UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I
INFORMATIKU

Pušin Miroslava

Tržišna ravnoteža i Pareto optimalna situacija

Master rad

Mentor:
Prof. dr Nenad Teofanov

Novi Sad,jun 2017.

Sadržaj

Predgovor

Osnovni cilj rada je diskusija o ekonomskoj ravnoteži tržišta sa posebnim akcentom na ispitivanje Pareto optimalnosti koja predstavlja definisan matematički model optimalne raspodele bogatstva pojedinaca u uslovima ekonomije blagostanja. Sledi prikaz organizacije rada.

U prvom delu rada su ukratko navedene biografije naučnika čiji su rezultati korišćeni u ovom radu. To su biografije Erou-a, Debroa i Pareto-a. Dalje se navode glavne ideje opšte teorije ravnoteže, sa posebnim osvrtom na pristup teoriji ravnoteže u XX veku.

U drugom delu rada se navodi Erou - Debro (Arrow-Debrou) matematički model uz detaljnu diskusiju svake pretpostavke u modelu. Tu su navedeni uslovi pod kojima se postiže ravnoteža u modelu, pojam Pareto efikasnosti u modelu, kao i prednosti, mane i domet ovog modela.

U trećem delu rada se razmatra matematička pozadina koja će se kasnije koristiti u radu: konveksni skupovi, krive indiferencije, teoreme separacije, teorema o postojanju hiperravni koja razdvaja dva disjunktna skupa. Ovde se navode definicije gore navedenih pojmova i teoreme sa dokazima koje će biti korišćene u poslednjem delu ovog rada.

U četvrtom delu ovog rada se nalazi grafički prikaz najprostije ekonomije sa dva učesnika u razmeni i dva proizvoda uz detaljno objašnjenje uspostavljanja ravnoteže na tržištu koja je zapravo predstavljena preko vektora cena. U ovom delu rada su navedene karakteristike Valrasian ravnoteže, probemi egzistencije i jedinstvenosti Valrasian ravnoteže i sve je to grafički predstavljeno u dvodimenzionalnom dijagramu.

U poslednjem delu ovog rada se navodi matematički model koji će se koristiti u dokazu Prve i Druge fundamentalne tereme ekonomije blagostanja uz komentare i detaljna objašnjenja. Tu je još naveden pojam Pareto efikasnosti. U posmatranom sistemu raspodela resursa (robe) između pojedinaca je Pareto efikasna ako bilo koji drugi izbor koji povećava blagostanje jedne individue narušava blagostanje druge.

***

Zahvaljujem se mentoru dr Nenadu Teofanovu na svim savetima, sugestijama i pruženoj pomoći prilikom izrade ovog rada. Takođe, zahvaljujem se članovima komisije, svim ostalim profesorima sa kojima sam sarađivala tokom osnovnih i master akademskih studija, kao i svim kolegama i koleginicama sa kojima je studiranje bilo lepo iskusvo.

Najveću zahvalnost dugujem mojoj porodici na podršci i razumevanju tokom školovanja i života.

Pušin Miroslava

1

Uvodni deo

U ovom poglavlju će biti navedene biografije naučnika čiji su radovi bili ideja za ovaj master rad. Njihove biografije su preuzete sa interneta. [1] U drugom delu ovog poglavlja će biti nešto više reči o opštoj ravnoteži, a to je, između ostalog, tema kojom ćemo se baviti kroz ceo master rad.

1.1 Kenet Erou, Žerar Debro i Vilfredo Pareto - biografije

Kenet Erou (engl. Kenneth Arrow, Njujork, 23. avgust 1921. - 21. februar 2017), američki ekonomista i pisac, dobitnik je Nobelove nagrade za ekonomiju, zajedno sa Džonom Hiksom, 1972.godine; ujedno je i najmlađi dobitnik Nobelove nagrade za ekonomiju, koju je dobio u svojoj 51-oj godini. Erou je bio jedan od vodećih ekonomskih teoretičara XX veka. Kada je reč o ekonomiji, značajan doprinos je dao kao teoretičar neoklasične ekonomije nakon Drugog svetskog rata. Njegova najznačajnija dela su u oblasti analize opšte ravnoteže na tržištu, zatim doprinos u teoriji društvenog izbora, poznatijim pod nazivom "Erouova teorema nemogućnosti". Takođe je dao doprinos i u mnogim drugim oblastima ekonomije, kao što su teorija privrednog rasta i ekonomika informacija. Erou je praktično osnivač ekonomike informacija, posebno teorije asimetričnih informacija, kod kojih jedna strana u transakciji zna više o predmetu transakcije nego druga.

Istovremeno radeći sa Debro-om i Mekenzijem, prvi je dao dokaz postojanja ravnoteže na tržištu. Radeći dalje na ovoj temi, Erou je proširio ovaj

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Kenneth_Arrow
https://en.wikipedia.org/wiki/Gérard_Debrou
hhttps://en.wikipedia.org/wiki/Vilfredo_Pareto

model analizirajući neizvesnost i stabilnost. Njegov doprinos u oblasti opšte teorije ravnoteže je bio pod uticajem Adama Smita, posebno dela "Bogatstvo nacija" iz 1776. godine. U delu "Bogatstvo nacija", Smit je ispitivao ekonomski rast kroz analizu podele rada, obezbeđujući međuzavisnost svih pojedinaca u društvu.

Na svim područjima na kojima je radio, Erou je dao svoj doprinos, pokrenuo je istraživački rad velikih razmera, ne samo za vreme u kojem je živeo već i za vreme koje tek dolazi.

1974. godine američka ekonomska asocijacija objavila je delo Keneta Eroua "Opšta ekonomska ravnoteža" u kojem je, između ostalog, primetio da je tema o kojoj se često raspravljalo stepen koherentnosti između velikog broja pojedinaca i njihvih odluka u vezi sa kupovinom i prodajom robe. U svakodnevnom životu, postoji balans u ponudi količine robe i usluga koje sa jedne strane pojedinci proizvode i pružaju, a sa druge strane neki drugi pojedinci kupuju. Potencijalni kupci računaju na to da će biti u stanju da sprovedu svoje namere (uzrokovane ličnim preferencijama), dok potencijalni prodavci obično neće proizvoditi veću količinu dobara koje ne mogu da prodaju. Ovakav način razmišljanja je široko rasprostranjen čak i među laicima. No ipak, laici to shvataju zdravo za gotovo bez razumevanja mehanizma po kojem se to odvija.

Žerar Debro (franc. Gérard Debrou, 4. jul 1921 - 31. decembar 2004), Amerikanac francuskog porekla, ekonomista i matematičar. Svoju popularnost stekao je kao profesor ekonomije na Univerzitetu u Kaliforniji. Za ovaj svoj rad, ali i ostale svoje doprinose, Debro je dobio Nobelovu nagradu 1983. godine.

1954. godine zajedno sa Erouom objavljuje delo pod nazivom "Postojanje ravnoteže u uslovima konkurentske ekonomije" (Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy) u kojem je prikazan matematički dokaz postojanja opšte ravnoteže.

Debro je postavio aksiomatske temelje za analiziranje konkurentskog tržišta. On je dokazao postojanje ravnoteže na konkurentskom tržištu. Glavna ideja dokaza se sastojala u tome da pokaže postojanje sistema cena za koje višak agregatne tražnje ujednačeno nestaje. Uspeo je to da pokaže koristeći teoreme o fiksnoj tački.

Vilfredo Federiko Damaso Pareto (ital. Vilfredo Pareto; Pariz, 15.

jul 1848 - Đenova, 19. avgust 1923) bio je italijanski inženjer, ekonomista, sociolog, politikolog i filozof. Školovao se u Francuskoj i Italiji, a u Torinu je stekao titulu inženjera. Pareto je živeo u okruženju društva srednje klase, ali je imao visok standard obrazovanja. Godine 1869, stekao je doktorat u inženjerstvu sadašnjeg Politehničkog univerziteta u Torinu.

Nekoliko godina nakon diplomiranja radio je kao građevinski inženjer. Bio je direktor željezare San Đovani Valdarno, a kasnije generalni direktor italijanske željezare. Tek je u svojim četrdesetim godinama počeo ozbiljnije da se zanima za ekonomiju. Godine 1886, postao je predavač ekonomije i menadžmenta na Univerzitetu u Firenci.

Pareto se posebno zainteresovao za ekonomska pitanja i postao zagovornik slobodne trgovine, ali se našao u poteškoćama sa italijanskom vladom. Njegovi spisi odražavaju ideje Leona Valrasa da je ekonomija u suštini matematička nauka. On se bavio i analiziranjem ravnoteže na tržištu i njegov pristup teoriji ravnoteže je dobio na značaju 1930-ih godina i značajno je uticao na ekonomski pristup teoriji ravnoteže. U svojim radovima je intenzivno koristio krive indiferencije, naročito za teoriju potrošača i u svojoj teoriji proizvođača. Prvi je dao prezentaciju i interpretaciju dvodimenzionalnog dijagrama kompromisa sada poznatog kao "Edgeworth box". Pareto je dao svoj doprinos u mikroekonomiji, naročito zbog uvođenja pojma "Paretove optimalnosti" gde je glavna ideja da ako sistem (ekonomija, tržište) uživa u maksimalnom ekonomskom zadovoljstvu, onda ni jednom pojedincu u sistemu ne može biti bolje a da pritom nekom drugom pojedincu iz istog sistema ne bude lošije. Paretova optimalnost se široko koristi u ekonomiji blagostanja i teoriji igara.

1.2 Opšta ravnoteža

Nije baš tako lako razdvojiti značaj i uticaj Erou - Debro modela opšte ravnoteže od matematičke ekonomije same po sebi. U izuzetnim delima (Erou 1951., Debro 1951., Erou - Debro 1954.) dva najstarija i najvažnija pitanja neoklasične ekonomije bila su efikasnost i održivost tržišta. Pokazano je da je analiziranje modela ostalo verno neoklasičnim metodloškim premisama individualne racionalnosti, čišćenju tržišta, racionalnim očekivanjima koristeći dve tehnike: konveksnost i teoremu o fiksnoj tački, koje su veoma važna matematička sredstva u matematičkoj ekonomiji. Ovaj model je mnogo puta interpretiran, a to i ne treba da nas iznenadi, jer su ova dva naučnika obezbedila veoma značajnu inovativnu ekonomsku interpretaciju, što ih je i dovelo do Nobelove nagrade za ekonomiju.

Analiza opšte ravnoteže govori o tome kako "ogroman broj pojedinaca i njihove naizgled nezavisne odluke", po rečima Eroua, usklađuju proizvodnju, balansiraju ponudu i tražnju, i dovode do efikasne alokacije roba na tržištu. Odgovor koji su ekonomisti pružili, počevši od Adama Smita i nastavljajući do Dževonsa i Valrasa se sastoji u tome da sistem cena igra važnu ulogu u uravnotežavanju. Činjenica da se svaki pojedinac u ekonomiji suočava sa istim cenama je ono što dovodi do informacija neophodnih za koordinaciju različitih odluka pojedinaca.

Proces postizanja ravnoteže na jedinstvenom tržištu (npr. zajednica država između kojih se trgovanje obavlja bez ograničenja i carina) je bez sumnje svima poznat. Cene igraju važnu ulogu u uravnotežavanju ponude i tražnje pa prema tome svi kupci koji žele da kupe proizvode ili usluge po trenutnoj ceni to mogu i da urade; isto važi i za prodavce - mogu da prodaju svoje proizvode i usluge po trenutnoj ceni, bez ikakvih viškova ili manjkova na obe strane. Uopštenjem ove delimične ravnoteže na jedinstvenom tržištu, dolazi se do opšte ravnoteže na tržištu. Ona oslikava ideju da će u velikoj meri biti objašnjeno funkcionisanje celog tržišta, kada se govori o ravnoteži uzimajući u obzir pojedinačnu robu u uslovima kada ponuda i tražnja na tržištu zavise od cena drugih dobara. Sa ovog stanovišta, koherentna teorija sistema cena i koordinacija ekonomske aktivnosti trebalo bi da razmotre istovremeno postizanje opšte ravnoteže na svim tržištima u ekonomiji.
Otuda i pitanja koja se nameću:

i) da li takva ravnoteža postoji?

ii) ako postoji koje su njene karakteristike?

Tema koja je uvek aktuelna u analizi opšte ravnoteže, i uopšte u ekonomskoj teoriji, je ideja da konkurentski mehanizam cena dovodi do efikasnih rezultata, u tom smislu da rezultati iz drugih sistema kao što je npr. planska privreda nisu efikasni. Vilfredo Pareto (1909) i Abram Bergson (1938) formalizovali su pojam efikasnosti za ravnotežu na konkurentskom tržištu. Ovo ispitivanje je dovelo do Teorema blagostanja Eroua (1951), Debroa (1951), kao i njihovog zajedničkog modela Erou - Debro (1954). Ove teoreme tvrde da, u suštini, postoji ekvivalencija između rezultata Pareto efikasnosti i ravnoteže u uslovima konkurentskih cena.

Najveći trijumf Erou - Debro modela je to što su razvijeni uslovi pod kojima je moguće tvrditi da odgovarajući sistem cena uvek postoji tako, da kao nevidljiva ruka, usmerava različite i nezavisne agente da međusobno prave kompatibilne izbore. Ideja o opštoj ravnoteži se razvijala od vremena Adama Smita, preko pionirskog rada Valrasa (1874.), Von Neumenn-a (1937.), Wald-a (1932.), Hicks-a (1939.) i Samuelson-a(1947.). Do kraja četrdesetih godina, definicija ravnoteže, uključujući i vlasničke udele u firmama, bila je već dobro utemeljena. U modelu Erou - Debro detaljno su objašnjene mikroekonomske pretpostavke na nivou pojedinačnih agenata, polazeći od njihovih preferencija ka određenoj robi koje su u modelu objašnjene pomoću relacije preferencije i krivih indiferentnosti. Strog i aksiomatski pristup koji je karakterističan za formulaciju opšte ravnoteže u Erou - Debro modelu imao je mnogo uticaja na ekonomske teoretičare.

Najvažnije matematičke tehnike, teorija konveksnosti (teoreme separacije hiperravni) i Brauerova teorema o fiksnoj tački (Kakutani), su među najvažnijim alatima koji se koriste u ekonomskoj matematici. Mekenzi (1954.) mesec dana pre Erou - Debro modela je objavio delo u kojem je koristeći Kakutani teoremu dokazao opštu ravnotežu, iako se model zasnivao na osnovnim pretpostavkama o funkciji tražnje, više nego na preferencijama.

50-ih godina XX veka počele su da se javljaju formulacije ravnoteže koje su u stvari predstavljale prikaz prve i druge teoreme blagostanja koje su i Erou i Debro istovremeno objavili 1951. godine. Posebno vredno pažnje je bio dokaz da je svaka ravnoteža Pareto optimalna.

U početku će akcenat biti stavljen na čistu ekonomiju razmene. Ekonomija razmene je ekonomija bez proizvodnje. U njoj postoji konačan broj agenata (učesnika u razmeni) i konačan broj dobara (robe). Svakom agentu je dodeljena određena količina robe. Svaka roba na tržištu ima svoju cenu. Cilj je da se sazna da li postoje cene takve da svako pokušava da trguje sa svojim dobrima po tim cenama, da je ponuda jednaka tražnji, i takođe kako će rezultati izgledati - da li će biti efikasni u smislu dobre definisanosti i kakvi će oni biti u zavisnosti od preferencija i početnog imetka (bogatstva).

2

Erou - Debro model

U ovom delu rada biće objašnjen matematički model, kao i njegova ekonomska interpretacija koja objašnjava sam model. Takođe, biće navedene i objašnjene pretpostavke od kojih se polazi u modelu. Ove pretpostavke odnose se na robu, potrošače i preduzeća. U ovom delu rada će biti naveden i matematički model za postizanje ravnoteže, Pareto optimalnost u modelu Erou - Debro i zaključci koji potvrđuju ispravnost ovog modela. I na kraju, biće navedeno i nekoliko slučajeva koji prevazilaze okvire ovog modela.

2.1 Roba, Erou - Debro roba

Pojam robe se pojavljuje još u najranijim ekonomskim teorijama. Za svaku robu se pretpostavlja da poseduje objektivne karakteristike, da je moguće odrediti količinu (kvantifikovati robu), i univerzalno prihvaćene karakteristike (npr. merljivost). U stvarnosti je ovakav opis na neki način dvosmislen. Na primer, da li bi dve jabuke različitih veličina trebalo razmatrati kao dva komada iste robe, ili kao dve različite robe. U suštini, kvantitativni aspekt robe ne bi trebalo da stvara zabunu. Skup robe je minimalna kolekcija objekata neophodnih da bi se opisala proizvodnja i potrošnja. Drugi objekti, kao što su, finansijska sredstva, mogu biti predmet trgovanja ali oni ne predstavljaju robu u ovom modelu.

Opšta teorija ravnoteže se odnosi na raspodelu (alokaciju) robe (između nacija, pojedinaca, u pogledu vremena, u uslovima neizvesnosti itd.). Erou - Debro model razmatra ove alokacije koje se mogu postići kroz razmenu roba u nekom vremenskom trenutku.

Važno je napomenuti da agenti u nekoj ekonomiji znaju precizne fizičke opise robe. Što je grublja kategorizacija robe, veći je prostor za trgovinu između agenata, i veći je skup za potencijalnu raspodelu robe. Na primer, ukoliko je agent na tržištu zainteresovan da razmeni svoju robu za određenu količinu jabuka, više je mogućnosti za razmenu ukoliko ne insistira samo na određenoj vrsti jabuke, nego ukoliko bi tražio određenu vrstu jabuke određene veličine. Kada su opisi roba toliko precizni tako da svako dalje preciziranje neće povećati zadovoljstvo samog agenta u nekoj ekonomiji, onda se takve robe nazivaju robe Erou - Debro-a.

Prepoznajući robe koje na kraju koriste potrošači, analiza opšte ravnoteže može dozvoliti sistematično uključivanje eksternih i opštih dobara (zemljišta, vazduha, vode, prirodnih bogatstava itd.) kao specijalnih slučajeva, iako se ovo uglavnom ne zahteva.

U stvarnosti, veoma se retko pronalazi tržište u kome se nalaze samo robe Erou - Debro-a. Što su robe detaljnije opisane, manje je verovatno da će tržište robe imati mnogo prodavaca i kupaca (da će biti konkurentsko). Često se dešava da se sa robom Erou - Debro-a trguje tako da roba bude smeštena u nelomljivim paketima, i da se trgovanje obavlja u određenim vremenskim trenucima. Pa ipak, ovakvo razumevanje ograničenja stvarnog svetskog tržišta, bazirano na robama Erou - Debro-a, je jedan od najmoćnijih alata sistematske procene koja je dostupna teoretičarima opšte ravnoteže. Model Erou - Debro-a, sa svojom idealizacijom zasebnog tržišta za svaku robu, uz sve istovremene susrete kupaca i prodavaca, je standard prema kojem se stvarna ekonomija ipak može oceniti.

2.2 Potrošači

Pre nego što bude reč o potrošačima razmotrimo ukratko pojam robe u modelu o kojem će u nastavku biti reči.

Kada je reč o identifikaciji robe na tržištu, Hik [1] je prvi dao predlog da se uvedu i razrade oznake za robe. Ovu ideju su dalje mnogi razrađivali, naročito Erou kada je govorio o neizvesnosti.

Neka se na tržištu nalazi L dobara, $l = 1, 2, ..., L$. (1)
Svaka pojedinačna količina određene robe na tržistu se opisuje nenegativnim

[1] John R.Hick

relanim brojem. Svaka koordinata u vektoru predstavlja određenu vrstu robe na tržištu. U skupu R^L se nalaze različiti vektori čije koordinate predstavlja-ju količinu određene vrste robe, a ceo skup R^L predstavlja i opisuje količine svih roba koje se nalaze na tržistu.

Neka se na tržištu nalazi H agenata (potrošača), $h = 1, 2, ..., H$. Svaki potrošač h ima neke svoje potrošačke planove $x \in R^L$, $x = (x_1, \ldots, x_L)$ pri čemu je $x_i \geq 0$ za sve $i = 0, 1, \ldots, L$. Potrošački planovi se nalaze u skupu potrošačkih planova X^h.

X^h je zatvoren podskup u R^L koji je ograničen sa donje strane. (2)

Svaki potrošač h ima dobro definisanu svoju relaciju preferencije $\succeq_h$. Za svaki par $(x, y) \in X^h \times X^h$ gde $x \succeq y$ znači da je x dobro (poželjno) bar koliko i y. Binarna relacija $\succeq_h$ na skupu X^h ima sledeće osobine:
(i) refleksivnost (za svako $x \in X^h$: $x \succeq_h x$)
(ii)kompletnost (za svako $x, y \in X^h$: $x \succeq_h y$ ili $y \succeq_h x$) i
(iii)tranzitivnost (za svako $x, y, z \in X^h$: $x \succeq_h y$ i $y \succeq_h z \Rightarrow x \succeq_h z$). (3)

Postoji još i relacija striktne(stroge) preferencije $\succ_h$ koja se definiše na sledeći način: za svako $x, y \in X^h$: $x \succ_h y \Leftrightarrow x \succeq_h y$ i $\neg(y \succeq_h x)$.

Primetimo da u opštoj ravnoteži potrošači prave izbore između svih potrošačkih planova, a ne između pojedinačnih roba. Pojedinačna roba ima značaj za potrošača jedino u smislu robe koju je ranije konzumirao, ili koju planira da konzumira. Zajedno sa tranzitivnošću i kompletnošću, ova pretpostavka u vezi sa preferencijama potrošača sadrži ideal neoklasičnog racionalnog izbora.

Do XX veka ekonomski teoretičari su se relativno malo bavili racionalnim izborima agenata na tržištu. Takav pristup se značajno menja tokom XX veka kada se javljaju i prvi modeli racionalnog ponašanja i to pre svega u teoriji operacionih istraživanja, a zatim i u teoriji racionalnog izbora. Neki od modela su: model neograničene racionalnosti, model instrumentalne racionalnosti, model vrednosne racionalnosti, model ograničene racionalnosti i tako dalje.[2] U modelu koji će biti objašnjen u nastavku racionalno ponašanje agenata na tržištu treba posmatrati na sledeći način:
1) svaki agent na tržištu utvrđuje lične ciljeve, zatim određuje moguće alternative ponašanja (izbora određenih roba na tržištu) i na kraju te alternative

[2] Više o tome videti: Krstić M. doktorska disertacija *Teorijski modeli racionalnog ponašanja u savremenoj ekonomskoj nauci*, Niš, 2013.

upoređuje po nekom unapred definisanom kriterijumu
2) Lični ciljevi agenata na tržištu su odredjeni ličnim preferencijama agenata
3) za svaki par alternativa, na primer R i S, agent ili preferira R u odnosu na S ili S u odnosu na R ili je indiferentan po po pitanju izbora između alternativa R i S.
4) svaki agent želi da ostavri maksimalnu korisnost za sebe, koristeći raspoložive alternative (izbore)
5)transakcioni troškovi (troškovi prilikom razmene) su jednaki nuli.

Svaki agent na tržištu, vođen ličnim željama i preferencijama, želi da ostvari maksimalnu korisnost za sebe. Otuda, nema značaja porediti interpersonalne korisnosti, već treba posmatrati korisnost svakog agenta zasebno. Korisnost bi trebalo shvatiti ne samo kao funkciju trenutne potrošnje, već celog potrošačkog plana. Na taj način je onda racionalan izbor ekvivalentan maksimizaciji korisnosti. Pod uticajem Pareta (1909.), neoklasičari Hiks (1939.) i Samuelson (1947.), su preuzeli racionalnost kao osnovu, a maksimizaciju korisnosti kao logičnu posledicu. Ovo je imalo snažan efekat na ekonomiju blagostanja, kao i na ekonomsku teoriju uopšte.

Koristeći osobine (1)-(3) Debro je 1951. godine dokazao sledeću teoremu:

Teorema 2.2.1. *Neka je $\succeq_h$ relacija preferencije na $X^h \times X^h$. Funkcija $U^h : X^h \to R$ za koju važi $\forall x, y \in X^h$ $x \succeq_h y$ ako i samo ako $U^h(x) \geq U^h(y)$ naziva se funkcia korisnosti (utilitarna funkcija) relacije preferencije $\succeq_h$.*

Potrebni uslovi koje neka realna funkcija mora ispunjavati da bi bila funkcija korisnosti za određenu relaciju preferencije su: funkcija je rastuća i neprekidna na posmatranom skupu. Sledeća teorema koja se navodi sa dokazom govori o tome da ako nam je poznata funkcija korisnosti i neka striktno rastuća realna funkcija, onda će i kompozicija te dve funkcije predstavljati funkciju korisnosti.

