UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU
I INFORMATIKU

Mirjana Veljković

Primena teorije velikih devijacija u reosiguranju

- master rad -

Novi Sad, 2013.

Sadržaj :

Predgovor

U ovom radu ćemo razmatrati primenu teorije velikih devijacija u tradicionalnim i alternativnim ugovorima koji se javljaju u reosiguranju.

Pre samog rada dat je detaljan pregled osnovnih pojmova teorije verovatnoće, stohastičke analize, kao i pojmova korišćenih u radu, u cilju podsećanja i/ili sveobuhvatnog sagledavanja tematike.

U 1. poglavlju je razrađen pojam subeksponencijalnih funkcija, tj. funkcija sa debelim repom, čiji repovi opadaju prema nuli mnogo sporije od repova eksponencijalnih raspodela.

U poglavlju 2. se razmatra osnovna teorija u vezi sa sumama nezavisnih slučajnih promenljivih, što uključuje zakon velikih brojeva, centralnu graničnu teoremu i njene modifikacije (asimptotska proširenja, velike devijacije i red konvergencije), Brownovo i α-stabilno kretanje, kao i homogeni Poissonov proces kao specijalan proces prebrajanja.

U poglavlju 3. se bavimo klasičnom teorijom ekstremnih vrednosti, sa naglaskom na Poissonovu aproksimaciju kao alat za proučavanje retkih događaja.

U poglavlju 4. upoznajemo se sa ponašanjem nekoliko statistika višeg reda koje daju informacije o desnom repu funkcije raspodele.

U poglavlju 5. izložen je ekonomski aspekt reosiguranja i ugovora koji se zaključuju, kako bi njihovo matematičko sagledavanje u poglavlju 7. bilo jasnije.

U poglavlju 6. predočeni su neki od rezultata velikih odstupanja. Ono zajedno sa poglavljima 1.- 4., predstavlja neophodan alat za bavljenje ugovorima u reosiguranju, u poglavlju 7.

Ovom prilikom se zahvaljujem dr Sanji Rapajić i dr Danijeli Rajter – Ćirić na korisnim sugestijama i primedbama.

Posebno se zahvaljujem svom mentoru, dr Dori Seleši, pre svega na strpljenju, savetima i sugestijama pruženim tokom izrade ovog rada. Njena interesantna predavanja iz aktuarske matematike bila su svakako jedan od razloga da se opredelim za temu iz ove oblasti.

Takođe bih želela da se zahvalim svima koji su mi na bilo koji način pružili pomoć i podršku. Posebnu zahvalnost dugujem svojoj porodici i prijateljima.

Uvod

Povećanje gustine naseljenosti i akumulacija vrednosti imovine utiču na to da će potencijalne posledice katastofalnih događaja biti sve veće. Jedan od načina da se umanji finansijski udarac je da se koriste mehanizmi finansiranja iz fondova koji se formiraju pre nego šo se katastrofa dogodi, kao što je osiguranje. Dakle, rizik se prenosi sa pojedinca i kompanija na osiguravača.

Međutim, bez obzira kojim sredstvima raspolaže društvo za osiguranje, sve je manje u stanju da sopstvenim sredstvima obezbedi pokriće ekstremno velikih šteta (koje se dešavaju sa veoma malom verovatnoćom ali kada se dogode, iznosi zahteva dostižu ekstremne razmere), pa se nameće rešenje u tzv. atomizaciji rizika. Rizik se raspoređuje na veći broj subjekata, ponekad na širokom prostoru (zato se kaže da je reosiguranje po svojoj prirodi globalni posao), kako bi se heterogeni rizici koje osiguravač ne bi mogao da izravna, putem reosiguranja pretvorili u homogene. Dakle, osiguravač, cedira rizik na reosiguravača.

Zbog toga se kaže da je reosiguranje osiguranje osiguravajučih društava, jer ne samo što omogućava osiguravajućim društvima pokriće za velike i kompleksne rizike, nego čini osiguranje sigurnijim i jeftinijim što se konačno odražava na osiguranike koji dobijaju osiguravajuću zaštitu pod povoljnijim uslovima.

Kada se pojavi oskudica kapitala raspoloživog za pokriće rizika na tržišu reosiguranja, veća pažnja se posvećuje alternativnim pristupima upravljanja rizikom, kao što su sopstvena osiguravajuća društva, sekjurizacija, pojava grupa za zadržavanje rizika, programi prevencije i zadržavanje štete, primena sofisticiranih oruđa upravljanja rizikom itd. Poseban značaj se pridaje sekjurizaciji putem koje se rizik osiguranja transferiše na tržište kapitala.
Mnoge osiguravajuće kompanije veruju da tržište kapitala ima potencijal koji mu omogućava da na efikasaniji način podnosi rizike od tržišta osiguranja

Veoma često se za reosiguravajuća društva upotrebljava reč feniks, jer iako su na njih uticali događaji koji su dovodili do velikih gubitaka i ivice opstanka, oni su uspevali da stabilizuju svoje poslovanje.
U ovoj oblasti su zaposleni kadrovi različitih profila (ekonomisti, pravnici, matematičari, inženjeri, seizmolozi, meteorolozi itd.) sve u cilju iznalaženja i unapređenja novih proizvoda i usluga.

Imajući u vidu novije činjenice o pokriću šteta (štete za teroristički napad 11. septembra 2001. u SAD i uragana Katrina, Wilma i Rita su sa oko 50% pokrivene od strane reosiguravajućih društava) može se zaključiti da će reosiguranje u doglednoj budućnosti sigurno biti dominantni oblik upravljanja rizikom osiguravajućih društava.

Tokom pisanja rada sam naišla na citat (nepoznatog autora) koji na jednostavan način objašnjava generalni značaj osiguranja i reosiguranja uopšte.
“Subjekt se mora osigurati, jer se tako neće izložiti velikoj opasnosti. Niko nije propao od plaćanja osiguranja, dok su, naprotiv, mnogi propali jer se nisu na vreme osigurali.“

Pojmovi iz verovatnoće i stohastičke analize

U ovom delu se podsećamo određenih definicija i teorema iz teorije verovatnoće i stohastičke analize.

Osnovni pojmovi iz teorije verovatnoće

Definicija V1. Podskup $\mathcal{F}$ partitivnog skupa $P(X)$ sa osobinama je σ- algebra nad Ω ako važi sledeće:

(i) $X \in \mathcal{F}$

(ii) $X \in \mathcal{F} \Longrightarrow \Omega \backslash X \in \mathcal{F}$

(iii) $A_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$.

Uređeni par $(X, \mathcal{F})$ sa prethodnim osobinama je merljiv prostor. Elementi skupa $\mathcal{F}$ su merljivi skupovi.

Definicija V2. Borelova σ-algebra je najmanja σ-algebra koja sadrži zatvorene skupove proizvoljnog topološkog prostora X.

Borelova σ-algebra na skupu realnih brojeva $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sadrži sve skupove koji se dobijaju kao konačne ili prebrojive unije ili preseci familije intervala $[a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, kao i skupove koji se dobijaju uzimanjem komplemenata.

Definicija V3. Neka je $(X, \mathcal{F})$ merljiv prostor i neka je dat niz disjunktnih skupova $A_1, A_2, \ldots$ iz $\mathcal{F}$. Mera je funkcija $\mu: A \to [0, \infty]$ takva da $\forall\ i \neq j$ važi

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Prostor verovatnoća je uređena trojka $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Ako je ispunjen uslov $\mu(X) < \infty$ onda je μ konačna mera, a ako važi $\mu(X) = 1$ tada je u pitanju prostor verovatnoća koji se najčešće označava sa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Dok se mera sa ovakvom osobinom naziva mera verovatnoće.

Prostor verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prikazuje slučajan eksperiment ili kolekciju eksperimenata koje želimo da analiziramo.

- Skup Ω je skup svih mogućih ishoda datog eksperimenta ili skup elementarnih događaja, gde ishode označavamo sa $\omega \in \Omega$.
- $\mathcal{F}$ sadrži sve moguće događaje i predstavlja sve informacije iz prostora verovatnoće. Merljivi skupovi iz $\mathcal{F}$ se nazivaju događajima
- P je mera verovatnoće.

Definicija V4. Uslovno očekivanje slučajne promenjive X iz prostora $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ za datu σ-algebru $\mathcal{H}$ je skoro sigurno jedinstveno određena $\mathcal{H}$-merljiva slučajna promenljiva $E[X|\mathcal{H}]$ za koju važi

$$\int_A E[X|\mathcal{H}]dP = \int_A XdP, \text{ za svako } A \in \mathcal{H}.$$

Propozicija V5. Uslovno očekivanje ima sledeće osobine:

(i) $E[aX + bY|\mathcal{H}] = aE[X|\mathcal{H}] + bE[Y|\mathcal{H}]$

(ii) $E\big[E[X|\mathcal{H}]\big] = E[X]$

(iii) $E[XY|\mathcal{H}] = XE[Y|\mathcal{H}]$, ukoliko je X $\mathcal{H}$-merljivo

(iv) $E[X|\mathcal{H}] = E[X]$, ukoliko je X nezavisno od $\mathcal{H}$

(v) $E[E[X|\mathcal{H}]|G] = E[X|G]$ za $G \subset \mathcal{H}$.

U finansijskoj i aktuarskoj matematici se često javlja potreba za promenom mere verovatnoće. To se može pokazati veoma korisnim, zato dajemo pregled osnovnih definicija i teorema koje omogućavaju prelazak sa jedne na drugu meru.

Definicija V6. Dve mere verovatnoće su P i Q definisane nad istim prostorom verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F})$ su ekvivalentne, ako važi $P(A) = 0 \Leftrightarrow Q(A) = 0$, za sve $A \in \mathcal{F}$.

Teorema V7. ***(Radon - Nikodym)***
Ako su P i Q dve ekvivalentne mere verovatnoće nad prostorom $(\Omega, \mathcal{F})$, onda postoji nenegativna slučajna promenljiva Z takva da važi

$$Q(A) = \int_A ZdP, \forall\, A \in \mathcal{F},$$

gde je Z Radon-Nikodymov izvod od Q u odnosu na P. Iz prethodne jednakosti sledi da za svaku slučajnu promenljivu X iz prostora $(\Omega, \mathcal{F})$ važi sledeće

$$E^Q[X] = E^P\left[X\frac{dQ}{dP}\right].$$

Osnovni pojmovi iz stohastičke analize

Definicija S1. Filtracija na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je familija σ-algebri $\{\mathcal{F}_t : t \in [0, T]\}$ koja ispunjava uslov

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F} \text{ za sve } 0 \leq s < t < \infty.$$

Pa zaključujemo da σ-algebra $\mathcal{F}_t$ predstavlja sve dostupne informacije do trenutka t, uključujući i t. $\mathcal{F}_s$ ne sadrži više informacija od $\mathcal{F}_t$, što znači da nam je dostupno više informacija kako vreme prolazi.
Uopšteno, stohastički proces predstavlja familiju slučajnih promenljivih definisanih na istom prostoru verovatnoće.

Definicija S2. Realan stohastički proces, $\{S_t : t \in \Theta\}$, je familija realnih slučajnih promenljivih definisanih na istom prostoru verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gde je $\Theta = [0, T]$ ili $\Theta = \mathbb{R}^+$ parametarski skup.

U radu koristimo parametarski skup $\{0,1, \dots, T\}$, što predstavlja vreme od početnog trenutka do trenutka dospeća ugovora.

Definicija S3. Za proces $\{S_t : t \in [0, T]\}$ kažemo da je adaptiran filtraciji $\{\mathcal{F}_t : t \in [0, T]\}$ ako je za svako $t \in [0, T]$ slučajna promenljiva S_t je $\mathcal{F}_t$- merljiva, tj. $\sigma(S_t) \subseteq \mathcal{F}_t$.

Ovo znači da je cena aktive u trenutku t sadržana kao deo informacija $\mathcal{F}_t$ koje su nam dostupne u trenutku t.

Definicija S4. Neka su dati:
- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća
- filtracija $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0,T]}$ na $\mathcal{F}$
- stohastički proces $\{M_t\}_{t \in [0,T]}$

Proces $\{M_t\}_{t \in [0,T]}$ je martingal ako važi:

(i) Slučajna promenljiva M_t je $\mathcal{F}_t$-merljiva ili adaptirana filtraciji $\mathcal{F}_t$, drugim rečima ako imamo informacije o $\mathcal{F}_t$, onda nam je vrednost za M_t poznata.

(ii) Za svako $s > t$, $E[M_s | \mathcal{F}_t] = M_t$, tj. prognoza za buduću vrednost procesa ako nam je data istotija do trenutka t, jednaka je vrednosti u tom trenutku t.

Ovo je matematički izraz koji zapravo označava fer igru. Prema definiciji, za martingal se očekuje da ostane na trenutnom nivou. Ovo možemo opisati finansijkim rečnikom. Ako je $\{M_t\}_{t \in [0,T]}$ proces bogatstva jednog investitora, onda znači da je očekivanje njegovog budućeg bogatstva jednako trenutnom bogatstvu.

Osnovni pojmovi i teoreme

$\mathcal{R}_\alpha$	skup regularno varirajućih funkcija sa indeksom α
$\bar{F}$	rep funkcije raspodele F : $\bar{F} = 1 - F$
$F^{\leftarrow}(p)$	p – kvantil od F
G_α	α – stabilna raspodela
Γ	gama funkcija $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$
H	raspodela ekstremnih vrednosti
iid promenljive	nezavisne promenljive sa identičnom raspodelom
s.s.	skoro sigurno
$\overset{P}{\rightarrow}$	teži u verovatnoći
$\overset{d}{\rightarrow}$	teži u raspodeli
$\triangleq$	jednako u raspodeli
$\asymp$	$a(x) \asymp b(x)$ kada $x \to x_0$ znači da je $0 < liminf_{x\to x_0} \frac{a(x)}{b(x)} \leq limsup_{x\to x_0} \frac{a(x)}{b(x)} < \infty$
$\mathbb{C}$	prostor neprekidnih funkcija
$\mathbb{D}$	prostor cadlag funkcija
$[x]$	ceo deo od x

Definicija D0 ($\mathcal{R}_\alpha$)
Merljiva funkcija $U: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ je regularno varirajuća u ∞ sa indeksom $\alpha \in \mathbb{R}$ (u zapisu $U \in \mathcal{R}_\alpha$), ako za $x > 0$ važi

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(tx)}{U(t)} = x^\alpha.$$

Index α nazivamo eksponent varijacije.
Ako $\alpha = 0$, onda je U sporo varirajuća funkcija. Sporo varirajuće funkcije se uglavnom obeležavaju sa $L(x)$. Ako $U \in \mathcal{R}_\alpha$, onda $\frac{U(x)}{x^\alpha} \in \mathcal{R}_0$ i ako stavimo

$$L(x) = \frac{U(x)}{x^\alpha}, \qquad x > 0,$$

vidimo da se α-varirajuća funkcija uvek može predstaviti u obliku $x^\alpha L(x)$.
Grubo govoreći, regularno varirajuće funkcije su funkcije koje se asimptotski ponašaju kao stepene funkcije.

Primedba 1. Definisali smo regularnu varijaciju u beskonačnosti, tj. za $t \to \infty$. Slično možemo definisati regularnu varijaciju u nuli zamenom $t \to \infty$ sa $t \to 0$, ili u bilo kojoj pozitivno tački α. Zaista, regularna varijacija funkcije U u tački $x_0 > 0$ se definiše kao regularna varijacija funkcije $U_{x_0}(x) = U\left(x_0 - \frac{1}{x}\right)$ u beskonačnosti.

U slučaju da treba napraviti razliku, možemo govoriti o regularnoj varijaciji u fiksnoj tački x_0. Kadgod je na osnovu konteksta jasno značenje, koristićemo pojam regularna varijacija.

Primedba 2. Uslov $\lim_{t\to\infty}\frac{U(tx)}{U(t)} = x^{\alpha}\,, x > 0$ se može oslabiti na više načina, najvažnije je specifikovati samo da granična vrednost postoji i da je pozitivna, ne mora se zahtevati da ima funkcionalni oblik x^{α}. Zaista, ako u navedenom uslovu pretpostavimo da granična vrednost postoji za sve $x > 0$ i da je jednaka $\chi(x)$, onda direktno sledi da

$$\chi(sx) = \chi(s)\chi(x), \qquad x > 0,$$

prema tome, $\chi(x) = x^{\alpha}$ za neko $\alpha \in \mathbb{R}$.

Primedba 3. Tipični primeri sporo varirajućih funkcija su pozitivne konstante ili funkcije koje konvergiraju ka pozitivnoj konstanti, logaritmi i iterativni logaritmi.

Teorema D1 ***(Konvergencija ka tipskim promenljivama)***
Neka su $A, B, A_1, A_2, \ldots$ slučajne promenljive i $b_n > 0$, $\beta_n > 0$ i $a_n, \alpha_n \in \mathbb{R}$ konstante. Pretpostavimo da je

$$b_n^{-1}(A_n - a_n) \xrightarrow{d} A.$$

Tada relacija

$$\beta_n^{-1}(A_n - \alpha_n) \xrightarrow{d} B \tag{D.1}$$

važi ako i samo ako

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{\beta_n} = b \in [0,\infty), \quad \lim_{n\to\infty}\frac{(a_n - \alpha_n)}{\beta_n} = a \in \mathbb{R}. \tag{D.2}$$

Ako (D.1) važi, onda je $B \triangleq bA + a$ i a, b su jedinstvene konstante za koje ovo važi.
Ako važi (D.1), A je nedegerativno ako i samo ako je $b > 0$ i tada A i B pripadaju istom tipu, tj. važi $B \triangleq bA + a$.

Tvrđenje D2 ***(Regularna varijacija za repove funkcija raspodele)***
Pretpostavimo da je F funkcija raspodele takva da je $F(x) < 1$ za svako $x \geq 0$.

(a) Ako nizovi (a_n) i (x_n) zadovoljavaju $\frac{a_n}{a_{n+1}} \to 1$, $x_n \to \infty$ i ako za neku realnu funkciju g i svako λ iz gustog podskupa $(0,\infty)$, važi
$\lim_{n\to\infty} a_n\,\bar{F}(\lambda x_n) = g(\lambda) \in (0,\infty)$
onda $g(\lambda) = \lambda^{-\alpha}$ za neko $\alpha \geq 0$ i $\bar{F}$ je regularno varirajuće.

(b) Neka je F apsolutno neprekidna sa gustinom f takvom da za neko $\alpha > 0$ važi

$$\lim_{x\to\infty}\frac{xf(x)}{\bar{F}(x)} = \alpha$$

onda je $f \in \mathcal{R}_{-1-\alpha}$ i $\bar{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$.

(c) Neka je $f \in \mathcal{R}_{-1-\alpha}$ za neko $\alpha > 0$. Tada je

$$\lim_{x\to\infty}\frac{xf(x)}{\bar{F}(x)} = \alpha$$

što važi i ako je $\bar{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ za neko $\alpha > 0$ i gustina f je monotona na (z, ∞) za neko $z \in \mathbb{R}$.

(d) Neka je X nenegativna slučajna promenljiva sa raspodelom repa $\bar{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ za neko $\alpha > 0$. Tada
$E[x^{\beta}] < \infty$ ako je $\beta < \alpha$,
$E[x^{\beta}] = \infty$ ako je $\alpha < \beta$.

(e) Neka je $\bar{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ za neko $\alpha > 0$, $\beta \geq \alpha$. Tada

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\beta}\bar{F}(x)}{\int_0^x y^{\beta} dF(y)} = \frac{\beta-\alpha}{\alpha}.$$

Obrnuto važi u slučaju da je $\beta > \alpha$.
Ako je $\beta = \alpha$, možemo zaključiti da $\bar{F}(x) = o(x^{-\alpha}L(x))$ za neko $L \in \mathcal{R}_0$.

(f) Naredne dve relacije su ekvivalentne:
(1) $\int_0^x y^2 dF(y) \in \mathcal{R}_0$
(2) $\bar{F}(x) = o(x^{-2}\int_0^x y^2 dF(y)), x \to \infty$

Definicija D3 ***(Regularno varirajući nizovi)***
Niz pozitivnih brojeva (c_n) je regularno varirajući sa indeksom $\alpha \in \mathbb{R}$ ako

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{[tn]}}{c_n} = t^{\alpha}, \qquad t > 0.$$

Definicija D4 ***(Mrežesta funkcija)***
Funkcija raspodele F (X) je mrežasta ako postoje $d > 0$ i $a \in \mathbb{R}$ tako da

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} P(X = kd + a) = 1$$

Najveće moguće d se naziva maksimalni korak raspodele od F.

Definicija D5 ***(Cramer – Lundbergov model i proces obnavljanja)***
Cramer-Lundbergov model je je dat sledećim uslovima:

(a) Proces iznosa zahteva:
Iznosi zahteva $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ su pozitivne iid slučajne promenljive koje imaju uobičajenu ne-mrežastu funkciju raspodele F, konačno očekivanje $\mu = E[X_1]$ i varijansu $\sigma^2 = D[X_1] \leq \infty$

(b) Vremena zahteva:
Zahtevi za odštetu se javljaju u slučajnim vremenskim trenucima

$$0 < T_1 < T_2 < \cdots \text{s.s.}$$

(c) Proces pristizanja zahteva:
Broj zahteva za odštetu u vremenskom intervalu $[0, t]$ označavamo sa

$$N(t) = sup\{n \geq 1 : T_n \leq t\}, t \geq 0,$$

gde je $sup\emptyset = 0$

(d) Vremena između pristizanja zahteva za odštetu:

$$Y_1 = T_1 \, , \, Y_k = T_k - T_{k-1} \text{ za } k = 2,3, \dots$$

su iid promenljive sa eksponencijalnom raspodelom i konačnim očekivanjem $E[Y_1] = 1/\lambda$

(e) Nizovi (X_k) i (Y_k) su međusobno nezavisni

Primedba 1. Posledica ove definicije je da je $N(t)$ homogen Poissonov proces sa intenzitetom $\lambda > 0$.
Zbog toga važi

$$P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \, , \, k = 0,1,2, \dots$$

Model obnavljanja je dat sa (a)-(c), (e) i

(d') Vremena između pristizanja zahteva za odštetu:

$$Y_1 = T_1 \, , \, Y_k = T_k - T_{k-1} \text{ za } k = 2,3, \dots$$

su iid promenljive sa konačnim očekivanjem $E[Y_1] = 1/\lambda$

Primedba 2. Model obnavljanja je generalizacija Cramer - Lundbergov modela koji omogućava procese prebrajanja.

Definicija D6 ***(Lundbergov eksponent)***
Za dat iznos šteta koji ima funkcija raspodele, konstanta $\nu > 0$ koja zadovoljava

$$\int_0^\infty e^{\nu x} \, \bar{F}(x) dx = \frac{c}{\lambda}$$

se naziva Lundbergov eksponent ili koeficijent prilagođavanja posmatranog procesa rizika.

Definicija D7 ***(Hermiteov polinom)***
Probabilistički Hermiteov polinom je definisan kao

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}$$

Definicija D8 ***(Cadlag funkcija)***
Cadlag funkcija je funkcija koja je neprekidna zdesna i postoje (konačni) limesi sa leve strane u svakoj tački.

Teorema D9 ***(Centralna granična teorema)***
Neka je (X_n) iid sa matematičkim očekivanjem $E[X_1] = m$ i konačnom disperzijom $D[X_1] = \sigma^2 > 0$. Ako je $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, onda svako $x \in \mathbb{R}$, kad $n \to \infty$ važi

$$P\left(\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \le x\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

Ovo tvrđenje se može formulisati i kao:

$$\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{D(S_n)}} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

Definicija D10 ***(Nepotpuna gama funkcija)***
Nepotpuna gama funkcija ima oblik

$$\Gamma(a,x) = \int_x^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$$

gde je a kompleksan broj čiji je realan deo veći od nule.

Teorema D11 ***(Karamatina teorema o ograničenoj funkciji)***
Neka je $L \in \mathcal{R}_0$ lokalno ograničena na $[x_0, \infty)$ za neko $x_0 \geq 0$. Tada:

(a) za $\alpha > -1$ važi

$$\int_{x_0}^{x} t^{\alpha} L(t) dt \sim \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)} L(x), \mathrm{x} \to \infty$$

(b) za $\alpha < -1$ važi

$$\int_{x}^{\infty} t^{\alpha} L(t) dt \sim -\frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)} L(x), x \to \infty.$$

Primedba. Za $\alpha = -1$ važi

$$\frac{1}{L(x)} \int_{x_0}^{x} \frac{L(t)}{t} dt \to \infty, x \to \infty \ i \int_{x_0}^{x} \frac{L(t)}{t} dt \in \mathcal{R}_0,$$

Ako $\int_{x_0}^{\infty} \frac{L(t)}{t} dt < \infty$, onda važi $\frac{1}{L(x)} \int_{x}^{\infty} \frac{L(t)}{t} dt \to \infty, x \to \infty$ i $\int_{x}^{\infty} \frac{L(t)}{t} dt \in \mathcal{R}_0$.

Napomena. Rezultat ove Karamatine teoreme se često primenjuje - integrali regularno varirajućih funkcija su i sami regularno varirajući, ili preciznije sporo varirajuću funkciju možemo izvući ispred integrala.

Teorema D12 ***(Slaba konvergencija tačkastih procesa prekoračenja (point processes of exceedances), iid slučaj i slučajni indeksi)***
Neka su $(\widetilde{N}_n)$ tačkasti procesi prekoračenja preko praga niza niza(u_n) definisani

$$\widetilde{N}_n(\cdot) = \sum_{i=1}^{N'(n)} \varepsilon_{n^{-1}T_i}(\cdot) I_{\{X_i > u_n\}}$$

Pretpostavimo da (u_n) zadovoljava

$$n\bar{F}(u_n) = E \sum_{i=1}^{n} I_{\{X_i > u_n\}} \to \tau$$

za neko $\tau \in (0, \infty)$. Štaviše, neka je $T_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ obnavljajućeg procesa prebrajanja na $[0, \infty)$ sa očekivanjem $E[Y_1] = \lambda^{-1} \in \mathbb{R}_+$.
Onda je važi $\widetilde{N}_n \to N$ u $M_p(E)$, gde je N homogeni Poissonov proces na $E = (0, 1]$ sa intenzitetom $\tau\lambda$.

Napomena. $N'(n) = card\{i: T_i < n\}$ je obnavljajući proces prebrajanja. Prostor E je snabdeven Borelovom σ-algebrom ε skupa. N kao tačkast proces za tačkaste mere pretpostavlja da su vrednosti, pa $M_p(E)$ označava prostor svih tačkastih mera na E.

Definicija D13 *(Hillova ocena)*
Pretpostavimo da su $X_1, \dots, X_n$ iid slučajne promenljive sa funkcijom raspodele $F \in MDA(\Phi_\alpha), \alpha > 0$,onda ocena za α je dobijena pomoću Hilove ocene

$$\hat{\alpha}^{(H)} = \hat{\alpha}_{k,n}^{(H)} = \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \ln X_{j,n} - \ln X_{k,n} \right)^{-1}$$

gde $k = k(n) \to \infty$.

