent, tj. rešenje jednačine $\int_0^\infty e^{\nu x}\overline{F}(x)dx = \frac{c}{\lambda}$ postoji. Štaviše, pretpostavljamo da $\int_0^\infty xe^{\nu x}\overline{F}(x)dx < \infty$. Tada nam Teorema 1.2.2 daje aproksimaciju

$$\psi(u) \sim Ce^{-\nu u},\ u \to \infty , \tag{4.7}$$

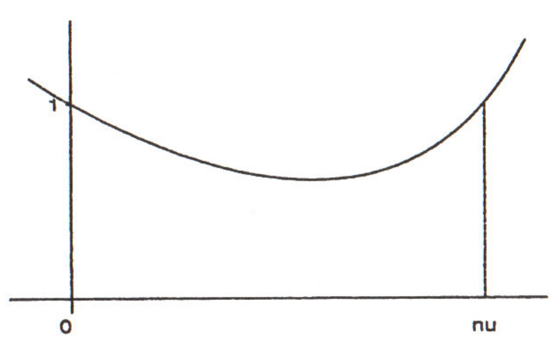
gde je C pozitivna konstanta koja zavisi od parametara procesa rizika.

Razmotrimo funkciju generatrisu momenata za $Z = X - cY$:

$$k(s) = E\left[e^{sZ}\right]$$

za odgovarajuće vrednosti argumenta s. Lundbergov eksponent ν je jedinstveno pozitivno rešenje jednačine $k(s)=1$ i prema uslovima neto profita, $k'(0) = \frac{\lambda\mu - c}{\lambda} < 0$. Primetimo da je $k'(s) < 0$ u okolini originala, da je $k(s)$ strogo konveksna i stoga je $k'(\nu) > 0$. Ilustracija funkcije k je data na Grafiku 4.2.1:

Grafik 4.2.1 Tipičan primer za $k(s)$ sa Lundbergovim eksponentom ν :



Neka H_Z označava funkciju raspodele za $Z = X - cY$. Odgovarajuća Esscher-transformisana funkcija raspodele je data sa $H_\nu(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{\nu y} dH_Z(y),\ \ x \in R$. Pošto je $E\left[e^{\nu Z}\right] = 1$, onda je funkcija raspodele H_ν dobro definisana, sa pozitivnim konačnim očekivanjem

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dH_\nu(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x e^{\nu x} dH_Z(x) = k'(\nu) > 0\,. \tag{4.8}$$

U skladu sa literaturom Fellera, slučajan hod sa priraštajima koji imaju raspodelu H_ν nazivamo asociranim. Glavna ideja za bavljenje uzoračkim putanjama procesa R (sa negativnim drift parametrom) pod uslovom $\tau(u) < \infty$ se sastoji u prelasku na asocirani slučajan hod (sa pozitivnim drift parametrom). Sa $\left(\tilde{Z}_k\right)$ obeležavamo iid niz sa raspodelom H_ν. Primetimo da

$$\begin{aligned}
P^{(u)}\left[Z_1 \le x_1, \ldots, Z_n \le x_n\right] &= \frac{P\left[Z_1 \le x_1, \ldots, Z_n \le x_n, M > u\right]}{P\left[M > u\right]} = \\
&= \frac{1}{P\left[M > u\right]} \int_{-\infty}^{x_1} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} P\left[M > u - y_1 - \ldots - y_n\right] dH_Z(y_1) \ldots dH_Z(y_n) = \\
&= \frac{1}{\psi(u)} \int_{-\infty}^{x_1} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} \psi(u - y_1 - \ldots - y_n) dH_Z(y_1) \ldots dH_Z(y_n) \sim \\
&\sim \int_{-\infty}^{x_1} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} e^{\nu(y_1 + \ldots + y_n)} dH_Z(y_1) \ldots dH_Z(y_n) \qquad (4.9) \\
&= H_\nu(x_1) \ldots H_\nu(x_n) = P\left[\tilde{Z}_1 \le x_1, \ldots, \tilde{Z}_n \le x_n\right].
\end{aligned}$$

U (4.9) smo koristili ocenu propasti (4.7) kad $u \to \infty$, kombinovano sa dominiranom konvergencijom. To je opravdano postojanjem gornjeg i donjeg ograničenja za $\psi(u)$, što se dokazuje pomoću (4.7) i (1.14). Ovo izračunavanje pokazuje da je raspodela slučajnog hoda $\left(R_n\right)$ i procesa R, pod uslovom da se propast javlja u konačnom vremenskom intervalu, jako povezana sa raspodelom asociranog slučajnog hoda.

