UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI
FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Mirjana Erić

RAZNI KONCEPTI POZITIVNOSTI MATRICA

- Master rad-

Mentor:
prof. dr Ljiljana Cvetković

Novi Sad, 2017

Sadržaj

Predgovor

Problem kojim se bavim u svom master radu jeste pozitivnost matrica. Motivaciju za ovu temu, tj. njene razne interpretacije, dobila sam učešćem na međunarodnoj naučnoj konferenciji GAMM u martu 2013. u Novom Sadu, gde sam po prvi put imala priliku da izlažem originalne rezultate iz oblasti numeričke linearne algebre. Pre svega želim da izrazim zahvalnost mentoru ovog rada prof. dr Ljiljani Cvetković za savete i pomoć koju mi je ukazala tokom izrade master rada, za znanje preneto tokom studija, a najviše na ukazanom poverenju. Zahvaljujući njoj odlučila sam da se ozbiljnije posvetim oblasti numeričke linearne algebre. Najveću zahvalnost dugujem svojoj porodici na podršci i ljubavi koju mi pružaju.

Uvod

Od samih početaka teorije matrica koncept pozitivnosti se razvijao i još uvek se razvija na mnogo različitih načina. Skoro svi oni imaju poreklo u primenama u realnom svetu. Aspekti teorije nenegativnih matrica mogu se naći u raznim knjigama. Ovaj master rad se sastoji od sedam poglavlja.
U prvom poglavlju rada čitaoca upoznajemo sa notacijom koja je korišćena pri izradi rada i dajemo uvid u osnovne definicije i teoreme.
Pojam pozitivnosti matrica koji je prvi razvijen jeste pozitivna definitnost. Zbog toga će drugo poglavlje master rada biti posvećeno ovoj specijalnoj klasi matrica.
Treći deo se odnosi na drugi koncept, pozitivnost po elementima, koji ima važnu primenu, na primer, u statistici, ekonomiji, transportu, itd. Bitno mesto u ovom delu zauzima dobro poznata Peron-Frobeniusova teorema, koju su dokazali Oskar Peron (1907) i Georg Frobenius (1912). Primenjuje se u teoriji verovatnoće, teoriji dinamičkih sistema, demografiji, itd.
Posebna pažnja će biti posvećena totalno pozitivnim matricama i njihovim potklasama, koje će biti prikazane u četvrtom poglavlju. Totalna pozitivnost je tema u linearnoj algebri i drugim aspektima matematike koja se stalno pominje u prethodnih 80 godina. Tako su godinama nuđeni različiti pogledi za totalnu pozitivnost, a kasnije su razvijeni od strane istaknutih matematičara. Značajan pristup može se videti u istraživačkom radu T. Ando, [1].
Nakon toga, peto poglavlje govori o matricama čiji su svi glavni minori pozitivni, koje se nazivaju P-matrice. P-matrice imaju značajnu ulogu u nekoliko oblasti, npr. u problemima linearne komplementarnosti, jer garantuju postojanje i jedinstvenost rešenja problema linearne komplementarnosti. Govorimo i o njihovoj potklasi, B-matricama, i C-matricama, kao i o primeni navedenih klasa na lokalizaciju karakterističnih korena.
Zatim, posebna pažnja biće posvećena dobro poznatoj klasi M-matrica, čije inverzne matrice imaju sve elemente nenegativne. M-matrice su podskup klase P-matrica. Koncept M-matrica je uveo Alexander Ostrowski (1937). Biće dat njihov detaljan pregled u šestom poglavlju.
U sedmom poglavlju su razmotrene neke mogućnosti proširenja SDD matrica, [6]. U istom poglavlju nove klase su primenjene na dva važna problema u linearnoj algebri: lokalizaciju karakterističnih korena i ocenu norme inverza date matrice.
Rad se završava navođenjem korišćene relevantne literature.

1

Preliminarni materijal

Za uspešno praćenje ovog rada potrebno je, pre svega, da se upoznamo sa oznakama koje su korišćene pri izradi rada, kao i da damo uvid u osnovne definicije i teoreme.

U čitavom radu za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$, sa $\mathbb{C}^n$ označavaćemo $n-$dimenzionalni kompleksni vektorski prostor vektor kolona $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$, gde je $x_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, a za $m, n \in \mathbb{N}$ sa $\mathbb{C}^{m,n}$ prostor svih $m \times n$ matrica sa kompleksnim elementima. Matricu $A \in \mathbb{C}^{m,n}$ obeležavamo sa $A = [a_{ij}]$ ili sa

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

gde su $a_{ij} := (A)_{ij} \in \mathbb{C}$, za sve $1 \le i \le m$, i sve $1 \le j \le n$.

Na sličan način, sa $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^{m,n}$ obeležavamo, redom, $n-$dimenzionalni vektorski prostor realnih vektor kolona i prostor realnih $m \times n$ matrica.

Sa I_n označavamo $n \times n$ jediničnu matricu, tj. matricu koja na dijagonali ima jedinice, dok su joj vandijagonalni elementi jednaki nuli. Kada je jasno o kojim dimenzijama se radi, pisaćemo samo I.

Za proizvoljnu kvadratnu matricu $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ skup njenih karakterističnih korena nazivamo **spektar** i obeležavamo sa $\sigma(A)$, tj.

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : det(\lambda I_n - A) = 0\}.$$

Sa A^T označavamo transponovanu matricu od A, a sa A^* hermitovanu.
Neka je $A = [a_{ij}]$ i $A_{ij} = (-1)^{(i+j)} M_{ij}$ kofaktor elementa a_{ij}, gde je M_{ij} podmatrica dobijena brisanjem $i-$te vrste i $j-$te kolone. Tada se matrica $adjA = [A_{ij}]^T$ naziva adjungovana matrica.

Sa $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ označavamo skup indeksa, a sa

$$r_i(A) := \sum_{j \in N \setminus \{i\}} |a_{ij}|,$$

gde je $i \in N$ obeležavamo sumu modula vandijagonalnih elemenata $i-$te vrste matrice A. Ako je matrica A reda $n = 1$ definišemo $r_1(A) = 0$.

Kvadratna matrica A je invertibilna ili regularna (nesingularna), ako postoji kvadratna matrica B, takva da je $AB = BA = I$. Ako postoji matrica B koja zadovoljava gornju jednakost, ona postoji jedinstveno, naziva se inverzna matrica za matricu A i označava se sa A^{-1}

Navodimo poznati rezultat o regularnosti matrica.

Teorema 1.0.1 ***(Levy-Desplanques teorema)*** *Neka je $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ proizvoljna matrica. Ako je*

$$|a_{ii}| > r_i(A) \quad \text{za svako} \quad i \in N, \tag{1.1}$$

tada je A regularna matrica.

Na osnovu uslova (1.1), koji ih definiše, ove matrice su dobile ime **strogo dijagonalno dominantne matrice** ili, skraćeno, **SDD** matrice.

Važno je napomenuti da je ova klasa matrica klasa koja se često susreće u praksi, u matematičkim modelima, kao što su, na primer, razni dinamički sistemi. SDD je poslužila kao izvor brojnih generalizacija. Zahvaljujući raznim načinima na koji se vrši generalizacija, dobijaju se novi rezultati o regularnosti, koji omogućavaju kvalitetnu mogućnost primene.

Od posebnog značaja su matrice čiju regularnost možemo proveriti ne računajući im determinantu. Tu spadaju strogo dijagonalno dominantne matrice. Međutim, kako je ovo veoma uska potklasa klase regularnih matrica, ona se proširuje matricama koje se mogu svesti na SDD matrice množenjem sa desne strane nekom pozitivnom dijagonalnom matricom. Takve matrice se zovu **generalizovane dijagonalno dominantne matrice** (GDD).

Definicija 1.0.1 *Matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, naziva se generalizovano dijagonalno dominantna ili, kratko, GDD matrica, ako postoji pozitivan vektor $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$, takav da je*

$$|a_{ii}|x_i > \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}|x_j,$$

za svako $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Budući da razmatramo karakteristične korene matrice i njihovu oblast lokalizacije, neizostavna je čuvena Geršgorinova teorema. Gerğorinova teorema inspirisala je mnoga dalja istraživanja u oblasti lokalizacije karakterističnih korena, kako u prošlosti, tako i u savremenoj literaturi.

Veza SDD matrica sa Geršgorinovom teoremom je vrlo bliska. Naime, postoji ekvivalencija između Geršgorinove teoreme i teoreme 1.0.1. Ta ekvivalencija, sem što važi za pomenute dve teoreme, predstavlja i opšti odnos teorema o regularnosti matrica i teorema o lokalizaciji spektra.
Polazeći od raznih potklasa GDD matrica, možemo dobiti oblasti lokalizacije karakterističnih korena, pri tome koristeći istu ideju kao u dokazu Geršgorinove teoreme.

Da bismo formulisali Geršgorinovu teoremu uvodimo sledeće oznake:

$$\Gamma_i(A) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq r_i(A)\}, (i \in N), \tag{1.2}$$
$$\Gamma(A) := \bigcup_{i \in N} \Gamma_i(A).$$

Teorema 1.0.2 ***(Prva Geršgorinova teorema)*** *Za proizvoljnu matricu* $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ *i svako* $\lambda \in \sigma(A)$*, postoji indeks* $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *takav da je*

$$|\lambda - a_{kk}| \leq r_k(A). \tag{1.3}$$

Dakle, prema (1.3), $\lambda \in \Gamma_k(A)$*, a time i* $\lambda \in \Gamma(A)$*. Kako je* $\lambda \in \sigma(A)$ *proizvoljno, sledi da je*

$$\sigma(A) \subseteq \Gamma(A). \tag{1.4}$$

Primetimo da je $\Gamma_i(A)$, koji nazivmo $i-$ti Geršgorinov krug matrice A, prema (1.2), zatvoren krug u kompleksnoj ravni $\mathbb{C}$ sa centrom u dijagonalnom elementu a_{ii} i poluprečnikom $r_i(A)$. Skup $\Gamma(A)$ koji je unija n Geršgorinovih krugova matrice A zovemo **Geršgorinov skup**. To je kompaktan skup u $\mathbb{C}$ koji sadrži spektar.

Lepota Geršgorinove teoreme leži u njenoj jednostavnosti. Za proizvoljnu matricu A, jednostavnim aritmetičkim operacijama, dobijamo sume po vrstama $\{r_i(A)\}_{i \in N}$, koje čine poluprečnike n krugova, u čijoj uniji leži n karakterističnih korena matrice A.
Dobro je poznato sledeće:

1. Ako je neki Geršgorinov krug disjunktan sa ostalima, tada on sadrži tačno jedan karakteristični koren matrice A. Pomoću Geršgorinovih krugova, koje uspemo međusobno razdvojiti, izolujemo karakteristične korene i tako dobijamo preciznije informacije o spektru matrice.

2. Ako je matrica A realna, A^T ima iste karakteristične korene kao matrica A i teorema može da se primeni na A^T (ili ekvivalentno, poluprečnik kruga može da se deiniše kao zbir modula vandijagonalnih elemenata kolona matrice A).

Kao što smo već napomenuli, važi ekvivalencija između Geršgorinove teoreme i Teoreme 1.0.1. Preciznije, polazeći od toga da važi Geršgorinova teorema, možemo pokazati da su SDD matrice regularne. I obrnuto, polazeći od činjenice da su SDD matrice regularne, možemo dokazati da su svi karakteristični koreni proizvoljne matrice sadržani u Geršgorinovom skupu.

Tek u knjizi Richarda Varge "Gershgorin and His Circles" ova ekvivalencija je precizno ustanovljena, iako su i ranije slične ideje implicitno sadržane u raznim teoremama.

Definicija 1.0.2 . *Matrica* $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$ *se naziva Z-matrica ako važi* $a_{ij} \leq 0$, *za svako* $i, j = 1, \ldots, n, \quad i \neq j$.

Skup Z matrica označavamo sa

$$Z^{n,n} = \{A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n} : a_{ij} \leq 0, i \neq j\}.$$

Definicija 1.0.3 *Matrica A, koja je Z-matrica, naziva se regularna M-matrica, ako je regularna i* $A^{-1} \geq 0$.

Teorema 1.0.3 *Neka je matrica A Z-matrica. Tada, A je regularna M-matrica ako i samo ako postoji pozitivan vektor* x*, takav da je* $Ax > 0$.

Definicija 1.0.4 *Prateća matrica (kompleksne) matrice A je Z-matrica* $M(A) = |D| - |A - D|$, $i, j = 1, \ldots, n$, *gde D označava dijagonalnu matricu* $D = diag(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.

Očigledno, regularne M-matrice se ograničavaju na realne matrice specijalne znakovne strukture, te postoji potreba za proširenjem na realne matrice proizvoljne znakovne strukture, kao i na kompleksne matrice. Tako je nastala klasa H-matrica.

Definicija 1.0.5 *Matrica A je H-matrica ako i samo ako je* $M(A)$ *regularna M-matrica.*

Da H-matrice nisu ništa drugo nego GDD matrice, govori sledeća teorema.

Teorema 1.0.4 *Matrica A je H-matrica ako i samo ako je GDD matrica, tj. ako postoji pozitivna dijagonalna matrica W takva da je AW SDD matrica.*

Dokaz:

Matrica A je H-matrica ako i samo ako je prateća matrica $M(A)$ regularna M-matrica, što je ekvivalentno sa postojanjem vektora x takvog da je $M(A)x > 0$, tj. da je $(M(A)x)_i > 0$ za svako $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Ovo je dalje ekvivalentno sa

$$|a_{ii}|x_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|x_j > 0, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Ako označimo $W = diag(x_1, ..., x_n)$, poslednju relaciju možemo zapisati u obliku

$$|(AW)_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |(AW)_{ij}| = r_i(AW), \quad i = 1, 2, ..., n,$$

što je ekvivalentno sa uslovom da je AW SDD matrica. ■

Definicija 1.0.6 *Neka je matrica A H-matrica. Pozitivna dijagonalna matrica W, takva da je AW SDD matrica, zove se skalirajuća matrica, a sam postupak svođenja na SDD se zove dijagonalno skaliranje, ili samo skaliranje.*

Postoji nekoliko klasa matrica za koje možemo dati karakterizaciju pomoću determinatni podmatrica, tj. minora. **Glavni minori** su determinante podmatrica, koje se dobiju kada se iz matrice izbaci isti skup indeksa vrsta i kolona. Dijagonalni elementi matrice i determinanta matrice su takođe među glavnim minorima.

U raznim primenama je važno da ocenimo normu inverza date matrice. Najpoznatija ocena je Varahova ocena za SDD matrice.

Teorema 1.0.5 ***(Varahova ocena norme inverza)*** *Neka je $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ strogo dijagonalno dominantna matrica i neka je*

$$\alpha = \min_{1<i<n} \left\{ |a_{ii}| - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \right\}. \tag{1.5}$$

Tada je

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{\alpha}.$$

Primetimo da uslov da je A SDD matrica obezbeđuje da je $\alpha > 0$. Ova ocena je prvi put pomenuta u radu autora Ahlber i Nilson (1963). Varah je ovaj rezultat ponovo dokazao i proširio na slučaj blok matrica (1975).

2

Hermitske i hermitske pozitivno definitne matrice

Jedna od važnih tema u numeričkoj linearnoj algebri je da, kad god je moguće, koristimo prednosti svake specijalne strukture matrice u izračunavanjima. Kako je pozitivna definitnost prvi pojam pozitivnosti matrica koji se razvijao, prvo se upoznajemo sa hermitskim pozitivno definitnim matricama, [21]. Hermitske matrice se prirodno javljaju u različitim primenama, od rešavanja parcijalnih diferencijalnih jednačina do obrade slika.

2.1 Hermitske matrice

2.1.1 Definicija klase

Definicija 2.1.1 *Matrica $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ naziva se* ***hermitska*** *ako je $A^* = A$, ili po elementima, $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$, za $i, j = 1, 2, .., n$.*

Skup hermitskih matrica reda n označavamo sa $\mathcal{H}_n$.

Definicija 2.1.2 *Matrica $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ naziva se* ***simetrična*** *ako je $A^T = A$, ili po elementima, $a_{ij} = a_{ji}$, za $i, j = 1, 2, .., n$.*

Skup realnih simetričnih matrica reda n označavamo sa $\mathcal{S}_n$. Pošto je $\mathcal{S}_n$ podskup od $\mathcal{H}_n$ sve teoreme koje važe za matrice iz $\mathcal{H}_n$, takođe važe za matrice iz $\mathcal{S}_n$.

2.1.2 Osobine hermitskih matrica

Iz definicje hermitskih matrica lako se može pokazati da važe sledeće osobine:

- Neka su A, B hermitske matrice. Tada je $A + B$ hermitska matrica.
- $A + A^*, A^* + A, AA^*$ i A^*A su hermitske za sve $A \in \mathbb{C}^{n,n}$.
- Ako je $A \in \mathcal{H}_n$, onda je $(Ax, y) = (x, Ay)$ za sve $x, y \in \mathbb{C}^n$.
- Ako je A hermitska matrica, onda je i A^k hermitska matrica, za sve $k \in \mathbb{N}$.

- Ukoliko je hermitska matrica regularna, tada je i njena inverzna matrica hermitska matrica.
- Elementi na glavnoj dijagonali hermitske matrice su realni, jer moraju da budu jednaki svojim konjugovanim vrednostima.

2.1.3 Karakteristični koreni i vektori

Postoji nekoliko veoma moćnih činjenica o hermitskim matricama koje su našle univerzalnu primenu.

Teorema 2.1.1 *Svi karakteristični koreni hermitskih matrica su realni.*

Teorema 2.1.2 *Karakteristični vektori koji odgovaraju različitim karakterističnim korenima hermitske matrice su ortogonalni. Takođe, hermitske matrice imaju kompletan skup ortogonalnih karakterističnih vektora, što ih čini dijagonalizabilnim.*

Dijagonalizacija je česta tema i predstavlja faktorisanje matrice u $X\Lambda X^{-1}$, gde je Λ dijagonalna matrica, na dijagonali se nalaze karakteristični koreni, a X je matrica karakterističnih vektora. Korisna je za brojne primene, uključujući rešavanje sistema linearnih jednačina. Dijagonalizabilne matrice su interesantne, jer su dijagonalne matrice jednostavne za izračunavanja, njihovi karakteristični vektori su poznati, determinanta dijagonalne matrice je proizvod njenih dijagonalnih elemenata itd.

Prethodne dve teoreme daju spektralnu reprezentaciju hermitskih matrica i odgovarajući način da ih aproksimiramo matricama manjeg ranga.

U nastavku, navodimo tri verzije spektralne teoreme.

Teorema 2.1.3 ***(Spektralna teorema- Diagonalization version)*** *Ako je $A \in \mathcal{H}_n$, tada postoji unitarna matrica $U \in \mathbb{C}^{n,n}$ takva da je $U^*AU = D$, gde je D realna dijagonalna matrica, čiji dijagonalni elementi su karakteristični koreni matrice A. Ako je $A \in \mathcal{S}_n$, ostaje isti zaključak sa ortogonalnom matricom $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$, $Q^TAQ = D$.*

Teorema 2.1.4 ***(Spektralna teorema- Orthonormal basis version)*** *Ako je $A \in \mathcal{H}_n$, postoji ortonormirana baza za $\mathbb{C}^n$, koja se sastoji od karakterističnih vektora matrice A. Ako je $A \in \mathcal{S}_n$, ostaje isti zaključak, kada se $\mathbb{C}^n$ zameni sa $\mathbb{R}^n$.*

Teorema 2.1.5 ***(Spektralna teorema- Sum of rank one projections version)*** *Ako je $A \in \mathcal{H}_n$ sa karakterističnim korenima $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ i odgovarajućim ortonormiranim karakterističnim vektorima $u_1, u_2, \ldots, u_n$, tada*

$$A = \lambda_1 u_1 u_1^* + \lambda_2 u_2 u_2^* + \cdots + \lambda_n u_n u_n^*.$$

Ako $A \in \mathcal{S}_n$, tada

$$A = \lambda_1 u_1 u_1^T + \lambda_2 u_2 u_2^T + \cdots + \lambda_n u_n u_n^T.$$

Teorema 2.1.6 *Svaka matrica $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, može se na jedinstven način napisati kao $A = H + iK$, gde $H, K \in \mathcal{H}_n$.*

Teorema 2.1.7 *Za dato $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, $A \in \mathcal{H}_n$ ako i samo ako je x^*Ax realan broj za svako $x \in \mathbb{C}^n$.*

Definicija 2.1.3 *Za dato $A \in \mathcal{H}_n$ i nenula vektor x,* ***Rejlijev količnik*** *R_A je jednak*

$$R_A(x) = \frac{x^*Ax}{x^*x} = \frac{(Ax, x)}{(x, x)}.$$

Ako je x karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ tada je $R_A(x) = \lambda$, tj. Rejlijev količnik karateristično g vektora je odgovarajući karakteristični koren. Za hermitske matrice, skup slika neprekidne funkcije $R_A(x)$ je kompaktan skup $[a, b]$ na relanoj pravoj. Maksimum b i minimum a, su najveći i najmanji karakteristični koren matrice A.