Teorema 2.2.2. *Ako je funkcija $U^h : X^h \to R$ funkcija korisnosti za relaciju preferencije $\succeq_h$ na skupu $X^h \times X^h$ tada je za svaku striktno rastuću realnu funkciju $f : R \to R$ funkcija V određena sa $V = f \circ U$, $(V(x) = f(U(x)))$ takođe funkcija korisnosti za relaciju preferencije $\succeq_h$.*

Dokaz:

$x \succeq_h y \Leftrightarrow U(x) \geq U(y)$ (teorema 2.2.1)
$U(x) \geq U(y) \Leftrightarrow f(U(x)) \geq f(U(y))$ (f je striktno rastuća)

$f(U(x)) \geq f(U(y)) \Leftrightarrow V(x) \geq V(y)$ (po definiciji funkcije V)
Znači, $x \succeq_h y \Leftrightarrow V(x) \geq V(y)$, pa po teoremi 2.2.1 zaključujemo da je i V funkcija korisnosti.■

Razrađivanje prirode osnovnih pojmova robe i racionalnog izbora, razvilo se u osnovu teorije o ravnoteži na tržištu, pripremajući put da se metodološki principi neoklasične ekonomije (racionalan izbor i ravnoteža) primene na pitanja daleko izvan pitanja koja su vezana za tržište. Iako racionalni principi u nekom pogledu slabe pretpostavke o merljivosti korisnosti i trenutne maksimizacije korisnosti, kada se spoje sa pojmom potrošačkog plana to zaista jača ove pretpostavke.

Dve dodatne pretpostavke u modelu Erou - Debro-a u vezi sa relacijom preferencije su nezasićenost i konveksnost.

Nezasićenost - za svako $x \in X^h$, postoji $y \in X^h$ tako da je $y \succ_h x$, odnosno da važi $y \succeq_h x$ a ne važi $x \succeq_h y$.

Konveksnost - X^h je konveksan skup, $\succeq_h$ je konveksno tj. ako je $y \succ_h x$ i $0 < t \leq 1$ onda $[ty + (1-t)x] \succeq_h x$.

Pretpostavka o nezasićenosti izgleda potpuno u skladu sa ljudskom prirodom, odnosno da je u čovekovoj prirodi da traga za robom od koje će imati više koristi, to jest veću korisnost. Pretpostavka o konveksnosti implicira da su robe beskonačno deljive, i da su njihove kombinacije (kombinacije roba) dobre bar koliko i sami esktremi - pojedinačne robe. Evo jednog standardnog primera: jedan čovek može biti indeferentan prema ispijanju čaše džina ili čaše viskija u određenom trenutku. Ali gore će proći ukoliko mora da popije čašu pića u kojoj je pomešano pola čaše džina i pola čaše viskija. S druge strane, ukoliko nisu najdetaljnije predstavljene karakteristike robe, potrošač bi možda bolje prošao ukoliko bi imao flašu džina i flašu viskija, umesto da ima po dve flaše pića bilo kog od ova dva pića.

U svakom slučaju, ako je neki agent malo ili nedovoljno povezan sa tržištem (tj. ako je prisutno mnogo agenata na tržištu) onda je nekonveksnost u relaciji preferencije relativno nevažna.

Svaki agent h je takođe okarakterisan vektorom inicijalnog imetka (bogatstva) $e^h \in X^h \subset R^L$ za svako $h = 1, 2, ..., H$. (6)

Vektor imetka e^h predstavlja zahtev da potrošač ima u vidu i robu, za koju nije neophodno da bude fizički u njegovom vlasništvu. Činjenica da $e^h \in X^h$ znači da potrošač može da obezbedi sebi egzistenciju potencijalnog agenta na tržištu čak i u slučaju kada je lišen mogućnosti da trguje. U svakom slučaju, egzistencija potrošača nije problem kojim se bavi model Erou - Debro-a.

2.3 Firme (preduzeća)

Neka je dato J firmi, $j = 1, 2, ..., J$. (7)

Svakaoj osobi h je dodeljen udeo u vlasništvu svake od firmi $j = 1, 2, ...J$. Za svako $h = 1, 2, ..., H$, $j = 1, 2, ..., J$ $d_{hj} \geq 0$ i za svako $j = 1, 2, ..., J$ $\sum_{h=1}^{H} d_{hj} = 1$. (8)

U modelu Erou - Debro-a firme su okarakterisane na osnovu inicajlne podele među samim vlasnicima, i na osnovu njihovog tehnološkog kapaciteta $Y_j \in R^L$ da transformišu robe. Bilo koji plan proizvodnje $y \in R^L$, gde se negativne komponente odnose na ulaze (inpute) a pozitivne komponente na izlaze (autpute), je izvodljiv za firmu j ako $y \in Y_j$. Uobičajena pretpostavka u modelu Erou - Debro-a je sloboda raspolaganja: ako je $l = 1, 2, ..., L$ neka roba, a v_l je jedinični vektor iz R^L, sa jedinicom na l-tom mestu i nulama na svim ostalim mestima u vektoru, onda je za svako $l = 1, ..., L$ i $k > 0$, -$kv_l \in Y_j$ za neko $j = 1, 2, ..., J$. (9)

Empirijski najranjivija pretpostavka u modelu Erou - Debro-a, i krucijalna u smislu logike je sledeća pretpostavka - za svako j, Y_j je zatvoren konveksan skup koji sadrži nulu. (10) Ova pretpostavka o konveksnosti isključuje nedeljivost u proizvodnji (npr. ne može se izgraditi polovina tunela).

Kao i u slučaju potrošnje, ako je proizvodnja nedovoljno ili malo povezana sa tržištem, u odnosu na veličinu celog tržista, onda zaključci koji će ukratko biti prezentovani neće mnogo uticati na nju. Takođe ako su proizvođači toliko veliki da bi mogli ostvariti monopol na tržištu, Erou - Debro model ravnoteže u uslovima konkurentskg tržišta, njegovi rezultati i zaključci jednostavno nisu primenljivi.

Uvešćemo još tri pretpostavke u model Erou - Debro-a, koje su ujedno i poslednje pretpostavke ovog modela.

Neka je

$$e = \sum_{h=1}^{H} e^h$$

$$F = \left\{ y \in R^L \mid y = \sum_{j=1}^{J} y_j, y_j \in Y_j, j = 1, ..., J \right\}$$

$$\overline{F} = \{y \in F \mid y + e \geq 0\}$$

i

$$K = \{y = (y_1, ..., y_j) \in Y_1 \times ... \times Y_j \mid \sum_{j=1}^{J} y^j \in \overline{F}\}$$

onda $F \cap R^L_{++} \neq \emptyset$ i K je kompaktan. (11)

Pretpostavka (11) zahteva da je nivo produktivnosti ograničen. Ovaj nivo produktivnosti je moguć čak i ako se sektor proizvodnje odvaja od potrošačkog sektora.

Primetimo da su ove pretpostavke dosledne kako sa inicijalnim izvorom bogatstva samih firmi, tako i bogatstva pojedinaca. U prvobitnom modelu Erou - Debro-a (1954.), firmama je bilo zabranjeno posedovanje imetka, ono je bilo dodeljeno vlasnicima firmi. Kada je tržište kompletno (kada postoje neznatni transakcioni troškovi, savršene informacije o tržištu i cenama za svaku robu u svakom mogućem stanju u svetu) postoji mala razlika. Kada tržište nije kompletno pretpostavka je ograničavajuća.

Ekonomija je nesmanjiva. (12)

To znači da je za bilo koja dva agenta h i h', imetak e^h agenta h je pozitivan za neku robu l, koju bi (uzimajući u obzir mogućnosti proizvodnje) agent h' mogao upotrebiti da bi mu bilo izrazito bolje. Izgleda potpuno razumno da rad svakog agenta može biti iskorišćen da bi popravio stanje drugog agenta.

I na kraju, pretpostavimo da robe nisu okarakterisane u odnosu na to koja ih firma proizvodi ili koji ih potrošači koriste. (13)

Ova pretpostavka je jednostavno formulisana radi njene lakše interpretacije. Kada se pogleda zajedno sa definicijom konkurentske ravnoteže, to implicira da ne postoje eksterni uticaji na proizvodnju i potrošnju, javna dobra, itd. Pa ipak, matematički se ova pretpostavka ne može izraziti. Drugim rečima, ako izostavimo ovu pretpostavku, model Erou - Debro-a će i dalje imati smisla, ali će zahtevati nešto drugačiju interpretaciju. Time su se posebno bavili Lindahl i Samuelson. Na primer, potrošači bi plaćali različite cene za fizički identičnu robu (identičnu, u smislu vremena, lokacije...) Sa deskriptivne tačke gledišta, racionalnost i kretanje cena koje zahteva ravnoteža, čine da (13) bude neophodno.

2.4 Ravnoteža

Cene su finalni osnovni koncept u modelu Erou - Debro. Robe su kvantitativne i direktno merljive. Kao što je Debro i naglasio, glavna uloga koju matematika igra u ukonomiji je delimično zbog njihove kvantitativne prirode. Zapravo, cena je jedino osetljiva (i merljiva) u smislu veze između dve robe, tj, u smislu relativnih cena. Da bi matematički bilo pogodnije (da bi se cene i količine tretirali kao dualni vektori), jedna cena je određena za svaku jedinicu količine svake robe. Relativna cena dve robe se može dobiti stavljajući u razlomak cene te dve robe (robe iz Erou - Debro modela).

Sve do vremena Hiksa i Samuelsona i posebno modela Erou - Debro-a, najveće primedbe u vezi sa teorijom ravnoteže odnosile su se na različite istorijske pristupe teoriji opšte ravnoteže. U nastavku će biti data definicija ravnoteže po modelu Erou - Debro i posebno će biti naznačene neke glavne karakteristike ove definicije.

U modelu se pretpostavlja da agenti prihvataju trenutne (date) cene na tržištu za svoju robu. Ne možemo ništa posebno reći o tome kako su određene ove cene na tržištu, mada će nešto više reči o tome biti kasnije. Vektor cena na tržištu je $p \in R^L_+$, i sve cene su nenegativne. Svaki agent pravi takve izbore kako bi maksimizirao korisnost u skladu sa datim budžetskim ograničenjem. Otuda, za svakog agenta i to se može predstaviti na sledeći način:

$$\max_{x \in R^L_+} U^i(x),$$

pri čemu mora da važi $px \leq pe^i$.

Budžetsko ograničenje se za nijansu razlikuje od budžetskog ograničenja u standardnoj teoriji cena. Podsetimo se, u standardnoj teoriji cena budžetsko ograničenje je $px \leq W$ gde je W inicijalno bogatstvo potrošača. U našem sučaju, "bogatstvo" potrošača je dato sa pe^i, što ustvari predstavlja imetak (bogatstvo) koji je moguće dobiti ukoliko se proda sva količina robe namenjena za trgovinu. Budžetski skup se može predstaviti na sledeći način

$$B^i(p) = \{x : px \leq pe^i\}$$

i ovakva notacija će se često koristiti.
Ekonomija E u modelu Erou - Debro se može predstaviti na sledeći način

$$E = \left\{L, H, J(X^h, e^h, \succeq_h), (Y^j), (d_{hj}), h = 1, ..., H; j = 1, ..., J\right\}$$

tako da važe pretpostavke (1)-(13).

Erou - Debro ravnotežu možemo redstaviti na sledeći način

$$[(\overline{p_l}), (\overline{x_l}^h), (\overline{y_l}^j), l = 1, ..., L; h = 1, ..., H; j = 1, ..., J]$$

tako da važi za svako $j = 1, ..., J$,

$$\overline{y_l}^j \in max\left\{\sum_{l=1}^{L} \overline{p_l} y_l \mid y = (y_1, ..., y_L) \in Y^j\right\}$$

za svako $h = 1, ..., H$, $\overline{x}^h \in B^h(\overline{p})$ gde je

$$B^h(\overline{p}) = \left\{x \in X^h \mid \sum_{l=1}^{L} \overline{p_l} x_l \leq \sum_{l=1}^{L} \overline{p_l} e_l^h + \sum_{j=1}^{J} d_{hj} \sum_{l=1}^{L} \overline{p_l y_l}^j\right\}$$

i ako $x \in B^h(\overline{p})$ onda ne važi $x \succ_h \overline{x}^h$.
Za svako $l = 1, ..., L$ važi

$$\sum_{h=1}^{H} \overline{x_l}^h = \sum_{h=1}^{H} e_l^h + \sum_{j=1}^{J} \overline{y_l}^j$$

Najupečatljivija odlika opšte ravnoteže je da jedno uz drugo stoje velika raznovrsnost roba, potošača, dostupnih izvora i koordinacija koja postoji između njih. Želja svakog potrošača, bez obzira koliko kapriciozna ona bila, sasvim precizno se sreće sa ponudom nekog agenta na tržištu. Ovo se istovremeno dešava za sve potrošače i sva tržišta.

U modelu opšte ravnoteže postoji simetrija, na način da svi agenti ulaze u model individualno motivisani na osnovu svog interesa (a ne kao članovi posebnih klasa motivisani klasnim interesom), i istovremeno, da nijedan agent nema prvenstvo u odnosu na nekog drugog agenta na datom tržištu. Ako se egzistencija radnika iz nekog razloga ne podrazumeva, to bi poremetilo sam model i simetriju u modelu. Prihod radnika bi prvenstveno trebalo da bude zagarantovan, jer bi u suprotnom tražnja doživela kolaps. Postoji značajno poboljšanje u trgovini kada se ona odvija kroz proces razmene i proizvodnje. Ovaj način posmatranja tržista i razmene uopšte, značajno se razlikuje od tradicionalnog gledišta Rikarda i Marksa.

Ukratko će biti navedene neke od razlika u klasičnom i neoklasičnom pristupu. U modelu Erou - Debro ne mora da postoji fiksni koeficijenti proizvodnje - skupovi Y su mnogo opštijeg karaktera. U Erou - Debro modelu nema razloga da stopa profita bude uniformnog karaktera. Pored toga postoji još jedan aspekt modela oko kojeg se autori slažu, a to su udeli d_{hj} koji dozvoljavaju vlasnicima firmi da prisvajaju profit iako ništa nisu doprineli u proizvodnji.

Primetimo da u teoriji opšte ravnoteže svaki agent treba da se bavi samo svojim ličnim ciljevima (preferncijama ili profitom) i cenama. Pretpostavka od koje se polazi je da svaki agent zna sve cene. To znači da je svakog datuma svaki agent sposoban da prognozira sve buduće cene sve do kraja sveta i vremena. Ovo je u duhu modela Erou - Debro koji se zasniva na racionalnim odlukama. Pretpostavljajući da svaki čovek najbolje zna svoje želje kao i kako će menjanje sredine odgovarati njegovoj proizvodnji, decentralizovana odluka bi bila veoma poželjna, osim ako nije nekompatibilna sa koordinacijom samog tržišta. I zaista, harmonija različitosti je neprikosnovena doktrina liberalne tradicije.

2.5 Egzistencija opšte ravnoteže

Pretpostavimo da su relacije preferencije agenata i proizvodni skupovi firmi striktno konveksni da agenti imaju striktnu relaciju preferencije i da svi imaju striktno pozitivan imetak. Neka je $\triangle$ skup od L vekora cena, koji su nenegativni, koji sumiranjem daju jedinicu. Neka je $f^h(p)$ paket robe (roba koju je posmatrani agent izabrao) najpoželjnija po izboru agenta h, i neka su cene tih roba striktno pozitivne $p \in \triangle_{++}$. Slično, neka je $g^j(p)$ funkcija koja maksimizira profit firme j pri datim cenama $p \in \triangle_{++}$. Konačno, neka je

$$f(p) = \sum_{h=1}^{H} f^h(p) - \sum_{j=1}^{J} g^j(p) - e.$$

Funkcija f je neprekidna za sve $p \in \triangle_{++}$. Cena $\overline{p} \in \triangle_{++}$ je cena iz modela Erou Debro pri postignutoj ravnoteži ako i samo ako je $f(\overline{p}) = 0$. Ova funkcija nije proizvoljna, već zadovoljava Valrasov uslov $p \cdot f(p) = 0$.

Posmatrajmo sada konveksan, kompaktan skup $\triangle_l$ cena $p \in \triangle$ gde je $p_l \geq \varepsilon > 0$, za svako l. Posmatrajmo i funkciju $\phi : \triangle_l \to \triangle_l$ mapirajući p do najbliže tačke $\overline{p}$ u $\triangle_l$ sve do $f(p) + p$. Koristeći Bruerovu teoremu o fiksnoj tački, sledi da mora postojati neko $\overline{p}$ sa svojstvom da je $\phi(\overline{p}) = \overline{p}$. Zbog striktne monotonosti, sledi da $\overline{p}$ ne može biti na rubu skupa $\triangle_l$, za dovoljno malo ε. Iz Valrasovog uslova sledi da ako je $\overline{p}$ u unutrašnjosti skupa $\triangle_l$, onda je $f(\overline{p}) = 0$.

Primetimo esencijalni značaj konveksnosti koji je korišćen u malopređašnjem izlaganju. Konveksnost je korišćena da bi se obezbedilo da je optimalno ponašanje agenata (koje je predstavljeno preko relacije preferencije) neprekidno. Takođe, svojstvo konveksnosti je korišćeno da bi se osiguralo postojanje fiksne tačke u $\triangle_l$. Međutim, kada je u pitanju postizanje ravnoteže na nekompletnim tržištima, mogu se javiti problemi ekonomskog tipa u kojima je prostor cena u suštini nekonveksan i gde se postojanje ravnoteže može jedino pokazati korišćenjem "path - following" metode.

Pretpostavka o striktnoj konveksnosti bi se mogla oslabiti tako što bi se Brauerova teorema o fiksnoj tački [3] zamenila sa Kakutanijevom teoremom o fiksnoj tački [4].

Veoma važna stavka u razmatranju je svakako konveksnost. Ako je konveksnost narušena i proizvodni skup nema dobra koja su besplatno na raspolaganju (npr vazduh), onda se ne može garantovati postojanje ravnoteže, pa bi se u definiciji moralo zahtevati ili da je $f_l(\overline{p}) = 0$ ili da važi $f_l(\overline{p}) < 0$ i

[3] Pretpostavimo da je skup A, A $\subset R^N$, neprazan, kompaktan i konveksan i neka je $f : A \to A$ neprekidna funkcija na skupu A. Tada $f(\cdot)$ ima fiksnu tačku, to jest postoji $x \in A$ tako da je $x = f(x)$

[4] Pretpostavimo da je skup A, $A \subset R^N$, neprazan, kompaktan i konveksan skup i neka je $f : A \to A$ poluneprekidna sa gornje strane na skupu A sa osobinom da je skup $f(x) \subset A$ neprazan i konveksan za svako $x \in A$. Tada $f(\cdot)$ ima fiksnu tačku, to jest postoji $x \in A$ tako da je $x \in f(x)$

$\overline{p}_l = 0$. Prema tome, ne može se izostaviti monotonost i raspolaganje besplatnim dobrima bez dopuštanja negativnih cena.

2.6 Pareto optimalnost u modelu Erou - Debro

U Prvoj teoremi blagostanja ekonomije (o kojoj će biti nešto više reči kasnije) govori se o tome da je svaka raspodela po modelu Erou - Debro, $\overline{x} = (\overline{x}^h)$, $h = 1, \ldots, H$, Pareto optimalna u tom smislu da ako $[(x^h), (y^j)]$ zadovoljava $y^j \in Y^j$, $\sum_{h=1}^{H} x^h = \sum_{j=1}^{J} y^j + e$, onda se ne može desiti da važi $x^h \succ_h \overline{x}^h$ za sve h. Druga teorema blagostanja ekonomijie (o kojoj će takođe biti više reči kasnije) tvrdi da je Pareto optimalna raspodela za ekonomiju E iz modela Erou - Debro, raspodela koja se ostvaruje postizanjem ravnoteže u uslovima konkurentskog tržišta za Erou - Debro ekonomiju $\widehat{E}$ dobijenu iz E preraspodelom inicijalnog dohotka i vlasničkog udela.

Povezanost ravnoteže ostvarene u uslovima konkuretnskog tržišta i Pareto optimalnosti se obično podrazumevala i sve do 1951. godine je bilo prilično konfuzno kada su u pitanju potrebni i dovoljni uslovi. Stariji dokaz Paretove optimalnosti[5] je pretpostavljao diferencijabilne funkcije korisnosti proizvodnog skupa, i striktno pozitivnu alokaciju $\overline{x}$. To je u prvi plan stavilo problem maksimizacije korisnosti i-tog potrošača, čija je namena da održi nivo korisnosti bar koliko je $\overline{x}$, i izvodljivost, koja je dostignuta u $\overline{x}$ ako i smao ako je $\overline{x}$ raspodela ravnoteže u uslovima konkurentskog tržišta za "preraspoređenu" ekonomiju $\widehat{E}$. Ovaj prvi zahtev dokazuje ekvivalenciju između ravnoteže u uslovima konkurentskog tržišta i Pareto optimalnosti zahtevajući pretpostavku da su relacija preferencije i proizvodni skup konveksni.

U Erou - Debro (1954.) dokazu ekvivalencije Pareto optimalnosti i ravnoteže ostvarene na konkuretskom tržištu, pod uticajem globalnih promena, nije zahtevana diferencijabilnost niti da svaki agent poseduje striktno pozitivnu količinu svake robe. U stvari, u dokazu prve teoreme blagostanja, koja govori o tome da je svaka konkurentska ravnoteža Pareto optimalna, ne koristi se osobina konveksnosti. Jedino što se zahtevalo je lokalna nestacionarnost, tako da svaki agent potroši sav svoj prihod (svo svoje bogatstvo) kada se postigne ravnoteža. Ako je za (x, y) Pareto optimalna raspodela $(\overline{p}, \overline{x}, \overline{y})$, onda je za sve h, $\overline{p}x^h < \overline{p}\overline{x}^h$. S obzirom da maksimizacija profita implicira

[5] Lange, 1942.

da je za svako j, $\overline{py}^j \geq \overline{p}y^j$, to povlači da je

$$\overline{p}(\sum_{h=1}^{H} x^h - \sum_{j=1}^{J} y^j) > \overline{p}(\sum_{h=1}^{H} \overline{x}^h - \sum_{j=1}^{J} \overline{y}^j),$$

što je u kontradikciji sa izvodljivošću. [6]

Sa druge strane, u dokazu druge teorema blagostanja se zahteva konveksnost relacije preferencije i proizvodnog skupa. U suštini, to se zasniva na teoremi Minkovskog koja tvrdi da između dva disjunktna konveksan skupa u R^L postoji hiperravan koja ih razdvaja. [7]

2.7 Šta model ne objašnjava?

Svaka Pareto optimalna raspodela može biti objašnjena pomoću ravnoteže iz modela Erou - Debro. U narednom razmatranju, biće izdvojeno nekoliko fenomena gde postoji odstupanje u opisu modela Erou - Debro, ali koji se mogu pojaviti u slučaju da pretpostavka o konačnom, ali i kompletnom skupu Erou - Debro dobara i potrošača bude narušena. Postoji trenutno nekoliko pravaca u analiziranju modela koji su pokušali da ubace u okvire opšte ravnoteže ove fenomene. Naravno, sve nove dodatne pretpostavke su postavljene uz očuvanje fundamentalnih neoklasičnih principa iz modela Erou - Debro o optimizaciji agenata, čišćenju tržišta, racionalnim očekivanjima, što je u svakom slučaju vredno pažnje.

Primetimo da se u modelu Erou - Debro ne trguje akcijama firme. Dokument o vlasnisštvu ne predstavlja robu po modelu Erou - Debro, već samo daje pravo agentu, koji ima određeni udeo u vlasništvu firme, da raspolaže robom koju nije stekao u procesu razmene.