Teorema D14 *(Teorema o neprekidnom preslikavanju)*
Neka je h merljivo preslikavanje iz metričkog prostora K u metrički prostor K' (oba prostora su snabdevena Borelovom σ-algebrom generisanom otvorenim skupovima). Neka je A_n niz slučajnih promenljivih sa vrednostima u prostoru K. Pretpostavimo da $A_n \xrightarrow{d} A$ u K i sa P_A označimo raspodelu od A. Tada $h(A_n) \xrightarrow{d} h(A)$ u prostoru K', pod pretpostavkom da skup tačaka prekida funkcije h ima P_A-meru nula.

Teorema D15
Pretpostavimo da je $\left((X_n, Y_n)\right)$ niz iid slučajnih vektora i da je $\sigma^2 < \infty$ i $\sigma_Y^2 < \infty$.
Tada

$$(D[X - \mu\lambda Y]\lambda T)^{-1/2}(S(t) - \mu\lambda t) \xrightarrow{d} \phi$$

gde ϕ označava standardnu normalnu raspodelu.
Specijalno, ako su (X_n) i (Y_n) nezavisni, onda

$$\left((\sigma^2 + (\mu\lambda\sigma_Y)^2)\lambda t\right)^{-1/2}(S(t) - \mu\lambda t) \xrightarrow{d} \phi.$$

1.Subeksponencijalnost

Teorija subeksponencijalnih raspodela je prilično opširna, tako da ćemo se zadovoljiti pregledom dela teorije koji se konkretno upotebljava u teoriji rizika i generalno u osiguranju i finansijama.

1.1. Neki preliminarni rezultati

Započinjemo naše razmatranje osobinom zatvorenosti regularno varirajućih funkcija raspodela u odnosu na konvoluciju.

Lema 1.1.1 ***(Klasa raspodela sa regularno varirajućim repovima je zatvorena u odnosu na konvoluciju)***
Ako su F_1, F_2 dve funkcije raspodela takve da

$$\bar{F}_I(x) = x^{-\alpha} L_i(x) \text{ za sve } \alpha \geq 0 \text{ i } L_i \in \mathcal{R}_0, i = 1,2,...$$

onda konvolucija $G = F_1 * F_2$ ima regularno varirajući rep takav da

$$\bar{G}(x) \sim x^{-\alpha}\big(L_1(x) + L_2(x)\big), \quad x \to \infty.$$

Posledica 1.1.2 Ako je $\bar{F}(x) = x^{-\alpha} L(x)$ za sve $\alpha \geq 0$ i $L \in \mathcal{R}_0$, onda za sve $n \geq 1$ važi

$$\overline{F^{n*}}(x) \sim n\bar{F}(x), \qquad x \to \infty.$$

Sada pretpostavimo da su $X_1, X_2, \dots, X_n$ iid sa funkcijama raspodele F kao i u prethodnoj posledici. Označimo parcijalnu sumu od $X_1, X_2, \dots, X_n$ sa $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ i njihov maksimum sa $M_n = max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$.
Tada za sve $n \geq 2$

$$P(S_n > x) = \overline{F^{n*}}(x),$$

$$P(M_n > x) = \overline{F^n}(x) = \bar{F}(x) \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} F^k(x) \sim n\bar{F}(x), \quad x \to \infty. \tag{1.1.1}$$

Prema tome, koristeći prethodni zapis, Posledica 1.1.2 može biti preformulisana u

$$\bar{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha}, \ \ \alpha > 0 \quad \Rightarrow \quad P(S_n > x) \sim P(M_n > x), x \to \infty.$$

Ovo implicira da je, za funkcije raspodele sa regularno varirajućim repovima, rep funkcije raspodele sume S_n uglavnom određen repom funkcije raspodele maksimuma M_n. To je upravo jedna od intuitivnih predstava o raspodelama sa debelim repom ili velikim iznosima šteta.

„Pod pretpostavkom regularne varijacije, rep maksimuma slučajnih promenljivih određuje rep sume tih slučajnih promenljivih“.

Izrazi koji slede predstavljaju ključan alat za Cramer-Lundbergovom procenu verovatnoće propasti pod pretpostavkom velikih iznosa šteta.

$$\psi(u) = \frac{\rho}{\rho+1}\sum_{n=0}^{\infty}(1+\rho)^{-n}\overline{F_I^{n*}}(u), \quad u \geq 0,$$

gde je $F_I(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x \bar{F}(y)\,dy$ integral repa raspodele.

Pod uslovom $\overline{F_I} \in \mathbb{R}_{-\alpha}$ za neko $\alpha \geq 0$, možemo se nadati da važi sledeća asimptotska procena:

$$\frac{\psi(u)}{\overline{F_I(u)}} = \frac{\rho}{1+\rho}\sum_{n=0}^{\infty}(1+\rho)^{-n}\frac{\overline{F_I^{n*}}(u)}{\overline{F_I(u)}} \tag{1.1.2}$$

$$\to \frac{\rho}{1+\rho}\sum_{n=0}^{\infty}(1+\rho)^{-n}n = \frac{1}{\rho}, \quad u \to \infty \tag{1.1.3}$$

Ključni problem koji ostaje otvoren u prethodnom izračunavanju je korak iz (1.1.2) u (1.1.3). Da li možemo izvršiti „bezbednu“ razmenu graničnih vrednosti i suma? Odgovor je potvrdan. Zbog toga je (1.1.3) prirodna procena propasti kadgod je F_I regularno varirajuća, a slična procena važi za mnogo širu klasu funkcija raspodele. Ovom prilikom, (1.1.3) se može preformulisati na sledeći način:

Za raspodele iznosa šteta sa regularno varirajućim repovima, verovatnoća konačne propasti $\psi(u)$ uz veliki uloženi početni kapital u je potpuno određena repom $\bar{F}(y)$ raspodele iznosa štete za velike vrednosti y, tj.

$$\psi(u) \sim \frac{1}{\rho\mu}\int_0^{\infty}\bar{F}(y)dy, \qquad u \to \infty.$$

1.1.1 Cramer-Lundbergova teorija za subeksponencijalne raspodele

Kao što je pre bilo navedeno, ključni korak u izvođenju relacije (1.1.3) je bio u dokazivanju osobine $\overline{F^{n*}}(x) \sim n\bar{F}(x)$, za $x \to \infty$ i $n \geq 2$. To nas prirodno dovodi do klase funkcija raspodele koja omogućava veoma opštu teoriju procene propasti za velike iznosa šteta. Glavni rezultat u ovom okruženju je Teorema 1.1.1.4 koju ćemo ubrzo navesti.

Definicija 1.1.1.1 ***(Subeksponencijalna funkcija)***
Funkcija raspodele F sa nosačem $(0, \infty)$ je subeksponencijalna ako za sve $n \geq 2$ važi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{F^{n*}}(x)}{\bar{F}(x)} = n. \tag{1.1.1.1}$$

Klasu subeksponencijalnih raspodela ćemo označavati sa S.

Primedba 1. Relacija (1.1.1.1) daje sledeću intuitivnu karakterizaciju subeksponencijalnosti (videti 1.1.1):

$$\text{Za sve } n \geq 2,\ P(S_n > x) \sim P(M_n > x), \quad x \to \infty \tag{1.1.1.2}$$

Lema 1.1.1.2 ***(Dovoljan uslov za subeksponencijalnost)***
Ako $\lim_{x\to\infty} sup \frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\bar{F}(x)} \leq 2$, onda $F \in S$.

Primedba 1. Uslov u Lemi 1.1.1.2 je trivijalno potreban za sve $F \in S$.
Primedba 2. Na početku gornjeg dokaza koristili smo činjenicu da za funkciju raspodele F pozitivne slučajne promenljive uvek važi $\lim_{x\to\infty} inf \frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\bar{F}(x)} \geq 2$.
Lako je pokazati da u ovom slučaju za sve $n \geq 2$ važi

$$\lim_{n\to\infty} inf \frac{\overline{F^{n*}}(x)}{\bar{F}(x)} \geq n.$$

Zaista, važi $S_n \geq M_n$, što povlači $\overline{F^{n*}}(x) = P(S_n > x) \geq P(M_n > x) = \overline{F^n}(x)$. Zbog toga $\lim_{n\to\infty} inf \frac{\overline{F^{n*}}(x)}{\bar{F}(x)} \geq \lim_{n\to\infty} \frac{\overline{F^n}(n)}{\bar{F}(x)} = n.$

Sledeća lema je neophodna ako želimo izvesti (1.1.3) iz (1.1.2) za subeksponencijalnu funkciju F_I.

Lema 1.1.1.3 ***(Neke osnovne osobine subeksponencijalnih funkcija)***

(a) Ako $F \in S$, onda uniformno na kompaktnim y-skupovima na $(0, \infty)$ važi
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)} = 1. \tag{1.1.1.3}$$

(b) Ako važi (1.1.1.3), onda za sve $\varepsilon > 0$ važi
$$e^{\varepsilon x}\bar{F}(x) \to \infty, x \to \infty.$$

(c) Ako $F \in S$, onda za dato $\varepsilon > 0$ postoji konačna konstanta K takva da za sve $n \geq 2$ važi
$$\frac{\overline{F^{n*}}(x)}{\bar{F}(x)} \leq K(1+\varepsilon)^n,\ x \geq 0. \tag{1.1.1.4}$$

Primedba 1. Lema 1.1.1.3 pod (b) opravdava naziv subeksponencijalna za $F \in S$. Zaista, $\bar{F}(x)$ opada prema nuli sporije od bilo koje eksponencijalne funkcije $e^{-\varepsilon x}$ za sve $\varepsilon > 0$. Štaviše, pošto za bilo koje $\varepsilon > 0$

$$\int_y^\infty e^{\varepsilon x} dF(x) \geq e^{\varepsilon y}\bar{F}(y),\ \ y \geq 0,$$

Podsetimo se da za funkciju raspodele F sa konačnim očekivanjem μ važi

$$F_I(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x \bar{F}(y)dy.$$

Sledi još jedna značajna posledica gornjeg rezultata.

Teorema 1.1.1.4 ***(Cramer-Lundbergova teorema za velike iznose šteta, I)***
Posmatrajmo Cramer-Lundbergov model uz uslov neto profita $\rho > 0$ i $F_I \in S$. Tada

$$\psi(u) \sim \frac{1}{\rho}\bar{F}_I(u),\ u \to \infty. \tag{1.1.1.5}$$

Teorema 1.1.1.4 završava naš zadatak pronalaženja Cramer-Lundbergovog oblika procene u slučaju raspodela sa debelim repom.

Primer 1.1 ***(Regularna varijacija za složene Poissonove funkcije raspodela)***
Radi primenljivosti u osiguranju, ograničavamo pomenutu funkcionelu T da bude složena Poissonova raspodela, tj. pretpostavljamo da za neko $\lambda > 0$ važi

$$G(x) = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}F^{k*}(x),\ x \geq 0, \tag{1.1.1.6}$$

a to je funkcija raspodele $\sum_{i=1}^{N} X_i$, gde su X_i iid slučajne promenljive sa funkcijom raspodele F, nezavisne od Poissonove slučajne promenljive N.

Primenjujući Laplace-Stieltjesove transformacije u (1.1.1.6), dobijamo $\hat{g}(s) = e^{-\lambda\left(1-\hat{f}(s)\right)}$, $s \geq 0$, i samim tim

$$1 - \hat{g}(s) \sim -\lambda\left(1 - \hat{f}(s)\right),\ s \to 0. \tag{1.1.1.7}$$

Klasu funkcija regularno varirajućih u beskonačnosti obeležavamo sa $\mathcal{R}^{\infty}$, a klasu regularno varirajućih funkcija u nuli sa $\mathcal{R}^0$. Za $\alpha \in [0,1)$ sledi

$\bar{G} \in \mathcal{R}^{\infty}_{-\alpha} \rightleftarrows 1 - \hat{g} \in \mathcal{R}^0_{\alpha} \to \lim_{x\to\infty}\frac{1-\hat{g}(1/x)}{\bar{G}(x)} = \Gamma(1-\alpha)$

$\rightleftarrows 1 - \hat{f} \in \mathcal{R}^0_{\alpha} \to \lim_{x\to\infty}\frac{1-\hat{g}(1/x)}{1-\hat{f}(1/x)} = \lambda$

$\rightleftarrows \bar{F} \in \mathcal{R}^0_{-\lambda} \to \lim_{x\to\infty}\frac{1-\hat{g}(1/x)}{\bar{F}(x)} = \Gamma(1-\alpha).$

Konačno, dobijamo

$$\bar{F} \in \mathcal{R}^{\infty}_{-\lambda} \rightleftarrows \bar{G} \in \mathcal{R}^{\infty}_{-\lambda} \to \lim_{x\to\infty}\frac{\bar{G}(x)}{\bar{F}(x)} = \lambda.$$

Prepozicija 1.1.1.5 ***(Zatvorenost klase S u odnosu na konvolucioni koren)***
Ako je $F^{n*} \in S$ za neki prirodan broj n, onda je $F \in S$.

Definicija 1.1.1.6 ***(Složeni Poissonov proces)***
Neka je Λ slučajna promenljiva sa $P(\Lambda > 0) = 1$ i neka je $N = \left(N(t)\right)_{t\geq 0}$ homogeni Poissonov proces sa intenzitetom 1, nezavisan od Λ. Proces $\left(N(\lambda t)\right)_{t\geq 0}$ je složen Poissonov proces.

Slučajna promenljiva Λ u gornjoj definiciji se može interpretirati kao slučajna promenljiva u vremenu. Procesi opštiji od složenog Poissonovog procesa, kao Coxovi procesi, su dugo bili alati aktuara. Složeni Poissonovi procesi se susreću u svakoj standardnoj literaturi iz teorije rizika. Homogen Poissonov proces sa intenzitetom $\lambda > 0$ je specijalan slučaj složenog Poissonovog procesa za degenerisanu slučajnu promenljivu, tj. za Poissonovu slučajnu promenljivu za koju važi $P(\Lambda = \lambda) = 1$.

Teorema 1.1.1.7 ***(Subeksponencijalnost i složene Poissonove funkcije raspodela)***
Neka su F, G i λ povezani na osnovu relacije (1.1.1.6) tada su sledeće tvrdnje ekvivalentne:

(a) $G \in S$,

(b) $F \in S$,

(c) $\lim_{x\to\infty} \frac{\bar{G}(x)}{\bar{F}(x)} = \lambda$.

Teorema 1.1.1.8 ***(Subeksponencijalnost i složene funkcije raspodela)***
Neka je (p_n) mera verovatnoće na N_0 takva da za neko $\varepsilon > 0$ važi $\sum_{n=0}^{\infty} p_n(1+\varepsilon)^n < \infty$. Stavimo $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n F^{n*}(x)\,, x \geq 0$.

(a) Ako $F \in S$, onda $G \in S$ i

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\bar{G}(x)}{\bar{F}(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} n\, p_n. \tag{1.1.1.7}$$

(b) Obrnuto, ako važi (1.1.1.7) i ako postoji $l \geq 2$ takvo da je $p_l > 0$, onda $F \in S$.

Posledica 1.1.1.9 ***(Subeksponencijalnost i složene geometrijske funkcije raspodela)*** Neka $0 < \alpha < 1$ i neka su F i G povezane relacijom $G(x) = (1-\alpha)\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n F^{n*}(x)$. Tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:

(a) $F \in S$,

(b) $G \in S$,

(c) $\lim_{x\to\infty} \frac{\bar{G}(x)}{\bar{F}(x)} = \frac{\alpha}{1-\alpha}$.

Sa matematičkog stanovišta, rezultat Teoreme 1.1.1.4 se može znatno popraviti.
Posledica 1.1.1.9 dovodi do sledećeg rezultata.

Teorema 1.1.1.10 ***(Cramer-Lundbergova teorema za velike iznose šteta II)***
Posmatrajmo Cramer-Lundbergov model uz uslov neto profita $\rho > 0$. Tada su ekvivalentna sledeća tvrđenja:

(a) $F_I \in S$,

(b) $1 - \psi(u) \in S$,

(c) $\lim_{u\to\infty} \frac{\psi(u)}{\bar{F}_I(u)} = \frac{1}{\rho}$.

Stoga, procena (1.1.1.5) je moguća jedino pod pretpostavkom $F_I \in S$. U slučaju Cramer-Lundbergove teorije, S je, dakle, prirodna klasa što se tiče procena propasti kad god je Cramer-Lundbergov uslov narušen.

1.1.2 Ukupan iznos šteta u slučaju subeksponencijalne raspodele

U delu 1.1.1 smo istakli značaj klase S za procenu verovatnoća propasti za velike iznose šteta. Sa stanovišta matematike je značajno da se u Cramer-Lundbergovom modelu $1-\psi(u)$ može izraziti kao složena geometrijska suma data u (1.1.1). Iste metode kao metode korišćene u dokazu Teoreme 1.1.1.4 daju ocenu raspodele ukupnog iznosa šteta za velike iznose šteta.

Zaista, u delu 1.1. smo konstatovali da u Cramer-Lundbergovom modelu za sve $t \geq 0$ važi

$$G_t(x) = P(S(t) \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} F^{n*}(x)\,, \; x \geq 0, \qquad (1.1.2.1)$$

gde je $S(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} X_k$ ukupan (agregatni) iznos šteta nastalih do trenutka t.

Proces nastajanja šteta $(N(t)), t \geq 0$ u (1.1.2.1) je homogen Poissonov proces sa intenzitetom $\lambda = 0$, tako da

$$P(N(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \; n \geq 0. \qquad (1.1.2.2)$$

Istim izračunavanjem koje dovodi do (1.1.2.2) bi se, za uopšten proces nastanka šteta (po pretpostavci nezavisan od procesa iznosa šteta $(X_k)_{k \in N}$), dobila formula

$$G_t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_t(n) F^{n*}(x), \;\; x \geq 0 \qquad (1.1.2.3)$$

gde $p_t(n) = \; P(N(t) = n), n \in \mathbb{N}_0$ definiše meru verovatnoće na $\mathbb{N}_0$.

U slučaju subeksponencijalne funkcije F, isti argument koji je dat u dokazu Teoreme 1.1.1.4 dovodi nas do sledećeg rezultata:

Teorema 1.1.2.1 (***Ukupan iznos šteta u slučaju subeksponencijalne raspodele)***
Posmatrajmo (1.1.2.3) sa $F \in S$, fiksirajmo $t > 0$ i pretpostavimo da $p_t(n)$ ispunjava

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1+\varepsilon)^n \; p_t(n) < \infty \qquad (1.1.2.4)$$

za neko $\varepsilon > 0$. Tada je $G_t \in S$ i

$$\bar{G}_t(x) \sim E[N(t)\bar{F}(x)], \;\; x \to \infty. \qquad (1.1.2.5)$$

Primer 1.2 ***(Ukupan iznos šteta u Cramer-Lundbergovom modelu)***
Neka je $(N(t))_{t \geq 0}$ homogen Poissonov proces sa individualnim verovatnoćama (1.1.2.2).
Tada za sve $F \in S$

$$\bar{G}_t(x) \sim \lambda t \bar{F}(x), \qquad x \to \infty.$$

2. Fluktuacija suma

2.1. Zakon velikih brojeva

Zakon velikih brojeva ima veliki značaj za industriju osiguranja jer omogućava da se naprave dugoročne prognoze iznosa odštetnih zahteva. Naime, ako se podrazumeva da su svi izloženi jednakom riziku, onda što je veći broj osiguranih osoba i dobara to je manji uticaj slučaja. Ovaj zakon ne daje nikakvu prognozu o tome ko će konkretno uložiti odštetni zahtev.

$X_1, X_2, \ldots$ predstavlja niz iid nedegerativnih slučajnih promenljivih, definisan na prostoru verovatnoće $[\Omega, \mathcal{F}, P]$ sa zajedničkom funkcijom raspodele F.
Ukoliko želimo da steknemo grubu ideju o fluktuaciji X_n, zahtevamo konvergenciju niza (X_n). Nažalost, za skoro sve $\omega \in \Omega$, ovaj niz ne konvergira, ali možemo da dobijemo neke informacije o ponašanju sredine od X_n.
Iz tih razloga razmatramo kumulativne sume

$$S_0 = 0, \qquad S_n = X_1 + \cdots + X_n, \;\; n \geq 1$$

i aritmetičke (uzoračke) sredine

$$\bar{X}_n = \frac{S_n}{n}, \quad n \geq 1.$$

Intuitivno, aritmetička sredina bi trebala da ima neku vrstu stabilnosti za dovoljno veliko n, pa će tada inividualne vrednosti X_i imati manje uticaja na $\bar{X}_n$, tj. niz (X_n) se stabilizuje u okolini fiksirane vrednosti (konvergira) kada $n \to \infty$.Ovo zovemo zakon velikih brojeva.

Postoji više teorema o ovom zakonu (Bernoullijev, Chebyshev, Hinchinov zakon velikih brojeva) ali svaka tvrdi isto, da empirijske prosečne vrednosti konvergiraju ka očekivanoj vrednosti. Ove teoreme se često nazivaju zakoni proseka. Obično se dele na slabe i jake zakone, a među njima postoje različiti nivoi opštosti.

Ukoliko pretpostavimo da je $D[X] < \infty$, i sa očekivanjem $E[X] = \mu$, onda matematička formulacija slabog zakona velikih brojeva glasi

$$\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu, \text{ odnosno } \lim_{n\to\infty} P(|\bar{X}_n - \mu| < \varepsilon) = 1, \text{ za } \forall \varepsilon > 0.$$

ili

$$\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu, \text{ odnosno } \lim_{n\to\infty} P(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) = 0, \text{ za } \forall \varepsilon > 0.$$

To znači da se uzoračka sredina neće značajno udaljiti od sredine u raspodeli (teži ka 1), kako veličina uzorka teži ka beskonačnosti.

Slab zakon se ne odnosi na beskonačan niz realizacija neke slučajne promenljive već samo tvrdi da će se „balansirani“ nizovi javljati sa većom verovatnoćom ako posmatramo duže nizove.

Jak zakon velikih brojeva implicira slab zakon, iz razloga što ako slučajne promenljive konvergiraju skoro sigurno (jače) one konvergiraju i u verovatnoći (slabije). Formulacija je sledeća

$$\bar{X}_n \to \mu \text{ s.s., odnosno } P(\lim_{n\to\infty} \bar{X}_n = \mu) = 1,$$

2.2. Centralni granični problemi

Centralna granična teorema predstavlja familiju teorema u kojima se dokazuje da niz kumulativnih suma S_n , normiran pogodno izabranim konstantama, ima normalnu raspodelu kad $n \to \infty$, tj.centralna granična teorema tvrdi da zbir velikog broja slučajnih sabiraka, pri čemu je udeo svakog pojedinačnog sabirka u celom zbiru mali, ima približno normalnu raspodelu.

Sume S_n niza iid (X_n) divergiraju skoro sigurno kada su normalizovane sa $n^{1/2}$ prema jakom zakonu velikih brojeva. Međutim, i dalje možemo da dobijemo informacije o rastu $n^{-1/2}S_n$ ako se prebacimo na konvergenciju u raspodeli (slaba konvergencija). Postavlja se pitanje o mogućim (nedegrativnim) graničnim zakonima sume S_n kada su one normalizovane i centrirane, tj. o raspodelama koje zadovoljavaju identitet:

$$c_1X_1 + c_2X_2 \triangleq b(c_1, c_2)X + a(c_1, c_2) \tag{2.2.1}$$

za sve nenegativne brojeve c_1, c_2 i odgovarajuće realne brojeve $b(c_1, c_2) > 0$ i $a(c_1, c_2)$? Mogući granični zakoni za sume iid slučajnih promenljivihsu samo raspodele koje zadovoljavaju (2.2.1) za sve nenegativne brojeve c_1, c_2. Mnoge klase raspodela su zatvorene u odnosu na konvoluciju, ali (2.2.1) zahtev je stroži. Na primer, konvolucija dve Poissonove raspodele je Poissonova raspodela. Međutim, Poissonova raspodela ne zadovoljava (2.2.1).

Definicija 2.2.1 ***(Stabilna raspodela i slučajna promenljiva)***
Slučajna promenljiva (raspodela, funkcija gustine) je stabilna ako zadovoljava (2.2.1) za iid X, X_1, X_2, za sve nenegativne brojeve c_1, c_2 i odgovarajuće realne brojeve $b(c_1, c_2) > 0$ i $a(c_1, c_2)$.

Sada razmatramo sumu S_n iid stabilnih slučajnih promenljivih. Na osnovu (2.2.1), imamo za neke realne konstante a_n i $b_n > 0$ i $X = X_1$,

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n \triangleq b_nX + a_n \, , n \geq 1$$

što još možemo zapisati i kao

$$b_n^{-1}(S_n - a_n) \triangleq X.$$

Zaključujemo da ako je raspodela stabilna, onda je ona granična raspodela za sume iid slučajnih promenljivih. Druge granične raspodele ne postoje.

Teorema 2.2.2 ***(Granična osobina zakona stabilnosti)***
Klasa stabilnih (nedegenerativnih) raspodela se podudara sa klasom svih mogućih (nedegenerativnih) graničnih zakona za (normalizovane i centrirane) sume iid slučajnih promenljivih.

Najuobičajeniji način analiziranja klase stabilnih raspodela je utvrđivanje njihovih karakterističnih funkcija.

Teorema 2.2.3 ***(Spektralna reprezentacija zakona stabilnosti)***
Stabilna raspodela ima karakterističnu funkciju oblika

$$\phi_x(t) = E[exp\{iXt\}] = exp\{iyt - c|t|^\alpha\big(1 - i\beta sign(t) z(t,\alpha)\big)\},\ t \in \mathbb{R} \tag{2.2.2}$$

gde je y realna konstanta, $c > 0$, $\alpha \in (0, 2], \beta \in [-1,1]$
i

$$z(t,\alpha) = \begin{cases} tg\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right), & \alpha \neq 1 \\ -\frac{2}{\pi} ln|t|, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Definicija 2.2.4 Broj α u karakterističnoj funkciji (2.2.2) se naziva karakterističnim eksponentom, a odgovarajuća raspodela α-stabilnom raspodelom.

Dalje nas zanima koji uslovi impliciraju da normalizovane i centrirane sume S_n slabo konvergiraju ka G_α ako je G_α data α-stalna raspodela?

Problem može da predstavlja način odabira konstanti $a_n \in \mathbb{R}$ i $b_n > 0$, tako da

$$b_n^{-1}(S_n - a_n) \xrightarrow{d} G_\alpha. \tag{2.2.3}$$

Teorema D1 osigurava da je granični zakon jedinstveno određen do na pozitivne linearne transformacije.

Definicija 2.2.5 ***(Domen atrakcije)***
Kažemo da slučajna promenljiva X (raspodela od X) pripada domenu atrakcije α-stabilne raspodele G_α ako postoje konstante $a_n \in \mathbb{R}, b_n > 0$ tako da važi (2.2.3).
Pišemo $X \in DA(G_\alpha)$ (ili $F \in DA(G_\alpha)$) i kažemo da (X_n) zadovoljava CGT sa granicom G_α.
Ako nas zanima da li X (ili F) pripada nekom α-stabilnom zakonu, jednostavno pišemo $X \in DA(\alpha)$ (ili $F \in DA(\alpha)$).