Teorema 2.1.8 ***(Rayleight-Ritz Teorema)*** *Neka je $A \in \mathcal{H}_n$, sa karakterističnim korenima $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$.*
Tada

$$\lambda_n \leq \frac{x^*Ax}{x^*x} \leq \lambda_1, \text{ za svaki nenula vektor } \quad x \in \mathbb{C}^n,$$

$$\lambda_1 = \max_{x \neq 0} \frac{x^*Ax}{x^*x} = \max_{\|x\|_2 = 1} x^*Ax,$$

i

$$\lambda_n = \min_{x \neq 0} \frac{x^*Ax}{x^*x} = \min_{\|x\|_2 = 1} x^*Ax.$$

Primarna važnost prethodne teoreme je ocena najvećeg (najmanjeg) karakterističnog korena velike hermitske matrice. Ta teorema predstavlja specijalan slučaj naredne teoreme, koja predstavlja min max i max min karakterizaciju karakterističnih korena, poznata kao Courant-Fischer Teorema.

Teorema 2.1.9 ***(Courant-Fischer Teorema)*** *Neka je A hermitska matrica sa karakterističim korenima $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Neka je k dati ceo broj, takav da je $1 \leq k \leq n$ i neka je $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$. Tada*

$$\max_{w_1, w_2, \ldots, w_{n-k} \in \mathbb{C}^n} \quad \min_{x \perp w_1, w_2, \ldots, w_{n-k}} \frac{x^*Ax}{x^*x} = \lambda_k$$

i

$$\min_{w_1, w_2, \ldots, w_{k-1} \in \mathbb{C}^n} \quad \max_{x \perp w_1, w_2, \ldots, w_{k-1}} \frac{x^*Ax}{x^*x} = \lambda_k.$$

U praksi, u matematičkom modeliranju, matrice predstavljaju podatke dobijene merenjima. Često su podaci dobijeni merenjima samo aproksimacija prave vrednosti merne veličine. Zbog toga je neophodno, prilikom korišćenja podataka, na neki način uzeti u obzir nepreciznost merenja. U lineranoj algebri se to interpretira da je matrica perturbovana sa nekom drugom matricom, sa određenim nivoom preciznosti. Pretpostavimo da je A tačna matrica, i B matrica perturbacije koja predstavlja tu nepreciznost, pri čemu smo nametnuli ograničenje na matricu B da je po nekoj normi manja od ε. Ovde biramo da B zadovoljava uslov $\|B\|_2 \leq \varepsilon$. Matrica čije karakteristične korene ocenjujemo je $A + B$.

Može se dokazati da važe naredne teoreme, Weyl nejadnokosti, koje imaju primenu prilikom ocena perturbacija spektra.

Teorema 2.1.10 ***(Weyl nejednakosti)*** *Neka su $A, B \in \mathcal{H}_n$ i pretpostavimo da su karakteristični koreni matrica A, B i $A+B$ zapisani u opadajućem poretku. Tada za svaki par celih brojeva j, k takvih da je $1 \leq j, k \leq n$ i $j + k \leq n + 1$,*

$$\lambda_{j+k-1}(A + B) \leq \lambda_j(A) + \lambda_k(B)$$

i za svaki par celih brojeva j, k takvih da je $1 \leq j, k \leq n$ i $j + k \geq n + 1$,

$$\lambda_{j+k-n}(A + B) \geq \lambda_j(A) + \lambda_k(B).$$

Teorema 2.1.11 ***(Weyl nejednakosti)*** *Neka su $A, B \in \mathcal{H}_n$ i pretpostavimo da su karakteristični koreni matrica A, B i $A+B$ zapisani u opadajućem poretku. Tada za svako $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$,*

$$\lambda_j(A) + \lambda_n(B) \leq \lambda_j(A + B) \leq \lambda_j(A) + \lambda_1(B).$$

Primetimo da smo mogli poređati karakteristične korene po veličini, jer su matrice hermitske, pa za karakteristične korene znamo da su realni.

S obzirom da smo nametnuli ograničenje na matricu B, da zadovoljava $\|B\|_2 \leq \varepsilon$, sledi da su svi njeni karakteristični koreni, po apsolutnoj vrednosti, ograničeni sa ε. Primenjujući Weyl nejednakost, za spektar matrice A i matrice $A + B$ važi

$$|\lambda_i(A + B) - \lambda_i(B)| \leq \varepsilon, \quad \text{za svako} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Sledeći rezultat daje vezu između karakterističnih korena podmatrica matrice A i karakterističnih korena matrice A. Predstavlja posledicu Courant-Fisherove teoreme.

Teorema 2.1.12 ***(Interlacing nejednakosti)*** *Neka $A \in \mathcal{H}_n$ i neka su $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ karakteristični koreni matrice A, i za bilo koje $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ neka su $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_n$ karakteristični koreni matrice $A(i)$, gde je $A(i)$ glavna podmatrica od A dobijena brisanjem $i-$te vrste i kolone. Tada*

$$\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq \lambda_3 \geq \ldots \lambda_{n-1} \geq \mu_{n-1} \geq \lambda_n.$$

Interlacing nejednakosti se ponekad mogu koristiti da efikasno nađemo sve karakteristične korene hermitske matrice.

Primer 2.1.1 *Neka*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ima karakteristične korene $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$. *Kako je*

$$A(4) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

a ova matrica ima karakteristične korene $3, 0, 0$, *tada, na osnovu interlacing nejednakosti, zaključujemo* $\lambda_1 \geq 3 \geq \lambda_2 \geq 0 \geq \lambda_3 \geq 0 \geq \lambda_4$. *Očigledno,* $\lambda_3 = 0$.

Teorema 2.1.13 *Neka* $A \in \mathcal{H}_n$ *i neka je* B *bilo koja glavna podmatrica matrice* A. *Ako je* λ_k $k-$*ti najveći karakteristični koren matrice* A *i* μ_k $k-$*ti najveći karakteristični koren matrice* B *tada je* $\lambda_k \geq \mu_k$.

Teorema 2.1.14 *Neka je* $A \in \mathcal{H}_n$ *sa karakterističnim korenima* $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. *Neka je* S $k-$*dimenzionalni potprostor od* $\mathbb{C}^n$ *sa* $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*Tada:*

1. *Ako postoji konstanta* c *takva da je* $x^*Ax \geq cx^*x$ *za svako* $x \in \mathcal{S}$, *tada je* $\lambda_k \geq c$.

2. *Ako postoji konstanta* c *takva da je* $x^*Ax \leq cx^*x$ *za svako* $x \in \mathcal{S}$, *tada je* $\lambda_{n-k+1} \leq c$.

Teorema 2.1.15 *Neka je* $A \in \mathcal{H}_n$.

1. *Ako je* $x^*Ax \geq 0$, *za svako* x, *u* $k-$*dimenzionalnom potprostoru od* $\mathbb{C}^n$, *tada* A *ima najmanje* k *nenegativnih karakterističnih korena.*

2. *Ako je* $x^*Ax > 0$, *za sve nenula* x, *u* $k-$*dimenzionalnom potprostoru od* $\mathbb{C}^n$, *tada* A *ima najmanje* k *pozitivnih karakterističnih korena.*

Teorema 2.1.16 *Neka su* $A, B \in \mathcal{H}_n$ *sa karakterističnim korenima* $\lambda_1(A) \geq \lambda_2(A) \geq \cdots \geq \lambda_n(A)$ *i* $\lambda_1(B) \geq \lambda_2(B) \geq \cdots \geq \lambda_n(B)$. *Tada*

$$|\lambda_i(A) - \lambda_i(B)| \leq \|A - B\|_2, \quad i = 1, \ldots, n.$$

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i(A) - \lambda_i(B)|^2 \leq \|A - B\|_F^2.$$

2.2 Hermitske pozitivno definitne matrice

Od mnogih važnih potklasa hermitskih matrica postoji jedna klasa koja se izdvaja, a to je klasa hermitskih pozitivno definitnih matrica [1].
Uvodimo sledeće definicije.

Definicija 2.2.1 *Matrica $A \in \mathcal{H}_n$ se naziva*

- ***pozitivno definitna*** *ako $x^*Ax > 0$ za svako nenula $x \in \mathbb{C}^n$.*
- ***pozitivno semidefinitna*** *ako je $x^*Ax \geq 0$ za svako $x \in \mathbb{C}^n$,*
- ***indefinitna*** *ako ni A ni $-A$ nisu pozitivno semidefinitne.*

Skup pozitivno definitnih matrica reda n označavamo sa PD_n, a skup pozitivno semidefinitnih matrica reda n sa PSD_n. Ako zavisnost od n nije značajna, pisaćemo skraćeno, PD i PSD. PD(PSD) koristimo kao skraćenice za pozitivna definitnost (pozitivna semidefinitnost).

Ako je $A = [a]$, 1×1, tada je A PD ako i samo ako je $a > 0$, i PSD ako i samo ako je $a \geq 0$; prema tome PD i PSD matrice su generalizacija pozitivnih i nenegativnih brojeva.

2.2.1 Osobine pozitivno definitnih matrica

Pozitivno definitne matrice imaju mnogo lepih i važnih osobina:

- Svi dijagonalni elementi PD(PSD) matrice su pozitivni (nenegativni). Ako je dijagonalni elemnt PSD matrice jednak 0, onda su i svi ostali elementi u vrsti i koloni jednaki 0.
- Hermitska matrica A je PD ako i samo ako su svi karakteristični koreni matrice A pozitivni, i A je PSD ako i samo ako su svi karakteristični koreni matrice A nenegativni.
- Ukoliko je matrica A PD(PSD) onda znamo da su trag matrice i determinanta matrice pozitivni (nenegativni), tj. ako je A PD, onda je $trA > 0$ i $detA > 0$ i ako je A PSD, onda je $trA \geq 0$ i $detA \geq 0$.
- Matrica $A \in \mathcal{S}_n$ je PD ako $x^*Ax > 0$, za svako nenula $x \in \mathbb{R}^n$, i semidefinitna ako je $x^*Ax \geq 0$, za svako $x \in \mathbb{R}^n$.
- Neka su $A, B \in PSD_n$.
  1. Tada je $A + B \in PSD_n$.
  2. Ako, dodatno, $A \in PD_n$, onda $A + B \in PD_n$.

[1] U nastavku rada, pozitivno definitna matrica znači hermitska pozitivno definitna matrica

3. Ako je $c \geq 0$, onda $cA \in PSD_n$.
4. Ako, dodatno, $A \in PD_n$ i $c > 0$, onda $cA \in PD_n$.

- Ako $A_1, A_2, \ldots, A_k \in PSD_n$, onda i $A_1 + A_2 + \cdots + A_k \in PSD$. Ako, dodatno postoji $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tako da $A_i \in PD_n$, tada i $A_1 + A_2 + \cdots + A_k \in PD_n$.
- **(Princip nasleđivanja)** Bilo koja glavna podmatrica PD(PSD) matrice je PD(PSD) matrica.
- Neka je $A \in \mathcal{H}_n$. Tada, A je PD ako i samo ako su svi glavni minori od A pozitivni. A je PSD ako i samo ako su svi glavni minori od A nenegativni.
- Neka je $A \in PSD_n$ i neka je $C \in \mathbb{C}^{n,m}$. Tada je C^*AC PSD.
- Neka je $A \in PD_n$ i neka je $C \in \mathbb{C}^{n,m}$, $n \geq m$. Tada, C^*AC je PD ako i samo ako je $rankC = m$, tj. ako i samo ako C ima linearno nezavisne kolone.
- Neka je $A \in PSD_n$ i neka je $C \in \mathbb{C}^{n,n}$. Tada, C^*AC je PD, ako i samo ako je C invertibilna.
- Neka je $A \in \mathcal{H}_n$. Tada, A je PD ako i samo ako postoji invertibilna matrica $B \in \mathbb{C}^{n,n}$ takva da je $A = B^*B$.
- Neka su $A, B \in \mathcal{H}_n$. Ako su A i $AB + BA$ PD matrice, tada je B PD. Interesantno je pomenuti da ne važi obrnuto tvrđenje. Ne važi da ako su A, B PD matrice, onda je i $AB + BA$, kao što se može videti u sledećem primeru.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Neka je $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}] \in PD_n$, gde je $A^{-1} = [\alpha_{ij}]$, $B^{-1} = [\beta_{ij}]$. Tada je

$$\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} - b_{ij})(\alpha_{ij} - \beta_{ij}) \leq 0,$$

  gde jednakost važi ako i samo ako je $A = B$.
- Neka je $A \in PD_n$ i $B \in \mathcal{H}_n$. Tada:

  1. AB je dijagonalizabilna
  2. Svi karakteristični koreni matrice AB su realni.

U linearnoj algebri faktorizacija (dekompozicija) je predstavljanje matrice u obliku proizvoda matrica. Postoji dosta dekompozicija, svaka ima primenu u različitim problemima.

Teorema 2.2.1 ***(Cholesky faktorizacija)*** [2] *Neka je $A \in \mathcal{H}_n$. Tada, A je PD, ako i samo ako postoji invertibilna gornja trougaona matrica R, sa pozitivnim dijagonalnim elementima, takva da je $A = RR^*$.*

[2] Otkrio je Andre-Louis Cholesky za realne matrice

Svaka hermitska pozitivno definitna matrica (prema tome, i svaka realna simetrična pozitivno definitna matrica) ima jedinstvenu Cholesky faktorizaciju. Dekompozicija nije jedinstvena kada je matrica pozitivno semidefinitna. Uglavnom se koristi za numeričko rešavanje linearnih jednačina. Cholesky faktorizacija predstavlja modifikaciju čuvenog Gausovog postupka eliminacije.

Teorema 2.2.2 ***(Polarna forma)*** *Neka je $A \in \mathbb{C}^{m,n}, m \geq n$. Tada se A može faktorizovati kao $A = UP$, gde je $P \in PSD_n$, $rankP = rankA$ i $U \in \mathbb{C}^{m,n}$ ima ortonormirane kolone. Štaviše, P je jedinstveno određeno sa A i jednako $(A^*A)^{1/2}$.* [3] *Ako je A realna, onda su P i U realne.*

Ova dekompozicija uvek postoji. Ukoliko je matrica A invertibilna, ova dekomopozicija je jedinstvena, i važi da je P pozitivno definitna matrica.

Pozitivno (semipozitivno) definitne matrice se javljaju u statistici i teoriji verovatnoće, što ćemo ilustrovati sledećim primerom.

Primer 2.2.1 *Neka su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ realne slučajne promenljive na prostoru verovatnoća, takve da svaka ima očekivanje nula i konačan drugi momenat. Definišemo matricu $a_{ij} = E(X_iX_j)$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Realna simetrična matrica A se naziva* ***kovarijansna matrica*** *od $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i neminovno je PSD.*

[3] Neka je k pozitivan broj. Ako su A i B PSD i $B^k = A$, tada se B naziva k-ti PSD koren matrice A i označava se sa $A^{1/k}$

3

Nenegativne matrice po elementima

U ovom poglavlju ćemo posmatrati kvadratne nenegativne matrice, tj. kvadratne matrice čiji su svi elementi nenegativni. Nenegativnost je prirodno svojstvo mnogih mernih veličina. Nenegativne matrice se javljaju u brojnim granama nauke i inženjerstva, u teoriji verovatnoće (lanci Markova). Postoji mnogo knjiga, poglavlja u knjigama i stotine radova o toj temi.

Definicija 3.0.2 *Za matricu* $A \in \mathbb{C}^{m,n}$*, A je* ***nenegativna (pozitivna)****, u oznaci* $A \geq 0 \quad (A > 0)$*, ako su svi elementi matrice A nenegativni (pozitivni).*

Sa $|A|$ označavamo nenegativnu matricu dobijenu uzimanjem modula elemenata matrice A.

Prva teorema, koju navodimo u ovom delu, odnosi se na karakteristične korene i vektore nenegativne matrice, [2].

Teorema 3.0.3 *Ako je A nenegativna kvadratna matrica tada:*

1. $\rho(A)$*, spektralni radijus matrice A, je karakteristični koren.*
2. *A ima nenegativan karakteristični vektor koji odgovara* $\rho(A)$*.*
3. A^T *ima nenegativan karakteristični vektor koji odgovara* $\rho(A)$*.*

Fundamentalni rezultat u oblasti nenegativnih matrica po elementima predstavlja Peron-Frobeniusova Teorema. Bitnu ulogu u Peron-Frobeniusovoj Teoremi imaju primitivne matrice.

Definicija 3.0.3 *Nenegativna matrica A je primitivna ako postoji prirodan broj m tako da je* A^m *pozitivna.*

Posledica 3.0.1 *Ako je A primitivna i l prirodan broj, tada su* A^T *i* A^l *primitivne.*

3.1 Razložive i nerazložive matrice

Na početku rada definisali smo SDD matrice. Kao što smo videli, prema teoremi 1.0.1, svaka SDD matrica je regularna, tj. sledećih n strogih nejednakosti

$$|a_{ii}| > r_i(A), \quad (i \in N),$$

za proizvoljnu matricu $A = [a_{ij}] \in C^{n,n}$, osiguravaju regularnost. Prirodno se postavlja pitanje da li u slučaju kada je $n \geq 2$ regularnost ostaje očuvana ako stroge nejednakosti oslabimo, dopuštajući da mogu postati jednakosti? Da li iz uslova $|a_{ii}| \geq r_i(A)$ za svako $i \in N$ sledi regularnost ili ne? Pogledajmo sledeći primer.

Primer 3.1.1 *Posmatrajmo matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 1 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad i \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 1 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Za obe matrice važi $r_i = 0.9 < 1$ za $i \in \{1, 2\}$, i $r_i = 1$ za $i \in \{3, 4\}$. Međutim, matrica A je regularna, dok je matrica B singularna.

Ako se oslabi uslov stroge dijagonalne dominacije u dijagonalnu dominaciju, gubi se regularnost.

Definicija 3.1.1 *Matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ je dijagonalno dominantna ako za svaki indeks $i \in \mathbb{N}$ važi da je*

$$|a_{ii}| \geq r_i(A),$$

i postoji bar jedan indeks $k \in \mathbb{N}$ tako da važi stroga nejednakost, tj.

$$|a_{kk}| > r_k.$$

Vidimo da nije dovoljno posmatrati samo odnos strogih i ne-strogih nejednakosti da bi odredili kriterijum za regularnost. Posmatrajući ovaj primer, možemo uočiti da singularna matrica B ima specifičnu strukturu. 2×2 blok u donjem levom uglu je nula matrica, dok kod matrice A to nije slučaj.

Motivisani ovim zapažanjem uvodimo sledeću definiciju.

Definicija 3.1.2 *$n \times n$ matrica A, $n \geq 2$ je razloživa ako postoji permutaciona matrica $P \in R^{n,n}$ i prirodan broj r, $1 \leq r < n$, tako da je*

$$P^T A P = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

gde je $A_{11} \in C^{r,r}$ i $A_{22} \in \mathbb{C}^{n-r,n-r}$.U suprotnom, ako takva permutaciona matrica ne postoji, za matricu A kažemo da je nerazloživa.U slučaju kada je $A \in \mathbb{C}^{1,1}$, A je razloživa matrica ako je njen jedini element nula, a nerazloživa u suprotnom.

Neka $a_{ij}^{(q)}$ označava (i, j)-ti element matrice A^q.

Teorema 3.1.1 *Nenegativna matrica A je nerazloživa ako i samo ako za svako (i, j) postoji prirodan broj q tako da je*

$$a_{ij}^{(q)} > 0. \tag{3.1}$$

Osobina nerazloživosti, kao alat u lineranoj algebri, prvi put se javlja u radu Olge Tauski iz 1949. godine. Ona predstavlja izuzetno blisku vezu teorije grafova i teorije matrica. Naime, matrice možemo posmatrati i kako težinske usmerene grafove, odnosno težinske digrafove, pri čemu indeksi vrsta, odnosno kolona, predstavljaju čvorove, a nenula elementi u matrici predstavljaju usmerene grane sa odgovarajućim težinama.

Međutim, kako u našem razmatranju osobine nerazloživosti jedino raspored nula u matrici igra ulogu, umesto težinskog grafa matrici možemo pridružiti standardni digraf, koji nosi informacije o rasporedu nula u njoj.

Preciznije, neka je $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ proizvoljna matrica. Sa $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ označimo n različitih objekata, odnosno tačaka, koje ćemo zvati čvorovi. Za svaki nenula element a_{ij} matrice A, uvešćemo usmerenu granu P_iP_j koja povezuje čvor P_i sa čvorom P_j. U slučaju kada je $i = j$, tj. za $a_{ii} = 0$, grana P_iP_j se naziva petlja. Tako formirani skup svih usmerenih grana zajedno sa skupom čvorova čini digraf $G(A)$ pridružen matrici A.