Primetimo dalje, da u ravnoteži iz modela Erou - Debro pretpostavka da sve cene ostaju iste, nebitno da li firme menjaju svoj plan proizvodnje, garantuje da se vlasnici firmi jednoglasno dogovaraju o istom cilju, maksimizaciji profita. Ako bi postojalo tržište za prodaju akcija, prema ovom modelu na njemu svakako ne bi bilo trgovine, s obzirom da se vlasnički udeo u firmi i imetak neophodan za trgovinu odlično supstituišu. U nekompletnom

[6] $\overline{p}$ predstavlja vektor cena pri kojima se ostvaruje Pareto optimalna raspodela, to jest ravnoteža. Detaljnija objašnjenja, kao i dokaz Prve teoreme blagostanja su predstavljeni u poslednjem delu ovog rada.

[7] Dokaz Druge teoreme blagostanja dat je u poslednjem delu ovog rada.

tržištima, nije sigurno da će se izvori prihoda (bogatstva) dobro supstituisati. Tu bi postojala mogućnost trgovine na tržištu akcija. Naravno, takav model bi trebalo da odredi ciljeve firme, s obzirom da ne bi trebalo tada očekivati jednoglasnost u odlučivanju. Teorija o tržištu akcija je tek u početnom stadijumu razvoja, iako su neki već radili na toj temi (Dreze 1974, Grossman-Hart, 1979).

Bankrotstvo nije dozvoljeno u modelu Erou - Debro. To proizlazi iz činjenice da agenti moraju da ispoštuju budžetska ograničenja (u modelu nije dozvoljeno dugovanje agenata, to jest $d_{hj} < 0$, koje ustvari i dovodi do bankrotstva). S obzirom da je svaka Erou - Debro ravnoteža Pareto optimalna, ne bi bilo korisno redukovati kaznu za bankrotstvo do nivoa gde bi bilo ko mogao izabrati da bankrotira.

Novac se ne pojavljuje u modelu Erou - Debro. Naravno, svi razlozi za to su zbog prirode održivosti modela: količine novca potrebne da se zadovolje potrebe pojedinca ili firme, čuvanja imovine u nekom sigurnom obliku (novac, zlato) radi kasnijeg trošenja, mininalna monetarna jedinica mere vrednosti robe itd. Neko bi možda mogao da zamisli novac u modelu na ovaj način: pojedinac bi u početnom trenutku pozajmio novac od centralne banke, zatim bi dalje trgovanje morao da finansira iz svojih izvora novca (početnog imetka i pozajmice) i na kraju da vrati banci onoliko koliko je pozajmio uz kamatu (ili bi se suočio sa plaćanjem kazne za bankrotstvo). U takvom modelu Erou - Debro cene bi se pojavljivale kao cene novca. Apsolutni nivo cene novca i agregatna količina pozajmljivanja ne bi bila u potpunosti određena, ali bi raspodela robe i dalje bila ista kao u modelu Erou - Debro. Pa otuda, nema svrhe uvoditi novac eksplicitno u model Erou - Debro, s obzirom da nema uticaja na stvarnu alokaciju robe.

U modelu Erou - Debro-a svako trgovanje se obavlja na početku posmatranog perioda. Ako bi se tržište ponovo otvorilo u nekom kasnijem trenutku za iste robe iz Erou - Debro modela, ne bi bilo novog trgovanja. Zbog efikasnosti, Pareto optimalnost po modelu Erou - Debro bi mogla da ukazuje na pretpostavku, da iako bi postojao gubitak u eliminisanju ostalih tržišta, trgovanje na preostalom tržištu bi trebalo da bude maksimalno efikasno.

Razmotrimo model tako da važe sve pretpostavke od (1)-(13), s tim da se ovaj put pretpostavlja da je za L i H dozvoljeno da budu beskonačni. Može se pokazati da postoji kolekcija ekonomija koje imaju kontinuum ravnoteža, među kojima je većina Pareto suboptimlana, koje se veoma razlikuju po ponašanju u početnom trenutku. Otuda je i u modelu gde vreme nema konačan kraj, optimalnost i svojstva komparativne statike ravnoteže se značajno razlikuju. Ovo je detaljnije objašnjeno u radu "Overlaping generations models", Bewley(1972.). Takve ekonomije i takva tržišta imaju tendenciju da se ponašaju poput onih opisanih u modelu Erou - Debro.

Po definiciji opšte ravnoteže, nijedan agent ne uzima u obzir šta drugi agenti znaju. Vrlo je moguće u modelu Erou - Debro da neki neobavešteni agenti razmene vrednu robu za robu koja se odnosi na neko stanje na tržištu za koje drugi agenti znaju da se neće dogoditi. Ovaj problem je privukao veliku pažnju finansijske literature, i pojedini tvrde (Grossman 1981.) da se ovaj problem može rešiti proširenjem definicije ravnoteže Erou - Debro-a na "ravnotežu racionalnih očekivanja"(Lucas 1972., Radner 1979.). No, ova definicija ipak stvara sumnju, naročito kada je reč o njenoj implementaciji.

Pitanje koje je teoretičarima često bilo interesantno je kako bi agenti trebalo da dođu do ravnoteže u modelu Erou - Debro. Početnici koji su razmatrali opštu ravnotežu nisu razmišljali o tome da ekonomija ne mora obavezno biti u ravnoteži. Valras je, na primer, predstavio eksplicitni postupak u kojem se pretpostavlja konvergencija ka ravnoteži. Ta ideja ima manjkavosti iz dva razloga: uopšteno, može se pokazati da ne postoji konvergencija, i što je još važnije, to je proces u kojem se ne dozvoljava razmena dok se ravnoteža ne postigne. Ovo predstavlja manu svake teorije ravnoteže, to jest ne mogu se navoditi rezultati ukoliko ne postoji ravnoteža. Velika kriza 1930-ih, kao i velika svetska ekonomska kriza od 2008. godine, ipak daju stroge argumente da postoje velika ograničenja u primeni analize ravnoteže tržišta.

3

Neki matematički pojmovi koji će se koristiti u radu

Pojam konveksnosti je jedan od najznačajnijih pojmova u matematičkoj ekonomiji, mikroekonomiji, mnogim područjima optimizapoglavlju biće navedeni pojmovi i teoreme koje će se koristiti u dokazu o egzistenciji opšte ravnoteže i Pareto efikasnosti u poslednjem delu ovog rada.

3.1 Konveksni skupovi i hiperravni

Definicija 3.1.1. *Neka je X vektorski prostor i neka je $A \subset X$. Skup A je konveksan ako za sve $x, y \in A$ i za sve $\alpha \in (0,1)$ važi $\alpha x + (1-\alpha)y \in A$.*

Definicija 3.1.2. *Neka je dat vektorski prostor X i neka je dato n tačaka $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tog vektorskog prostora. Tačka $x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$ je konveksna kombinacija tačaka $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ako je $\alpha_k \geqslant 0$ za sve $k = 1, \ldots, n$, i $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$.*

Primer 1. *Najjednostavniji primeri konveksnih skupova su prazan skup, skup koji se sastoji od jedne tačke i čitav R^n. U skupu R^n lopta jeste konveksan skup dok kružnica nije konveksan skup.*
Skup koji sadrži više od jedne tačke i bar jednu izolovanu tačku nije konveksan skup.

U nastavku su date još neke osobine konveksnih skupova, bez dokaza.

- Neka su $A, B, B_1, B_2, \ldots, B_m$ konveksni podskupovi u vektorskom prostoru X i neka je α realan broj. Tada su skupovi $C = B_1 + B_2 + \ldots + B_m$, $D = A - B$, $E = \alpha A$, $F = \alpha B$ takođe konveksni.

- Dekartov proizvod konveksnih skupova je konveksan skup.

- Neka je B konveksan skup i neka su α i β pozitivni realni brojevi. Tada važi $(\alpha+\beta)B = \alpha B + \beta B$.

U vektorskom prostoru X nad poljem realnih brojeva, preslikavanje $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \longmapsto R$ za koje važi:
1. $\langle x, x \rangle \geq 0$, i $\langle x, x \rangle = 0$, ako i samo ako je $x = 0$,
2. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle, \forall x, y, z \in X, \forall \alpha, \beta \in R$
3. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \forall x, y \in X$
naziva se skalarni proizvod.

Skalarni proizvod se računa na sledeći način: $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$ za sve $x, y \in R^n$, pri čemu je $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Skalarni proizvod indukuje normu $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}, x \in X$.

Definicija 3.1.3. *Neka je dat fiksiran ne-nula* [1] *vektor* $c \in R^n$, $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ *i broj* $\gamma \in R$. *Hiperravan* $H_{c,\gamma}$ *je*

$$H_{c,\gamma} = \{x \in R^n \mid \langle x, c \rangle \ = \gamma\}$$

Skup $H_{c,\gamma}$ ne može biti prazan skup. Uzmimo na primer vektor $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \neq 0$. Tada postoji indeks $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tako da je $c_j \neq 0$. Vektor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ koji je definisan na sledeći način
$x_j := \frac{\gamma}{c_j}$, a $x_k := 0$, $k \neq j$, pripada skupu $H_{c,\gamma}$.
Treba primetiti da ako $x_0 \in H_{c,\gamma}$ onda važi $H_{c,\gamma} = H_{c,x_0} = \{x \in R^n \mid \langle x - x_0, c \rangle = 0\}$. Izraz $\langle x - x_0, c \rangle = 0$ zapravo označava ortogonalnost vektora $x - x_0$ i c, pa se vektor c naziva normalni vektor hiperravni $H_{c,\gamma}$.

U skupu R hiperravni su tačke, u R^2 prave linije, a u R^3 ravni. Može se pokazati da je hiperravan konveksan skup.
Skupovi

$$H^+_{c,\gamma} = \{x \in R^n \mid \langle x, c \rangle > \gamma\}$$

i

$$H^-_{c,\gamma} = \{x \in R^n \mid \langle x, c \rangle < \gamma\}$$

nazivaju se otvoreni poluprostori. U daljem tekstu ove skupove ćemo još nazivati gornji poluprostor i donji poluprostor, respektivno. Nihova zatvaranja $\overline{H^+_{c,\gamma}}$ i $\overline{H^-_{c,\gamma}}$ su zatvoreni poluprostori. Ovi skupovi su, takođe, konveksni.

[1] Nula vektor na svim komponentama ima nule, to jest $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, gde je $x_i = 0$ za $i = 1, \ldots, n$.

Navedimo sada neke geometrijske interpretacije hiperravni u R^2.

Za fiksiran vektor $a = (a_1, a_2)$ i $\lambda \in R$ uslov za hiperravan je $a_1x+a_2y = \lambda$. U slučaju da je $a_2 \neq 0$ dobija se da je $a_2y = \lambda - a_1x$ pa deljenjem cele jednakosti sa a_2 dobijamo da je $y = \dfrac{1}{a_2}\lambda - \dfrac{a_1}{a_2}x$; a to znači da je hiperravan u R^2 prava linija. Takva hiperravan deli ravan na poluravni koje se označavaju sa $H^+_{a,\gamma}$ i $H^-_{a,\gamma}$. Slična situacija se dešava i u R^n gde svaka hiperravan deli prostor na dva poluprostora.

Uvedimo sada definiciju hiperravni koja razdvaja dva skupa. Ona će se koristiti u dokazu teoreme separacije koja će biti navedena u nastavku.

Definicija 3.1.4. *Neka su dati neprazni skupovi A, $B \subset R^n$. Kažemo da hiperravan $H_{c,\gamma}$ razdvaja skupove A i B ako je $\sup_{b\in B}(c, b) \leq \gamma \leq \inf_{a\in A}(c, a)$. Ako je $\sup_{b\in B}(c, b) < \inf_{a\in A}(c, a)$ kažemo da su skupovi A i B jako razdvojeni, a ako je $(c, b) < (c, a)$ za sve $a \in A$ i sve $b \in B$, onda su A i B strogo razdvojeni skupovi.*

Ako hiperravan $H_{c,\gamma}$ razdvaja skupove A i B onda ih razdvaja i hiperravan $H_{\lambda c,\lambda\gamma}$ za $\lambda \neq 0$. Specijalno, ako je $\lambda := \dfrac{1}{\|c\|}$, sledi da je uvek moguće koristiti hiperravan $H_{c,\gamma}$ za koje je $\|c\| = 1$. Posebno su značajni uslovi pod kojima je moguće razdvojiti skupove A i B, a to su, upravo, teoreme separacije.

3.2 Teoreme separacije

Teoreme separacije imaju veoma važnu ulogu u matematičkoj teoriji optimizacije. Jedna od najznačajnijih teorema je teorema o postojanju hiperravni koja razdvaja dva disjunktna konveksna skupa.

Pre nego što bude navedena teorema separacije, navedimo topološke pojmove koji će se koristiti u dokazu teoreme.

Definicija 3.2.1. *Neka je X neprazan skup. Metrički prostor je uređen par (X, d),gde je $d : X \times X \longrightarrow R$ funkcionela za koju važi:*
1. $d(x, y) \geq 0$, za sve $x, y \in X$
2. $d(x, y) = 0$ ako i samo ako je $x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$, za sve $x, y \in X$
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, za sve $x, y, z \in X$.
$d(x, y)$ predstavlja rastojanje tačaka x i y, gde su $x, y \in X$.

Definicija 3.2.2. *Za $x \in X$ i $r > 0$, $L(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$ je otvorena lopta* [2] *sa centrom u tački x i poluprečnikom r, a $Z(x,r) = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$ je zatvorena lopta sa centrom u tački x i poluprečnikom r.*

Definicija 3.2.3. *Neka je skup O otvoren skup i neka tačka $x \in O$. Skup U, takav da je $O \subseteq U$ je okolina tačke x. Otvoren skup je okolina svake svoje tačke.*

Definicija 3.2.4. *Neka je A neprazan skup takav da $A \subset R^n$ i neka je tačka $x \in R^n$. Tačka $a_0 \in A$ je projekcija tačke x na skup A, u oznaci $a_0 = P_A(x)$, ako je d(x,A)=$\parallel x - a_0 \parallel$.*

Definicija 3.2.5. *Tačka x je rubna tačka skupa A ako za svaki otvoren skup O takav da $x \in O$ važi $O \cap A \neq \emptyset$ i $O \cap \overline{A} \neq \emptyset$. Skup svih rubnih tačaka skupa A naziva se rub skupa A i označava se sa ∂A .*

Definicija 3.2.6. *Skup vih unutrašnjih tačaka skupa A naziva se unutrašnjost skupa A i označava se sa A^o.*

Definicija 3.2.7. *Tačka x je adherentna tačka skupa A ako svaka njena okolina seče skup A. Skup adherentnih tačaka naziva se adherencija ili zatvaranje skupa A i označava se sa $\overline{A}$.*

Definicija 3.2.8. *Neka su $A, B \subset R^n$, $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$.Kažemo da hiperravan $H_{c,\gamma}$ razdvaja skupove A i B ako je $sup_{b\in B}(c,b) \leq \gamma \leq inf_{a\in A}(c,a)$. Ako je $sup_{b\in B}(c,b) < inf_{a\in A}(c,a)$ kažemo da su skupovi A i B jako razdvojeni. Ako je (c,b) < (c,a) za sve $a \in A$ i sve $b \in B$, onda su A i B strogo razdvojeni skupovi.*

Teorema 3.2.1. *Neka je data tačka $x \in R$ i neka je $A \subset R^n$. Tada važi: ako je A konveksan i zatvoren skup onda za $z \in A$ važi $z = P_A(x)$ ako i samo ako je $(x - z, z - y) \geq 0$, za sve $y \in A$.*

Teorema 3.2.2. *Neka su $A, B \subset R^n$ konveksni disjunktni skupovi nepraznih unutrašnjosti.*
a) Tada za svako $y \notin A^\circ$ postoji hiperravan $H_{c,\gamma}$ koja razdvaja skupove A i $\{y\}$. Ako $y \notin \overline{A}$ onda je to razdvajanje jako.
b) Tada postoji hiperravan $H_{c,\gamma}$ koja razdvaja skupove A i B, kao i skupove $\overline{A}$ i $\overline{B}$. Ako pri tome $y \in \overline{A} \cap \overline{B}$ onda je $\gamma = (c, \gamma)$.
c)Ako su skupovi A i B zatvoreni i ako je barem jedan od njih ograničen, tada se oni mogu jako razdvojiti.

[2] U ovom radu će se koristiti izrazi "otvorena lopta" ili "otvoren skup". Svaka otvorena lopta jeste otvoren skup, ali obrnuto ne mora da važi.

Dokaz:
a) Neka je skup $A \neq \emptyset$ i neka je $A \subset R^n$ konveksan skup.
Pretpostavimo da $y \notin \overline{A}$ i neka je $z = P_{\overline{A}}(y)$.
Skup $\overline{A}$ je konveksan i zatvoren pa na osnovu teoreme 3.2.1 vidimo da je $(y - z, z - x) \geq 0$ za sve $x \in \overline{A}$. Definišemo c na sledeći način: $c := y - z$. Važi sledeće
$(c, y-x) = (c, y-z+z-x) = (c, y-z)+(c, z-x) = (y-z, y-z)+(y-z, z-x) \geq \|c\|^2 > 0$, pa iz $(c, y - x) = (c, y) - (c, x)$ i malopređašnjeg zaključka da je $(c, y - x) \geq\| c \|^2> 0$ dobijamo da je $(c, y) - (c, x) \geqslant\| c \|^2$, odakle je $(c, y)- \| c \|^2\geq (c, x)$. Na osnovu toga zaključujemo da je $\sup_{x\in\overline{A}}(c, x) < (c, y)$. Izaberimo $\gamma \in (\sup_{x\in A}(c, x), (c, y))$. Jasno, hiperravan $H_{c,\gamma}$ jako razdvaja skupove A i $\{y\}$.
Sada pretpostavimo da je $y \in \overline{A}$ i $y \in \partial A$. Posmatrajmo sada otvorenu loptu $L(y, r)$ sa centrom u y i poluprečnikom $r := d(y, x_0)$. Treba primetiti da svaka tačka na duži $[x_0, y)$ pripada unutrašnjosti skupa A. Uzmimo da je $y_0 := 2y - x_0$. Posmatrajmo duž $[x_0, y_0]$ (prečnik lopte $L(y, r)$). Tačka $y_0 \notin \overline{A}$. Ako bismo pretpostvili da $y_0 \in \overline{A}$, tačka $y \in [x_0, y_0)$ bi bila unutrašnja tačka skupa A. Na ovaj način se može konstruisati niz tačaka $\{y_n\}$, koje ne pripadaju skupu $\overline{A}$ i za koje važi da je $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Tada, na osnovu dokazanog (i činjenice da možemo uvek izabrati $\|c\| = 1$) sledi da za svako $k \in N$ postoji γ_k i c_k, $\|c_k\| = 1$, tako da hiperravan H_{c_k,γ_k} jako razdvaja skupove A i $\{y_k\}$. Niz $\{c_k\}$ pripada kompaktnom skupu u R^n, pa sledi da postoji konvergentan podniz $\{c_{k_m}\}$ tog niza. Neka je $\lim_{m\to\infty} c_{k_m} = c$. Važi $\|c\| = 1$. Pošto je $(c_{k_m}, x) > (c_{k_m}, y_{k_m})$ za sve $x \in A$ sledi da je $\lim_{m\to\infty}(c_{k_m}, x) \geq \lim_{m\to\infty}(c_{k_m}, y_{k_m})$ odnosno $(c, x) \geq (c, y)$. Ako stavimo $\gamma = (c, y)$ (ili $\gamma = \inf_{x\in A}(c, x)$) dobijamo da je hiperravan $H_{c,\gamma}$ razdvaja skupove A i $\{y\}$.

b) Posmatrajmo skup $X = A - B = \{a - b \mid a \in A, b \in B\}$. Skup X je konveksan skup (kao razlika dva konveksna skupa) i važi da je $X \neq \emptyset$. Takođe $0 \notin X$ jer su A i B disjunktni skupovi. Iz dokaza pod a) (postojanje hiperravni koja jako razdvaja dva disjunktna skupa) sledi da postoji hiperravan $H_{c,\gamma}$ koja razdvaja X i $\{0\}$. Dakle, na osnovu definicije 3.2.8 važi da je $(c, 0) \leq (c, x)$ za sve $x \in X$, odnosno $0 \leq (c, a - b)$, za sve $a \in A$ i $b \in B$. Iz $0 \leq (c, a - b)$ dobijamo da je $0 \leq (c, a) - (c, b)$ odakle je $(c, b) \leq (c, a)$ za sve $a \in A$ i $b \in B$. Dakle, $\sup_{b\in B}(c, b) \leq (c, a)$ za svako $a \in A$, pa je odatle $\sup_{b\in B}(c, b) \leq \inf_{a\in A}(c, a)$. Ako izaberemo γ tako da važi $\sup_{b\in B}(c, b) \leq \gamma \leq \inf_{a\in A}(c, a)$ onda $H_{c,\gamma}$ razdvaja skupove A i B.

Sada treba pokazati da ta hiperravan razdvaja skupove $\overline{A}$ i $\overline{B}$. Pretpostavimo da je $a \in \overline{A}$ i $b \in \overline{B}$. Tada postoje nizovi $\{a_m\} \subset A$ i $\{b_m\} \subset B$

takvi da je $\lim_{m\to\infty} a_m = a$ i $\lim_{m\to\infty} b_m = b$. S obzirom da je $\inf_{a\in A}(c,a) \geq \gamma \geq \sup_{b\in B}(c,b)$, onda je za svako m, $(c,a_m) \geq \gamma \geq (c,b_m)$, pa važi da je $\lim_{m\to\infty}(c,a_m) \geq \gamma \geq \lim_{m\to\infty}(c,b_m)$. Na osnovu toga i $\lim_{m\to\infty} a_m = a$ i $\lim_{m\to\infty} b_m = b$ zaključujemo da je $(c,a) \geq \gamma \geq (c,b)$, za sve $a \in \overline{A}$ i $b \in \overline{B}$.

c) Posmatrajmo skup $X = A - B$, $X \neq \emptyset$. To je konveksan skup koji ne sadrži nulu. Takođe, skup X je zatvoren (jer sadrži sve svoje tačke nagomilavanja). Na osnovu dokaza ove teoreme pod a) postoji hiperravan $H_{c,\gamma}$ koja jako razdvaja $\{0\}$ i X. U dokazu ove teoreme pod a) pokazano je da važi "$(c,y)-(c,x) \geqslant \| c \|^2$". Koristeći taj zaključak i oznake iz ovog dela teoreme vidimo da je $(c,0)-(c,x) \geq \| c \|^2$, $\forall x \in X$, pa je $(c,0) \geq (c,x)+\|c\|^2 > (c,x)$, $\forall x \in X$. Sada je $0 \geq (c,a-b) + \|c\|^2$ za sve $a \in A$ i $b \in B$, pa je $0 \geq (c,a) - (c,b)+ \| c \|^2$, odnosno $(c,b) \geq (c,a) + \|c\|^2$. Odavde je

$$(c,b) \geq \sup_{a\in A}(c,a) + \|c\|^2 > \sup_{a\in A}(c,a)$$

kao i

$$\inf_{b\in B}(c,b) \geq \sup_{a\in A}(c,a) + \|c\|^2 > \sup_{a\in A}(c,a).$$

Neka je $\gamma \in (\sup_{a\in A}(c,a), \inf_{b\in B}(c,b))$. Prema tome, hiperravan $H_{c,\gamma}$ jako razdvaja skupove A i B.

Definicija 3.2.9. *Hiperravan $H_{c,\gamma}$ je potporna hiperravan za skup X u tački $x_0 \in R^n$ ako je $(c,x) \geq \gamma$ za sve $x \in X$ i $(c,x_0) = \gamma$. Vektor c naziva se potporni vektor za skup X u tački x_0.*

Na osnovu prethodne definicije i teoreme može se zaključiti da u svakoj rubnoj tački konveksnog skupa postoji barem jedna potporna hiperravan. Ako se ovo posmatra sa geometrijskog aspekta, tangenta na konveksnu krivu u njenoj rubnoj tački definiše potpornu hiperravan za tu krivu.

3.3 Krive indiferencije

U neoklasičnom modelu racionalnog ponašanja preferencije su potpune i nepromenljive veličine. Preferencije su potpune ako agentu dozvoljavaju da klasifikuje sve moguće aktivnosti na tržištu po unapred odabranom kriterijumu. Zahtev da su preferencije nepromenljive veličine se odnosi na to da se negira mogućnost njihovog oblikovanja pod uticajem eksternih faktora.