Teorema 2.2.6 ***(Karakterizacija domena atrakcije)***

a) Funkcija raspodele F pripada domenu atrakcije normalne raspodele ako i samo ako je $\int_{|y|\leq x} y^2 dF(y)$ sporo varirajuće.

b) Funkcija raspodele F pripada domenu atrakcije α-stabilne raspodele za neko $\alpha < 2$ ako i samo ako $F(-x) = \frac{c_1+o(1)}{x^\alpha}L(x), 1 - F(x) = \frac{c_2+o(1)}{x^\alpha}L(x), x \to \infty$ gde je L slabo varirajuća funkcija i c_1, c_2 su nenegativne konstante takve da $c_1 + c_2 > 0$.

Posmatramo slučaj $\alpha = 2$ detaljnije. Ako $E(X^2) < \infty$, onda $\int_{|y|\le x} y^2 dF(y) \to E(X^2)$, $x \to \infty$, pa je $X \in DA(2)$.
Štaviše , na osnovu Teoreme D2 (pod f) zaključujemo da je spora varijacija od $\int_{|y|\le x} y^2 dF(y)$ ekvivalentna uslovu repa

$$G(x) = P(|X| > x) = o\left(x^{-2}\int_{|y|\le x} y^2 dF(y)\right), x \to \infty. \qquad (2.2.4)$$

Posledica 2.2.7 ***(Domen atrakcije za normalnu raspodelu)***
Slučajna promenljiva X se nalazi u domenu atrakcije za normalnu raspodelu ako i samo ako je ispunjen jedan od sledećih uslova:

a) $E[X^2] < \infty$
b) $E[X^2] = \infty$ i (2.2.4)

Situacija je potpuno drugačija za $\alpha < 2$: $X \in DA(\alpha)$ implicira

$$G(x) = x^{-\alpha}L(x), x > 0 \qquad (2.2.5)$$

za sporo varirajuću funkciju L i

$$x^2G(x)/\int_{|y|\le x} y^2 dF(y) \to \frac{2-\alpha}{\alpha}, x \to \infty \qquad (2.2.6)$$

Relacija (2.2.5) i Posledica 2.2.7 pokazuju da je domen atrakcije za normalnu raspodelu uopšteniji nego domen atrakcije α-stabilnog zakona sa eksponentom $\alpha < 2$.
Vidimo da $DA(2)$ sadrži najmanje sve raspodele koje imaju konačan drugi moment.

Posledica 2.2.8 ***(Momenti raspodele u $DA(\alpha)$)***
Ako $X \in DA(\alpha)$, tada

$$E|X|^\delta < \infty \text{ za } \delta < \alpha,$$
$$E|X|^\delta = \infty \text{ za } \delta > \alpha \text{ i } \alpha < 2.$$

Specijalno,

$$D[X] = \infty \text{ za } \alpha < 2,$$
$$E|X| < \infty \text{ za } \alpha > 1,$$
$$E|X| = \infty \text{ za } \alpha < 1.$$

Tvrđenje 2.2.9 ***(Normalizujuće konstante u CGT)***
Normalizujuće konstante u CGT za $F \in DA(\alpha)$ mogu biti izabrane kao jedinstveno rešenje jednačine:

$$Q(b_n) = n^{-1}, n \ge 1. \qquad (2.2.7)$$

Specijalno, ako je $\sigma^2 = D[X] < \infty$ i $E[X] = 0$, onda

$$b_n \sim n^{1/2}\sigma, n \to \infty.$$

Ako je $\alpha < 2$, možemo alternativno izabrati (b_n), tako da

$$b_n = inf\{y: G(y) < n^{-1}\}, n \geq 1 \qquad (2.2.8)$$

(2.2.8) implicira da

$$G(b_n) \sim n^{-1}, n \to \infty$$

i da, u smislu (2.2.5),

$$b_n = n^{\frac{1}{2}}L(n), n \geq 1$$

za odgovarajuću sporo varirajuću funkciju L.

Tvrđenje 2.2.10 ***(Centrirajuće konstante u CGT)***
Centrirajuće konstante a_n u CGT (2.2.3) mogu biti izabrane kao

$$a_n = n \int_{|y| \leq b_n} y dF(y) \qquad (2.2.9)$$

gde je b_n dato u Tvrđenju 2.2.8.
Specijalno, možemo da uzmemo da je $a_n = \tilde{a}n$, gde je

$$\tilde{a} = \begin{cases} \mu, & \alpha \in (1, 2] \\ 0, & \alpha \in (0,1) \\ 0, & \alpha = 1 \ i \ F \ je \ simetrično. \end{cases} \qquad (2.2.10)$$

Teorema 2.2.11 ***(Uopštena CGT)***
Pretpostavimo da $F \in DA(\alpha)$ za neko $\alpha \in (0, 2]$.

a) Ako je $E[X^2] < \infty$, onda

$$\left(\sigma n^{1/2}\right)^{-1}(S_n - \mu n) \xrightarrow{d} \phi$$

za standardnu normalnu raspodelu ϕ sa očekivanjem 0 i disperzijom 1.

b) Ako je $E[X^2] = \infty$ i $\alpha = 2$ ili ako je $\alpha < 2$, onda

$$\left(n^{1/2}L(n)\right)^{-1} (S_n - a_n) \xrightarrow{d} G_\alpha$$

za α-stabilnu raspodelu G_α, odgovarajuću sporo varirajuću funkciju L i centrirajuće konstante kao u (2.2.9).

Specijalno,
$\left(n^{1/\alpha}L(n)\right)^{-1} (S_n - \tilde{a}n) \xrightarrow{d} G_\alpha$, gde je $\tilde{a}$ definisano u (2.2.10).
Primetimo da je moguće da normalizujeće konstante u CGT budu specijalnog oblika $b_n = cn^{1/\alpha}$ za neke konstante c. To se dešava npr. ako je $E[X^2] < \infty$, ili ako je X α-stabilno.

Definicija 2.2.12 ***(Domen normalne atrakcije)***
Kažemo da X (ili F) pripada domenu normalne atrakcije α-stabilne raspodele G_α *(*$X \in DNA(G_\alpha)$ ili $F \in DNA(G_\alpha)$*)* ako $X \in DA(G_\alpha)$ i ako u CGT možemo da odaberemo normalizaciju $b_n = cn^{1/\alpha}$ za neku pozitivnu konstantu c.

Posledica 2.2.13 ***(Karakterizacija DNA)***
a) Realizacija $F \in DNA(2)$ važi ako i samo ako $E[X^2] < \infty$
b) Za $\alpha < 2,\ F \in DNA(\alpha)$ ako i samo ako
$F(-x) \sim c_1 x^{-\alpha}$ i $1 - F(x) \sim c_2 x^{-\alpha},\ x \to \infty,$
za negativne konstante c_1, c_2 tako da $c_1 + c_2 > 0$

Specijalno, svaka α-stabilna raspodela je u sopstvenom *DNA*.
Prema tome, vidimo da $F \in DNA(\alpha), \alpha < 2$ ustvari znači da se odgovarajući rep $G(x)$ ponaša kao stepena funkcija ili kao Pareto raspodela. Primetimo da funkcija raspodele F sa repom $G(x) \sim cx^{-\alpha}$ koji je sličan Paretovoj raspodeli, za neko $\alpha \geq 2$ je u $DA(2)$, a ako $\alpha > 2$, onda $F \in DNA(2)$.

2.3. Poboljšanje centralne granične teoreme

U ovom poglavlju ćemo se ograničiti na slučaj kada je $E[X^2] < \infty$.
Interesuje nas kako možemo utvrditi i poboljšati kvalitet aproksimacije u CGT.

Berry-Esseenova Teorema

Neka ϕ označava funkciju raspodele standardne normalne raspodele. Pišemo:

$$G_n(x) = P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \leq x, x \in \mathbb{R}.$$

Znamo da je

$$\Delta_n = sup_{x \in \mathbb{R}} |G_n(x) - \phi(x)| \to 0 \tag{2.3.1}$$

U Teoremi 2.2.11 smo formulisali samo slabu konvergenciju, tj. konvergenciju G_n u svakoj tački u kojoj je funkcija ϕ neprekidna. Međutim, ϕ je neprekidna u svakoj tački, stoga (2.3.1) važi.
Možemo pokazati da brzina kojom Δ_n konvergira ka 0 može biti proizvoljno mala ako ne zahtevamo više od konačnog drugog momenta od X.
Tipična brzina konvergencije je $1/\sqrt{n}$ ako postoji treći moment od X. Dajemo neuniformnu verziju dobro poznate Berry-Esseenove teoreme:

Teorema 2.3.1 ***(Berry-Esseenova teorema)***
Pretpostavimo da $E\,|X|^3 < \infty$. Onda je

$$|G_n(x) - \phi(x)| \leq \frac{c}{\sqrt{n}(1+|x|)^3} \frac{E|X-\mu|^3}{\sigma^3} \tag{2.3.2}$$

za svako x, gde je c univerzalna konstanta.

Specijalno,

$$\Delta_n \leq \frac{c}{\sqrt{n}} \frac{E|X-\mu|^3}{\sigma^3} \tag{2.3.3}$$

Iz (2.3.2) vidimo da kvalitet aproksimacije može biti značajno poboljšan za veliko x. Štaviše, na brzinu u (2.3.2) i (2.3.3) utiče red veličine količnika $\frac{E|X-\mu|^3}{\sigma^3}$ i konstante c, što je od krucijalnog značaja ako je n malo.
Brzine u (2.3.2) i (2.3.3) su optimalne u smislu da postoje nizovi (X_n) takvi da $\Delta_n \asymp (1/\sqrt{n})$.
Specijalni uslovi za X, npr. postojanje glatke gustine, funkcije generatrise momenta itd.

Asimptotska ekspanzija

Kao što je gore navedeno Berry-Esseenova ocena (2.3.3) je optimalna za određene funkcije raspodele F. Međutim, u nekim slučajevima funkcija raspodele G_n se može aproksimirati raspodelom standardnom normalnom funkcijom raspodele ϕ i nekim dodatnim članovima. Tada aproksimirajuća funkcija, nije funkcija raspodele. Čest metod aproksimacije se naziva Edgeworthova ili asimptotska ekspanzija. Formalno pišemo:

$$G_n(x) = \phi(x) + \sum_{k=1}^{\infty} n^{-\frac{k}{2}} Q_k(x) \quad x \in \mathbb{R} \tag{2.3.4}$$

gde su Q_k izrazi koji uključuju Hermiteove polinome, tačan oblik izraza koji zavisi od momemta od X.

Teorema 2.3.2 ***(Asimptotska ekspanzija u apsolutno neprekidnom slučaju)***
Pretpostavimo da je $E|X|^k < \infty$ za neke cele brojeve $k \geq 3$. Ako je F apsolutno neprekidno, onda

$$(1+|x|)^k \left| G_n(x) - \phi(x) - \sum_{i=1}^{k-2} \frac{Q_i(x)}{n^{i/2}} \right| = o\left(\frac{1}{n^{(k-2)/2}}\right),$$

uniformno po x.
Specijalno,

$$G_n(x) = \phi(x) + \sum_{i=1}^{k-2} \frac{Q_i(x)}{n^{i/2}} + o\left(\frac{1}{n^{(k-2)/2}}\right),$$

uniformno po x.

Velika odstupanja

Teorija velikih odstupanja ima ogromnu primenu u matematici, statistici, fizici itd.

Teorema 2.3.3 ***(Cramer – Lundbergov model o velikim odstupanjima)***
Pretpostavimo da funkcija generatrise momenta

$$M(h) = E[e^{hX}]$$

postoji u okolini koordinatnog početka. Onda je

$$\frac{1-G_n(x)}{1-\phi(x)} = exp\left\{\frac{x^3}{\sqrt{n}}\lambda\left(\frac{x}{n}\right)\right\}\left[1+o\left(\frac{x+1}{\sqrt{n}}\varphi(x)\right)\right],$$

$$\frac{G_n(-x)}{\phi(-x)} = exp\left\{\frac{-x^3}{\sqrt{n}}\lambda\left(\frac{-x}{n}\right)\right\}\left[1+o\left(\frac{x+1}{\sqrt{n}}\varphi(x)\right)\right],$$

uniformno za pozitivno $x = o(\sqrt{n})$. Ovde je $\lambda(z)$ stepeni red koji konvergira u određenoj okolini koordinatnog početka, a čiji koeficijnti zavise isključivo od momenta od X.
Stepeni red $\lambda(z)$ se naziva Cramerov red.

Umesto utvrđivanja opštih koeficijenata ovog reda, razmatra se specifičan slučaj ove teoreme.

Posledica 2.3.4 Pretpostavimo da su zadovoljeni uslovi prethodne teoreme. Tada

$$1 - G_n(x) = (1-\phi(x))exp\left\{\frac{x^3}{6\sqrt{n}}\frac{E(X-\mu)^3}{\sigma^3}\right\} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\varphi(x)\right),$$

$$G_n(-x) = \phi(-x)exp\left\{\frac{-x^3}{6\sqrt{n}}\frac{E(X-\mu)^3}{\sigma^3}\right\} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\varphi(x)\right),$$

za $x \geq 0$, $x = o(n^{1/6})$.
Specijalno, ako je $E[X-\mu]^3 = 0$, onda

$$G_n(x) - \phi(x) = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\varphi(x)\right), x \in \mathbb{R}$$

Rezultati velikih odstupanja se mogu protumačiti kao poboljšanje stepena konvergencije u centralnoj graničnoj teoremi. Zaista, neka je $x = x_n \to \infty$, tako da je $x_n = O(n^{1/6})$. Tada, iz ove posledice zaključujemo da

$$P\left(\left|\frac{S_n-\mu n}{\sigma\sqrt{n}}\right| > x_n\right) = 2(1-\phi(x_n)) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}exp\left\{\frac{x_n^2}{2}\right\}\right),$$

gde je x_n izabrano tako da $\frac{S_n-\mu n}{\sigma\sqrt{n}x_n} \xrightarrow{P} 0$. (2.3.5)
Ograničavamo se na simetrične funkcije.

Teorema 2.3.5 ***(Heydova teorema o velikim odstupanjima)***
Neka je $X \in DA(\alpha)$ simetrično i $\alpha \in (0,2)$. Neka je (b_n) niz takav da $b_n \uparrow \infty$ i
$P(X > b_n) \sim 1/n$ i $M_1 = X_1$, $M_n = max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, $n \geq 2$ su maksimumi uzorka.
Tada

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P(S_n > b_n x_n)}{nP(X > b_n x_n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{P(S_n > b_n x_n)}{P(M_n > b_n x_n)} = 1 \text{ za svaki niz } x_n \to \infty.$$

S osvrtom na Uopštenu teoremu CGT (Teorema 2.2.11), uslovi u Heydovoj teoremi osiguravaju da $b_n^{-1}S_n \xrightarrow{d} G_a$ za α stabilno G_α. Prema ovome, relacija

$$\frac{S_n}{b_n x_n} \xrightarrow{P} 0$$

je uporediva sa (2.3.5).

Sličan rezultat se dobija za slučajne promenljive sa regularno varirajućim repovima $1 - F(x) \sim x^{-\alpha}L(x)$ za $\alpha \geq 2$, kada $x \to \infty$ (8.6). Ovaj rezultat je primer povezanosti između sume i maksimuma uzorka $X_1, \dots, X_n$ kada $n \to \infty$. Heydova teorema se može razumeti kao dopuna na

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(S_n > x)}{P(M_n > x)} = 1,\ n = 1,2,\dots$$

2.4. Funkcionalna CGT : Pojava Brownovog kretanja

Zanimljivost. Škotski botaničar Robert Brown je 1828. godine prosuo polen neke biljke u tečnost i posmatrao disperziju polena po površini te tečnosti čime je uočio njegovo haotično kretanje. Prvi matematički, tj. formalni opis takvog nepravilnog kretanja, koje je nazvano Brownovo kretanje, je uveo Norbert Wiener 1923. godine, pa se zbog toga Brownovo kretanje naziva još i Wienerov proces. Danas Brownovo kretanje igra važnu ulogu u opisivanju različitih pojava koje su prisutne u realnom životu a koje se proučavaju u mnogim naučnim disciplinama. Brownovo kretanje leži u osnovi finansijske teorije, odnosno, na dobro uređenom finansijskom tržištu kretanje cena finansijskih instrumenata je primer slučajnog hoda.

Neka je (X_n) iid niz sa $0 < \sigma^2 < \infty$. U ovom poglavlju potapamo niz parcijalnih suma (S_n) u proces na $[0,1]$ i razmatramo granični proces koji je ustvari Brownovo kretanje. Prvo razmatramo proces $S_n(\cdot)$ na $[0,1]$ tako da $S_n(n^{-1}k) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(S_k - \mu k),\ k = 0, \dots, n$ i definišemo grafik procesa $S_n(\cdot)$ u svakoj tački $[0,1]$ linearnom interpolacijom između tačaka $\big(k/n, S_n(k/n)\big)$. Ovaj grafik je samo jedna „izlomljena linija", a trajektorije su neprekidne funkcije. Pretpostavimo da je (X_n) niz iid standardnih normalnih slučajnih promenljivih. Onda su priraštaji $S_n(k/n) - S_n(l/n)$ za $l < k$ Gaussovi sa očekivanjem nula i disperzijom $(k-l)/n$. Štaviše, proces ima nezavisne priraštaje kada je ograničen na tačke $(k/n), k = 0, \dots n$.

Definicija 2.4.1 ***(Brownovo kretanje)***
Neka je $(B_t), t \in [0,1]$ stohastički proces koji zadovoljava sledeće uslove:

(a) Počinje od nule, $B_0 = 0$ s.s.

(b) Ima nezavisne priraštaje: za bilo koju particiju $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_m \leq 1$ i bilo koje m, slučajne promenljive $B_{t1} - B_{t0}, \dots, B_{tm} - B_{tm-1}$ su nezavisne.

(c) Za svako $t \in [0,1]$, B_t ima Gaussovu raspodelu sa očekivanjem nula i disperzijom t.

(d) Uzoračke putanje/trajektorije su neprekidne sa verovatnoćom 1.

Posledica je da priraštaji $B_t - B_s,\ \ t > s$ imaju $\mathcal{N}(0,\ t - s)$ raspodelu.
Brownovo kretanje na $[0, T]$ i na $[0, \infty)$ je definisano modifikacijom Definicije 2.4.1.
Možemo dati i definiciju Brownovog kretanja, kao procesa sa stacionarnim, nezavisnim priraštajima i skoro sigurnim neprekidnim trajektorijama. Može se pokazati da iz ovih osobina sledi da priraštaji moraju imati normalnu raspodelu.
Pišemo $\mathbb{C}[0,1]$ za vektorski prostor neprekidnih funkcija koji ima supremum normu za $x \in \mathbb{C}[0,1], \|x\| = sup_{0\le t\le 1}|x(t)|$.
Uvodimo drugi proces na $[0,1]$ koji se poklapa sa $S_n(\cdot)$ u tačkama $k/n\,, k = 0,1, \dots, n$.
Lakši je za konstruisanje, ali je teoretski dosta zahtevniji:

$$\tilde{S}_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(S_{[nt]} - \mu[nt]\right),\ \ 0 \le t \le 1,$$

gde $[y]$ označava ceo deo realnog broja y. Ovaj proces ima nezavisne priraštaje koji su Gaussovi ako je X Gaussova promenljiva. Njegove trajektorije nisu neprekidne, ali imaju moguće skokove u tačkama k/n. U svakoj tački $[0, 1)$ su neprekidni zdesna i u svakoj tački $(0, 1]$ postoji limes sleva. Prema tome, proces $S_n(\cdot)$ cadlag trajektorije, tj. one pripadaju prostoru $\mathbb{D}[0,1]$. Prostor $\mathbb{D}[0,1]$ cadlag funkcija može da bude snabdeven različitim metrikama da bi se na njemu definisala slaba konvergencija.
Međutim, naš granični proces će biti Brownovo kretanje koje uzima vrednosti u $\mathbb{C}[0,1]$ tako da je dozvoljeno da uzmemo supremum normu kao odgovarajuću metriku na $\mathbb{D}[0,1]$.

Definicija 2.4.2 ***(Proces sa nezavisnim, stacionarnim priraštajima)***
Neka je $\xi = (\xi_t)_{0\le t\le 1}$ stohastički proces. Tada ξ ima nezavisne priraštaje ako su za svako $0 \le t_0 < \cdots < t_m \le 1$ i svako $m \ge 1$ slučajne promenljive $\xi_{t1} - \xi_{t0}, \dots, \xi_{tm} - \xi_{tm-1}$, nezavisne. Za ovaj proces kažemo da ima stacionarne priraštaje ako za sve $0 \le s \le t \le 1$, slučajne promenljive $\xi_t - \xi_s$ i ξ_{t-s} imaju istu raspodelu.
Proces sa nezavisnim, stacionarnim priraštajima i trajektorijama u $\mathbb{D}[0,1]$ se još naziva Levyjev proces.

Definicija 2.4.3 ***(α-stabilno kretanje)***
Za stohastički proces $(\xi_t)_{0\le t\le 1}$ sa uzoračkim putanjama na $\mathbb{D}[0,1]$ se kaže da je α-stabilno kretanje ako važe sledeći uslovi:

(a) Počinje od nule: $\xi = 0$ skoro sigurno.
(b) Ima nezavisne, stacionarne priraštaje.
(c) Za svako $t \in [0,1]$, ξ_t ima α-stabilnu raspodelu sa fiksiranim parametrima $\beta \in [-1,1]$ i $y = 0$ u spektralnoj reprezentaciji (2.2.2).

Lema 2.4.4 Za α-stabilno kretanje $(\xi_t)_{0\le t\le 1}$ važi $\xi_t - \xi_s = (t - s)^{1/\alpha}\xi_1$ $0 \le s \le t \le 1$.

$$\begin{aligned}(\xi_{t1}, \xi_{t2}, \dots, \xi_{tm}) &= \left(\xi_{t1}, \xi_{t1} + (\xi_{t2} - \xi_{t1}), \dots, \xi_{t1} + (\xi_{t2} - \xi_{t1}) + \cdots + (\xi_{tm} - \xi_{tm-1})\right) \\ &= \Big(t_1^{1/\alpha}Y_1, t_1^{1/\alpha}Y_1 + (t_2 - t_1)^{1/\alpha}Y_2, \dots, t_1^{1/\alpha}Y_1 + (t_2 - t_1)^{1/\alpha}Y_2 + \cdots \\ &\quad + (t_m - t_{m-1})^{1/\alpha}Y_m\Big)\end{aligned}$$

za bilo koji realan broj $0 \le t_1 < \cdots < t_m \le 1$ i iid α-stabilne slučajne promenljive $Y_1, \dots, Y_m$ takve da $Y_1 = \xi_1$.

2.5. Slučajne sume

Slučajne (slučajno indeksirane) sume predstavljaju osnovu matematike koja se koristi u osiguranju.

Ukupan iznos štete jednog portfolija se obično modelira slučajnim sumama

$$S(t) = \begin{cases} 0 & N(t) = 0 \\ & \qquad t \geq 0 \\ X_1 + \cdots + X_{N(t)} & N(t) \geq 0 \end{cases}$$

gde je $(N(t))_{t\geq 0}$ stohastički proces na $[0, \infty)$ takve da su slučajne promenljive $N(t)$ nenegativne celobrojne vrednosti.
$\big(N(t)\big)$ je po pretpostavci generisan nizom $(T_n)_{n\geq 1}$nenegativnih slučajnih promenljivih tako da $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \cdots$ s.s. i

$$N(t) = sup\{n \geq 0 : T_n \leq t\}, t \geq 0. \tag{2.5.1}$$

Znamo, $supA = 0$ ako je $A = \emptyset$. Tada se ovo zove proces prebrajanja.

Primer 2.1 ***(Homogen Poissonov proces i mešoviti Poissonov proces)***
Iz definicije Cramer – Lundbergov modela sledi da su (X_n) i $(N(t))$ nezavisni i da je $N(t)$ homogen Poissonov proces sa intenzitetom $\lambda > 0$ tj. to je proces prebrajanja(2.5.1) sa $T_n = Y_1 + \cdots + Y_n$, $n \geq 1$ i vremena između pristizanja zahteva (Y_n) su eksponencijalne iid slučajne promenljive sa konačnim očekivanjem $1/\lambda$. Svaki proces prebrajanja je generisan iid procesom suma T_n i još se naziva obnavljajućim procesom prebrajanja.

Dakle, (homogen) Poissonov proces je proces prebrajanja za koji važi:

a) Na početku vremenskog intervala se još nije desio nijedan događaj tj. prebrajanje događaja započinjemo od nule. Dakle, $N(0) = 0$
b) Broj događaja koji se desio u jednom intervalu vremena ne zavisi od broja događaja koji su se desili u drugom intervalu. Dakle, $N(t)$ ima nezavisne, stacionarne priraštaje
c) Broj događaja u proizvoljnom vremenskom intervalu dužine t ima Poissonovu raspodelu sa srednjom vrednošću $E[N(t)] = \lambda t$. Dakle, za $N(t)$ važi:

$$P(N(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} , n = 0,1,2, \ldots$$

Ako su $(N(t))$ i (X_n) nezavisni, onda se proces $(S(t))_{t\geq 0}$ naziva mešoviti Poissonov proces.

3. Fluktuacije maksimuma

U ovom poglavlju ćemo se baviti klasičnom teorijom ekstremnih vrednosti, gde je glavni rezultat Fisher-Tippetova teorema koja određuje oblik granične raspodele za centrirane i normalizovane maksimume.
Osnovni alat za proučavanje retkih događaja je Poissonova aprkosimacija.
Asimptotske teorije za maksimume i sume su komplementarne, ali su u isto vreme i u suprotnosti.

3.1 Granične verovatnoće maksimuma

$X,\ X_1, X_2$ ... predstavlja niz iid nedegenerativnih slučajnih promenljivih sa zajedničkom funkcijom raspodele F. U ovom poglavlju ćemo razmatrati funkcije uzoračkih maksimuma

$$M_1 = X_1,\ M_n = max\{X_1, \dots X_n\}, n \geq 2.$$

Odgovarajući rezultati za minimume se mogu dobiti uz pomoć ovih maksimuma koristeći identitet

$$min\{X_1, \dots X_n\} = -max\{-X_1, \dots - X_n\}.$$

Funkcija raspodele maksimuma M_n je

$$P(M_n \leq x) = P(X_1 \leq x, \dots X_n \leq x) = F^n(x),\ x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Ekstremi se nalaze u okolini gornjeg kraja nosača funkcije raspodele, stoga se intuitivno, asimptotsko ponašanje M_n povezuje sa funkcijom raspodele F na njenom desnom repu u blizini krajnje desne tačke. Sa

$$x_F = sup\{x \in \mathbb{R}: F(x) < 1\}$$

označavamo krajnju desnu tačku od F.