Definicija 3.1.3 *Pridruženi digraf $G(A)$, $n \times n$ matrice A se sastoji od n čvorova $P_1, P_2, \ldots, P_n$, gde grana od P_i do P_j postoji ako i samo ako je $a_{ij} \neq 0$.*

Definicija 3.1.4 *Digraf $G(A)$ matrice $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ je jako povezan ako za svaki uređeni par čvorova (P_i, P_j) postoji usmerena putanja u $G(A)$ od čvora P_i do čvora P_j.*

Kako je $a_{ij}^{(q)} > 0$ ako i samo ako postoji niz q grana od P_i do P_j, Teorema 3.1.1 je ekvivalentna sa narednom teoremom.

Teorema 3.1.2 *Proizvoljna matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ je nerazloživa ako i samo ako je njen digraf $G(A)$ jako povezan.*

Posmatrajmo dijagonalno dominantne matrice A i B iz primera 3.1.1. Primetimo da je regularna matrica A nerazloživa, dok je singularna B razloživa. Ovo zapažanje važi i u opštem slučaju, što je rezultat teoreme Olge Tauski.

Teorema 3.1.3 *Svaka matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, koja je nerazloživa i dijagonalno dominantna je regularna.*

Osobina razloživosti usko je povezana sa nenegativnim matricama. Jasno je da su pozitivne matrice nerazložive. Matrice reda 1 je nerazloživa ako i samo ako je njen jedini element jednak nula.

Posmatramo spektralni radijus nerazložive matrice. Neka je $A \geq 0$ nerazloživa. Za svaki vektor $x > 0$ definišemo

$$r_x = \min_{i:x_i \neq 0} \frac{(Ax)_i}{x_i}.$$

Očigledno, $r_x \geq 0$ i r_x je najveći realan broj ρ takav da je $\rho x \leq Ax$. Za nerazložive $n \times n$ nenegativne matrice se može pokazati da je $(I+A)^{n-1} > 0$.

Teorema 3.1.4 *Neka je $r = r_z = \max_{x>0} r_x$. Tada:*

1. $r > 0$
2. $Az = rz$
3. $z > 0$.

Dokaz:

1. Neka je $u = [1, \ldots, 1]^T$. Tada je $r_u = \min_i \sum_{j=1}^n a_{ij}$ pozitivno, jer nerazloživa matrica ne može imati nula vrstu, $r \geq r_u > 0$.
2. Kako znamo da važi $Az \geq rz$, da bi smo dokazali traženu jednakost $Az = rz$ pretpostavimo da je $Az > rz$. Funkcija r_x dostiže maksimalnu vrednost r za neki vektor $x > 0$ (Funckija r_y je neprekidna na skupu vektora y oblika $y = (I+A)^{n-1}x, \quad x^T x = 1$). Neka je $x = (I+A)^{n-1}z$. Tada je $x > 0$, $(I+A)^{n-1}(Az - rz) > 0$, i $Ax > rx$, ali poslednja nejednakost je u kontradikciji sa definicijom od r.
3. Kako je $Az = rz$, $0 < x = (I+A)^{n-1}z = (1+r)^{n-1}z$, pa je z takođe pozitivno.

■

Kako za nerazloživu matricu A važi $r = \rho(A)$, dobijamo sledeću max min karakterizaciju za $\rho(A)$

$$\rho(A) = \max_{x>0} \left\{ \min_{i:x_i>0} \frac{(Ax)_i}{x_i} \right\}.$$

U nastavku, neka je $\rho(A) = r$, a za svaku kompleksnu matricu C sa $|C|$ označavamo matricu čiji su elementi $|c_{ij}|$.

Teorema 3.1.5 *1. Ako je A nerazloživa i $A \geq |C|$, tada za svaki karakteristični koren γ matrice C*

$$|\gamma| \leq r. \tag{3.2}$$

2. Jednakost u (3.2), važi ako i samo ako $C = e^{i\theta} DAD^{-1}$, gde je $e^{i\theta} = \gamma / r$ i $|D| = I$.

Dokaz:

1. Neka je y karakteristični vektor od C koji odgovara γ,

$$Cy = \gamma y, \quad y \neq 0. \tag{3.3}$$

Uzimajući apsolutne vrednosti dobijamo

$$|\gamma||y| \leq |C||y| \leq A|y|, \tag{3.4}$$

i prema tome $|\gamma| \leq r_{|y|} \leq r$.

2. Ako je $|\gamma| = r$, tada sledi da je $A|y| = r|y| = |C||y|$ i $|y| > 0$.
   Tada je
   $$|C| = A. \tag{3.5}$$
   Neka je $y_j = |y_j|e^{i\theta_j}$ i definišemo $D = diag(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \ldots, e^{i\theta_n})$. Tada je $y = D|y|$. Neka je $\gamma = re^{i\theta}$ i $F = e^{-i\theta}D^{-1}CD$. Dobijamo
   $$F|y| = e^{-i\theta}D^{-1}CD|y|,$$
   $$F|y| = e^{-i\theta}D^{-1}Cy,$$
   $$F|y| = e^{-i\theta}D^{-1}\gamma y,$$
   $$F|y| = e^{-i\theta}\gamma|y|,$$
   $$F|y| = r|y|.$$
   Ponovo $|F| \leq A$ i prema tome $|F| = A$. Prema tome, $F|y| = |F||y|$, ali kako je $|y| > 0$, $F = |F|$, tj. $e^{-i\theta}D^{-1}CD = A$. Dakle, $C = e^{i\theta}DAD^{-1}$.

■

Definicija 3.1.5 *Neka je $A \geq 0$ nerazloživa. Broj h karakterističnih korena od A, čiji je moduo $\rho(A)$, se naziva indeks cikličnosti matrice A ili period. Ako je h veće od jedan, onda je A ciklična sa indeksom h.*

Indeks cikličnosti matrice je u vezi sa koeficijentima karakterističnog polinoma.

Teorema 3.1.6 *Neka je $\lambda^n + a_1\lambda^{n_1} + \cdots + a_k\lambda^{n_k}$, gde su $a_1, \ldots, a_k$ različiti od nula i $n > n_1 > \cdots > n_k$, karakteristični polinom nerazložive matrice $A \geq 0$, sa indekom cikličnosti h. Tada je h najveći zajednički delilac razlika $n-n_1, n_1-n_2, \ldots, n_{k-1}-n_k$.*

Teorema 3.1.7 *Pretpostavimo da $A \geq 0$ nema nula vrste ili kolone i da postoji permutaciona matrica*

$$PAP^T = \begin{bmatrix} 0 & A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{h-1} \\ A_h & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

tako da su nula blokovi na dijagonali kvadratne matrice, a $B = A_1A_2\ldots A_{h-1}A_h$ je nerazloživa. Tada je A razloživa.

Na kraju, navodimo granicu za spektralni radijus, $\rho(A)$, nenegativne nerazložive matrice A. Neka s_i označava sumu elemenata $i-$te vrste matrice A. Neka je $S = \max_i s_i$ i $s = \min_i s_i$.

Teorema 3.1.8 *Neka je $A \geq 0$ nerazloživa. Tada*

$$s \leq \rho(A) \leq S. \tag{3.6}$$

Za nenegativnu matricu A u prethodnoj teoremi je $S = \|A\|_\infty$.

3.2 Peron-Frobeniusova teorema

Računanje svih karakterističnih korena matrice je veoma skupo. Često nam je potrebno da znamo samo najveći po modulu, tj. dominantni, karakteristični koren. Uz to, ponekad smo u mogućnosti da tvrdimo da je taj po modulu dominantni koren, baš karakteristični koren, dakle pozitivan. Peron-Frobeniusova teorema govori i o pretpostavkama pod kojima je taj pozitivan karakteristični koren još i jednostruk. Peron-Frobeniusova teorema, koja predstavlja fundamentalni rezultat iz oblasti nenegativnih matrica po elementima, zavisi od vrste nenegativnosti koju matrica A poseduje. Peron (1907) ju je dokazao za pozitivne matrice, a Frobenius (1912) je dao nastavak za nenegative matrice.

Teorema 3.2.1 ***(Peron-Frobeniusova teorema za pozitivne matrice)***
Neka je A $n \times n$ pozitivna matrica. Tada važi:

1. *Postoji pozitivan realan broj r, koji se naziva Peronov koren, takav da je r karakteristični koren matrice A i svi ostali karakteristični koreni su po modulu strogo manji od r. Prema tome, spektralni radijus $\rho(A)$ je jednak r.*

2. *Peronov koren r je jednostruki koren, tj. r je jednostruki koren karakterističnog polinoma matrice A.*

3. *Postoji karakteristični vektor v matrice A, koji odgovara korenu r, takav da su mu sve komponente pozitivne.*

4. *Ne postoji neki drugi pozitivan (štaviše nenegativan) karakteristični vektor, osim vektora v pomnoženog pozitivnim brojem. Drugim rečima, svi ostali karakteristični vektori moraju imati najmanje jednu negativnu komponentu.*

1942. godine nemački matematičar Lotar Collatz je otkrio narednu formulu za Peronov koren, a Helmut Wieldant je 1950. godine iskoristio da dublje razvije Peron-Frobeniusovu teoriju.

Collatz-Wielandt formula: za sve nenegativne nenula vektore x neka je $f(x) = \min_{i:x_i \neq 0} \frac{(Ax)_i}{x_i}$. f je realna funkcija čiji je maksimum Peronov koren.

"Min-max" Collatz-Wielandt formula: za sve strogo pozitivne vektore x, neka je $g(x) = \max_i \frac{(Ax)_i}{x_i}$. g je realna funkcija čiji minimum je Peronov koren.

Peronov koren zadovoljava nejednakosti

$$\min_i \sum_j a_{ij} \leq r \leq \max_i \sum_j a_{ij}.$$

Urađeno je i proširenje teoreme na slučaj nenegativnih matrica. U cilju da naglasimo razlike između ova dva slučaja posmatrajmo sledeće jednostavne matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Prva matrica pokazuje da za nenegativne matrice može postojati karakteristični koren istog modula kao i maksimalni, dominantni karakteristični koren (1 i -1 su karakteristični koreni prve matrice), štaviše maksimalni karakteristični koren može da ne bude jednostruki koren karakterističnog polinoma, može biti nula i odgovarajući karakteristični vektor $[1, 0]$ nije stogo pozitivan (druga matrica). Može izgledati kao da većina prethodno navedenih osobina za pozitivne matrice ne važi za nenegativne matrice, međutim Frobenius je pronašao pravi način da uradi generalizaciju za slučaj nenegativnih matrica.

Ključna karakteristika teorije u nenegativnom slučaju je pronalaženje neke posebne potklase nenegativnih matrica. Naime, iako karakteristični koreni koji imaju najveću vrednost po modulu možda nisu jedinstveni, struktura karakterističnih korena sa najvećim modulom je pod kontrolom, oni imaju oblik $e^{i2\pi l/h}r$, gde je h period matrice, r je realni strogo pozitivan karakteristični koren i $l = 0, 1, ..., h-1$. Karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu r ima strogo pozitivne komponente (za razliku od opšteg slučaja nenegativnih matrica, gde su komponente samo nenegativne). Takođe, svi takvi karakteristični koreni su jednostruki koreni karakterističnog polinoma.

Sva tvrđenja Peron-Frobeniusove teoreme za pozitivne matrice važe i za primitive matrice.

Teorema 3.2.2 ***(Peron-Frobeniusova teorema za nerazložive matrice)***
Neka je A nerazloživa nenegativna matrica sa periodom h i spektralnim radijusom $\rho(A) = r$. Tada važi:

1. *Broj r je pozitivan realan broj i to je karakteristični koren matrice A i naziva se Peronov koren.*

2. *Peronov koren je jednostruki.*

3. *Jedini karakteristični vektori čije su sve komponente pozitivne su oni koji odgovaraju karakterističnom korenu r.*

4. *Matrica A ima tačno h kompleksnih karakterističnih korena čiji je moduo jednak r. Svaki od njih je jednostruki koren karakterističnog polinoma i predstavlja proizvod broja r i $h-$tog korena jedinice.*

Collatz-Wielandt formula može da se proširi na nenegativne matrice.

Collatz-Wielandt formula : za sve nenegativne nenula vektore x neka je $f(x) = \min\limits_{i:x_i \neq 0} \dfrac{(Ax)_i}{x_i}$. f je realna funkcija čiji je maksimum Peronov koren.

Peronov koren zadovoljava nejednakosti

$$\min_i \sum_j a_{ij} \leq r \leq \max_i \sum_j a_{ij}.$$

Nejednakost $r \leq \max_i \sum_j a_{ij}$ nije specifična samo za nenegativne matrice. Za bilo koju matricu A i karakteristični koren λ je tačno $|\lambda| \leq \max_i \sum_j |a_{ij}|$. To je posledica Geršgorinove teoreme. Nejednakost $\min_i \sum_j a_{ij} \leq r$ je specifična za nenegativne matrice, za matrice u opštem slučaju ne postoji nešto slično.

Brojne knjige su napisane na temu nenegativnih matrica, a teorija Peron-Frobeniusa je uvek centralna tema.

3.3 Stohastičke i substohastičke matrice

Stohastičke i substohastičke matrice su podskup nenegativnih matrica. Stohastičke matrice se javljaju u teoriji verovatnoće, statistici, matematici finansija, linearnoj algebri. Značajnu ulogu u opisivanju raznih pojava u prirodi imaju diskretni Markovljevi slučajni procesi. Nazivaju se jos i lanci Markova. To su slučajni procesi oblika $\{X_n, n \in N\}$ koji imaju prebrojiv skup stanja, tj. skup svih mogućih vrednosti je $S = \{x_1, x_2, .., x_n\}$. U svakom trenutku sistem, na osnovu date raspodele slučajne promenljive, može promeniti stanje, ili ostati u istom. Ime je dobio po Markov Andreju, ruskom matematičaru. Imati svojstvo Markova znači, ukratko, da osim datog trenutnog stanja, buduće stanje sistema ne zavisi od prošlih. Drugim rečima, to znači, da opis sadašnjosti u potpunosti sadrži informaciju koja može uticati na buduće stanje procesa. Promene stanja nazivamo prelazima, a verovatnoće, koje se odnose na različite promene stanja, nazivamo verovatnoćama prelaza.
Osnovno svojstvo lanaca Markova je verovatnoća da proces u momentu $t = n$ dođe u stanje x_n zavisi samo od stanja x_{n-1} u kojem je proces bio u trenutku $t = n - 1$. Verovatnoća da proces pređe iz stanja x_i u kojem se našao u momentu $t = n - 1$ u stanje x_j u momentu $t = n$ (verovatnoća prelaza) označava se sa $p_{ij}(n)$, pri čemu je $p_{ij}(n) \geq 0$, $\sum_{j=1}^{r} p_{ij}(n) = 1$. Ako su verovatnoće prelaza poznate za svaki par stanja, one se mogu izraziti matricom verovatnoća prelaza

$$P(n) = \begin{bmatrix} p_{11}(n) & p_{12}(n) & \ldots & p_{1n}(n) \\ p_{21}(n) & p_{22}(n) & \ldots & p_{2n}(n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1}(n) & p_{n2}(n) & \ldots & p_{nn}(n) \end{bmatrix}.$$

Svi elementi matrice su nenegativni brojevi koji predstavljaju verovatnoću. Lanci Markova za koje je $P(1) = P(2) = ...$ nazivaju se homogeni lanci Markova. Kod ovih lanaca verovatnoće prelaza ne zavise od vremena i iste su tokom čitavog procesa. Matrica verovatnoća prelaza spada u klasu stohastičkih matrica.

Definicija 3.3.1 *Kvadratna $n \times n$ matrica $T = [t_{ij}]$ se naziva* ***stohastička*** *ako i samo ako je nenegativna i $Te = e$ gde je $e = [1, .., 1]^T \in \mathbb{R}^n$, tj.*

$$t_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, 2, .., n \tag{3.7}$$

$$\sum_{j=1}^{n} t_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{3.8}$$

Stohastičke matrice se nekad nazivaju stohastičke po vrstama, dok su stohastičke po kolonama, matrice čije transponovane su stohastičke po vrstama.

Definicija 3.3.2 *Kvadratna $n \times n$ matrica T je* ***duplo-stohastička*** *ako su, i T, i njena transponovana, stohastičke, tj.*

$$t_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, 2, .., n$$

$$\sum_{j=1}^{n} t_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, ..., n$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_{ij} = 1, \quad j = 1, .., n. \tag{3.9}$$

Skup duplo-stohastičkih matrica reda n se označava sa Ω_n.

Definicija 3.3.3 *Kvadratna $n \times n$ matrica T je substohastička, ako je nenegativna i $Te \geq e$.*

Teorema 3.3.1 *Maksimalni karakteristični koren stohastičke matrice je jednak* 1. *Nenegativna matrica P je stohastička ako i samo ako je e karakteristični vektor matrice P, koji odgovara karakterističnom korenu* 1.

Dokaz: Kako važi (3.6), za bilo koju nenegativnu matricu, sledi da je spektralni radijus stohastičke matrice 1 i jasno da je e odgovarajući karaktristični vektor. Obratno, ako je $Pe = e$, tada su sve sume po vrstama matrice P jednake 1. ■

Sledeća karakterizacija stohastičkih matrica ističe da one pripadaju klasi nenegativnih matrica, koje imaju pozitivan karakteristični vektor, koji odgovara spektralnom radijusu. Postoji bliska veza stohastičkih matrica i te klase.

Teorema 3.3.2 *Ako je $A \geq 0$, $\rho(A) > 0, z > 0$ i $Az = \rho(A)z$, tada je $A/\rho(A)$ slična stohastičkoj matrici.*

Dokaz: Za dve matrice istog reda A i B kažemo da su slične matrice ako je $A = S^{-1}BS$ za neku invertibilnu matricu S. Neka je D dijagonalna matrica, takva da je $d_{ii} = z_i$. Tada je $P = D^{-1}A/\rho(A)D$ stohastička matrica. ■

U sledećoj Teoremi navodimo gornju granicu za karakteristične korene stohastičke matrice različite od jedan.

Teorema 3.3.3 *Ako je A stohastička i neka je $\lambda \neq 1$ karakteristični koren matrice A, tada*

$$|\lambda| \leq \min\Big(1 - \sum_j \min_i a_{ij}, \Big(\sum_j \max_i a_{ij}\Big) - 1\Big).$$

Dokaz: Neka je v karakteristični vektor matrice A^T koji odgovara karakterističnom korenu λ,

$$\lambda v^T = v^T A.$$

Iz $Ae = e$, sledi da je $v^T e = v^T Ae = \lambda v^T e$ i prema tome v i e su ortogonalni, jer je $\lambda \neq 1$.
Neka je $c_j = \min_i a_{ij}$ i posmatrajmo matricu $A_c = [a_{ij} - c_j]$. Tada je

$$\lambda v^T = v^T A = v^T A_c,$$

jer su v i e ortogonalni. Uzimajući apsolutne vrednosti, dobijamo

$$|\lambda||v^T| \leq |v^T| A_c,$$

jer je A_c nenegativna. Na osnovu Teoreme 3.0.3,

$$|\lambda| \leq \rho(A_c),$$

ali sve sume po vrstama matrice A_c su jednake $1 - \sum_{j=1}^n c_j$, tako da je

$$\rho(A_c) = 1 - \sum_{j=1}^{n} c_j,$$

što dokazuje prvu nejednakost u teoremi.
Druga nejednakost se dokazuje analogno. ∎

3.3.1 Lokalizacija karakterističnih korena za stohastičke matrice

Neka je $e = [1, \ldots, 1]^T$. Cela sekcija je posvećen matricama A koje imaju konstantnu sumu po vrstama ili kolonama, tj. $Ae = \lambda e$ ili $A^T e = \lambda e$, za neko $\lambda \in \mathbb{R}$. Očigledno, λ je karakteristični koren matrice A. Sledeći rezultat nam pomaže da lokalizujemo ostale karakteristične korene matrice A, [8].

Teorema 3.3.4 *Neka je A realna matrica, takva da su sume po kolonama konstantne (tj. $A^T e = \lambda e$, za neko $\lambda \in R$). Tada, svi karakteristični koreni matrice A, različiti od λ, su takođe karakteristični koreni matrice oblika*

$$C := A - diag(d_1, \ldots, d_n)(ee^T), \tag{3.10}$$

gde je $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{R}$.

Dokaz:
Neka je $\mu \neq \lambda$ karakteristični koren matrice A, i neka je $x \neq 0$ odgovarajući karakteristični vektor. Tada iz

$$\mu(x^T e) = (Ax)^T e = x^T A^t e = \lambda(x^T e)$$

sledi da je $x^T e = 0 = e^T x$. Prema tome, $Cx = \mu x$ i rezultat sledi.

∎

Posledica 3.3.1 *Primenjujući prethodni rezultat na A^T, možemo zaključiti da, ako A ima konstantnu sumu po vrstama, tada karakteristični koreni matrice A, različiti od λ, su karakteristični koreni bilo koje matice oblika*

$$B := A^T - diag(d_1, \ldots, d_n)(ee^T), \tag{3.11}$$

gde je $d_2, \ldots, d_n \in \mathbb{R}$.