Definicija 3.3.1. *Neka je $U : X \subset R^n \to R$ funkcija korisnosti. Tada se svaka nivo kriva funkcije U naziva indiferentna kriva (kriva indiferencije) relacije preferencije određene datom funkcijom korisnosti.*

Skup $I_c = \{x \in X \mid U(x) = c\}$ naziva se indiferentna kriva određena vrednošću konstante c.

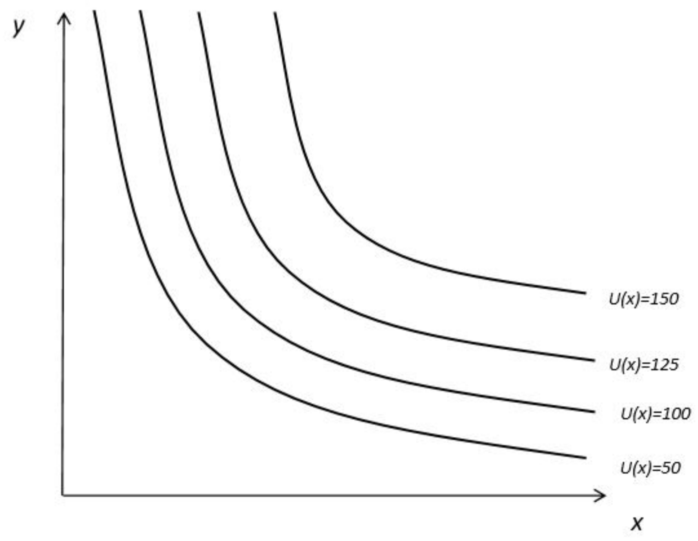
Ako pretpostavimo da agent na tržištu kupuje dva proizvoda x i y, kriva indiferentncije predstavlja geometrijsko mesto tačaka raspodele proizvoda x i y koje obezbeđuju isti nivo korisnosti (utiliteta), odnosno zadovoljenja potreba. Ova pretpostavka nam omogućava prikazivanje krive indiferencije u ravni. Koristeći ovakvu notaciju i ovu pretpostavku sasvim je opravdano upotrebljavati pojmove "gore", "dole", "levo", "desno" pri objašnjavanju položaja krive indiferentnosti u ravni.

Navešćemo i neke osobine krivih indiferentnosti:

- konveksne su u udnosu na koordinatni početak,
- kriva koja je "više udaljena" od koordinatnog početka predstavlja viši nivo korisnosti (utiliteta),
- opadaju sa leva na desno,
- krive indiferentnosti se ne seku.

Prva osobina, konveksnost u odnosu na koordinatni početak, je posledica ekonomskog zakona opadajuće marginalne korisnosti koji je u vezi sa graničnom stopom supstitucije. Interpretacija granične stope supstitucije je odnos povećanja potrošnje proizvoda x usled smanjenja potrošnje proizvoda y da bi se održao isti nivo korisnosti, odnosno da bi se nadoknadili efekti smanjenja potrošnje proizvoda y.

U nastavku je dato nekoliko primera krivih indiferentnosti za različite nivoe korisnosti i to c=50, c=100, c=125, c=150, respektivno čitajući od dole na gore.



Slika 3.1: Krive indiferencije

4

Grafički prikaz najprostije ekonomije sa dva učesnika u razmeni i dva proizvoda

Najprostija ekonomija, ili čista ekonomija razmene (negde se još spominje samo ekonomija razmene), je ekonomija u kojoj se ne pojavljuje proizvodnja. Agenti u ovakvoj ekonomiji su potrošači koji poseduju inicijalno bogatstvo, tj. imetak, koji se sastoji od različitih roba. Ekonomska aktivnost agenata se sastoji od trgovanja i potrošnje robe. U ovom delu će biti razmotren najjednostavnij slučaj ovakve ekonomije, pri čemu će se na tržištu pojavljivati ukupno dve robe i dva agenta (potrošača). Ovakav grafički prikaz naziva se Edgeworth box, po poznatom ekonomisti sa Kembridža iz 19.veka [1]. Međutim, spekuliše se da je ovaj grafički prikaz prvi predstavio Pareto 1906.godine u svojoj knjizi "Manual of Political Economy". U ovom radu će se za izraz "Edgeworth box" koristiti izraz dvodimenzionalni dijagram.

Pretpostavka od koje se polazi je da agenti na tržistu cene prihvataju kao unapred zadate. Iako možda na prvi pogled ne izgleda razumno posmatrati ekonomiju u kojoj učestvuju samo dva potrošača, cilj u ovom delu rada jeste da se najvažnije karakteristike modela opšte ravnoteže predstave na najjednostavniji mogući način. [2] Svi grafički prikazi koji se odnose na ovo poglavlje će biti prikazani u šestom poglavlju ovog rada.

[1] Francis Ysidro Edgeworth (8. februar 1845. - 13. februar 1926.)

[2] Alternativo, svakog od ova dva potrošača možemo posmatrati kao predstavnika određene grupe potrošača gde svi oni imaju iste karakteristike.

4.1 Agenti, roba, relacije preferencije i budžetski skup u dvodimenzionalnom dijagramu

U ovom delu rada će biti reči o samom tržištu, učesnicima i robi koja se pojavljuje na tržištu, kao i o relacijama preferencije samih agenata na tržištu. Sve to će biti objašnjeno i grafički predstavljeno.

Za početak, označimo potrošaše sa $i = 1, 2$ i označimo dve robe sa $l = 1, 2$. Vektor potrošnje potrošača i je $x_i = (x_{1i}, x_{2i})$, tj. potrošnja robe l potrošača i je x_{li}. Pretpostavlja se da potrošački skup i - tog potrošača leži u R^2_+ i da je $\succeq_i$ relacija prefererencije za i- tog potrošača na ovom potrošačkom skupu. Svaki potrošač u početnom trenutku poseduje imetak (u vidu robe) čije će količine biti označene sa $\omega_{li} \geq 0$, pri čemu je l oznaka za robu. Prema tome, vektor imetka i -tog potrošača se može predstaviti sa $\omega = (\omega_{1i}, \omega_{2i})$. Ukupno stanje robe l na tržištu je označeno sa $\overline{\omega}_l = \omega_{l1} + \omega_{l2}$; pretpostavlja se da je količina ovih roba strogo pozitivna.

Raspodela $x \in R^4_+$ u ovoj ekonomiji dodeljuje nenegativni potrošćki vektor svakom potrošaču: $x = (x_1, x_2) = ((x_{11}, x_{21}), (x_{12}, x_{22}))$. Kažemo da je raspodela izvodljiva za ekonomiju ako je

$$x_{l1} + x_{l2} \leq \overline{\omega}_l, \text{ za } l = 1, 2. \ (1)$$

Izvodljiva raspodela gde je očuvana jednakost (1) bismo mogli nazvati nerasipnička raspodela. Nerasipnička izvodljiva raspodela je prikazana u poglavlju 6, na slici 1.

U dvodimenzionalnom dijagramu količine robe prvog potrošača se mere na uobičajen način, sa početkom u donjem levom uglu. Količine robe drugog potrošača se mere koristeći gornji desni ugao kao početak. Za oba potrošača vertikalna osa meri količine robe 2, dok horizontalna osa meri količine robe 1. Dužina pravougaonika je $\overline{\omega}_1$, što predstavlja ukupnu količinu robe 1 u posmatranoj ekonomiji; visina pravougaonika je $\overline{\omega}_2$, što predstavlja ukupnu količinu robe 2 u posmatranoj ekonomiji. Bilo koja tačka u pravougaoniku predstavlja (nerasipničku) podelu ukupne količine robe između potrošača 1 i 2. Na primer, na slici 1 je prikazan vektor $\omega = ((\omega_{11}, \omega_{21}), (\omega_{12}, \omega_{22}))$ ova dva potrošača. Takođe je prikazana još jedna moguća nerasipnička raspodela $x = ((x_{11}, x_{21}), (x_{12}, x_{22}))$. Zbog nerasipničke raspodele važi sledeće $(x_{12}, x_{22}) = (\overline{\omega}_1 - x_{11}, \overline{\omega}_2 - x_{21})$.

Jedna od karakteristika koja se pojavljuje u teoriji opšte ravoteže jeste da se bogatstvo potrošača ne navodi egzogeno(pod uticajem nekih spoljašnjih faktora). Obično se navodi tako da za određene cene $p = (p_1, p_2)$ bogatstvo i - tog potrošača bude jednako tržišnoj vrednosti količine roba koje poseduje po datim cenama $p \cdot \omega_i = p_1\omega_{1i} + p_2\omega_{2i}$. Prema tome, bogatstvo nekog agenta na tržištu je određeno cenama koje važe na tržištu. Pa otuda, ukoliko je poznat vektor imetka određenog potrošača, tj. njegovih elemenata ω_i onda se budžetski skup može predstaviti na sledeći način

$$B_i(p) = \{x_i \in R^2_+ : p \cdot x_i \leq p \cdot \omega_i\}.$$

Budžetski skup takođe može biti predstavljen pomoću dvodimenzionalnog dijagrama. To je predstavljeno na u poglavlju 6 na slici 2. Da bismo to uradili, potrebno je da nacrtamo liniju u pravougaoniku kao što je prikazano na slici. Ta linija se naziva budžetska linija. Povuče se prava linija koja prolazi kroz tačku ω sa nagibom -$\frac{p_1}{p_2}$. Budžetski skup potrošača 1 sastoji se od nenegativnih vektora ispod i levo od budžetske linije. Budžetski skup potrošača 2 sastoji se od nenegativnih vektora iznad i desno od budžetske linije. Važno je primetiti da se jedina raspodela na budžeskoj liniji koja je istovremeno dostupna za oba potrošača ostvarena pri cenama (p_1, p_2).

Relacije preferencije $\succeq_i$ za svakog od pomenutih potrošača se takođe mogu prikazati u dvodimenzionalnom dijagramu. To je prikazano u poglavlju 6 na slici 3. Relacije preferencije su na graficima predstavljene krivama indiferencije. Pretpostavlja se da su relacije preferencije konveksne, neprekidne i strogo monotone.

Potrošački vektor agenta 1 je prikazan u poglavlju 6 na slici 4, gde je prikazano da se on može odrediti za bilo koji vektor cena p. Za dati vektor cena p, tražnja potrošača za određenim robama će dostići najviši nivo zadovoljstva (preferencije) u $B_1(p)$, što može biti predstavljeno funkcijom tražnje $x_1(p, p \cdot \omega_1)$ gde tražnja za nekom robom zavisi od cene robe i bogatstva posmatranog potrošača.

U poglavlju 6 na slici 5 se može videti kako se sa promenom vektora cena p, budžetske linije se obrću oko tačke ω i tražnja za proizvodima formira krivu liniju koja je označena sa OC1. Ova kriva linija se naziva kriva ponude za potrošača 1. Primetimo da ova kriva prolazi kroz tačke imetka. To se dešava jer je za svako p vektor imetka $\omega_1 = (\omega_{11}, \omega_{21})$ koje je dostupno potrošaču 1, potrošač mora pronaći svaku tačku na svojoj krivi ponude dobru bar koliko je dobra njegova tačka imetka ω. Potrošačke krive ponude leže između gornjih kontura skupa ω_1. Ako su krive indiferencije glatke krive [3] onda kriva ponude mora biti tangenta na krivu indiferencije potrošača u tački imetka.

U poglavlju 6 na slici 6 je prikazana tražnja dva potrošača pri čemu je vektor cena p unapred poznat potrošacima. Treba primetiti da tražnja ova dva potrošača nije kompatibilna. Tražnja za robom 2 prevazilazi ukupnu ponudu te robe $\overline{\omega}_2$ koja se nalazi u posmatranoj ekonomiji. Ukupna tražnja za robom 1 je manja od ponuđene količine robe $\overline{\omega}_1$ na posmatranom tržištu. Potrošač 1 je u potrazi za robom 2, u smislu da želi da konzumira više te vrste robe nego što je on sam poseduje. Iako bi u tom slučaju bilo za očekivati da potrošač 2 ponudi tu vrstu robe potrošaču 1 (potrošač 2 želi da konzumira manju količinu te vrste robe od one količine koju poseduje), on ipak ne mora da ponudi dovoljnu količinu robe potrošaču 1 kako bi ovaj zadovoljio svoje potrebe. Dakle, za robom 2 postoji povećana tražnja dok robe 1 ima više nego što se na tržistu traži (višak ponude).

Kada je uspostavljena tržišna ravnoteža pri datim cenama, događa se čišćenje tržista. To znači da su potrošači u moguńosti da izvrše željenu kupovinu ili prodaju robe po trenutnim tržišnim cenama. Prema tome, ukoliko neki potrošač želi da bude neto potraživač za neku robu, onda neki drugi učesnik na tržistu mora biti neto ponuđač te robe u istom iznosu. To znači da je ponuda jednaka tražnji i to je situacija kada je ravnoteža ostvarena.

4.2 Valrasian ravnoteža u dvodimenzionalnm dijagramu

U ovom delu rada je navedena definicija Valrasian ravnoteže i grafički prikaz ove ravnoteže u dvodimenzionalnom dijagramu.

Definicija 4.2.1. *Valrasian (ili konkurentska ravnoteža) za ekonomiju sa dve robe i dva agenta na tržištu je vektor p^* i raspodela $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ u dvodimenzionalnom dijagramu tako da za i=1,2, $x_i^* \succeq_i x_i'$ za sve $x_i' \in B_i(p^*)$*

Valrasian ravnoteža je prikazana u poglavlju 6 na slici 7. Na slici je predstavljen vektor cena p^* i raspodela koja se postiže u ravnoteži $x^* = (x_1^*, x_2^*)$. Tražnja svakog potrošača i pri vektoru cena p^* je x_i^* i neto tražnja jednog potrošača se tačno poklapa sa neto ponudom nekog drugog agenta na tržištu.

[3] Za krivu l kažemo da je glatka ako se u svakoj tački te krive može postaviti tangenta na tu krivu, na jedinstven način.

U poglavlju 6 na slici 8 su prikazane krive ponude i krive indiferencije kroz ω. Treba primetiti da se pri ravnoteži krive ponude dva potrošača presecaju. Svako presecanje krivih ponuda pri bilo kojoj raspodeli različitoj od tačke ω odgovara nekoj ravnoteži iz sledećeg razloga: ako je $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ neka takva tačka preseka onda je x_i^* optimalan potrošački skup za svakog potrošača i i budžetsku liniju koja prolazi kroz tačke ω i x^*.

U poglavlju 6 na slici 9 je prikazana Valrasian ravnoteža gde je ravnoteža ostvarena na granici Edgeworth box-a. Primetimo da i ovde važi da su pri vektoru cena p^* tražnje i ponude potrošača kompatibilne.

Treba još primetiti da je tražnja svakog potrošača homogena i stepena nula pri vektoru cena $p = (p_1, p_2)$. To znači da ako se cene dupliraju onda se i bogatstvo potrošača takođe duplira pri čemu budžetski skup ostaje nepromenjen. Prema tome, koristeći definiciju 4.2.1. možemo primetiti da ako je $p^* = (p_1^*, p_2^*)$ vektor cena pri Valrasian ravnoteži onda važi $\alpha p^* = (\alpha p_1^*, \alpha p_2^*)$ za neko $\alpha > 0$. Ukratko, samo su relativne cene p_1^*/p_2^* determinističke u ravnoteži.

4.3 Kob-Daglasova funkcija korisnosti u dvodimenzionalnom dijagramu

Jedna od najčešće korišćenih funkcija korisnosti je Kob-Daglasova funkcija korisnosti. Ona se koristi i da bi se opisala funkcija tražnje. U nastavku će biti navedena funkcija korisnosti, kao i njeno tumačenje u dvodimenzionalnom dijagramu.

Pretpostavimo da svakom potrošaču i, $i = 1, 2$, odgovara Kob - Daglasova funkcija korisnosti $u_i(x_{1i}, x_{2i}) = x_{1i}^{\alpha}, x_{21}^{1-\alpha}$. Imetak je dat vektorima $\omega_1 = (1, 2)$ i $\omega_2 = (1, 2)$. Pri cenama $p = (p_1, p_2)$ bogatstvo potrošača 1 je $(p_1 + 2p_2)$ pa otuda tražnja leži na krivoj ponude.

$$OC_1(p) = (\frac{\alpha(p_1 + 2p_2)}{p_1}, \frac{(1-\alpha)(p_1 + 2p_2)}{p_2}).$$

Primetimo da tražnja za prvom i drugom robom opada i povećava se, respektivno, sa povećanjem p_1. To je predstavljeno na krivoj OC_1 u poglavlju 6 na slici 8.

$$OC_2(p) = (\frac{\alpha(2p_1 + p_2)}{p_1}, \frac{(1-\alpha)(2p_1 + p_2)}{p_2}).$$

Da bismo odredili cene pri Valrasian ravnoteži potrebno je da po ovakvim cenama suma svih količina robe 1 bude jednaka 3 ($3 = \omega_{11} + \omega_{12}$). Prema tome,

$$\frac{\alpha(p_1^* + 2p_2^*)}{p_1^*} + \frac{\alpha(2p_1^* + p_2^*)}{p_1^*} = 3$$

Rešavajući ovu jednačinu dobijamo da je

$$\frac{p_1^*}{p_2^*} = \frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

Primetimo da je pri bilo kojim cenama (p_1^*, p_2^*) zadovoljena prethodna jednakost. Pod ovakvim uslovima dešava se takođe i čišćenje tržišta za robu 2. Da bismo odredili ravnotežne cene potrebno je da odredimo cene pri kojima se vrši čišćenje jednog od tržišta, dok će se na drugom tržištu vršiti čišćenje baš po ovim cenama. Ovaj zaključak se može primetiti i grafički u dvodimenzionalnom dijagramu: skupovi tražnje za oba potrošača leže na istoj budžetskoj liniji; ako su količine tražnje i ponude za robom 1 kompatibilne, onda će to važiti i za robu 2.

4.4 Problem jedinstvenosti i egzistencije Valrasian ravnoteže u dvodimenzionalnom dijagramu

Razmotrimo sada problem jedinstvenosti Valrasian ravnoteže.

Pod uslovom da su relacije preferencije strogo konveksne, raspodela potrošnje u uslovima ravnoteže i relativne cene su jedinstveni. U poglavlju 6 na slici 7 je prikazana jedinstvenost ravnoteže. Međutim ovo ne mora uvek da važi. U poglavlju 6 na slici 10 je prikazano da se ova osobina ipak ne može generalizovati, odnosno prikazano je da se može ostvariti višestruka Valrasian ravnoteža. Na ovoj slici, pod pretpostavkom da je dat imetak ω krive ponude od oba agenta se presecaju tri puta; pa prema tome postoje tri Valrasian ravnoteže. Kako bi se stvorila jasna i celovita slika, prikazaćemo u sledećem primeru analitićki pristup onog što je grafički predstavljeno u poglavlju 6 na slici 10.

Pretpostavimo da dva agenta imaju funkcije korisnosti

$$u_1(x_{11}, x_{21}) = x_{11} - \frac{1}{8}x_{21}^{-8}$$

$$u_2(x_{12}, x_{22}) = -\frac{1}{8}x_{12}^{-8} + x_{22}.$$

Primetimo da su funkcije korisnosti kvazilinearne [4] (ovo svojstvo je uzeto radi jednostavnosti i lakšeg izračunavanja tražnje) pri čemu se vodilo računa o različitosti numeracije indeksa. Imetak je dat sa $\omega_1 = (2, r)$ i $\omega_2 = (r, 2)$ gde je r izabrano tako da obezbeđuje da ravnotežne cene budu zaokrugljeni (približni) brojevi. Tačnije, $r = 2^{8/9} - 2^{1/9} > 0$.

$$OC_1(p_1, p_2) = \left(2 + r\left(\frac{p_2}{p_1}\right) - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{8/9}, \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{-1/9}\right) > 0$$

i

$$OC_2(p_1, p_2) = \left(\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{-1/9}, 2 + r\left(\frac{p_1}{p_2}\right) - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{8/9}\right) > 0.$$

Primetimo da je slika 10 u suprotnosti sa primerom 2; tražnja agenta 1 za robom 1 može biti u porastu u p_1 (slično važi i za agenta 2).

Da bismo izračunali ravnotežne cene dovoljno je da rešimo jednačine u kojima je izjednačena ukupna tražnja za robom 2 sa njenom ukupnom ponudom, tj.

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{-1/9} + 2 + r\left(\frac{p_1}{p_2}\right) - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{8/9} = 2 + r.$$

Kada uvrstimo gore navedeno r u jednačinu i rešimo po $\frac{p_1}{p_2}$, dobijamo tri rešenja: 2, 1 i $\frac{1}{2}$.

Razmotrimo sada problem egzistencije Valrasian ravnoteže.

Može se desiti da čista ekonomija razmene nema nijednu Valrasian ravnotežu. U poglavlju 6 na slici 11 je prikazana situacja gde imetak leži na rubu dvodimenzionalnog dijagrama (u gornjem levom ćošku). Agent 2 poseduje svu količinu robe 1 i želi jedino robu 1 (samo ga ta roba zanima). Agent 1 poseduje svu količinu robe 2 i ni malo robe 1. On je zainteresovan za obe robe. Nagib krive indiferencije je beskonačan u slučaju kada Agent 1 ne poseduje ni malo robe 1. Prema tome, on ima beskonačnu marginalnu korisnost

[4] Kvazilinearna funkcija korisnosti: $u(x_1, x_2) = x_1 + f(x_2)$.

[5] za svoju prvu jedinicu robe 1.

U ovom primeru, za bilo koje cene p agent 2 će insistirati na konzumiranju njegovog imetka - tj.robe 1. Šta više, ne postoje cene p pri kojima agent 1 neće insistirati na kupovini bar male količine robe 1. Otuda za bilo koji vektor cena p, za robom 1 će uvek postojati višak tražnje i ne može se uspostaviti Valrasian ravnoteža. Prema tome, sledi zaključak da imetak uvek mora biti unutrašnja tačka u dvodimenzionalnom dijagramu, kako bi se osigurala egzistencija Valrasian ravnoteže.

4.5 Karakteristike Valrasian ravnoteže u uslovima blagostanja

U ovom delu fokusiraćemo se na uslove pod kojima se postiže Valrasian ravnoteža, zatim na pojam Pareto optimalnosti, Prvu i Drugu fundamentalnu teoremu ekonomije blagostanja. Sve to će biti diskutovano pomoću dvodimenzionalnog dijagrama.

Jedno od glavnih pitanja u ekonomskoj teoriji bavi se karakteristikama ravnoteže u uslovima blagostanja. Rezultat u ekonomiji koji je u vezi sa ravnotežom na tržištu i koji se često razmatra je Pareto optimalnost, odnosno Pareto efikasnost. Ona predstavlja takvu situaciju na tržistu da boljitak (blagostanje) jednog agenta narušava blagostanje drugog agenta. Sledeća definicija odražava ovu ideju u uslovima ekonomije čiste razmene sa dva agenta na tržištu.

Definicija 4.5.1. *raspodela x u dvodimenzionalnom dijagramu je Pareto optimalna (ili Pareto efikasna) ako u dijagramu ne postoji raspodela x' takva da je $x'_i \succeq_i x_i$ za i=1,2 i $x'_i \succ_i x_i$ za neko i.*

U poglavlju 6 na slici 12 je prikazana raspodela x koja nije Pareto optimalna. Bilo koja raspodela u unutrašnjosti išrafiranog dela na slici je izvodljiva raspodela i ona predstavlja striktno bolji izbor za oba agenta u odnosu na x. Išrafirani deo predstavlja presek skupova $\{x'_1 \in R^2_+ : x'_1 \succeq_1 x_1\}$ i $\{x'_2 \in R^2_+ : x'_2 \succeq_2 x_2\}$ unutar dvodimenzionalnog dijagrama.

S druge strane, u poglavlju 6 na slici 13 je prikazana raspodela x koja je Pareto optimalna. U preseku skupova $\{x'_1 \in R^2_+ : x'_1 \succeq_1 x_1\}$ i $\{x'_2 \in R^2_+ :$

[5] Marginalna korisnost je korisnost koju za potrošača predstavlja pojedina jedinica nekog dobra; to je promena ukupne korisnosti kao posledica jediničnog povećanja potrošene količine nekog dobra.

$x'_2 \succeq_2 x_2\}$ nalazi se samo jedna tačka i to je tačka x. Primetimo da je Pareto optimalna raspodela x unutrašnja tačka dvodimenzionalnog dijagrama, pa onda krive indiferencije agenata u tački x moraju imati tangentu (pod pretpostavkom da su u pitanju glatke krive).