Za $x < x_F$ dobijamo da je

$$P(M_n \leq x) = F^n(x) \to 0, n \to \infty,$$

a u slučaju $x_F < \infty$, za $x \geq x_F$ dobijamo da je

$$P(M_n \leq x) = F^n(x) = 1.$$

Prema tome, $M_n \xrightarrow{P} x_F$ kad $n \to \infty$, gde je $x_F \leq \infty$.

Pošto je niz neopadajući po n, konvergira skoro sigurno i odatle zaključujemo

$$M_n \xrightarrow{s.s} x_F,\ n \to \infty. \tag{3.1.1}$$

Ova činjenica ne obezbeđuje mnogo informacija. Bolji uvid u red veličine maksimuma je dat rezultatima slabe konvergencije za centrirane i normalizovane maksimume. Ovo je jedna od glavnih tema klasične teorije o ekstremnim vrednostima.

Na primer, fundamentalna Fisher-Tippetova teorema (teorema 3.2.3) se sastoji od sledećeg: Ako postoje konstante $c_n > 0$ i $d_n \in \mathbb{R}$ tako da

$$c_n^{-1}(M_n - d_n) \xrightarrow{d} H,\ n \to \infty \tag{3.1.2}$$

za neku nedegenerativnu raspodelu H, onda H mora biti mora biti jedna od tri distribucije ekstremne vrednosti. Ovo je slično centralnoj graničnoj teoremi, gde su stabilne raspodele jedini mogući nedegenerativni granični zakoni.

Kao posledicu toga, treba da razmatramo verovatnoće oblika:

$$P(c_n^{-1}(M_n - d_n) \leq x),$$

što se još može zapisati kao

$$P(M_n \leq u_n), \tag{3.1.3}$$

gde je $u_n = u_n(x) = c_n x + d_n$. Prvo razmatramo (3.1.3) za opšte nizove (u_n), a posle se vraćamo na linearne transformacije kao u (3.1.2).

Zanima nas koji uslovi za F garantuju postojanje od $P(M_n \leq u_n)$ kad $n \to \infty$ za odgovarajuće konstante u_n.

Ispostavlja se da su potrebni određeni uslovi neprekidnosti za F u njenoj krajnjoj desnoj tački, što isključuje mnoge važne raspodele. Na primer, ako F ima Poissonovu raspodelu, onda $P(M_n \leq u_n)$ nema granicu na $(0,1)$ ni za jedan niz (u_n). Ovo implicira da normalizovani maksimumi iid slučajnih promenljivih sa Poissonovom raspodelom nemaju nedegenerativne granične raspodele. Odavde se vidi krucijalna razlika između suma i maksimuma. U prethodnom slučaju, CGT daje normalnu raspodelu kao granicu pod opštim uslovom momenta $E[X^2] < \infty$. Ako je $E[X^2] = \infty$ uključuje se relativno mala klasa α-stabilnih graničnih raspodela. Samo u tom slučaju debelog repa, uslovi na repu $\bar{F} = 1 - F$ garantuju postojanje granične raspodele. Za razliku od suma, uvek su nam potrebni delikatni uslovi na repu $\bar{F}$ da bi se osigurala konvergencija $P(M_n \leq u_n)$ ka ne trivijalnoj granici, tj. broja iz $(0,1)$.

Tvrđenje 3.1.1 ***(Poissonova aproksimacija)***
Za dato $\tau \in [0, \infty)$ i niz realnih brojeva (u_n), sledeće relacije su ekvivalentne

$$n\bar{F}(u_n) \to \tau \tag{3.1.4}$$
$$P(M_n \leq u_n) \to e^{-\tau} \tag{3.1.5}$$

Posledica 3.1.2 Pretpostavimo da ja $x_F < \infty$ i

$$\bar{F}(x_{F}-) = F(x_F) - F(x_{F}-) > 0.$$

Onda je za svaki niz (u_n) takav da je

$$P(M_n \leq u_n) \to \rho,$$

važe ili $\rho = 0$ ili $\rho = 1$.

Ova posledica pokazuje da za funkciju raspodele sa skokom u krajnjoj desnoj tački, ne postoji nedegenerativna granična raspodela za M_n, bez obzira za normalizaciju.

Teorema 3.1.3 Neka je F funkcija raspodele sa krajnjom desnom tačkom $x_F \leq \infty$ i neka je $\tau \in (0, \infty)$.
Postoji niz (u_n) koji zadovoljava $n\bar{F}(u_n) \to \tau$ ako i samo ako je $\lim_{x \uparrow x_F} \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(x^-)} = 1$ (3.1.6) i $F(x_F-) = 1$.
Ova teorema se primenjuje na diskretne raspodele sa beskonačnim krajnjim desnim tačkama. Ako visine skokova funkcije raspodele opadaju dovoljno sporo, onda nedegenerativna granična raspodela za maksimume ne postoji.
Na primer, ako X ima celobrojnu vrednost, onda (3.1.6) postaje $\bar{F}(n)/\bar{F}(n-1) \to 1$ kad $n \to \infty$.
Ova razmatranja pokazuju da postoji neka vrsta komplikovanog asimptotskog ponašanja (M_n). Diskretnost raspodele može da spreči konvergenciju maksimuma i podstakne oscilatorno ponašanje. Uprkos tome, u ovakvoj situaciji je često moguće naći niz celih brojeva (c_n) tako da svaki podniz $(M_n - c_n)$ sadrži slabo konvergentan podniz.

Primer 3.1 ***(Poissonova raspodela)***
$P(X = k) = e^{-\lambda}\lambda^k/k! \quad k \in \mathbb{N}_0, \qquad \lambda > 0$
Tada

$$\frac{\bar{F}(k)}{\bar{F}(k-1)} = 1 - \frac{F(k) - F(k-1)}{\bar{F}(k-1)} = 1 - \frac{\lambda^k}{k!}\left(\sum_{r=k}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r!}\right)^{-1} = 1 - \left(1 + \sum_{r=k+1}^{\infty} \frac{k!}{r!}\lambda^{r-k}\right)^{-1}$$

Poslednja suma se može oceniti sa

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\lambda^s}{(k+1)(k+2)\dots(k+s)} \leq \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{k}\right)^s = \frac{\lambda/k}{1-\lambda/k}, \quad k > \lambda,$$

što teži ka nuli, kad $k \to \infty$, tako da $\bar{F}(k)/\bar{F}(k-1) \to 0$. Teorema 3.1.3 pokazuje da ne postoji nedegenerativna granična raspodela za maksimume i da ne postoji granica oblika $P(M_n \leq u_n) \to \rho \in (0,1)$ ni za jedan niz konstanti (u_n).

3.2 Slaba konvergencija maksimuma prilikom linearnih transformacija

Ovaj problem ekstremne vrednosti se može razmatrati analogno centralnom graničnom problemu. Shodno tome, glavni delovi Poglavlja 3.2 i 3.3 su slični Poglavlju 2.2, te je neophodno uporediti odgovarajuće rezultate.

Ovo pitanje je usko povezano sa sledećim:
Koje raspodele zadovoljavaju identitet

$$max\{X_1, \dots X_n\} \triangleq c_n X + d_n \qquad (3.2.1)$$

za odgovarajuće konstante $c_n > 0, d_n \in \mathbb{R}$ za svako $n \geq 2$?
Drugim rečima, koje klase raspodela F su zatvorene za maksimume?

Definicija 3.2.1 ***(Max-stabilne raspodele)***
Nedegenerativna slučajna promenljiva X (odgovarajuća raspodela ili funkcija gustine) se naziva max-stabilnom ukoliko zadovoljava (3.2.1) za iid $X, X_1, \dots, X_n$ za odgovarajuće konstante $c_n > 0, d_n \in \mathbb{R}$ i za svako $n \geq 2$.

Ako pretpostavimo da je (X_n) niz iid max-stabilnih slučajnih promenljivih , onda se (3.2.1) može zapisati kao

$$c_n^{-1}(M_n - d_n) \triangleq X. \tag{3.2.2}$$

Zaključujemo da je svaka max-stabilna raspodela granična raspodela za maksimume iid slučajnih promenljivih. Štaviše, max-stabilne raspodele su jedini granični zakoni za normalizovane maksimume.

Teorema 3.2.2 ***(Granične osobine max-stabilnih zakona)***
Klasa max-stabilnih raspodela se podudara sa klasom svih mogućih (nedegenerativnih) graničnih zakona za (normalizovane) maksimume iid slučajnih promenljivih.

Teorema 3.2.3 ***(Fisher - Tippetova teorema, granični zakoni za maksimume)***
Neka je (X_n) niz iid slučajnih promenljivih. Ako postoje normirajuće konstante $c_n > 0, d_n \in \mathbb{R}$ i neka nedegenerativna funkcija raspodele H tako da

$$c_n^{-1}(M_n - d_n) \xrightarrow{d} H, \tag{3.2.3}$$

onda H pripada jednom od sledeća tri tipa funkcije raspodele:

$$\text{Frechet: } \phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ exp\{-x^{-\alpha}\}, & x > 0 \end{cases} \qquad a > 0$$

$$\text{Weibull: } \psi_\alpha(x) = \begin{cases} exp\{-(-x)^{\alpha}\}, & x \le 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \qquad a > 0$$

$$\text{Gumbel: } \Lambda(x) = exp\{-e^{-x}\}, x \in \mathbb{R}.$$

Definicija 3.2.4 ***(Raspodela ekstremne vrednosti i ekstremne slučajne promenljive)***
Funkcije raspodele ϕ_α, ψ_α i Λ se nazivaju standardnim raspodelama ekstremnih vrednosti, a odgovarajuće slučajne promenljive standardnim ekstremima slučajnim promenljivima. Funkcije raspodele tipova ϕ_α, ψ_α i Λ su raspodele ekstremnih vrednosti, a odgovarajuće slučajne promenljive ekstremne slučajne promenljive.

Prema Teoremi 3.2.2, raspodele ekstremnih vrednosti su baš max-stabilne raspodele. Prema tome, ako je X ekstremna slučajna promenljiva, ona zadovoljava (3.2.2). Specijalno, tri slučaja iz Teoreme 3.2.3:

$$\text{Frechet: } M_n \triangleq n^{1/\alpha}X$$
$$\text{Weibull: } M_n \triangleq n^{-1/\alpha}X$$
$$\text{Gumbel: } M_n \triangleq X + \ln n$$

Primer 3.2 ***(Maksimumi eksponencijalnih slučajnih promenljivih)***
Neka je (X_i) niz iid standardnih eksponencijalnih slučajnih promenljivih. Tada

$$P(M_n - \ln n \le x) = \left(P(X \le x + \ln n)\right)^n = (1 - n^{-1}e^{-x})^n \to exp\{-e^{-x}\} = \Lambda(x), x \in \mathbb{R}.$$

Poređenja radi, za Gumbelove slučajne promenljive X_i je:

$$P(M_n - \ln n \le x) = \Lambda(x), x \in \mathbb{R}.$$

3.3 Maksimalni domeni atrakcije i normirajuće konstante

Kako možemo da izaberemo normirajuće konstante $c_n > 0$ i $d_n \in \mathbb{R}$ tako da

$$c_n^{-1}(M_n - d_n) \xrightarrow{d} H? \tag{3.3.1}$$

Definicija 3.3.1 ***(Maksimalni domen atrakcije)***
Kažemo da slučajna promenljiva X (funkcija raspodele F za X, raspodela za X) pripada maksimalnom domenu atrakcije raspodele ekstremne vrednosti H ako postoje konstante $c_n > 0, d_n \in \mathbb{R}$ tako da važi (3.3.1). Pišemo $X \in MDA(H)\big(F \in MDA(H)\big)$.

Tvrđenje 3.3.2 ***(Karakterizacija $MDA(H)$)***
Funkcija raspodele F pripada maksimalnom domenu atrakcije raspodele ekstremne vrednosti H sa normirajućim konstantama $c_n > 0, d_n \in \mathbb{R}$ ako i samo ako

$$\lim_{n\to\infty} n\bar{F}\,(c_n x + d_n) = -\ln H(x)\,,\ \ x \in \mathbb{R}.$$

Kada je $H(x) = 0$, granica se tumači kao ∞.

Definicija 3.3.3 ***(Ekvivalencija repa)***
Dve funkcije raspodele F i H se nazivaju ekvivalentima u repu ako imaju istu krajnju desnu tačku, to jest ako je $x_F = x_G$ i

$$\lim_{x\uparrow x_F} \frac{\bar{F}\,(x)}{\bar{G}(x)} = c$$

za neku konstantu $0 < c < \infty$.

Definicija 3.3.4 ***(Uopštena inverzna monotona funkcija)***
Pretpostavimo da je h neopadajuća funkcija na $\mathbb{R}$.
Uopštena inverzna funkcija h je definisana kao $h^{\leftarrow}(t) = inf\{x \in \mathbb{R}: h(x) \geq t\}$
(uzimamo da je infimum praznog skupa ∞).

Definicija 3.3.5 ***(Funkcija kvantila)***
Uopštena inverzna funkcija raspodele F

$$F^{\leftarrow}(x) = inf\{x \in \mathbb{R}: F(x) \geq t\},\ \ 0 < t < 1$$

se naziva funkcijom kvantila funkcije raspodele F. Veličina $x_t = F^{\leftarrow}(t)$ se naziva t-kvantil od F.

4.Fluktuacije statistika višeg reda

4.1. Statistike reda

Neka X ,X_1, X_2 ... označava niz iid nedegenerativnih slučajnih promenljivih sa zajedničkom funkcijom raspodele F. U ovom delu ćemo navesti neke važne osobine statistika višeg reda konačnog uzorka $X_1, X_2 \dots X_n$.
Definišemo uređeni uzorak (varijacioni niz)

$$X_{n,n} \leq \cdots \leq X_{1,n}.$$

Prema tome, $X_{n,n} = min\{X_1, \dots, X_n\}$ i $X_{1,n} = M_n = max\{X_1, \dots, X_n\}$. Slučajna promenljiva $X_{k,n}$ se naziva k-ta statistika višeg reda.

Veza između statistike reda i empirijske funkcije raspodele uzoraka je odmah vidljiva: za $X \in \mathbb{R}$ uvodimo empirijsku funkciju raspodele ili uzoračku funkciju raspodele

$$F_n(x) = \frac{1}{n} card\{i: 1 \leq i \leq n, X_i \leq x\} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_{\{X_i \leq x\}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

gde I_A označava indikator funkciju skupa A.
Sada

$$X_{k,n} \leq x \text{ ako i samo ako } \textstyle\sum_{i=1}^{n} I_{\{x_i > x\}} < k, \tag{4.1.1}$$

što implicira da

$$P\left(X_{k,n} \leq x\right) = P\left(F_n(n) > 1 - \frac{k}{n}\right).$$

Statistike višeg reda procenjuju redove procenjuju repove i kvantile, kao i verovatnoće prelaska preko određenog praga. Podsećemo se definicije funkcije kvantila za funkciju raspodele F,

$$F_n^{\leftarrow}(t) = X_{k,n} \text{ za } \quad 1 - \tfrac{k}{n} < t \leq 1 - \tfrac{k-1}{n}, \tag{4.1.2}$$

za $k = 1, \dots, n$.

Prepozicija 4.1.1 ***(Funkcija raspodele k-te statistike višeg reda)***
Za $k = 1, \dots, n$ neka $F_{k,n}$ označava funkciju raspodele za $X_{k,n}$. Tada

(a) $F_{k,n}(x) = \sum_{r=0}^{k-1} \binom{n}{r} \bar{F}^r(x) F^{n-r}(x)$

(b) Ako je F neprekidna, tada

$$F_{k,n}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{k,n}(z) dF(z),$$

gde je

$$f_{k,n}(x) = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} F^{n-k}(x)\bar{F}^{k-1}(x);$$

tj. $f_{k,n}$ je gustina za $F_{k,n}$.

Analogno dolazimo i do zajedničke raspodele konačnog broja različitih statistika reda. Naime, ako je na primer F apsolutno neprekidna sa gustinom f, onda je zajednička gustina od $(X_{1,} \dots , X_n)$

$$f_{X_{1,\dots X_n}}(x_1, \dots , x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i), \quad (x_1, \dots , x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Pošto se n vrednosti od $(X_1, \dots , X_n)$ mogu zapisati na $n!$ načina, svaka kolekcija reda $(X_{k,n})_{k=1,\dots,n}$ je mogla biti uzeta iz $n!$ različitih uzoraka. Zajednička raspodela uzoraka reda postaje:

$$f_{X_{1,n},\dots,X_{n,n}}(x_1, \dots x_n) = n! \prod_{i=1}^{n} f(x_i), \quad x_n < \cdots < x_1. \tag{4.1.3}$$

Sledeća teorema o marginalnim raspodelama je posledica jednakosti (4.1.3).

Teorema 4.1.2 ***(Zajednička gustina k statistika višeg reda)***
Ako je F apsolutno neprekidna sa gustinom f, tada

$$f_{x_{1,n},\dots,x_{k,n}}(x_1, \dots , x_k) = \frac{n!}{(n-k)!} F^{n-k}(x_k) \prod_{i=1}^{k} f(x_i), \; x_k < \cdots < x_1.$$

Definicija 4.1.3 ***(Razmaci uzorka)***
Za uzorak $X_1, \dots , X_n$ razmake definišemo sa

$$X_{k,n} - X_{k+1,n}, \quad k = 1, \dots , n-1.$$

Za slučajnu promenljivu sa konačnim levim (desnim) krajnjim tačkama $\tilde{x}_F (x_F)$ definišemo n-ti (0-ti) razmak sa $X_{n,n} - X_{n+1,n} = X_{n,n} - \tilde{x}_F \big(X_{0,n} - X_{1,n} = x_F - X_{1,n}\big)$

Primer 4.1 ***(Statistike reda i razmaci slučajnih promenljivih sa eksponencijalnom raspodelom)***
Označimo sa (E_n) niz iid slučajnih promenljivih sa standardnom eksponencijalnom raspodelom. Iz (4.1.3) dobijamo da je zajednička gustina statistika reda u našem slučaju:

$$f_{E_{1,n},\dots,E_{n,n}}(x_1, \dots x_n) = n!\, exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} x_i\right\}, \; 0 < x_n < \cdots < x_1.$$

Odavde dobijamo zajedničku raspodelu eksponencijalnih razmaka uz primenu Teoreme o transformaciji gustina.

Definišimo transformaciju

$$T(x_1, \dots, x_n) = (x_1 - x_2, 2\,(x_2 - x_3), \dots, nx_n), \quad 0 < x_n < \dots < x_1.$$

Onda $(\partial T(x)/\partial x) = n!$ i

$$T^{-1}(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{j}, \sum_{j=2}^{n} \frac{x_j}{j}, \dots, \frac{x_n}{n}\right), \qquad x_1, x_2, \dots, x_n > 0.$$

Onda gustina g od $\left(E_{1,n} - E_{2,n}, 2\left(E_{2,n} - E_{3,n}\right), \dots, nE_{n,n}\right)$ je oblika

$$g(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n!} f_{E_{1,n},\dots,E_{n,n}}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{j}, \sum_{j=2}^{n} \frac{x_j}{j}, \dots, \frac{x_n}{n}\right)$$

$$= exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} \frac{x_j}{j}\right\}$$

$$= exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} x_i\right\}.$$

Za $i = 1, \dots, n$ dobijamo da slučajne promenljive $i\left(E_{i,n} - E_{i+1,n}\right)$ imaju zajedničku raspodelu

$$g(x_1, \dots, x_n) = exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} x_i\right\}, \quad x_1, \dots, x_n > 0.$$

Odavde sledi da su razmaci

$$E_{1,n} - E_{2,n}, E_{2,n} - E_{3,n}, \dots, E_{n,n}$$

i sa eksponencijalnom raspodelom, a srednja vrednost $E_{k,n} - E_{k+1,n}$ je $1/k$ za $k = 1, \dots, n$, pri čemu znamo da je $E_{n+1,n} = 0$

Lema 4.1.4 ***(Transformacija kvantila)***

Neka je $X_1, \dots, X_n$ sa funkcijom raspodele F. Dalje, neka su $U_1, \dots, U_n$ iid slučajne promenljive sa uniformnom raspodelom na (0,1) i sa $U_{n,n} < \dots < U_{1,n}$ označimo odgovarajuću statistiku reda. Tada važe sledeći rezultati:

(a) $F_n^{\leftarrow}(U_1) \overset{\text{def}}{=} X_1$.

(b) za svako $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(X_{1,n}, \dots, X_{n,n}\right) \overset{\text{def}}{=} \left(F_n^{\leftarrow}\left(U_{1,n}\right), \dots, F_n^{\leftarrow}\left(U_{n,n}\right)\right).$$

(c) Slučajna promenljiva $F(X_1)$ ima uniformnu raspodelu na (0,1) ako i samo ako je F neprekidna funkcija.

Tvrđenje 4.1.5 ***(Skoro sigurna konvergencija statistika reda)***

Neka je F funkcija raspodele sa krajnjom desnom (levom) tačkom $x_F < \infty (\tilde{x}_F \geq -\infty)$ i $\left(k(n)\right)$ neopadajući celobrojni niz tako da

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}k(n) = c \in [0, 1).$$

(a) Ako je $x_F < \infty$, onda $X_{k(n),n} \overset{s.s}{\rightarrow} x_F$ kada je $c = 0$,

i ako je $\tilde{x}_F \geq -\infty$, onda $X_{k(n),n} \overset{s.s}{\rightarrow} (\tilde{x}_F)$ kada je $c = 1$.

(b) Pretpostavimo da je $c \in (0,1)$ takvo da postoji jedinstveno rešenje $x(c)$ jednačine $\bar{F}(x) = c$. Tada

$$X_{k(n),n} \xrightarrow{s.s} x(c).$$

Primer 4.2 ***(Simulacija statistika višeg reda)***
Transformacija kvantila povezuje uniformnu raspodelu sa nekom uopštenom raspodelom od F i primenjuje se prilikom generisanja slučajnih brojeva. Na primer, eksponencijalni slučajni brojevi mogu biti dobijeni iz uniformnih slučajnih brojeva pomoću transformacije

$$E_1 = -\ln(1 - U_1).$$

Jednostavan algoritam za simulaciju statistika višeg reda može biti baziran na Primeru 4.1, gde

$$\left(E_{i,n} - E_{i+1,n}\right)_{i=1,\dots,n} \triangleq (i^{-1}E_i)_{i=1,\dots,n}$$

pri čemu je $E_{i+1,n} = 0$.
Što znači da je za statistike reda eksponencijalnog uzorka

$$\left(E_{i,n}\right)_{i=1,\dots,n} \triangleq \left(\sum_{i=j}^{n} j^{-1}E_j\right)_{i=1,\dots,n}.$$

Statistike reda i razmaci iid slučajnih promenljivih U_i uniformnih na intervalu standardne eksponencijalne slučajne promenljive E_i su povezane reprezentacijom

$$\left(U_{1,n}, U_{2,n}, \dots, U_{n,n}\right) \triangleq \left(\frac{\Gamma_n}{\Gamma_{n+1}}, \frac{\Gamma_{n-1}}{\Gamma_{n+1}}, \dots, \frac{\Gamma_1}{\Gamma_{n+1}}\right)$$

i

$$\left(1 - U_{1,n}, U_{1,n} - U_{2,n}, \dots, U_{n,n}\right) \triangleq \left(\frac{\mathrm{E}_{n+1}}{\Gamma_{n+1}}, \dots, \frac{\mathrm{E}_1}{\Gamma_{n+1}}\right)$$

gde

$$\Gamma_n = E_1 + \dots + E_n.$$

Ova četiri identiteta obezbeđuju jednostavne metode za generisanje statistika višeg reda i razmaka za eksponencijalne i uniformne rasporede.

4.2. Granična raspodela statistika višeg reda

Neka je $X_1, \dots, X_n$ iid sa funkcijom raspodele F. Tvrđenjem 3.1.1 se podsećamo da za niz (u_n) pragova i $0 \le \tau \le \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(X_{1,n} \le u_n\right) = e^{-\tau} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} n\bar{F}(u_n) = \tau. \tag{4.2.1}$$

Interesuje nas da li možemo da proširimo relaciju (4.2.1) do neke statistike višeg reda $X_{k,n}$ za fiksirano $k \in \mathbb{N}$, ili čak dobijemo zajedničke granične verovatnoće za za fiksiran broj k statistika višeg reda $X_{k,n}, \dots, X_{1,n}$.
Razmotrićemo za $n \in \mathbb{N}$ broj prelazaka preko praga u_n za $X_1, \dots, X_n$:

$$B_n = \sum_{i=1}^{n} I_{\{x_i > u_n\}}.$$

Tada je B_n binomna slučajna promenljiva sa parametrima n i $\bar{F}(u_n)$.
U Tvrđenju 4.1.1 smo koristili ovaj kvantitet za konačno n da bismo izračunali funkciju raspodele k-te statistike višeg reda. Kada podignemo prag, prelasci $\{X_i > u_n\}$ postaju ređi. S druge strane, povećamo veličinu uzorka. Kada uzmemo oba u obzir, $E[B_n] = n\bar{F}(u_n) \to \tau$ kad $n \to \infty$ pa zbog toga možemo da primenimo klasičnu Poissonovu teoremu:

$$B_n \xrightarrow{d} \mathcal{P}(\tau).$$

Pragovi u_n su birani tako da očekivani broj prelazaka konvergira.

Teorema 4.2.1 ***(Granični zakon za broj prelazaka preko praga)***
Pretposavimo da je (u_n) niz na $\mathbb{R}$ tako da $n\bar{F}(u_n) \to \tau$ za neko $\tau \in [0, \infty)$ kad $n \to \infty$.
Tada

$$\lim_{n\to\infty} P(B_n \leq k) = e^{-\tau} \sum_{r=0}^{k} \frac{\tau^r}{r!}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{4.2.2}$$

Kad je $\tau = 0$, desna strana jednakosti je 1, a kada je $\tau = \infty$, onda je 0.
Ako (4.2.2) važi za neko $k \in \mathbb{N}_0$, onda $n\bar{F}(u_n) \to \tau$ kad $n \to \infty$, pa (4.2.2) važi za svako $k \in \mathbb{N}_0$.

Teorema 4.2.2 ***(Granične verovatnoće za statistike višeg reda)***
Pretpostavimo da je (u_n) niz na $\mathbb{R}$ tako da $n\bar{F}(u_n) \to \tau \in [0, \infty)$ kad $n \to \infty$.
Tada

$$\lim_{n\to\infty} P\big(X_{k,n} \leq u_n\big) = e^{-\tau} \sum_{r=0}^{k-1} \frac{\tau^r}{r!}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4.2.3}$$

Za $\tau = 0$ je desna strana jednakosti 1, a za $\tau = \infty$ je 0.
Ako (4.2.3) važi za neko $k \in \mathbb{N}$, onda $n\bar{F}(u_n) \to \tau$ kad $n \to \infty$, pa (4.2.3) važi za svako $k \in \mathbb{N}$.