Ovaj intuitivni argument će nadalje biti potkrepljen sledećim činjenicama: Neka je H_n empirijska funkcija raspodele uzorka $Z_1, \ldots, Z_n$, tj.

$$H_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} I_{\{Z_k \le x\}},\ \ x \in R\,. \tag{4.10}$$

Primenom Glivenko-Cantellijeve teoreme se dobija

$$\sup_{x \in R} \left|H_n(x) - H_Z(x)\right| \longrightarrow 0 \quad s.s.$$

Ovo se potpuno menja kada se dogodi propast i n biva zamenjeno trenucima propasti $\tau(u)$. Sledeći rezultat pokazuje da je raspodela priraštaja H_Z slučajnog hoda (R_n), uslovljena događajem da se dešava propast, približno jednaka priraštaju H_ν asociranog slučajnog hoda.

Propozicija 4.2.2: Za $u \to \infty$ važi sledeća relacija

$$\sup_{x\in R}\left|H_{\tau(u)}(x) - H_\nu(x)\right| \xrightarrow{P^{(u)}} 0 \qquad \text{(konvergencija u verovatnoći).}$$

Primedba 4.2.2.1: Neka su A i A_u slučajne promenljive. Nadalje ćemo zapisivati

$$A_u \xrightarrow{P^{(u)}} A \text{ ako } \lim_{u\to\infty} P^{(u)}\left[\left|A_u - A\right| > \varepsilon\right] = 0, \quad \varepsilon > 0 .$$

Analogno, konvergencija niza slučajnih vektora $A_u \to A$ u verovatnoći $P^{(u)}$ dok $u \to \infty$ (koja će biti korišćena u Teoremi 4.3.3) se definiše kao

$$E^{(u)}\left[f(A_u)\right] \longrightarrow E\left[f(A)\right]$$

za svaku neprekidnu, ograničenu funkcionelu f.

Sledeće veličine opisuju događaj propasti: nivo $R(\tau(u)-)$ procesa R neposredno pre same propasti, nivo $R(\tau(u))$ u trenutku propasti, višak procesa R u odnosu na prag u $R(\tau(u)) - u$ u trenutku propasti i veličina štete koja uzrokuje propast $R(\tau(u)) - R(\tau(u)-)$. Asimptotsko ponašanje njihovih raspodela kad $u \to \infty$ je opisano u produžetku.

Teorema 4.2.3 (Propast u Cramer-Lundbergovom slučaju):
Za $u \to \infty$ važe sledeće relacije:

a) $\sup_{t\in[0,1]}\left|\dfrac{R(t\tau(u))}{\tau(u)} - k'(\nu)\, t\right| \xrightarrow{P^{(u)}} 0$,

b) $\dfrac{\tau(u) - \dfrac{u}{k'(\nu)}}{\sqrt{u}\, s(\nu)} \xrightarrow{P^{(u)}} \mathrm{N}$, gde je N slučajna promenljiva sa standardnom normalnom raspodelom, a $s(\nu)$ veličina koja obuhvata Lundbergov eksponent ν i određene momente za X.

c) Osobine $R(\tau(u)) - u$, $u - R(\tau(u)-)$ i $R(\tau(u)) - R(\tau(u)-)$ zajednički konvergiraju u verovatnoći $P^{(u)}$ ka nedegenerisanoj graničnoj raspodeli. Štaviše, $\tau(u)$ i $R(\tau(u)) - u$ su asimptotski nezavisni.

Primedba 4.2.3.1: Gornji rezultati a) i b) pokazuju da uzoračka putanja procesa R koja vodi ka propasti lokalno, u blizini dešavanje same propasti, ima linearan drift parametar sa nagibom $k'(\nu) > 0$. Primetimo da je to u suprotnosti sa globalnom slikom gde je drift negativan. To se dešava zbog jake veze između nizova (Z_k) i $(\tilde{Z}_k)$ kod kojih je $E\left[\tilde{Z}_k\right] = k'(\nu) > 0$; videti (4.8).

Primedba 4.2.3.2: Deo c) konkretno implicira da sve veličine konvergiraju ka konačnim graničnim vrednostima. To je u suprotnosti sa ponašanjem iznosa štete koji dovodi do propasti u slučaju raspodele sa debelim repom (videti Teoremu 4.3.3).

Radi kompletnosti, zaključićemo ovo poglavlje nekim rezultatima o verovatnoći propasti u konačnom vremenskom intervalu. Podsetimo se da je verovatnoća propasti u intervalu $[0,T]$ data sa

$$\psi(u,T) = P\left[\inf_{t\in[0,T]} U(t) < 0\right]. \qquad (4.11)$$

Aproksimacije za $\psi(u,T)$ se npr. mogu izvesti pomoću centralne granične teoreme ili primenom Propozicije 4.2.2.