Najbolji izbor svakog d_i u Teoremi 3.3.4, treba da minimizuje poluprečnik i-tog Geršgorinovog kruga, tj. treba da minimizuje sumu apsolutnih vrednosti vandijagonalnih elemenata $i-$te vrste matrice C. Dobro je poznato da medijana vandijagonalnih elemenata $i-$ te vrste matrice C ispunjava ovu osobinu.

Ovaj rezultat se može primeniti na matrice čije su sume po vrstama nula, ili čije su sume po kolonama nula, i takođe na matrice A, takve da su ili A ili A^T stohastičke matrice pomnožene skalarom. Primetimo, da su ovaj rezultat i izbor veoma korisni kada su vandijagonalni elementi svake vrste veoma bliski, zato što tada, medijana je takođe veoma bliska njima i tako se znatno poboljšava oštrina Geršgorinovih krugova.
Dalje, razmatraćemo nenegativne matrice po elementima. Međutim, postoje i drugi izbori za parametre $d_1, ...d_n$, koji se pokazuju veoma korisnima.

Za svako $j = 1, \ldots, n$ označimo sumu vandijagonanih elemenata u $j-$toj koloni sa $c_j(A)$,

$$c_j(A) = \sum_{i \neq j} |a_{ij}|. \tag{3.12}$$

Sa t_i (respektivno s_i) označavamo minimalni element među vandijagonalnim elementima $i-$te vrste (respektivno kolone) matrice A,

$$t_i = \min_{j, j \neq i} a_{ij}, \quad s_i = \min_{i, i \neq j} a_{ij}.$$

Teorema 3.3.5 *Neka je A $n \times n$ nenegativna matrica, takva da je $Ae = \lambda e$, za neko $\lambda \in \mathbb{R}$, i neka je B matrica data u (3.11) sa $d_i = s_i$ za svako i. Tada svi karakteristični koreni matrice A različiti od λ su takođe karakteristični koreni matrice B, i za svako $i, j \in \{1, \ldots, n\}$*

$$r_i(B) = c_i(A) - (n-1)s_i, \quad c_j(B) = r_j(A) - \sum_{k \neq j} s_k \tag{3.13}$$

Teorema 3.3.6 *Neka je A $n \times n$ nenegativna matrica takva da je $A^T e = \lambda e$, za neko $\lambda \in \mathbb{R}$, i neka je C matrica data u (3.11) sa $d_i = s_i$ za svako i. Tada, svi karakteristični koreni matrice A, različiti od λ, su takođe karakteristični koreni matrice C, i za svako $i, j \in \{1, \ldots, n\}$*

$$r_i(C) = c_i(A) - (n-1)t_i, \quad c_j(C) = r_j(A) - \sum_{k \neq j} t_k \tag{3.14}$$

Sledeća Teorema daje gornju granicu za realne karakteristične korene različite od 1 stohastičke matrice, u smislu najmanjih vandijagonalnih elemenata u svakoj koloni, [8].

Teorema 3.3.7 *Neka je $A = [a_{ij}]$ stohastička matrica i neka je s_i minimalni element od svih vandijagonalnih elemenata $i-$ kolone matrice A $(i = 1, \ldots, n)$ i neka je w najmanji dijagonalni element matrice A. Ako je $\lambda \neq 1$ realni karakteristični koren matrice A, tada*

$$2w - 1 \leq \lambda \leq 1 - \sum_{j=1}^{n} s_j. \tag{3.15}$$

Posledica 3.3.2 *Neka je $A = [a_{ij}]$ duplo stohastička matrica, neka su t_i i s_i minimalni elementi među vandijagonalnim elementima $i-$ te vrste i kolone matrice A $(i = 1, \ldots, n)$, respektivno i neka je w najmanji vandijagonalni element matrice A. Ako je $\lambda \neq 1$ realni karakteristični koren matrice A, tada*

$$2w - 1 \leq \lambda \leq min\Big\{1 - \sum_{i=1}^{n} t_i, 1 - \sum_{j=1}^{n} s_j\Big\}.$$

Lema 3.3.1 *Neka je $A = [a_{ij}]$ stohastička matrica, neka je s_i minimalni elemenat od svih vandijagonalnih elemenata $i-$te kolone matrice A $(i = 1, \ldots, n)$, i pretpostavimo da je $a_{ii} \geq s_i$ zadovoljeno za svako i. Stavljajući $\gamma = max_i(a_{ii} - s_i)$, ako je $\lambda \neq 1$ karakteristični koren od A, tada*

$$|\lambda - \gamma| \leq 1 - trag(A) + (n-1)\gamma.$$

Na prvi pogled, može izgledati da je pretpostavka $a_{ii} \geq s_i$ za svako i, veoma restriktivna. Ali mogućnost prebacivanja sa bilo koje stohastičke matrice na drugu stohastičku matricu, koja zadovoljava ovu osobinu, dozvoljava da dokažemo isti rezultat za sve stohastičke matrice, tj. važi sledeća teorema.

Teorema 3.3.8 *Neka je $A = [a_{ij}]$ stohastička matrica i neka je s_i minimalni element od svih vandijagonalnih elemenata $i-$ te kolone matrice A $(i = 1, \ldots, n)$. Stavljajući $\gamma = max_i(a_{ii} - s_i)$, ako je $\lambda \neq 1$ karakteristični koren od A, tada*

$$|\lambda - \gamma| \leq 1 - trag(A) + (n-1)\gamma.$$

Dokaz:

Pretpostavimo da postoji najmanje jedan indeks i za koji uslov $a_{ii} > s_i$ nije ispunjen. Za $\delta = -min_i(a_{ii} - s_i)$ definišemo matricu

$$F = \frac{1}{1+\delta}(A + \delta I).$$

Kako je $\delta > 0$, očigledno, matrica F je stohastička matrica. Ona zadovoljava uslov $f_{ii} \geq s_i(F)$, jer je

$$f_{ii} = \frac{a_{ii} + \delta}{1+\delta} \geq \frac{a_{ii} - (a_{ii} - s_i)}{1+\delta} = \frac{s_i}{1+\delta} = s_i(F).$$

Možemo primeniti lemu na matricu F. Ako je λ karakteristični vektor matrice A, tada je $\lambda(F) = \frac{\lambda+\delta}{1+\delta}$ karakteristični koren matrice F, i na osnovu leme važi

$$|\lambda(F) - \gamma(F)| \leq 1 - trag(F) + (n-1)\gamma(F).$$

Imamo da je

$$\gamma(F) = \max_i(f_{ii} - s_i(F)) = \max_i\left(\frac{a_{ii}+\delta}{1+\delta} - \frac{s_i}{1+\delta}\right) = \frac{\delta}{1+\delta} + \frac{1}{1+\delta}\max_i(a_{ii} - s_i) = \frac{\delta+\gamma}{1+\delta},$$

zaključujemo da je

$$\left|\frac{\lambda+\delta}{1+\delta} - \frac{\delta+\gamma}{1+\delta}\right| \leq \frac{trag(A)+n\delta}{1+\delta} + (n-1)\frac{\delta+\gamma}{1+\delta},$$

što je ekvivalentno sa

$$|\lambda - \gamma| \leq 1 - trag(A) + (n-1)\gamma.$$

■

Teorema 3.3.9 *Neka je $A = [a_{ij}]$ pozitivna stohastička matrica. Označimo sa $\gamma_m = \gamma(A^m)$ za sve pozitivne cele brojeve m. Tada, niz (γ_m) konvergira ka 0 , i poluprečnik odgovarajuće kruznice $1 - trag(A^m) + (n-1)\gamma_m$ (koji sadrži karakteristične korene λ^m matrice A^m različite od 1) takođe teži u 0.*

Dokaz: Kako je A pozitivna, poznato je da je 1 jedinstveni, jednostruki, dominantni karakteristični koren. A^m je takođe stohastička matrica, jer je proizvod stohastičkih matrica. Možemo primeniti prethodnu teoremu i dobijamo

$$|\lambda^m - \gamma_m| \leq 1 - trag(A^m) + (n-1)\gamma_m.$$

Matrica A ima spektralni radijus 1, koji je jedinstveni, jednostruki dominantni koren, pa je dobro poznato da postoji matrica $A^\infty = \lim_{m\to\infty} A^m$. Ta matrica $A^\infty = [\alpha_{ik}]$ ima karakteristične korene 1 i 0 sa višestrukošću $n-1$, tj. njen rang je 1. Za svako $i = 2, 3, ..., n$, imamo $\alpha_{ik} = c_i\alpha_{1k}$ $(k = 1, ..., n)$ za neko $c_i \in \mathbb{R}$. Kako je A^∞ stohastička po vrstama, sledi da je $\sum_{k=1}^n \alpha_{1k} = 1$, i $c_i = 1$ za svako $i = 2, ..., n$. To znači da su elementi svake kolone isti. Očigledno, γ^m je konvergentan niz, sa graničnom vrednošću 0. Konačno, primetimo da je $trag(A^m) = \sum_{k=1}^n \alpha_{1k} = 1$, pa je granična vrednost poluprečnika $1 - 1 + (n-1)0 = 0$, što kompletira dokaz. ■

Primer 3.3.1 *Koristeći prethodnu teoremu možemo konstruisati algoritam za aproksimaciju prostora između dominantnog karakterističnog korena 1 i ostalih karakterističnih korena ('spectral gap'). Vrednost*

$$d_m(A) = 1 - (r_m(A) + |\gamma(A)|)^{\frac{1}{m}}$$

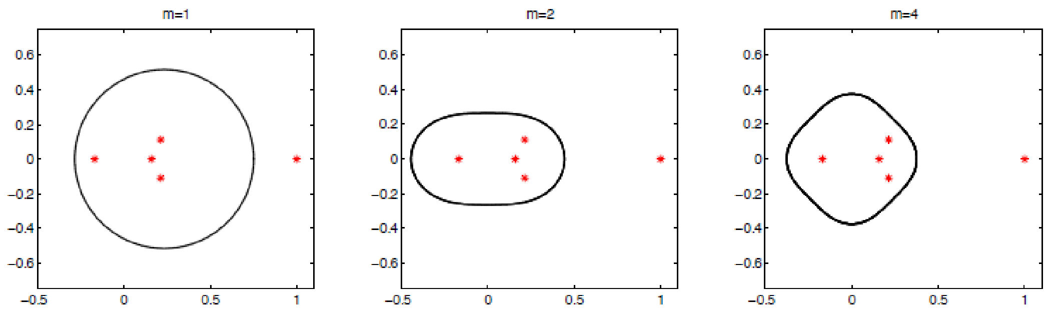
predstavlja udaljenost dominantnog karakterističnog korena 1 i lokalizacionog skupa $\{z \in \mathbb{C} : |z^m - \gamma_m(A)| \leq r_m(A)\}$.
Posmatrajmo sledeće matrice:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.27 & 0.18 & 0.18 & 0.10 & 0.27 \\ 0.20 & 0.40 & 0.20 & 0 & 0.20 \\ 0.11 & 0.22 & 0.22 & 0.34 & 0.11 \\ 0.06 & 0.25 & 0.31 & 0.19 & 0.19 \\ 0.08 & 0.17 & 0 & 0.42 & 0.33 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

Za matricu A_1 , već prvi korak daje dobru ocenu za 'spectral gap', što je prikazano na Slici 1. Za matricu A_2 to nije slučaj. Ovde lokalizacioni skup sadrži karakteristični koren 1, što je očigledno, jer je $d_1(A_2) < 0$ (Slika 2).

m	1	2	4
$\gamma_m(A_1)$	0.2333	0.0634	0.0038
$r_m(A_1)$	0.5100	0.1301	0.0159
$d_m(A_1)$	0.2600	0.5613	0.6255

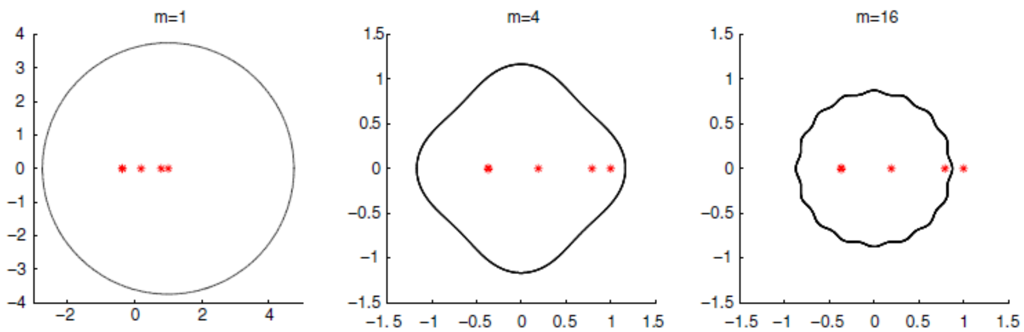
Tabela 1



Slika 1

m	1	2	4	8	16
$\gamma_m(A_2)$	1	0.71	0.46	0.18	0.03
$r_m(A_2)$	3.75	1.90	1.41	0.58	0.09
$d_m(A_2)$	-3.75	-0.61	-0.17	0.03	0.12

Tabela 2



Slika 2

3.4 Odnos između klasa pozitivno definitnih matrica i nenegativnih matrica (po elementima)

Dva prethodno navedena koncepta pozitivnosti matrica stoje u opštem odnosu. Matrica može biti pozitivno definitna, a da nije nenegativna po elementima. Takođe, matrica može biti nenegativna po elementima, a da nije pozitivno definitna, što možemo videti u sledećem primerima.

Na primer, matrica

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

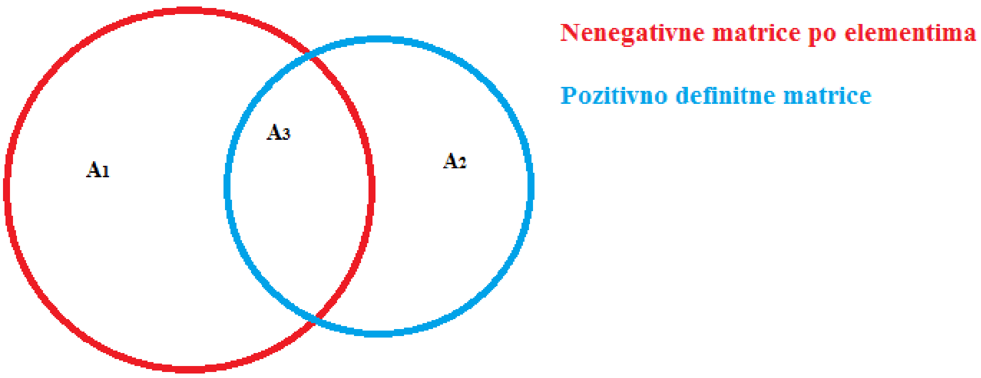
je nenegativna po elementima, ali nije pozitivno definitna. Matrica

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

je pozitivno definitna, ali nije nenegativna po elementima.
Da je presek ove dve klase neprazan vidimo na primeru matrice

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

koja je i pozitivno definitna i nenegativna po elementima.



Slika 3

4

Totalno pozitivne i totalno nenegativne matrice

Totalna pozitivnost je tema u linearnoj algebra i drugim aspektima matematike koja se stalno pominje u prethodnih 80 godina. Ova klasa i srodne klase matrica se pojavljuju u širokom spektru primena.

Nakon F.R. Gantmachera i M.G.Kreina totalno pozitivne matrice su se dalje razvijale u vezi sa funkcijama splajna i generisanjem totalno pozitivnih nizova, onda je 1968. godine došla jedna od najvažnijih i najuticajnijih referenci u ovoj oblasti, knjiga **Total Positivity**, autora S. Karlin. Karlin je pristupio totalnoj pozitivnosti razmatrajući analitička svojstva potpuno pozitivnih funkcija. Karlin je, takođe, primetio značaj totalne pozitivnosti u polju statistike.

Sledeći značajan pristup može se videti u istraživačkom radu T. Ando, za više detalja pogledati [1]. Njegov značaj je bio u razmatranju multilinearnog pristupa ovoj temi, koristeći koso-simetrični proizvod i Schur-ov komplement kao osnovne alate.

Značaj totalne pozitivnosti matrica je široko poznat i izvan matematike. Na primer, totalno pozitivne matrice imaju značajnu ulogu u teorijskoj ekonomiji. Značajan pristup može se videti i u [14]. Koncept totalne pozitivnosti se pokazao kao veoma moćan u raznim granama matematike.

4.1 Definicije

Uvodimo osnovne definicije ove sekcije:

Definicija 4.1.1 *$m \times n$ realna matrica A je **totalno nenegativna** (TN), ako je svaki minor nenegativan.*

Definicija 4.1.2 *$m \times n$ realna matrica A je **totalno pozitivna** (TP), ako su svi minori od A pozitivni.*

Definicija 4.1.3 *$n \times n$ realna matrica A je **oscilatorna**, ako je A totalno negativna i A^k je totalno pozitivna za neki ceo broj $k \geq 1$.*

Iz prethodnih definicija je očigledno da je svaka totalno pozitivna matrica totalno nenegativna matrica. Totalno pozitivne marice su oscilatorne matrice kod kojih je $k = 1$.

Definicija 4.1.4 *Realna $m \times n$ matrica je* ***'in double echelon forma'*** *ako*

1. *Svaka vrsta matrice A ima jedan od sledećih oblika ($*$ označava nenula element):*

   (a) $(*, *, \ldots, *)$,

   (b) $(*, \ldots, *, 0, \ldots, 0)$,

   (c) $(0, \ldots, 0, *, \ldots, *)$ *ili*

   (d) $(0, \ldots, 0, *, \ldots, *, 0, \ldots, 0)$.

2. *Prvi i poslednji nenula elementi u $i+1$ vrsti, nisu sa leve strane prvog i poslednjeg nenula elementa u vrsti i, respektivno $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$.*

4.1.1 Primeri totalno pozitivnih matrica

Primer 4.1.1 ***Vandermondova matrica*** *Vandermondova matrica nastaje u problemu određivanja polinoma, stepena najviše $n-1$, koji interpolira n datih tačaka. Pretpostavimo da je dato n tačaka $(x_i, y_i)_{i=1}^n$ koje zadovoljavaju $p(x_i) = y_i$ za $i = 1, 2, \ldots, n$ što se može zapisati kao*

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$n \times n$ matrica koeficijenata se naziva ***Vandermondova matrica*** *i označavamo je sa $\nu(x_1, \ldots, x_n)$. Determinanta Vandermondove matrice je data formulom*

$$\prod_{i>j} (x_i - x_j).$$

Tako, ako je $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, tada je $\nu(x_1, \ldots, x_n)$ TP.

Primer 4.1.2 ***Routh-Hurwitz matrica*** *Neka je $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ polinom po x, $n-$ tog stepena. Routh-Hurwitz matrica je $n \times n$ matrica, data sa*

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \ldots & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-2} & a_n \end{bmatrix}.$$

Specijalan primer matrice, za proizvoljan polinom stepena šest, $f(x) = \sum_{i=0}^{6} a_i x^i$ *je dat sa*

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \end{bmatrix}.$$

Polinom $f(x)$ *je stabilan ako sve nule imaju negativan realan deo. Dokazano je da je* $f(x)$ *stabilan ako i samo ako je matrica formirana od* f *totalno nenegativna.*

Primer 4.1.3 ***Cauchy matrica*** $n \times n$ *matrica* $C = [c_{ij}]$ *se naziva Cauchy matrica ako su elementi matrice* C *dati sa*

$$c_{ij} = \frac{1}{x_i + y_j}.$$

gde su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *i* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *dva niza brojeva (izabranih tako da je* c_{ij} *dobro definisano). Matrica je totalno pozitivna ako i samo ako je* $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ *i* $0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n$.

4.2 Osobine totalno pozitivnih matrica

Iz definicije TP(TN) matrica lako se uočava da važe sledeće osobine:

- Ako je A totalno nenegativna (pozitivna) matrica, tada:
  1. A^T je totalno nenegativna (pozitivna).
  2. $A[\alpha, \beta]$ je totalno nenegativna (pozitivna) za svaki skup indeksa vrsta α i skup indeksa kolona β.
- Kako je svaki svaki $k \times k$ minor proizvoda AB suma proizvoda $k \times k$ minora od A i B, sledi da ako su svi $k \times k$ minori dvije $n \times n$ matrice pozitivni, onda su svi $k \times k$ minori njihovog proizvoda pozitivni.
- Skup svih totalno nenegativnih (pozitivnih) matrica je zatvoren u odnosu na množenje.
- Neka je A TP(TN) matrica i D_1 i D_2 pozitivne dijagonalne matrice. Tada je $D_1 A D_2$ TP(TN).
- Ako je A kvadratna invertibilna totalno nenegativna (ili totalno pozitivna) matrica, onda je $SA^{-1}S$ totalno nenegativna (pozitivna) matrica za $S = diag(1, -1, 1, ..., -1, 1)$. Ako je A kvadratna invertibilna totalno nenegativna (ili totalno pozitivna) matrica, tada adjungovana matrica od A je totalno nenegativna (totalno pozitivna).

- Ako je A $m \times n$ totalno nenegativna (pozitivna) matrica, tada povećavanje elementa $(1,1)$ ili (m,n) matrice A rezultira totalnom nenegativnosću (pozitivnošću) matrice. Generalno, ovo su jedina dva elementa u TN matrici sa ovom osobinom.

- Neka je P $n \times n$ permutaciona matrica indukovana permutacijom $i \to n-i+1$, $(1 \leq i \leq n)$, i pretpostavimo da je A $n \times n$ totalno nenegativna (pozitivna) matrica. Tada je PAP totalno nenegativna (pozitivna) matrica.

- Svaka nerazloživa tridijagonalna matrica sa nenula glavnom dijagonalom je 'in double echelon forma'

- Neka je A $m \times n$ totalno nenegativna matrica koja nema nula vrste ili kolone. Tada je A 'in double echelon forma'.

- $n \times n$ totalno nenegativna matrica $A = [a_{ij}]$ je nerazloživa ako i samo ako $a_{i,i+1} > 0$ i $a_{i+1,i} > 0$, za $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

4.3 Prepoznavanje i testiranje

U praksi, kako možemo odrediti da li je data matrica TP ili TN? Možemo izračunati svaki minor, ali postavlja se pitanje postoji li manji skup minora, čija nenegativnost ili pozitivnost implicira pozitivnost ili nenegativnost svih minora. Odgovor na pitanje daju naredne dve teoreme.

Za formulisanje teorema neophodna je sledeća definicija.

Definicija 4.3.1 *Za $\alpha = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq N = \{1, 2, \ldots, n\}$, gde je $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$,* ***disperzija*** *od α, u oznaci $d(\alpha)$ je definisana sa $\sum_{j=1}^{k-1}(i_{j+1} - i_j - 1) = i_k - i_1 - (k-1)$, sa konvencijom da je $d(\alpha) = 0$, gde je α singlton.*

Teorema 4.3.1 ***(Fekete's Criterion)*** *$m \times n$ matrica A je totalno pozitivna ako i samo ako je $detA[\alpha, \beta] > 0$, za svako $\alpha \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ i $\beta \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, gde je $|\alpha| = |\beta|$ i $d(\alpha) = d(\beta) = 0$ (Broj minora koji trebaju biti provereni za totalnu pozitivnost se smanjuje na približno n^3).*

Naredna teorema opisuje način na koji, pomoću determinatni podmatrica, proveravamo da li je matrica TP ili TN.

Teorema 4.3.2 *Neka je $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ regularna.*

1. *A je TN ako i samo ako za svako $k = 1, 2, \ldots, n$*

   (a) *$detA[\{1, 2, \ldots, k\}] > 0$,*

   (b) *$detA[\alpha, \{1, 2, \ldots, k\}] \geq 0$, za svako $\alpha \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, $|\alpha| = k$,*

   (c) *$detA[\{1, 2, \ldots, k\}, \beta] \geq 0$, za svako $\beta \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, $|\beta| = k$.*

2. *A je TP ako i samo ako za svako $k = 1, 2, \ldots, n$*

(a) $detA[\alpha, \{1, 2, \ldots, k\}] > 0$ *za svako* $\alpha \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, *gde je* $|\alpha| = k, d(\alpha) = 0$,

(b) $detA[\{1, 2, \ldots, k\}, \beta] \geq 0$, *za svako* $\beta \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, *gde je* $|\beta| = k, d(\beta) = 0$.

Teorema 4.3.3 *$n \times n$ totalno nenegativna matrica $A = [a_{ij}]$ je oscilatorna ako i samo ako:*

1. *A je regularna*
2. *$a_{i,i+1} > 0$ i $a_{i+1,i} > 0$, za svako $i = 1, 2, \ldots, n-1$.*

Primer 4.3.1 *Nažalost, Teorema 4.3.1 ne važi u slučaju da se totalna pozitivnost zameni sa totalna nenegativnost, i > 0 sa ≥ 0. Posmatrajmo sledeći jednostavan primer:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nije teško da pimetimo da su svi minori od A, bazirani na susednim skupovima vrsta i kolona, nenegativni, ali $detA[1, 3] = -3$.

4.4 Osobine spektra

Kako karakteristični koreni imaju mnogo primena u primenjenoj matematici, navodimo poznate rezultate za spektar TN(P) matrica.

Teorema 4.4.1 *Karakteristični koreni totalno nenegativne matrice su realni i nenegativni. Ukoliko je matrica A, dodatno, i nerazloživa, tada su pozitivni karakteristični koreni od A različiti.*

Teorema 4.4.2 *Neka je A $n \times n$ oscilatorna matrica. Tada su karakteristični koreni matrice A pozitivni, realni i različiti.*

Teorema 4.4.3 *Ako je A $n \times n$ totalno pozitivna matrica sa karakterističnim korenima $\lambda_1 > \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ i $A(k)$ $(n-1) \times (n-1)$ glavna podmatrica dobijena od A brisanjem $k-$ te vrste i kolone sa karakterističnim korenima $\mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_{n-1}$, tada za $j = 1, 2, \ldots, n-1$, $\lambda_{j-1} > \mu_j > \lambda_{j+1}$, gde je $\lambda_0 = \lambda_1$.*

Teorema 4.4.4 *Neka je $n \geq 2$ i $A = [a_{ij}]$ oscilatorna matrica. Tada elementi na glavnoj dijagonali matrice A su ograničeni karakterističnim korenima matrice A.*

4.4.1 Minimalni karakteristični koren totalno nenegativnih matrica

Za dato $i \in 1, \ldots, n$ neka je

$$J_i := \{j| \quad |j-i| \quad \text{je neparno}\}.$$

Teorema 4.4.5 *Neka je A regularna totalno nenegativna matrica, i neka je $\lambda_{min}(>0)$ njen minimalni karakteristični koren. Tada:*

$$\lambda_{min} \geq \min_i \Big\{ a_{ii} - \sum_{j \in J_i} a_{ij} \Big\}. \tag{4.1}$$

Geršgorinova teorema primenjena na bilo koju relanu matricu A implicira da je

$$\min_i \Big\{ a_{ii} - \sum_{j \neq i} a_{ij} \Big\} \leq \min_i \{Re\lambda_i\}. \tag{4.2}$$

Za totalno nenegativne matrice, kako su im svi karakteristični koreni realni, važi da je $\lambda_{min} = \min_i \{Re\lambda_i\}$. Takođe, za njih važi da je $\sum_{j \in J_i} a_{ij} \leq \sum_{j \neq i} a_{ij}$, pa je sa (4.1) data bolja ocena nego sa (4.2).

Primer 4.4.1 *Sledeća regularna matrica*

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 7 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

je totalno nenegativna.
Karakteristični koreni matrice A su 12, 9 i 5. Granica data sa (4.1), implicira da je $\lambda_{min} \geq 5$ i to ne može biti poboljšano, dok je granica za λ_{min} data sa (4.2) sada $\lambda_{min} \geq min\{4, 5, 5\} = 4$.

4.5 Odnos između klase totalno pozitivnih matrica i prethodno navedenih klasa

Nenegativne matrice kao pravu potklasu sadrže klasu totalno pozitivnih matrica.

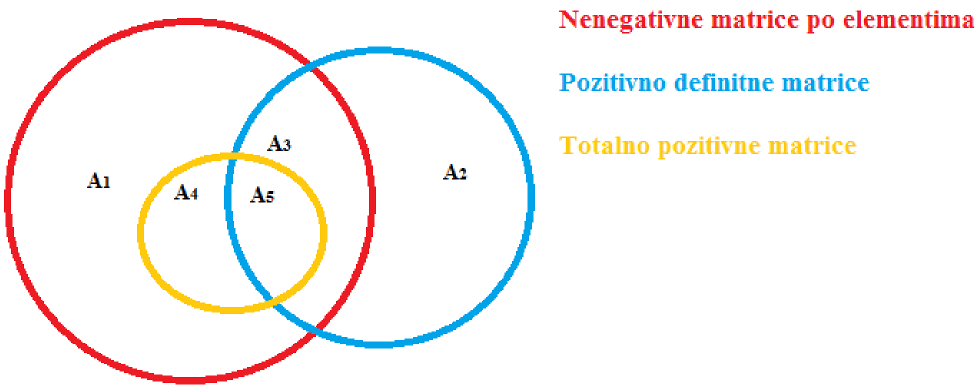
Totalno pozitivne matrice i klasa pozitivno definitnih matrica stoje u opštem odnosu. Na primer, matrica

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

je totalno pozitivna matrica, ali nije pozitivno definitna matrica.

Da presek klase totalno pozitivnih matrica i pozitivno definitnih matrica nije prazan vidimo na primeru jednostavne matrice,

$$A_5 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$


Nenegativne matrice po elementima
Pozitivno definitne matrice
Totalno pozitivne matrice
A_1
A_2
A_3
A_4
A_5

Slika 4

5

P-matrice

Podsetimo se da su glavni minori determinante podmatrica koje se dobiju kada se izbriše isti skup indeksa vrsta i kolona. Dijagonalni elementi matrice i determinanta matrice su takođe među glavnim minorima.

Definicija 5.0.1 *Kvadratna matrica je P-matrica ako su svi njeni glavni minori pozitivni.*

Problem provere da li je data matrica P-matrica je važan u mnogim primenama. Algoritam računanja glavnih minora je veoma skup postupak, jer za matricu $n \times n$ i izračunavanje $2n - 1$ glavnih minora potrebno je $n^3 2^n$ operacija. Može se pokazati da nijedan od minora ne može biti izostavljen. Međutim, postoje i neke druge strategije. Nedavno, Tsatsomeros i Li su prezentovali algoritam zasnovan na Šurovom komplementu koji smanjuje računsku složenost na $7 \cdot 2^n$. Ovaj algoritam uvek zahteva taj broj operacija ako je u pitanju P-matrica. U suprotnom, trošak je često mnogo manji, jer je dovoljan jedan nepozitivan minor da pokažemo da nije P-matrica.
Neke potklase P-matrica su:

1. Simetrične pozitivno definitne matrice
2. Totalno pozitivne matrice
3. Regularne M-matrice
4. Matrice sa pozitivnim dijagonalnim elementma koje su strogo dijagonalno dominantne po vrstama

Kada je u pitanju tema P-matrica, značajni su radovi autora J.M. Pena, pogledati [30] i [31].

Veoma interesantna karakterizacija P- matrica je karakterizacija urađena u smislu problema linearne komplementarnosti, LCP, [2]. Problem linearne komplementarnosti se sastoji od pronalaženja vektora $z \in \mathbb{R}^n$ koji zadovoljava

$$w = r + Mz, \tag{5.1}$$

$$w \geq 0, \quad z \geq 0, \quad z^T w = 0, \tag{5.2}$$

gde je M $n \times n$ realna matrica i $r \in \mathbb{R}^n$. Označavamo taj problem sa (r, M).

Problem linearne komplementarnosti možemo zapisati i kao problem pronalaženja vektora $z \in \mathbb{R}^n$ tako da

$$Mz + r \geq 0, \quad z \geq 0, \quad z^T(Mz + r) = 0, \tag{5.3}$$

gde je M $n \times n$ realna matrica i $r \in \mathbb{R}^n$.

Zapisujemo (5.1) kao

$$Iw - Mz = r. \tag{5.4}$$

Par promenljivih (w_i, z_i) se naziva komplementarni. Promenljive w_i i z_i su komplementarne jedna drugoj.
Par (w, z) vektora iz $\mathbb{R}^n$ je komplementarno rešenje od (5.4), pod pretpostavkom $z_i w_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$.
Komplementarni skup promenljivih je skup koji sadrži tačno jednu promenljivu svakog komplementarnog para (w_i, z_i).
Osnovno rešenje je ono koje se dobije rešavanjem za vrednosti osnovnog skupa promenljivih, kada su promenljive koje nisu osnovne jednake nuli.

Naredna teorema govori o postojanju i jedinstvenosti rešenja problema linearne komplementarnosti, ukoliko je matrica M P-matrica.

Teorema 5.0.1 *M je $P-$matrica ako i samo ako (r, M) ima jedinstveno rešenje za svako $r \in \mathbb{R}^n$.*

U nastavku govorimo o B i C matricama, i dajemo njihovo upštenje, [28].

5.1 B-matrice

Definicija 5.1.1 *Realna kvadratna matrica A, sa pozitivnim sumama po vrstama, se naziva $B-$matrica, ako su svi vandijagonalni elementi ograničeni od gore odgovarajućim sumama po vrstama, tj. za svako $i, j = 1, .., n$*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} > 0 \quad i \quad \frac{1}{n}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\Big) > a_{ij}, \qquad za\ svako \quad i \neq j.$$

Dokazano je da su $B-$matrice regularne i da imaju pozitivnu determinantu. Definicija $n \times n$ $B-$matrice obuhvata n^2 linearnih nejednakosti. Takođe je dokazano da ovaj skup nejednakosti formira najslabiji skup linearnih uslova na vrste realne $n \times n$ matrice da se obezbedi pozitivna determinanta.
Neka je $A = [a_{ij}]$ realna matrica. Za svako $i = 1, .., n$ označimo sa

$$r_i^+ := \max\{0, \max_{j \neq i} a_{ij}\}, \quad r_i^- = \min\{0, \min_{j \neq i} a_{ij}\}, \tag{5.5}$$

$$r_i = \begin{cases} r_i^+ & \text{ako } a_{ii} \geq 0, \\ r_i^- & \text{ako } a_{ii} < 0 \end{cases} \tag{5.6}$$

Teorema 5.1.1 *Neka je A realna matrica. Tada je $A = [a_{ij}]$ $B-$matrica ako i samo ako je za svako $i \in 1, \dots, n$*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} > nr_i^+.$$

Sve glavne podmatrice B-matrice su B-matrice. Kao posledicu te činjenice imamo da su B-matrice P-matrice.

Definicija 5.1.2 *Realna matrica se naziva $\bar{B}-$matrica ako ima formu DA gde je D dijagonalna matrica čiji dijagonalni elementi pripadaju skupu $\{1, -1\}$ i A je B-matrica.*

Teorema 5.1.2 *Neka je A realna matrica i neka je r_i definisano kao u (5.6). Tada je A $\bar{B}-$matrica ako i samo ako za svako $i = 1, .., n$*

$$|a_{ii} - r_i| > \sum_{j \neq i} |r_i - a_{ij}|.$$

Za datu matricu $B = [b_{ik}]_{a \leq i,k \leq n}$ definišemo familiju matrica

$$B_t = D + t(B - D), \quad t \in [0, 1],$$

gde je D dijagonalna matrica $diag(b_{11}, \dots, b_{nn})$.

B-matrice se koriste za lokalizaciju realnih karakterističnih korena realnih matrica i realnih delova svih karakterističnih korena realnih matrica.

Teorema 5.1.3 *Neka je $A = [a_{ik}]_{a \leq i,k \leq n}$ realna matrica i neka su r_i^+ i r_i^- kao u (5.5) i neka je λ karakteristični koren matrice A. Tada:*

1. $$\lambda \in S := \bigcup_{i=1}^{n} \Big[|a_{ii} - r_i^+ - \sum_{k \neq i} |r_i^+ - a_{ik}|, a_{ii} - r_i^- + \sum_{k \neq i} |r_i^- - a_{ik}| \Big]$$

2. *Neka je C klasa realnih matrica, takvih da ako je $B \in C$, tada svi karakteristični koreni matrice B su realni i sve matrice oblika pripadaju C i pretpostavimo da je $A \in C$. Ako je S' unija m intervala S takvih da je S' disjunktan sa svim ostalim intervalima, tada S' sadrži tačno m karakterističnih korena (računajući i višestrukost) matrice A.*

Definicija 5.1.3 *Matrica sa dijagonalnim elementima koji zadovoljavaju $a_{kk} > r_k^+$, za svako k, se naziva dupla $B-$matrica, ako za svako $i \neq j$ iz $\{1, \dots, n\}$:*

$$(a_{ii} - r_i^+)(a_{jj} - r_j^+) > \Big(\sum_{k \neq i} (r_i^+ - a_{ik}) \Big) \Big(\sum_{k \neq j} (r_j^+ - a_{jk}) \Big).$$

Ako je A dupla B-matrica, tada je $detA > 0$ i A je P-matrica.

5.1.1 Klasa regularnih matrica koja sadrži B-matrice

Definicija 5.1.4 *Neka je $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ vektor koji zadovoljava uslov*

$$0 < \sum_{j=0}^{n} \pi_j \leq 1 \tag{5.7}$$

neka je $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ realna kvadratna matrica, čije su sume po vrstama pozitivne i neka je $R = (R_1, R_2, \dots, R_n)^T$ vektor formiran od suma po vrstama matrice A, tako da je $R_k(A) = \sum_{j=0}^{n} a_{kj}$ (> 0) za sve $k = 1, \dots, n$. Tada kažemo da je A B_π^R-matrica ako za sve $i = 1, \dots, n$,

$$\pi_j R_k > a_{kj}, \quad \text{za sve} \quad j \neq k. \tag{5.8}$$

Kada je $\pi_j = 1/n$ za sve j, tada se prethodna definicija podudara sa definicijom B-matrica.

Primedba 1 *Neka je $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ realna kvadratna matrica čije su sume po vrstama pozitivne i neka je $R = (R_1, R_2, \dots, R_n)^T$ vektor formiran od suma po vrstama matrice A. Tada postoji vektor π, koji zadovoljava (5.7) tako da je A B_π^R-matrica ako i samo ako je*

$$0 < \sum_{j=0}^{n} \pi_j \leq 1. \tag{5.9}$$

Podsetimo se da je realna kvadratna matrica P-matrica ako i samo ako su svi njeni glavni minori pozitivni. Za naredna tvrđenja biće nam potrebna sledeća lema.

Lema 5.1.1 *Ako je A realna $n \times n$ regularna $M-$matrica i P nenegativna $n \times n$ matrica, takva da je $rank(P) = 1$, tada je $A + P$ $P-$matrica.*

Sledeći rezultat dokazuje da su B_π^R-matrice P-matrice.

Teorema 5.1.4 *Ako je $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$ B_π^R-matrica, onda je A P-matrica.*

Dokaz: Na osnovu (5.7) postoji indeks $1 \leq i \leq n$ tako da je $\pi_i > 0$ i bez gubljenja opštosti pretpostavimo da je $i = 1$. Na osnovu (5.8) postoji neko $\varepsilon > 0$ tako da je $a_{i1} - (\pi_1 - \varepsilon) R_i < 0$ za svako $i > 1$ i $\pi_1 - \varepsilon > 0$. Predstavimo A kao $A = B^+ + C$, gde je

$$B^+ = \begin{bmatrix} a_{11} - (\pi_1 - \varepsilon)R_1 & a_{12} - \pi_2 R_1 & \dots & a_{1n} - \pi_n R_1 \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} - (\pi_1 - \varepsilon)R_n & a_{n2} - \pi_2 R_n & \dots & a_{nn} - \pi_n R_n \end{bmatrix}$$

i

$$C = \begin{bmatrix} (\pi_1 - \varepsilon)R_1 & \pi_2 R_1 & \dots & \pi_n R_1 \\ \vdots & & \vdots & \\ (\pi_1 - \varepsilon)R_n & \pi_2 R_n & \dots & \pi_n R_n \end{bmatrix}.$$

Na osnovu (5.8) i našeg izbora za ε, B^+ je Z-matrica, (tj. svi njeni vandijagonalni elementi su nepozitivni). Uzmajući u obzir (5.7), vidimo da za svako $i = 1, \ldots, n$,

$$a_{i1} + R_i\varepsilon - \pi_1 R_i + \sum_{j>1}(a_{ij} - \pi_j R_i) = R_i\varepsilon + R_i - \Big(\sum_{j=1}^{n} \pi_j\Big)R_i \geq R_i\varepsilon > 0. \quad (5.10)$$

Prema tome, Z-matrica B^+ ima sve pozitivne sume po vrstama i mora biti regularna M-matrica. Kako je C nenegativna matrica ranga 1, rezultat sledi na osnovu leme 5.1.1. ∎

Teorema 5.1.5 *Neka su $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$ i $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$ B_π^R-matrica i B_ψ^R-matrica, respektivno. Neka su s i t nenegativni brojevi takvi da je $s + t > 0$. Tada je $sA + tB$ $B_{(s\pi+t\psi)/(s+t)}^{(t+s)R}$ matrica i stoga je regularna.*

Dokaz: Na osnovu (5.8), za svako $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\pi_j R_k > a_{kj} \quad \text{i} \quad \psi_j R_k > b_{kj}, \quad \text{za sve} \quad j \neq k. \quad (5.11)$$

Sada, jasno, vektor suma kolona matrice $sA + tB$ je dat sa $(s + t)R$, koja ima pozitivne komponente i, takođe, koristeći (5.11), imamo da za svako $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\frac{s\pi_j + t\psi_j}{s + t}(s + t)R_k > sa_{kj} + tb_{kj}. \quad (5.12)$$

Na kraju,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{s\pi_j + t\psi_j}{s + t} = \frac{s(\sum_{j=1}^{n} \pi_j) + t(\sum_{j=1}^{n} \psi_j)}{s + t} \leq 1, \quad (5.13)$$

jer je $\sum_{j=1}^{n} \pi_j \geq 1, \sum_{j=1}^{n} \pi_j \geq 1$, $s, t \geq 0$ i $s + t > 0$. ∎

5.2 C-matrice

Definicija 5.2.1 *Realna kvadratna matrica A, sa pozitivnim sumama po vrstama, se naziva C-matrica, ako su svi vandijagonalni elementi veći od odgovarajućih suma po vrstama, tj. za svako $i, j = 1, \ldots, n$*

$$0 < \frac{1}{n}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\Big) < a_{ij}, \quad \textit{za svako} \quad i \neq j.$$

Teorema 5.2.1 *Ako je A $n \times n$ $C-$matrica, tada je $(-1)^{n-1} detA > 0$.*

Uvodimo oznake: $s_i^+ := \max\{0, \min_{j\neq i} a_{ij}\}$, $s_i^- := \min\{0, \max_{j\neq i} a_{ij}\}$.

Teorema 5.2.2 *Neka je A realna matrica. Tada je A $C-$matrica ako i samo ako*

$$0 < \sum_{k=1}^{n} a_{ik} < n{s_i}^+.$$

Definicija 5.2.2 *Realna matrica se naziva $\bar{C}-$matrica ako ima formu DA, gde je D dijagonalna matrica čiji dijagonalni elementi pripadaju skupu $\{1, -1\}$ i A je $C-$ matrica.*

Kako C-matrice nisu P-matrice, možemo lokalizovati samo realne karakteristične korene.

Teorema 5.2.3 *Neka je $A = [a_{ik}]_{a \le i,k \le n}$ realna matrica i neka je λ realni karakteristični koren matrice A. Tada λ ne pripada intervalu*

$$\Big(\max_i \Big\{ a_{ii} - s_i^+ - \sum_{k \ne i} |a_{ik} - s_i^+| \Big\}, \min_i \Big\{ a_{ii} - s_i^- + \sum_{k \ne i} |a_{ik} - s_i^-| \Big\} \Big).$$

5.2.1 Klasa regularnih matrica koja sadrži C-matrice

U ovoj sekciji proučavamo klasu regularnih matrica koja se može opisati kao dual klase matrica koja generalizuje B-matrice, u smislu da njihovi vandijagonalni elementi zadovoljavaju suprotnu nejednakost nejednakosti u (5.8).
Definišemo sledeću generalizaciju klase C-matrica.

Definicija 5.2.3 *Neka je $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ vektor koji zadovoljava uslov*

$$\sum_{j=0}^{n} \pi_j \ge 1, \tag{5.14}$$

neka je $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ realna kvadratna matrica, čije su sume po vrstama pozitivne i neka je $R = (R_1, R_2, \ldots, R_n)^T$ vektor formiran od suma po vrstama matrice A, tako da je $R_k(A) = \sum_{j=0}^{n} a_{kj}$ (> 0) za sve $k = 1, \ldots, n$. Tada kažemo da je A C_π^R-matrica ako za sve $i = 1, \ldots, n$,

$$\pi_j R_k < a_{kj}, \quad \text{za sve} \quad j \ne k. \tag{5.15}$$

Kada je $\pi_j = 1/n$ za sve j tada se prethodna definicija podudara sa definicijom C-matrica.

Iz sledećeg rezultata sledi regularnost C_π^R- matrica.

Teorema 5.2.4 *Neka je $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ vektor koji zadovoljava uslov*

$$\sum_{j=0}^{n} \pi_j \ge 1, \tag{5.16}$$

neka je $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ realna kvadratna matrica, čije su sume po vrstama pozitivne i neka je $R = (R_1, R_2, \ldots, R_n)^T$ vektor formiran od suma po vrstama matrice A. Pretpostavimo da je

$$\pi_j R_k \le a_{kj}, \quad \text{za sve} \quad j \ne k \tag{5.17}$$

i dodatno, da postoji s takvo da je $\pi_s > 0$ i $\pi_s R_k < a_{ks}$ za sve $k \ne s$. Tada je $(-1)^{n-1} det(A) > 0$.

Rezultat prethodne teoreme se moze proširiti na slučaj kada je neka suma po vrstama jednaka nula. To je urađeno u sledećoj teoremi.

Teorema 5.2.5 *Neka je* $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ *vektor koji zadovoljava uslov*

$$\sum_{j=0}^{n} \pi_j \geq 1, \tag{5.18}$$

neka je $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ *realna kvadratna matrica, čije su sume po vrstama nenegativne i neka je* $R = (R_1, R_2, \ldots, R_n)^T \neq 0$. *Pretpostavimo da je*

$$\pi_j R_k \leq a_{kj}, \quad \textit{za sve} \quad j \neq k, \tag{5.19}$$

i da postoji indeks $1 \leq s \leq n$, *takav da je* $\pi_s > 0$ *i* $\pi_s R_k < a_{ks}$, *za svako* $k \neq s$, *za koje je* $R_k > 0$.
Pretpostavimo dalje da je matrica $G = [g_{ij}]$, *gde je* $g_{ij} := a_{ij} - R_j \pi_j$ *nerazloživa. Tada je* $(-1)^{n-1} detA > 0$.

Sledeće zapažanje daje karakterizaciju C_π^R- matrica.

Lema 5.2.1 *Neka je* $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ *vektor koji zadovoljava uslov* $\sum_{j=0}^{n} \pi_j \geq 1$, *neka je* $R = (R_1, R_2, \ldots, R_n)^T$ *vektor formiran od suma po vrstama matrice* A. *Tada postoji vektor* π *takav da je* $\sum_{j=0}^{n} \pi_j \geq 1$ *tako da je* A C_π^R- *matrica ako i samo ako je*

$$\sum_{j=1}^{n} \min_{i \neq j} \frac{a_j}{R_i} > 1. \tag{5.20}$$

Teorema 5.2.6 *Neka je* $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$ *kvadratna matrica, čiji je vektor suma po vrstama* $R(A) = e$ *i pretpostavimo da je*

$$\sum_{j=1}^{n} \min_{i \neq j} a_{ij} \geq 1. \tag{5.21}$$

Tada je 1 *jednostruki pozitivni realni karakteristični koren.*

Dokaz: Prvo pokazujemo da $0 < \lambda < 1$ ne može biti karakteristični koren matrice A.
Neka je $C = A - \lambda I$. Tada je $R(C) = (1-\lambda)e$ i, pošto je $c_{ij} = a_{ij}$, za $i \neq j$,

$$\sum_{j=1}^{n} \min_{i \neq j} \frac{c_{ij}}{R_i(c)} = \frac{1}{1-\lambda} \sum_{j=1}^{n} \min_{i \neq j} a_{ij} \geq \frac{1}{1-\lambda} > 1. \tag{5.22}$$

Na osnovu leme 5.2.1, C je $C_\pi^{(1-\lambda)e}-$ matrica i takođe C je regularna. λ nije karakteristični koren matrice A.

Sada, pokazujemo da $\lambda > 1$ takođe ne može biti karakteristični koren od A. Posmatrajmo matricu $B = \lambda I - A$.
Tada je $R(B) = (\lambda - 1)e > 0$ i $b_{ij} = -a_{ij}$ za $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$. Prema tome,

$$\max_{i \neq j} \frac{b_{ij}}{R_i(B)} = -\frac{1}{\lambda - 1} \min_{i \neq j} a_{ij}$$

i

$$\sum_{j=1}^{n} \max_{i \neq j} \frac{b_{ij}}{R_i(B)} = -\frac{1}{\lambda - 1} \sum_{j=1}^{n} \min_{i \neq j} a_{ij} \leq -\frac{1}{\lambda - 1} < 1. \tag{5.23}$$

B je $B_\pi^{(\lambda-1)e}$-matrica, pa je na osnovu leme 5.2.1, B je P-matrica i prema tome, regularna je. ■

Primetimo da ako matrica A ima pozitivne sume po vrstama i zadovoljava (5.20), tada na osnovu Leme 5.2.1, A je C_π^R- matrica (i prema tome regularna). Međutim, ako je uslov (5.20) oslabljen na

$$\sum_{j=1}^{n} \min_{i \neq j} \frac{a_{ij}}{R_i} \geq 1, \tag{5.24}$$

tada matrica koja zadovoljava (5.24), može biti singularna, kao na primer

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

U sledeća dva rezultata razmatramo uzimanje pozitivne linearne kombinacije matrica, sa istom sumom po vrstama, koje zadovoljavaju Definiciju 5.2.3. Za dati vektor π i nenula realni broj α, označavamo $\frac{\pi}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\pi$.

Teorema 5.2.7 *Neka su $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$ i $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$ C_π^R-matrica i C_ψ^R-matrica, respektivno. Neka su s i t nenegativni brojevi takvi da je $s + t > 0$. Tada je $sA + tB$ $C_{(s\pi+t\psi)/(s+t)}^{(t+s)R}$ matrica i stoga je regularna.*

Dokaz: Na osnovu (5.15) za svako $k = 1, 2, \ldots, n$ $\pi_j R_k < a_{kj}$ i $\psi_j R_k < b_{kj}$ za sve $j \neq k$.
Sada, jasno, vektor suma kolona matrice $sA + tB$, koji je dat sa $(s + t)R$, ima pozitivne komponente i imamo da za svako $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\frac{s\pi_j + t\psi_j}{s + t}(s + t)R_k < sa_{kj} + tb_{kj}.$$

Na kraju,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{s\pi_j + t\psi_j}{s + t} = \frac{s(\sum_{j=1}^{n} \pi_j) + t(\sum_{j=1}^{n} \psi_j)}{s + t} \geq 1,$$

jer je $\sum_{j=1}^{n} \pi_j \geq 1, \sum_{j=1}^{n} \pi_j \geq 1$, $s, t \geq 0$ i $s + t > 0$. ■

Sledeća propozicija pokazuje da linearna kombinacija matrica koje imaju iste vektore suma po vrstama $R > 0$, koji zadovoljavaju (5.24), takođe zadovoljavaju (5.24).

Teorema 5.2.8 *Pretpostavimo da $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$ i $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$ imaju identične pozitivne vektore suma po vrstama R i obe zadovoljavaju (5.24). Tada $C = sA + tB$ takođe zadovoljava (5.24) za $s, t \geq 0$, gde je $s + t > 0$. Štaviše, ako A zadovoljava (5.20) i $s > 0$, tada C zadovoljava (5.20) i na osnovu Leme 5.2.1 je regularna.*

Dokaz: Vektor suma po vrstama matrice C je dat sa $(s+t)R$ i ima sve komponente pozitivne pošto je $s + t > 0$.

$$\sum_{j=1}^{n} \min_{i \neq j} \frac{c_{ij}}{(s+t)R_i} = \sum_{j=1}^{n} \min_{i \neq j} \frac{sa_{ij} + tb_{ij}}{(s+t)R_i} = \sum_{j=1}^{n} \left[\min_{i \neq j} \frac{sa_{ij}}{(s+t)R_i} + \min_{i \neq j} \frac{tb_{ij}}{(s+t)R_i} \right] =$$

$$= \frac{s}{s+t} \sum_{j=1}^{n} \min_{i \neq j} \frac{a_{ij}}{R_i} + \frac{t}{s+t} \sum_{j=1}^{n} \frac{b_{ij}}{R_i} \geq \frac{s}{s+t} + \frac{t}{s+t} = 1. \tag{5.25}$$

Takođe, ako A zadovoljava (5.20) i $s > 0$, tada je poslednja nejednakost u (5.25) stroga, što pokazuje da C zadovoljava (5.20). ∎

5.3 Odnos između klase P-matrica i prethodno navedenih klasa matrica

Klasa P-matrica kao potklase sadrži pozitivno definitne matrice i totalno pozitivne matrice.

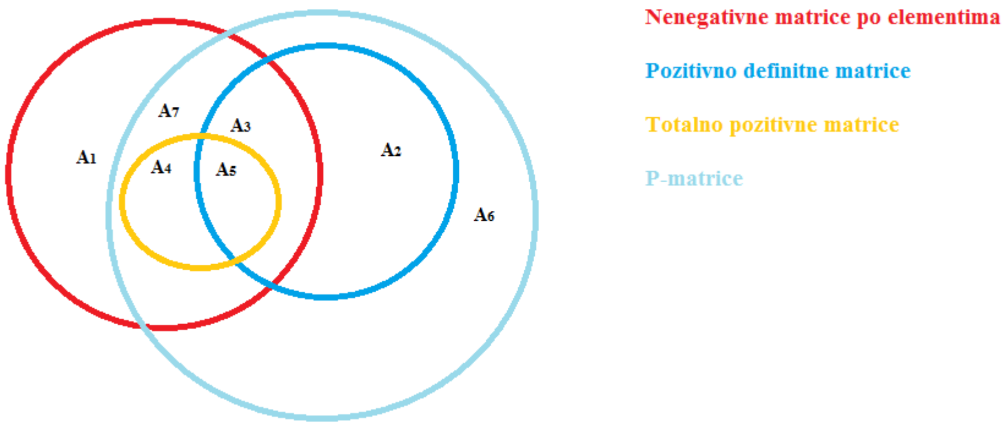
Klasa P-matrica i klasa nenegativnih matrica po elementima stoje u opštem odnosu. Na primer, matrica

$$A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

je P-matrica, ali nije nenegativna matrica po elementima.
Matrica

$$A_7 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

je nenegativna matrica po elementima i P-matrica, a nije totalno pozitivna, ni pozitivno definitna matrica.



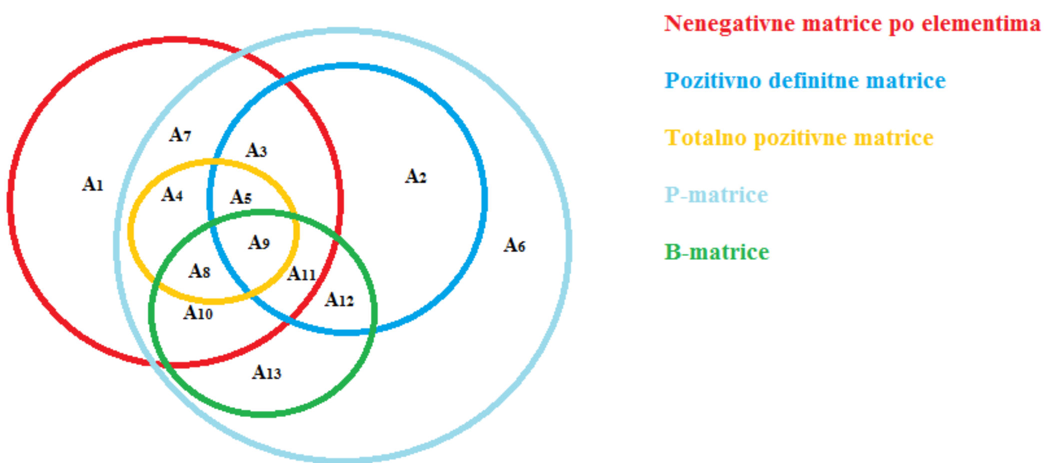
Slika 5

Klasa B-matrica je potklasa klase P-matrica.

Klasa B-matrica stoji u opštem odnosu sa klasom nenegativnih matrica po elementima, pozitivno definitim matricama i totalno pozitivnim matricama, što je prikazano na slici 6, gde su matrice

$$A_8 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_9 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_{10} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_{13} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$



Slika 6

Klasa C-matrica je disjunktna sa klasom B-matrica i sa klasom totalnom pozitivnih matrica, a može se pokazati da sa ostalim prethodno navedenim klasama stoji u opštem odnosu.

6

M-Matrice

Grana primenjene matematike koja matematičkim sredstvima opisuje ponašanje složenih, u početku fizičkih i hemijskih, a danas i društvenih, računarskih, bioloških i sličnih linearnih sistema koji se menjaju u prostoru i vremenu, dobija sve više na značaju razvojem mernih uređaja i tehnologije, kao i kompjuterizacijom. Najpre se u fizici javlja potreba za sastavljanjem modela kretanja nekog fizičkog sistema preko jednačina, dok danas teorija dinamičkih sistema ne opisuje samo fenomene fizike i hemije, nego i biologije, ekologije, ekonomije, bežičnih mreža itd.
Jedna od najznačajnih karakteristika dinamičkog sistema jeste njegova stabilnost. Za nas je posebno interesantna činjenica da se u matematičkom modelu sistem jednačina koji opisuje neku pojavu može prevesti u oblik matrične jednačine, pa se posmatranjem lokalizacionih oblasti karakterističnih korena date matrice, može diskutovati stabilnost matrice matematičkog modela.
Za nelinearan dinamički sistem, njegova asimptotska lokalna stabilnost interpretira se kao stabilnost matrice Jakobijana u ravnotežnoj tački, pa opet ovo dinamičko svojstvo zavisi od položaja karakterističnih korena neke matrice (u ovom slučaju Jakobijan matrice).

Vrlo često problemi mogu biti svedeni na probleme koji uključuju matrice, koje zbog određenih ograničenja, imaju neku posebnu strukturu. Jedna od veoma čestih situacija je, gde matrica koja je u pitanju, ima nepozitivne vandijagonalne i nenegativne dijagonalne elemente, tj. A je konačna matrica tipa

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & a_{22} & -a_{23} & \dots & -a_{2n} \\ -a_{31} & -a_{32} & a_{33} & \dots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Kako A može biti zapisana u obliku

$$A = sI - B, \quad s > 0, \quad B \geq 0, \tag{6.1}$$

nije iznenađenje što teorija nenegativnih matrica (po elementima) ima dominantnu ulogu u proučavanju nekih od ovih klasa matrica.

Matrice sa pozitivnim dijagonalnim elementima, za koje se može pokazati da se čitave lokalizacione oblasti njihovih karakterističnih korena nalaze u desnoj poluravni su od posebnog značaja. Sa stanovišta stabilnosti dinamičkih sistema primena teorema o lokalizaciji karakterističnih korena na pozitivnu stabilnost matrica ima veliki značaj, budući da je dinamički sistem stabilan, ako se svi karakteristični koreni matrice nalaze u jednoj poluravni.
Realna kompleksa matrica A je **pozitivno stabilna** ako su realni delovi svih karakterističnih korena matrice A pozitivni; A je **nenegativno stabilna** ako su realni delovi svih karakterističnih korena matrice A nenegativni. Negativno stabilna matrica u dinamičkim sistemima znači stabilnost.

Matrice oblika (6.1), se javljaju u širokom spektru oblasti, uključujući input-output probleme u ekonomiji, probleme linearne komplementarnosti u operacionim istraživanjima, i procese Markova u verovatnoći i statistici.

Definicija 6.0.1 *Svaka matrica A, oblika (6.1), kod koje je* $s \geq \rho(B)$ *se naziva* $M-$*matrica.*

6.1 Regularne M matrice

Pvo ćemo razmotriti regularne M-matrice, tj. matrice kod kojih je u (6.1) $s > \rho(B)$.
Matrica T je konvergentna ako i samo ako je $\rho(T) < 1$.
Pre nego što pređemo na glavnu Teoremu za karakterizaciju regularnih M-matrica, korisno je da imamo na raspolaganju sledeće leme, koje su matrična verzija Neumann leme za konvergentne redove.

Lema 6.1.1 *Nenegativna matrica* $T \in \mathbb{R}^{n,n}$ *je konvergentna, tj.* $\rho(T) < 1$ *ako i samo ako* $(I-T)^{-1}$ *postoji i*

$$(I-T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k \geq 0. \tag{6.2}$$

Dokaz: Ako je T konvergentna tada (6.2) sledi iz jednakosti

$$(I-T)(I+T+T^k) = I - T^{k+1}, k \geq 0$$

puštajući k da teži u beskonačno.
Obrnuto, neka je $Tx = \rho(T)x$ za neko $x > 0$. Takvo x postoji, na osnovu Peron-Frobeniusove teoreme. Tada je $\rho(T) \neq 1$, pošto $(I-T)^{-1}$ postoji i prema tome iz

$$(I-T)x = (1-\rho(T))x,$$

sledi da je

$$(I-T)^{-1}x = \frac{1}{1-\rho(T)}x.$$

Zatim, pošto je $x > 0$ i $(I-T)^{-1} > 0$, sledi da je $\rho(T) < 1$. ∎

U praksi, za karakterizaciju regularnih $M-$matrica, evidentno je da često možemo početi uz pretpostavku da $A \in Z^{n,n}$. Međutim, mnoga od tvrđenja karakterizacije urađene u [2] su ekvivalentna bez ove pretpostavke. Navedeno je 50 ekvivalentnih tvrđenja za regularne M-matrice, a mi i izdvajamo neka od tih u sledećoj teoremi. Sve matrice i vektori, uzeti u obzir u ovoj teoremi, su realni.

Teorema 6.1.1 *Ako je $A \in Z^{n,n}$ tada je svaki od sledećih uslova ekvivalentan tvrđenju "A je regularna M-matrica".*

1. *Svi glavni minori matrice A su pozitivni.*
2. *Svi realni karakteristični koreni svake glavne podmatrice od A su pozitivni.*
3. *Za svako $x \neq 0$, postoji pozitivna dijagonalna matrica D, takva da je*
$$x^T ADx > 0.$$
4. *Suma svih $k \times k$ glavnih minora matrice A je pozitivna za svako $k = 1, \ldots, n$.*
5. *A je regularna i svi glavni minori od A su nenegativni.*
6. *A je regularna i svi realni karakteristični koreni svake glavne podmatrice od A su nenegativni.*
7. *A je regularna i $A+D$ je regularna za svaku pozitivnu dijagonalnu matricu D.*
8. *Postoje donja i gornja trougaona matrica L i U, respektivno, sa pozitivnim dijagonalama, tako da je*
$$A = LU.$$
9. *A je pozitivno stabilna, tj. realni dio svakog karakterističnog korena od A je pozitivan.*
10. *Postoji simetrična pozitivno definitna matrica W, takva da je*
$$AW + WA^T.$$
pozitivno definitna.
11. *Postoji pozitivna dijagonalna matrica D, takva da je*
$$AD + DA^T$$
pozitivno definitna.
12. *A je semipozitivna, tj. postoji $x > 0$, takvo da je $Ax > 0$.*
13. *A ima sve pozitivne dijagonalne elemente i postoji pozitivna dijagonalna matrica D, takva da je AD strogo dijagonalno dominantna, tj.*
$$a_{ii}d_i > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|d_j, \quad , i = 1, \ldots, n.$$

14. *A je inverz-pozitivna, tj.* A^{-1} *postoji i*

$$A^{-1} \geq 0.$$

15. *A je monotona, tj.*

$$Ax \geq 0 \quad \text{za svako} \quad x \in R^n.$$

16. *Postoje inverz-pozitivne matrice* B_1 *i* B_2 *tako da je*

$$B_1 \leq A \leq B_2.$$

17. *Postoji inverz-pozitivna matrica* $B \geq A$*, takva da je* $I - B^{-1}A$ *konvergentna.*

18. *Postoje inverz-pozitivna matrica* $B \geq A$ *i regularna* $M-$ *matrica* C*, takve da je*

$$A = BC.$$

19. *A ima konvergentno regularno rastavljanje, tj. A ima reprezentaciju*

$$A = M - N, \quad M^{-1} \geq 0, \quad N \geq 0,$$

gde je $M^{-1}N$ *konvergentno.*

Dalje, posmatramo potrebne i dovoljne uslove za proizvoljnu $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ da bude regularna $M-$matrica.

Teorema 6.1.2 *Neka je* $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ *,gde je* $n \geq 2$*. Tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna tvrđenju "A je regularna* $M-$ *matrica".*

1. *Za svaku pozitivnu dijagonalnu matricu* D*,* $A + D$ *je inverz-pozitivna.*
2. *Za svako* $a \geq 0$*,* $A + aI$ *je inverz-pozitivna.*
3. *Sve glavne podmatrice matrice A su inverz-pozitivne*
4. *Sve glavne podmatrice matrice A reda* $1, 2$ *i* n *su inverz-pozitivne.*

6.2 Generalizacija M-matrica

U ovom odeljku istražujemo neke osobine celokupne klase M-matrica. Singularne M-matrice, tj. matrice oblika $A = \rho(B)I - B, B \geq 0$ se pojavljuju u primenama kao i regularne M-matrice. Međutim, teorija ovde još nije toliko razvijena, iz razloga što su ti koncepti znatno teži.

Počinjemo sa lemom koja pokazuje da se cela klasa M-matrica može posmatrati kao zatvaranje klase regularnih M-matrica.

Lema 6.2.1 *Neka je $A \in Z^{n,n}$. Tada je A $M-$matrica ako i samo ako je*

$$A + \epsilon I$$

regularna $M-$matrica za svaki skalar $\varepsilon > 0$.

Dokaz: Neka je A $M-$matrica oblika $A = sI - B, s > 0, B \geq 0$. Tada za svako $\varepsilon > 0$

$$A + \epsilon I = sI - B + \varepsilon I = (s + \varepsilon)I - B = s^{'}I - B, \tag{6.3}$$

gde je $s^{'} = s + \varepsilon > \rho(B)$ jer je $s \geq \rho(B)$. Prema tome, $A + \varepsilon I$ je regularna. Obrnuto, ako je $A + \varepsilon I$ regularna $M-$matrica za svako $\varepsilon > 0$, sledi da je A $M-$matrica na osnovu (6.3) i stavljajući ε da je približno nula. ■

Navodimo definiciju generalizovanog inverza.

Definicija 6.2.1 *Za matricu $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ matrica $A^g \in \mathbb{R}^{m,n}$ je generalizovani inverz ako zadovoljava uslov $AA^gA = A$.*

Generalizovani inverz postoji za svaku matricu. U slučaju kada je matrica regularna generalizovani inverz je jednak inverznoj matrici. Svrha konstruisanja generalizovanog inverza je da se dobije matrica koja može poslužiti kao inverz u izvesnom smislu za širu klasu matrica od invertibilnih.

Sledeća Teorema proširuje Teoremu 6.1.1, obezbeđujući karakterizaciju proizvoljnih M- matrica.

Teorema 6.2.1 *Ako je $A \in Z^{n,n}$, tada je svaki od uslova ekvivalentan tvrđenju "A je M-matrica".*

1. *Svi glavni minori matrice A su nenegativni.*
2. *Svi realni karakteristični koreni svake glavne podmatrice od A su nenegativni.*
3. *$A + D$ je regularna za svaku pozitivnu dijagonalnu matricu D.*
4. *Za svako $x \neq 0$ postoji nenegativna dijagonalna matrica D takva da je*

$$x^T Dx \neq 0 \quad i \quad x^T ADx \geq 0.$$

5. *Suma svi $k \times k$ glavnih minora matrice A je nenegativna za svako $k = 1, \ldots, n$.*
6. *Svi realni karakteristični koreni od A su nenegativni.*
7. *Postoje permutaciona matrica P i donja i gornja trougaona matrica L i U, respektivno, sa nenegativnim dijagonalama, tako da je*

$$PAP^T = LU.$$

8. *Realni dio svakog nenula karakterističnog korena od A je pozitivan.*

9. *A je nenegativno stabilna; tj. realni dio svakog karakterističnog korena je nenegativan.*

10. *A je generalizovana levo inverz-pozitivna, tj. postoji matrica Y koja zadovoljava*
$$Y \geq 0 \quad i \quad YA^{k+1} = A^k \quad za\ neko \quad k \geq 1.$$

11. *A ima generalizovani levi inverz Y i Y je nenegativna na*
$$V_A = \bigcap_{m=0}^{\infty} R(A^m);$$
to jeste,
$$x \geq 0 \quad i \quad x \in V_A \to Yx \geq 0.$$

12. *Svaki generalizovani levi inverz od A je nenegativan na V_A.*

13. *A je monotona na V_A; tj.*
$$Ax \geq 0 \quad i \quad x \in V_A \to x \geq 0.$$

14. *A ima konvergentno regularno rastavljanje, čija matrica iteracije ima spektralni radijus najviše jedan; tj. A ima rastavljanje*
$$A = M - N, \quad M^{-1} \geq 0, \quad N \geq 0 \quad gde\ je \quad V_{M^{-1}A} = V_A \quad i \quad \rho(M^{-1}N) \leq 1.$$

15. *Postoji inverz-pozitivna matrica $B \geq A$ i $M-$ matrica $C = I - T$, $T \geq 0$, $V_C = V_A$ tako da je*
$$A = BC.$$

Sada govorimo o važnoj potklasi M-matrica. Ova klasa sadrži regularne M-matrice kao pravi podskup, ali ipak zadržava mnoga njihova važna svojstva.

Definicija 6.2.2 *Matrica $T \in \mathbb{R}^{n,n}$ se naziva* ***semikonvergentna*** *ako*
$$lim_{j\to\infty} T^j$$
postoji.

Može se pokazati da je T semikonvergentna ako i samo ako važe svi sledeći uslovi:

1. $\rho(T) \leq 1$ i

2. ako je $\rho(T) = 1$ tada je $rank(I - T)^2 = rank(I - T)$ i

3. ako je $\rho(T) = 1$ tada $\lambda \in \sigma(T)$, gde $|\lambda| = 1$ implicira da je $\lambda = 1$.

Podsetimo se da, ako je $A = sI - B, s > 0, B \geq 0$ i A je regularna M- matrica, tada je $T = B/s$ konvergentno. Sada, proširujemo ovu osobinu na singularne M-matrice.

Definicija 6.2.3 *$n \times n$ $M-$matrica A ima* ***osobinu C*** *ako postoji reprezentacija od A, u formi $A = sI - B$, gde je $s > 0, B \geq 0$ i B/s semikonvergentno.*

Teorema 6.2.2 *$M-$ matrica A ima osobinu C ako i samo ako je indeks $A \leq 1$.*

Teorema 6.2.3 *Neka je A nerazloživa $n \times n$ singularna M-matrica. Tada:*

1. *A ima rang $n - 1$.*
2. *Postoji $x > 0$ tako da je $Ax = 0$.*
3. *A ima osobinu C*
4. *Sve glavne podmatrice matrice A, osim same matrice A su M-matrice.*
5. *$[Ax \geq 0] \Rightarrow \ [Ax = 0]$.*

S obzirom na Teoremu 6.2.3, nije iznenađenje da singularna, nerazloživa M-matrica može da zadovolji mnoge od uslova navedenih u Teoremi 6.1.1, za regularne M-matrice. Kao ilustraciju ove činjenice navodimo sledeći važan rezultat.

Posledica 6.2.1 *Neka je A singularna, nerazloživa M-matrica reda n. Tada postoje donja trougaona regularna M-matrica L i gornja trougaona M-matrica U takve da je $A = LU$.*

6.3 Odnos klase M matrica i prethodno navedenih klasa

M-matrice stoje u opštem odnosu sa klasama nenegativnih matrica, pozitivno definitnim matricama, B-matricama, P-matricama. Klasa M- matrica je disjunktna sa klasom totalno pozitivnih matrica i sa klasom C-matrica.

7

Eventually SDD matrice

M-matrice ne pokrivaju sve slučajeve iz prakse, pa se javila potreba za generalizacijom M-matrica. Nedavno, nekoliko generalizacija M-matrica, koje su zasnovane na zameni nenegativnosti matrice B sa eventually nenegativnosti, su razmatrane u [29]. Matrica A je nenegativna ako su svi njeni elementi nenegativni i eventually nenegativna ako je A^k nenegativna, za svaki dovoljno veliki ceo broj k. Razmotrićemo neke mogućnosti proširenja SDD matrica. Zatim ćemo nove klase primeniti na dva važna problema u linearnoj algebri: lokalizaciju karakterističnih korena i ocenu norme inverza date matrice. Dalje, predstavićemo nove klase regularnih eventually H-matrica. Dokazaćemo da one sadrže klasu koja generalizuje M-matrice (nazvana M_v matrice u [29]), kao pravi podskup.

Uvedimo osnovne definicije ove sekcije, koje mogu da se koriste za matrice oblika $sI - B$, gde je I jedinična matrica, s je neki kompleksni broj i B je kvadratna kompleksna matrica.

Definicija 7.0.1 *Matrica $A = sI - B$ se naziva $SDD_\exists$ matrica ako postoji pozitivan ceo broj k takav da je $s^kI - B^k$ SDD.*

Definicija 7.0.2 *Matrica $A = sI - B$ se naziva $SDD_\forall$ matrica ako postoji pozitivan ceo broj k_0 takav da je $s^kI - B^k$ SDD za svako $k \geq k_0$.*

Definicija 7.0.3 *Matrica $A = sI - B$ se naziva SDD_∞ matrica ako postoji pozitivan ceo broj k, takav da je $||B^k||_\infty < s^k$.*

Ove tri klase matrica (sve njih nazivamo Eventually SDD matrice) stoje u sledećem odnosu: $SDD_\infty \subset SDD_\forall \subset SDD_\exists$.
Sledeće tvrđenje dokazuje regularnost svih navedenih klasa.

Teorema 7.0.1 *Ako je A $SDD_\exists$ matrica, onda je A regularna.*

Dokaz: Kako je $A = sI - B$ i $s^kI - B^k$ je SDD za neki pozitivan ceo broj k, s^k nije karakteristični koren matrice B^k, s nije karakteristični koren matrice B, pa zaključujemo da je matrica A regularna. ■

Posledica 7.0.1 *Ako je A $SDD_\forall$ matrica, onda je A regularna.*

Posledica 7.0.2 *Ako je A SDD_∞ matrica, onda je A regularna.*

7.1 Primene

7.1.1 Primena na lokalizaciju karakterističnih korena

Dobro je poznato da regularne klase matrica mogu dovesti do rezultata za lokalizaciju karakterističnih korena. Sledeći rezultat ilustruje tu činjenicu za klasu $SDD_\exists$ matrica. Primetimo da je ta klasa šira od preostale dve, pa nas vodi do najmanje lokalizacione oblasti za karakteristične korene.

Teorema 7.1.1 *Za proizvoljan dati pozitivan ceo broj k, svi karakteristični koreni matrice $A = sI - B$ leže u oblasti*

$$\bigcup_{i \in N} \{z : |(z-s)^k - (B^k)_{ii}| \leq r_i(B^k)\}. \tag{7.1}$$

Dokaz: Pretpostavimo da za dato k, postoji karakteristični koren λ matrice $A = sI - B$ koji ne pripada oblasti (7.1). To znači da postoji k, tako da za svako $i \in N$ $|(\lambda - s)^k - (B^k)_{ii}| > r_i(B^k)$, tj. $(\lambda - s)^k I - B^k$ je SDD ili ekvivalentno $(\lambda - s)I - B$ je $SDD_\exists$. Na osnovu teoreme 7.1.1, $(\lambda - s)I - B = \lambda I - sI - B$ je kontradikcija koja dokazuje rezultat. ■

Kao posledicu prethodnog rezultata, za $s = 0$, dobijamo sledeći lokalizacioni rezultat za kompleksne matrice.

Posledica 7.1.1 *Za proizvoljan dati pozitivan ceo broj k, svi karakteristični koreni matrice A leže u oblasti*

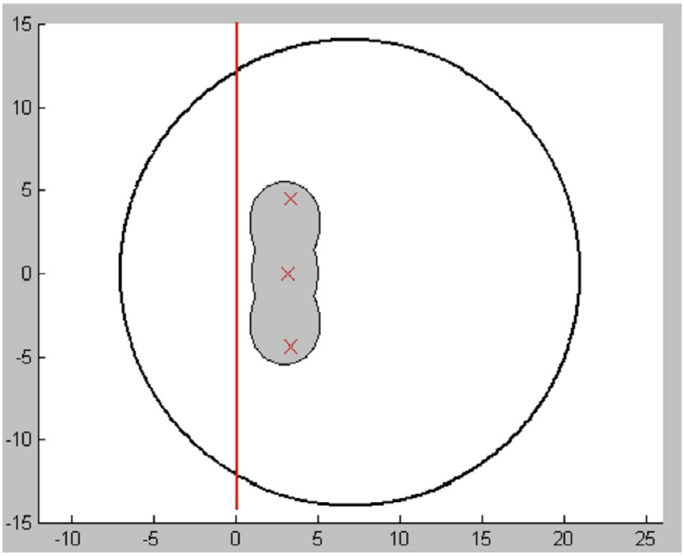
$$\bigcup_{i \in N} \{z : |z^k - (A^k)_{ii}| \leq r_i(A^k)\}, \tag{7.2}$$

što je dobro poznata Geršgorinova teorema primenjena na matricu A^k.

Primer 7.1.1 *U cilju da lokalizujemo karakteristične korene matrice*

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 11 & 3 & 7 \end{bmatrix} = 3I - \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & -1 \\ -11 & -3 & -4 \end{bmatrix},$$

možemo odabrati $k = 2$ i dobijamo informaciju da svi karakteristični koreni pripadaju desnoj poluravni. Informacija ovog tipa može biti značajna, na primer, u analizi stabilnosti dinamičkih sistema (pogledati Sliku 7).

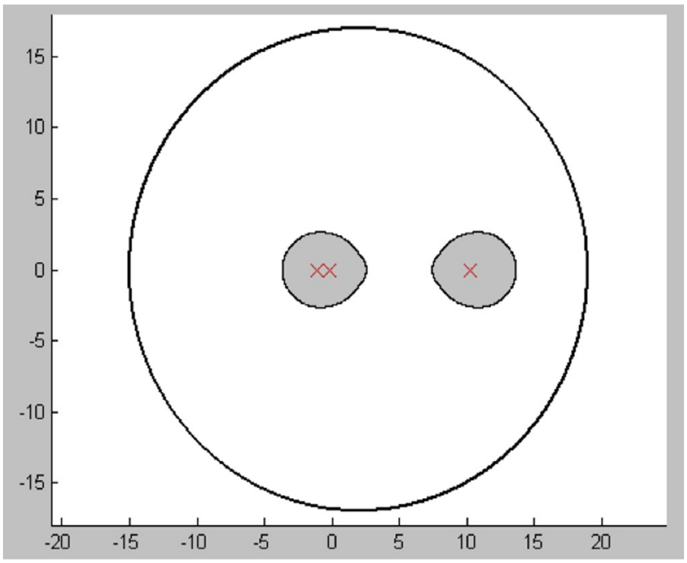


Slika 7

Primer 7.1.2 *U cilju da lokalizujemo karakteristične korene matrice*

$$\begin{bmatrix} 2 & 11 & 6 \\ 1 & 7 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 5I - \begin{bmatrix} 3 & -11 & -6 \\ -1 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

možemo odabrati ponovo $k = 2$ i dobijamo lokalizacionu oblast koja se sastoji od dva disjunktna skupa (pogledati Sliku 8).



Slika 8

7.1.2 Primena na normu inverza

U raznim primenama je važno da ocenimo normu inverza date matrice. U slučaju norme beskonačno, to je urađeno za nekoliko podklasa H-matrica, tj. matrica A za

koje postoji dijagonalna matrica X tako da je AX SDD. Ova klasa regularnih matrica ne pripada klasi H-matrica.
Najpoznatija ocena je Varahova ocena za SDD matrice. Između ostalih, pomenimo PH-matrice, Nekrasov matrice, S-Nekrasov matrice. Za H-matricu za koju znamo skalirajuću matricu X (takvu da je AX SDD), takođe je moguće koristiti Varahov rezultat, dat u Teoremi 1.0.5, da ocenimo normu inverza.
Kao što će se videti u primerima, koji slede, nove regularne klase, definisane u ovom poglavlju,ne pripadaju klasi H- matrica. Kasnije, videćemo da nova gornja granica može da daje bolje rezultate nego ranije poznata ocena, ako je matrica H-matrica, i eventually SDD matrica. Gornja granica za ocenu inverza je urađena za najširu od tri klase, $SDD_\exists$ klasu.

Teorema 7.1.2 *Ako je $A = sI - B$ $SDD_\exists$ matrica za određeno k tada*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{\|s^{k-1}I + s^{k-2}B + \cdots + B^{k-1}\|_\infty}{min_i\{|s^k - (B^k)_{ii}| - r_i(B^k)\}}. \tag{7.3}$$

Dokaz: Kako je

$$s^kI - B^k = (sI - B)(s^{k-1}I + s^{k-2}B + \cdots + B^{k-1}),$$

znajući da je $s^kI - B^k$ SDD matrica, što implicira da je $sI - B$ regularna, imamo

$$(sI - B)^{-1} = (s^kI - B^k)^{-1}(s^{k-1}I + s^{k-2}B + \cdots + B^{(k-1)}).$$

Odavde,

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \|(s^kI - B^k)^{-1}\|_\infty \|s^{k-1}I + s^{k-2}B + \cdots + B^{k-1}\|_\infty.$$

Primenjujući Varahovu ocenu za SDD matricu $s^kI - B^k$, dobijamo (7.3). ■

Na prvi pogled gornja ocena može izgledati komplikovano, ali treba imati na umu da je u praksi k obično veoma malo: $k = 2, 3$ ili 4. Sada navodimo dva ilustrativna primera.

Primer 7.1.3 *Tačna vrednost norme beskonačno inverza matrice*

$$A_3 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

je $\|A_3^{-1}\|_\infty = 0.5$. Ako zapišemo kao $A_3 = 5I - B_3$, i uzmemo $k = 2, 3, 4$, lako primetimo da je $5^kI - B_3^k$ SDD matrica za $k = 2, 3, 4$, pa možemo primeniti ocenu (7.3) i dobijamo

k	*2*	*3*	*4*
$\|A_3^{-1}\|_\infty \leq$	*0.5789*	*0.5126*	*0.5024*

Tabela 3

Kako A_3 nije H-matrica, ovo je jedina ocena koju imamo, i dovoljno je dobra čak i za $k = 2$.

U sledećem primeru posmatramo H-matricu.

Primer 7.1.4 *Tačna vrednost norme beskonačno inverza matrice*

$$A_4 = \begin{bmatrix} 3.9 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 5.9 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3.9 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5.9 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 3.9 \end{bmatrix}$$

je $\|A_4^{-1}\|_\infty = 0.5$. Ako zapišemo kao $A_4 = 5I - B_4$, i uzmemo $k = 2, 3, 4$ i primenimo ocenu (7.3) dobijamo

k	2	3	4
$\|A_4^{-1}\|_\infty \leq$	0.5319	0.4775	0.4682

Tabela 4

Sada, kako je A_4 $H-$matrica, možemo dobiti ocenu koristeći čuvenu Varahovu ocenu. Naime, za $X = diag(1.1, 1, 1.1, 1, 1.1)$ imamo da je A_4X SDD matrica, tako da možemo primeniti Varahov rezultat i dobijamo $\|(A_4X)^{-1}\|_\infty \leq 11.1112$. Tada je $\|A_4^{-1}\|_\infty \leq \|X\|_\infty \|(A_4X)^{-1}\|_\infty \leq 12.23$, što je mnogo lošija ocena od one dobijene pomoću (7.3). Štaviše, ako pažljivo razmotrimo mogućnost skaliranja matrice A_4 na SDD formu, vidimo da dijagonalna matrica oblika $X(\gamma) = diag(\gamma, 1, \gamma, 1, \gamma)$ za $\gamma \in (\frac{2}{1.9}, \frac{4.9}{3})$ radi, kao i matrica X iznad. Tada, za svaki izbor γ dobijamo odgovarajuću gornju granicu za $\|A_4^{-1}\|_\infty$.
Najbolja ocena dobijena na ovaj način je za $\gamma = \frac{69}{49}$.

$$\|A_4^{-1}\|_\infty \leq \|X(\gamma)\|_\infty \|(A_4X(\gamma))^{-1}\|_\infty = \frac{\gamma}{min\{4.9 - 3\gamma, 1.9\gamma - 2\}} \leq 2.085,$$

što je još uvek lošije od nove ocene.

7.2 Eventually H-matrice

Na sličan način kao što smo uveli Eventually SDD matrice, definišemo Eventally H-matrice. Ponovo, postoji najmanje tri moguća načina da to uradimo:

Definicija 7.2.1 *Matrica $A = sI - B$ se naziva $H_\exists$ matrica ako postoji pozitivan ceo broj k i pozitivna dijagonalna matrica X tako da je $s^k - X^{-1}B^kX$ SDD.*

Definicija 7.2.2 *Matrica $A = sI - B$ se naziva $H_\forall$ matrica ako postoji pozitivan ceo broj k_0 takav da je $s^kI - X^{-1}B^kX$ SDD za svako $k \geq k_0$.*

Definicija 7.2.3 *Matrica $A = sI - B$ se naziva H_∞ matrica ako postoji pozitivan ceo broj k takav da je $\|X^{-1}B^kX < s^k\|_\infty$.*

Ove tri klase matrica (sve njih nazivamo Eventually H matrices) stoje u sledećem odnosu: $H_\infty \subset H_\forall \subset H_\exists$.

Sledeći rezultat dokazuje regularnost svih navedenih H klasa.

Teorema 7.2.1 *Ako je A $H_\exists$ matrica, onda je A regularna.*

Dokaz: Kako je $A = sI - B$ i $s^kI - X^{-1}B^kX = s^kI - (X^{-1}BX)^k$ je SDD za neki pozitivan ceo broj k, $s^kI - X^{-1}BX$ je $SDD_\exists$. Tada na osnovu teoreme 7.1 zaključujemo da je A regularna. ■

Posledica 7.2.1 *Ako je $AH_\forall$ matrica, onda je A regularna.*

Posledica 7.2.2 *Ako je AH_∞ matrica, onda je A regularna.*

7.3 Odnos između klase eventually M-matrica i eventually H-matrica

Definicija 7.3.1 *Matrica $A = sI - B$ se naziva M_v-matrica ako $s \geq \rho(B)$ i B je eventually nenegativna.*

Dokazaćemo da klasa H_∞ sadrži klasu regularnih M_v- matrica.

Teorema 7.3.1 *Ako je A M_v-matrica, onda je A H_∞ matrica.*

Dokaz: Kako je A M_v- matrica, $A = sI - B$, gde je $s \geq \rho(B)$ za svaki dovoljno veliki ceo broj $k \geq k_0$, sledi da je

$$\frac{1}{s^k}B^k \geq 0 \quad \text{za svako} \quad k \geq k_0.$$

Kako je A regularna M_v- matrica,sledi da je $s > \rho(B)$. Dakle $\rho(\frac{1}{s}B) < 1$ i tako je

$$\rho\Big(\frac{1}{s^k}B^k\Big) < 1 \quad \text{za svako} \quad k.$$

Prema tome, $s^kI - B^k$ je regularna M-matrica za svako $k \geq k_0$. Postoji dijagonalna matrica X takva da je $X^{-1}(s^kI - B^k)X = s^kI - X^{-1}B^kX$ SDD i M matrica. Dakle, $\|X^{-1}B^kX\|_\infty < s^k$ za svako $k \geq k_0$ i A je H_∞ matrica. ■

Posledica 7.3.1 *Ako je A regularna M_v-matrica, onda je A $H_\forall$ matrica.*

Posledica 7.3.2 *Ako je A regularna M_v-matrica, onda je A $H_\exists$ matrica.*

Primer 7.3.1 *Neka je n neki neparan broj i neka je B $n \times n$ matrica čije su neparne vrste $(1, .., 1, -1)$ i parne vrste $(-1.., -1, 1)$:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Primetimo da je $B^k = B$ kada je k neparno i $B^k = -B$ kada je k parno. Neka je $s > n$. Tada

$$s^k I - B^k = \begin{bmatrix} s^k \pm 1 & \pm 1 & \cdots & \pm 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & s^k \pm 1 & \cdots & \pm 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & \pm 1 & \cdots & s^k \pm 1 & \pm 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \pm 1 & \pm 1 & \cdots & \pm 1 & s^k \pm 1 \end{bmatrix}.$$

Reprezentacija $A = sI - B$ nije u skladu sa definicijom M_v-matrica, jer B nije eventually nenegativna. Međutim za bilo koji reprezentaciju, zaključak ostaje isti: A nije M_v-matrica. Zaista, ako zapišemo $A = tI - C$, tada je $C = (t - s)I + B$ i

$$C^k = ((t-s)I + B)^k = (t-s)^k I + \sum_{i=1}^{k} (\binom{k}{i} (t-s)^(k-i) B^i) =$$

$$= (t-s)^k I + \sum_{i \quad neparno} \binom{k}{i} (t-s)^{k-i} - \sum_{i \quad parno} \binom{k}{i} (t-s)^{k-i}) B =$$

$$= I + (- \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (t-s)^{k-i} (-1)^i) B =$$

$$= (t-s)^k I + ((t-s)^k - \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (t-s)^{k-i} (-1)^i) B = (t-s)^k I + [(t-s)^k - (t-s-1)^k] B.$$

Zaključujemo da je potreban uslov da matrica A bude M_v-matrica da su svi vandijagonalni elementi matrice C jednaki 0, što znači da je k parno i $t - s - 1 = -(t - s)$, tj. $t - s = 1/2$. Odvde, A nije M_v-matrica ni za jednu reprezentaciju.

Završavamo ovo poglavlje opažanjem da ako je matrica $A = sI - B$ SDD_∞ ili H_∞ matrica, i ako je, dodatno, B eventually nenegativna, tada je A M_v matrica. To važi zbog činjenice da je $\rho(B) < s$ posledica oba uslova, i $\|B^k\|_\infty < s^k$ i $\|X^{-1} B^k X\|_\infty < s^k$.

8

Zaključak

Ovaj master rad posvećen je raznim konceptima pozitivnosti matrica. Literatura koja je dostupna je obimna i bilo je nemoguće sve staviti u okvir jednog rada. Kako se koncept pozitivnosti razvijao i još uvek se razvija na mnogo različitih načina, osnovni cilj je bio predstaviti suštinu svakog koncepta. Skoro svi oni imaju poreklo u primenama u realnom svetu.
Pozitivna definitnost je prvi koncept pozitivnosti koji je razvijen. Posebna pažnja je posvećena nenegativnim matricama i njihovim potklasama. Govorili smo o matricama čiji su svi minori pozitivni, tj. totalno pozitivnim matricama, kao i o matricama čiji su glavni minori pozitivni, tj. P-matricama. Deo rada je posvećen regularnim M-matricama, kao i njihovoj generalizaciji. Uspostavljen je odnos između ovih naizgled sasvim različitih koncepata pozitivnosti matrica.
Razmotrene su neke mogućnosti proširenja SDD matrica. Nove klase su primenjene na dva važna problema u linearnoj algebri: lokalizaciju karakterističnih korena i ocenu norme inverza date matrice.
Prezentovani materijal pruža smernice za dalja istraživanja u ovoj savremenoj oblasti primenjene matematike.

Dodatak

Funkcija u MATLAB-u za implementaciju oblasti lokalizacije

U ovom prilogu naveden je kod funkcije u programskom paketu MATLAB R2013a, pomoću koga su formirane slike u radu (Slika 7, Slika 8).
Promenljiva eps predstavlja argument pomoću koga se zadaje preciznost crtanja grafika.

```
function powergersshifted(M,s,k,eps,kor)
[m,n]=size(M);

h=clf; hold on;

A=-M+s*eye(n);

a=diag(M);B=abs (M-diag(a))';
r=sum (B)';

ak=diag(A^k);Bk=abs (A^k-diag(ak))';
rk=sum (Bk)';

lr=min(real(a)-r)-kor;li=min(imag(a)-r)-kor;
ur=max(real(a)+r)+kor;ui=max(imag(a)+r)+kor;
[x,y]=meshgrid(lr:eps:ur,li:eps:ui);

f=abs((x+i*y-s).^k-ak(1))-rk(1);
for j=2:n
f=min(f,abs((x+i*y-s).^k-ak(j))-rk(j));
end
contourf(x,y,-f+1,[1 1]);

f=abs(x+i*y-a(1))-r(1);
for j=2:n
f=min(f,abs(x+i*y-a(j))-r(j));
end
contour(x,y,-f+1,[1 1],'k','LineWidth',2);
```

```
plot(real(eig(M)),imag(eig(M)),'rx','MarkerSize',10);
colormap([0 0 0; 0.8 0.8 0.8]);
axis equal;
end
```

Funkcija u MATLAB-u za ocenu norme inverza

Naveden je kod funkcije u programskom paketu MATLAB R2013a, pomoću koga su kreirane tabele u radu (Tabela 1, Tabela 2).

```
function [tacno,rez]=ocenanorme(A,s,m)
rez=[];n=length(A);
for j=0:m
    k=2^j;
    B=s*eye(n)-A;
    Ck=s^k*eye(n)-B^k;
    Dk=2*diag(abs(diag(Ck)))-abs(Ck);
    rez=[rez s^(k-1)/min(sum(Dk'))];
end
tacno=norm(inv(A),'inf');
```

Literatura

[1] Ando, T.: Totally positive matrices, Linear Algebra Appl. 90(1987), 165-219.

[2] Berman, A., Plemmons, R.J.: Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences, Academic Press, New York,1979.

[3] Brualdi, R.: Matrices, eigenvalues and directed graphs. Linear Multilinear Algebra 11 (1982), 143-165.

[4] Carnicer , J.M, Goodman, T.N.T., and Pena, J.M.: Linear conditions for positive determinants, Linear Algebra Appl. 292 (1999), pp. 39-59.

[5] Cvetković, Lj.: H-matrix theory vs. eigenvalue localization. Numer. Algor. 42(2006), 229-245.

[6] Cvetković, Lj., Erić M., Pena, J.M.: Eventually SDD matrices and eigenvalue localization, Applied Mathematics and Computation 252(2014), 535-540.

[7] Cvetković, Lj., Dai,P.-F., Doroslovački, K., Li, Y.-T.: Infinity norm bounds for the inverse of Nekrasov matrices, Appl. Math. Comput. 219 (10) (2013) 5020-5024.

[8] Cvetković, Lj., Kostić V., Pena, J.M.: Eigenvalue localization refinements or matrices related to positivity, SIAM J. Matrix Anal Appl.32(2011), 771-784.

[9] Cvetkovic, Lj., Kostić, V. : New criteria for identifying H-matrices. J. Comput. Appl. Math. 180 (2005), 265-278.

[10] Cvetkovic, Lj., Kovačević, M., Kostić, V. : Relationship Between Gerš gorin type Theorems for Certain Subclasses of H-matrices. PAMM 3,1 (2003), 545-546.

[11] Fiedler, M., Ptak, V. : On matrices with nonpositive off-diagonal elements and positive principal minors, Czechoslovak Math. J. 12 (1962), 382-400.

[12] Gao, Y.-M., Wang, X.-H.: Criteria for generalized diagonally dominant matrices and M matrices, Linear Algebra Appl. 169(1992), 257-268.

[13] Gao, Y. M., Xiao, H. W.: Criteria for generalized diagonally dominant matrices and M-matrices. II. Linear Algebra Appl. 248 (1996) 339-353.

[14] Gasca, M., Micchelli C.A., Pena, J.M.: Almost strictly totally positive matrices, Numer.Algorithms 2(1992), 225-236.

[15] Horn, R., Johnson, C.: Matrix Analysis, Cambridge University Press, 1985.

[16] Huang, T. Z.: A note on generalized diagonally dominant matrices. Linear Algebra Appl., 225 (1995), 237-242.

[17] Kolotilina, L.: Bounds for the determinants and inverses of certain H-matrices, Zap. Nauchn. Sem. POMI 346 (2007) 81-102.

[18] Kostic, V.: Benefits from the Generalized Diagonal Dominance. PhD Thesis, University of Novi Sad, (2010).

[19] Kostić, V.: Eigenvalue localization with Geršgorin type theorems, Master Thesis, University of Novi Sad,(2009).

[20] Kostic, V.: On general principles of eigenvalue localizations via diagonaldominance. Adv. Comput. Math. (2015).

[21] Leslie Hogben, ed.: Handbook of linear algebra, Chapman Hall CRC, 2006.

[22] Li.,H.B., Huang,T.Z., Li,H.: On some subclasses of P-matrices, Numerical Linear Algebra Appl. 14(2007), 391-405.

[23] Markham, T.L.: Nonnegative matrices whose inverses are M-matrices, Proceedings of the American Mathematical Society 36(1972), 326-330.

[24] Meyer, C.D.: Matrix Analysis and Applied Linear Algebra, SIAM, Philadelphia, (2000).

[25] [8] Minc, H.: Nonnegative Matrices, Wiley Interscience, New York, 1988.

[26] Nabben, R.: Z-matrices and Inverse Z-matrices, Linear Algebra Appl. 256(1997), 31-48.

[27] Nedović, M.: The Schur complement and H-matrix theory, PhD Thesis, University of Novi Sad, 2016.

[28] Neumann, M., Pena, J.M., Pryporova Olga: Some classes of nonsingular matrices and applications, Linear Algebra and its Applications 438(2013), 1936-1945.

[29] Olesky, D.D., Tsasomeros, M.J., Van den Driessche, P.: Mv-matrices: a generalization of M-matrices based on eventually nonnegative matrices, Electron J. Linear Algebra 18(2009), 339-351.

[30] Pena, J.M.: A class of P-matrices with applications to the localization of the eigenvalues of a real matrix, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications 22(2001),1027-1037.

[31] Pena, J.M.: Exclusion and inclusion intervals for the real eigenvalues of positive matrices, SIAM journal on Matrix Analysis and Applications 26(2005), 908-917.

[32] Pena, J.M.: M-Matices Whose Inverses Are Totally Positive, Linear Algebra and Its Applications 221(1995), 189-193.

[33] Pena, J.M.: Refining Gerschgorin disks through new criteria for nonsingularity, Numerical Linear Algebra with Applications 14, (2007.), pp. 665-671.

[34] Seneta E.: Non-negative Matrices and Markov Chains, Springer-Verlag, New York, 1981.

[35] Varah, J.M.: A lower bound for the smallest singular value of a matrix, Linear Algebra Appl. 11 (1975) 3-5.

[36] Varga, R.S.: Matrix Iterative Analysis, Prentice Hall, Englewoods Cliffs, New Jersey, 1962.

Biografija

Mirjana Erić je rođena 09.01.1992. godine u Tuzli. Nakon završetka gimnazije u Zvorniku, 2010., kao nosilac Vukove diplome, upisala je osnovne studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer Primenjena matematika-matematika finansija, koje je završila u junu 2013. sa prosečnom ocenom 10.00. 2013. godine upisuje master studije na istom fakultetu. Zaključno sa junskim ispitnim rokom 2015. položila je sve ispite predviđene planom i programom i i stekla pravo na odbranu master rada. Tokom studiranja imala je izlaganje na međunarodnoj naučnoj konferenciji GAMM koja je održana u Novom Sadu u martu 2013. Koautor je jednog naučnog rada, "Eventually SDD matrices and eigenvalue localization" objavljenog u vrhunskom međunarodnom časopisu "Applied Mathematics and Computation" (M21). Nakon završetka master studija planira da upiše doktorske studije. Od oktobra 2015. zaposlena je kao saradnik u nastavi na Fakultetu tehničkih nauka u Novom Sadu.

Novi Sad, 2017.

Mirjana Erić

Ključna dokumentacijska informacija

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Mirjana Erić
AU

Mentor: Prof. dr Ljiljana Cvetković
MN

Naslov rada: Razni koncepti pozitivnosti matrica
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: srpski/engleski
JI

Zemlja publikovanja: Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2017.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: 8/70/36/4/8/0/1
(broj poglavlja/strana/lit. citata/tabela/slika/grafika/priloga)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Numerička matematika/Numeričke metode linearne algebre
ND

Predmetna odrednica/Ključne reči:
PO
UDK

Čuva se: u biblioteci Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta, Univerziteta u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: Od samih početaka teorije matrica koncept pozitivnosti se razvijao i još uvek se razvija na mnogo različitih načina. Skoro svi oni imaju poreklo u primenama u realnom svetu. Pojam pozitivnosti matrica koji je prvi razvijen jeste pozitivna definitnost. Zbog toga će prvo poglavlje master rada biti posvećeno ovoj specijalnoj klasi matrica. Drugo poglavlje se odnosi na drugi koncept, pozitivnost po elementima, koji ima važnu primenu, na primer, u statistici, ekonomiji, transportu, itd. Posebna pažnja biće posvećena dobro poznatoj klasi M-matrica, čije inverzne matrice imaju sve elemente pozitivne. Stoga će u trećem poglavlju biti dat njihov detaljan pregled, zajedno sa uopštenjem ove osobine. Najzad, posebna pažnja će biti posvećena totalno pozitivnim matricama i njihovim potklasama. Poslednje poglavlje će biti posvećeno uspostavljanju odnosa izmedu ovih naizgled sasvim različitih koncepata pozitivnosti matrica.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN Veća: 30.03.2017.
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik:	**dr Zagorka Lozanov-Crvenković**, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu,
Mentor:	**dr Ljiljana Cvetković**, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu,
Član:	**dr Sanja Rapajić**, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu.

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
AO

Identification number:
IN

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents code: Master thesis
CC

Author: Mirjana Erić
AU

Mentor: Professor Ljiljana Cvetković, PhD
MN

Title: Various concept of matrix positivity
TI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract: Serbian/English
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2017.
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publication place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4

PP

Physical description: 8/70/36/4/8/0/1
(number of chapters/pages/references/tables/pictures/graphs/appendices)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Numerical Mathematics/Numerical Linear Algebra
SD

Subject/Key words:
SKW
UC

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: Since the very beginnings of the matrix theory, the concept of positivity has been and still is developing in many different ways. For almost all of them, the origin traces back to the real world applications. The first notion of matrix positivity that was developed is positive definitness. So, the first chapter of the master thesis will cover this special class of matrices. The second chapter is related to another concept, enty-wise positivity, which is also important in applications, like statistics, economy, transport, etc. A special attention will be given to the well-known class of M-matrices, whose inverses are enty-wise positive. Therefore, in the third chapter, their detailed review will be presented, along with a generalization of this property. Finally, apropriate attention will be given to totaly positive matrices and their subclasses. The final chapter will be devoted to establishing the relationships between these seemingly quite different concepts of matrix positivity.
AB

Accepted by the Scientific Board on: 30.03.2017.
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

Chair: **Zagorka Lozanov-Crvenković, Ph.D.**, Full Professor,
Faculty of Science and Mathematics,
University of Novi Sad,

Supervisor: **Ljiljana Cvetković, Ph.D.**, Full Professor,
Faculty of Science and Mathematics,
University of Novi Sad,

Member: **Sanja Rapajić, Ph.D.**, Associate Professor,
Faculty of Science and Mathematics,
University of Novi Sad.