Za $u_n = c_n x + d_n$ i $\tau = \tau(x) = -\ln H(x)$ kao u Tvrđenju 3.3.2 dobijamo sledeću posledicu.

Posledica 4.2.3 ***(Granična raspodela statistike višeg reda)***
Pretpostavimo da $F \in MDA(H)$ sa normirajućim konstantama $c_n > 0$ i $d_n \in \mathbb{R}$..
Definišemo

$$H^{(k)}(x) = H(x) \sum_{r=0}^{k-1} \frac{(-\ln H(x))^r}{r!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Za x za koje je $H(x) = 0$, kažemo da je $H^{(k)}(x) = 0$.
Tada za svako $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} P\big(c_n^{-1}\big(X_{k,n} - d_n\big) \leq x\big) = H^{(k)}(x). \tag{4.2.4}$$

S druge strane, ako je za neko $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(c_n^{-1}\left(X_{k,n} - d_n\right) \leq x\right) = G(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

Za nedegenerativnu funkciju raspodele G, tada je $G = H^{(k)}$ za neku raspodelu ekstremne vrednost H i (4.2.4) važi za svako $k \in \mathbb{N}$.

Primer 4.3 ***(Gumpelova raspodela za statistike višeg reda)***

$$H^{(k)}(x) = \frac{1}{(k-1)!}\int_{-\ln H(x)}^{\infty} e^{-t}t^{k-1}dt = \Gamma_k\left(-\ln H(x)\right), \; x \in \mathbb{R}$$

gde Γ_k označava nepotpunu gama funkciju.
Ako je H Gumpelova raspodela Λ, onda

$$\Lambda^{(k)}(x) = \frac{1}{(k-1)!}\int_{e^{-x}}^{\infty} e^{-t}t^{k-1}dt = \mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{k} E_i > -\,\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\right)$$

za $E_1, \dots, E_k$ iid standardnih eksponencijalnih slučajnih promenljivih, gde koristimo činjenicu da $\sum_{i=1}^{k} E_i$ je $\Gamma(k,1)$. Dakle, ako $Y^{(k)}$ ima funkciju raspodele $\Lambda^{(k)}$, onda $Y^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} -\ln\sum_{i=1}^{k} E_i$.

Teorema 4.2.4 ***(Multivarijantni granični zakon za broj prelazaka preko praga)***
Pretpostavimo da niz $\left(u_n^{(j)}\right)$ zadovoljava jednakost

$$\lim_{n\to\infty} n\bar{F}\left(u_n^{(j)}\right) = \tau_j, \;\; j = 1, \dots, k, \tag{4.2.5}$$

gde je $0 \leq \tau_1 \leq \dots \leq \tau_k \leq \infty$. Tada,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(B_n^{(1)} = l_1, B_n^{(2)} = l_1 + l_2, \dots, B_n^{(k)} = l_1 + \dots + l_k\right) =$$

$$= \frac{\tau_1^{l_1}}{l_1!}\frac{(\tau_2-\tau_1)^{l_2}}{l_2!}\dots\frac{(\tau_k-\tau_{k-1})^{l_k}}{l_k!}e^{-\tau_k} \tag{4.2.6}$$

gde $B_n^{(j)} = \sum_{i=0}^{n} I_{\left\{X_i > u_n^{(j)}\right\}}$, $j = 1, \dots, k$, tj. $B_n^{(j)}$ je broj prelazaka preko praga $u_n^{(j)}$ sa $X_1, \dots, X_n$.
Desna strana jednakosti je nula ako je $\tau_k = \infty$.

Definicija 4.2.5 ***(k-dimenzionalna H-ekstremna obeležja)***
Za bilo koju raspodelu ekstremnih vrednosti H sa gustinom h za $x_k < \dots < x_1$ iz nosača funkcije H

$$h^{(k)}(x_1, \dots, x_k) = H(x_k)\prod_{j=1}^{k}\frac{h(x_j)}{H(x_j)}.$$

Vektor $\left(Y^{(1)}, \dots, Y^{(k)}\right)$ slučajnih promenljivih sa zajedničkom gustinom $h^{(k)}$ se naziva k-dimenzionalno H-ekstremno obeležje.

Teorema 4.2.6 ***(Zajednička granična raspodela k statistika višeg reda)***
Pretpostavimo da $F \in MDA(H)$ sa normirajućim konstantama $c_n > 0$ i $d_n \in \mathbb{R}$. Tada za svako fiksirano $k \in \mathbb{N}$,

$$\left(c_n^{-1}\left(X_{i,n}-d_n\right)\right)_{i=1,\dots,k} \xrightarrow{d} \left(Y^{(i)}\right)_{i=1,\dots,k} \quad n\to\infty,$$

gde je $\left(Y^{(1)},\dots,Y^{(k)}\right)$ k-dimenzionalno H-ekstremno obeležje.

Primer 4.4 ***(Razmaci Gumbelovih promenljivih)***
Neka je $MDA(\Lambda)$ maksimalni domen atrakcije za eksponencijalnu raspodelu, otuda za $E_1,\dots,E_n$ iid standardne eksponencijalne slučajne promenljive dobijamo

$$\left(E_{i,n}-\ln n\right)_{i=1,\dots,k+1} \xrightarrow{d} \left(Y^{(i)}\right)_{i=1,\dots,k+1}, \quad n\to\infty$$

gde $\left(Y^{(1)},\dots,Y^{(k+1)}\right)$ je $(k+1)$dimenzionalna Λ ekstremna promenljiva sa gustinom

$$h^{(k+1)}(x_1,\dots,x_{k+1}) = exp\left\{-e^{-x_{k+1}} - \sum_{i=1}^{k+1} x_i\right\}, \quad x_{k+1}<\dots<x_1.$$

Primenom Teoreme o neprekidnom preslikavanju (Teorema D14) na eksponencijalne razmake dobijamo

$$\begin{aligned}\left(E_{i,n}-E_{i+1,n}\right)_{i=1,\dots,k} &= \left(\left(E_{i,n}-\ln n\right)-\left(E_{i+1,n}-\ln n\right)\right)_{i=1,\dots,k}\\ &\xrightarrow{d} \left(Y^{(i)}-Y^{(i-1)}\right)_{i=1,\dots,k}, \quad n\to\infty\end{aligned}$$

a iz primera 4.1 znamo da je $\left(Y^{(i)}-Y^{(i-1)}\right)_{i=1,\dots,k} \triangleq \left(i^{-1}e_i\right)_{i=1,\dots,k}$
za iid standardne eksponencijalne slučajne promenljive $E_1,\dots,E_k$.

Posledica 4.2.7 ***(Zajednička granična raspodela viših razmaka u $MDA(\Lambda)$)***
Pretpostavimo da $F\in MDA(\Lambda)$ sa normirajućim konstantama $c_n>0$. Tada

(a) $\left(c_n^{-1}\left(X_{i,n}-X_{i+1,n}\right)\right)_{i=1,\dots,k} \xrightarrow{d} \left(i^{-1}E_i\right)_{i=1,\dots,k}$ za $k\geq 1$

(b) $c_n^{-1}\left(\sum_{i=1}^{k} X_{i,n}-kX_{k+1,n}\right) \xrightarrow{d} \sum_{i=1}^{k} E_i$ za $k\geq 2$,

gde su $E_1,\dots,E_k$ iid standardne eksponencijalne slučajne promenljive.

Primer 4.5 ***(Razmaci Frechetovih promenljivih)***
Zajednička gustina razmaka $(k+1)$ Frechetove promenljive $\left(Y^{(1)},\dots,Y^{(k+1)}\right)$ može biti izračunato.
Počinjemo sa zajedničkom gustinom $Y^{(1)}-Y^{(2)},\dots,Y^{(k)}-Y^{(k+1)},Y^{(k+1)}$.
Definišemo transformaciju

$$T(x_1,\dots,x_{k+1}) = (x_1-x_2,x_2-x_3,\dots,x_k-x_{k+1})$$

za $x_{k+1}<\dots<x_1$.

Onda za $(\partial T(x)/\partial x)=1$ i za $x_1,x_2,\dots,x_k\in\mathbb{R}$ dobijamo

$$T^{-1}(x_1, \dots, x_{k+1}) = \left(\sum_{j=1}^{k+1} x_j, \sum_{j=2}^{k+1} x_j, \dots, x_k + x_{k+1}, x_{k+1}\right).$$

Za razmake $(k+1)$ dimenzionalne Frechetove promenljive $\left(Y^{(1)}, \dots, Y^{(k+1)}\right)$ dobijamo gustinu

$$g_{Y^{(1)}-Y^{(2)},\dots,Y^{(k)}-Y^{(k+1)},Y^{(k+1)}}(x_1, \dots, x_{k+1}) =$$

$$= \alpha^{k+1} exp\{-x_{k+1}^{-\alpha}\} x_{k+1}^{-\alpha-1} (x_{k+1} + x_k)^{-\alpha-1} \dots (x_{k+1} + \dots + x_k)^{-\alpha-1}$$

za $x_1, \dots, x_{k+1} > 0$.

Očigledno je da su razmaci $(k+1)$ dimenzionalne Frechetove promenljive zavisni.

Posledica 4.2.11 ***(Zajednička granična raspodela viših razmaka $MDA(\phi_\alpha)$)***

Pretpostavimo da $F \in MDA(\phi_\alpha)$ sa normirajućim konstantama $c_n > 0$. Neka je $\left(Y^{(1)}, \dots, Y^{(k+1)}\right)$ $(k+1)$-dimenzionalno Frechetovo obeležje. Tada

(a) $\left(c_n^{-1}(X_{i,n} - X_{i+1,n})\right)_{i=1,\dots,k} \xrightarrow{d} \left(Y^{(i)} - Y^{(i+1)}\right)_{i=1,\dots,k} \quad k \geq 1,$

(b) $c_n^{-1}\left(\sum_{i=1}^{k} X_{i,n} - kX_{i+1,n}\right) \xrightarrow{d} \sum_{i=1}^{k} i\left(Y^{(i)} - Y^{(i+1)}\right), \qquad k \geq 2$

Granične promenljive u (a) i u (b) su definisane razmacima $Y^{(1)} - Y^{(2)}, \dots, Y^{(k)} - Y^{(k+1)}$ koji imaju zajedničku gustinu

$$g_{Y^{(1)}-Y^{(2)},\dots,Y^{(k)}-Y^{(k+1)}}(x_1, \dots, x_k) =$$

$$= \alpha^{k+1} \int_0^\infty exp\{-y^{-\alpha}\}\left(y(y + x_k) \dots (y + x_k + \dots + x_1)\right)^{-\alpha-1} dy$$

za $x_1, \dots, x_k > 0$.

4.3 Granična raspodela slučajno indeksiranih statistika višeg reda

U ovom poglavlju se upoređuje slabo granično ponašanje statistika višeg reda i slučajno indeksiranih maksimuma za iid niz (X_n) slučajnih promenljivih sa zajedničkom funkcijom raspodele F. Neka je $(N(t))_{t\geq 0}$ proces celobrojnih slučajnih promenljivih za koje pretpodtavljamo da su nezavisne od (X_n). Pišemo

$$X_{n,n} \leq \dots \leq X_{1,n} \text{ i } X_{N(t),N(t)} \leq \dots \leq X_{1,N(t)}$$

za statistike reda uzorka $X_1, \dots, X_n$ i $X_1, \dots, X_{N(t)}$, respektivno, koristimo i

$$M_n = X_{1,n} \text{ i } M_{N(t)} = X_{1,N(t)}$$

za odgovarajuće uzoračke maksimume.

Ako F pripada maksimalnom domenu atrakcije raspodele ekstremnih vrednosti H ($F \in MDA(H)$), postoje konstante $c_n > 0$ i $d_n \in \mathbb{R}$ tako da

$$c_n^{-1}(M_n - d_n) \xrightarrow{d} H. \tag{4.3.1}$$

što implicira da

$$c_{N(t)}^{-1}(M_{N(t)} - d_{N(t)}) \xrightarrow{d} H$$

Pod pretpostavkom da $N(t) \xrightarrow{P} \infty$, ali želimo da zadržimo stare normirajuće nizove (c_n) i (d_n) umesto slučajnih procesa $(c_{N(t)})$ i $(d_{N(t)})$. Ovo može da se postigne pod opštim uslovima. Međutim granične raspodele će se takođe promeniti.

Uvedimo promenljive

$$B_n = \sum_{i=1}^{N(t)} I_{\left\{X_j > u_t^{(i)}\right\}}, \quad i = 1, \dots, k$$

koje računaju broj prelazaka preko pragova

$$u_t^{(k)} \le \cdots \le u_t^{(1)}, \quad t \ge 0 \tag{4.3.2}$$

za $X_1, \dots, X_{N(t)}$.

Takođe pretpostavimo da postoje brojevi

$$0 \le \tau_1 \le \cdots \le \tau_k \le \infty$$

tako da za $i = 1, \dots, k$,

$$tp_{t,i} = t\bar{F}\left(u_t^{(i)}\right) \to \tau_i, \quad t \to \infty. \tag{4.3.3}$$

Sledeći rezultat je analogan Teoremi 4.2.4.

Teorema 4.3.1 (Multivarijantni granični zakon za broj prelazaka preko praga)
Pretpostavimo da $\left(u_t^{(i)}\right)$ za $t \ge 0,\ i = 1, \dots, k$ zadovoljava (4.3.2) i (4.3.3). Pretpostavljamo takođe da postoji nenegativna slučajna promenljiva Z tako da

$$\frac{N(t)}{t} \xrightarrow{P} Z, \quad t \to \infty. \tag{4.3.4}$$

Tada, za sve cele brojeve $l_i \ge 0$, $i = 1, \dots, k$

$$\lim_{t\to\infty} P\left(B_t^{(1)} = l_1, B_t^{(2)} = l_1 + l_2, \dots, B_t^{(k)} = l_1 + \cdots + l_k\right) =$$
$$= E\left[\frac{(Z\tau_1)^{l_1}}{l_1!}\frac{(Z(\tau_2 - \tau_1))^{l_2}}{l_2!}\cdots\frac{(Z(\tau_k - \tau_{k-1}))^{l_2}}{l_k!}e^{-Z\tau_k}\right].$$

Desna strana jednakosti je 0 kada je $\tau_k = \infty$.

Možemo da iskotistimo identitet:

$$P\left(X_{1,N(t)} \le u_t^{(1)}, \dots, X_{k,N(t)} \le u_t^{(k)}\right) = P\left(B_t^{(1)} = 0, B_t^{(2)} \le 1, \dots, B_t^{(k)} \le k-1\right)$$

i Teoremu 4.3.1 da izvedemo graničnu raspodelu za vektor statistika višeg reda $X_{1,N(t)}, \dots, X_{k,N(t)}$.

Zbog jednostavnosti ćemo se ograničiti na neke određene slučajeve.
Prvo razmotrimo graničnu raspodelu jedne statistike reda $X_{k,N(t)}$ za fiksno $k \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da $F \in MDA(H)$, odnosno (4.3.1) je zadovoljeno za odgovarajuće konstante $c_n > 0$ i $d_n \in \mathbb{R}$. Znamo da je (4.3.1) ekvivalentno sa

$$\lim_{n\to\infty} n\bar{F}(c_n x + d_n) = -\ln H(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4.3.5}$$

Pod uslovom (4.3.5) sledi da za svako $k \in \mathbb{N}$ važi relacija

$$\lim_{n\to\infty} P\big(c_n^{-1}\big(X_{k,n} - d_n\big) < x\big) = \Gamma_k(-\ln H(x))\,, \quad x \in \mathbb{R}$$

gde Γ_k označava nepotpunu gama funkciju (videti Posledicu 4.2.3)

Teorema 4.3.2 (Granična raspodela k-te statistike višeg reda u slučajno indeksiranom uzorku)
Pretpostavimo da $\frac{N(t)}{t} \xrightarrow{P} Z$ važi za nenegativnu slučajnu promenljivu Z sa funkcijom raspodele F_Z i da je (4.3.5) zadovoljeno.
Tada

$$\lim_{n\to\infty} P\big(c_n^{-1}\big(X_{i,N(n)} - d_n\big) \le x\big) = \int_0^\infty \Gamma_k\big(-z\ln H(x)\big) dF_z(z) = \tag{4.3.6}$$

$$= \mathrm{E}[\Gamma_k(-\ln H^Z(x))]\,, \; x \in \mathbb{R}.$$

Teorema 4.3.3 ***(Granična raspodela za vektor slučajno indeksirane statistike višeg reda)***
Pretpostavimo da $\frac{N(t)}{t} \xrightarrow{P} \lambda$ važi za pozitivnu konstantu λ i da $F \in MDA(H)$ za raspodelu ekstremnih vrednosti H tako da je (4.3.1) zadovoljeno.
Tada

$$\Big(c_n^{-1}\big(X_{i,N(n)} - d_n\big)\Big)_{i=1,\ldots k} \xrightarrow{d} \Big(Y_\lambda^{(i)}\Big)_{i=1,\ldots,k}$$

gde $\Big(Y_\lambda^{(1)}, \ldots, Y_\lambda^{(k)}\Big)$ označava k – dimenzionalno obeležje koje odgovara raspodeli ekstremnih vrednosti H^λ.
Specijalno,

$$\lim_{n\to\infty} P\big(c_n^{-1}\big(X_{k,n} - d_n\big) \le x\big) = \Gamma_k\big(-\ln H^\lambda(x)\big)\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

5. Osnovni pojmovi i podela reosiguranja

U ovom delu sa aspekta ekonomske teorije upoznajemo se sa pojmovima vezanim za reosiguranje, kao i najčešćom podelom ugovora o reosiguranju. Radi sticanja šire slike i razumevanja samih ugovora, dati su jednostavni primeri koji ih opisuju.

5.1 Pojam reosiguranja

Reosiguranje predstavlja osiguranje osiguravajućeg društva. Definiše se kao prenošenje dela rizika ili celokupnog rizika sa direktnog osiguravača, koji putem ugovora o osiguranju preuzima rizik u ime svojih osiguranika, na ostala osiguravajuća društva, reosiguravače, koji nemaju direktne ugovorne veze sa osiguranikom. Reosiguravač se obavezuje da će osiguravaču isplatiti deo ili u celini iznos štete kada nastane osigurani slučaj, a osiguravač se obavezuje na plaćanje premije reosiguravaču. Dakle, između osiguranika i reosiguravača nema direktnog ugovornog odnosa, reosiguravač je u obavezi da štetu nadoknadi samo osiguravaču, a prema osiguraniku obavezu ima samo osiguravač.
Prvo reosiguravajuće društvo Cologne Reinsurance Company je formirano u Hamburgu 1842.godine. Danas vodeća reosiguravajuća društva su Munich Re, Swiss Re i Hannover Re. Sva ona do današnjih dana obezbeđuju amortizaciju rizika, kroz njegovu prostornu disperziju.

5.1.1 Osnovni pojmovi o reosiguranju

U poslovima reosiguranja, osiguravajuće društvo koje traži reosiguranje odnosno želi da ustupi deo rizika naziva se direktni osiguravač. On ocenjuje kolika šteta bi mogla da ugrozi njegovu solventnost, pa zadržava samo onoliki deo rizika koji bi mogao da isplati (samopridržaj), a preostali deo predaje reosiguravaču, koji ovako preuzeti rizik ili u potpunosti zadržava kao sopstveni samopridržaj ili zadržava samo onoliki deo koliko može da pokrije ako dođe do štete, a ostalo daje drugom reosiguravaču.

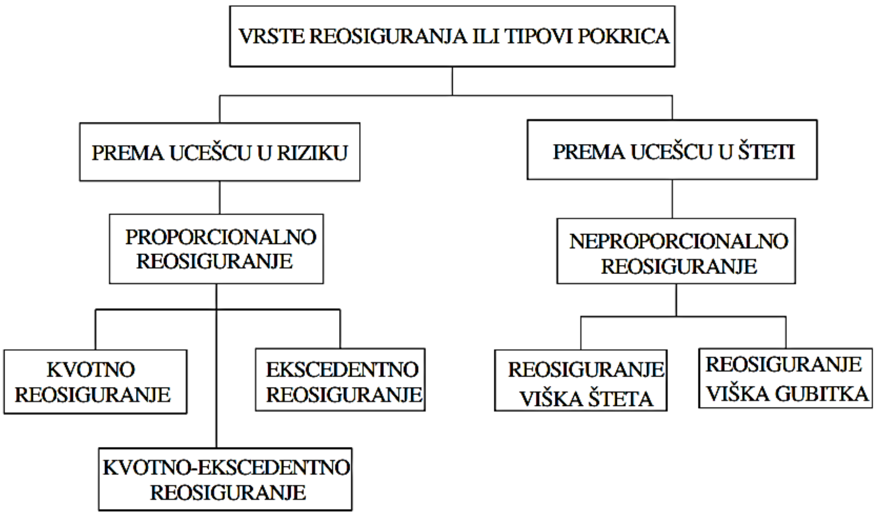
Osiguravač koji ustupi deo obaveza reosiguravaču za njega postaje cedent (cessio – ustupanje), reosiguravač koji preuzima deo obaveze se naziva cesionar. To praktično znači da je cesija iznos osiguranja prenesen na reosiguravača. U slučajevima kada reosiguravač prenosi deo deo obaveze na druge reosiguravače, on vrši retrocesiju i postaje retrocedent, a ti reosiguravači retrocedenti.

Dakle, odluka o prenošenju rizika se donosi na osnovu procene vlastitog samopridržaja i očekivane visine potencijalnih šteta. Samopridržaj je ukupan iznos preuzetih rizika, koji se pokriva sopstvenim sredstvima, a utvrđuju ga osiguravajuće kompanije na osnovu prethodnog iskustva. Maksimalno moguća šteta (MMŠ, češći izraz za potencijalnu štetu) predstavlja iznos najveće štete koja se prema proceni osiguravača može očekivati na jednom osiguranom riziku, pod pretpostavkom da je totalna šteta moguća ali malo verovatna. Prenisko određena MMŠ može dovesti osiguravača u situaciju da ne može da odgovori svojim obavezama, a previsoko određena MMŠ dovodi do nepotrebnog odliva dela premije u reosiguranje.

Svaki ugovor o reosiguranju sadrži limit, koji predstavlja maksimalan iznos za koji je reosiguravač preuzeo obavezu da će isplatiti u slučaju štete. Ako se radi o proporcionalnom ugovoru, onda se limit odnosi na svaki rizik obuhvaćen tim ugovorom. U slučaju neproporcionalnih ugovora, limit ugovora se odnosi na jedan ili grupu rizika obuhvaćenih bilo jednim ili sa više štetnih događaja. Kao olakšica cedentu u slučaju šteta manjeg obima ovi ugovori sadrže više nivoa (layer-a), tako da se u slučaju štetnog događaja koji će pogoditi ugovor, ali ne i njegov gornji limit, ugovor samo delimično iscrpljuje (ili reaktivira delimičnom doplatom premije).

5.2. Podela ugovora tradicionalnog reosiguranja

Najčešća podela ugovora o reosiguranju je na proporcionalne i neproporcionalne. Ona je izvršena na osnovu načina na koji je određena obaveza reosiguravača.



Slika 1. Vrste ugovora o reosiguranju

5.2.1 Proporcionalni ugovori

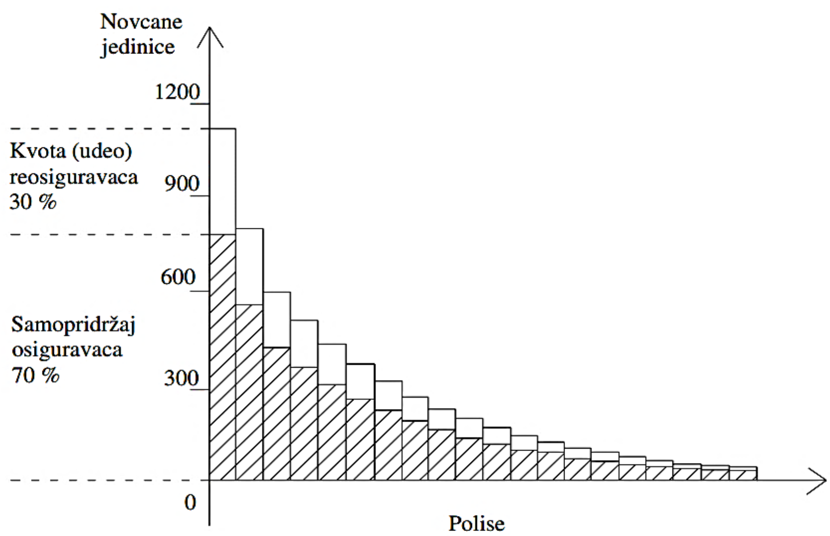
Proporcionalni ugovori (ugovori o reosiguranju sume osiguranja) su oni kod kojih se obaveza reosiguravača određuje s obzirom na rizik koji je osiguranjem preuzeo osiguravač. Naime, osiguravač ocenjuje koliki deo rizika može da nosi u skladu sa svojim finansijskim mogućnostima, a preostali deo daje u reosiguranje. To znači da reosiguravač u slučaju štetnog događaja nadoknađuje osiguravaču deo štete srazmeran proporcionalnom udelu u primljenoj premiji.
Oblici proporcionalnih ugovora o reosiguranju su:

1. *Kvotni (quota-share treaty)*

Ovaj najjednostavniji oblik reosiguranja se naziva i reosiguranje srazmernog dela svih rizika. Procenat rizika koji se reosigurava naziva se kvota (udeo) i ona određuje kako se obaveze, premije i štete raspodeljuju između osiguravača i reosiguravača.
U sledećem primeru se može videti kako se vrši raspodela premija i šteta

Samopridržaj osiguravača	70%
Kvota (udeo) reosiguravača	30%
Suma osiguranja osiguranog objekta	10.000.000
Osiguravač zadržava 70%	7.000.000
Reosiguravač preuzima 30%	3.000.000
Premijska stopa je 2%	20.000
Osiguravač zadržava 70%	14.000
Reosiguravač prima 30%	6.000
Šteta	6.000.000
Osiguravač plaća 70%	4.200.000
Reosiguravač plaća 30%	1.800.000

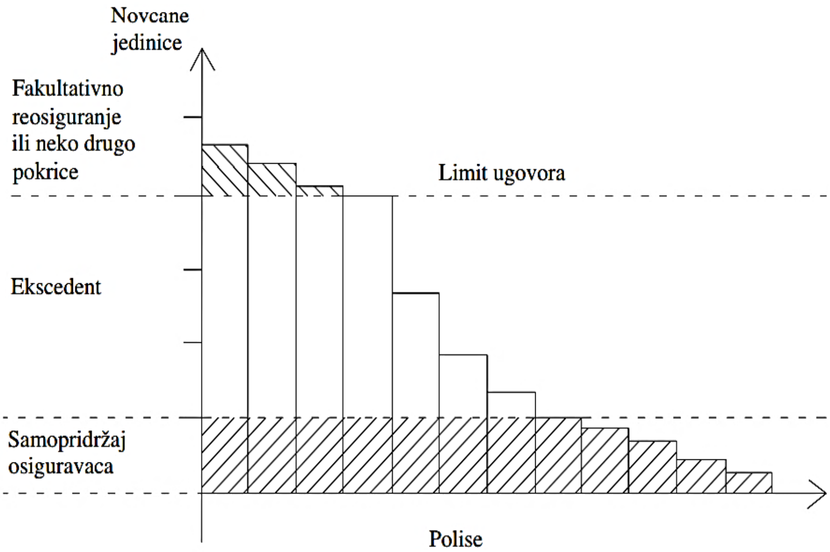
Tabela 1. Raspodela premija i šteta kod kvotnog reosiguranja



Slika 2. Raspodela premija i šteta kod kvotnog reosiguranja

2. *Ekscedentni (surplus treaty)*

Ekscedentni ugovor se još naziva ugovor o reosiguranju viška rizika. Reosiguravač ne učestvuje u svim rizicima nego vrši selekciju rizika koje će dati u reosiguranje i nivoa štete iznad koje će učestvovati u njenom pokriću. Osiguravač zadržava sve rizike do izvesne vrednosti obaveze (svog samopridržaja). Reosiguravač prihvata (obavezan je da prihvati) višak (surplus, ekscedent), tj. vrednost koja premašuje samopridržaj osiguravača.