Posledica 4.2.4 (Propast u konačnom vremenskom intervalu u Cramer-Lundbergovom slučaju):

$$\lim_{u\to\infty} \sup_{T\in[0,\infty)} \left| e^{\nu u}\psi(u,T) - C\Phi\left(\frac{T - \dfrac{u}{k'(\nu)}}{s(\nu)\sqrt{u}}\right)\right| = 0. \qquad (4.12)$$

Ovde je C konstanta iz (4.7), Φ označava funkciju raspodele za standardnu normalnu raspodelu, a $s(\nu)$ je deterministički faktor skaliranja koji obuhvata Lundbergov eksponent i određene momente raspodele iznosa šteta.

Dokaz: Prvo primetimo da prema definiciji verovatnoće $P^{(u)}$ važi

$$P^{(u)}\left[\tau(u) \le T\right] = \frac{\psi(u,T)}{\psi(u)}.$$

Stoga,

$$\sup_{T\in[0,\infty)} \left| e^{\nu u}\psi(u,T) - CP^{(u)}\left[\tau(u)\le T\right]\right| = \sup_{T\in[0,\infty)} e^{\nu u}\psi(u,T)\left|1 - \frac{C}{e^{\nu u}\psi(u)}\right|.$$

Kad $u\to\infty$, desna strana teži nuli, pošto je $\psi(u,T)\le\psi(u)$ i $e^{\nu u}\psi(u)\to C$ na osnovu (4.7). Pošto slaba konvergencija ka neprekidnoj granici implicira uniformnu konvergenciju funkcija raspodele, onda rezultat sledi iz Teoreme 4.2.3 b).

Primedba 4.2.4.1: Granična relacija (4.12) predlaže kao aproksimaciju verovatnoće propasti u konačnom vremenskom intervalu

$$\psi(u,T) \approx Ce^{-\nu u}\Phi\left(\frac{T - \dfrac{u}{k'(\nu)}}{s(\nu)\sqrt{u}}\right). \qquad (4.13)$$

Ovu aproksimaciju treba koristiti sa oprezom. Pošto stopa konvergencije nije određena, ostatak u ovoj graničnoj relaciji može biti veći od izraza koji treba aproksimirati.

Možemo rezimirati situaciju u okolnostima Cramer-Lundbergovog slučaja kao što sledi: Uzoračka putanja procesa R se pre same pojave propasti ponaša kao da se raspodela priraštaja promenila iz H_Z u H_ν i glavna dramatična promena na uzoračkoj putanji je promena drift parametra koji uzrokuje propast. Intuitivno, malo verovatni događaji koji dovode do propasti se dešavaju kao posledica nagomilavanja šteta koje lokalno uzrokuju da se slučajan hod ponaša kao slučajan hod sa pozitivnim driftom. Raspodela priraštaja takvog slučajnog hoda je data pomoću Esscherove transformisane raspodele H_ν.

4.3 SLUČAJ VELIKIH IZNOSA ŠTETA

Suprotno Cramer-Lundbergovom slučaju u okolnostima velikih iznosa šteta, malo verovatni događaji koji uzrokuju propast se dešavaju neočekivano. Proces se razvija na svoj uobičajen način sve do samog trenutka propasti, a zatim se propast desi kao posledica jedne jedine velike štete.

Podsetimo se definicije subeksponencijalne funkcije raspodele F ($F \in S$):

$$P\left[X_1 + ... + X_n > x\right] \sim P\left[\max\left\{X_1, ..., X_n\right\} > x\right], \quad x \to \infty \tag{4.14}$$

za $n \geq 2$; videti (3.3). U Poglavlju 1 su predstavljene mnoge ocene verovatnoće propasti $\psi(u)$ za funkciju raspodele F sa debelim repom. Konkretno, iz Teoreme 3.1.1.4 možemo zaključiti da iz $F_I \in S$ sledi

$$\psi(u) \sim \frac{\alpha}{1-\alpha} \overline{F}_I(u) = \frac{\lambda}{c - \lambda\mu} \int_u^\infty \overline{F}(y)dy, \quad u \to \infty . \tag{4.15}$$

Nadalje želimo da odgovorimo na sledeća pitanja: pod uslovom da se propast desi nakon konačnog intervala vremena,

a) koliko je veliki iznos štete koji dovodi do propasti?

b) kakva je asimptotska raspodela vremena propasti?

c) šta u stvari znači "proces se razvija na svoj uobičajen način sve do samog trenutka propasti".

Prvi pokazatelj da se proces rizika razvija na uobičajen način sve do samog trenutka propasti je ponašanje empirijske raspodele H_n priraštaja Z_n diskretnog skeleta slučajnog hoda R_n; videti (4.10).

Propozicija 4.3.1: Pod uslovima Teoreme 4.3.3 je ispunjeno

$$\sup_{x\in R}\left|H_{\tau(u)}(x)-H_Z(x)\right|\xrightarrow{P^{(u)}}0\,.$$

Uporedimo ovaj rezultat sa Propozicijom 4.2.2 u Cramer-Lundbergovom slučaju; tamo je granica za $H_{\tau(u)}$ Esscher transformisana raspodela H_ν.

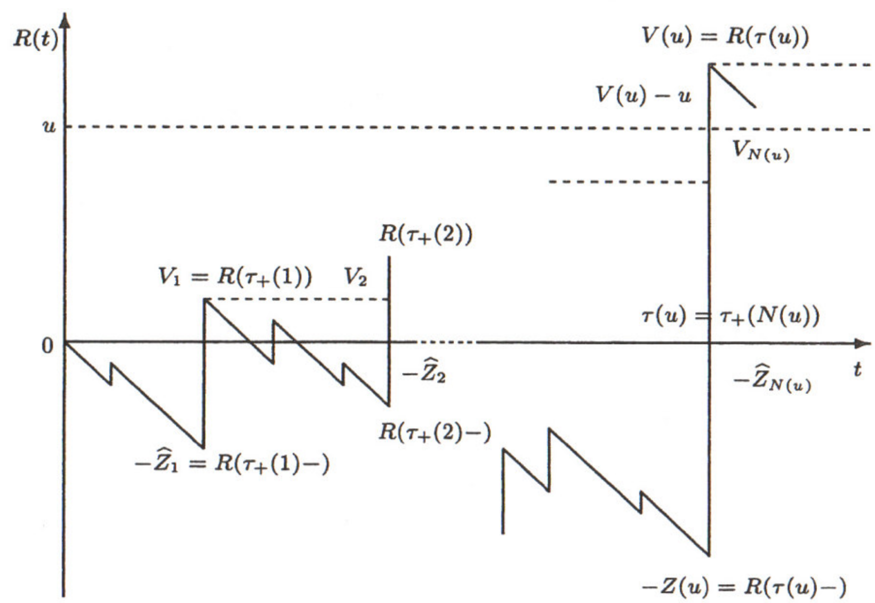
Za precizan opis samog događaja propasti ćemo razmotriti raspodelu po meri $P^{(u)}$ sledećih veličina:

a) $-Z(u)=R(\tau(u)-)$, vrednost procesa R pre samog trenutka propasti,

b) $V(u)=R(\tau(u))$, vrednost procesa R u samom trenutku propasti,

c) $V(u)-u$ višak vrednosti procesa R u odnosu na prag u u trenutku propasti. Videti Grafik 4.3.2 radi ilustracije.

Grafik 4.3.2 Idealizovana uzoračka putanja procesa koja dovodi do propasti:



Opet možemo iskoristiti osobinu obnovljivosti procesa R. Negativan drift parametar procesa R osigurava da postoji samo konačno mnogo tačaka stepenika sa verovatnoćom 1.

Sa $K(u)=\inf\{k\in N, R(\tau_+(k)>u)\}, \inf\varnothing=\infty$, označavamo indeks stepenice koja uzrokuje propast. Priraštaji $V_n=R(\tau_+(n))-R(\tau_+(n-1))$ su iid i $P^{(0)}\left[V_1\le x\right]=F_I(x)$ važi na osnovu Propozicije 4.1.2 a). Tada

$$P\left[K(u)=n\right]=P\left[K(u)=n,\quad \tau(u)<\infty\right]=$$

$$=P\left[\tau_+(n)<\infty\right]P\left[V_1+...+V_{n-1}\le u,\ V_1+...+V_n>u\middle|\tau_+(n)<\infty\right]=$$

$$=P\left[\tau_+(n)<\infty\right]p_n(u)\,.$$

U daljem dokazu je iskorišćena veoma važna pretpostavka o subeksponencijalnosti funkcije F_I koja implicira da (4.14) važi za V_n u odnosu na $P^{(0)}$:

$$p_n(u) \sim P\left[\max\{V_1,...,V_{n-1}\} \le u,\ \max\{V_1,...,V_n\} > u \middle| \tau_+(n) < \infty\right] \sim$$
$$\sim P\left[V_n > u \middle| \tau_+(n) - \tau_+(n-1) < \infty\right] = P^{(0)}\left[V_1 > u\right] = \overline{F}_I(u),\ \ u \to \infty .$$

Takođe primetimo da za α dato u relaciji (4.4) važi

$$P\left[\tau_+(n) < \infty\right] = P\left[\max_{k=1,...,n}\left(\tau_+(n) - \tau_+(n-1) < \infty\right)\right] = P^n\left[\tau_+(1) < \infty\right] = \alpha^n . \quad (4.16)$$

Kombinujući (4.15) i (4.16), zaključujemo da

$$P^{(u)}\left[K(u) = n\right] = \frac{P\left[K(u) = n,\ \ \tau(u) < \infty\right]}{\psi(u)} \ \sim\ \frac{\alpha^n \overline{F}_I(u)}{\psi(u)} \longrightarrow (1-\alpha)\alpha^{n-1}, \ (4.17)$$

tj. broj segmenata stepenika do trenutka propasti asimptotski ima geometrijsku raspodelu sa parametrom $(1-\alpha)$.

Putanja $\left(S(t)\right)_{t\in[0,\tau(u))}$ se može dekomponovati na $K(u)$ segmenata stepenika, gde $K(u)$ ima asimptotski geometrijsku raspodelu datu sa (4.17). Prvih $K(u)-1$ segmenata su svi "tipični", kao što je opisano u Propoziciji 4.1.2, a poslednji segment koji vodi proces ka propasti se ponaša drugačije. Propast je izazvana pomoću jedne jedine velike štete. Zato se može očekivati da klasična teorija ekstremnih vrednosti ulazi u igru kao opis događaja propasti.

Subeksponencijalne raspodele su raspodele sa debelim repom u smislu da njihovi repovi opadaju prema nuli mnogo sporije od repova bilo koje eksponencijalne raspodele; videti Lemu 3.1.1.3. Njihovi repovi mogu biti regularno varirajući, ali su Weibullova i lognormalna raspodela takođe subeksponencijalne. Ovo implicira da subeksponencijalne raspodele mogu pripadati maksimalnom domenu atrakcije (u daljem tekstu MDA) Frechetove raspodele Φ_a ili Gumbelove raspodele Λ. Pravimo razliku između ove dve klase. Podsetimo se, Frechetova raspodela je data sa

$$\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ e^{-x^{-\alpha}}, & x > 0 \end{cases} \qquad (\alpha > 0),$$

dok je Gumbelova raspodela data sa

$$\Lambda(x) = e^{-e^{-x}}, x \in R .$$

Neka je $\left(Z(u),\ V(u)\right)$ slučajan vektor koji ima istu raspodelu $P^{(u)}$ kao i vektor $\left(-R(\tau(u)-),\ R(\tau(u))\right)$. Sledeći rezultat predstavlja uzoračku putanju procesa pre trenutka propasti i u samom trenutku propasti.

Teorema 4.3.3 (Propast u subeksponencijalnom slučaju):
Neka važi $\overline{F}_I \in R_{-\frac{1}{\xi}}$ za $\xi \in (0,\infty)$ ili $\overline{F}_I \in MDA(\Lambda) \bigcap S$ (ovo odgovara slučaju kad $\xi = 0$) i neka je $a(u) = \dfrac{\int_u^\infty \overline{F}(x)dx}{\overline{F}(u)}$. Tada je

$$\sup_{t\in[0,1]} \left| \frac{R(t\tau(u))}{\tau(u)} + c(1-\alpha)t \right| \longrightarrow 0 \tag{4.18}$$

i

$$\left(\frac{c(1-\alpha)\tau(u)}{a(u)}, \frac{Z(u)}{a(u)}, \frac{V(u)}{a(u)} \right) \xrightarrow[u\to\infty]{P^{(u)}} (Z_\xi, Z_\xi, V_\xi).$$

Slučajne promenljive Z_ξ, V_ξ obe imaju uopštenu Paretovu raspodelu sa

$$P\left[V_\xi > v, Z_\xi > z\right] = \overline{G}_\xi(v+z), \quad v,z \geq 0, \tag{4.19}$$

$$\text{gde je } \overline{G}_\xi(x) = \begin{cases} (1+\xi x)^{-\frac{1}{\xi}}, & \xi \in (0,\infty), \\ e^{-x}, & \xi = 0 \end{cases}. \tag{4.20}$$

Primedba 4.3.3.1: Podsetimo se iz Primedbe 1 nakon Propozicije 4.2.2 da je konvergencija niza slučajnih vektora $A_u \longrightarrow A,\ u \to \infty$ u verovatnoći $P^{(u)}$ definisana sa $E^{(u)}\left[f(A_u)\right] \longrightarrow E\left[f(A)\right]$ za svaku ograničenu i neprekidnu funkcionelu f.