U poglavlju 6 na slici 14 je prikazana Pareto optimalna raspodela x koja se ne nalazi u unutrašnjosti, več na rubu dijagrama. U takvoj tački tangente ne moraju da postoje.

Skup Pareto optimalnih raspodela se označava kao Paretov skup. Primer Paretovog skupa je predstavljen u poglavlju 6 na slici 15. Na slici je takođe prikazana *sporazumna kriva* koja predstavlja deo Paretovog skupa gde se oba agenta ponašaju bar onako kao i kada bi posedovali inicijalno bogatstvo. To je deo Paretovog skupa koji oba agenta upućuje na povećanje početnog imetka ω. Razlog za uvođenje ovakvog pojma je taj što bismo možda očekivali neko cenkanje između agenata koje bi rezultiralo u postizanju sporazuma o trgovanju do neke tačke na sporazumnoj krivoj. Ovo i jesu jedine tačke u kojima oba agenta mogu povećati svoje inicijalno bogatstvo (imetak) i za koje ne postoji alternativa u trgovanju takva da će se postići boljitak za oba agenta.

Na osnovu svega analiziranog do sada možemo izvesti jednostavnu ali značajnu činjenicu: svaka Valrasian ravnoteža je Pareto optimalna (tj. nalazi su u Paretovom skupu). Razlog je sledeći. Pri Valrasian ravnoteži budžetska linija deli dva "dovoljno dobra" skupa koja su u vezi sa ravnotežnom alokacijom, kao što je to prikazano na slici 7 i slici 9. Jedina zajednička tačka između ova dva skupa je samo x^*. Paretov skup je skup svih Pareto optimalnih raspodela, pa možemo reći da svaka raspodela u uslovima Valrasian ravnoteže leži u Paretovom skupu. Ovaj rezultat je poznat kao Prva fundamentalna teorema ekonomije blagostanja.

Prva fundamentalna teorma ekonomije blagostanja u uslovima konkurentskog tržišta predstavlja formalan način interpretacije "nevidljive ruke" o kojoj je govorio Adam Smit. U uslovima savršenog konkurentskog tržišta. svaka ravnoteža je Pareto optimalna; jedino opravdanje za bilo kakvu intervenciju na tržištu je ispunjenje ciljeva raspodele između samih agenata.

Druga fundamentalna teorema blagostanja daje nam delimično drugačije rezultate. Grubo rečeno, teorema tvrdi da pod pretpostavkom konveksnosti (koja se nije zahtevala u Prvoj fundamentalnoj teoremi), agent (osoba koja planira neko učešće na tržištu) može postići željenu Pareto optimalnu alokaciju odgovarajućom raspodelom ukupnog bogatstva dozvoljavajući dalje da tržište samo odradi svoj posao.

Sledeća definicija je formalna tvrdnja koncepta ravnoteže gde je prisutna raspodela ukupnog bogatstva na tržištu.

Definicija 4.5.2. *raspodela x^* u dvodimenzionalnom dijagramu je prihvatljiva kao ravnoteža sa transferima ako postoji vektor cena p^* i transferi bogatstva T_1 i T_2 takvi da zadovoljavaju $T_1 + T_2 = 0$ i takvi da za svakog potrošača i važi $x_i^* \succeq_i x_i'$ za sve $x_i' \in R_+^2$ tako da je $p^* \cdot x_i' \leq p^* \cdot \omega_i + T_i$*

Primetimo da je suma transfera jednaka nuli. Osoba koja planira neko učešće na tržištu vodi računa da budžet bude izbalansiran i to tako da ga jedino uzima u obzir raspodelu bogatstva između agenata.

Koristeći prethodnu definiciju možemo navesti formalniju verziju tvrđenja Druge teoreme blagostanja: ako su preferencije od dva agenata u dvodimenzionalnom dijagramu neprekidne, konveksne i strogo monotone, onda je Pareto optimalna raspodela prihvatljiva kao ravnoteža sa transferima. Ovaj zaključak je prikazan u poglavlju 6 na slici 16 gde je imetak od oba agenta u tački ω. Pretpostavimo da je iz distributivnih razloga željena alokacia x^* Pareto optimalna. Ako se dogodi transfer bogatstva između dva agenta tako da se smakne budžetska linija do mesta koje je označeno na slici, vektor cena p^* vrši čišćenje tržista za ove dve robe, a raspodela x^* se dobija kao rezultat.

Primetmo da je ovaj transfer bogatstva mogao biti postignut direktnim transferom početnog imetka (bogatstva). Kao što je prikazano u poglavlju 6 na slici 17 transfer robe 1 pomera vektor imetka do tačke ω' gde će imati vektor cena p^* i alokaciju x^*, kao i Valrasian ravnotežu. Transfer robe 2 pomera vektor imetka do tačke ω'', gde će imati vektor cena p^* i alokaciju x^*. U suštini, ako postoji mogućnost da se lako izvrši transfer svih roba, onda bismo isto tako mogli pomeriti vektor imetka (bogatstva) direktno do alokcije x^*. Sa ove nove tačke imetka, Valrasian ravnoteža ne bi zahtevala nikakvu dalju trgovinu. [6]

[6] U praksi se može desiti da je teško ostvariti transfer bogatstva, pa je mogućnost da se iskoriste transferi bogtstva (ili bar transfer određene količine robe) može biti značajna. Važno je primetiti jednu bitnu karakteristiku transfera bogatstva direktno do željene Pareto optimalne alokacije: tada možemo biti sigurni da je x^* jedinstvena raspodela Valrasian ravnoteže nakon transfera (pri čemu treba voditi računa da se zahteva striktna konveksnost preferencija).

U poglavlju 6 na slici 18 je prikazana situacija kada preferencije agenata nisu konveksne, pa se iz tog razloga Druga teorema blagostanja možda neće održati. Na slici je $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ Pareto optimalna raspodela koja nije prihvatljiva kao ravnoteža sa transferima. Na budžetskoj liniji takvoj da agent 2 želi x_2^*, agent 1 će radije izabrati tačku različitu od x_1^* (npr. tačku x_1'). Konveksnost je, kao što se ispostavilo, važna pretpostavka u Drugoj teoremi blagostanja.

5

Prva i Druga fundamentalna teorema blagostanja

Pre nego što bude dokazana Prva i Druga fundamentalna teorema ekonomskog blagostanja u kojoj se pokazuje Pareto efikasnost, potrebno je objasniti model koji se posmatra, Valrasian ravnotežu i definisati Pareto efikasnost i ravnotežu sa transferima.

5.1 Polazni model i Pareto efikasnost

Ovaj model je sličan modelu Erou - Debro koji je detaljno objašnjen u drugom poglavlju ovog rada.

Posmatrajmo ekonomiju u kojoj u kojoj učestvuju I potrošača, $I > 0$, J firmi, $J > 0$ i na tržistu se nalazi L roba. Diskusija o svakom od navedenih pojmova je detaljno data u modelu Erou - Debro s početka rada. Svaki potrošač $i = 1, 2, \ldots, I$ je okarakterisan potrošačkim skupom $X_i \subset R^L$ i svojom relacijom preferencije $\succeq_i$ definisanoj na X_i. Pretpostavljamo da su ove relacije preferencije kompletne i tranzitivne.

Svaka firma $j = 1, 2, \ldots, J$ je okarakterisana tehnologijom,odnosno proizvodnim skupom, $Y_j \subset R^L$. Pretpostavlja se da je svaki skup Y_j neprazan i zatvoren.

Inicijalni izvori robe u ekonomiji to jest, ekonomski imetak zadat je vektorom $\overline{\omega} = (\overline{\omega}_1, \ldots, \overline{\omega}_L) \in R^L$. Prema tome, osnovne podatke u vezi sa preferencijom, tehnologijom i imetkom koji su definisani kao što je gore navedeno možemo predstaviti ekonomijom

$$\left(\{(X_i, \succeq_i)\})_{i=1}^{I}, \{Y_j\}_{j=1}^{J}, \overline{\omega}\right).$$

Definicija 5.1.1. *Raspodela* $(x, y) = (x_1, \ldots, x_I, y_1, \ldots, y_J)$ *je specifikacija vektora potrošnje* $x_i \in X_i$ *za svakog potrošača* $i = 1, 2, \ldots, I$ *i vektor proizvodnje* $y_j \in Y_j$ *za svaku firmu* $j = 1, 2, \ldots, J$. *Raspodela (x,y) je izvodljiva ako je* $\sum_i x_{li} = \overline{\omega}_l + \sum_j y_{lj}$ *za svaku robu* l, *odnosno, ako je je* $\sum_i x_i = \overline{\omega} + \sum_j y_j$.

Skup izvodljivih raspodela označavamo sa

$$A = \left\{(x, y) \in X_1 \times \ldots X_I \times Y_1 \ldots \times Y_J : \sum_i x_i = \overline{\omega} + \sum_j y_j\right\} \subset R^{L(I+J)}$$

Pojam društveno poželjnog rezultata kojim kojim ćemo se dalje baviti je pojam Pareto optimalne alokacije.

Definicija 5.1.2. *Izvodljiva raspodela (x,y) je Pareto optimalna (ili Pareto efikasna) ako ne postoji nijedna druga raspodela* $(x', y') \in A$ *takva da je* $x'_i \succeq_i x_i$ *za svako* i, *i da je* $x'_i \succ_i x_i$ *za neko* i.

Raspodela je Pareto optimalna ako ne postoji gubici: nemoguće je da jednom potrošaču bude izrazito bolje bez da je to na štetu nekog drugog potrošača. Treba samo primetiti da se koncept Pareto optimalnosti ne bavi pitanjima raspodele, u smislu kom potrošaču će biti bolje a kom lošije.

Uvedimo još neke pretpostavke za ekonomiju koju posmatramo.

Posmatrajamo dalje konkurentsku ekonomiju u uslovima privatnog vlasništva. U takvoj ekonomiji, trguje se robom po cenama koje su svima poznate pri čemu potrošači i firme ne mogu uticati na promenu cena (cene su date). Potrošači na tržistu trguju kako bi ispunili svoje želje(preferencije) i maksimizirali blagostanje, dok firme proizvode robe i na tržistu trguju kako bi maksimizirali profit. Bogatstvo pojedinca se sastoji od robe koju pojedinac poseduje i vlasničkog udela u firmi. U ovakvoj ekonomiji se pretpostavlja da je firma u vlasništvu potrošača, odnosno da potrošači mogu imati nenegativan udeo u vlasništvu firme.

Formalno zapisano, potrošac i, $i = 1, \ldots, I$, poseduje inicijalni vektor robe $\omega_i \in R^L$ i udeo u vlasništvu (pa prema tome i udeo u raspodeli profita) firme j, $\Theta_{ij} \in [0, 1]$, pri čemu je

$$\overline{\omega} = \sum_i \omega_i \text{ i}$$

$$\sum_i \Theta_{ij} = 1 \text{ za svaku firmu } j.$$

Prema prethodnoj notaciji ekonomiju u privatnom vlasništvu možemo predstaviti na sledeći način

$$\left(\{(X_i, \succeq_i)\})_{i=1}^I, \{Y_j\}_{j=1}^J, \{(\omega_i, \Theta_{i1}, \ldots, \Theta_{iJ})\}_{i=1}^I \right).$$

Pojam ravnoteže u čijem određivanju učestvuju cene, u uslovima konkurentske ekonomije u privatnom vlasništvu se naziva Valrasian ravnoteža.

Definicija 5.1.3. *Ekonomija u privatnom vlasništvu, označimo je sa*

$$\left(\{(X_i, \succeq_i)\})_{i=1}^I, \{Y_j\}_{j=1}^J, \{(\omega_i, \Theta_{i1}, \ldots, \Theta_{iJ})\}_{i=1}^I \right),$$

raspodela (x^*, y^*) i vektor cena $p = (p_1, \ldots, p_L)$ obrazuju Valrasiam (konkurentsku) ravnotežu ako:
(i) za svako j, y_j^* maksimizira profit u Y_j, odnosno

$$p \cdot y_j \leq p \cdot y_j^* \textit{ za svako } y_j \in Y_j,$$

(ii) za svako i, x_i^* je maksimalno [1] za $\succeq_i$ u budžetskom skupu

$$\left\{ x_i \in X_i : p \cdot x_i \leq p \cdot \omega_i + \sum_i \Theta_{ij} p \cdot y_j^* \right\}.$$

(iii) $\sum_i x_i^* = \overline{\omega} + \sum_j y_j^*$.

Uslov (i) govori o tome da u postignutoj Valrasian ravnoteži firme maksimiziraju svoj profit po datim cenama p. Uslov (ii) govori o tome da potrošači prvo maksimiziraju svoje blagostanje (želje i potrebe) po ravnotežnim cenama, a zatim ne vodeći računa o cenama već samo o ličnim željama i preferencijama maksimiziraju svoje blagostanje koristeći bogatstvo koje vodi poreklo iz robe koju poseduju i vlasničkog udela u firmama. Uslov (iii) govori o čišćenju tržišta u ravnoteži, odnosno da svi potrošači i firme moraju biti u mogućnosti da dostignu željenu trgovinu po trenutnim cenama.

[1] Termin "x_i je maksimalno za $\succeq_i$ u skupu B" znači da je x_i ekstremno poželjan izbor potrošača i u skupu B, odnosno $x_i \in B$ i $x_i \succeq_i x_i'$ za svako $x_i' \in B$

Glavna ideja o kojoj će biti više reči u ovom poglavllju je povezanost Pareto optmalnosti sa ponašanjem cena koje učestvuju u ravnoteži. Sledeća definicija ravnoteže koja će biti navedena je veoma korisna jer je opštijeg karaktera u odnosu na prethodnu definiciju ravnoteže u ekonomiji u privatnom vlasništvu.

Definicija 5.1.4. *Ekonomija označena sa* $\Big(\{(X_i, \succeq_i)\}\}_{i=1}^{I}, \{Y_j\}_{j=1}^{J}, \overline{\omega}\Big)$, *raspodela* (x^*, y^*) *i vektor cena* $p = (p_1, \ldots, p_L)$ *obrazuju ravnotežnu cenu sa transferima ako postoji raspodela bogatstava* $(w_1, \ldots, w_I)$ *sa uslovom*

$$\sum_i w_i = p \cdot \overline{\omega} + \sum_j p \cdot y_j^*$$

tako da:

(i) za svako j, y_j^* *maksimizira profit u* Y_j, *odnosno*

$$p \cdot y_j \leq p \cdot y_j^* \text{ za svako } y_j \in Y_j,$$

(ii) za svako i, x_i^* *je maksimalno za* $\succeq_i$ *u budžetskom skupu*

$$\{x_i \in X_i : p \cdot x_i \leq W_i{}^2\}.$$

(iii) $\sum_i x_i^* = \overline{\omega} + \sum_j y_j^*$.

Koncept ravnotežnih cena jedino zahteva postojanje neke raspodele bogatstav takve da raspodela (x^*, y^*) i vektor cena $p \in R^L$ obrazuju ravnotežu. To oslikava ideju o učešću i ponašanju cena na tržištu bez ikakve pretpostavke o raspodeli bogatstva među potrošačima. Treba primetiti da je Valrasian ravnoteža specijalan slučaj ravnoteže sa transferima. Svodi se na slučaj u kojem, za svako i, nivo bogatstva potrošača i, W_i je određen inicijalnim vektorom imetka ω_i i učešćem u profitu firme $(\Theta_{i1}, \ldots, \Theta_{iJ})$ bez ikakvih daljih transfera bogatstva, odnosno gde je

$$W_i = p \cdot \omega_i + \textstyle\sum_j \Theta_{ij} p \cdot y_j^* \text{ za sve } i = 1, \ldots, I.$$

5.2 Prva fundamentalna teorema ekonomije blagostanja

U ovom delu rada će biti navedena i dokazana Prva fundamentalna teorema ekonomije blagostanja sa osvrtom na glavne ideje u dokazu.

[2] W_i predstavlja ukupan imetak (robu i udele u firmama) agenta i na tržištu.

Prva teorema blagostanja govori o tome koji uslovi treba da budu ispunjeni da bi ravnotežna cena sa transferima (kao i Valrasian ravnoteža) bila Pareto optimalna. Za ekonomiju sa konkurentskim tržištem, ona obezbeđuje, formalnu i opštu potvrdu "nevidljive ruke" o kojoj je govorio Adam Smit. Jedna, veoma slaba pretpostavka - lokalna nestacionarnost relacije preferencije je sve što je potrebno od uslova u teoremi da bi se dobio neki rezultat. Važno je napomenuti da se u dokazu teoreme ne zahteva bilo kakva pretpostavka o konveksnosti.

Definicija 5.2.1. *Relacija preferencije $\succeq_i$ na potrošačkom skupu X_i je lokalno nestacionarna ako za svako $x_i \in X_i$ i za svako $\varepsilon > 0$ postoji neko $x_i' \in X_i$ takvo da je $\|x_i' - x_i\| \leq \varepsilon$ i $x_i' \succ_i x_i$.*

Intuitivno, uslov za nestacionarnost će biti ispunjen ako na tržištu postoje željene robe. Treba primetiti još jedan važan zaključak iz sledećeg tvrđenja: ako je relacija preferencije $\succeq_i$ neprekidna [3] i lokalno nestacionarna, onda bilo koji potrošački skup X_i neće biti ograničen. U suprotnom, postojala bi globalna (a otuda i lokalna) stacionarna tačka.

Teorema 5.2.1. ***Prva fundamentalna teorema ekonomije blagostanja.*** *Ako su relacije preferencije lokalno nestacionarne i ako je (x^*, y^*, p) ravnotežna cena sa transferima, onda je raspodela (x^*, y^*) Pareto optimalna. Specijalno, bilo koja raspodela u kojoj se ostvaruje Valrasian ravnoteža je Pareto optimalna.*

Dokaz:

Neka je (x^*, y^*, p) ravnotežna cena sa transferima i neka su nivoi bogatstva $(w_1, \ldots, w_l)$. Iz definicije 5.1.4 znamo da je $\sum_i w_i = p \cdot \overline{\omega} + \sum_j p \cdot y_j^*$. Koristeći definiciju ravnotežnih cena sa transferima (definicija 5.1.4) i svojstva relacije preferencije (maksimizaciju želja i potreba potrošača) dobijamo da

$$\text{ako } x_i \succ_i x_i^* \text{ onda je } p \cdot x_i > W_i.$$

To znači da s obzirom da je u pitanju relacija stroge preferencije za potrošača i, sve robe x_i koje su poželjnije za potrošača i od robe x_i^*, potrošač neće moći da ih priušti. Lokalna nestacionarnost zajedno sa prethodnim zaključkom daje sledeće svojstvo:

$$\text{ako } x_i \succeq_i x_i^* \text{ onda } p \cdot x_i \geq W_i. (1)$$

[3] Za svaku relaciju preferencije sledeća tvrđenja su ekvivalentna:
1) $\succeq_i$ je neprekidna
2) ako je $x \succ_i y$ tada postoje disjunktne okoline O_x i O_y tačaka x i y takve da $\forall a \in O_x$, $\forall b \in O_y$ važi da $a \succ_i b$.

To znači da je bilo koja roba koja je poželjna bar koliko i x_i^* dostupna potrošaču i, odnosno, on je ustanju da tu robu sebi priušti.

Razmotrimo sada raspodelu (x, y) koja je Pareto dominantna u odnosu na (x^*, y^*). To znači da je $x_i \succeq_i x_i^*$ za svako i i da je $x_i \succ x_i^*$ za neko i. Zbog (1) imamo da je $p \cdot x_i \geq W_i$ za svako i i da je $p \cdot x_i > W_i$ za neko i. Otuda,

$$\sum_i p \cdot x_i > \sum_i W_i = p \cdot \overline{\omega} + \sum_j p \cdot y_j^*.$$

Šta više, s obzirom da y_j^* maksimizira profit za firmu j po ceni p, tj. po vektoru cena p, imamo da je $p \cdot \overline{\omega} + \sum_j p \cdot y_j^* \geq p \cdot \overline{\omega} + \sum_j p \cdot y_j$. Prema tome,

$$\sum_i p \cdot x_i > p \cdot \overline{\omega} + \sum_j p \cdot y_j.(2)$$

U tom slučaju (x, y) ne može biti izvodljivo. Zaista, $\sum_i x_i = \overline{\omega} + \sum_j y_j$ implicira da je $\sum_i p \cdot x_i = p \cdot \overline{\omega} + \sum_j p \cdot y_j$, što je u kontradikciji sa (2). Dakle, možemo zaključiti da raspodela u kojoj je ostvarena ravnotreža (x^*, y^*) mora biti Pareto optimalna.

Centralna ideja prvog dela dokaza se sastoji u sledećem: za bilo koju izvodljivu raspodelu (x, y) ukupni troškovi potrošačkog skupa $(x_1, \cdots, x_l)$ po cenama p moraju biti jednaki društvenom bogatstvu po ovim cenama, $p \cdot \overline{\omega} + \sum_j p \cdot y_j$. Šta više, preferencije su lokalno nestacionarne pa ako je (x, y) Pareto dominantno u odnosu na (x^*, y^*) onda ukupni troškovi potrošačkog skupa $(x_1, \ldots, x_l)$ po cenama p, pa i društveno bogatstvo po ovim cenama mora premašiti ukupne troškove koji bi se pojavili u ravnoteži

$$p \cdot \left(\sum_i x_i^* \right) = p \cdot \overline{\omega} + \sum_j p \cdot y_j^*.$$

Iako može izgedati da se na osnovu slabih hipoteza izvode zaključci, naše pretpostavke već sadrže dva jaka argumenta - prvi se odnosi na univerzalne cene roba na tržištu (kompletnost tržista); i drugi se odnosi na cene koje prihvataju agenti na tržištu.

5.3 Druga fundamentalna teorema ekonomije blagostanja

U nastavku će biti navedena sa dokazom Druga fundamentalna teorema ekonomije blagostanja. U njoj će se koristiti matematički model koji je objašnjen na početku ovog poglavlja, a koji se oslanja na pretpostavke iz modela Erou - Debro koji je detaljno objašnjen u drugom poglavlju ovog rada. U dokazu teoreme će se koristiti matematički pojmovi koji su detaljno objašnjenu u trećem poglavlju ovog rada, a to su konveksni skupovi i teoreme separacije.

Pre nego što bude navedena Druga fundamentalna teorema ekonomije blagostanja, navedimo definiciju kvaziravnotežnih cena sa transferima. Ova deefinicija se razlikuje od definicije ravnotežne cene sa transferima (definicija 5.1.4) u uslovu maksimizacije preferencije koji kaže da svaki izbor x_i koji je poželjniji izbor od x_i^* mora koštati više od od W_i (to jest, ako $x_i \succ_i x_i^*$ onda je $px_i > W_i$). Ovaj uslov je zamenjen nešto slabijim uslovom koji kaže da za svako x_i koje je poželjnije od x_i^* ne može koštati manje od W_i (to jest, ako $x_i \succ_i x_i^*$ onda $px_i \geq W_i$).

Definicija 5.3.1. *Neka je data ekonomija* $\left(\{(X_i, \succeq_i)\}_{i=1}^{I}, \{Y_j\}_{j=1}^{J}, \overline{\omega}\right)$. *Raspodela* (x^*, y^*) *i vektor cena* $p = (p_1, p_2, \ldots, p_L) \neq 0$ *obrazuju kvaziravnotežnu cenu sa transferima ako pstoji vektor raspodele bogatstva* $(W_1, W_2, \ldots, W_I)$ *sa osobinom* $\sum_i W_i = p \cdot \overline{\omega} + \sum_j p \cdot y_j^*$ *tako da važi:*

i) za svako j, y_j^* *maksimizira profit u* Y_j, *odnosno*

$$p \cdot y_j \leq p \cdot y_j^*, \text{ za sve } y_j \in Y_j.$$

ii) za svako i, *ako* $x_i \succeq_i x_i^*$ *onda* $p \cdot x_i \geq W_i$.

iii) $\sum_i x_i^* = \overline{\omega} + \sum_j y_j^*$

Teorema 5.3.1. ***Druga fundamentalna teorema ekonomije blagostanja.*** *Neka je data ekonomija* $\left(\{(X_i, \succeq_i)\}_{i=1}^{I}, \{Y_j\}_{j=1}^{J}, \overline{\omega}\right)$. *Pretpostavimo da je svako* Y_j *konveksno i da je svaka relacija preferencije* $\succeq_i$ *konveksna (tj. skup* $\{x_i' \in X_i : x_i' \succeq_i x_i\}$ *je konveksan za svako* $x_i \in X_i$*) i lokalno je nestacionarno. Onda, za svaku Pareto optimalnu alokaciju* (x^*, y^*), *postoji vektor cena* $p = (p_1, p_2, \ldots p_L) \neq 0$ *tako da je* (x^*, y^*, p) *cena kvaziravnoteže sa transferima.*

Dokaz:
U suštini, dokaz se sastoji u primeni teoreme separacije hiperravni za konveksne skupove. Dokaz će biti organizovan u nekoliko koraka kako bi se lakše propratio dokaz kao i glavne ideje dokaza.

Pre početka dokaza, definišimo pojmove koji će biti korišćeni u dokazu.

Za svako i, skup V_i poželjnije potrošnje u odnosu na x_i^* definiše se sa

$$V_i = \left\{ x_i \in X_i : x_i \succ_i x_i^* \right\} \subset R^L.$$

$$V = \sum_i V_i = \left\{ \sum_i x_i \in R^L : x_1 \in V_1, \ldots, x_I \in V_I \right\}$$

$$Y = \sum_j Y_j = \left\{ \sum_j y_j \in R^L : y_1 \in Y_1, \ldots, y_J \in Y_J \right\}.$$

V je skup agregatneih "paketa" agregatne potrošnje koji mogu da se podele na I pojedinačnih potrošnji, tako da svaka odgovara određenom potrošaču i, u iznosu x_i^*. Skup Y je skup agregatne proizvodnje. Treba napomenuti da skup $Y + \{\overline{\omega}\}$ geometrijski predstavlja skup agregatne proizvodnje koji je pomeren za $\overline{\omega}$. To je skup agregatnih "paketa" proizvedenih sa datom tehnologijom i imetkom i koji se mogu iskoristiti, u suštini, za potrošnju.

Prvi korak

Svaki skup V_i je konveksan. Dokažimo to.
Pretpostavimo da $x_i \succ_i x_i^*$ i $x_i' \succ_i x_i^*$. Neka je $0 \leq \alpha \leq 1$. Želimo da pokažemo da je $\alpha x_i + (1-\alpha)x_i' \succeq_i x_i^*$. Relacija preferencije je kompletna pa bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $x_i \succeq_i x_i^*$. Relacija preferencije je konveksna, pa imamo da je $\alpha x_i + (1-\alpha)x_i' \succeq_i x_i'$, pa zbog tranzitivnosti relacije preferencije dobijamo $\alpha x_i + (1-\alpha)x_i' \succ_i x_i^*$.

Drugi korak

Skupovi V i $Y + \{\overline{\omega}\}$ su konveksni. Pokažimo to.
Skup V je konveksan jer je relacija preferencije $\succeq_i$ konveksna po uslovu teorme. Skup $Y + \{\overline{\omega}\}$ je konveksan skup jer je suma bilo koja dva (ili više) konveksnih skupova konveksan skup [4]. Po uslovu teoreme Y_j je konveksno, a po definiciji $Y = \sum_j Y_j$ je konveksan kao suma konveksnih skupova,

[4]Više o ovom svojstvu pogledati u trećem poglavlju ovog rada.

pa je i $Y + \{\overline{\omega}\}$, translirano za $\overline{\omega}$, takođe konveksan skup.

Treći korak

$V \cap (Y + \{\overline{\omega}\}) = \emptyset$. Pokažimo to.
Ovo je posledica Pareto optimalnosti (x^*, y^*). Ako bi postojao vektor koji se nalazi i u V i u $Y + \{\overline{\omega}\}$, to bi onda značilo da bi sa datim imetkom i tehnologijom bilo moguće pronaći vektor koji bi imao osobinu da svakom potrošaču i da potrošački "paket" boji od x_i^*.

Četvrti korak

Neka je vektor $p = (p_1, \dots p_L) \neq 0$ i neka je broj r, $r \in R$ takvo da je $p \cdot z \geq r$, za svako $z \in V$ i $p \cdot z \leq r$ za svako $z \in Y + \{\overline{\omega}\}$. Ovo direktno sledi iz teoreme o separaciji hiperravni [5].

Peti korak

Ako je $x_i \succeq_i x_i^*$ za svako i onda je $p \cdot (\sum_i x_i) \geq r$. Pokažimo to.
Pretpostavimo da je $x_i \succeq_i x_i^*$ za svako i. Zbog lokalne nestacionarnosti, za svakog postrošača i postoji potrošački paket $\widehat{x_i}$ dovoljno blizu x_i tako da je $\widehat{x_i} \succ_i x_i$, pa stoga $\widehat{x_i} \in V_i$, pa je i $p \cdot (\sum_i \widehat{x_i}) \geq r$, što u graničnom slučaju kada $\widehat{x_i} \to x_i$ dobijamo da je $p \cdot (\sum_i x_i) \geq r$. [6]

Šesti korak
KOristeći definiciju 5.3.1. i osobinu da je $p \neq 0$ dobijamo da je $p \cdot (\sum_i x_i^*) = p \cdot (\overline{\omega} + \sum_j y_j^*)$. Zbog petog koraka, imamo da je $p \cdot (\sum_i x_i^*) \geq r$. Sa druge strane, $\sum_i x_i^* = \sum_j y_j^* + \overline{\omega} \in Y + \overline{\omega}$, pa je stoga $p \cdot (\sum_i x_i^*) \leq r$. Prema tome, $p \cdot (\sum_i x_i^*) = r$. S obzirom da je $\sum_i x_i^* = \overline{\omega} + \sum_j y_j^*$, imamo da je $p \cdot (\overline{\omega} + \sum_j y_j^*) = p \cdot (\sum_i x_i^*) = r$.

Sedmi korak

Za svako j, imamo da je $p \cdot y_j \leq p \cdot y_j^*$ za sve $y_j \in Y_j$. Za neku firmu j i

[5] Detaljnije o ovome pogledati u trećem poglavlju ovog rada: definicia hiperravni, primeri hiperravni i teorema separacije hiperravni.

[6] Geometrijski gledano, ovde smo pokazali da je skup $\sum_i \{x_i \in X_i : x_i \succeq x_i^*\}$ sadržan u zatvaranju skupa V, odnosno $\overline{V} = \{v \in R^L : p \cdot v \geq r\}$.

$y_j \in Y_j$, imamo da je $y_j + \sum_{h \neq j} y_h^* \in Y$. Otuda je

$$p \cdot (\overline{\omega} + y_j + \sum_{h \neq j} y_h^*) \leq r = p \cdot (\overline{\omega} + y_j^* + \sum_{h \neq j} y_h^*).$$

Stoga imamo da je $p \cdot y_j \leq p \cdot y_j^*$.

Osmi korak

Za svako i, ako je $x_i \succ_i x_i^*$, onda je $p \cdot x_i \geq p \cdot x_i^*$. Pokažimo to. Posmatrajmo neko $x_i \succ_i x_i^*$. Zbog petog i šestog koraka imamo da je

$$p \cdot (x_i + \sum_{k \neq i} x_k^*) \geq r = p \cdot (x_i^* + \sum_{k \neq i} x_k^*).$$

Pa je $p \cdot x_i \geq p \cdot x_i^*$.

Deveti korak

Nivoi bogatstva $W_i = p \cdot x_i^*$ za $i = 1, 2, \ldots, I$ podržavaju (x^*, y^*, p) kao kvaziravnotežu sa transferima. Uslove (i) i (ii) definicije 5.3.1 možemo dobiti iz sedmog i osmog koraka. Uslov (iii) se dobija na osnovu izvodljivosti Pareto optimalne situacije (x^*, y^*).

Treba još napomenuti da konveksnost igra veoma važnu ulogu u ovoj teoremi. Interpretacija ove teoreme je najbolja kada je broj agenata u ekonomiji velik. Tada tržište samo po sebi sprovodi pretpostavku o učešću cena na tržištu (inače bi bilo neizbežno postojanje neke vrste centralizovanog mehanizma na tržištu koji bi garantovao nepromenljivost cena).

5.4 Ograničenja druge fundamentalne teoreme

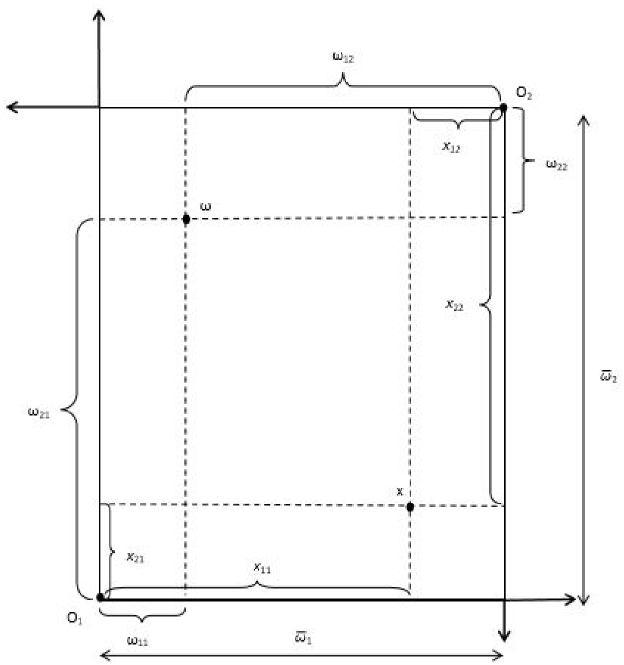
Prvo zapažanje se odnosi na cene. Ukoliko neki autoritet želi da implementira određenu Pareto optimalnu alokaciju, onda on mora osigurati da će cene koje odgovaraju Pareto optimalnoj alokaciji biti prihvaćene i od strane potrošača i od strane firmi. Ako je struktura tržišta takva da formiranje cena ne može samo da se odvija (u slučaju kada su nisu svi agenti zanemarljive veličine) onda planiranje autoriteta na tržištu podrazumeva formiranje cena na neki način, praćenjem svih transakcija ili možda kupovinom ili prodajom neke količine neke robe l po ceni p_l.

Drugo zapažanje odnosi se na informacije o planiranju autoriteta na tržištu. Autoritet koji želi da dominira na tržištu, pritom znajući uslove i rezultate Druge fundamentalne teoreme ekonomije blagostanja, mora imati veoma dobro osmišljen plan i dobru organizaciju njegovog sprovođenja. Kao prvo, mora imati relevantne informacije kako bi mogao da identifikuje i implemetira Pareto optimalnu raspodelu i zatim odredi odgovarajući vektor cena. Dakle, trebalo bi da zna bar statističke raspodele preferencija agenata, imetak, kao i druge relevantne karakteristike agenata koje se pojavljuju u posmatranoj ekonomiji. Najčešće karakteristike agenata u posmatranoj ekonomiji su imetak i preferencije agenata. Pa otuda, ukoliko neki agent ima nameru da postane autoritet na tržištu potrebno je da ove karakteristike ostalih agenata odlično poznaje. Međutim, ove informacije su obično teško dostupne u praksi. I na kraju, čak i ako autoritet prikupi sve neophodne informacije o agentima u posmatranoj ekonomiji, potrebno je da ima moć da sprovede neophodne transfere bogatstva (kroz poreze na primer), koje pojedinci ne bi mogli da izbegnu.

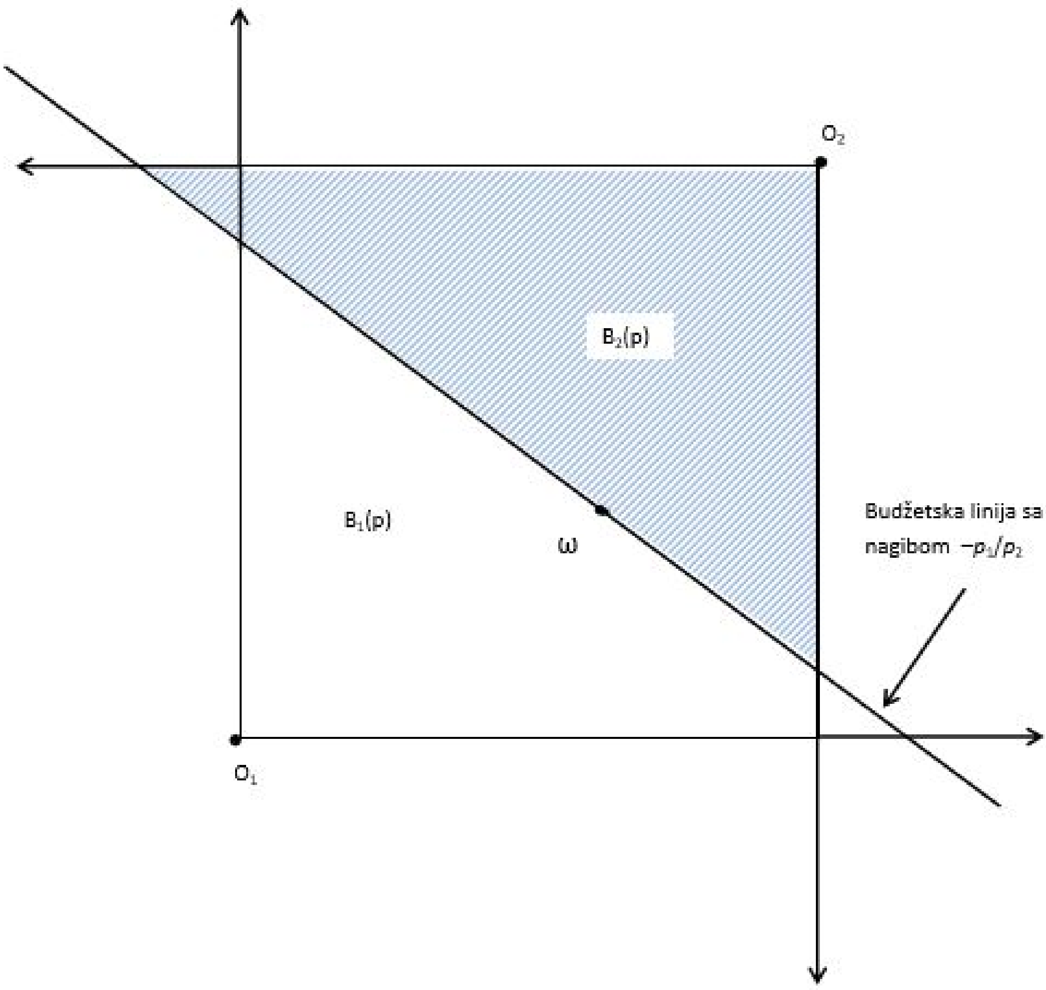
Ova teorema je veoma korisno teorijsko "oružje", ali je ipak još uvek daleko od direktne praktične primene. Ona ukazuje na uslove koji su neophodni da bi se dostigla Pareto optimalna raspodela. Sve navedene pretpostavke o ograničenjima teoreme otvaraju dalje mogućnosti za neke druge radove, ispitivanje održivosti ovakvih pretpostavki i istraživački rad.

6

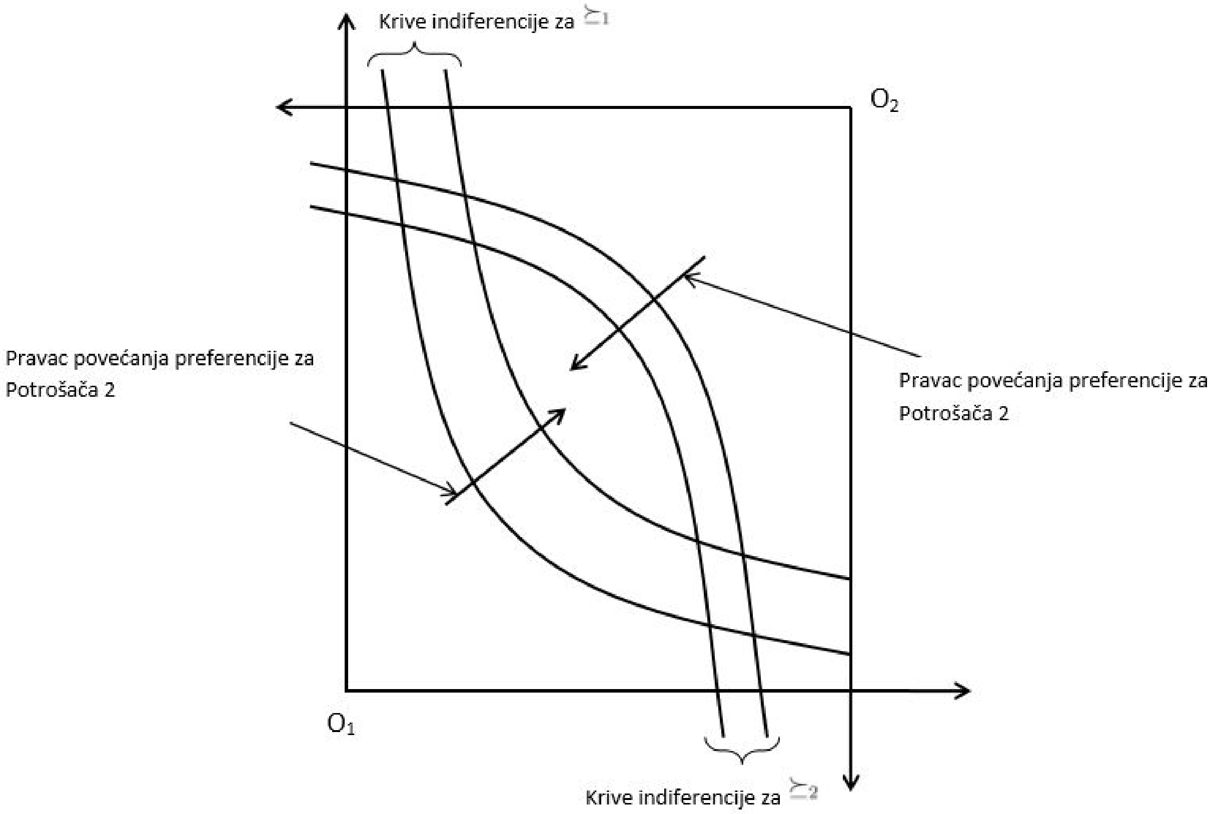
Dodatak - grafički prikazi dvodimenzionalnog dijagrama



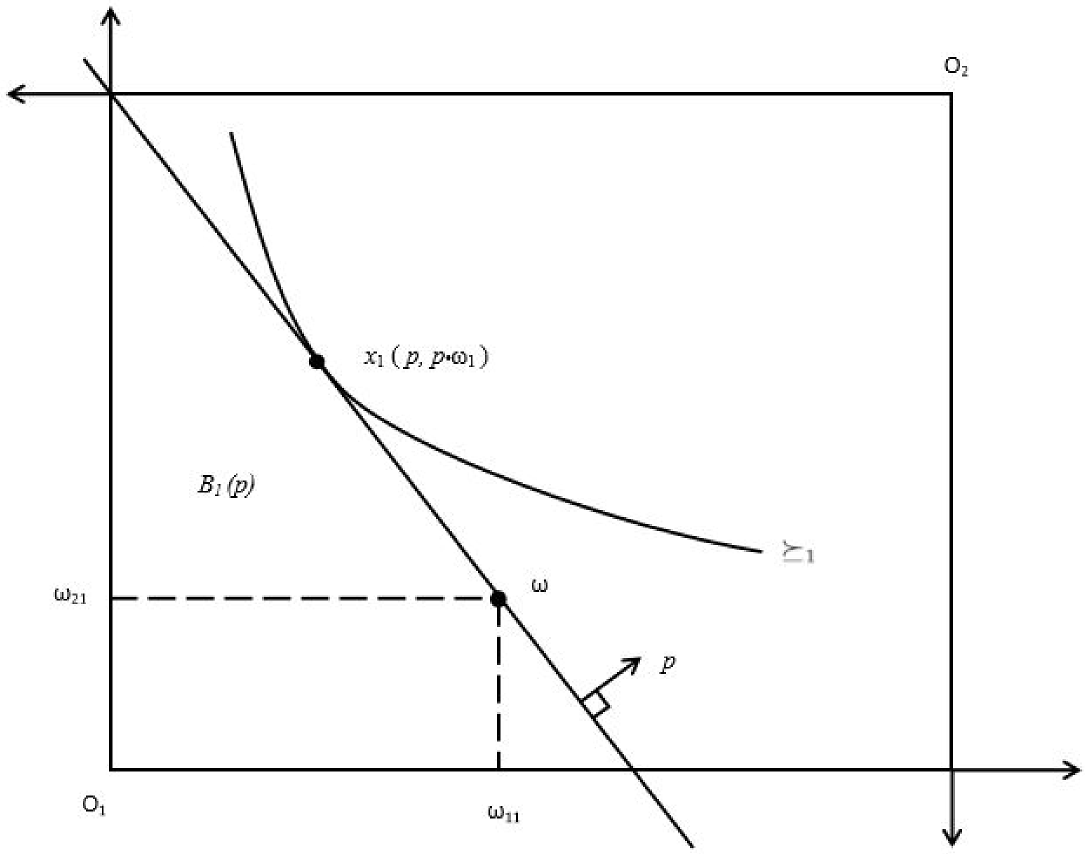
Slika 6.1: Dvodimenzionalni dijagram



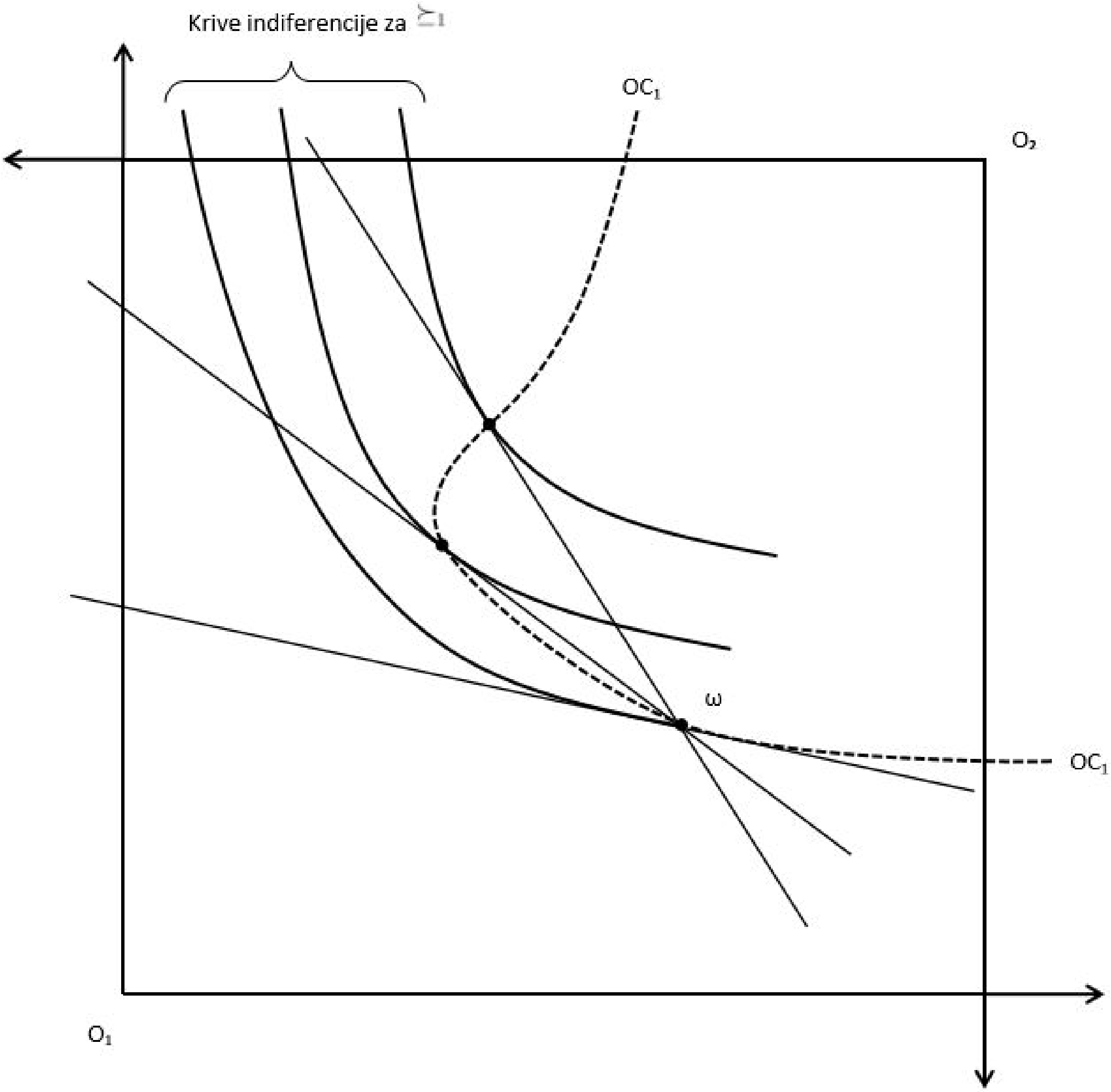
Slika 6.2: Budžetski skup



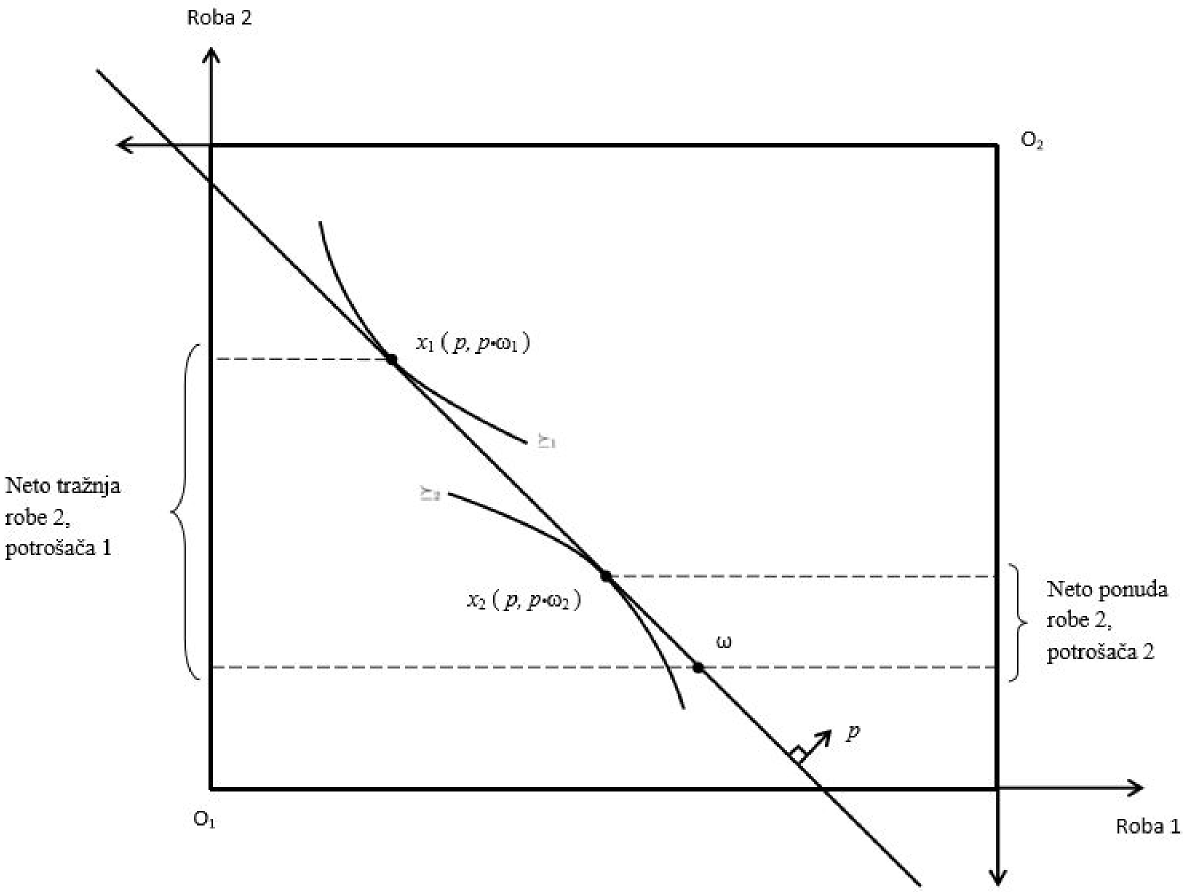
Slika 6.3: Preferencije u dvodimenzionalnom dijagramu



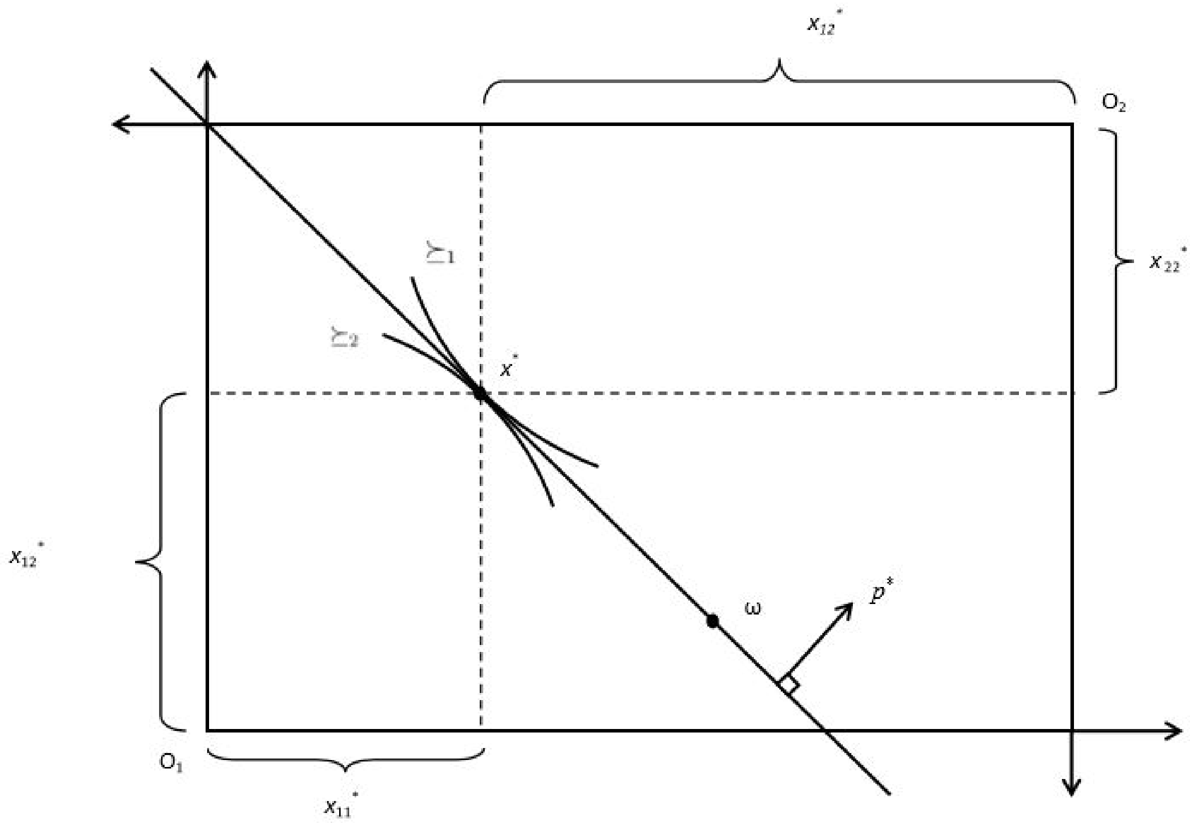
Slika 6.4: Optimalna potrošnja za agenta 1 po cenama p



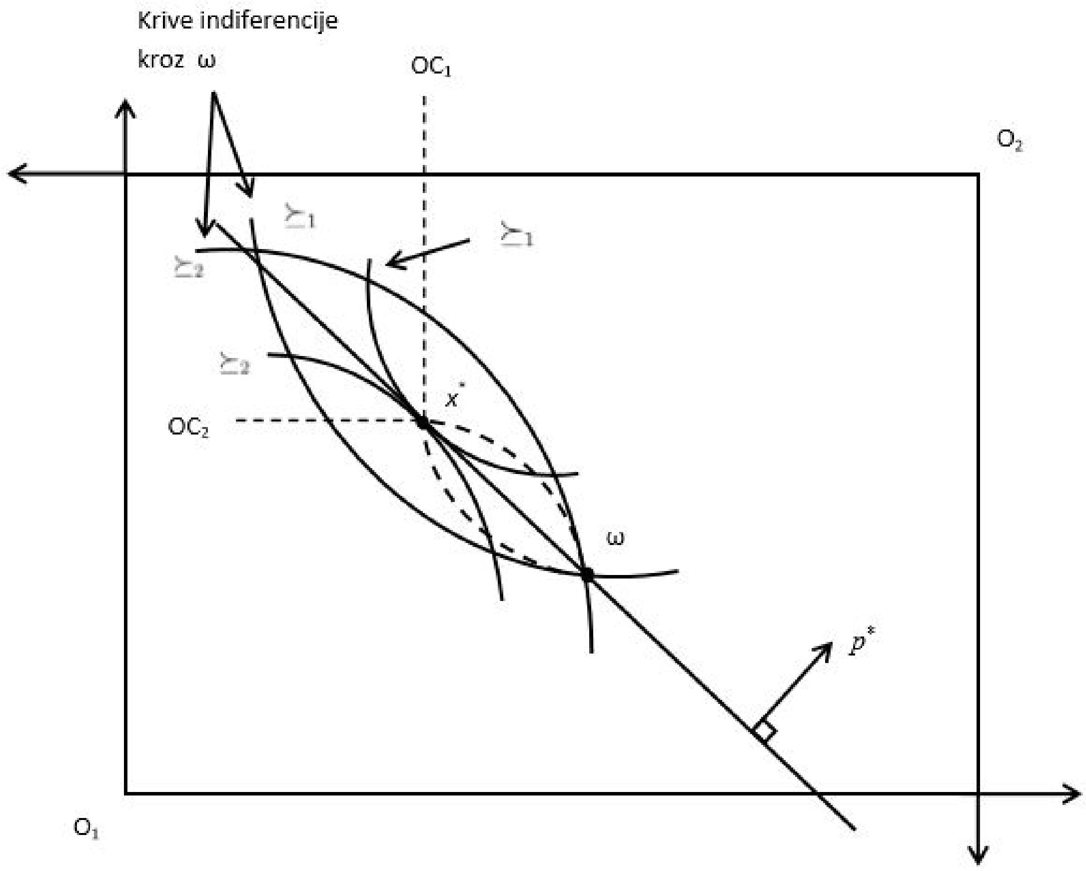
Slika 6.5: Kriva ponude za potrošača 1



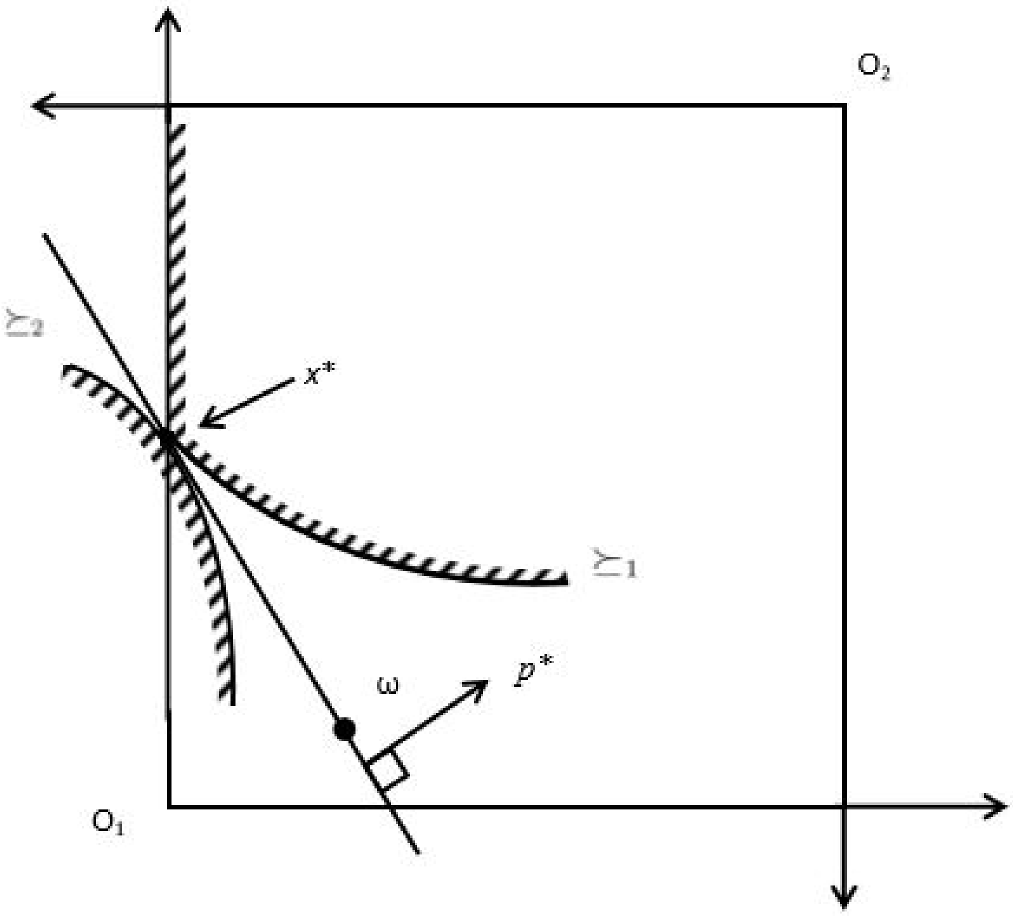
Slika 6.6: Vektor cene sa viškom tražnje za robom 2 i viškom ponude robe 1



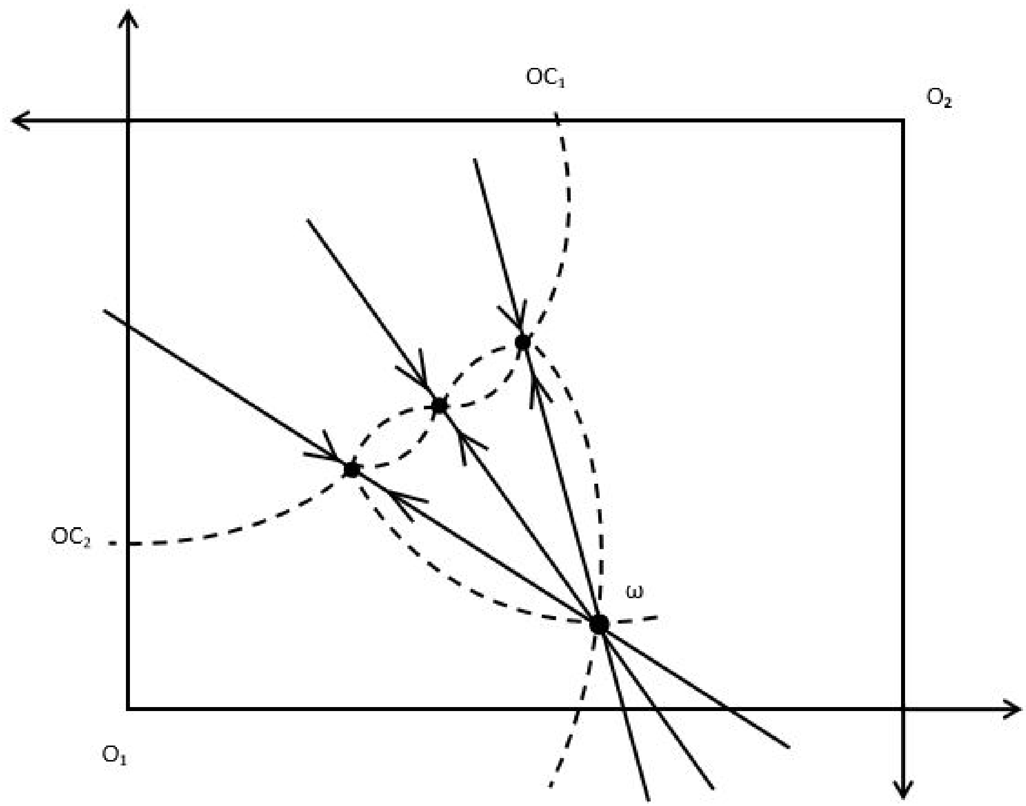
Slika 6.7: Valrasian ravnoteža



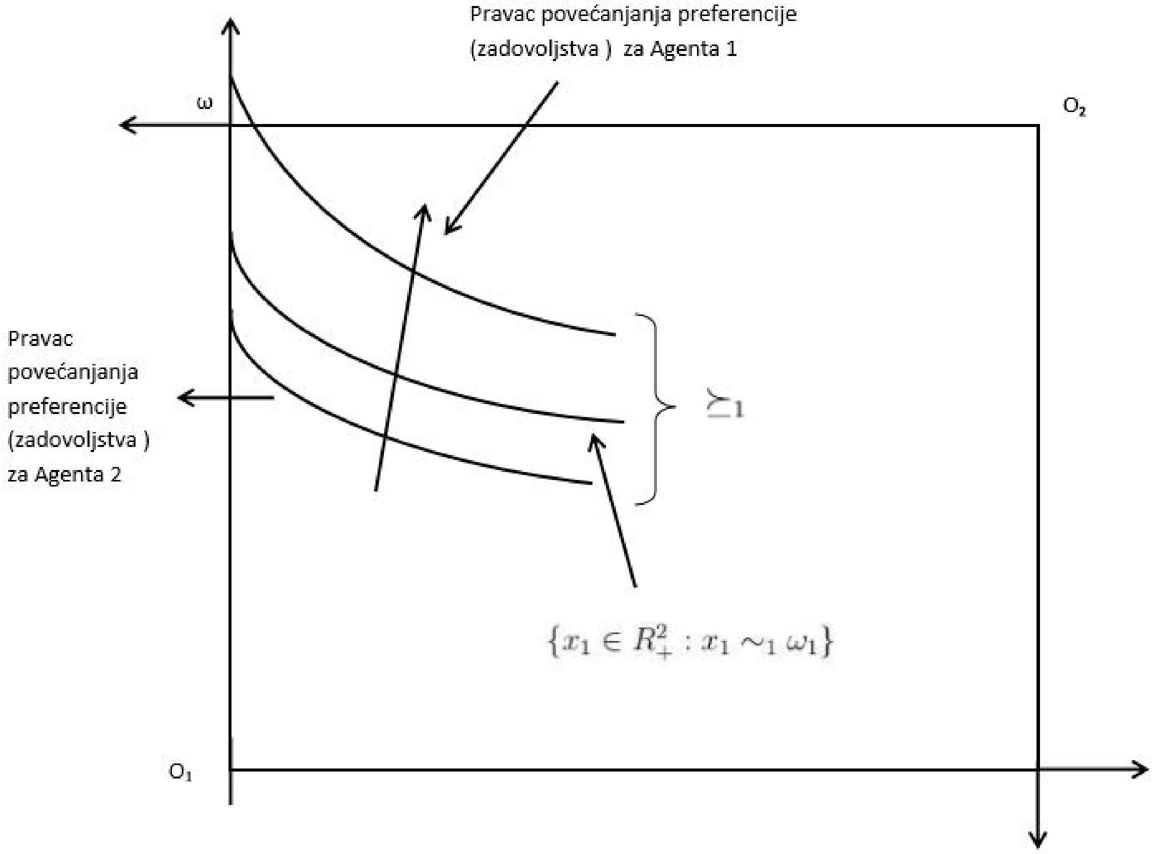
Slika 6.8: Kriva ponude potrošača 1 i 2 prolaze kroz tačku Valrasian ravnoteže



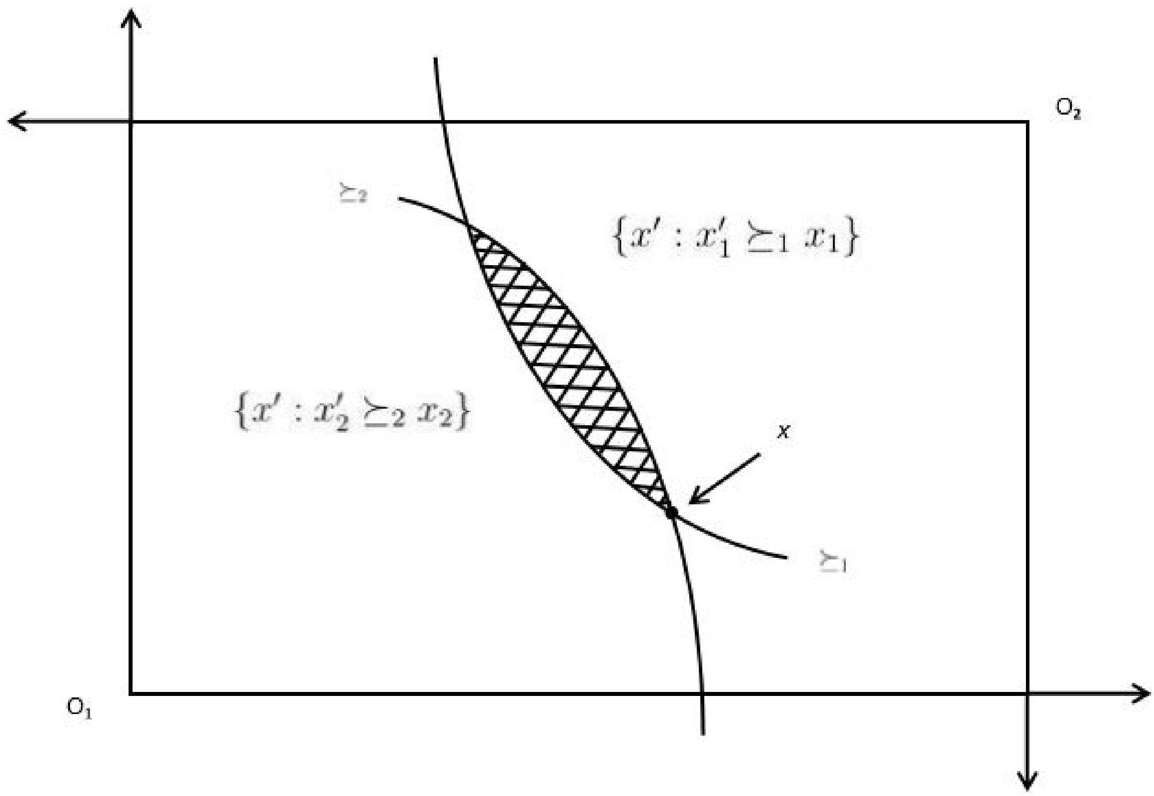
Slika 6.9: Valrasian ravnoteža na rubu dvodimenzionalnog dijagrama



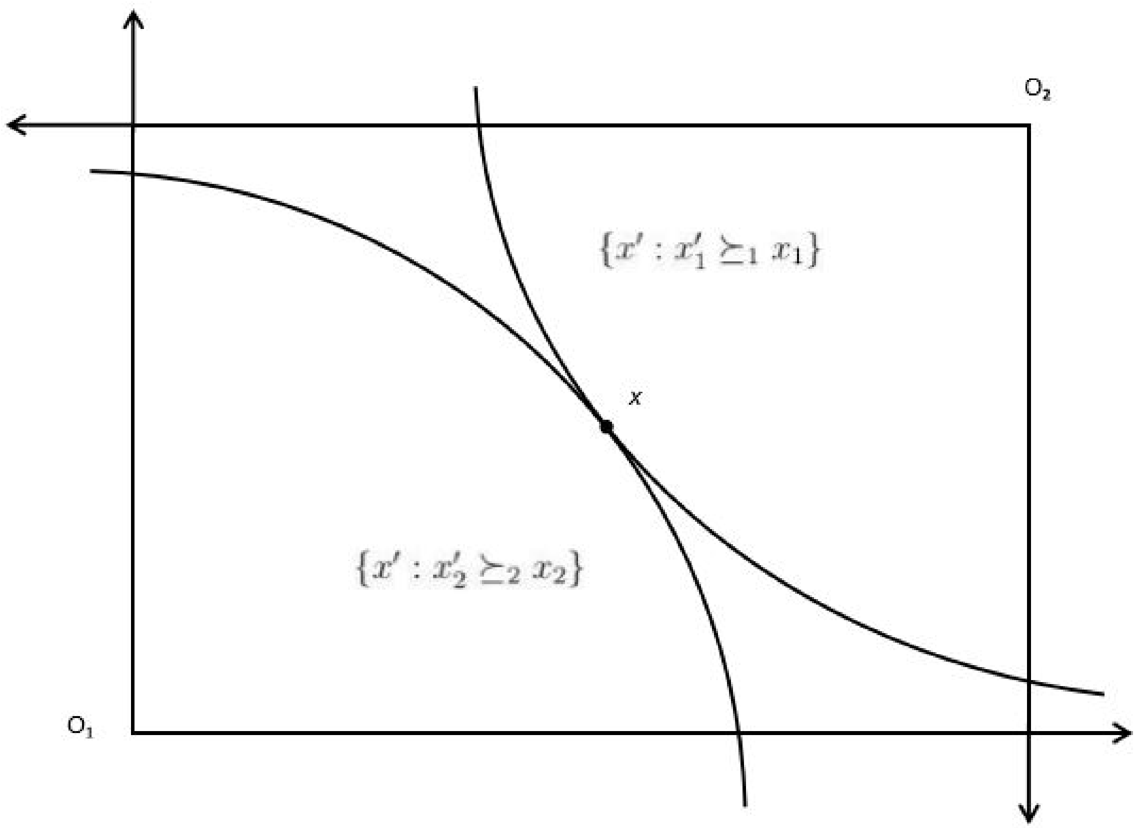
Slika 6.10: Višestruka Valrasian ravnoteža



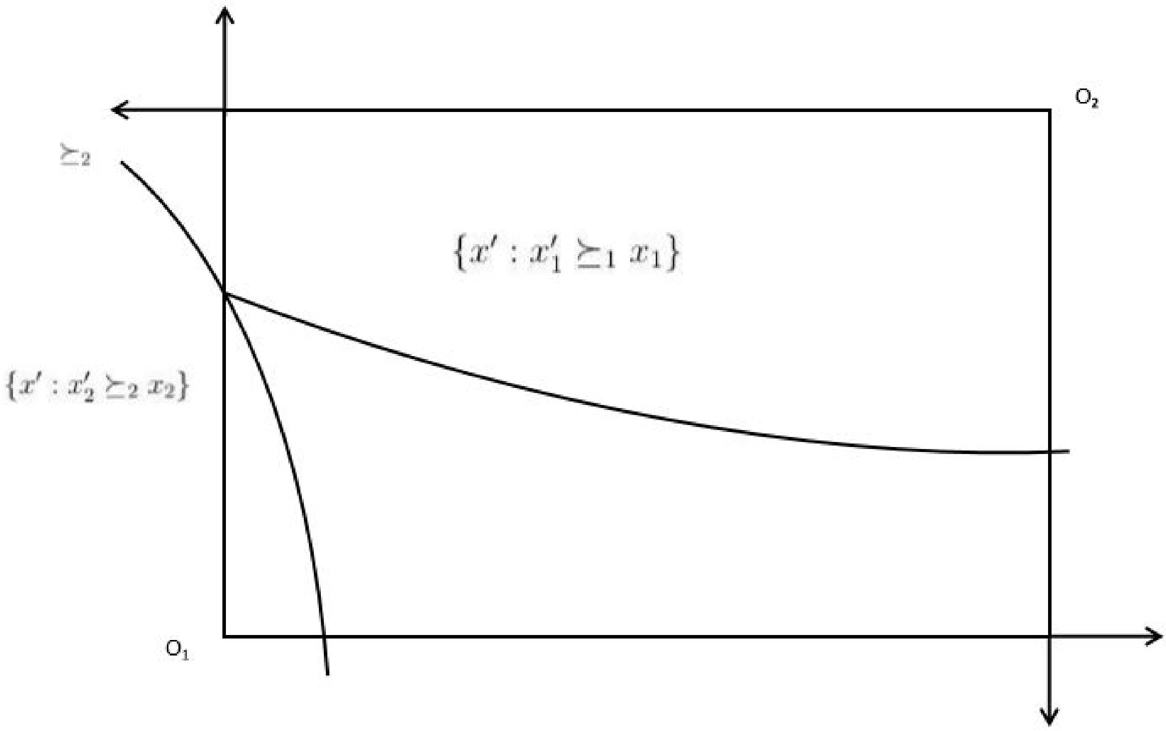
Slika 6.11: Primer nepostojanja Valrasian ravnoteže



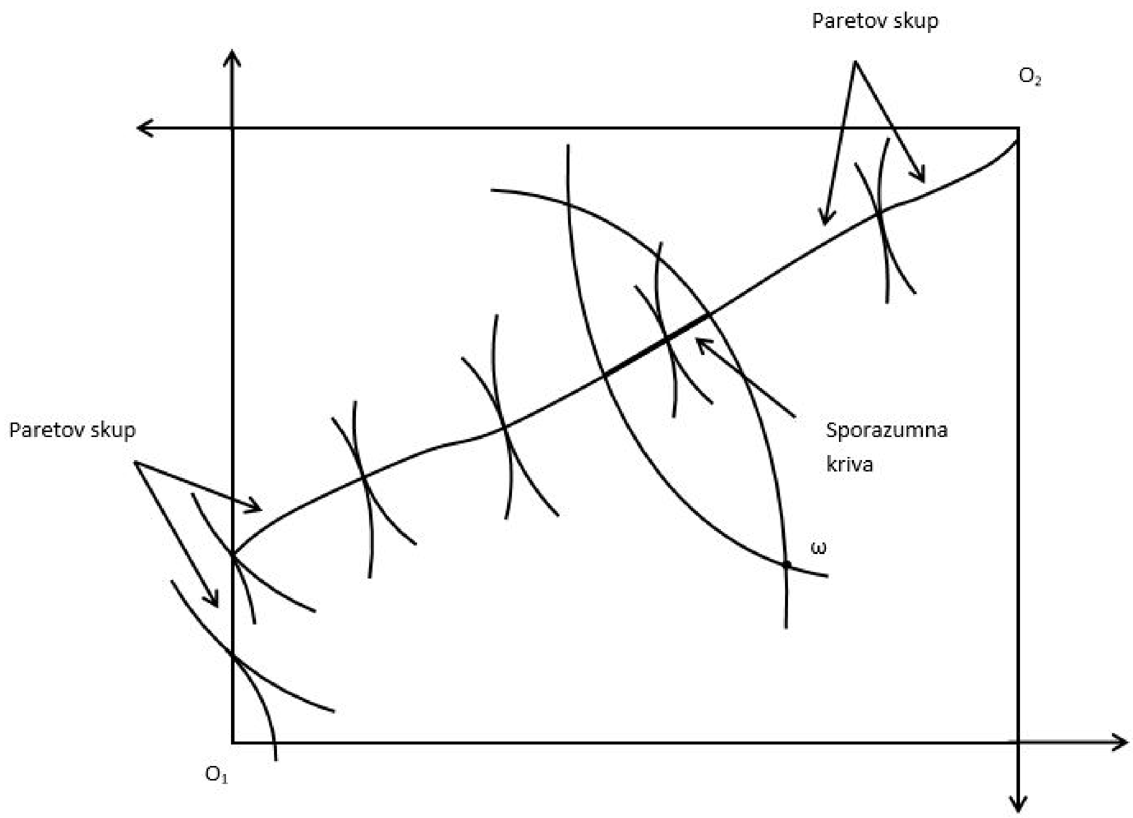
Slika 6.12: Raspodela x nije Pareto optimalna



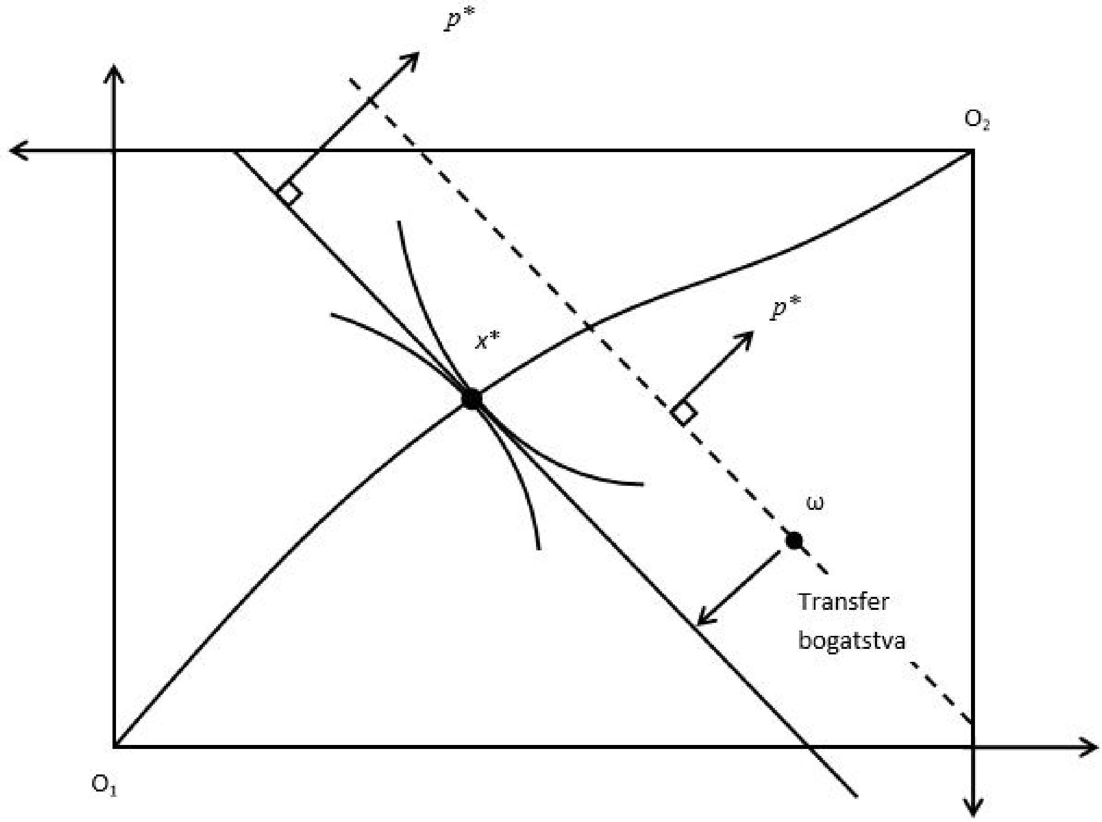
Slika 6.13: Raspodela x je Pareto optimalna



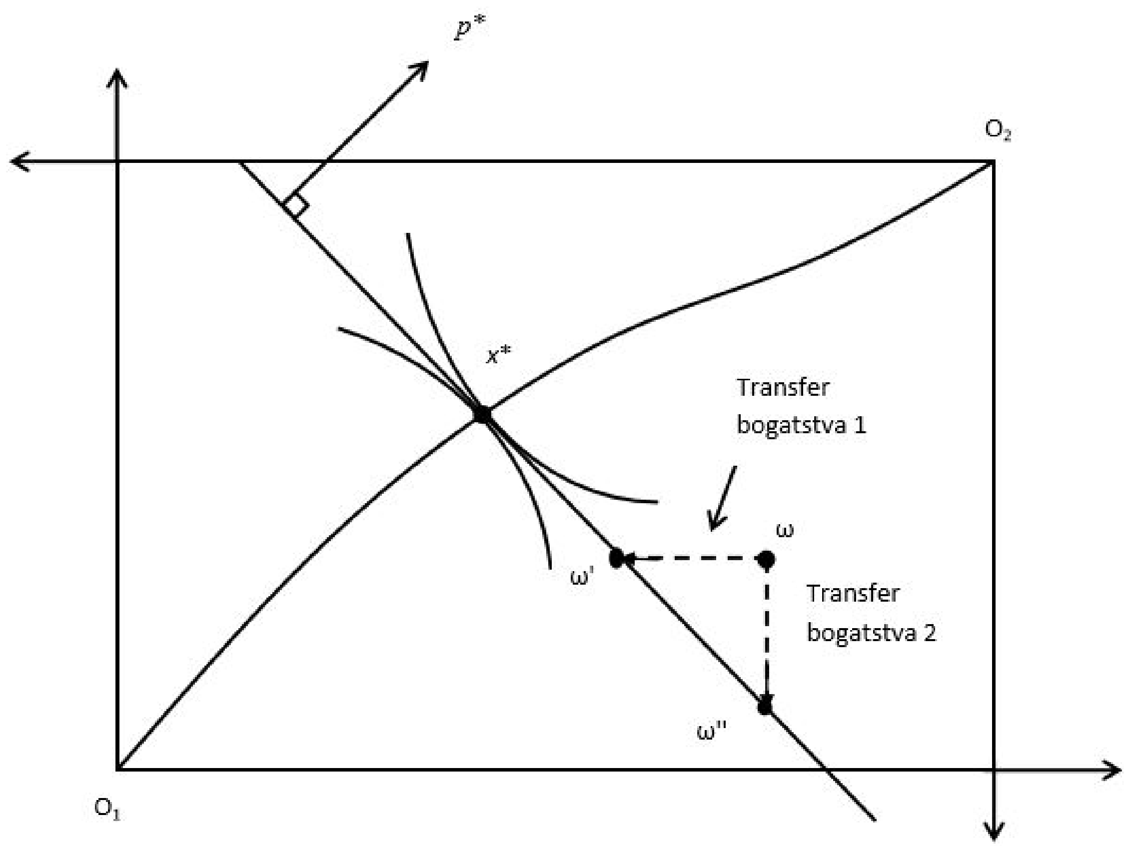
Slika 6.14: Raspodela x je Pareto optimalna



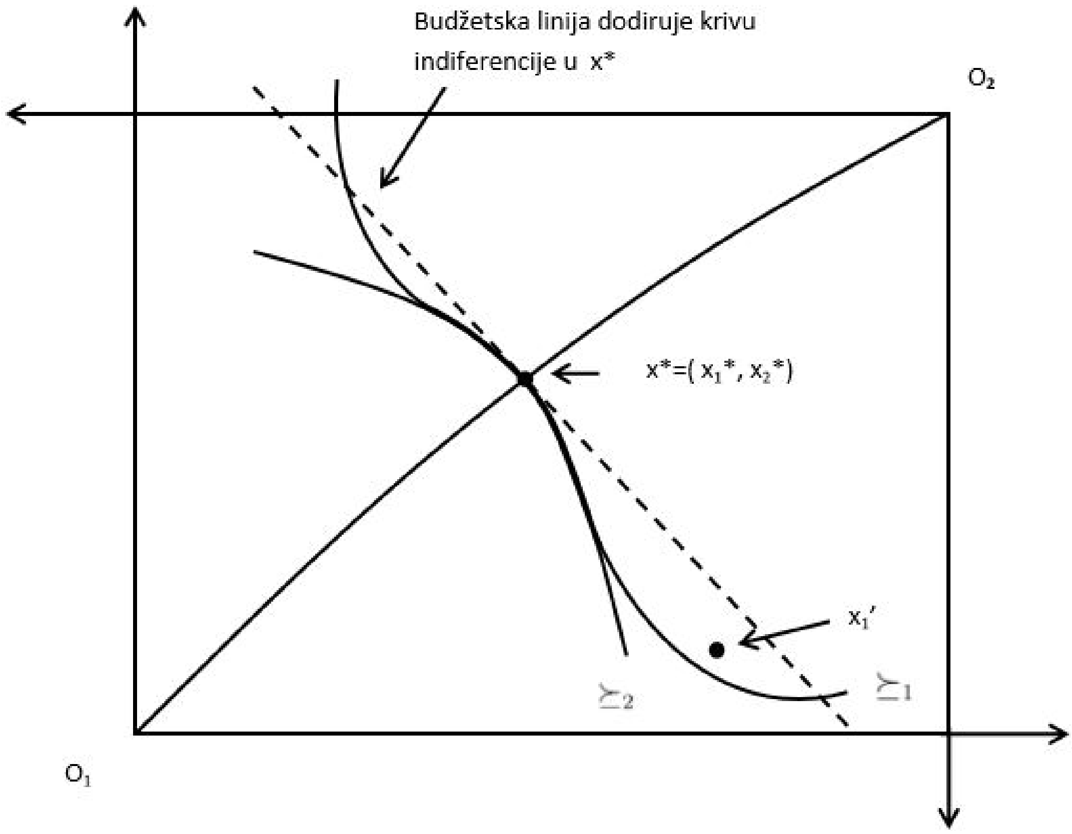
Slika 6.15: Paretov skup i sporazumna kriva



Slika 6.16: Druga fundamentalna teorema; korišćenje transfera bogatstva



Slika 6.17: Druga fundamentalna teorema; korišćenje transfera imetka



Slika 6.18: Problem Druge fundamentalne teoreme sa nekonveksnim preferencijama

7

Zaključak

U ovom radu predstavljeni su neki pristupi u analiziranju ravnoteže na tržistu. Navedeni su određeni načini pomoću kojih je moguće proširiti razmatranja o opštoj ravnoteži i izvan okvira Erou - Debro modela. Uvodeći pojam racionalnih odluka agenata na tržistu, koji se prvi put pojavio u ovom modelu, započet je potpuno nov pristup u teoriji opšte ravnotže. Uvodeći nove pretpostavke i razvijajući postojeće modele, dolazimo do modela koji sve bolje i bolje opisuju tržište. Modeli koji su se razvili iz modela Erou - Debro su manje-više sačuvali pojam racionalnosti. Izazov za buduće modele opšte ravnoteže predstavlja kako formulisati pojmove ograničene racionalnosti, bez narušavanja fundamentalnih pretpostavki modela i izvođenja logički ispravnih zaključaka. U nekim širim razmatranjima koja izlaze iz okvira ovog modela i ovog rada trebalo bi voditi računa o pretpostavkama u vezi sa optimizacijom agenata, racionalnim odlukama i ravnoteži. Sve ove varijacije na temu proširuju definiciju opšte ravnoteže.

U radu je korišćen dvodimenzionalni dijagram koji predstavlja veoma jednostavan grafički prikaz ekonomije razmene, ali je njegov značaj veliki. Ne postoji svojstvo opšte ravnoteže koje ne može biti predstvaljeno u dvodimenzionalnom dijagramu, što nam upravo daje mogućnost da na neki način proverimo valjanost, mane i domet pretpostavki od kojih polazimo.

Posebno poglavlje u ovom radu je posvećeno Prvoj, i naročito Drugoj fundamentalnoj teoremi blagostanja ekonomije. Iako predstavljaju moćan matematički aparat koji je veoma koristan u teoriji, ipak je još uvek daleko od recepta koji bi se mogao primeniti u praksi. S druge strane, ističući šta je neophodno da bi se postigla željena Pareto optimalna raspodela, teoreme opominju i usmeravaju u kom pravcu i kojim okvirima je potrebno razmišljati kada je ravnoteža, posebno Pareto optimalna raspodela, u pitanju.

Literatura

[1] N. Teofanov, Lj. Gajić, *Predavanja iz optimizacije*, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, TEMPUS CD JEP 17017-2002, 2006.

[2] A. Mas-Colell, M. Whinston, J. Green *Microeconomic Theory*, New York, Oxford, OXFORD UNIVERSITY PRESS, 1995.

[3] E. Saul, D. Laidler, M. Diertrich, *Microeconomics*, London, 2008

[4] https://web.stanford.edu/ jdlevin/Econ%20202/General%20Equilibrium.pdf

[5] http://dido.econ.yale.edu/ gean/art/1987-newpalgrave1.pdf

[6] http://people.hss.caltech.edu/ kcb/Notes/Arrow-Debrou.pdf

[7] Z. Stojaković, I.Bošnjak, *Elementi linearne algebre*, Novi Sad, 2010.

[8] M. Krstić, doktorska disertacija *Teorijski modeli racionalnog ponašanja u savremenoj ekonomskoj nauci*, Niš, 2013.

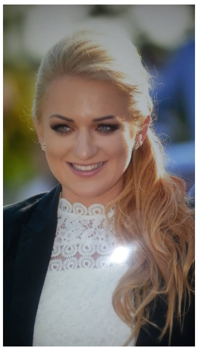
[8] Zorana Lužanin, Beleške sa predavanja *Matematički modeli u ekonomiji*

[9] https://en.wikipedia.org/wiki/Kenneth_Arrow

[10] https://en.wikipedia.org/wiki/Gérard_Debrou

[11] hhttps://en.wikipedia.org/wiki/Vilfredo_Pareto

Biografija



Miroslava Pušin je rođena 17.05.1990. godine u Rumi. Nakon završene Osnovne škole "Ivo Lola Ribar" u Rumi, upisala je Gimnaziju "Stevan Puzić", prirodno-matematički smer, u Rumi. Nakon završene srednje skole 2009. godine, upisala je osnovne akademske studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer matematika finansija, koje završava u septembru 2012. godine. Iste godine upisuje master studije na istom fakultetu i usmerenju. Položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom, čime je stekla uslov za odbranu master rada.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Pušin Miroslava
AU

Mentor: dr Nenad Teofanov
ME

Naslov rada: Tržišna ravnoteža i Pareto optimalna situacija
NR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP

Jezk izvoda: s / en
JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2017
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (7/74/0/0/0/19/0)(broj poglavlja/broj strana/broj literarnih citata/broj tabela/broj slika/broj grafika/broj priloga)
FO:

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Tržišna ravnoteža i Pareto optimalna situacija
ND

Ključne reči: ravnoteža, relacija preferencije, teoreme separacije, konveksni skupovi, hiperravni, Pareto optimalnost, Valrasian ravnoteža, Prva fundamentalna teorema blagostanja, Druga fundamentalna teorema blagostanja, dvodimenzionalni dijagram.
PO, UDK

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: Ovaj rad se bavi analizom ekonomske ravnoteže na tržištu sa posebnim akcentom na ispitivanje Paretove optimalnosti. Paretova optimalnost je matematički model optimalne alokacije bogatstva pojedinca u uslovima ekonomije blagostanja. Na samom početku rada su ukratko navedene biografije naučnika ciji su rezultati korišćeni u ovom radu. Uvodni deo se završava izlaganjem glavnih ideja opšte teorije ravnoteže. U drugom delu rada je detaljno objašnjen Erou - Debro model sa posebnim osvrtom na pred-

nosti i mane ovog modela. U trećem delu rada su navedene definicije i teoreme sa dokazima koje se koriste u poslednjem delu ovog rada. U četvrtom delu rada se nalazi grafički prikaz najprostije ekonomije sa dva učesnika u razmeni i dva proizvoda uz detaljna objašnjenja traženja ravnoteže na tržištu. Poslednje poglavlje se sastoji od Prve i Druge fundamentalne teoreme blagostanja ekonomije sa dokazima i diskusijama svake od njih.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 13.07.2015.
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije: dr Sanja Rapajić i dr Milica Žigić.
ČK

Predsednik: dr Sanja Rapajić, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član: dr Milica Žigić, docent na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu
Mentor: dr Nenad Teofanov, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Pušin Miroslava
AU

Mentor: dr Nenad Teofanov
MN

Title: General Equilibrium and Pareto optimality
TI

Language of text: Serbian (Latin)
LT

Language of abstract: s / en
LA

Country of publication: Republic of Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2017
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publication place: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4
PP

Physical description: (7/74/0/0/0/19/0)(chapters/ pages/ quotations/ tables/ pictures/ graphics/ enclosures)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Competitive Equilibrium and Pareto optimal situation
SD

Subject/Key words: equilibrium, preference relation, hyperplane separating theorem, Pareto optimality, Walrasian equilibrium, the first fundamental theorem of welfare economics, the second fundamental theorem of welfare economics, Edgeworth box.
SKW

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: This paper analyzes the economic equilibrium of the market with particular emphasis on examining Pareto optimality. Pareto optimality is a mathematical model of optimal allocation of individual wealth in terms of welfare economics. At the very beginning of the paper are outlined biographies of scientists, whose results were used in this paper. The introductory part ends exposing the main ideas of the theory of general equilibrium. In

the second part of the paper is explained in detail Arrow - Debre model with special emphasis on the advantages and disadvantages of this model. In the third part of the paper, there are definitions and theorems, with the proofs, used in the last chapter of this paper. In the fourth part of the paper is the simplest graphical representation of the economy with two participants in the exchange of two products with detailed explanations how to find equilibrium in the market. The last chapter consists of the First and Second fundamental theorem of welfare economics with the proofs and discussions of each of them.
AB

Accepted by the Scientific Board on: 13.07.2015.
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board: PhD Sanja Rapajić and PhD Milica Žigić
DB

President: PhD Sanja Rapajić
Member: PhD Milica Žigić
Mentor: dr Nenad Teofanov, full professor at Faculty of Science in Novi Sad