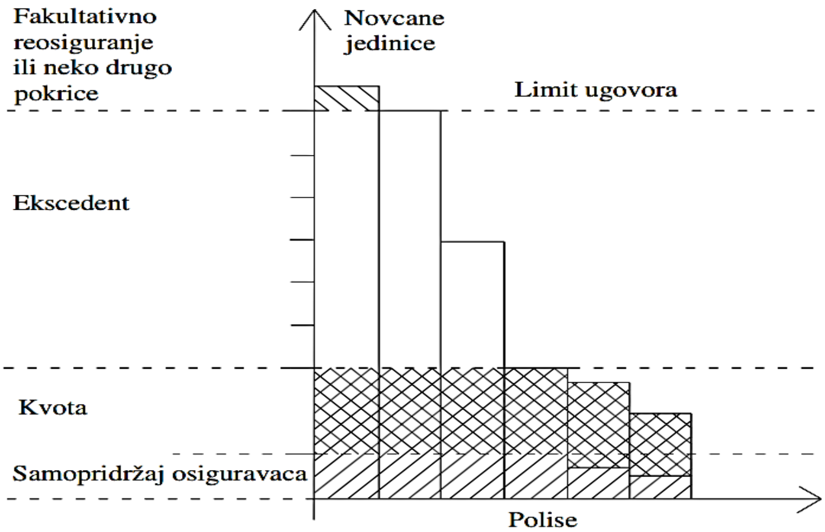
Slika 2.Opšti slučaj raspodela premija i šteta kod ekscedentnog reosiguranja

Takođe, mora da postoji gornja granica obaveze reosiguravača da bi on prihvatio rizik – linija. U slučaju da limit pokrića reosiguravača bude premašen, osiguravač za taj nepokriveni deo rizika mora da zaključi pojedinačni ugovor o reosiguranju. Da bi se to izbeglo, osiguravači pribegavaju zaključivanju okvirnih ugovora o reosiguranju drugog viška rizika (second surplus), koji stupaju u dejstvo kad kapacitet okvirnog ugovora o reosiguranju prvog viška (first surplus) bude iscrpljen.

3. Kvotno - ekscedentni

Ovaj ugovor predstavlja kombinaciju kvotnog i ekscedentnog ugovora, jer se najpre obračunava kvota na način kako je opisano kod kvotnih, a zatim se na preostali deo portfelja primenjuje princip selekcije rizika karakterističan za ekscedentne ugovore o reosiguranju.

Na grafiku je prikazan samo opšti slučaj raspodele premija i šteta.



Slika 3. Opšti slučaj raspodele premija i šteta kod kvotno-ekscedentnog reosiguranja

5.2.2 Neproporcionalni ugovori

Kod neproporcionalnih ugovora (ugovori o reosiguranju šteta) obaveza reosiguravača se određuje na osnovu visine štete. Ugovor definiše vrednost do koje će osiguravač platiti sve štete – samopridržaj, a reosiguravač se obavezuje da će platiti sve štete iznad te vrednosti, a koje ne prelaze ugovorom definisani limit pokrića. Posebna specifičnost neproporcionalnih ugovora ogleda se u tome što se njima pokrivaju štete nastale usled ostvarenja jednog ili više osiguranih slučajeva kao posledica jednog te istog uzroka.

Oblici neproporcionalnih ugovora o reosiguranju su:

1. *ugovor o reosiguranju viška gubitka (stop-loss)*

Suština ovog ugovora, ili kako se ponekad naziva, ugovor o reosiguranju godišnjeg viška šteta, ogleda se u tome što reosiguravač preuzima obavezu da osiguravaču nadoknadi ukupan gubitak u ugovorenoj vrsti osiguranja i u ugovorenom vremenskom periodu (obično godinu dana). Reosiguravač je u obavezi da pokrije bilo koji deo ukupnog godišnjeg gubitka koji prelazi ugovoreni samopridržaj, koji je obično definisan kao procenat od godišnjeg prihoda od premija (npr. reosigurava prihvata da nadoknadi sve štete u jednom portfelju čija se visina proteže od 90-130 % od iznosa premije), ali može da bude i fiksna suma. Nevažno je da li je samopridržaj premašen pojedinačnom velikom štetom ili kumuliranjem malih i šteta srednje veličine. Predstavlja najsveobuhvatniji oblik reosiguravajuće zaštite.

U primeru, samopridržaj osiguravača je jednak prihodu od premija. Reosiguravač pokriva sve gubitke iznad samopridržaja osiguravača, do 50% iznosa samopridržaja.

Godišnji prihod osiguravača od premija	50.000.000
SL ugovor	50% iznad 100%

Godina	Ukupni godišnji gubitak	Distribucija gubitka	
		Osiguravač	Reosiguravač
Godina x	45.000.000	45.000.000	-
Godina y	55.000.000	50.000.000	5.000.000
Godina z	90.000.000	50.000.000+15.000.000	25.000.000

Tabela 2. Dejstva ugovora o reosiguranju viška gubitka

2. *Ugovor o reosiguranju viška šteta (excess of loss)*

Reosiguranje viška šteta ima kraću istoriju od proporcionalnog reosiguranja i datira od 70-tih godina prošlog veka. Glavni razlog je što odredbe ovih ugovora ne određuju eksplicitno na koji način treba podeliti premije između osiguravača i reosiguravača.

Reosiguravač na samom početku procenjuje kakav teret budućih šteta može da očekuje, koristeći dva metoda:

- Određivanje premije prema iskustvu

Ovaj metod se zasniva na štetnim događajima koji su se desili u prošlosti, na osnovu kojih se može da dobiti dosta dobra slika tereta koji se može očekivati u budućnosti.

- Određivanje premije prema izloženosti riziku

Ako na raspolaganju nema dovoljno istorijskih podataka o štetama, reosiguravač će naći sličan portfolio, sa dovoljno podataka o štetama koje su se desile u prošlosti. Tako se za procenu ne koriste stvarni štetni događaji, već očekivane štete na osnovu podataka o rizicima sadržanim u portfoliju.

Reosiguranje viška šteta se uopšteno može podeliti na:

(a) Pokrića po riziku (*working XL per risk - WXL-R*) - svaka šteta koja se dogodi na svakom pojedinačnom riziku može da aktivira pokriće

(b) Pokrića po katastrofalnom događaju (*Catastrophe XL - Cat-XL*) - da bi se aktiviralo pokriće, mora u isto vreme da nastane štetni događaj koji obuhvata nekoliko pokrivenih pojedinačnih rizika.

Ono se primenjuje u slučajevima kada je izvesno kumuliranje šteta (oluje, poplave, osiguranja robe u pomorskom prevozu itd.) i kao dopuna proporcionalnim ugovorima, štiteći od rizika koji nisu pokriveni.

Na primer, nakon primene svih proporcionalnih reosiguravajućih pokrića, da bi se dalje zaštitio od velikih šteta, osiguravač kupuje WXL-R pokriće od 6.000.000, preko samopridržaja od 2.000.000. Kao dodatnu zaštitu od katastrofalnih događaja (npr.zemljotresa), on takođe kupuje Cat-XL pokriće od 9.000.000 preko samopridržaja od 4.000.000.

Štetni događaj 1: Šteta nastala usled požara(na jednom riziku) 1.000.000

Neto šteta	
Osiguravač	1.000.000
WXL-R reosiguravač	- (nije premašen samopridržaj od 2.000.000)
Cat-XL reosiguravač	- (nije premašen samopridržaj od 4.000.000)

Tabela 3. Štetni događaj 1

Štetni događaj 2: Šteta nastala usled velikog požara(na jednom riziku) 7.000.000

Neto šteta	
Osiguravač	2.000.000
WXL-R reosiguravač	5.000.000
Cat-XL reosiguravač	- (neto šteta osiguravača je pomoću *WXL-R* pokrića smanjena za 2.000.000 i zato je manja od *Cat-XL samopridržaja*)

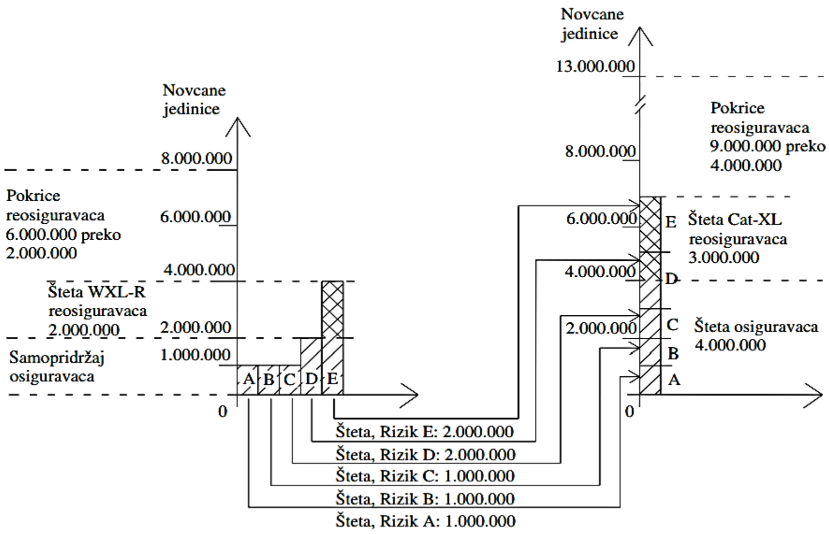
Tabela 4. Štetni događaj 2

Štetni događaj 3: Ukupna šteta nastala usled zemljotresa iznosi 9.000.000, i to po rizicima:

Rizik A	
Rizik B	2.000.000
Rizik C	5.000.000
Rizik D	2.000.000
Rizik E	4.000.000

Neto šteta	
Osiguravač	4.000.000
WXL-R reosiguravač	2.000.000 (kod rizika E *WXL-R* reosiguravač plaća štetu koja je iznad samopridržaja osiguravača od 2.000.000)
Cat-XL reosiguravač	3.000. 000 (*Cat-XL* pokriće, neto šteta je 9.000.00 minus 2.000.000 koje plaća *WXL-R* reosiguravač. Nakon što osiguravač plati svoj samopridržaj od 4.000.000, Cat-XL reosiguravaču preostaje šteta od 3.000.000)

Tabela 5. Štetni događaj 3



Slika 4. Raspodela šteta kod ugovora o reosiguranju viška štete

6. Neki rezultati velikih odstupanja

U delu 2.3 dotakli smo se pitanja na temu velikih odstupanja verovatnoće za iznose $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ od iid slučajnih promenljivih X_n. Namera ovog dela je da predstavi neke rezultate koji predstavljaju preliminarne korake za bavljenje ugovorima o reosiguranju, kojima ćemo se pozabaviti u delu 7. Razmatranje započinjemo pojmom katastrofalnih događaja.

Katastrofalni (ekstremni) događaj

Definisanje pojma katastrofalnih rizika se razlikuje u zavisnosti od uslova preuzimanja ovog rizika od strane reosiguravajućih kompanija. Swiss Re klasifikuje neki događaj kao katastrofalan tako što uzima u obzir tri faktora: iznos osigurane štete, ukupnu štetu i broj ljudskih žrtava. Prema Munich Re su to svi prirodni događaji koji imaju za posledicu preko dvadeset žrtava i štetu veću od pedeset miliona dolara.

Rizici katastrofalnih događaja obuhvataju:

1. rizike od prirodnih katastrofa
   (zemljotres, olujni vetrovi, poplava, vulkanske erupcije)
2. rizik kritične infrastrukture
   (transportni sistem, vodosnabdevanje, sistem za električnu energiju)
3. rizik ljudskog faktora
   (terorizam)
4. katastrofalne ekološke rizike
   (klimatske promene, genetski inženjering, nuklearne centrale)

Uopšteno, katastrofalni događaj iznenada prekida normalno odvijanje života, uzrokuje ljudske žrtve, veliku štetu na imovini i/ili njen gubitak u meri koja prelazi normalnu sposobnost zajednice da ih sama bez pomoći otkloni.

Iz svih prethodno navedenih razloga, od posebnog je značaja da se dobije analitički izraz ili procena verovatnoće za katastrofalne događaje u reosiguranju. Koliko je to kompleksno, ukazuju osobine koje ih sve karakterišu:

- obično imaju značajan uticaj u konačnom bilansu (velike isplate nakon prirodnih katastrofa u oblasti osiguranja). Kumuliranja štete dovodi do aktiviranja velikog broja polisa osiguranja u kratkom vremenskom periodu, što značajno utiče na finansijsku stabilnost.
- teško su predvidivi (često su uzrokovani prirodnim procesima)
- retki su (frekvencija je mala, pa je usled nedostatka statističkih podataka teško proceniti potencijalne štete.

Zanimljivost. Relativno skoro (2007) esejista Taleb, čiji se rad zasniva na pojmovima slučajnosti i verovatnoće, je upotrebio izraz crni labudovi (black swans) za ekstremne događaje koji uzrokuju gubitke širokih razmera u različitim domenima. Obično se pojavljuju

bez neke određene učestalosti, pa lako mogu izmaknuti primeni standardnih analitičkih metoda i verovatnoća njihovog pojavljivanja greškom može biti procenjena kao jako mala.
Ono što Taleb naziva crnim labudom okarakterisano je sa 3 atributa:

- to je podatak autsajder (outlier) s obzirom da leži van regularnih očekivanja i ništa u prošlim događanjima ne može ukazivati da postoji verovatnoća njegovog pojavljivanja
- sa sobom nosi ekstremno veliki uticaj
- čovek ga može na osnovu svog iskustva i logike objasniti pa i predvideti

Dakle: retkost, veliki uticaj, retrospektivna predvidivost.

Velika odstupanja

Verovatnoća velikih odstupanja se može tumačiti kao:

- asimptotska ocena $P(S_n > x_n)$ za dati niz $x_n \to \infty$, gde je (x_n) takav da $P(S_n > x_n) = o(1)$,

ili

- asimptotska ocena $P(S_n > x)$ koja je uniformna u nekoj x-oblasti (u zavisnosti od n), gde je sad oblast takva da je $P(S_n > x_n) = o(1)$ uniformno.

Dakle, verovatnoće velikih odstupanja nam govore o verovatnoći da ukupan iznos štete S_n uzima vrednosti veće od x ili x_n.

Generalna podela je na:

- *gruba* velika odstupanja, koja su ocena tačnosti $\ln P(S_n > x) \sim b_n(x)$ za određeni niz (b_n).

- *precizna* velika odstupanja, a to znači ocenjujemo verovatnoću $P(S_n > x)$ do tačnosti najmanje $P(S_n > x) \sim a_n(x)$ za određeni niz pozitivnih funkcija ili brojeva (a_n).

Razmatramo samo precizna velika odstupanja, gde postoje dva tipa rezultata.

Prvi, Cramerova teorema o velikim odstupanjima(Teorema 2.3.3), pokazuje da je opravdano S_n aproksimirati normalnom standardnom raspodelom, pod jakim uslovom da funkcija generatrise momenta

$$M(h) \sim E[e^{hX}]$$

postoji u okolini koordinatnog početka.

Specijalno, ako je $\mathrm{D}[X] = 1$ onda je

$$P(S_n - \mu x > x) = \bar{\phi}\left(x/\sqrt{n}\right)\left(1 + o(1)\right) \tag{6.1}$$
$$P(S_n - \mu x \leq -x) = \bar{\phi}\left(x/\sqrt{n}\right)\left(1 + o(1)\right)$$

uniformna za $x = o\left(n^{1/6}\right)$.

Ovaj rezultat je u ograničenoj upotrebi za potrebe osiguranja i finansija, s obzirom na uslov eksponencijalnih momenata X.

Međutim, rezultati preciznih velikih odstupanja pod uslovom postojanja funkcija generatrise momenta su više pravilo nego izuzetak. Pod tim uslovom, dokazano je nekoliko teorema o redu $P(S_n - \mu x > x)$ u kritičnoj oblasti gde je x istog reda kao $E[S_n] = n\mu$.

Teorema 6.1 ***(Petrova teorema o preciznim velikim odstupanjima pod uslovom eksponencijalnog momenta).***

Pretpostavimo da funkcija generatrise momenta M, postoji u okolini koordinatnog početka. Neka je

$$b = sup\{h: \int_0^\infty e^{hx}\, dF < \infty\},$$

$h = h(x)$ je jedintveno rešenje jednačine

$$m(h) = \frac{M'(h)}{M(h)} = x$$

a

$$\sigma^2(h) = m'(h),\, a_0 = lim_{h\uparrow b}\, m(h)$$

pri čemu je a_0 konačan.

a) Pretpostavimo da je F ne-mrežasta funkcija.
Onda je

$$P(S_n - n\mu > x) = \frac{exp\{n(lnM(h) - hx)\}}{h\sigma(h)\sqrt{2\pi n}}$$

uniformna za $x \in [\varepsilon n, (a_0 - \varepsilon)n]$.

b) Pretpostavimo da je F mrežasta sa maksimalnim korakom d.
Onda je

$$P(S_n - n\mu > x) = \frac{d\, exp\{n(lnM(h) - hx)\}}{\sigma(h)\sqrt{2\pi n}(1 - e^{-dh})}\left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

uniformna za $x \in [\varepsilon n, (a_0 - \varepsilon)n]$.

Formulacija ukazuje da rezultate nije lako primeniti u konkretnoj situaciji, a rešavanje jednačine $m(h) = x$ je posebno problematično. Ekvivalentni problemi se pojavljuju i u teoriji rizika prilikom određivanja Lundbergovog eksponenta (Definicija D6).

S obzirom da naglašavamo probleme u vezi sa teškim repovima takođe želimo da predstavimo nekoliko ideja u vezi sa preciznim velikim odstupanjima u ovom slučaju.

Prvi utisak o Heydovoj teoremi o velikim odstupanjima (Teorema 2.3.5) smo stekli kroz simetrično F u oblasti privlačenja α-stabilnog zakona i $\alpha < 2$ tj. $\bar{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ (Teorema 2.3.5.) Shvatamo da uslov $n\bar{F}(x_n) \to 0$ implicira odnos

$$P(S_n > x) = n\bar{F}(x_n)\big(1 + o(1)\big) = P(M_n > x_n) \tag{6.2}$$

gde, kao i obično, M_n predstavlja maksimum prvih n vrednosti X_i. Ovo je tipičan odnos koji možemo da očekujemo u opštem slučaju regularno varirajućih repova.
Primetimo da F sa regularno varirajućim repovima formira podklasu subeksponencijalne raspodele, vidi deo 1, koji su definisani na osnovu odnosa

$$P(S_n > x) = P(M_n > x_n)\big(1 + o(1)\big)$$

za svako fiksno $n \geq 1$ kada $x \to \infty$.

Prema tome (6.2) je samo drugi prikaz odnosa za slučaj kada i x i n teže beskonačnosti. To opet ukazuje na dominantnu ulogu termina maksimumi u odnosu na sumu iid slučajnih promenljivih.

Teorema 6.2 ***(Precizna velika odstupanja sa regularno varirajućim repovima, I)***
Pretpostavimo da je $\bar{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ za neko $\alpha > 2$, $E|X|^{2+\delta} < \infty$ za neko $\delta > 0$ i $D[X] = 1$. Onda je

$$P(S_n - n\mu > x) = \bar{\phi}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\big(1 + o(1)\big) + n\bar{F}(x)\big(1 + o(1)\big)$$

uniformna za $x \geq \sqrt{n}$.
Specijalno,

$$P(S_n - n\mu > x) = \bar{\phi}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\big(1 + o(1)\big)$$

za $\sqrt{n} \leq x \leq a(nlnn)^{1/2}$ i $a < \sqrt{a - 2}$ i

$$P(S_n - n\mu > x) = n\bar{F}(x)\big(1 + o(1)\big) = P(M_n > x) \tag{6.3}$$

za $x > a(nlnn)^{1/2}$ i $a < \sqrt{a - 2}$.

Naredna teorema daje uopšteni rezultat za $\bar{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ za bilo koje $\alpha > 1$.

Teorema 6.3 ***(Precizna velika odstupanja sa regularno varirajućim repovima, II)***
Pretpostavimo da $\bar{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ za neko $\alpha > 1$. Onda je za svako fiksno $\gamma > 0$

$$P(S_n - n\mu > x) = n\bar{F}(x)\big(1 + o(1)\big)$$

uniformna za $x \geq \gamma n$.

Uopšteni pristup za regularno varirajuće $\bar{F}$ i srodne klase funkcija raspodela sa teškim repom su dali matematičari Cline i Hsing.
Prema njima, rezultat

$$P(S_n > x) \sim P(M_n > x_n)$$

je uniforman u određenoj x-oblasti.

Za $\bar{F}$ proširenu regularnu varijaciju je na primer

$$c^{-\beta} \leq \liminf_{x\to\infty} \frac{\bar{F}(cx)}{\bar{F}(x)} \leq \limsup_{x\to\infty} \frac{\bar{F}(cx)}{\bar{F}(x)} \leq c^{-\alpha}$$

za neke $0 < \alpha \leq \beta < \infty$ i svako $c \geq 1$.

Problemi preciznih velikih odstupanja za ostale subeksponencijalne raspodele, na primer za tip $\bar{F}(x) = exp\{-L(x)x^{\alpha}\}$ sporo varirajuće L i $\alpha \in [0,1)$ u mnogome zavise od x-oblasti i posebne forme $\bar{F}$. Nisu tako lako formulisani kao Teoreme 6.2 i 6.3.

Precizna velika odstupanja slučajnih suma sa teškim repovima su naš sledeći cilj.

Za oblast osiguranja je izuzetno značajna mogućnost proširenja mešovitog Poissonovog proces, u smislu da za svako t, $N(t)$ ima Poissonovu raspodelu, ali da njegova srednja vrednost ne mora uvek biti oblika λt za konstantni intenzitet $\lambda > 0$.
Ovo ima smisla s obzirom je u osiguranju jako česta pojava da je $N(t)$ velik zbog mogućnosti da pristigne veliki broj zahteva za odštetu, odnosno čak i pri malim intervalima vremena $[0,t]$ srednja vrednost $E[N(t)]$ može biti ogromna.

Pošto

$$\mu(t) = E[S(t)] = \mu E[N(t)]$$

onda se $\big(S(t)\big)$ može posmatrati kao proces srednje vrednosti procesa $\big(N(t)\big)$ koje raste ka beskonačnosti kada se t povećava.

Naredna teorema je analogna sa prethodnom (Teorema 6.3).

Teorema 6.4 ***(Precizna velika odstupanja slučajnih suma sa regularno varirajućim repovima)***
Pretpostavimo da je $\big(S(t)\big), t \geq 0$ mešoviti Poissonov proces, pri čemu je $\big(N(t)\big), t \geq 0$ Poissonova suma slučajnih promenljivih takva da $E[N(t)] \to \infty$ kada $t \to t_0$ za neko $t_0 \in (0,\infty]$, i X je s.s. nenegativna, nedegerativna promenljiva. Štaviše, $\bar{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ za neko $\alpha > 1$.
Onda je

$$P(S(t) - \mu(t) > x) = E[N(t)]\bar{F}(x)\big(1 + o(1)\big). \tag{6.4}$$

uniformna za $x \geq \gamma E[N(t)]$ za svako fiksno $\gamma > 0$ kada $t \to t_0$.

Dokaz ovog rezultata dali su Kluppelberg i Mikosch. Imajmo na umu da zdesne strane u (6.4) ima isti red kao $P\big(M_{N(t)} > x\big)$ kada $t \to t_0$.

7. Tradicionalni i alternativni oblici reosiguranja

U ovom delu razmatramo period ponovne pojave događaja kroz najčešći tradicionalni oblik ugovora o reosiguranju - Cat-XL. Nakon toga uvodimo pojam finansijskih derivata, kako bismo definisali derivate osiguranja tj. alternativne instrumente reosiguranja putem kojih se vrši transfer rizika osiguranja na tržište kapitala. Deo 7.2 posvećen je anliziranju svih vrsta ugovora o resiguranju sa matematičkog aspekta.

Period ponovne pojave događaja

Cat-XL je dominantni tip ugovora o reosiguranju. Katastrofalne štete su uglavnom prirodne pojave (oluja, zemljotres, itd.), a mogu biti i požar, štrajk, nemiri koji se javljaju u toku ugovorenog perioda, a prouzrokuju velike ljudske i novčane gubitke.
Osiguravač snosi sve štete koje su ispod nivoa samopridržaja i iznad limita pokrića ugovora, a reosiguravač one koje su se našle u okviru pokrića (štete veće od nivoa samopridržaja, a manje od limita). Primena teorije ekstremnih vrednosti je krucijalna prilikom određivanja MMŠ, čija procena je izuzetno složen i stručan posao (koji rade ekonomisti, inženjeri, matematičari, seizmolozi itd.) i predstavlja samo predlog, ispod kog ne bi trebalo ići.

MMŠ sa predviđenim vremenom ponovnog nastanka katastrofalne štete se može utvrditi na osnovu krive učestalosti štete relevantnog portfolija.

Na evropskim tržištima, na primer, period ponovnog nastanka zemljotresa je 100 godina (za zemlje u području visoke seizmičke aktivnosti), 500 godina (za zemlje u području umerene seizmičke aktivnosti) i 1000 godina (u zemljama u području niske seizmičke aktivnosti).

Logično je da se postavi pitanje:

„Koliko prosečno protekne vremena između određenih ekstremnih događaja?“

Zbog toga nas interesuje kako se matematički tumači period ponovne pojave događaja.
Neka je

- (X_i) niz iid slučajnih promenljivih sa neprekidnom funkcijom raspodele F
- u prag
- $\left(I_{\{X_i>u\}}\right)$ niz Bernoullievih promenljivih sa verovatnoćom uspeha $p = \bar{F}(u)$.