Primedba 4.3.3.2: Uopštena Paretova raspodela se javlja kao granična raspodela za normalizovan niz iid prekoračenja preko visokih pragova. To je slično Teoremi 4.3.3 gde višak $V(u)-u$ preko praga u procesa R ima slično asimptotsko ponašanje.

Primedba 4.3.3.3: Relacija (4.18) intuitivno podržava tvrdnju da se proces razvija "tipično" do trenutka $\tau(u)$, jer $\dfrac{R(t)}{t} \longrightarrow -c(1-\alpha) = \lambda\mu - c < 0 \quad s.s.$ prema jakom zakonu velikih brojeva. Takođe treba primetiti da $\dfrac{Z(u)}{\tau(u)} \xrightarrow{P^{(u)}} c(1-\alpha)$. Ovo je takođe indikacija za "tipično" ponašanje procesa sve dok se propast ne dogodi.

Primedba 4.3.3.4: Gornju teoremu treba uporediti sa Teoremom 4.2.3. Primetimo, konkretno, da u Cramer-Lundbergovom slučaju viškovi $V(u)-u$ slabo konvergiraju ka nedegenerisanoj granici, dok u subeksponencijalnom slučaju viškovi teže beskonačnosti. Primetimo da je normalizujuća funkcija $a(u)$ funkcija očekivanog viška (mean excess function) koja teži beskonačnosti za subeksponencijalnu funkciju F_I. Šteta koja uzrokuje propast počinje na "tipičnom" nivou, zatim brzo raste prema vrhu, prelazi prag visine u i prekoračuje taj prag za veliki iznos viška.

Primedba 4.3.3.5: Jednakost (4.19) treba uporediti sa (4.6). Iako poslednji segment stepenika ima potpuno drugačije probabilističke osobine od drugih segmenata, višak $V(u)-u$ procesa R u trenutku propasti i nivo $Z(u)$ procesa R neposredno pre nego što nastupi propast pokazuju sličnu probabilističku relaciju u tački $u=0$ i u graničnom slučaju kad $u\to\infty$.
Iz Teoreme 4.3.3 odmah izvodimo

$$\frac{Z(u)+V(u)-u}{a(u)} \xrightarrow{P^{(u)}} Z_\xi + V_\xi \quad \text{za sve } \xi\in[0,\infty).$$

To nam daje informaciju o iznosu štete $R(\tau(u))-R(\tau(u)-)=Z(u)+V(u)$ koja uzrokuje propast.

Posledica 4.3.4 (Iznos štete koja uzrokuje propast u slučaju subeksponencijalne funkcije raspodele):
a) Neka je $\overline{F}_I\in R_{-\frac{1}{\xi}}$ za $\xi\in(0,\infty)$. Tada važi

$$a(u)\sim \xi u \text{ i}$$

$$\lim_{u\to\infty} P^{(u)}\left[\frac{V(u)+Z(u)-u}{a(u)}>x\right]=\left(1+\frac{1}{\xi}\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)x^{-\frac{1}{\xi}},\ x\ge 1.$$

b) Neka je $\overline{F}_I\in MDA(\Lambda)\cap S$. Tada važi

$$a(u)=\frac{\int_u^\infty \overline{F}(x)dx}{\overline{F}(u)} \text{ i}$$

$$\lim_{u\to\infty} P^{(u)}\left[\frac{V(u)+Z(u)-u}{a(u)}>x\right]=(1+x)e^{-x},\quad x\ge 0.$$

Zaključujemo ovo poglavlje nekim rezultatima iz teorije propasti u konačnom vremenskom intervalu, date sa (4.11) za interval $[0,T]$.

Na osnovu $\frac{\psi(u,T)}{\psi(u)}=P\left[\tau(u)\le T \,\middle|\, \tau(u)<\infty\right]=P^{(u)}\left[\tau(u)\le T\right]$, sledeća posledica se može izvesti iz Teoreme 4.3.3.

Posledica 4.3.5 (Propast u konačnom vremenskom intervalu u subeksponencijalnom slučaju):
a) Neka je $\overline{F}_I \in R_{-\frac{1}{\xi}}$ za $\xi \in (0,\infty)$. Tada $a(u) \sim \xi u$ i

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\psi(u,uT)}{\psi(u)} = 1-(1+c(1-\alpha)T)^{-\frac{1}{\xi}}.$$

b) Neka je $\overline{F}_I \in MDA(\Lambda)\bigcap S$. Tada je $a(u) = \frac{\int_u^\infty \overline{F}(x)dx}{\overline{F}(u)}$ i

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\psi(u,a(u)T)}{\psi(u)} = 1-e^{-c(1-\alpha)T}.$$

Situaciju u uslovima subeksponencijalnosti možemo sažeti na sledeći način:

Uzoračka putanja procesa R se pre pojave propasti ponaša sasvim normalno, kao putanje kod kojih se propast nikada neće desiti. Propast se tada dešava potpuno neočekivano, izazvana je jednom jedinom velikom štetom. Šteta koja dovodi do propasti je toliko velika da, da bismo izveli konačnu nedegenerisanu granicu viška procesa R u odnosu na prag u, moramo je normalizovati funkcijom koja teži beskonačnosti.

4.4 NEKA DALJA UOPŠTENJA

Predstavljeni rezultati dosad pružaju samo prvi, reprezentativan pregled procena propasti u slučaju raspodela sa debelim repom. Skoro svi od ovih rezultata se mogu proširiti. Na primer, jedan od mogućih modela je

$$U_B(t) = u + ct - S(t) + B(t),$$

gde su u, c, $S(t)$ definisane u Cramer-Lundbergovom modelu, a B je Wienerov proces (za svako fiksno t, slučajna promenljiva B_t ima normalnu raspodelu sa očekivanjem 0 i disperzijom $\sigma_B^2\, t$) nezavisan od procesa S. Proces B se može posmatrati kao proces malih perturbacija oko procesa rizika U iz (1.4). Može se pokazati da važi procena slična onoj u Cramer-Lundbergovom modelu za subeksponencijalnu raspodelu iznosa šteta. Ovi rezultati se takođe mogu uopštiti na model obnavljanja.

Asimptotske procene verovatnoće propasti se menjaju kada kompanija primi kamatu od svojih rezervi. Za $F \in R$ i za pozitivnu kamatnu stopu δ, verovatnoća propasti zadovoljava $\psi_\delta(u) \sim k_\delta \overline{F}(u),\ u \to \infty$, tj. rep je ekvivalentan samoj veličini funkcije raspodele iznosa šteta.

ZAKLJUČAK

U ovom radu je detaljno obrađen model nastanka ekstremno velikih šteta u osiguranju koje se veoma retko javljaju, ali kada se dogode, nastupaju veoma naglo i dovode proces do propasti. Gubici koji pritom nastanu dosežu ekstremne razmere i delimično se nadoknađuju iz reosiguranja.

U matematičkom modelu procesa rizika korišćene su funkcije raspodela iz familije subeksponencijalnih funkcija. Njihovi repovi opadaju prema nuli sporije od repova eksponencijalnih funkcija. Najčešće se upotrebljavaju modeli sa Paretovom i Weibulovom funkcijom raspodele.

Na osnovu Cramer-Lundbergove teoreme je najpre izvršena procena verovatnoće propasti procesa u beskonačnom vremenskom intervalu za male iznose zahteva za odštetu. Zatim su uvedeni pojmovi regularne varijacije i subeksponencijalnosti funkcija raspodela, nakon čega je izvršena asimptotska procena verovatnoće propasti u slučaju velikih iznosa zahteva za odštetu. Cilj ovog rada je bio dokazivanje Lundbergove nejednakosti za ekstremne rizike.

Regularno varirajuće funkcije raspodele se, za potrebe integracije, asimptotski ponašaju poput stepenih funkcija. Primena Karamatine teoreme je omogućila da se integracija regularno varirajućih funkcija izvši poput integracije stepenih funkcija, tj. da se sporo varirajuće funkcije izdvoje izvan integrala.

U poslednjem poglavlju je prikazana uzoračka putanja procesa koji je dostigao propast. Pre pojave propasti, uzoračka putanja se ni po čemu nije razlikovala od putanja drugih procesa koji nikada neće dostići propast. Zatim je propast nastupila veoma iznenadno, naglo, kao rezultat jedne ekstremno velike štete.

LITERATURA:

- P. Embrechts, C. Klüppelberg, T. Mikosch: Modelling extremal events for Insurance and Finance, Berlin: Springer-Verlag, 2008.
- S. I Resnick.: Heavy-tail phenomena: Probabilistic and Statistical Modeling, New York: Springer, 2007.
- Cibele N. Behrens, Hedibert F. Lopes, Dani Gamerman: Bayesian Analysis of Extremal events with Threshold Estimation, Statistical Modelling, Arnold 2004.
- Benjamin Renard, Michel Lang, Phillipe Bois: Statistical analysis of extreme events in a non-stationary context via a Bayesian framework: case study with peak over Threshold data,
- Buhlmann H.: Tendencies of Development in Risk Theory, in Centennial Celebration of the Actuarial Profession in North America, Schaumburg, Illinois, 1989.
- Feller W.:An Introduction to the Probability Theory and Its Applications II. Wiley, New York, 1971.
- Resnick S. I. : Adventures in Stochastic Processes, Birkhauser, Boston, 1992.
- Thorin O. : On the asymptotic behaviour on the ruin probability for an infinite period when the epochs of claim form a renewal period, Scand. Actuar. 1974.
- Asmunssen S. Kluppelberg: Large deviation results for subexponential tails, with applications to insurance risk, Stoch. Proc. Appl. 1996.

SADRŽAJ:

KRATKA BIOGRAFIJA

Rođena sam 20.05.1985. godine. Osnovnu školu sam završila u Ruskom Krsturu. Srednju medicinsku školu "Dr Ružica Rip" sam završila u Somboru. Zatim sam se opredelila za studije matematike i završila smer matematike finansija na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Novom Sadu. Nakon diplomiranja sam nastavila master studije matematike finansija. Položila sam sve ispite predviđene planom i programom.

Novi Sad, 02.10.2009. Natalija Ramač

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj: RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni Štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Master rad
VR
Autor: Natalija Ramač
AU
Mentor: dr Dora Seleši
MN
Naslov rada: Modeliranje ekstremnih rizika
MR
Jezik publikacije: *Srpski (latinica)*
JP
Jezik izvoda: *s / e*
JI
Zemlja publikovanja: R. Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2009.
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
MA
Fizički opis rada: 4/*89/9/0/2/9*
FO

Naučna oblast: Matematika
NO
Naučna disciplina: Aktuarska matematika.
ND
Ključne reči: proces rizika, verovatnoća propasti, regularna varijacija, subeksponencijalnost.
PO

UDK:
Čuva se: u biblioteci Departmana za matematiku i informatiku
ČU
Važna napomena:
VN
Izvod. Tema master rada je aktuarsko modeliranje ekstremno velikih šteta koje se javljaju sa veoma malom verovatnoćom. Za modeliranje ekstremnih šteta koriste se subeksponencijalne funkcije raspodela, funkcije sa debelim repom. Za procenu verovatnoća propasti se koristi Cramer-Lundbergova teorema. Značajan je i pojam regularne varijacije i Karamatina teorema koja omogućava da se regularno varirajuće funkcije integrale poput stepenih funkcija. Cilj rada je dokazivanje Lundbergove nejednakosti za ekstremne rizike.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 08.09.2009.

DP
Datum odbrane:.
DO
Članovi komisije:
KO

Predsednik: akademik dr Stevan Pilipović, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član: dr Dora Seleši, docent Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, mentor
Član: dr Nataša Krejić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu.

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE KEY
WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO
Identification number:
INO
Document type: Monograph type
DT
Type of record: Printed text
TR
Contents Code: Master's Thesis
CC
Author: Natalija Ramač
AU
Mentor: Dora Seleši, PhD
MN
Title: Modelling Extremal Risks
XI
Language of text: Serbian
LT
Language of abstract:
LA
Country of publication: Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2009.
PY
Publisher: Author's reprint
PU
Publ. place: Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP
Physical description: 4/89/9/0/2/9
PD

Scientific field: Mathematics
SF
Scientific discipline: Actuarial Mathematics
SD
Key words: risk process, ruin probability, regular variation, subexponentiality.
UC:
Holding data: at the Department of Mathematics and Informatics library
HD Note:
Abstract: The topic of this master's thesis is actuarial modelling of extremal risks which appear with very small probabilities. For modelling extremal risks, subexponential distribution functions are used, often called heavy tailed distributions. Cramer-Lundberg's theorem is used for risk probabilities evaluation. Another very meaningful term is regular variation of functions, as well as Karamata's theorem which allows regularly varying functions to be integrated the same way as power functions. The aim of this thesis is to prove Lundberg's inequality for extremal risks.

Accepted by the Scientific Board on: 08.09.2009.

Defended:
Thesis defend board: Stevan Pilipović, PhD, Full Professor, Faculty of Sciences, Novi Sad
Member: Dora Seleši, PhD, Assistant Professor, Faculty of Sciences, Novi Sad, advisor
Member: Nataša Krejić, PhD, Full Professor, Faculty of Sciences, Novi Sad