Onda je vreme nastanka prvog uspeha tj. prvi prelazak preko praga

$$L(u) = min\{i \geq 1 : X_i > u\}$$

geometrijska slučajna promenljiva sa raspodelom

$$P(L(u) = k) = (1-p)^{k-1}p\ , k = 1,2, \dots$$

Primetimo da iid slučajne promenljive

$$L_1(u) = L(u), L_{n+1}(u) = min\{i > L_n(u) : X_i > u\}\ , n \geq 1$$

predstavljaju vremenske periode između uspešnih prelazaka preko praga u od (X_n).

Period ponovne pojave $\{X_i > u\}$ *je* $E\big(L(u)\big) = p^{-1} = (\bar{F}(u))^{-1}$ i teži u ∞ kada $u \to \infty$. Verovatnoću da će biti najmanje jedan prelazak praga u pre trenutka k (ili u okviru k posmatranja) definišemo

$$r_k = P(L(u) \le k) = p\sum_{i=1}^{k}(1-p)^{i-1} = 1-(1-p)^k,\ k \in \mathbb{R}.$$

Zatim, verovatnoća da će doći do prelaska praga u pre perioda ponovne pojave događaja je

$$P\Big(L(u) \le E\big(L(u)\big)\Big) = P(L(u) \le [1/p]) = 1-(1-p)^{[1/p]}$$

Za više pragove u tj. kada $u \uparrow \infty$, pa samim tim $p \downarrow 0$ dobijamo

$$\lim_{u\uparrow\infty} P\Big(L(u) \le E\big(L(u)\big)\Big) = \lim_{p\downarrow 0}\Big(1-(1-p)^{\left[\frac{1}{p}\right]}\Big) = 1-e^{-1} = 0.63212$$

Sada ako razmišljamo da je period ponovne pojave događaja t godina, onda na osnovu svega prethodno navedenog

$$t = E[L(u_t)] = \frac{1}{\bar{F}(u_t)}.$$

Dakle, procena MMŠ koja se odnosi na period ponovne pojave događaja od t-godina se svodi na

$$\hat{u}_t = \hat{F}^{\leftarrow}(1-t^{-1})$$

gde $\hat{F}$ predstavlja raspodelu procenjene veličine odštete (kriva učestalosti štete).

Na osnovu teorije ekstremnih vrednosti, kod ugovora o reosiguranju, određuju se i odbici, limit i delimično premije (jer je uklučeno dosta tržišnih faktora i alternativnih tehnika - metoda simulacije i analiza stresnih scenarija). Takođe, za veliki broj pojedinačnih potraživanja najvažnija je procena (prevashodno nestohastičkim sredstvima) ukupne izloženosti, odnosno cena ukupnog gubitka osiguranog sistema.

Stalna tema, ili pak pitanje je:

„U slučaju prirodnih katastrofa, da li su primarni osiguravači kupili dovoljno pokriće?“

ili ekvivalentno

„Kako se procenjeni samopridržaj upoređuje sa limitom ugovora?“

i zaista,

„Ukoliko je veće pokriće neophodno, odakle dolazi potreban spekulativni kapital?“

Što ćemo pokušati da objasnimo preko nekih instrumenata alternativnog reosiguranja.

7.1. Teorijski osvrt na alternativne instrumente reosiguranja

7.1.1 Finansijski derivati

Finansijski derivati su specifični kupoprodajni ugovori koji osiguravaju rizik poslovanja na tržištu kapitala. Njihova vrednost je izvedena (derivirana) na osnovu vrednosti drugih instumenata koji su predmet ugovora, kao što su druge hartije od vrednosti, razne referentne stope (poput kamatnih stopa ili valutnih kurseva) ili indeksi.

U najširoj kvantifikaciji derivate možemo podeliti na:

- Linearne *(forvard, fjučers i svop ugovori)* – obavezuju ugovorne strane da da razmene novac ili robu po prema unapred utvrđenom rasporedu u budućnost
- Nelinearne *(opcije)* – daju pravo, ali ne povlače i obavezu da se izvrši neka transakcija u budućnosti tj. da kupi ili proda neku aktivu po unapred fiksiranoj ceni K.

  One se mogu podeliti:
  - prema vremenu izvršenja:
    (a) Evropske opcije – mogu se izvršiti samo na dan dospeća
    (b) Američke opcije – mogu se izvršiti u bilo kom trenutku

  - prema pravu koje daju:
    (a) Call opcija – daje pravo na kupovinu, a vrednost je $C_T = max\{S_T - K, 0\}$
    (b) Put opcija – daje pravo na prodaju, a vrednost je $P_T = max\{K - S_T, 0\}$
    gde je K cena izvšenja, a S_T cena osnovne aktive.

7.1.2 Derivati osiguranja

Tokom devedesetih godina dvadesetog veka, javljaju se derivati osiguranja putem kojih se vrši transfer rizika osiguranja na tržište kapitala (sekjurizacija), odnosno transfer rizika sa osiguravača i reosiguravača na investitore.

Nakon perioda velikih zemljotresa i uragana drastično se uvećala cena reosiguranja imovine od katastrofalnih događaja, a reosiguravači su bili u nezadovoljavajućoj finansijskoj situaciji u pogledu sposobnosti pokrića preuzetih rizika. Kako su pokrića katastrofalnih događaja postala ili skupa ili nedostupna, tako su mnogi katastrofalni rizici ostali samo delimično pokriveni, pa se pažnja posvetila iznalaženju alternativnih oblika upravljanja rizikom. Razvijala se nova vrsta finansijskih instrumenata, pomoću kojih bi prebacili rizik osiguranja na tržište kapitala. Pretpostavlja se da su tržišta kapitala u stanju da bez problema apsorbuju štete koje nastaju usled velikih katastrofalnih događaja, budući da imaju veliki obim trgovine.

U nastavku se detaljnije razmatraju dva tipa derivata osiguranja:

1. fjučersi povezane sa rizicima katastrofalnih šteta *(Cat fjučersi)*
2. PSC opcije

7.1.2.1 Cat fjučersi

Čikaški odbor za trgovinu (CBOT – Chicago Board of Trade) je 1992. godine počeo sa upotrebom katastrofalnih fjučersa, koji su alternativa Cat-XL ugovorima reosiguranja.
Najjednostavnije objašnjeno, fjučers ugovor predstavlja sporazum između dve strane o određenoj razmeni (kupovini ili prodaji) neke aktive na određen datum u budućnosti po unapred utvrđenoj ceni. Strana ugovora koja kupuje aktivu zove se duga strana (eng. long position), a strana koja prodaje – kratka strana (eng. short position).

Da bi se ilustrovalo kako funkcioniše, zamislimo da smo sklopili fjučers ugovor 30. juna prema kome treba da platimo 400$ 30. septembra u zamenu za jednu uncu (82,35 g) zlata koje se isporučuje 30. septembra. Ukoliko bi jedinicu mere – unca zlata zamenili sa raciom šteta osiguravača, dobili bismo definiciju koja približno odgovara Cat fjučers ugovoru.

Glavni problem prilikom kreiranja ovog novog proizvoda bio je u konstrukcija podloge, odnosno ekvivalenta pomenutom zlatu. Iz tog razloga, formirani su osiguravajući pool-ovi (udruženja), omogućavajući na taj način širu bazu podataka o gubicima na tržištu nekrentnina. Kompanije su prevashodno grupisane u udruženja po geografskoj osnovi. Iz takvog udruženja, mogao se konstruisati sveobuhvatniji racio šteta, koji predstavlja odnos nastalih šteta i zarađene premije i pokazuje da li premije pokrivaju rizik preuzet po osnovu ugovora o reosiguranju.

Na osnovu stohastičkog proces definisana je podloga na osnovu koje se mogu izvesti različiti derivati (poput fjučersa i opcija). Ukoliko je vreme dospeća T, onda je $\mathrm{V(T)}$ vrednost Cat fjučersa u trenutku dospeća:

$$V(T) = \$25\,000 \times min\left\{\frac{S_p(T)}{P_p(T)}, 2\right\} \tag{7.1.2.1}$$

gde $S_p(T)$ predstavlja štete udruženja (pool-a), a $P_p(T)$ (determinističke) premije koje pokrivaju gubitke u vremenu do dospeća $[0, T]$. $S_p(T)$ je promenljiva u koju su uključene stvarno nastalih i rezervisane štete kao i datumi pristizanja zahteva za odštetu i naknade štete.

Uobičajeno, prva tri meseca (kvartal u kome se desio katastrofalni događaj) su predstavljala period u kome su pristizali zahtevi za odštetu, a naredna tri meseca (drugi kvartal) su dodata kako bi se ti zahtevi isplaćivali. Po isteku ovih 6 meseci (period izveštavanja) veliki procenat zahteva je bio izmiren (80-90%). Vrednost $V(T)$ je nakon toga ubrzo bila na raspolaganju za međukvartalni izveštaj, dok se krajnji izveštaj za ovaj konkretni fjučers objavio tokom četvrtog meseca nakon perioda izveštavanja.

Da bismo videli kako određeni osiguravači vlasništva mogu iskoristiti ove fjučerse prilikom hedžovanja (zaštite, kako bi smanjili ili uklonili rizik koji se odnosi na neku drugu investiciju) označimo sa $S_i(t)$, odnosno $P_i(t)$, tok šteta osiguravača, odnosno funkciju premije. Pretpostavimo i da je racio šteta fjučersa 0,6 odnosno da je racio šteta za udruženje 60%. Osiguravač zainteresovan da prihvati racio šteta od 60% u trenutku dospeća T može ovo ostvariti kupovinom $n_i = P_i(T)/25\,000$ fjučersa po navedenom raciju šteta od 0,6.
Radi jednostavnosti, pretpostavlja se da su svi zahtevi za odštetu rešeni (plaćeni) do kraja perioda izveštavanja. Finansijski kapital osiguravatelja u trenutku dospeća T postaje:

$$P_i(T) - S_i(T) + \textit{transakcioni dobitak ili gubitak fjučersa}$$

$$
\begin{aligned}
&= P_i(T) - S_i(T) + \left[n_i \times 25\,000 \times min\left\{ \frac{S_p(T)}{P_p(T)}, 2 \right\} - n_i \times 25\,000 \times 0{,}6 \right] \\
&= P_i(T) \left[(1 - 0{,}6) + \left(min\left\{ \frac{S_p(T)}{P_p(T)}, 2 \right\} - \frac{S_i(T)}{P_i(T)} \right) \right] \\
&= P_i(T)(0.4 + \Delta_{i,p}(T))
\end{aligned}
$$

Ako je $\Delta_{i,p}(T) = 0$ tj. ako osiguravateljev racio šteta tačno odgovara raciju udruženja, onda je njegov/njen racio šteta $S_i(T)/P_i(T)$ u vreme dospeća tačno 60%. Zavisno od vredosti $\Delta_{i,p}(T)$ biće neophodno kupiti više ili manja fjučersa da bi se dostigla zahtevana zaštita.

Nije teško korigovati dokaz kada imamo recimo $100(1-\delta)\%$ rešenih (plaćenih) zahteva za odštetu.

Cat fjučers ugovori su imali mnogobrojne nedostatke, što su razlozi za njihov neuspeh.
Neki od njuh su:

- Razlika u vremenu: kvartalni fjučersi naspram jednogodišnjih ugovora o reosiguranju
- Informacije o cenama su pristizale vrlo sporo i bile nepotpune
- Opasnost od negativnog izbora i moralnog hazarda
- Pitanje ko prodaje ove fjučerse

7.1.2.2 PSC opcije

Čikaški odbor za trgovinu je reagovao na kritiku tržišta i 1995. godine pokrenuo novu generaciju takozvanih PCS opcija koje su osmišljene kao suprotnost očiglednim nedostacima Cat fjučersa. Generalno gledano, opcijama se trguje bolje, posebno kupovnim opcijama, jer se osiguravajuća društva mogu pojaviti na obe strane transakcije, tj. kao kupac i kao prodavac.

PSC opcije su zasnovane na PSC indeksu (indeks agencije za servisiranje imovinskih odštetnih zahteva – Property Claims Service indices), koji prati ukupne gubitke nastale usred katastrofalnih događaja u određenom regionu i određenom vremenu. Određivanje cene ovog derivata osiguranja se najčešće zasniva na simulaciji, jer se Black Scholes – ova formula ne može primenjivati.

Iako derivati osiguranja postoje već više od dvadeset godina, ne postoji neko jedinstveno rešenje koje se koristi za praćenje rizika na globalnom nivou, ali su omogućene stohastičke metodologije potrebne za formiranje različitih delova te globalne alatke.
Sledeći deo bi trebalo shvatiti u kontekstu upravo pomenutog iskaza.

Napomena (o raciju šteta). Pre matematičke analize pomenutih proizvoda, razmatrićemo realan primer primene racia šteta. U njemu se želi prikazati koliko je teško i sporo predvideti racio šteta.
Northridge zemljotres se dogodio 1994. godine u južnoj Kaliforniji, Sjedinjene Američke Države. Postavljeno je pitanje kako na osnovu istorijskih podataka predvideti racio šteta u 1994. godini?

U tabeli su prikazani podaci kalifornijskog odeljenja za osiguranje (Institut za informacije o osiguranjima).

Godina	racio šteta	Godina	racio šteta
1971	17,4	1983	2,9
1972	0	1984	5,0
1973	0,6	1985	1,3
1974	3,4	1986	9,3
1975	0	1987	22,8
1976	0	1988	11,5
1977	0,7	1989	129,8
1978	1,5	1990	47,0
1979	2,2	1991	17,2
1980	9,2	1992	12,8
1981	0,9	1993	3,2
1982	0	1994	?

Tabela 6. Racio štete za period od 23 godine

Odgovor je dobijen tek 1995. godine.
Racio šteta za 1994. godinu je iznosio 2272,7.

7.2 Matematički aspekt ugovora o reosiguranju

U ovom delu razmatraćemo neke od ugovora u reosiguranju sa matematičkog aspekta, uz primenu teorije ekstremnih vrednosti i fluktuacije slučajnog hoda. Individualni iznosi šteta X_n su iid nenegativne, nedegerativne promenljive sa zajedničkom funkcijom raspodele F, nezavisne od $N(t)$ broja zahteva za odštetu pristiglih do trenutka t. Suma ne mora nužno da bude Poissonov proces, iako bi slučajne promenljive u sumi bi trebale imaju Poissonovu raspodelu verovatnoće.

Kao što znamo, ukupan iznos štete jednog portfolija osiguranja je dat procesom

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \text{ , } t \geq 0$$

tokom kog pretpostaviljamo da $\mu = E[X_1]$ postoji.

Neka je

$$X = X_1,\ \mu(t) = E[S(t)] = \mu E[N(t)], t \geq 0$$

Posebno smo zainteresovani za raspodelu sa teškim repom F jer su znatno realniji modeli zahteva za odštetu u kontekstu reosiguranja.

7.2.1 Cat fjučersi

Vrednost $V(t)$ Cat fjučersa u trenutku dospeća T bila je (7.1.2.1)

$$V(T) = \$25\ 000 \times min\left\{\frac{S(T)}{P(T)}, 2\right\}$$
$$= \$25\ 000 \times \left(\frac{S(T)}{P(T)} - max\left\{\frac{S(T)}{P(T)} - 2{,}0\right\}\right)$$

Radi pojednostavljenja označavanja, ne koristimo sufiks p koji se odnosio na pool (udruženje).
Poslednja jednačina predstavlja razliku duge pozicije u raciju šteta udruženja i kratke pozicije Evropske call opcije, gde je cena osnovne aktive racio šteta, a 2 cena izvršenja prilikom dospeća u trenutku T.

Otuda u principu mogućnost da se cena fjučersa određuje na osnovu standardne teorije formiranja cena koja isključuje mogućnost arbitraže.

Vrednost pristiglih zahteva za odštetu u trenutku t, $V(t)$ jednaka je

$$V(T) = E^Q\left[e^{-r(T-t)}V(T)|\mathcal{F}_t\right], 0 \leq t \leq T \qquad (7.2.1.1)$$

gde je r bezrizična kamatna stopa, a $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ familija σ-algebri (filtracija) tako da $\mathcal{F}_t$ predstavlja sve dostupne informacije do trenutka t, uključujući i t. Indeks Q se naziva ekvivalentna martingalna mera (ili rizik-neutralna mera, Q-mera) i nezaobilazna u finansijskim modelima prilikom formiranja cena.

Ona predstavlja meru verovatnoće koja proizilazi iz pretpostavke da je trenutna vrednost svih aktiva jednaka očekivanoj diskontnoj budućoj vrednosti tih aktiva nerizičnom kamatnom stopom.

Da bi odredili cenu derivata, prvo prilagođavamo verovatnoće budućih ishoda tako da ne uključuju efekat rizika, a zatim određujemo očekivanje pod prilagođenim verovatnoćama, koje se nazivaju rizik-neutralne verovatnoće i čine riziko-neutralnu meru.

Matematički, prilagođavanje verovatnoća je ustvari transformacija mere u ekvivalentnu martingalnu meru. Ovo je moguće uz pretpostavku da nema arbitraže. Ako je tržište kompletno (svaki ugovor tada ima jedinstvenu fer vrednost, pa je moguće vrednovati razne ugovore na dosledan način i uzimajući vrednosti podloge jedne u odnosu na drugu), onda je rizik-neutralna mera jedinstvena.

Sa stohastičkog aspekta, podloga se definiše na prostoru verovatnoće

$$\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, P\right)$$

I proces $(S(t))$ je po pretpostavci adaptiran filtraciji $(\mathcal{F}_t)$ tj. za svako t, $S(t)$ je $\mathcal{F}_t$-merljivo. Rizik-neutralna mera je mera Q koja je ekvivalentna meri P u kojoj su sve diskontovane cene aktive martingali, tako da $(S(t))$ postaje Q-martingal.

Unutar ovog okvira možemo razmotriti rešavanje problematike u vezi sa formiranjem cena. Međutim, u slučaju Cat fjučersa, ovo je daleko od istine. Ova cela postavka funkcioniše kada $(S(t))$ prati geometrijsko Brownovo kretanje. Znamo da je podloga najčešće formirana mešovitim Poissonovim, mešovitim kombinovanim Poissonovim ili pak Coxovim procesom. U ovim slučajevima, najčešće zbog slučajnih skokova koji odgovaraju pojedinačnim iznosom zahteva za odštetu, tržište na osnovu $(S(t))$ je nekompletno i samim tim dozovljava beskonačno mnogo ekvivalentnih martingalnih mera, pa se postavlja pitanje koju odabrati?

Radi boljeg razumevanja, izraza (7.2.1.1) svakako je korisno izračunati svojstva raspodele $V(t)$ pod uticajem takozvane mere P. Računica je prikazana dole.

Uglavnom, $P(t)$ može biti uzeto kao proširena verzija srednje vrednosti $\mu(t)$ te je stoga

$$P(t) = c\mu(t),\, t \geq 0$$

za neku konstantu je $c > 1$, ali mi zahtevamo samo $c > 0$.

Za procenu fjučers ugovora korištenjem mere P od posebnog je značaja izračunati

$$E[V(T)] = E\left[\$25\,000 \times \left(\frac{S(T)}{P(T)} - max\left\{\frac{S(T)}{P(T)} - 2{,}0\right\}\right)\right]$$

S obzirom da

$$E\left[\frac{S(T)}{P(T)}\right] = \frac{\mu(T)}{c\mu(T)} = \frac{1}{c}$$

Preostaje da se izračuna

$$E\left[max\left\{\frac{S(T)}{P(T)}-2{,}0\right\}\right]=E\left[\left(\frac{S(T)}{P(T)}-2\right)^{+}\right]$$

Jedan od ciljeva ovog dela je da se prikaže asimptotska vrednosti, ali i za varijanse od $V(T)$. Iz tog razloga iskoristićemo rezultat velikog odstupanja za $S(t)$ utvrđen Teoremom 5.4. S obzirom da je T generalno malo (recimo tri meseca, tj. 90 dana), a $N(T)$ veliko, možemo govoriti o velikoj gustini podataka i generalizovanom Cramer-Lindbergovom modelu u meri u kojoj se zahteva samo da $E[N(t)]$ postaje veliko sa povećanjem vremena.

7.2.2 Ugovori reosiguranja slučajnog hoda

Ovde, pretpostavimo da je $(S(t))$ dat Cramer-Lundbergovim modelom, $(N(t))$ homogeni Poissonov proces sa konstantnim intenzitetom $\lambda > 0$.

Osvrnućemo se na tri osnovna (tradicionalna) tipa ugovora o reosiguranju:

a) Proporcionalno reosiguranje
b) Reosiguranje viška gubitka
c) Reosiguranje viška šteta

sa tačke gledišta reosiguranja.

a) Proporcionalno reosiguranje
Ovde jednostavno deo $p \in (0,1)$ svakog zahteva (dakle p-ti deo celokupnog portfolia) pokriva reosiguravača. Kvota određuje kako se obaveze, premije i štete raspoređuju između osiguravača i reosiguravača.
Dakle, reosiguravač isplaćuje iznos $R_1(t) = pS(t)$ kolika god da je šteta.

b) Reosiguranja viška gubitka
Reosiguravač pokriva gubitke u portfoliju koji su iznad unapred definisanog K, takozvanog samopridržaja osiguravača. Ovo znači da reosiguravač plaća iznos $R_2(t) = (S(t) - K)^+$. Ovaj oblik reosiguranja koristan je kompanijama kako bi se zaštitile od nesolventnosti usled prevelikih odšteta.

c) Reosiguranje viška šteta
Reosiguravajuća kompanija plaća sve individualne gubitke koji prevazilaze D, što iznosi $R_3(t) = \sum_{i=1}^{N(t)}(X_i - D)^+$. D ima različite nazive u različitim granama osiguranja.
U životnom osiguranju, se naziva samopridržaj osiguravača(ili paritet), a u neživotnom osiguranju, gde je veličina gubitka nepoznata unapred, D se naziva odbitak.

U realnosti, reosiguravač možda neće osigurati celokupni rizik koji prevazilazi D već pomoću jednog ili više limita pokrća (layera) će osigurati štete za interval $(D_1, D_2]$ ili intervale. Ovo se može uraditi direktno ili putem reosiguranja od strane drugog reosiguravača.

Veoma je bitno proceniti srednje vrednosti i varijanse gubitaka reosigguranja R_1, R_2, R_3.

Pre svega procenjujemo verovatnoću ovih ugovora o reosiguranju, ovo je bitno zbog velikih vrednosti x.

$$P(R_1 > x) = P\big(S(t) - \mu(t) > p^{-1}x - \mu(t)\big) \tag{7.2.2.1}$$

$$\begin{aligned} P(R_2 > x) &= P((S(t) - K)^+ > x) = P(S(t) - K > x) \\ &= P(S(t) - \mu(t) > x + K - \mu(t)) \end{aligned} \tag{7.2.2.2}$$

$$\begin{aligned} P(R_3 > x) &= P\Big(\textstyle\sum_{i=1}^{N(t)} (X_i - D)^+ > x\Big) \\ &= P\Big(\textstyle\sum_{i=1}^{N(t)} (X_i - D)^+ - \lambda E[(X - D)^+]t > x - \lambda E[(X - D)^+]t\Big) \end{aligned} \tag{7.2.2.3}$$

x i K u (7.2.2.2) obično zavise od t.

Možemo primeniti Centralnu graničnu teoremu za procenu verovatnoće (7.2.2.1) - (7.2.2.3) gde je $D[X] < \infty$.

Na primer, Teorema D15 i

$$x_t(c) = p\Big(\mu(t) + c\sqrt{\lambda t(D[X] + \mu^2)}\Big),\ c \in \mathbb{R},$$

daje

$$P\big(R_1(t) > x_t(c)\big) \to \overline{\Phi}(c)$$

gde Φ označava funkciju raspodele standardne normalne raspodele.
Stoga Centralna granična teorema pruža odgovor za relativno malo x_t reda $\sqrt{t}$ oko srednje vrednosti $\mu(t)$.
Ako je x istog reda kao i srednja vrednost $\mu(t)$, ili većeg, rezultati velikih odstupanja su odgovarajuće alatke.

U kontekstu ugovora o reosiguranja viška gubitka, takođe je od interesa izručavanje

$$E\left[\left(\frac{S(t)}{P(t)} - K\right)^+\right] \text{ i } D\left[\left(\frac{S(t)}{P(t)} - K\right)^+\right] \tag{7.2.2.4}$$

za pozitivnu konstantu K i premiju $P(t) = c\mu(t)$ za neku konstantu $c > 0$. Primetimo da je $S(t)/P(t)$ racio gubitka u trenutku t upoređen sa fiksnim limitom K. Verovatnoće velikih odstupanja takođe mogu da procene (7.2.2.4).

Glavna alatka za rad sa problemima koji su spomenuti u primerima 7.2.1. i 7.2.2 je rezultat Teoreme 6.4.

Pod pretpostavkom da je $\bar{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ za neke $\alpha > 1$ odnos

$$P(S(t) - \mu(t) > y) \sim E[N(t)]\bar{F}(y) = E[N(t)]P(X > y) \tag{7.2.2.5}$$

je uniforman za $y \geq \gamma\mu(t)$ za svako pozitivno $\gamma > 0$ i obezbeđuje $E[N(t)] \to \infty$ kada $t \to t_0 \in (0, \infty]$.

Ova formula odmah daje aproksimaciju verovatnoća (7.2.2.1) - (7.2.2.3) kada je x istog reda kao i $\mu(t)$.

Na primer, razmotrimo situaciju (6.2.2.1) sa $y_t(c) = c\mu(t)$ za neko $c > p$.
Onda

$$P\big(R_1(t) > y_t(c)\big) \sim \lambda t \bar{F}\big((p^{-1}c - 1)\mu(t)\big)$$

tj. $P\big(R_1(t) > y_t(c)\big) \in \mathcal{R}_{-\alpha+1}$ i otuda ova verovatnoća nije beznačajna čak ni za veliko t.
U (7.2.2.5) asimptotska analiza postaje relativno jednostavna. Prema tome

$$E\left[\left(\frac{S(t)}{c\mu(t)} - K\right)^+\right] = E\left[\frac{S(t)}{c\mu(t)} - K\right] I_{\{S(t)/(c\mu(t)) - K > 0\}} = \int_0^\infty P\left(\frac{S(t)}{c\mu(t)} - K > x\right) dx$$
$$= \frac{1}{c\mu(t)} \int_{(Kc-1)\mu(t)}^\infty P(S(t) - \mu(t) > x) dx \qquad (7.2.2.6)$$

gde su c, K pozitivne konstante takve da

$$\gamma = Kc - 1 > 0$$

Takođe,

$$D\left[\left(\frac{S(t)}{c\mu(t)} - K\right)^+\right]$$
$$= D\left[\frac{S(t)}{c\mu(t)} - K\right] I_{\{S(t)/(c\mu(t)) - K > 0\}}$$
$$= \int_0^\infty P\left(\frac{S(t)}{c\mu(t)} - K > \sqrt{x}\right) dx - \left(\int_0^\infty P\left(\frac{S(t)}{c\mu(t)} - K > x\right) dx\right)^2$$
$$= \frac{2}{c\mu(t)} \int_{\gamma\mu(t)}^\infty \left(\frac{x}{c\mu(t)} - \frac{\gamma}{c}\right) P(S(t) - \mu(t) > x) dx \qquad (7.2.2.7)$$
$$- \left(\frac{1}{c\mu(t)} \int_{\gamma\mu(t)}^\infty P(S(t) - \mu(t) > x) dx\right)^2$$

Ovo rešava odgovarajuće probleme očekivanja i varijanse cene Cat fjučersa (pogledaj deo 7.2.1) i ugovora o reosiguranju viška gubitka (deo 7.2.2).

Pošto je relacija (7.2.2.5) uniformana za $x > \gamma\mu(t)$, dato $E[N(t)] \to \infty$ jednostavan analitički argument primenjuje se na (7.2.2.6) i (7.2.2.7) te dobijamo

$$E\left[\left(\frac{S(t)}{c\mu(t)} - K\right)^+\right] \sim \frac{1}{c\mu} \int_{\gamma\mu E[N(t)]}^\infty \bar{F}(y) dy$$

pod uslovom $\alpha > 1$.

Zatim

$$D\left[\left(\frac{S(t)}{c\mu(t)}-K\right)^{+}\right]$$
$$\sim\frac{2}{c\mu}\int_{\gamma\mu E[N(t)]}^{\infty}\left(\frac{x}{c+\mu E[N(t)]}-\frac{\gamma}{c}\right)\bar{F}(x)dx-\left(\frac{1}{c\mu}\int_{\gamma\mu E[N(t)]}^{\infty}\bar{F}(x)dx\right)^{2}$$
$$\sim\frac{2}{c\mu}\int_{\gamma\mu E[N(t)]}^{\infty}\left(\frac{x}{c\mu E[N(t)]}-\frac{\gamma}{c}\right)\bar{F}(x)dx$$

pod uslovom $\alpha > 2$.

Primetimo da uslovi $\alpha > 1$ i $\alpha > 2$ garantuju postojanje očekivanja i varijansi $(S(t)/c\mu(t)-K)^{+}$ po navedenom redu.

Koristeći Karamatinu teoremu o ograničenoj funkciji (Teorema D11) dobijamo sledeće aproksimacije

$$E\left[\left(\frac{S(t)}{c\mu(t)}-K\right)^{+}\right]\sim\frac{\gamma E[N(t)]}{c(\alpha-1)}\bar{F}(\gamma\mu E[N(t)]), \tag{7.2.2.8}$$
$$D\left[\left(\frac{S(t)}{c\mu(t)}-K\right)^{+}\right]\sim\frac{2\gamma^{2}E[N(t)]}{c^{2}(\alpha-2)(\alpha-1)}\bar{F}(\gamma\mu E[N(t)]). \tag{7.2.2.9}$$

7.2.3 Fjučersi osiguranja (nastavak dela 7.2.1)

U kontekstu osiguravajućih fjučersa može biti od značaja razmatranje modela velike gustine za $(S(t))$ u fiksnom vremenskom periodu do vremena dospeća T (ili bolje rečeno do kraja perioda) mnogi zahtevi mogu ući u pool tako da će $E[N(t)]$ biti veliko. Drugi može biti uobličen po Poissonovoim $N(t)$ tako da $E[N(t)]\to\infty$ kao $t\to T$.

Za svako $t\in[0,T]$ uzmimo u obzir
$$V(t)=\$\,25\,000\times min\left\{\frac{S(t)}{c\mu(t)},2\right\}.$$

Oznaku $V(t)$ ne bi trebalo pomešati sa nearbitražnim vrednostima kao što je definisano u delu 7.2.1.
Iz (7.2.2.8) i (7.2.2.9) možemo izvući sledeće asimptotske izraze za $E[V(t)]$ i $D[V(t)]$ pod pretpostavkom da je $\gamma=2K-1=2c-1>0$ i postaviti

$$\tilde{V}(t)=V(t)/\$\,25\,000=\frac{S(t)}{c\mu(t)}-\left(\frac{S(t)}{c\mu(t)}-2\right)^{+}$$

Ako je $\alpha>1$, onda

$$E[\tilde{V}(t)]=\frac{1}{c}\left(1-\left(1+o(1)\right)\frac{\gamma E[N(t)]}{\alpha-1}\bar{F}(\gamma\mu E[N(t)])\right) \tag{7.2.3.1}$$

Ako je $\alpha>2$, onda

$$D[\tilde{V}(t)] = \frac{1}{c^2}\left(\frac{EX^2}{\mu^2 E[N(t)]} - \big(1 - o(1)\big)\frac{2\gamma^2 E[N(t)]}{(\alpha-2)}\bar{F}(\gamma\mu E[N(t)])\right) \quad (7.2.3.2)$$

Procena (7.2.3.1) uz pomoć (7.2.2.8) ne stvara teškoće.

Sledeće izvođenje je (7.2.3.2). Primetimo da uz (7.2.2.8) i (7.2.2.9)

$$\begin{aligned}
&D[\tilde{V}(t)] \\
&= E[\tilde{V}^2(t)] - \big(E[\tilde{V}(t)]\big)^2 \\
&= E\left[\left(\frac{S(t)}{c\mu(t)}\right)^2\right] + E\left[\left(\left(\frac{S(t)}{c\mu(t)} - 2\right)^+\right)^2\right] - 2E\left[\frac{S(t)}{c\mu(t)}\left(\frac{S(t)}{c\mu(t)} - 2\right)^+\right] - \big(E[\tilde{V}(t)]\big)^2 \\
&= E\left[\left(\frac{S(t)}{c\mu(t)}\right)^2\right] - E\left[\left(\left(\frac{S(t)}{c\mu(t)} - 2\right)^+\right)^2\right] - 4E\left[\left(\frac{S(t)}{c\mu(t)} - 2\right)^+\right] - \big(E[\tilde{V}(t)]\big)^2 \\
&= D\left[\frac{S(t)}{c\mu(t)}\right] - D\left[\left(\frac{S(t)}{c\mu(t)} - 2\right)^+\right] \\
&\quad -2\left(E\left[\left(\frac{S(t)}{c\mu(t)} - 2\right)^+\right]\right)^2 - \frac{2}{c}\gamma E\left[\left(\frac{S(t)}{c\mu(t)} - 2\right)^+\right] \\
&= \frac{EX^2}{c^2\mu^2 E[N(t)]} - \big(1 + o(1)\big)\frac{2\gamma^2 E[N(t)]}{c^2(\alpha - 2)}\bar{F}(\gamma\mu E[N(t)])
\end{aligned}$$

Velika odstupanja su uglavnom bila odgovarajuća alatka za ugovore i fjučerse iz delova 7.2.1 i 7.2.2, teorija ekstremnih vrednosti služi za probleme u vezi sa reosiguranjem. U portfoliju osiguranja smatramo da ima iid zahteva $X_1, \dots, X_{N(t)}$ koje će se desiti do trenutka t.

Proučimo primer uređenog uzorka čiji su indeksi slučajne promenljive

$$X_{N(t),N(t)} \le \cdots \le X_{1,N(t)}$$

Prisetimo se da je $\big(N(t)\big)$ nezavisno od (X_n) i da samim tim možemo zaključiti da je $\big(N(t)\big)$ homogeni Poissonov proces sa konstantnim intenzitetom $\lambda > 0$.

7.2.4. Raspodela broja zahteva za odštetu u layeru i najvećem k-tom zahtevu

Dotaćićemo se dva bitna pitanja u vezi sa reosiguranjem.

1. *„Koliko zahteva može da se desi u layeru $(D_1, D_2]$ ili (D_1, ∞) do vremena t?"*

To znači da smo zainteresovani za kvantitet

$$B_t(A) = \sum_{i=1}^{N(t)} I_{\{X_i \in A\}}$$

nekog Borelov skup A. Pod uslovom da $N(t)$, $B_t(A)$ imaju binomnu raspodelu sa verovatnoćom uspeha $F(A) = P(X \in A)$.

Stoga,

$$P(B_t(A) = l) \\ = \sum_{k=0}^{\infty} P(B_t(A) = l | N(t) = k) P(N(t) = k) \\ = e^{-\lambda t} \sum_{k=l}^{\infty} \left(\binom{k}{l} \big(F(A)\big)^l \big(\bar{F}(A)\big)^{k-l} \right) \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

Ovo rešava naš prvi problem.

Zavisno od tipa layera, možemo da procenimo $F(A)$ i $\bar{F}(A)$. Međutim, ukoliko pretpostavimo da se ograničenja layera povećavaju vremenom, možemo da primenimo Poissonovu aproksimaciju. Na primer, ako pretpostavimo da ograničenja layera formiraju niz (D_n) tako da $n\bar{F}(D_n) \to \tau$ za neko $\tau \in \mathbb{R}_+$. Onda po Teoremi D12

$$\sum_{i=1}^{N(n)} I_{\{X_i > D_n\}} \xrightarrow{d} Poi(\tau\lambda)$$

Posebno,

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} I_{\{X_i > D_n\}} = l \right) \to e^{-\tau\lambda} \frac{(\tau\lambda)^l}{l!}$$

Sledeće što se pitamo je

2. *„Šta znamo o veličini najvećih zahteva?"*

U Prepoziciji 4.1.1 govorili smo o raspodeli k-tog največeg redosleda statističkog $X_{k,n}$ u uzorku od n iid slučajnih promenljivih, naime

$$P\big(X_{k,n} \le x\big) = \sum_{r=0}^{k-1} \binom{n}{r} \bar{F}^r(x) F^{n-r}(x) \tag{7.2.4.1}$$

predstavlja verovatnoću da binomna slučajna promenljiva sa parametrima $\bar{F}(x)$ i n ne prelazi k.

Pod uslovom $N(t)$ dobijamo analognu formulu

$$\begin{aligned} P\big(X_{k,N(t)} \leq x\big) &= \textstyle\sum_{l=0}^{\infty} P(X_{k,l} \leq x | N(t) = l) P(N(t) = l) \\ &= e^{-\lambda t} \sum_{l=k}^{\infty} P(X_{k,l} \leq x \,| N(t) = l) \frac{(\lambda t)^l}{l!} \\ &= e^{-\lambda t} \sum_{l=k}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^{k-1} \binom{l}{r} \bar{F}^r(x) F^{n-r}(x) \right) \frac{(\lambda t)^l}{l!} \\ &= e^{-\lambda t} \sum_{r=0}^{k-1} \frac{(\lambda \bar{F}(x) t)^r}{r!} \sum_{l=r}^{\infty} \frac{\big(\lambda t F(x)\big)^{l-r}}{(l-r)!} \\ &= e^{-\lambda t \bar{F}(x)} \textstyle\sum_{r=0}^{k-1} \frac{(\lambda \bar{F}(x) t)^r}{r!} \end{aligned} \tag{7.2.4.2}$$

Predstavlja verovatnoću da Poissonova slučajna promenljiva sa parametrom $\lambda t \bar{F}(x)$ ne prelazi k.

Formula (7.2.4.1) može biti generalizovana na konačan vektor statistika višeg reda. Tačne računice (iako izvodljive) brzo postanu dosadne.

Dakle, asimptotska procena može biti korisna. Iskoristićemo rezultate iz dela 4.3.
Pošto $N(t)/t \xrightarrow{a.s.} \lambda$ za homogeni Poissonov proces $\big(N(t)\big)$ je deo Teoreme 4.3.2. Stoga pretpostavimo da $F \in MDA(H)$ za raspodelu velikih vrednosti H, tj. postojanje $c_n > 0$ i $d_n \in \mathbb{R}$ tako da

$$c_n^{-1}(M_n - d_n) \xrightarrow{d} H \tag{7.2.4.3}$$

gde $M_n = max(X_1, \dots, X_n)$.

Onda, za svako $k \geq 1$,

$$P\big(c_n^{-1}\big(X_{k,N(n)} - d_n\big) \leq x\big) \rightarrow \Gamma_k\left(-lnH^{\lambda}(x)\right), x \in \mathbb{R},$$

gde Γ_k označava nepotpunu Gama funkciju

$$\Gamma_k = \frac{1}{(k-1)!} \int_x^{\infty} e^{-t}\, t^{k-1} dt\,, x \geq 0.$$

Dobija se sledeća približna vrednost za funkciju raspodele od $X_{k,N(n)}$

$$P\big(X_{k,N(n)} \leq u\big) \approx \Gamma_k\left(-lnH^{\lambda}\left(\frac{u-d_n}{c_n}\right)\right).$$

Kako bismo predstavili dalju korisnu upotrebu teorije ekstremnih vrednosti, razmotrićemo još nekoliko reosiguravajućih ugovora koji su definisani kroz statistiku višeg reda slučajnog uzorka.

7.2.5 Drugi tipovi reosiguranja od ekstremnih šteta

U druge tipove ugovora o reosiguranju, između ostalog spadaju:

a) Reosiguranje najvećih zahteva za odštetu
U vreme kada je ugovor potpisan (tj. $t = 0$) reosiguravajuća kompanija garantuje da će k najvećih zahtevi za odštetu u intervalu $[0, t]$ biti pokriveni. Na primer, kompanija će pokriti 10 najvećih godišnjih zahteva u portfoliju tokom perioda od 5 godina, recimo.

To znači da nas interesuje kvantitet

$$R_4(t) = \sum_{i=1}^{k} X_{i,N(t)}.$$

bilo za konstantno k ili za k koja dovoljno sporo raste sa t.

b) ECOMOR ugovor o reosiguranju (Excedent du cout moyen relatif – Višak od prosečne relativne cene).
Ova forma ugovora se može smatrati reosiguranjem viška štete (vidi deo 7.2.2) sa nasumičnim odbitkom koji određuje k najveći zahtev za odštetu u portfoliju. Reosiguranje pokriva sve štete u iznosu kojim prevazilaze k najveći zahtev za odštetu. To znači da reosiguranje pokriva sumu zahteva za odštetu

$$R_5(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} \left(X_{i,N(t)} - X_{k,N(t)}\right)^+ = \sum_{i=1}^{k-1} X_{i,N(t)} - (k-1)X_{k,N(t)}$$

za konstantu $k \geq 2$. Veza sa teorijom ekstremne vrednosti je opet neposredna. Štaviše, $(k-1)/R_5$ veoma liči na Hillovu ocenu redovno varirajućeg repa (Definicija D13)

Kvantiteti $R_4(t)$ i $R_5(t)$ su funkcije k statistike višeg reda slučajnog uzorka, teorije koja je predstavljena u delu 4.3.
Stoga možemo izračunati ograničenja distribucije R_5 za svaku konstantu k pod pretpostavkom da je (7.2.4.3) zadovoljeno za odgovarajuće konstante c_n, d_n i distribuciju ekstremnih vrednosti H. Iz Teoreme 4.3.3 znamo da

$$\left(c_n^{-1}\left(X_{i,N(n)} - d_n\right)\right)_{i=1,..,k} \xrightarrow{d} \left(Y_\lambda^{(i)}\right)_{i=1,\dots,k}$$

gde $\left(Y_\lambda^{(1)}, \dots, Y_\lambda^{(k)}\right)$ označava k-dimenzionalnu ekstremnu varijablu koja odgovara distribuciji ekstremnih vrednosti H^λ.

Argumenti kao u delu 4.2, videti na primer Posledica 4.2.7, daje

$$c_n^{-1} R_5(n) = c_n^{-1}\left(\sum_{i=1}^{k-1} X_{i,N(n)} - (k-1)X_{k,N(n)}\right) \xrightarrow{d} \sum_{i=1}^{k-1} i\left(Y_\lambda^{(i)} - Y_\lambda^{(i+1)}\right)$$

za $k \geq 2$.

Sada pretpostavimo da $F \in MDA(A)$ gde $A(x) = exp\{-exp\{-x\}\}$ označava Gumbelovu distribuciju.

Računica pokazuje da

$$\left(Y_\lambda^{(1)}, \dots, Y_\lambda^{(k)}\right) \triangleq \left(Y_\lambda^{(1)} + ln\lambda, \dots, Y_\lambda^{(k)} + ln\lambda\right) \quad (7.2.5.1)$$

Dakle,

$$c_n^{-1} R_5(n) \xrightarrow{d} \sum_{i=1}^{k-1} i\left(Y_\lambda^{(i)} - Y_\lambda^{(i+1)}\right) \triangleq \sum_{i=1}^{k-1} E_i \quad (7.2.5.2)$$

za iid eksponencijalne slučajne promenljive E_i, gde (7.2.5.2) sledi iz Posledica 4.2.7. Otuda ograničenja u (7.2.5.2) imaju $\Gamma(k-1,1)$ distribuciju.

Tako lepa formula ne postoji za $F \in MDA(\Phi_\alpha)$ gde za neko $\alpha > 0$ označava Frechetovu raspodelu. Međutim, jednostavna računica pokazuje da postoji sledeći odnos

$$\left(Y_\lambda^{(1)}, \dots, Y_\lambda^{(k)}\right) \triangleq \left(\lambda^{1/\alpha} Y_1^{(1)}, \dots, \lambda^{1/\alpha} Y_1^{(k)}\right)$$

tako da udružena gustina $\left(Y_1^{(1)}, \dots, Y_1^{(k)}\right)$ može biti iskorištena za dobijanje ograničenja distribucije $R_5(n)$. Ovo međutim, najčešće vodi u komplikovane probleme numeričke integracije.
Isto zapažanje se takođe primenjuje na ograničenja distribucije kvantiteta $R_4(n)$ gde za svaku konstantu $k \geq 1$

$$c_n^{-1}(R_4(n) - kd_n) = c_n^{-1} \sum_{i=1}^{k-1}\left(X_{i,N(n)} - d_n\right) \xrightarrow{d} \sum_{i=1}^{k} Y_\lambda^{(i)} \quad (7.2.5.3)$$

U slučaju $F \in MDA(\Lambda)$ možemo dati eksplicitnu, mada komplikovanu formulu za ograničenja distribucije (7.2.5.3). Prisetimo se iz Primera 4.4 da

$$\left(E_{i,n} - lnn\right)_{i=1,\dots,k} \xrightarrow{d} \left(Y_1^{(i)}\right)_{i=1,\dots,k}, \; n \to \infty.$$

gde $\left(E_{i,n}\right)$ označava statistički redosled uzorka veličine n od iid standardnih eksponencijalnih slučajnih promenljivih E_i.

Iz Primera 4.2 znamo i da

$$\left(E_{i,n}\right)_{i=1,\dots,k} = \left(\sum_{j=1}^{n} j^{-1} E_j\right)_{i=1,\dots,n}$$

Stoga,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}\left(E_{i,n} - lnn\right) &\triangleq \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} j^{-1}E_j - klnn \\ &= \sum_{j=1}^{k} E_j + k\sum_{j=k+1}^{n} \frac{E_j - 1}{j} - k\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j} + k\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{j} - lnn\right) \\ &\xrightarrow{d} \sum_{j=1}^{k} E_j + k\sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{E_j - 1}{j} - k\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j} + k\gamma \\ &\triangleq \sum_{i=1}^{k} Y_1^{(i)}\end{aligned}$$

Gde $\gamma = 0.5772\ldots$označava Ojlerovu konstantu. Beskonačni niz zdesna konvergira pošto

$$D\left[\sum_{j=k+1}^{\infty} j^{-1}(E_j - 1)\right] = \sum_{j=k+1}^{\infty} j^{2} \sim\ k^{-1}$$

kada $k \to \infty$.

Sada, pozivajući se na (7.2.5.1), dobijamo formulu

$$\sum_{i=1}^{k} Y_{\lambda}^{(i)} = \sum_{i=1}^{k} Y_{1}^{(i)} + kln\lambda$$

$$= \sum_{j=1}^{k} E_j + k \sum_{j=k+1}^{\infty} j^{-1}(E_j - 1) + k\left(-\sum_{j=1}^{k} j^{-1} + \gamma + ln\lambda\right)$$

Za malu k raspodelu ovog ograničenja slučajna promenljiva može da se izvede kroz simulacije iid standardnih eksponensijalnih slučajnih promenljivih. Za veliko k asimtotska teorija je prikladna.

Zaključak

Koristeći matematičke metode teorije verovatnoće, statistike i finansijske matematike, uz pregled ekonomske teorije, sagledali smo neke od ugovora o reosiguranju i postali svesni kompleksnosti aktuarske profesije i neophodnosti ulaganja u njen razvitak.

Tokom istorije, naučna otkrića značajna za (re)osiguranje su: osnove određivanja životne rente (Jan de Vitu, XVII vek), otkrića u matematičkoj statistici – pre svega zakon velikih brojeva (Bernoulli, Laplas, Gauss), tablice smrtnosti (Engleska akademija nauka, XVIII vek) itd. Ona su postavila stabilnu osnovu za dalji razvoj ove oblasti.

Ako prošlost služi kao vodič, može se primetiti da ova industrija ima tendenciju da uči iz finansijski bolnog iskustva posle događaja koji su ih skupo koštali. Ali ipak, razorni događaji poslednjih godina su pokazali da ova industrija može efikasno da posluje i u ekstremnim okolnostima i da ima ključnu ulogu u finansiranju postkatastrofalnog oporavka. Mnoge multinacionalne (re)osiguravajuće kompanije ulažu ogromna sredstva u istraživanje, izradu sofisticiranog alata, kadar itd. u cilju kreiranja inovativnih načina poslovanja, kako bi išle u susret promenama i novokreiranoj tražnji na globalnom tržištu.

Reosiguranje će, u doglednoj budućnosti, sigurno biti dominantni oblik upravljanja rizikom osiguravajućih društava.

Literatura

[1] Embrechts P., Klüppelberg C., Mikosch T., *Modelling extremal events for Insurance and Finance*, Berlin: Springer-Verlag, 2008.

[2] Resnick S. I., *Heavy-tail phenomena: Probabilistic and Statistical Modeling*, New York: Springer, 2007

[3] Dembo A., Zeitouni O., *Large deviations techniques and applications*, New York: Springer, 1998.

[4] Bugmann C., *Proportional and Non-proportional Reinsurance*, Swiss Re, 1997

[5] Klüppelberg C. and Miklosch, T., *Large deviations of heavy-tailed random sums with applications to insurance*, J.Appl. Probab. 34, 1997

[6] Beirlantand J. and Teugels J.L., *Limit distributions for compounded sums of extreme order statistics*, J. Appl. Probab. 29, 557-574, 1992

[7] Nagaev A.V., *Integral limit theorems for large deviations when Cramers condition is not fulfilled I,II.*, Theory Probab. Appl. 14, 51-64 and 193 -208, 1969

[8] Gerber H.U. and Shiu E.S.W., *Option pricing by Esscher transforms.With discussion*, Trans. Soc. Actuar. 46, 1994

[9] Ostojić S., *Osiguranje i upravljanje rizicima*, Beograd: Data Status, 2007

[10] http://mathworld.wolfram.com

Biografija

Mirjana Veljković je rođena 27. januara 1986. godine u Čačku. Osnovnu školu „Feješ Klara“ je završila u Kikindi, kao đak generacije. Prirodni smer gimnazije „Jovan Jovanović Zmaj“ u Novom Sadu je završila školske 2004/2005. godine sa prosečnom ocenom 4.84.

Školske 2005/2006. godine upisala je osnovne akademske studije na Prirodno – matematičkom fakultetu u Novom Sadu, departmana za matematiku i informatiku, odseka za matematiku, smer matematika finansija. Dana 20.10.2009. godine je diplomirala sa prosečnom ocenom 9.76 i stekala zvanje diplomirani matematičar – matematika finansija.

Školske 2009/2010. godine upisala je master studije primenjene matematike na istom fakultetu. Zaključno sa septembarskim ispitnim rokom 2011. godine položila je sve predviđene ispite sa prosečnom ocenom 9.62.

Stipendista je fonda za mlade talente Republike Srbije za 2008/2009., 2009/2010. godinu, kao i Fonda „dr Zoran Đinđić“.

Trenutno radi kao statističar u belgijskoj firmi „Eyesee“ koja se bavi primenom eyetrackinga u oblasti marketinga.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET,
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj: RBR	
Identifikacioni broj: IBR	
Tip dokumentacije: TD	Monografska dokumentacija
Tip zapisa: TZ	Tekstualni štampani materijal
Vrsta rada: VR	Master rad
Autor: AU	Mirjana Veljković
Mentor: MN	prof. dr Dora Seleši
Naslov rada: NR	Primena teorije velikih devijacija u reosiguranju
Jezik publikacije: JP	Srpski (latinica)
Jezik izvoda: JI	s/e
Zemlja publikovanja: ZP	Srbija
Uže geografsko područje: UGP	Vojvodina
Godina: GO	2013.
Izdavač: IZ	Autorski reprint

Mesto i adresa: MA	Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, PMF, Trg Dositeja Obradovića 4
Fizički opis rada:	7 / 84 / 0 / 6 / 4 / 0 / 0

(Broj poglavlja, broj strana, br. literarnih citata, br. tabela, br. slika, br. grafika, br dijagrama).
FO

Naučna oblast: NO	Matematika
Naučna disciplina: ND	Aktuarska matematika
Predmetne odrednice, ključne reči: PO, UDK	Velika odstupanja, ugovori o reosiguranju, katastrofalni događaji, zahtev za odštetu
Čuva se: ČU	U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno – matematičkog fakulteta, Univerziteta u Novom Sadu
Važna napomena: VN	
Izvod: IZ	U ovom radu razmatrali smo primenu velikih devijacija u reosiguranju i teorijski i matematički analizirali različite tipove ugovore u reosiguranju (proporcionalne, neproporcionalne i alternativne).
Datum prihvatanja teme od strane NN veća : DP	11. jun 2013.
Datum odbrane : DO	
Članovi komisije : KO	
Predsednik :	dr Danijela Rajter-Ćirić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član :	dr Dora Seleši, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, *mentor*
Član :	dr Sanja Rapajić, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND INFORMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number: ANO	
Identification number: INO	
Document type: DT	Monograph type
Type of record: TR	Printed text
Contents Code: CC	Master's thesis
Author: AU	Mirjana Veljković
Mentor: MN	Dora Seleši Ph D.
Title: TI	Application of the theory of large deviations in reinsurance
Language of text: LT	Serbian
Language of abstract: LA	s/e
Country of publication: CP	Serbia
Locality of publication: LP	Vojvodina
Publication year: PY	2013
Publisher: PU	Author's reprint

Publ. place: University of Novi Sad, Faculty of Sciences, Department of Mathematics and Informatics, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: 7 / 84 / 0 / 6 / 4 / 0 / 0
(chapters/pages/quotations/tables/pictures/graphs/diagrams)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Actuarial mathematics
SD

Key words: Large deviation, reinsurance treaty, extremal event, claim

Holding data: In library of Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, Department of Mathematics and Informatics
HD

Note:
N

Abstract: In this thesis we considered application of the theory of large deviations in reinsurance and analyzed the theoretical and mathematical aspects of different types of reinsurance treaties.
AB

Accepted by the Scientific Board on: June 11, 2013.
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President: Danijela Rajter-Ćirić Ph D., Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Member: Dora Seleši Ph D., Associate Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, *mentor*

Member: Sanja Rapajić Ph D., Associate Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad