Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku

Milovan Ninkov

MODELIRANJE KREDITNOG RIZIKA

Master rad

Novi Sad, 2014.

Sadržaj

Predgovor

Vođenje finansijskih institucija nikada nije bio lak zadatak. Razvoj savremenog bankarstva i privrede povećava izloženost različitim vrstama rizika. Rizici, kao mogućnost apsolutnog ili relativnog gubitka u odnosu na očekivanja u poslovanju banaka su karakteristika svakog bankarskog poslovanja. Njihova indetifikacija kao i adekvatne mere zaštite postaju važan faktor uspešnog poslovanja.
Neizvesnost raste sa promenama u kamatnim stopama, promena depozita i nesposobnošću dužnika da vrati kredit, ali i pod dejstvom faktora kao što su deregulacija, ali i ulaskom banaka u poslove koji ranije nisu bili bankarski. Da bi se rizik izbegao ili barem doveo u prihvatljivo stanje, potrebno je upravljati njime. Protekle godine bile su izuzetno kobne po bankarski sektor. Velike finansijske institucije su pravile velike gubitke zbog velike kreditne izloženosti, zato je bankarski sektor pristupio ka uspostavljanju sistema i upravljanju kreditnim rizikom. Upravljanje je poslovna politika banke samim tim za upravljanje rizikom možemo reći da je kao bančina funkcija osiguranja od rizika.

Kreditni rizik je rizik iz grupe finansijskih rizika, predstavlja najznačajniji rizik kome je svaka finansijska institucija izložena u svom poslovanju. Iako se kreditni rizik prevashodno vezuje za bankarsko poslovanje gde se najveći izvor kreditnog rizika nalazi u kreditnim plasmanima, njime su izložene i mnoge državne finansijske institucije prilikom obavljanja finansijskih transakcija u domenu javnih finansija. Dakle prisutan je u bilansnim i vanbilansnim transakcijama banke. Obzirom da je reč o jednom od vodećih rizika u bankarskom poslovanju, industrija ulaže velike napore na modeliranju optimalnog pristupa upravljanja ovim rizikom.
Osnovni cilj i motiv ovog rada je predstavljanje matematičkih modela pri modeliranju kreditnog rizika. Najveći akcenat će biti stavljen na modeliranje kreditnog rizika pomoću Pendžerove rekurzije.
U uvodnom delu rada biće predstavljeni pojmovi iz oblasti aktuarske matematike koji će biti korišćeni u okviru ovog rada. Upoznaćemo se sa mešovitom Poasonovom raspodelom (očekivanjem, varijansom) zatim Gama-mešovitom Poasonovom raspodelom kao i sa Pendžerovom rekurzijom.
Zatim ćemo u prvom delu predstaviti kreditni rizik upoznati se sa osnovnim parametrima

vezanim za njega.
Deterministička zaokruživanje sa navedenom osnovnom jedinicom gubitka bi zaokružila, na primer svaki gubitak od 50000 evra na nulu što nije prihvatljivo, jer se ignoriše rizik. Ideja stohastičkog zaokruživanja i ujedno drugog dela ovog rada je da očekivani gubitak barem zadrže konstantnim.
Osnovni cilj modeliranja određene pojave je pronalaženje adekvatnog modela koji opisuje posmatranu pojavu na osnovu dostupnih podataka vezanih za nju. Originalni algoritam za implementiranje kreditnog rizika se zasniva na rekurzivnoj formuli poznatoj pod nazivom Pendžerova rekurzija o kojoj ćemo upravo pričati u trećem delu ovog rada.
I u poslednjem četvrtom delu ćemo se baviti merom rizika i rizikom doprinosa. Mera rizika, koncept koji se koristi u oblasti finansijskog rizika za procenu kreditnog rizika je Expected shortfall (CVAR). O njemu ćemo reći kako se izračunava vezano za kreditni rizik i objasniti neka teorijska svojstva.

Ovom prilikom bih želeo da se zahvalim svim profesorima na saradnji i ukazanom znanju tokom studija. Posebno se zahvaljujem svom mentoru, prof. dr. Dori Seleš, na ukazanom poverenju, kao i za stručno usmeravanje i na izvanrednoj saradnji pri izradi ovog rada.

1

Opšti Poasonov model

Poasonova raspodela je jednoparametarska raspodela sa parametrom λ,$\lambda > 0$. Koristi se za određivanje verovatnoća da će se određen broj događaja pojaviti u datom vremenskom intervalu.
Za izračunavanje kreditnog rizika koristićemo N i k iz Poasonove i Gama raspodele i kasnije ćemo koristiti Pendžerovu rekurziju.
Neka je N Poasonova slučajna promenljiva koja predstavlja broj koliko puta će obveznik propustiti da plati ratu kredita u datom periodu i neka je očekivani broj događaja tokom posmatranog vremenskog intervala jednak λ . Tada se verovatnoća da će se realizovati k događaja tokom tog vremenskog intervala može izračunati sledećom formulom:

$$p_k = P\{N = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Očekivanje i varijansa Poasonove slučajne promenljive N sa parametrom λ ima sledeći oblik:

$$E(N) = \lambda, D(N) = \lambda.$$

Dokaz:
Pretpostavimo da $N \sim Poason(\lambda)$ i $l \in N_0$. Tada koristeći stepeni red eksponencijalnom funkcijom, $l - ti$ faktorial momenta Poasonove raspodele je dat sa

$$E[\prod_{k=0}^{l-1}(N-k)] = \sum_{n=l}^{\infty}\prod_{k=0}^{l-1}(n-k)\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} = \lambda^l e^{-\lambda}\underbrace{\sum_{n=l}^{\infty}\frac{\lambda^{n-1}}{(n-l)!}}_{=e^{\lambda}} = \lambda^l$$

Za $l = 1$ dobijamo očekivanje
$$E[N] = \lambda.$$

Koristeći $N^2 = N + N(N-1)$ i da je $l = 2$, varijansa se može izračunati na sledeći način
$$Var(N) = E[N^2] - (E[N])^2 = E[N] + E[N(N-1)] - (E[N])^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda.$$

Na osnovu činjenice da su očekivanje i varijansa Poasonove slučajne promenljive jednaki, jednostavan način da se proveri da li se posmatrana raspodela podataka može okarakterisati pomoću Poasonove raspodele je da se izvrši poređenje očekivanja i varijanse broja događaja i proveri da li su jednaki. Poasonova raspodela ima dve pogodne osobine koje se mogu koristiti u analizi rizika. Jedna od te dve osobine jeste da je zbir nezavisnih Poasonovih slučajnih promenljivih opet Poasonova slučajna promenljiva. Ta osobina upravo sledi iz sledeće teoreme:

Teorema 1.1. *Neka su $N_1, N_2, \ldots, N_n$, nezavisne Poasonove slučajne promenljive sa parametrima $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ respektivno. Tada slučajna promenljiva $N = N_1 + N_2 + \cdots + N_n$ ima Poasonovu raspodelu sa parametrom $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$.*

Dokaz:
Na osnovu pretpostavke, navedene u teoremi, da su $N_1, N_2, \ldots, N_{n-1}$ i N_n nezavisne slučajne promenljive i formule funkcije generatrise verovatnoće za Poasonovu raspodelu, koja ima oblik:
$$P_{N_j}(z) = e^{\lambda_j(z-1)}, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

sledi
$$P_N(z) = \prod_{j=1}^{n} P_{N_j}(z) = \prod_{j=1}^{n} e^{\lambda_j(z-1)} = e^{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(z-1)} = e^{\lambda(z-1)},$$

gde je $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.
Na osnovu činjenice da funkcija generatrisa verovatnoće jedinstveno određuje raspodelu svake slučajne promenljive, kao i da dobijeni oblik funkcije generatrise verovatnoće raspodele slučajne promenljive N je jednak funkciji generatrise Poasonove raspodele, sledi da slučajna promenljiva N ima Poasonovu raspodelu sa parametrom λ, $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$.

1.1 Složene raspodele

Neka su $X_1, X_2, ...$ diskretne slučajne promenljive (kasnije mogu da budu i neprekidne), nezavisne i imaju istu raspodelu. Dalje N je uvek diskretna slučajna promenljiva koja je nezavisna od X_i, $i \in N$.
Posmatrajmo slučajnu promenljivu $S = X_1 + ... + X_N$ i slučajnu promenljivu $\tilde{N} = N_1 + N_2 + ... + N_K$ tako da su iz Poasonove i Gama raspodele. N je Poasonova slučajna promenljiva koja predstavlja broj koliko puta će obveznik propustiti da plati ratu kredita u datom periodu.

Teorema 1.2. *Važi da je: $P_S(z) = P_N(P_X(z))$ gde*
P predstavlja funkciju generatrise verovatnoće, N predstavlja primarnu raspodelu i X predstavlja sekundarnu raspodelu
Takođe važi da je: $M_S(t) = P_N(M_X(t))$ gde
M predstavlja funkciju generatrise momenata.

Dokaz: Pretpostavljamo da su N, X, S diskretne slučajne promenljive, pa ih zapisujemo u sledećem obliku:

$$N : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & ... & ... \\ p_0 & p_1 & p_2 & ... & ... \end{pmatrix}$$

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & ... & ... \\ f_0 & f_1 & f_2 & ... & ... \end{pmatrix}$$

$$S : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & ... & ... \\ g_0 & g_1 & g_2 & ... & ... \end{pmatrix}$$

Sada $P_S(z)$ možemo zapisati na sledeći način

$$P_S(z) = E(z^S) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P\{S = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} P\{N = n\} P\{S = k | N = n\}}_{*} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{n=0}^{\infty} P\{N = n\} P\{X_1 + ... + X_n = k\} =$$

$*$ prošli smo sve hipoteze, jer ne znamo koju će N vrednost uzeti

Kako su X_i nezavisni tada važi

$$P_{X_1+...+X_n}(z) = \prod_{i=1}^{n} P_{X_i}(z)$$

i sada kada nastavimo dalji zapis dobijamo

$$\begin{aligned}
= \sum_{n=0}^{\infty} P\{N=n\} \sum_{k=0}^{\infty} z^k P\{X_1+...+X_n=k\} &= \\
\underbrace{= \sum_{n=0}^{\infty} P\{N=n\} P_{X_1+...+X_n}(z)}_{**} &= \\
= \sum_{n=0}^{\infty} P\{N=n\}(P_X(z))^n &= \\
&= P_N(P_X(z))
\end{aligned}$$

$**$ kako X_i imaju istu raspodelu zaključujemo da je $P_{X_1+...+X_n}(z) = (P_X(z))^n$

Sada je još ostalo da pokažemo generatrisu momenta tako da odatle dobijamo da je

$$M_S(t) = P_S(e^t) = P_N(P_X(e^t)) = P_N(M_X(t))$$

Druga bitna osobina Poasonove raspodele je data sledećom teoremom:

Teorema 1.3. *Ako su S_i, $i = 1, 2, ..., n$ slučajne promenljive sa složenom Poasonovom raspodelom gde je parametar primarne (Poasonove) raspodele λ_i, a sekundarna diskretna raspodela je određena verovatnoćama $\{q_n(i); n = 0, 1, 2, ...\}$. Tada i $S = S_1+S_2+...+S_n$ ima složenu Poasonovu raspodelu čiji je parametar $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, a sekundarna raspodela je data verovatnoćama $\{q_k; k = 0, 1, 2, ...\}$ gde je*

$$q_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_k(i)\lambda_i}{\lambda}.$$

Dokaz:

S_i imaju složenu Poasonovu raspodelu tako da ih možemo zapisati na sledeći način

$S_1 = {X_1}^1 + {X_2}^1 + ... + {X_{N_1}}^1, \quad N_1 : P(\lambda_1)$
$S_2 = {X_1}^2 + {X_2}^2 + ... + {X_{N_2}}^2, \quad N_2 : P(\lambda_2)$
$\vdots$
Sekundarna raspodela je diskretna sa verovatnoćama $q_n(i), n = 0, 1, 2, ...$ tako da je zapisujemo u sledećem obliku

$$X^1 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & ... & k & ... \\ q_0(1) & q_1(1) & ... & q_k(1) & ... \end{pmatrix}$$

$$X^2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & ... & k & ... \\ q_0(2) & q_1(2) & ... & q_k(2) & ... \end{pmatrix}$$

Dolazimo do krajnjeg S koji će imati oblik

$S = S_1 + S_2 + ... + S_n$
$S = X_1 + X_2 + ... + X_N$
gde je $N : P(\lambda)$, $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n$

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & ... & k & ... \\ q_0 & q_1 & ... & q_k & ... \end{pmatrix}$$

Sada kad malo raspišemo q_k on će imati oblik

$q_k = \frac{1}{\lambda}(\lambda_1 q_k(1) + \lambda_2 q_k(2) + ... + \lambda_n q_k(n))$

Kako govorimo o složenoj raspodeli, kao što je u teoremi 1.2 dato nju možemo zapisati u sledećem obliku $P_{S_i}(z) = P_{N_i}(P_{X^i}(z)), \quad i = 1, ..., n$
gde je $N_i : P(\lambda)$ i

$$X^i : \begin{pmatrix} 0 & 1 & ... & k & ... \\ q_0(i) & q_1(i) & ... & q_k(i) & ... \end{pmatrix}$$

Sada kada zapišemo diskretnu raspodelu ona će imati oblik

$$P_{X^i}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k(i) z^k,$$

a $P_{N_i}(z)$ na osnovu Poasonove raspodele će imati sledeći oblik

$$P_{N_i}(z) = e^{\lambda_i(z-1)}$$

I sada kako znamo da je

$$P_{S_i}(z) = P_{N_i}(P_{X^i}(z))$$

kada u gornju uvrstimo ono što smo raspisali dobijamo sledeće:

$$P_{S_i}(z) = e^{\lambda_i(P_{X^i}(z)-1)}$$

Kako su S_i nezavisni

$$S = S_1 + S_2 + ... + S_n, \quad S - nezavisne$$

to ćemo iskoristiti u sledećoj jednakosti

$$P_S(z) = \prod_{i=1}^{n} P_{S_i}(z) = \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i(P_{X^i}(z)-1)} = e^{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(P_{X^i}(z)-1)} = e^{\lambda(P_X(z)-1)}$$

gde je

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i,$$

$$P_X(z) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_{X_i}(z)}{\lambda}$$

Dakle, primarna raspodela je $P(\lambda)$, a sekundarna raspodela je definisana sa $P_X(z)$

$$P_X(z) = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_{X^i}(z) = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_{k=0}^{\infty} q_k(i) z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{(\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i q_k(i))}_{=q_k} z^k$$

Odatle sledi da je

$$q_k = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i q_k(i), \quad X^i : \begin{pmatrix} 0 & 1 & ... & k & ... \\ q_0(i) & q_1(i) & ... & q_k(i) & ... \end{pmatrix}$$

1.2 Opšti mešoviti Poasonov model

Neka su Λ_i slučajne promenljive sa raspodelom F i vrednostima u $[0, \infty)$, $i \in \{1, ..., m\}$

$$P[N_i = n_i | \Lambda_1, \ldots, \Lambda_m] = P[N_i = n_i | \Lambda_i] = e^{-\Lambda_i} \frac{{\Lambda_i}^{n_i}}{n_i!}.$$

Pretpostavimo da su uslovne raspodele $N_i|\Lambda_i$ nezavisne

$$P[N_1 = n_1 \dots N_m = n_m|\Lambda_1 \dots \Lambda_m] = \prod_{i=1}^{m}(P[N_i = n_i|\Lambda_1 \dots \Lambda_m]) = \prod_{i=1}^{m}(\frac{{\Lambda_i}^{n_i}}{n_i!}e^{(-\Lambda_i)})$$

Dok se bezuslovna raspodela može dobiti integraljenjem koristeći vrednosti prema raspodeli F

$$P[N_1 = n_1, ..., N_m = n_m] = E[\prod_{i=1}^{m}(\frac{{\Lambda_i}^{n_i}}{n_i!}e^{(-\Lambda_i)}) = \int_{[0,\infty)^m} e^{(-(\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_m))}\prod_{i=1}^{m}\frac{{\lambda_i}^{n_i}}{n_i!}F(d\lambda_1, ..., d\lambda_m)$$

1.2.1 Očekivana vrednost,varijansa i kovarijansa

Najpre ćemo se upoznati sa nekim osnovnim osobinama za primenu Poasonove raspodele u kreditnom riziku.
Znamo da je

$$E[N] = \lambda$$

takođe znamo

$$Var(N) = E[N^2] - (E[N])^2$$

dobijamo da je

$$E[N_i|\Lambda_i] = \Lambda_i$$

i

$$Var(N_i|\Lambda_i) = \Lambda_i$$

$N = N_1 + ... + N_m$ predstavlja slučajnu promenljivu ukupnog broja događaja i imamo da je

$$E[N] = \sum_{i=1}^{m} E[N_i] = \sum_{i=1}^{m} E[E[N_i|\Lambda_i]] = \sum_{i=1}^{m} E[\Lambda_i]$$

Ako su $N_1, ..., N_m$ kvadratno-integrabilne, onda za varijansu dobijamo sledeće

$$Var(N) = \sum_{i=1}^{m} Var(N_i) + \sum_{i=1}^{m} Cov(N_i, N_j)$$

Lema 1.1. *Ako su X, Y i Λ kvadratno integrabilne slučajne promenljive na prostoru verovatnoće $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, tada je*

$$Cov(X, Y) = E[Cov(X, Y|\Lambda)] + Cov(E[X|\Lambda], E[Y|\Lambda])$$

i

$$Var(X) = E[Var(X|\Lambda)] + Var(E[X|\Lambda]).$$

Koristeći lemu dobijamo da je

$$Var(N_i) = E[Var(N_i|\Lambda_i)] + Var(E[N_i|\Lambda_i]) = E[\Lambda_i] + Var(\Lambda_i)$$

i, za $i \neq j$

$$Cov(N_i, N_j) = E[N_iN_j] - E[N_i]E[N_j] = E[\Lambda_i\Lambda_j] - E[\Lambda_i]E[\Lambda_j] = Cov(\Lambda_i, \Lambda_j)$$

gde je

$$E[N_iN_j] = E[E[N_iN_j|\Lambda_1, ..., \Lambda_m]] = E[E[N_i|\Lambda_i]E[N_j|\Lambda_j]] = E[\Lambda_i\Lambda_j]$$

iz uslovne nezavisnosti N_i i N_j.

1.3 Uniformni portfolio

U specijalnom slučaju unformnog portfolija pretpostavićemo da su $\Lambda_1 = \cdots = \Lambda_m := \Lambda \sim F$ gde funkcija F ima nosač u $[0, \infty)$ tako da će za svako $n \in N_0$ važiti

$$P[N_1 = n_1, \dots, N_m = n_m] = \int_0^\infty e^{(-m\lambda)}(\frac{\lambda^{n_1+\cdots+n_m}}{n_1! \dots n_m!}F(d\lambda))$$

Kako su $N_1, \dots, N_m$ nezavisne za dato Λ, na osnovu teoreme znamo da je $N = N_1 + \cdots + N_m$ za dato Λ sigurno Poasonova raspodela sa parametrom $P(m\Lambda)$. Odakle za svako $n \in N_0$,

$$P[N = n] = \int_0^\infty e^{(-m\lambda)}\frac{(m)^n}{n!}F(d\lambda).$$

1.4 Gama-mešovita Poasonova raspodela

U daljem razmatranju uslovne raspodele za N dato sa Λ je $P(\Lambda)$, u obliku $\mathcal{L}(N|A) = P(\Lambda)$ što znači da je

$$P[N = n|\Lambda] = \frac{\Lambda^n}{n!}e^{(-\Lambda)}, \quad n \in N_0$$

Koristeći da je $P[N=n|\Lambda]=\frac{\Lambda^n}{n!}e^{(-\Lambda)}$ zajedno sa momentom Gama raspodelom za $\gamma\in(-\alpha,\infty)$ i $z\in(-\infty,\beta)$, računamo na sledeći način

$$\int_0^\infty \lambda^\gamma e^{\lambda z}\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{\alpha-1}e^{-\beta\lambda}d\lambda=\frac{\Gamma(\alpha+\gamma)}{\Gamma(\alpha)}\frac{\beta^\alpha}{(\beta-z)^{\alpha+\gamma}}\int_0^\infty\frac{(\beta-z)^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha+\gamma}\lambda^{\alpha+\gamma-1}e^{-(\beta-z)\lambda}d\lambda$$

gde je $z=-1$, dobijamo neuslovnu raspodelu za N koja je sledećeg oblika

$$P[N=n]=E[P[N=n|\Lambda]]=\frac{1}{n!}E[\Lambda^n e^{-\Lambda}]=\frac{\Gamma(\alpha+n)}{n!\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\beta^n(1+\frac{1}{\beta})^{\alpha+n}},\quad \forall n\in N_0.$$

Koristeći da je $\alpha\Gamma(\alpha)=\Gamma(\alpha+1)$, $\alpha>0$ gama funkcije i $p=\frac{1}{1+\beta}\in(0,1)$ i $q=1-p=\frac{\beta}{1+\beta}$ dobijamo

$$P[N=n]=\binom{\alpha+n-1}{n}p^nq^\alpha,\quad \forall n\in N_0,$$

i nazivamo negativna binomna raspodela. Obeležavaćemo sa $N\sim NegBin(\alpha,p)$. Za $\alpha=1$ prethodna jednačina predstavlja geometrijsku raspodelu sa parametrom p. U nastavku ćemo računati, varijansu i funkciju generatrisa verovatnoće za N. Kako je $\mathcal{L}(N|A)=P(\Lambda)$, imamo

$$E[N]=E[E[N|\Lambda]]=E[\Lambda]=\frac{\alpha}{\beta}=\alpha\frac{p}{1-p}.$$

Koristeći Lemu 1.1 i

$$E[\Lambda]=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\beta\Gamma(\alpha)}$$

za očekivanje kao i

$$Var(\Lambda)=E[\Lambda^2]-(E[\Lambda])^2=\frac{\alpha}{\beta^2}$$

za varijansu dobijamo da je

$$Var(N)=E[Var(N|\Lambda)]+Var(E[N|\Lambda])=E[\Lambda]+Var(\Lambda)=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha}{\beta^2}=\alpha\frac{\beta+1}{\beta^2}=\frac{\alpha p}{(1-p)^2}$$

Još ostaje da izračunamo odgovarajuću funkciju generatrisa verovatnoće. Koristeći $P[N=n]=\binom{\alpha+n-1}{n}p^nq^\alpha$ i proširujući sa $(1-ps)^\alpha$, dobijamo

$$\varphi_N(s)=E[s^N]=\sum_{n=0}^\infty s^nP[N=n]=(\frac{q^\alpha}{(1-ps)^\alpha})\sum_{n=0}^\infty\binom{\alpha+n-1}{n}(1-ps)^\alpha(ps)^n=(\frac{q}{1-ps})^\alpha,$$

za svako $s \in (0, \frac{1}{p})$ za svako $s \in C$ gde je $|s| < \frac{1}{p} = 1 + \beta$. Alternativno, koristeći $\mathcal{L}(N|A) = P(\lambda)$ i funkciju generatrise

$$\varphi_N(s) := E[s^N] = \sum_0^\infty s^n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{\lambda s} e^{-\lambda} = e^{\lambda(s-1)} \quad s \in C,$$

dobijamo

$$\varphi_{N|\Lambda}(s) := E[s^N|\Lambda] = e^{\Lambda(s-1)}$$

i koristeći eksponencijalni momenat koji je oblika

$$E[e^{\Lambda z}] = (1 - \frac{z}{\beta})^{-\alpha}, \quad z \in (-\infty, \beta)$$

dobijamo

$$\varphi_N(s) = E[E[s^N|\Lambda]] = E[e^{\Lambda(s-1)}] = (1 - \frac{s-1}{\beta})^{-\alpha} = (\frac{\beta}{1+\beta-s})^\alpha = (\frac{1}{1-ps})^\alpha, \quad \forall s \in C$$

gde je $|s| < \frac{1}{p} = 1 + \beta$.]

Lema 1.2. *Ako su $N_1, \ldots N_m$ nezavisni sa raspodelom $N_i \sim NegBin(\alpha_i, p)$ za svako $i \in 1, \ldots, n$, onda*

$$N = \sum_{i=1}^m N_i \sim NegBin(\alpha, p)$$

sa $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m$.

Dokaz: Zbog nezavisnosti

$$\varphi_{X+Y}(s) = E[s^{X+Y}] = E[s^X]E[s^Y] = \varphi_X(s)\varphi_Y(s)$$

i funkcije generatrise iz prethodnog dela

$$\varphi_N(s) = \prod_{i=1}^m \varphi_{Ni}(s) = \prod_{i=1}^m (\frac{q}{1-ps})_i^\alpha = (\frac{q}{1-ps})^{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_m)}$$

za svako $s \in C$ gde je $|s| < \frac{1}{p}$. Odatle, $N \sim NegBin(\alpha, p)$, zbog funkcija generatrisa verovatnoće raspodela je jedinstveno određena.

2

Klase raspodela (a,b,0) i (a,b,1)

Klasa $(a, b, 0)$ je klasa dvoparametarskih raspodela diskretnog tipa, sa parametrima a i b. Neka slučajna promenljiva N ima raspodelu koja pripada ovoj klasi. Raspodela se definiše, tako što se prvo odrede parametri a i b, kao i početna vrednost verovatnoće p_0. Verovatnoća da slučajna promenljiva ima vrednosti veće od 1 mogu se izračunati pomoću rekurzivne formule date u sledećoj definiciji.

Definicija 2.0.1. Raspodela diskretne slučajne promenljive N je klase $(a, b, 0)$, ako zadovoljava rekurzivnu vezu:

$$p_n = (a + \frac{b}{n})p_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

pri čemu je $p_n = P\{N = n\}$, a $p_0 = P\{N = 0\}$ proizvoljna početna vrednost.

Ovoj klasi raspodela pripadaju Poasonova, binomna, negativna binomna i geometrijska raspodela. U tabeli su prikazane vrednosti parametara a i b i vrednosti za p_0 za prethodno navedene raspodele.

Raspodela par.	a	b	p_0	skup vr.par.
Poasonova $P(\lambda)$	0	λ	$e^{-\lambda}$	$\lambda > 0$
Binomna $B(n, p)$	$-p(1-p)$	$(n+1)p/(1-p)$	$(1-p)^n$	$n \in N, p \in [0, 1]$
Neg.Bin.$NB(n, \beta)$	$\beta/(1+\beta)$	$(n-1)\beta/(1+\beta)$	$(1+\beta)^{-n}$	n>0, $\beta > 0$
Geometrijska $G(p)$	$\beta/(1+\beta)$	0	$(1+\beta)^{-1}$	$\beta > 0$

Za podatke o broju gubitka, verovatnoća da je broj gubitaka jednak nuli je jednaka verovatnoći da se ni jedan gubitak ne desi u toku određenog perioda. Kada je verovatnoća da se događaj desi mala, tada je verovatnoća da je broj događaja jednak nuli velika. Stoga bitno je obratiti pažnju na određivanje vrednosti funkcije verovatnoće u nuli. U nekim slučajevima modeliranja frenkvencije događaja gubitka, potrebno je zanemariti

vrednost raspodele verovatnoće u nuli. U tim slučajevima koriste se raspodele koje pripadaju klasi $(a, b, 1)$.
Raspodele iz ove klase se mogu dobiti modifikovanjem raspodele iz klase $(a, b, 0)$ na dva načina, koja ćemo predstaviti.

Definicija 2.0.2. Raspodela diskretne slučajne promenljive N pripada klasi raspodela $(a, b, 1)$, ako zadovoljava sledeću rekurzivnu vezu:

$$p_n = (a + \frac{b}{n})p_{n-1}, \quad n = 2, 3, \ldots,$$

pri čemu je $p_n = P\{N = n\}$ i p_0, p_1 proizvoljne početne vrednosti.

Osnovna razlika između date dve klase diskretnih raspodela je u tome što rekurzija kod prve klase počinje od p_0, a kod druge klase od p_1.
Druga klasa se može dobiti modifikovanjem prve klase na dva načina.
Prvi način: Neka raspodela slučajne promenljive N pripada klasi $(a, b, 0)$. Raspodela nove slučajne promenljive, $\overline{N}$, koja pripada klasi $(a, b, 1)$, može se dobiti modifikovanjem raspodele verovatnoće slučajne promenljive N na sledeći način:

$$\overline{p}_0 = 0$$

i

$$\overline{p}_i = \frac{1}{1 - p_0} p_i, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Na ovaj način je anulirana verovatnoća u nuli. Novodobijena raspodela se naziva nula-odsečena raspodela.
Drugi način: Neka važe iste pretpostavke kao u prvom slučaju. Modifikacija raspodele verovatnoće se vrši na sledeći način:

$$\overline{p}_0$$

- modifikovana vrednost od p_0, $p_0 > 0$ i

$$\overline{p}_i = \frac{1 - \overline{p}_0}{1 - p_0} p_i, \quad i = 1, 2, \ldots$$

U ovom slučaju vrednost funkcije raspodele u nuli se modifikuje na osnovu odluke osobe koja definiše model i zavisi od pojave koju želi da opiše. Ova podklasa raspodele se naziva nula-modifikovana klasa raspodele. Još ćemo definisati i (a, b, k) klasu koju ćemo koristiti u daljem radu.

Definicija 2.0.3. Za raspodelu verovatnoće $\{p_n\}_{n\in N_0}$ kažemo da pripada Pendžerovoj (a, b, k) klasi gde $a, b \in R$ i $k \in N_0$ ako su $p_0, p_1, ..., p_{k-1}$ proizvoljni i

$$p_n = (a + \frac{b}{n})p_{n-1},$$

za svako $n \in N$ gde je $n \geq k + 1$.

U nastavku ćemo se upoznati sa dve važne teoreme koje govore o Pendžerovoj rekurziji.

Teorema 2.1. *Ako je N klase $(a, b, 0)$ tj. $p_n = (a + \frac{b}{n})p_{n-1}$, $n = 1, 2, ...$ tada se za $S = X_1 + ... + X_N$ verovatnoće $g_k = P\{S = k\}$ mogu računati rekurzivno:*

$$g_k = \frac{1}{1 - af_0}\sum_{j=1}^{k}(a + \frac{bj}{k})f_j g_{k-j}, \quad k = 1, 2, 3, ...$$

i g_0 se određuje iz

$$g_0 = P\{S = 0\} = P_N(P\{X = 0\}) = P_N(f_0)$$

Dokaz:
Polazimo od sledeće nejednakosti

$$np_n = n(a + \frac{b}{n})p_{n-1} = a(n-1)p_{n-1} + (a + b)p_{n-1}$$

Sada množeći tu jednakost sa $(P_X(z))^{n-1}{P_X}'(z)$ i sa $\sum_{n-1}^{\infty}$ dolazimo do sledećeg oblika:

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} np_n(P_X(z))^{n-1}P'_X(z)}_{P_{S'}(z)} = a\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)p_{n-1}(P_X(z))^{n-1}P'_X(z) + (a+b)\sum_{n=1}^{\infty}p_{n-1}(P_X(z))^{n-1}P'_X(z)$$

Koristimo sledeće oznake:

$$P_S(z) = P_N(P_X(z)) = \sum_{n=0}^{\infty}p_n(P_X(z))^n$$

$$P'_S(z) = \sum_{n=1}^{\infty}p_n n(P_X(z))^{n-1}P'_X(z)$$

Sada uvrštavanjem ovih oznaka u gornju jednačinu dobijamo:

$$P'_S(z) = \underbrace{a\sum_{n=0}^{\infty} np_n(P_X(z))^n P'_X(z)}_{aP_X(z)\sum_{n=1}^{\infty} np_n(P_X(z))^{n-1}P'_X(z)} + (a+b)\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} p_n(P_X(z))^n P'_X(z)}_{P_S(z)}$$

i kada sve to lepo zapišemo dobijamo sledeći oblik:

$$P'_S(z) = aP_X(z)P'_S(z) + (a+b)P_S(z)P'_X(z).$$

Koristeći sledeće oblike zapisa

$$P_S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^k$$

$$P'_S(z) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k k z^{k-1}$$

$$P_X(z) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j z^j$$

$$P'_X(z) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j j z^{j-1}$$

i kada ih uvrstimo dobijamo:

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k k z^{k-1} = a\sum_{k=1}^{\infty} g_k k z^{k-1} \sum_{j=0}^{\infty} f_j z^j + (a+b)\sum_{k=0}^{\infty} g_k z^k \sum_{j=1}^{\infty} f_j j z^{j-1}$$

u nastavku primenimo da je $\sum_n a_n \sum_n b_n = \sum_n \sum_j a_j b_{n-j}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k k z^{k-1} = a\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} f_j g_{k-j}(k-j)\underbrace{z^j z^{k-j-1}}_{z^{k-1}} + (a+b)\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} j f_j g_{k-j}\underbrace{z^{j-1} z^{k-j}}_{z^{k-1}}$$

Dakle, došli smo do oblika $\sum_k () z^{k-1} = \sum_k [] z^{k-1}$ što znači da trebamo izjednačiti koeficijente uz z^{k-1} tako da dolazimo do sledećeg oblika:

$$kg_k = a\sum_{j=0}^{k} f_j g_{k-j}(k-j) + (a+b)\sum_{j=0}^{k} j f_j g_{k-j}, \quad \forall k = 1, 2, 3, ...$$

$$kg_k = af_0g_kk + a\sum_{j=1}^{k} f_jg_{k-j}(k-j) + (a+b)\sum_{j=1}^{k} jf_jg_{k-j}$$

$$kg_k(1-af_0) = a\sum_{j=1}^{k} f_jg_{k-j}(k-j) + (a+b)\sum_{j=1}^{k} jf_jg_{k-j}$$

deljenjem gornje jednačine sa k

$$g_k(1-af_0) = a\sum_{j=1}^{k} f_jg_{k-j} + \frac{b}{k}\sum_{j=1}^{k} jf_jg_{k-j}$$

I na taj način dolazimo do konačnog oblika za Pendžerovu rekurziju, a to je

$$g_k = \frac{1}{1-af_0}\sum_{j=1}^{k}(a+\frac{bj}{k})f_jg_{k-j}$$

Teorema 2.2. *Ako je N klase $(a,b,1)$ onda se g_k može računati rekurzivno:*

$$g_k = \frac{1}{1-af_0}[(p_1-(a+b)p_0)f_k + \sum_{j=1}^{k}(a+\frac{bj}{k})f_jg_{k-j}], \quad k=1,2,3,....$$

2.1 Generalizacija višestrukih Pendžerovih rekurzija

Teorema 2.3. *Fiksirajmo $l \in N$. Neka $\{q_n\}_{n\in N_0}$ i $\{q_{i,n}\}_{n\in N_0}$ predstavljaju verovatnoću raspodele za promenljive N i $\widetilde{N_i}$ za $i \in \{1,\ldots,l\}$ koje primaju vrednosti u N_0, i koji su nezavisne od niza slučajnih promenljivih $X_1, X_2, ...$ koje primaju vrednosti u ${N_0}^d$. Neka $\{p_n\}_{n\in N_0^d}$ i $\{\widetilde{p}_{i,n}\}_{n\in N_0^d}$ predstavljaju verovatnoću raspodele sume $S = X_1 + \cdots + X_n$ i $\widetilde{S}^i = X_1 + \cdots + X_{\widetilde{N_i}}$ za $i \in \{1,\ldots,l\}$*
a) Pretpostavimo da postoje $k \in N_0$ i $a_1,\ldots,a_l,b_1,\ldots,b_l \in R$ takvi da je

$$q_n = \sum_{i=1}^{l}(a_i + \frac{b_i}{n})\widetilde{q}_{i,n-i}, \quad \forall n \in N$$

gde je $n \geq k+1$
i sve verovatnoće sa desne strane tj. jednakosti koje nisu korišćene su nula,

$$\widetilde{q}_{i,0} = \cdots = \widetilde{q}_{i,k+l-i-1}$$

za svako $i \in \{1, \dots, min(l, k+l-1)\}$.
Tada, za svako $n \in N_0^d \backslash 0$ *i* $c_n \in R^d$ *gde je* $\langle c_n, n\rangle \neq 0$ *važi*

$$p_n = \sum_{j=1}^{k+l-1} P[S_j = n]q_j + \sum_{i=1}^{l} \sum_{j \in N_0^d, j \leq n} (a_i + \frac{b_i \langle c_n, j\rangle}{i\langle c_n, n\rangle})P[S_i = j]\widetilde{p}_{i,n-j},$$

gde je p_0 *dato sa*

$$p_0 = \varphi_N(P[X_1 = 0]) = \begin{cases} q_0 & za\ P[X_1 = 0] = 0 \\ E[(P[X_1 = 0])^N] & inače \end{cases}$$

b) Pretpostavimo da postoji $v_1, \dots, v_l \in [0, 1]$ *gde je* $v_1 + \cdots + v_l \leq 1$ *tako da je* $q_n = \sum_{i=1}^{l} v_i \widetilde{q}_{i,n}$, $\forall n \in N$. *Tada je* $p_n = \sum_{i=1}^{l} v_i \widetilde{p}_{i,n}$, $\forall n \in N_0^d \backslash \{0\}$.

Dokaz: Da bi dokazali početno p_0, možemo primetiti da $\{S = 0, N = 0\} = \{N = 0\}$. Odakle

$$p_0 = \underbrace{P[S = 0, N = 0]}_{=q_0} + \underbrace{P[S = 0, N \geq 1]}_{=0 \text{ ako} P[X_1=0]=0}.$$

Ako je $P[X_1 = 0] > 0$, onda ćemo iskoristiti nezavisnost N i $\{X_n\}_{n \in N}$ i dobijamo

$$p_0 = q_0 + \sum_{n \in N, q_n > 0} \underbrace{P[S = 0|N = n]}_{=P[X_1=0,\dots,X_n=0]=P([X_1=0])^n} \overbrace{P[N = n]}^{=q_n} = E[(P[X_1 = 0])^N].$$

Sada pokazujemo za p_n, za fiksno $n \in N_0^d \backslash \{0\}$ i $c \in R^d$ koje zadovoljava $\langle c, n\rangle \neq 0$. Da bi dokazali fiksiraćemo $i \in \{1, \dots l\}$. Za svako $m \in N$ gde je $m \geq i$, koristićemo $S_m = X_1 + \cdots + X_m = S_{m-i} + S_{i,m}$ gde je $S_{i,m} = X_{m-i+1} + \cdots + X_m$, kao i nezavisnost i istu raspodelu $X_1, \dots, X_m$. Ako je $P[S_m = n] > 0$, onda dobijamo da je

$$\langle c, n\rangle = E[\langle c, S_m\rangle | S_m = n] = \sum_{j=1}^{m} E[\langle c, X_j\rangle | S_m = n] =$$
$$= mE[\langle c, X_m\rangle | S_m = n] = \frac{m}{i} E[\langle c, S_i, m\rangle | S_m = n],$$

$$(a_i + \frac{b_i}{m}) = E[a_i + \tfrac{b_i \langle c, S_i, m\rangle}{i\langle c, n\rangle} | S_m = n] = \textstyle\sum_{j \in N_0^d, j \leq n} (a_i + \frac{b_i \langle c, j\rangle}{i\langle c, n\rangle}) P[S_{i,m} = j | S_m = n].$$

Za svako $m \geq i$ i znajući da su S_{m-i} i $S_{i,m}$ nezavisni dobijamo,

$$P[S_{i,m} = j, S_m = n] = P[S_{i,m} = j, S_{m-i} = n-j] = \underbrace{P[S_{i,m} = j]}_{=P[S_i=j]} P[S_{m-i} = n-j].$$

Sada ćemo ispisati $p_n = P[S = n]$ koristeći q_n iz teoreme:

$$p_n = \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{P[S_m = n | N = m]}_{=P[S_m=n] \text{ nezavisnost}} \overbrace{P[N = m]}^{=q_m} = \sum_{m=1}^{k+l-1} P[S_m = n] q_m +$$

$$+ \underbrace{\sum_{m=k+l}^{\infty} \sum_{i=1}^{l} (a_i + \frac{b_i}{m}) P[S_m = n] q_{i,m-i}}_{=: (*)}$$

Koristeći prethodne korake imamo da je $(*)$ jednaka sa

$$\sum_{m=k+l}^{\infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j \in N_0^d, j \leq n} (a_i + \frac{b_i \langle c, j \rangle}{i \langle c, n \rangle}) P[S_i = j] P[S_{m-i} = n-j] \widetilde{q}_{i,m-i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{l} \sum_{j \in N_0^d, j \leq n} (a_i + \frac{b_i \langle c, j \rangle}{i \langle c, n \rangle}) \underbrace{P[S_i = j] \sum_{m=k+l}^{\infty} P[S_{(m-i)} = n-j] \widetilde{q}_{i,m-i}}_{=: (**)}$$

Zamena redosleda sumiranja je dozvoljeno, jer red sa desne strane konvergira za svako $i \in \{1, \ldots, l\}$ i $j \in \{0, \ldots, n\}$. Koristeći smenu $m - i \to m$, zajedno sa prethodnim dobijamo:

$$** = \sum_{m=i}^{\infty} P[S_{m-i} = n-j] \widetilde{q}_{i,m-i} = \sum_{m=0}^{\infty} P[S_m = n-j, \widetilde{N}_i = m] = P[\widetilde{S}^i = n-j] = \widetilde{p}_{i,n-j}.$$

Zamenjujući sve u početnu jednakost dobijamo tvrđenje.

b) Modifikujući prethodno p_n koristeći nezavisnost $\{S_m = n\}$ i $\{N = m\}$ i formulu $P[N = m] = \sum_{i=1}^{l} v_i P[\widetilde{N}_i = m]$ za $m \in N$ i dobijamo:

$$p_n = \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{P[S_m = n, N = m]}_{=P[S_m=n]P[N=m]} = \sum_{i=1}^{l} v_i \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} P = [S_m = n] P[\widetilde{N}_i = m]}_{=\widetilde{p}_{i,n}}$$

za svako $n \in N_0^d \backslash \{0\}$.

Definicija 2.1.1. Neka $\{q_n\}_{n\in N_0}$ predstavlja raspodelu verovatnoće i $k \in N_0$ tako da je $\sum_{n=k}^{\infty} q_n > 0$. Tada je k-odsečena raspodela verovatnoće $\{\widetilde{q}_n\}_{n\in N_0}$ od $\{q_n\}_{n\in N_0}$ definisana sa $\widetilde{q}_0 = ... = \widetilde{q}_{k-1} := 0$ i

$$\widetilde{q}_n := \frac{q_n}{1 - \sum_{j=0}^{k-1} q_j}, \quad n \geq k.$$

Sledeća posledica ove teoreme pod (b) je korisna u slučaju kada je u pitanju k-odsečena verovatnoća raspodele pendžer(a, b, k) klase.

Posledica 2.1.1. Pretpostavimo da je $\{q_n\}_{n\in N_0}$ raspodela verovatnoće na ili iznad $k \in N$ i da $\{\widetilde{q}_n\}_{n\in N_0}$ označava k-odsečenu verovatnoću raspodele po samoj definiciji. Dalje pretpostavimo da N odnosno $\widetilde{N}$ ima tu raspodelu i da su $S = X_1 + \cdots + X_N$ i $\widetilde{S} = X_1 + \cdots + X_{\widetilde{N}}$ odgovarajuće sume sa raspodelom $\{p_n\}_{n\in N_0^d}$ i $\{\widetilde{p}_n\}_{n\in N_0^d}$. Tada je

$$p_n = \sum_{i=1}^{k-1} P[S_i = n] q_i + (1 - \sum_{j=0}^{k-1} q_j)\widetilde{p}_n, \quad n \in N_0^d \backslash \{0\}.$$

Dokaz: Koristeći prethodnu teoremu (b) za $l = k$, $v_i = q_i$ i $\widetilde{q}_{i,i} = 1$, $i \in \{1, \ldots, k-1\}$, $v_k = 1 - (q_0 + \cdots + q_(k-1))$,$\widetilde{q}_{k,n} = \widetilde{q}_n$, za svako $n \geq k$, i za sve ostale $\widetilde{q}_{i,n} = 0$.

3

Kreditni rizik

U ovom radu će biti predstavljena definicija kreditnog rizika. Zatim će biti naveden kratak istorijat Bazelskog komiteta, koji je vezan za razvoj kreditnog rizika.

3.1 Definicija kreditnog rizika

Ne postoji jedinstvena definicija pojma rizika. Definicija zavisi od konteksta i svrhe za koju neko želi da definiše ovaj pojam. Samim tim, možemo reći da se rizik definiše kao mera verovatnoće da se desi gubitak. Na taj način definisan rizik se doživljava kao verovatnoća negativne devijacije, tj. izražava opasnost da efekti budućih ishoda događaja odstupaju od očekivanih ishoda na negativan način.
Opšte prihvaćena definicija kreditnog rizika glasi

"Kreditni rizik je specifična vrsta rizika koji nastaje pri investiranju finansijskih sredstava. Kreditni rizik je rizik da jedna strana u finansijskom ugovoru neće izvršiti obavezu delimično ili u celini, što će izazvati da investitor pretrpi finansijski gubitak."

3.2 Bazelski komitet

Krajem 1974. guverneri zemalja članice G10 osnovali su Bazelski komitet za bankarski nadzor, kao jedan od komiteta pri BIS, koji ima za cilj unapređenje bankarskog nadzora na nivou celog sveta. Danas članstvo u komitetu ima trinaest zemalja: Belgija, Holandija, Francuska, Kanada, Japan, Luksemburg, Nemačka, Italija, Španija, Velika Britanija, SAD, Švedska i Švajcarska.

Bazelski komitet nema nadnacionalni autoritet kontrole, ne poseduje nijedan nadnacionalni organ i njegovi zaključci nemaju pravnu snagu. On formuliše osnovne supervi-

zorske standarde i preporučuje najbolje prakse u svojim dokumentima, u cilju da će ih supervizori širom sveta primeniti na odgovarajući način za njihove nacionalne sisteme. Bitno je reći da Bazelski komitet ima lidersku ulogu u uspostavljanju smernica procene upravljanja rizikom banaka.
Standardi iz međunarodno usaglašenog okvira za merenje kapitala, poznatijeg kao Bazel II, nadaleko sofisticiraniji i obuhvatniji način tretiraju izloženost banaka kreditnom riziku u odnosu na Sporazum o kapitalu (Bazel I), inicirajući kod banaka veću osetljivost u odnosu na izloženost i potrebu da u kontinuitetu razvijaju okvir za upravljanje ovim rizikom.
Posebni kvaliteti Bazelskog sporazuma II kada je u pitanju kreditni rizik su:
i) mogućnost evolutivnog puta u procesu razvoja i primene pristupa za merenje izloženosti i kalkulaciju ekonomskog kapitala, kao i mogućnost izbora između različitih pristupa,
ii) veliki naglasak na potrebi da banke razvijaju svoje interne modele za merenje izloženosti kreditnom riziku i kalkulaciju ekonomskog kapitala, kao i
iii) potpuno nov tretman tehnika za ublažavanje izloženosti kreditnom riziku, mogućnost izbora i evolutivnog puta, od jednostavnijih, do složenijih pristupa ovim tehnikama.

Ponuđeni set pristupa za merenje izloženosti kreditnom riziku i kalkulaciju ekonomskog kapitala u Bazelskom sporazumu II, razlikuje se po nivou sofisticiranosti, prihvatajući realnost da nisu sve banke podjednako spremne da mere svoju izloženost ovom riziku, ali i želju Komiteta da i Bazelski sporazum II bude široko primenjen u svetskoj bankarskoj industriji i da postane svetski standard u domenu merenja kapitalne adekvatnosti banaka. Gradacija pristupa poznaje tri nivoa:
1) ***Standardizovani pristup kreditnom riziku***, kao najjednostavniji
2) ***Osnovni viši pristup kreditnom riziku*** , kao prvi nivo pristupa kreditnom riziku koji podrazumeva primenu internih metodologija banaka za merenje izloženosti i procenu adekvatnosti kapitala samo u odnosu na jednu komponentu (verovatnoću neizvršenja obaveza od strane dužnika). Za ostale komponente rizika banke moraju da se oslone na procenu supervizora.
3) ***Viši pristup kreditnom riziku***, kao najviši i najsofisticiraniji nivo pristupa kreditnom riziku, koji u potpunosti omogućuje merenje izloženosti i procenu adekvatnosti kapitala primenom internih metodologija banaka.

3.3 Uvod

Originalni okvir kreditnog $rizika^+$ je razvijen od strane Credit Suisse First Boston (CSFB). On se zasniva na Poasonovoj aproksimaciji. Jedna od velikih prednosti modela jeste da je verovatnoća raspodele funkcije generatrise gubitka dostupna i u zatvorenoj

formi.
Kreditni $rizik^+$ je zasnovan na pristupu modeliranja kreditnog rizika za neizmireni iznos pojedinačnih obaveza i broja obveznika. Kreditni $rizik^+$ je statistički model kreditnog rizika za neizmirivanje obaveza koji ne sadrži pretpostavke vezane za uzroke nastalih neizmirenih obaveza. Ovakav pristup je sličan pristupu upravljanja tržišnim rizikom gde nije bilo nikakvih pokušaja modeliranja uzroka vezana za kretanje tržišnih cena.
Proširenja predstavljena u ovom delu uključuju:
• Individualna izloženost obveznika dovoljno je da bude d-dimenzionalni slučajni vektor omogućavajući na taj način postojanje modela sa više perioda.
• Moguće je tretirati zavisne riziko grupe osiguranika i stohastički zavisne izloženosti riziku.
Imajmo na umu, zbog stohastičke izloženosti rizik od smanjenja kreditnog rejtinga se može lako ugraditi u proširenu verziju kreditnog rizika i na taj način se može i modelirati

Primedba: (Produžetak sa više perioda) Proširenja na nekoliko perioda mogu se koristiti na razne načine, a primenjuje se u aktuarskoj matematici.

(a) Ako imamo d-perioda, važno je u kom periodu dužnik nije izmirio obaveze. Na primer, ranije neizmirivanje duga može da izazove probleme sa likvidnošću za zajmodavca, zato što je otpis zatražen ranije. Odnosno veličina gubitka može da zavisi od vremena, posebno kada se kredit i hipoteka amortizuje tokom njegovog životnog veka, a ne dospeća.
(b) U kontekstu osiguranja, d-komponente mogu predstavljati različite vrste isplata. Za portfolio zdravstvenog osiguranja mogu predstavljati troškove lečenja i dodatke za nestalim prihodom osiguranika. Za portfolio lične odgovornosti ili automobilske nesreće to može biti za telesne povrede i imovinske štete.
(c) U stohastičkom kontekstu d-periodi mogu predstavljati razvoj godina. Verovatnoća neizmirivanja obaveza se odnosi na zahteve odšteta koji potiču iz osiguranja, zahtevi za odštetu mogu biti prijavljene u kasnijem periodu .

3.4 Opis modela

Sada ćemo na početku definisati i upoznati se sa nesvojstvenim rizikom kojeg ćemo pominjati u daljem radu.
Nesvojstven rizik predstavlja rizik koji je specifičan za sredstva ili male grupe sredstava. Nesvojstven rizik ima malu ili nikakvu korelaciju sa tržišnim rizikom, pa se stoga može značajno ublažiti ili eliminisati iz portfolija koristeći adekvatnu diversifikaciju. Istraži-

vanja pokazuju da nesvojstveni rizik, više nego tržišni utiče na veće varijacije vezane za rizik pojedinačnih investicija tokom vremena.

Za verziju kreditnog $rizika^+$ potrebni su nam sledeći parametri:
• $m \in N$ predstavlja broj obveznika
• $d \in N$ predstavlja broj perioda
• $E_1, \ldots, E_d > 0$ predstavlja jedinice gubitka za d perioda,
• $C \in N$ broj nesvojstvenih uzroka neizmirenja obaveza
• $K \in N$ predstavlja broj nezavisnih faktora rizika,
• parametri preciziraju gama raspodelu nezavisnih faktora rizika $R_1, \ldots, R_k$,
• neprazan konačan skup J scenarija zavisnosti,
• za svaki scenario zavisnosti $j \in \mathcal{J}$ matrica $A_j = ({a^j}_{c,k})_{c\in\{0,\ldots,C\},k\in\{0,\ldots,K\}}$ je dimenzije $(C+1) \times (K+1)$ sa nenegativnim elementima, gde je

$$ {a^j}_{0,k} = 0, \quad \forall j \in \mathcal{J} \text{ i } k \in \{1, \ldots K\}, $$

• kolekcija G nepraznih podskupova skupa obveznika $\{1, \ldots, m\}$ koje se nazivaju riziko-grupe.
Za svaku grupu $g \in G$ potrebno je da poznajemo:
• (jednogodišnja) verovatnoća $p_g \in [0, 1]$, neizmirivanje obaveza,
• težinski faktori $w_{0,g,j} \in [0, 1]$ neizmirivanja obaveza
• težinski faktori $w_{c,g,j} \in [0, 1]$ gde $c \in \{1, \ldots, C\}$ predstavlja uzrok neizmirivanja obaveza,
• višestruka raspodela verovatnoće $Q_{c,g,j} = \{q_{c,g,j,\mu}\}_{\mu\in({N^d}_0)^g}$ opisuje stohastičke gubitke u d perioda za sve obveznike $i \in g$ osnovne jedinice gubitka $E_1, \ldots, E_d$ u slučaju kada riziko-grupa g predstavlja neizmirivanje obaveza zbog uzroka $c \in \{0, \ldots, C\}$

Pretpostavka 3.4.1. Svaki obveznik $i \in \{1, ..., m\}$ pripada najmanje jednoj grupi $g \in G$. Neka $G_i := \{g \in G | i \in g\}$ predstavlja skup svih grupa kojima obveznik $i \in \{1, ..., m\}$ pripada, uz pretpostavke da $G_i \neq \emptyset$

Napomena: Korisno je proveriti pravilnu postavku modela. Ako obveznik nije sadržan ni u jednoj grupi rizika, ne postoji mogućnost izmirenja obaveza i tada obveznik može biti izostavljen iz modela kreditnog rizika.

4

Stohastičko zaokruživanje

Za izražavanje gubitka koristićemo novčane jedinice i to većih veličina kao što je na primer 100000 eura. Kako su međutim gubici necelobrojni umnošci od 100000 eura neko zaokruživanje je potrebno. Determinističko zaokruživanje sa navedenom osnovnom jedinicom gubitka bi zaokružila, na primer svaki gubitak manji od 50000 evra na nulu što nije prihvatljivo, jer se ignoriše rizik. Ideja stohastičkog zaokruživanja i ujedno drugog dela ovog rada je da očekivani gubitak barem zadrže konstantnim. Tako na primer, gubitak od 150000 eura koji se dešava sa verovatnoćom p se može pretvoriti u gubitke od 100000 eura i od 200000 eura sa verovatnoćama $p/2$. Ovakva ideja uopštena na višim dimenzijama i mešovitim trenutkom je sadržaj sledeće leme. Deo (e) implicira da su kovarijanse očuvane.

Teorema 4.1. *Neka je $X = (X_1, \ldots, X_d)$ slučajan vektor u R^d. Definišimo*

$$p_n = E[\prod_{i=1}^{d}(1 - |X_i - n_i|)^+] \quad n = (n_1, \ldots, n_d) \in Z^d$$

gde je $x^+ := max\{x, 0\}$, za svako $x \in R$. Tada važi sledeće:
(a) $\{p_n\}_{n \in Z^d}$ predstavlja raspodelu verovatnoće.
(b) Ako su sve komponente vektora X skoro sigurno nenegativne, onda $\{p_n\}_{n \in {N_0}^d}$ predstavlja raspodelu verovatnoće.
Neka je $Y = (Y_1, \ldots, Y_d)$ slučajan vektor u Z^d sa raspodelom $\{p_n\}_{n \in Z^d}$ i neka je I neprazan podskup od $\{1, \ldots, d\}$.
(c) Stohastičko zaokruživanje komutira sa marginalnom raspodelom, tj. stohastičko zaokruživanje raspodele vektora $(X_i)_{i \in I}$ jednak je raspodeli $(Y_i)_{i \in I}$.
(d) Ako su $\{X_i\}_{i \in I}$ nezavisni onda su i $\{Y_i\}_{i \in I}$ nezavisni.
(e) Proizvod $\prod_{i \in I} X_i$ je integrabilan ako i samo ako je $\prod_{i \in I} Y_i$ integrabilan i u tom

slučaju važi da je

$$E[\prod_{i\in I} X_i] = E[\prod_{i\in I} Y_i]$$

Dokaz:

Za bilo koje $k \in Z$ definišemo $f_k : R \to [0,1]$ gde je $f_k(x) = (1 - |x-k|)^+$ za svako $x \in R$. Za $x \in R$ definišemo $k_x = \lfloor x \rfloor$ i primetimo da je $f_k(x) = 0$, za svako $k \in Z \backslash \{k_x, k_x+1\}$. Važi:

$$f_{k_x}(x) + f_{k_x+1}(x) = 1 - (x - k_x) + 1 - (k_x + 1 - x) = 1.$$

Odatle $\{f_k\}_{k\in Z}$ predstavlja particiju jedinice tj. to znači da je

$$\sum_{k\in Z} f_k(x) = 1, \quad x \in R.$$

Za svako $x \in R$ najviše su dva člana različita od nule, odatle možemo zaključiti da nema problema sa konvergencijom. Dalje kad ispišemo imamo

$$k_x f_{k_x}(x) + (k_x+1) f_{k_x+1} = k_x(1 - (x - k_x)) + (k_x+1)(1 - (k_x + 1 - x)) = x,$$
$$\sum_{k\in Z} k f_k(x) = x, \quad x \in R.$$

Ako je $x < 0$ i shodno tome $k_x \leq -1$ tada slično prethodnim,

$$\mid k_x \mid f_{k_x}(x) + \mid k_x + 1 \mid f_{k_x+1}(x) = -k_x(1 - (x - k_x)) - (k_x+1)(x - k_x) = -x = \mid x \mid,$$

odatle zajedno sa $k_x f_{k_x}(x) + (k_x+1) f_{k_x+1} = k_x(1-(x-k_x)) + (k_x+1)(1-(k_x+1-x)) = x$, dobijamo da je

$$\sum_{k\in Z} \mid k \mid f_k(x) = \mid x \mid, \quad x \in R$$

(a) Koristeći da je $\sum_{k\in Z} f_k(x) = 1$ za svaku dimenziju dovodi do

$$\sum_{(n_1,\ldots,n_d)\in Z^d} \prod_{i=1}^{d} f_{n_i}(x_i) = 1, \quad x = (x_1, \ldots,_d) \in R^d$$

Odatle na osnovu teoreme o monotonoj konvergenciji imamo da je

$$\sum_{n\in Z^d} p_n = E[\sum_{n\in Z^d} \prod_{i=1}^{d} f_{n_i}(X_i)] = 1$$

(b) Za svako $n = (n_1, \ldots, n_d) \in Z^d \backslash {N_0}^d$ postoji $i \in \{1, \ldots, d\}$ tako da je $n_i \leq -1$. Odatle sledi da $f_{n_i}(X_i) = 0$ i $p_n = 0$.

(c) Neka je $(n_i)_{i\in I} \in Z^I$ i $J := \{1, \ldots, d\}\backslash I$.
Koristeći monotonu konvergenciju dobijamo sledeće,

$$P[Y_i = n_i \quad \forall i \in I] = \sum_{(n_j)_{j\in Z^J}} \underbrace{P[(Y_1, \ldots, Y_d) = (n_1, \ldots, n_d)]}_{=E[\prod_{i=1}^d f_{n_i}(X_i)]} = E[\prod_{i\in I} f_{n_i}(X_i) \prod_{j\in J} \underbrace{\sum_{n_j\in Z} f_{n_j}(X_j)]}_{=1}$$

(d) Neka je $(n_i)_{i\in I} \in Z^I$. Koristeći što smo pokazali pod (c), nezavisnost $\{X_i\}_{i\in I}$ i opet deo pod (c) dobijamo,

$$P[Y_i = n_i \quad \forall i \in I] = E[\prod_{i\in I} f_{n_i}(X_i)] = \prod_{i\in I} P[Y_i = n_i].$$

(e) Kako su u pitanju nenegativni članovi, koristeći teoremu o monotonoj konvergenciji dobijamo,

$$E[\prod_{i\in I} \mid Y_i \mid] = \sum_{(n_i)_{i\in I}\in Z^I} (\prod_{i\in I} \mid n_i \mid) \underbrace{P[Y_i = n_i \quad \forall i \in I]}_{=E[\prod_{i\in I} f_{n_i}(X_i)]} =$$

$$\sum_{(n_i)_{i\in I}\in Z^I} E[\prod_{i\in I} \mid n_i \mid f_{n_i}(X_i)] = E[\prod_{i\in I} \underbrace{\sum_{n_i\in Z} \mid n_i \mid f_{n_i}(X_i)]}_{=|X_i|} = E[\prod_{i\in I} \mid X_i \mid],$$

Sledi da je $\prod_{i\in I} \mid Y_i \mid$ integrabilno ako i samo ako je $\prod_{i\in I} \mid X_i \mid$ integrabilno. Sličnim pravilom samo bez apsolutne vrednosti, koristeći teoremu o dominatnoj konvergenciji i $\sum_{k\in Z} k f_k(x) = x$ umesto $\sum_{k\in Z} \mid k \mid f_k(x) =\mid x \mid$ nas dovodi do tvrdjenja.

Primer1(Stohastičko zaokruživanje može da promeni varijansu):
Uzmimo u obzir degenerisanu proizvoljnu promenljivu X sa $P[X = \frac{1}{2}] = 1$ čija je varijansa jednaka nuli. Stohastičkim zaokruživanjem dobijamo Bernulijevu raspodelu $Bin(1, \frac{1}{2})$, koja ima varijansu $\frac{1}{4}$.

Primer2(Stohastičko zaokruživanje može da promeni korelaciju)
Dok nam je lema (e) stohastičkog zaokruživanja garantovala da očuvava kovarijansu,

u ovom primeru ćemo pokazati da je zaokruživanjem moguće promeniti korelaciju. Posmatrajmo slučajan vektor $(X_1, X_2) = \frac{1}{2}(Z, Z)$ gde je $Z \sim Bin(2, \frac{1}{2})$. Tada je $Var(Z) = 1/2$, odakle vidimo da je $Cov(X_1, X_2) = \frac{1}{4}\ Var(Z) = \frac{1}{8}$. Kako su X_1 i X_2 komonotone ili primećujući da je $Var(X_1) = Var(X_2) = \frac{1}{4}Var(Z) = \frac{1}{8}$ dolazimo do toga da je $Corr(X_1, X_2) = 1$. Stohastičkim zaokruživanjem dolazimo do raspodele verovatnoće, $p_{(0,0)} = p_{(1,1)} = \frac{3}{8}$ i $p_{(1,0)} = p_{(0,1)} = \frac{1}{8}$. Ako (Y_1, Y_2) ima takvu raspodelu, onda je kada izračunamo upravo $Cov(Y_1, Y_2) = \frac{1}{8}$, a to možemo i zaključiti na osnovu leme (e). Kako ipak $Y_1, Y_2 \sim Bin(1, \frac{1}{2})$ dolazimo do toga da je $Var(Y_1) = Var(Y_2) = \frac{1}{4}$, odatle možemo zaključiti da je $Corr(Y_1, Y_2) = \frac{1}{2} \neq 1$.

4.1 Oznake za izostanak otplate duga

Za svaku grupu rizika $g \in G$ i svaki scenario $j \in J$ pišemo:
• $N_{0,g,j}$ predstavlja broj neizmirenih obaveza (tokom d-perioda),
• $N_{c,g,j}$ predstavlja broj neizmirenih obaveza uz uzrok $c \in \{1, \ldots, C\}$,
• $N_{g,j} := \sum_{c=0}^{C} N_{c,g,j}$ predstavlja ukupan broj neizmirenih obaveza scenarija j.

Za svakog obveznika $i \in \{1, \ldots, m\}$ i svaki scenario $j \in J$ pišemo analogno:

• $N_{0,i,j} := \sum_{g \in G_i} N_{0,g,j}$ predstavlja broj neizmirenih obaveza,
• $N_{c,i,j} := \sum_{g \in G_i} N_{c,g,j}$ predstavlja broj neizmirenih obaveza uz uzrok $c \in \{1, \ldots, C\}$
• $N_{i,j} := \sum_{c=0}^{C} N_{c,i,j} = \sum_{g \in G_I} N_{g,j}$ predstavlja ukupan broj neizmirenih obaveza.

Može se dogoditi i da je broj neizmirenih obaveza tokom d-perioda nula. Neka je J slučajna promenljiva odabranog scenarija, tj. J uzima vrednosti iz skupa $\mathcal{J}$. Tada

• $N_{c,g} := N_{c,g,J} = \sum_{j \in \mathcal{J}} N_{c,g,j} 1_{\{J=j\}}$ predstavlja broj neizmirenih obaveza grupe $g \in G$ zbog uzroka $c \in \{0, \ldots, C\}$,
• $N_g := N_{g,J} = \sum_{c=0}^{C} N_{c,g}$ opisuje ukupan broj neizmirenih obaveza riziko-grupe $g \in G$,
• $N_i := N_{i,J} = \sum_{j \in J} N_{i,j} 1_{J=j}$ opisuje ukupan broj neizmirenih obaveza za svakog obveznika pojedinačno $i \in \{1, \ldots, m\}$

4.2 Oznake za stohastičke gubitke

Gubici su umnošci osnovnih jedinica gubitka $E_1, \ldots, E_d$ u ${N_0}^d$. Neka je J slučajna promenljiva iz skupa $\mathcal{J}$.

• Sa $L_{c,g,i,j,n}$ ćemo označiti vrednost vektora gubitka obveznika $i \in g$ u ${N_0}^d$ za neizmireni broj obaveza $n \in N$ grupe rizika $g \in G$ scenarija $j \in J$ uz uzroke $c \in \{1, \ldots, C\}$ ili $c = 0$.
• Vrednost vektora gubitka u ${N_0}^d$ za neizmireni broj obaveza $n \in N$ grupe $g \in G$ scenarija $j \in J$ uz uzrok $c \in \{1, \ldots, C\}$ ili $c = 0$ je definisana na sledeći način:

$$L_{c,g,j,n} = \sum_{i \in g} L_{c,g,i,j,n}.$$

• Vrednost vektora gubitka u scenariju $j \in \mathcal{J}$ riziko-grupe $g \in G$ i uzroka $c \in \{1, \ldots, C\}$ ili $c = 0$ je definisana na sledeći način:

$$L_{c,g,j} = \sum_{n=1}^{N_{c,g,j}} L_{c,g,j,n}.$$

• Vrednost vektora gubitka u ${N_0}^d$ riziko-grupe $g \in G$ i uzroka $c \in \{0, \ldots, C\}$ je definisana na sledeći način:

$$L_{c,g} = L_{c,g,J} = \sum_{j \in \mathcal{J}} L_{c,g,j} 1_(J = j).$$

• Ukupna vrednost vektora gubitka u ${N_0}^d$ scenarija $j \in \mathcal{J}$ grupe $g \in G$ data je na sledeći način:

$$L_{g,j} := \sum_{c=0}^{C} L_{c,g,j}.$$

• Ukupna vrednost vektora gubitka u ${N_0}^d$ portfolio scenarija $j \in \mathcal{J}$ data je sa

$$L_j := \sum_{g \in G} L_{g,j}.$$

• Ukupna vrednost vektora gubitka u ${N_0}^d$ portfolija je data sa

$$L := L_J = \sum_{j \in J} L_j 1_{J=j}.$$

Za tumačenje modela i za obračun doprinosa rizika trebaće nam i sledeće definicije vrednosti vektora gubitka u ${N_0}^d$ pridružena obvezniku $i \in \{1, \ldots, m\}$:
• Pridružena vrednost vektora gubitka u ${N_0}^d$ scenarija $j \in \mathcal{J}$ zbog neizmirenih obaveza

grupe $g \in G_i$ uzroka $c \in \{0, \ldots, C\}$ data je sa

$$L_{c,g,i,j} := \sum_{n=1}^{N_{c,g,j}} L_{c,g,i,j,n}.$$

• Pridružena vrednost vektora gubitka u ${N_0}^d$ scenarija $j \in \mathcal{J}$ zbog uzroka $c \in \{0, \ldots, C\}$ je data kao suma svih riziko-grupa kojima pripada obveznik i , tj.

$$L_{c,i,j} := \sum_{g \in G_I} L_{c,g,i,j}.$$

• Ukupna pridružena vrednost vektora gubitka u ${N_0}^d$ scenarija $j \in \mathcal{J}$ se računa sumiranjem svih neizmirenih obaveza nekog uzroka, tj.

$$L_{i,j} := \sum_{c=0}^{C} L_{c,i,j}.$$

• Ukupna pridružena vrednost vektora gubitka u ${N_0}^d$ je data pomoću gubitka iz slučajno odabranog scenarija, tj.

$$L_i := L_{i,J} = \sum_{j \in \mathcal{J}} L_{i,j} 1_{\{J=j\}}.$$

Sada ćemo se upoznati sa pretpostavkama koje ćemo kasnije koristiti prilikom izračunavanja očekivanja, varijanse i kovarijanse.

Pretpostavka 4.2.1. (gubici grupe)
Za svaku grupu $g \in G$, za svaki uzrok neizmirenih obaveza $c \in \{0, ..., C\}$ i svaki zavistan scenario $j \in J$, niz slučajnih vektora gubitka $(L_{c,g,i,j,n})_{i \in g}$ ima vrednosti u $({N_0}^d)^g$ gde $n \in N$ imaju istu raspodelu i nezavisni su od svih drugih slučajnih promenljivih[1], sa raspodelom

P[L$_{c,g,i,j,1} = \mu_i$ za svako $i \in g$]=q$_{c,g,j,\mu}$, $\quad \mu = (\mu)_{i \in g} \in ({N_0}^d)^g$

[1]To se odnosi na sve one nizove vektora gubitka, scenarija J, neizmirivanje obaveza usled nesvojstvenog rizika $\{N_{0,g}\}$ u pretpostavci 4.2.3, neizmirivanje obaveza usled svojstvenog rizika $\{N_{c,g}\}_{c \in \{1,...C\}, g \in G}$ iz pretpostavke 4.2.6 kao i riziko-faktori $R_1, ...R_K$ iz pretpostavke 4.2.7

Pretpostavka 4.2.2. (raspodela broja nesvojstvenih neizmirenih obaveza)
Za svaku grupu $g \in G$, $N_{0,g}$ predstavlja broj neizmirenih obaveza koji je zavistan u odnosu na J, Poasonova raspodela sa itenzitetom λ_g, težinskim faktorom $w_{0,g,J}$ i elementom matrice $a^j_{0,0}$, dato je sa:

$$\mathcal{L}(N_{0,g}|J) = Poason(\lambda_g w_{0,g,J} a^J_{0,,0}), \quad \forall g \in G.$$

Pretpostavka 4.2.3. (Uslovna nezavisnost broja nesvojstvenih neizmirenih obaveza)
Zavisnost na J, grupa neizmirenih obaveza ima vrednosti u $\{N_{0,g}\}_{g\in G}$ usled nesvojstvenosti neizmirenih obaveza su nezavisni jedno od drugog i svega ostalog[2],

$$P[N_{0,g} = n_{0,g} \quad \forall g \in G|J] = \prod_{g\in G} P[N_{0,g} = n_{0,g}|J] = \prod_{g\in G} e^{-\lambda_g w_{0,g,J} a^J{}_{0,0}} \frac{(\lambda_g w_{0,g,J} a^J{}_{0,0})^{n_{0,g}}}{n_{0,g}!}$$

za svako $n_{0,g} \in N_0$ gde koristimo prethodnu pretpostavku za drugi deo jednakosti.

Pretpostavka 4.2.4. (Struktura inteziteta uzroka neizmirivanja obaveza)
Inteziteti uzroka neizmirivanja obaveza $\Lambda_1, ..., \Lambda_C$ su izraženi u obliku slučajne matrice $A_J = \sum_{j\in J} \Lambda_j 1_{\{J=j\}}$ dimenzije $(C+1)\times(K+1)$ i nenegativnim riziko-faktorima $R_1, ..., R_K$ tj.

$$\Lambda_c = a^J_{c,0} + \sum_{k=1}^{K} a^J_{c,k} R_k, \quad c \in \{1, ..., C\}.$$

Pretpostavka 4.2.5. (Uslovna raspodela broja svojstvenih neizmirivanja obaveza)
Za svaki uzrok neizmiravanja obaveza $c \in \{1, \dots, C\}$ i svaku grupu $g \in G$, broj svojstvenih neizmiravanja obaveza $N_{c,g}$ je uslovljen na $J, R_1, ..., R_K$, Poasonove raspodele sa parametrom datim kao proizvod grupe inteziteta neizmirenih obaveza λ_g, težinskim faktorom $w_{c,g,J}$ i intezitetom uzroka neizmirenih obaveza λ_c, to znači

$$P[N_{c,g} = n|J, R_1, \dots, R_k] = P[N_{c,g} = n|J, \lambda_c] = e^{-\lambda_g w_{c,g,J}\lambda_c} \frac{(\lambda_g w_{c,g,J}\lambda_c)^n}{n!}$$

za svako $n \in N_0$

$$\mathcal{L}(N_{c,g}|J, R_1, \dots, R_C) = \mathcal{L}(N_{c,g}|J, \lambda_c) = Poason(\lambda_g w_{c,g,J}\lambda_c)$$

[2]To se odnosi na slučajne vektore gubitka iz pretpostavke 4.2.1, neizmirivanje obaveza usled svojstvenog rizika $\{N_{c,g}\}_{c\in\{1,...C\},g\in G}$ iz pretpostavke 4.2.6 i riziko-faktori $R_1, ..., R_K$ iz pretpostavke 4.2.7

Pretpostavka 4.2.6. (Uslovna nezavisnost broja svojstvenih neizmirivanja obaveza) Zavisnost na $J, R_1, \ldots, R_k$, familija brojeva

$$\{N_{c,g} | c \in \{1, \ldots, C\}, g \in G\}$$

neizmirenih obaveza je nezavisna, odatle je

$$P[N_{c,g} = n_{c,g} \quad \text{za } c \in \{1, \ldots, C\} \text{ i } g \in G | J, R_1, ..., R_k] =$$
$$\prod_{c=1}^{C} \prod_{g \in G} P[N_{c,g} = n_{c,g} | J, R_1, \ldots, R_k] = \prod_{c=1}^{C} \prod_{g \in G} e^{-\lambda_g w_{c,g,J} \lambda_c} \frac{(\lambda_g w_{c,g,J} \lambda_c)^n_{c,g}}{n_{c,g}!}$$

za svako $n_{c,g} \in N_0$.

Pretpostavka 4.2.7. (Nezavisnost riziko-faktora i scenarija) Nenegativni riziko-faktori $R_1, ..., R_K$ i promenljiva scenarija J su stohastički nezavisne slučajne promenljive.

Napomena:(Očekivanje, varijansa i kovarijansa za uzrok neizmirenih obaveza) Ako $R_1, ..., R_K \in L^1(P)$ i ako važe pretpostavke 4.2.4 i 4.2.7, tada je

$$E[\Lambda_c | J] = a^J_{c,0} + \sum_{k=1}^{K} a^J_{c,k} E[R_k]$$

odatle je

$$E[\Lambda_c] = E[a^J_{c,0}] + \sum_{k=1}^{K} E[a^J_{c,k}] E[R_k]$$

za svako $c \in \{1, ..., C\}$. Ako sada u daljem nastavku $R_1, ..., R_K \in L^2(P)$ tada za svako $c, d \in \{1, ..., C\}$,

$$Cov(\Lambda_c, \Lambda_d | J) = \sum_{k,l=1}^{K} a^J_{c,k} a^J_{d,l} Cov(R_k, R_l) = \sum_{k=1}^{K} a^J_{c,k} a^J_{d,k} Var(R_k), \tag{4.1}$$

odatle koristeći lemu 1.1 dobijamo da je

$$Cov(\Lambda_c, \Lambda_d) = E[Cov(\Lambda_c, \Lambda_d | J)] + Cov(E[\Lambda_c | J], E[\Lambda_d | J]) =$$
$$= \sum_{k=1}^{K} E[a^J_{c,k} a^J_{d,k}] Var(R_k) + \sum_{k,l=0}^{K} Cov(a^J_{c,k}, a^J_{d,l}) e_k e_l$$

gde je $e_0 := 1$ i $e_k := E[R_k]$ za svako $k \in \{1, ..., K\}$.

Pretpostavka 4.2.8. (Gama raspodela riziko-faktora)
Riziko-faktori $R_1, ..., R_K$ su slučajne promenljive sa gama raspodelom gde je očekivanje $e_k := E[R_k] > 0$ i varijansa ${\sigma_k}^2 := Var(R_k) > 0$ sa parametrom oblika $\alpha_k = \frac{{e_k}^2}{{\sigma_k}^2}$ i inverznim skala parametrom $\beta_k = \frac{e_k}{{\sigma_k}^2}$ za svako $k \in \{1, ..., K\}$

Pretpostavka 4.2.9. (Normalizacija uzroka neizmirenih obaveza)
Pretpostavljamo sledeće

$$E[w_{0,g,J}{a^J}_{0,0} + \sum_{c=1}^{C} w_{c,g,J}\lambda_c] = 1$$

za svaku grupu $g \in G$.

4.3 Očekivanja,varijanse i kovarijanse za neizmirivanje obaveza

4.3.1 Očekivanje

Podsetimo se da na osnovu teoreme 1.1 znamo da ako su $N_1, ..., N_m$ nezavisni gde je $N_i \sim Poason(\lambda_i)$ za svako $i \in \{1, ..., m\}$, tada je

$$N := \sum_{i=1}^{m} N_i \sim Poason(\lambda),$$

gde nam je $\lambda = \lambda_1 + ... + \lambda_m$.
Počećemo sa neizmirenim brojem obaveza

$$N_i = \sum_{g \in G_i} N_g = \sum_{g \in G_i} \sum_{c=0}^{C} N_{c,g}$$

obveznika $i \in \{1, \ldots, m\}$. Prvo vidimo da na osnovu pretpostavki 4.2.2, 4.2.3, 4.2.5, 4.2.6 i teoreme 1.1 Poasonovog sumiranja dobijamo da je

$$\mathcal{L}(N_i|J, R_1, \ldots, R_k) = \mathcal{L}(\sum_{g \in G_i}(N_{0,g} + \sum_{c=1}^{C} N_{c,g})|J, R_1, \ldots, R_k) = Poason(\Lambda_i)$$

gde nam je

$$\Lambda_i := \sum_{g \in G_i} \lambda_g (w_{0,g,J} a_{0,0}^J + \sum_{c=1}^{C} w_{c,g,J} \Lambda_c)$$

uslovni intezitet neizmirenih obaveza obveznika i, odatle dobijamo da je

$$E[N_i | J, R_1, \dots, R_k] = \Lambda_i$$

Korišćenjem uslovnog očekivanja datog sa $J, R_1, \dots, R_k$, prethodne jednakosti kao i pretpostavke o normalizaciji dobijamo sledeće

$$E[N_i] = E[\lambda_i] = \sum_{g \in G_i} \lambda_g E[w_{0,g,J} a_{0,0}^J + \sum_{c=1}^{C} w_{c,g,J} \lambda_c] = \sum_{g \in G_i} \lambda_g.$$

Dakle, možemo zaključiti da očekivani broj neizmirenih obaveza obveznika i predstavlja sumu inteziteta neizmirenih obaveza riziko-grupa, kojoj i pripada.

4.3.2 Varijansa

Kako bi izračunali varijansu broja neizmirenih obaveza N_i obveznika $i \in \{1, \dots, m\}$, prvo možemo videti da kao što smo imali kod očekivanja i varijanse u prvom delu rada i ovde važi da je $Var(N_i | J, R_1, \dots, R_k) = \Lambda_i$. Tako da korišćenjem leme 1.1 kao i da je $E[N_i | J, R_1, \dots, R_k] = \Lambda_i$, $Var(N_i)$ možemo zapisati na sledeći način

$$Var(N_i) = E[\underbrace{Var(N_i | J, R_1, \dots, R_k)}_{=\Lambda_i}] + Var(\underbrace{E[N_i | J, R_1, \dots, R_k]}_{=\Lambda_i}),$$

tj.

$$Var(N_i) = E[N_i] + E[Var(\Lambda_i | J)] + Var(E[\Lambda_i | J]).$$

Primetimo da je $Var(N_i) \geq E[N_i]$, pošto je varijansa nenegativna. Koristeći pretpostavku o strukturi uzrokovanog inteziteta dobijamo sledeće

$$\Lambda_i = \sum_{g \in G_i} \lambda_g (\sum_{c=0}^{C} w_{c,g,J} a_{c,0}^J + \sum_{k=1}^{K} R_k \sum_{c=1}^{C} w_{c,g,J} a_{c,k}^J).$$

Koristeći pretpostavku 4.2.7 o nezavisnosti $J, R_1, \dots, R_k$

$$E[\Lambda_i|J] = \sum_{g\in G_i} \lambda_g (\sum_{c=0}^{C} w_{c,g,J} a_{c,0}^J + \sum_{k=1}^{K} E[R_k] \sum_{c=1}^{C} w_{c,g,J} a_{c,k}^J)$$

i

$$Var(\Lambda_i|J) = \sum_{k=1}^{K} Var(R_k) (\sum_{g\in G_i} \lambda_g \sum_{c=1}^{C} w_{c,g,J} a_{c,k}^J)^2.$$

gde su $E[R_k]$ i $Var(R_k)$ obrazloženi u pretpostavci 4.2.8
Ako postoji samo jedan scenario, tada su J i samim tim $E[\Lambda_i|J]$ konstatni, onda vidimo da je $Var(E[\Lambda_i|J])$ nula i $Var(\Lambda_i|J)$ se poklapa sa $E[Var(\Lambda_i|J)]$
U opštem slučaju, gledajući varijansu kao $Var(E[\Lambda_i|J]) = E[(E[\Lambda_i|J])^2] - (E[\Lambda])^2$, gde smo očekivanje $E[\Lambda_i]$ računali u prethodnom delu dobijamo

$$E[(E[\Lambda_i|J])^2] = \sum_{j\in J} (\sum_{g\in G_i} \lambda_g (\sum_{c=0}^{C} w_{c,g,J} a_{c,0}^J + \sum_{k=1}^{K} E[R_k] \sum_{c=1}^{C} w_{c,g,J} a_{c,k}^J))^2 P[J=j]$$

$$E[Var(\Lambda_i|J)] = \sum_{k=1}^{K} Var(R_k) \sum_{j\in J} (\sum_{g\in G_i} \lambda_g \sum_{c=1}^{C} w_{c.g,j} a_{c,k}^j)^2 P[J=j]$$

4.3.3 Kovarijansa

Za obveznika i, $i' \in \{1, \dots, m\}$ gde je $i \neq i'$ možemo izračunati kovarijansu od N_i i $N_{i'}$ pomoću leme 1.1

$$Cov(N_i, N_{i'}) = Cov(E[N_i|J], E[N_{i'}|J]) + E[Cov(N_i, N_{i'}|J)]$$

Koristeći $N_i = \sum_{g\in G_i} N_g = \sum_{g\in G_i} \sum_{c=0}^{C} N_{c,g}$, linearnost uslovne kovarijanse, pretpostavku 4.2.3 kao i lemu 1.1 dobijamo,

$$Cov(N_i, N_{i'}|J) = \sum_{g \in G_i \bigcap G_l} \underbrace{Var(N_{0,g}|J)}_{=\lambda_g w_{0,g,J} a^J_{0,0}} +$$

$$+ \sum_{g \in G_i} \sum_{h \in G_{i'}} \sum_{c,d=1}^{C} (E[\underbrace{Cov(N_{c,g}, N_{d,h}|J, R_1, \ldots, R_K)}_{=Var(N_{c,g}|J,\Lambda_c)=\lambda_g w_{c,g,J} \Lambda_c \text{ za(c,g)=(d,h)}} |J] +$$

$$+ Cov(\underbrace{E[N_{c,g}|J, R_1, \ldots, R_K]}_{=\lambda_g w_{c,g,J} \Lambda_c}, \underbrace{E[N_{d,h}|J, R_1, \ldots, R_K]}_{=\lambda_h w_{c,g,J} \Lambda_d}|J)$$

gde koristimo pretpostavku 4.2.5 kako bi izračunali uslovno očekivanje i uslovnu varijansu. Uslovna varijansa za $N_{c,g}$ i $N_{d,h}$ data sa $J, R_1, \ldots, R_K$ ne važi u slučaju kada je $(g, k) \neq (h, l)$ zbog uslovne nezavisnosti u pretpostavci 4.2.6. Odatle imamo,

$$Cov(N_i, N_{i'}|J) = \sum_{g \in G_i \bigcap G_{i'}} \underbrace{\lambda_g (w_{0,g,J} a^J_{0,0} + \sum_{c=1}^{C} w_{c,g,J} E[\Lambda_c|J])}_{E[\cdot]=1} +$$

$$+ \sum_{g \in G_i} \lambda_g \sum_{h \in G_{i'}} \lambda_h \sum_{c,d=1}^{C} w_{c,g,J} w_{d,h,J} Cov(\Lambda_c, \Lambda_d|J),$$

gde je ostali deo kovarijanse dat u napomeni sa jednakošću označenom brojem (1) kod pretpostavke 4.2.7. Sada njenim uvrštavanjem u našu jednačinu dobijamo:

$$Cov(N_i, N_{i'}) = Cov(E[N_i|J], E[N_{i'}|J]) + \sum_{g \in G_i \bigcap G_{i'}} \lambda_g +$$

$$+ \sum_{g \in G_i} \lambda_g \sum_{h \in G_{i'}} \lambda_h \sum_{k=1}^{K} Var(R_k) \sum_{c,d=1}^{C} E[w_{c,g,J} w_{d,h,J} a^J_{c,k} a^J_{d,k}],$$

tako dolazimo do

$$E[N_i|J] = E[\Lambda_i|J] = \sum_{g \in G_i} \lambda_g (\sum_{c=0}^{C} w_{c,g,J} a^J_{c,0} + \sum_{k=1}^{K} E[R_k] \sum_{c=1}^{C} w_{c,g,J} a^J_{c,k})$$

analogno važi za $E[N_{i'}|J]$. Ukoliko postoji samo jedan scenario, onda su $E[N_i|J]$ i

$E[N_{i'}|J]$ determinističke i kovarijansa ne postoji. Malo bolje kad pogledamo nemamo potrebe da gledamo očekivanje na desnoj strani i izostavljanjem J dobijamo

$$Cov(N_i, N_{i'}) = \sum_{g \in G_i \bigcap G_{i'}} \lambda_g + \sum_{k=1}^{K} Var(R_k)(\sum_{g \in G_i} \lambda_g \sum_{c=1}^{C} w_{c,g} a_{c,k})(\sum_{h \in G_{i'}} \lambda_h \sum_{d=1}^{C} w_{d,h} a_{d,k}).$$

5

Težinska funkcija generatrisa verovatnoće gubitka

Fiksirajmo $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_K) \in [0, \infty)^K$. U ovom delu ćemo računati koeficijente težinske funkcije generatrisa verovatnoće

$$\varphi_{L,\gamma}(s) := \sum_{\nu \in N_0} E[{R_1}^{\gamma_1} ... {R_K}^{\gamma_K} 1_{\{L=\nu\}}] s^{\nu} = E[{R_1}^{\gamma_1} ... {R_K}^{\gamma_K} s^L] = E[E[{R_1}^{\gamma_1} ... {R_K}^{\gamma_K} s^L | J]],$$

$s \in C^d, \| s \|_{\infty} \leq 1$,
za ukupnu vrednost vektora gubitka L u ${N_0}^d$ koja nam je data u obliku $L := L_J = \sum_{j \in J} L_j 1_{\{J=j\}}$. Neka

$$L' = \sum_{c=1}^{C} \sum_{g \in G} L_{c,g}$$

označava svojstvenu vrednost portfolija vektora gubitka u ${N_0}^d$. Na osnovu pretpostavke 4.2.1 i 4.2.3, slučajan vektor $\{L_{0,g}\}_{g \in G}$ i slučajan vektor $(L', R_1, ..., R_K)$ su uslovno nezavisni. Kako je

$$L = L' + \sum_{g \in G} L_{0,g},$$

odatle dobijamo da je

$$E[{R_1}^{\gamma_1} ... {R_K}^{\gamma_K} s^L | J] = E[{R_1}^{\gamma_1} ... {R_K}^{\gamma_K} s^{L'} | J] \prod_{g \in G} E[s^{L_{0,g}} | J].$$

Neka je $S := \sum_{n=1}^{N} X_n$, $Q = \{q_\nu\}_{\nu \in {N_0}^d}$ sa $q_\nu := P[X_1 = \nu]$ označavamo raspodelu X_1. Ako je $N \sim Poason(\lambda)$, tada S ima takozvanu složenu Poasonovu raspodelu i koristimo oznaku $S \sim CPoason(\lambda, Q)$. Kako je

$$\varphi_N(s) = E[s^N] = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{\lambda s} e^{-\lambda} = e^{\lambda(s-1)}, \quad s \in C$$

dolazimo do toga da je

$$\varphi_S(s) = E[s^{X_1+...+X_N}] = e^{(\lambda(\varphi_{X_1}(s)-1))}$$

za svako $s \in C^d$ za koje stepeni red $\varphi_{X_1}(s)$ konvergira.
Tako sada koristeći pretpostavke 4.2.1, 4.2.2 i da je $\varphi_S(s) = e^{(\lambda(\varphi_{X_1}(s)-1))}$, dolazimo do toga da za složenu Poasonovu sumu $L_{0,g,j}$ nesvojstvenih vektora gubitka grupe $g \in G$ scenarija $j \in J$, važi da je

$$E[s^{L_{0,g}}|J = j] = E[s^{L_{0,g,j}}] = e^{(\lambda_g w_{0,g,j} a^j_{0,0} (\varphi_{L_{0,g,j,1}}(s)-1))}.$$

Uslovljavanjem na $J, R_1, ..., R_K$, broj neizmirenih obaveza $\{N_{c,g}\}_{c\in\{1,...,C\},g\in G}$ su nezavisni na osnovu pretpostavke 4.2.6 stoga je slučajna suma $\{L_{c,g}\}_{c\in\{1,...,C\},g\in G}$ takođe nezavisna na osnovu pretpostavke 4.2.1 . Tako da dolazimo do sledećeg oblika

$$E[{R_1}^{\gamma_1}...{R_K}^{\gamma_K} s^{L'}|J, R_1, ..., R_K] = {R_1}^{\gamma_1}....{R_K}^{\gamma_K} \prod_{c=1}^{C} \prod_{g\in G} E[s^{L_{c,g}}|J, R_1, ..., R_K].$$

Koristeći pretpostavke 4.2.1, 4.2.4 i 4.2.6 kažemo da za svaki uzrok $c \in \{1, ..., C\}$ neizmirenih obaveza i svaku grupu $g \in G$ važi

$$\begin{aligned} E[s^{L_{c,g}}|J, R_1, ..., R_K] = E[s^{L_{c,g}}|J, \Lambda_c] = e^{(\lambda_g w_{c,g,J} \Lambda_c (\varphi_{L_{c,g,J,1}}(s)-1))} = \\ = e^{(\lambda_g w_{c,g,J} (\varphi_{L_{c,g,J,1}}(s)-1)(a^J_{c,0} + \sum_{k=1}^{K} a^J_{c,k} R_k))}. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem poslednje tri jednakosti u prvu dobijamo

$$\begin{aligned} E[{R_1}^{\gamma_1}...{R_K}^{\gamma_K} s^L|J, R_1, ..., R_K] = e^{(\sum_{g\in G} \lambda_g \sum_{c=0}^{C} w_{c,g,J} a^J_{c,0} (\varphi_{L_{c,g,J,1}}(s)-1))} \times \\ \prod_{k=1}^{K} {R_k}^{\gamma_k} e^{(R_k \sum_{g\in G} \lambda_g \sum_{c=1}^{C} w_{c,g,J} a^J_{c,k} (\varphi_{L_{c,g,J,1}}(s)-1))}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Za svaki scenario $j \in J$ i rizik $k \in \{0, ..., K\}$ neka

$$\varphi_{j,k}(s) = \sum_{\nu \in S_{j,k} \bigcup \{0\}} q_{j,k,\nu} s^{\nu} = \begin{cases} \overline{\lambda}_{j,k}^{\;-1} \sum_{\nu \in S_{j,k}} \lambda_{j,k,\nu} s^{\nu} & \text{za } \overline{\lambda}_{j,k} > 0 \\ 1 & \text{za } \overline{\lambda}_{j,k} = 0 \end{cases},$$

gde $s \in C^d$, $\| s \|_{\infty} \leq 1$, označava funkciju generatrise verovatnoće za raspodelu $Q_{j,k} = \{q_{j,k,\nu}\}\}_{\nu \in N_0{}^d}$. Setimo se da za sve uzroke $c \in \{0, ..., C\}$, grupe $g \in G$ i scenarija $j \in J$, važi

$$\varphi_{L_{c,g,j,1}}(s) = \sum_{\nu \in N_0{}^d} s^{\nu} \underbrace{P[L_{c,g,j,1} = \nu]}_{=q^s_{c,g,j,\nu}}$$

$$\varphi_{L_{c,g,j,1}}(s) - 1 = \sum_{\nu \in N_0{}^d \setminus \{0\}} s^{\nu} q^s_{c,g,j,\nu} - (1 - q^s_{c,g,j,0})$$

Sređivanjem eksponenta kod jednakosti (5.1) dovodi nas do sledećeg

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} \lambda_g \sum_{c=0}^{C} w_{c,g,j} a^j_{c,k} (\varphi_{L_{c,g,j,1}}(s) - 1) &= \sum_{\nu \in S_{j,k}} s^{\nu} \underbrace{\sum_{g \in G} \lambda_g \sum_{c=0}^{C} w_{c,g,j} a^j_{c,k} q^s_{c,g,j,\nu}}_{=\lambda_{j,k,\nu}} - \\ & \quad - \underbrace{\sum_{g \in G} \lambda_g \sum_{c=0}^{C} w_{c,g,j} a^j_{c,k} (1 - q^s_{c,g,j,0})}_{=\overline{\lambda}_{j,k}} = \\ & = \overline{\lambda}_{j,k} (\varphi_{j,k}(s) - 1) \end{aligned} \qquad (5.2)$$

za svaki rizik $k \in \{0, ..., K\}$ i skup $S_{j,k} = \{\nu \in N_0{}^d \setminus \{0\} | \lambda_{j,k,\nu} > 0\}$. Zamenjujući poslednju jednakost u jednakost (5.1) koristeći uslovno očekivanje dato sa J i nezavisnost $J, R_1, ..., R_K$ dobijamo da je

$$E[R_1{}^{\gamma_1} ... R_K{}^{\gamma_K} s^L | J] = e^{(\overline{\lambda}_{J,0}(\varphi_{J,0}(s) - 1))} \times \prod_{k=1}^{K} E[R_k{}^{\gamma_k} e^{(\overline{\lambda}_{J,k}(\varphi_{J,k}(s) - 1) R_k)} | J] \qquad (5.3)$$

za $s \in C^d$, $\| s \|_{\infty} \leq 1$.
Kako bi mogli da nastavimo dalje najpre ćemo uvesti pretpostavku vezanu za raspodelu faktora rizika $R_1, ..., R_K$.

5.1 Faktori rizika sa Gama raspodelom

• Najpre ćemo definisati $\overline{\lambda}_{j,k}$. Kumulativni Poasonov intezitet za nenula portfolio gubitke za d-perioda, scenarija $j \in J$ rizika $k \in \{0, 1, ..., K\}$, je dat sa

$$\overline{\lambda}_{j,k} := \sum_{g \in G} \lambda_g \sum_{c=0}^{C} w_{c,g,j} a_{c,k}^{j} (1 - q_{c,g,j,0}^{s}) = \sum_{\nu \in {N_0}^d \setminus \{0\}} \sum_{g \in G} \lambda_g \sum_{c=0}^{C} w_{c,g,j} {a_{c,k}}^{j} q_{c,g,j,\nu}^{s} = \sum_{\nu \in S_{j,k}} \lambda_{j,k,\nu} \geq 0$$

gde nam je q poznato iz pretpostavki, a za w znamo da je $\sum_{c=1}^{C} w_{c,g,j} = 1$, $\forall g \in G$, $\forall j \in J$.

Kako je $R_k \sim \Gamma(\alpha_k, \beta_k)$ za svako $k \in \{1, ..., K\}$ na osnovu pretpostavke 4.2.8 i kako je R_k nezavisno u odnosu na J, dolazimo do toga da je

$$E[{R_k}^{\gamma_k} e^{(\overline{\lambda}_{J,k}(\varphi_{J,k}(s)-1)R_k|J)}] = E[{R_k}^{\gamma_k}](1 - \overline{\lambda}_{J,k} \frac{\varphi_{J,k}(s) - 1}{\beta_k})^{-(\alpha_k + \gamma_k)}.$$

Zamenjujući gornju jednakost u poslednju dobijamo

$$E[{R_1}^{\gamma_1} ... {R_K}^{\gamma_K} s^L | J] = e^{(\overline{\lambda}_{J,0}(\varphi_{J,0}(s)-1))} \times \prod_{k=1}^{K} E[{R_k}^{\gamma_k}](1 - \overline{\lambda}_{J,k} \frac{\varphi_{J,k}(s) - 1}{\beta_k})^{-(\alpha_k + \gamma_k)}.$$

Sada stavljajući sve u zajednički eksponencijalni oblik, dobijamo konačan oblik težinske funkcije generatrise verovatnoće koju smo definisali još na početku i ona ima sledeći oblik:

$$\begin{aligned} \varphi_{L,\gamma}(s) &= \sum_{j \in J} E[{R_1}^{\gamma_1} ... {R_K}^{\gamma_K} s^L | J = j] P[J = j] \\ &= C_\gamma \sum_{j \in J} e^{(\overline{\lambda}_{j,0}(\varphi_{j,0}(s)-1) - \sum_{k=1}^{K} (\alpha_k + \gamma_k) log(1 - \overline{\lambda}_{j,k} \frac{\varphi_{j,k}(s)-1}{\beta_k}))} P[J = j], \end{aligned} \tag{5.5}$$

za svako $s \in C^d$ i $\| s \|_\infty \leq 1$, gde je

$$C_\gamma = \prod_{k=1}^{K} E[{R_k}^{\gamma_k}] = \prod_{k=1}^{K} \frac{\Gamma(\alpha_k + \gamma_k)}{{\beta_k}^{\gamma_k} \Gamma(_k)}$$

Ako je $\gamma_k = 0$, onda je $E[{R_k}^{\gamma_k}] = 1$. Ako je $\gamma_k = 1$, onda je $E[{R_k}^{\gamma_k}] = \frac{\alpha_k}{\beta_k}$. Odatle

$$C_\gamma = \prod_{k=1}^{K} (\frac{\alpha_k}{\beta_k})^{\gamma_k}, \quad \gamma \in \{0, 1\}^K.$$

5.2 Razlaganje logaritma u stepeni red Pendžerovom rekurzijom

Definicija 5.2.1. Za slučajan vektor $X : \Omega \to {N_0}^d$ i integrabilnu slučajnu promenljivu $Y : \Omega \to R$, definišemo težinsku funkciju generatrise verovatnoće

$$\varphi_{X,Y}(s) = E[Ys^X] = \sum_{n \in {N_0}^d}^{\infty} E[Y1_{\{X=n\}}]s^n,$$

koja važi za $s \in C^d$ i $\| s \|_\infty \leq 1$.

Jednakost (5.5) u kreditnom portfoliju predstavlja težinsku funkciju generatrisa verovatnoće akumuliranih vrednosti vektora gubitka u ${N_0}^d$. Na osnovu definicije koeficijenti stepenog reda iz jednakosti (5.5) obezbeđuju željenu raspodelu.
Izračunavanje takvih koeficijenata nas može dovesti do numeričke nestabilnosti čak i u slučaju jednog perioda sa $(\gamma_1, \ldots, \gamma_K) = 0$. Tako da ćemo u ovom delu opisati jedan algoritam, koji su u osnovi koristili Haaf, Reiss, Schoenmakers da bi dokazili numeričku stabilnost, ali nisu uvideli tu povezanost sa Pendžerovom rekurzijom. Kako je Pendžerova rekurzija numerički stabilna kao i logaritamska raspodela na taj način je stabilnost očuvana. Ideja za proširivanje na više perioda leži na proširivanju Pendžerovog algoritma kojeg je dao Sundt. Naš cilj je da izračunamo funkciju generatrisa verovatnoće za gubitke sa gama raspodelom. Kako bi izračunali koeficijent stepenog reda koristićemo prvo logaritamsko razlaganje, a zatim ćemo na dobijeni oblik primeniti i eksponencijalno razlaganje u stepeni red pomoću Pendžerove rekurzije. I na taj način ćemo pokazati koliko je Pendžerova rekurzija značajna za matematičko modeliranje kreditnog rizika. Fiksiramo scenario $j \in \mathcal{J}$ i faktor rizika $k \in \{1, \ldots, K\}$. Definišemo

$$p_{j,k} = \frac{\overline{\lambda}_{j,k}}{\beta_k + \overline{\lambda}_{j,k}}$$

gde su $\beta_k > 0$ i $\overline{\lambda}_{j,k} \geq 0$.

Prvo ćemo razmatrati slučaj kada je $\overline{\lambda}_{j,k} > 0$. Tada je $p_{j,k} \in (0,1)$ i uzimamo slučajnu promenljivu $M_{j,k} \sim Log(p_j, k)$. Neka je $(Y_{j,k,n})_{n \in N}$ niz sa slučajnim vektorima u ${N_0}^d$ nezavisni od $M_{j,k}$ sa funkcijom generatrise verovatnoće $\varphi_{j,k}$ koju smo definisali ranije.

Možemo je zapisati i u sledećem obliku

$$\widetilde{\varphi}_{j,k}(s) = \sum_{\nu \in N_0} b_{j,k,\nu} s^{\nu} \quad s \in C^d, \|s\|_\infty \leq 1$$

slučajne sume u ${N_0}^d$,

$$S_{j,k} := \sum_{n=1}^{M_{j,k}} Y_{j,k,n}$$

koja se može zapisati i sa logaritmom

$$\widetilde{\varphi}_{j,k}(s) = \frac{log(1 - p_{j,k}\varphi_{j,k}(s))}{log(1 - p_{j,k})}, \quad s \in C^d, \ \|s\|_\infty \leq 1$$

i svaki koeficijent $\{b_{j,k,\nu}\}_{\nu \in {N_0}^d}$ je moguće izračunati na numerički stabilan način pomoću Pendžerove rekurzije za logaritamsku raspodelu.
Koristeći Pendžerov oblik za izračunavanje početne vrednosti ($p_0 = \frac{log(1-pP[X_1=0])}{log(1-p)}$) dobijamo da je

$$b_{j,k,0} = \frac{log(1 - p_{j,k}q_{j,k,0})}{log(1 - p_{j,k})},$$

i koristeći dalje rekurzivnu formulu
($p_n = \frac{1}{1-pP[X_1=0]}(P[X_1 = n]q_1 + \frac{p}{n_i}\sum_{j \in {N_0}^d, 0<j<n, j_i<n_i}(n_i - j_i)P[X_1 = j]p_{n-j})$) za svako $\nu \in {N_0}^d \backslash \{0\}$,

$$b_{j,k,\nu} = \frac{1}{1 - p_{j,k}q_{j,k,0}}(\frac{p_{j,k}}{-log(1 - p_{j,k})}q_{j,k,\nu} + \frac{p_{j,k}}{\nu_i} \sum_{n \in S_{j,k} n<\nu, n_i<\nu_i} (\nu_i - n_i)q_{j,k,n}b_{j,k,\nu-n}),$$

gde je $i \in \{1, \dots, \}$ tako da je i $\nu_i \neq 0$ i koristeći $p_{j,k}$ definisano na početku i $S_{j,k}$ možemo pokazati da je

$$1 - \overline{\lambda}_{j,k}\frac{\varphi_{j,k}(s) - 1}{\beta_k} = \beta_k + \overline{\lambda}_{j,k}\beta_k(1 - \frac{\overline{\lambda}_{j,k}}{\beta_k + \overline{\lambda}_{j,k}}\varphi_{j,k}(s)) = \frac{1}{1 - p_{j,k}}(1 - p_{j,k}\varphi_{j,k}(s)),$$

dalje koristiće logaritamski izraz ovo možemo zapisati u sledećem obliku

$$log(1 - \overline{\lambda}_{j,k}\frac{\varphi_{j,k}(s) - 1}{\beta_k}) = (\widetilde{\varphi}_{j,k}(s) - 1)log(1 - p_{j,k}).$$

U slučaju da je $\overline{\lambda}_{j,k} = 0$, tada je i $p_{j,k} = 0$ pa je odgovarajući logaritam jednak nuli. Da bi izbegli komplikaciju, definisaćemo da je $\widetilde{\varphi}_{j,k}(s) = 1$, za svako $s \in C^d$ i

$$b_{j,k,\nu} = \begin{cases} 0 & \text{za } \nu \in {N_0}^d \backslash \{0\} \\ 1 & \text{za } \nu = 0 \in {N_0}^d \end{cases} .$$

Sada zamenjujući poslednju jednakost u (5.5) iz ranijeg dela dobijamo da je

$$\varphi_{L,\gamma}(s) = C_\gamma \sum_{j \in \mathcal{J}} e^{(\overline{\lambda}_{j,0}(\varphi_{j,0}(s)-1) + \sum_{k=1}^{K}(\alpha_k+\gamma_k)(\widetilde{\varphi}_{j,k}(s)-1) log \frac{1}{1-p_{j,k}})} P[J=j] \quad s \in C^d, \|s\|_\infty \leq 1$$

i označavamo sa $(*)$.

5.3 Eksponencijalno razlaganje u stepeni red Pendžerovom rekurzijom

Kako bi odredili koeficijente stepenog reda iz prethodne jednakosti $(*)$ uz pomoću eksponencijalne funkcije definisaćemo prvo

$$\lambda_j = \overline{\lambda}_{j,0} + \sum_{k=1}^{K} (\alpha_k + \gamma_k) log \frac{1}{1-p_{j,k}}, \quad j \in \mathcal{J}$$

gde je $\alpha_k > 0$, $\overline{\lambda}_{j,0} \geq 0$ i $p_{j,k} \in [0,1)$ možemo primetiti da su u pitanju nenegativne vrednosti što nam omogućava numeričku stabilnost. Tada za svako $j \in \mathcal{J}$ i $\lambda_j > 0$ definišemo

$$\widetilde{\varphi}_j(s) = \frac{1}{\lambda_j}(\overline{\lambda}_{j,0}\varphi_{j,0}(s) + \sum_{k=1}^{K}(\alpha_k+\gamma_k)\widetilde{\varphi}_{j,k}(s) log \frac{1}{1-p_{j,k}}) \quad s \in C^d, \ \|s\|_\infty \leq 1$$

Možemo primetiti da je koeficijent stepenog reda

$$\widetilde{\varphi}_j(s) = \sum_{\nu \in N_0} c_{j,\nu} s^\nu \quad s \in C^d, \ \|s\|_\infty \leq 1$$

dat kao konveksna kombinacija odgovarajućih koeficijenata $\varphi_{j,0}$ i $\widetilde{\varphi}_{j,1}, \ldots, \widetilde{\varphi}_{j,K}$ što nam daje numeričku stabilnost. Eksplicitno,

$$c_{j,\nu} = \frac{1}{\lambda_j}(\overline{\lambda}_{j,0} q_{j,0,\nu} + \sum_{k=1}^{K}(\alpha_k+\gamma_k) b_{j,k,\nu} log \frac{1}{1-p_{j,k}}), \quad \nu \in {N_0}^d$$

Za svako $j \in \mathcal{J}$, $\lambda_j = 0$ definišemo $\widetilde{\varphi}_j(s) = 1$ za svako $s \in C^d$ i

$$c_{j,\nu} = \begin{cases} 0 & \text{za } \nu \in {N_0}^d \backslash \{0\} \\ 1 & \text{za } \nu = 0 \in {N_0}^d \end{cases} .$$

U svakom slučaju naša $\widetilde{\varphi}_j$ funkcija generatrise verovatnoće se može zapisati

$$\varphi_{L,\gamma}(s) = C_\gamma \sum_{j \in \mathcal{J}} e^{\lambda_j(\widetilde{\varphi}_j(s)-1)} P[J = j]$$

Fiksirajmo scenario $j \in \mathcal{J}$, neka je $M_j \sim Poason(\lambda_j)$ i neka je $\{Y_{j,k,n}\}_{n \in N}$ nezavisan niz sa istom raspodelom. Tada je raspodela funkcije generatrise verovatnoće ψ_j slučajne sume

$$S_j := \sum_{n=1}^{M_j} Y_{j,n}$$

data u sledećem obliku

$$\psi_j(s) = e^{\lambda_j(\widetilde{\varphi}_j(s)-1)}, \quad s \in C^d, \ \|s\|_\infty \leq 1$$

tako da ćemo koeficijent označiti sa $\{d_{j,\nu}\}_{\nu \in {N_0}^d}$, i može se izračunati na numerički stabilan način pomoću Pendžerove rekurzije za Poasonovu raspodelu. Koristeći Poasonovu raspodelu sa parametrom $\lambda \geq 0$, tada je prema Pendžeru $q_0 = e^{-\lambda}$ i

$$q_n = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda}{n} q_{n-1}, \quad n \in N.$$

Kako to pripada Pendžer $(0, \lambda, 0)$ klasi imamo da je $p_0 = e^{\lambda(P[X_1=0]-1)}$, pa odatle i naš koeficijent

$$d_{j,0} = e^{(\lambda_j(c_{j,0}-1))}$$

samim tim na osnovu opšteg oblika ($p_n = \frac{\lambda}{n_i} \sum_{j \in {N_0}^d, 0<j \leq n} j_i P[X_1 = j] p_{n-j}$) imamo da je

$$d_{j,\nu} = \frac{\lambda_j}{\nu_i} \sum_{n \in {N_0}^d, 0<n \leq \nu} n_i c_{j,n} d_{j,\nu-n}$$

gde je $i \in \{1, \ldots, d\}$ tako da je $\nu_i \neq 0$ sa λ_j i $\{c_{j,\nu}\}_{\nu \in {N_0}^d}$ dato ranije. Tada je težinska funkcija generatrise verovatnoće data sa

$$\varphi_{L,\gamma}(s) = C_\gamma \sum_{j \in \mathcal{J}} \psi_j(s) P[J = j], \quad s \in C^d, \ \|s\|_\infty \leq 1$$

Koeficijent stepenog reda je konveksna kombinacija odgovarajućih koeficijenata $\{\psi_j\}$ pomnoženo sa konstantom C_γ. Možemo zaključiti da je numerički stabilan, a u zapisu koeficijent je sledećeg oblika:

$$E[{R_1}^{\gamma_1}, \ldots, {R_K}^{\gamma_K} 1_{\{L=\nu\}}] = C_\gamma \sum_{j \in \mathcal{J}} d_{j,\nu} P[J = j], \quad \nu \in {N_0}^d$$

gde je $C_\gamma = \prod_{k=1}^{K} E[{R_k}^{\gamma_k}] = \prod_{k=1}^{K} \frac{\Gamma(\alpha_k + \gamma_k)}{{\beta_k}^{\gamma_k} \Gamma(\alpha_k)}$, a $\{d_{j,\nu}\}_{\nu \in N_0}$.

6

Mere rizika i rizika doprinosa

Znajući raspodelu za L, možemo izračunati meru rizika $\rho(L)$. $\rho(L)$ predstavlja iznos novca koji treba da se doda na rizik portfolija L da bi bio "prihvatljiv". Za Expected Shortfall(deficit) kao meru rizika, računaćemo takođe i rizik doprinosa u smislu kreditnog $rizika^+$. U nastavku možemo primetiti da će svi gubici biti pozitivnog znaka.

6.1 Kvantili i VaR

Definicija 6.1.1. Za realnu slučajnu promenljivu X i nivo $\delta \in (0,1)$ definišemo donji δ - kvantil od X kao:

$$q_\delta(X) = min\{x \in R | P[X \leq x] \geq \delta\}$$

i gornji δ - kvantil od X kao

$$q^\delta(X) = inf\{x \in R | P[X \leq x] > \delta\}.$$

Kako je raspodela funkcije $F_X(x) = P[X \leq x]$, $x \in R$ od X neprekidna sa desne strane, minimum koji definiše donji kvantil postoji. Ukoliko u nastavku ne budemo spomenuli precizno donji/gornji, uvek ćemo misliti na donji kvantil. Očigledno da će nam uvek važiti da je $q_\delta(X) \leq q^\delta(X)$.
Donji kvantil je najmanji prag takav da je $q_\delta(X) - X$ nenegativno sa verovatnoćom δ. U upravljanju finansijskim rizikom, donji kvantil $q_\delta(X)$ promenljive X se naziva Value at Risk(VaR) nivoa $1-\delta$ i koristi se kao sredstvo za kvantifikovanje rizika. Zapisujući $q_\delta(X)$ kao

$$q_\delta(X) = min\{x \in R | P[X > x] \leq 1 - \delta\},$$

vidimo da je $q_\delta(X)$ najmanji prag koji gubitak X može da premaši sa verovatnoćom najviše $1-\delta$.

Lema 6.1. *Fiksirajmo nivo $\delta \in (0,1)$. Neka je $\{X_n\}_{n\in N}$ niz realnih slučajnih promenljivih koje konvergiraju ka X u verovatnoći,*

$$lim_{n\to\infty} P[|X - X_n| \geq \varepsilon] = 0, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

(a) Donji δ - kvantil zadovoljava

$$liminf_{n\to\infty} q_\delta(X_n) \geq q_\delta(X).$$

(b) Gornji δ - kvantil zadovoljava

$$limsup_{n\to\infty} q^\delta(X_n) \leq q^\delta(X).$$

(c) Ako raspodela za X zadovoljava $P[X \leq x] > \delta$, za svako $x > q_\delta(X)$, što je ekvivalentno sa $q_\delta(X) = q^\delta(X)$, tada je

$$lim_{n\to\infty} q_\delta(X_n) = q_\delta(X)$$

i

$$lim_{n\to\infty} q_\delta(X_n) = q_\delta(X).$$

Dokaz:

(a) Ako je $x < y < q_\delta(X)$, tada je

$$P[X_n \leq x] \leq P[X \leq y] + \underbrace{P[|X - X_n| \geq y - x]}_{\to 0, kada\ \text{n}\to\infty},$$

odatle

$$limsup_{n\to\infty} P[X_n \leq x] \leq \gamma := p[X \leq y] < \delta$$

na osnovu definicije za $q_\delta(X)$. Dakle, $P[X_n \leq x] \leq \frac{(\delta+\gamma)}{2} < \delta$ za svako dovoljno veliko n, odatle je $q_\delta(X_n) \geq x$ i $liminf_{n\to\infty} q_\delta(X_n) \geq x$. Kako je $x < q_\delta(X)$ bilo proizvoljno, donja granica zadovoljava naše (a).

(b) Dokaz je sličan onom pod (a). Ako je $x > y > q^\delta(X)$, tada je

$$P[X_n \leq x] \geq P[|X - X_n| \geq x - y],$$

odatle

$$liminf_{n\to\infty} P[X_n \leq x] \geq \gamma := P[X \leq y] > \delta$$

na osnovu definicije za $q^\delta(X)$. Dakle, $P[X_n \leq x] \geq \frac{(\delta+\gamma)}{2} > \delta$ za dovoljno veliko $n \in N$, odatle je $q^\delta(X_n) \leq x$ i $limsup_{n\to\infty} q^\delta(X_n) \leq x$. Kako je $x > q^\delta(X)$ bilo proizvoljno, donja granica zadovoljava (b).
(c) sledi iz (a) i (b).

Uprkos na svoju široku upotrebu, Var nije pogodna mera rizika iz dva ekonomska razloga. Pre svega ona ne uzima u obzir veličine gubitaka koji se javljaju sa verovatnoćom najviše $1-\delta$, što znači da se zanemaruju rizici sa visokim efektima, ali malom verovatnoćom. Drugo, VaR nije subaditivan može se desiti $VaR(X) + VaR(Y) < VaR(X + Y)$ za promenljive X i Y, što će značiti da se diversifikacijom rizik povećava ukoliko se meri VaR-om.

Primer:(VaR nije subaditivan)

Razmotrimo kredit od 100 evra sa verovatnoćom neizmirivanja obaveze $p = 0.8\%$, koji dovodi do $VaR = 0$ na nivou 1%. Sa druge strane ako uzmemo u obzir dva nezavisna kredita od 50 evra svaki sa istom verovatnoćom $p = 0.8\%$, onda je verovatnoća od najmanje jedne neizmirene obaveze $2p - p^2 > 1.59\%$ i tako je VaR na nivou 1% jednak 50 evra. To znači da bi radije uzeli kredit od 100 evra kao sigurniju investiciju, što je u suprotnosti sa idejom deversifikacije.

6.2 Deficit

Definicija 6.2.1. Neka je X slučajna promenljiva. Tada je deficit(expected shortfall) pomenljive gubitka X na nivou $\delta \in (0, 1)$ definisan na sledeći način

$$ES_\delta[X] = \frac{E[X 1_{\{X > q_\delta(X)\}}] + q_\delta(X)(P[X \leq q_\delta(X)] - \delta)}{1 - \delta}$$

uz konvenciju da je $ES_\delta[X] := \infty$ ako je $E[X1_{\{X>q_\delta(X)\}}] = \infty$.

Primedba1': Ako je $P[X \le q_\delta(X)] = \delta$, npr. ako je funkcija raspodele od X takođe neprekidna sa leve strane u tački $x = q_\delta(X)$ onda se definicija svodi na jednostavan oblik

$$ES_\delta[X] = E[X|X > q_\delta(X)].$$

Primedba: (Korišćenje deficita sa gustinom)
Neka je X proizvoljna slučajna promenljiva. Na prostoru verovatnoće $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ definišemo $f_X : \Omega \to [0, \infty)$ sa

$$f_X = \frac{1_{\{X>q_\delta(X)\}} + \beta_X 1_{\{X=q_\delta(X)\}}}{1-\delta},$$

gde je konstanta β_X data sa

$$\beta_X = \begin{cases} \frac{P[X \le q_\delta(X)] - \delta}{P[X = q_\delta(X)]} & \text{ako } P[X = q_\delta(X)] > 0 \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

Na osnovu definicije donjeg kvantila sledi da $\beta_X \in [0, 1]$, odatle je f_X ograničen sa $\frac{1}{(1-\delta)}$. Primetimo da je

$$E[f_X] = \frac{1}{1-\delta}(P[X > q_\delta(X)] + \beta_X P[X = q_\delta(X)]) = 1,$$

odatle f_X predstavlja gustinu verovatnoće. I na osnovu same definicije deficita dobijamo da je

$$E[Xf_X] = \frac{E[X1_{\{X>q_\delta(X)\}}] + q_\delta(X)\beta_X P[X = q_\delta(X)]}{1-\delta} = ES_\delta[X].$$

6.2.1 Računanje deficita u kreditnom riziku

Kako je kreditni portfolio gubitka L, diskretna slučajna promenljiva, moramo primeniti komplikovaniju definiciju. Donji kvantil $q_\delta(L)$ i $P[L \le q_\delta(L)]$ možemo računati koristeći algoritam kreditnog $rizika^+$. Možemo primetiti da je

$$E[L1_{\{L>q_\delta(L)\}}] = E[L] - E[L1_{\{L\le q_\delta(L)\}}]$$

gde je $E[L]$ dato sa

$$E[L] = \sum_{i=1}^{m} E[L_i] = \sum_{g \in G} \sum_{k=0}^{K} w_{g,k} E[L_{g,k,1}]$$

i

$$E[L1_{\{L \leq q_\delta(L)\}}] = \sum_{l=1}^{q_\delta(L)} lP[L = l].$$

Ako je $E[L] = \infty$, tada je $ES_\delta[L] = \infty$. Ako je $E[L] < \infty$ tada se deficit $ES_\delta[L]$ iz definicije može računati koristeći uslove za raspodele L.

Napomena: (računanje kvantila u kreditnom $riziku^+$)
Za dati nivo $\delta \in (0,1)$ donji kvantil $q_\delta(L)$ gubitka portfolija L koji ima oblik

$$L := L_J = \sum_{j \in J} L_j 1_{J=j}$$

se u kreditnom $riziku^+$ može računati sabiranjem verovatnoće $P[L = l]$ za $l = 0, 1, 2, ...$ sve dok suma ne dostigne δ.

6.2.2 Teorijska svojstva deficita

Sledeća lema navodi važne osobine vezane za deficit. Biće nam potrebne dodatne notacije. Za nivo $\delta \in (0,1)$, i neka $\mathcal{F}_\delta$ označava skup svih gustina verovatnoće na prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ograničenih sa $\frac{1}{1-\delta}$. Za slučajnu promenljivu X definišemo

$$\mathcal{F}_{\delta,X} := \{f \in \mathcal{F}_\delta | E[X^+ f] < \infty \vee E[X^- f] < \infty\},$$

gde je $X^+ := max\{X, 0\}$ i $X^- := max\{-X, 0\}$ tako da je $X = X^+ - X^-$. Za gustinu $f \in \mathcal{F}_{\delta,X}$, očekivanje $E[Xf] = E[X^+ f] - E[X^- f]$ je dobro definisano u $[-\infty, \infty]$.

Lema 6.2. *Deficit na nivou $\delta \in (0,1)$ ima za sve slučajne promenljive X i Y sa realnom vrednošću sledeća svojstva:*
(a) Pozitivna homogenost: Ako je $\alpha > 0$, tada je $ES_\delta[\alpha X] = \alpha ES_\delta[X]$.
(b) Translaciona invarijantnost: Ako je $a \in R$, tada je $ES_\delta[X + a] = ES_\delta[X] + a$.

(c) Scenario reprezentacija:
(i)

$$ES_\delta[X] = sup_{f \in \mathcal{F}_\delta} E[Xf]$$

(ii) Ako je

$$E[X^+] < \infty,$$

tada je $ES_\delta[X] = sup_{f \in F_\delta} E[Xf]$

(d) Subaditivnost: $ES_\delta[X+Y] \leq ES_\delta[X] + ES_\delta[Y]$.
(e) Monotonost: Ako je $X \leq Y$ *, tada je* $ES_\delta[X] \leq ES_\delta[Y]$.
(f) Konveksnost: Ako je $\alpha \in (0,1)$*, tada je*

$$ES_\delta[\alpha X + (1-\alpha)Y] \leq \alpha ES_\delta[X] + (1-\alpha) ES_\delta[Y].$$

(g) Granice

$$q_\delta(X) \leq ES_\delta[X] \leq \frac{E[X^+]}{1-\delta}.$$

može se zapisati i u sledećem obliku

$$q_\delta(X) \leq ES_\delta[X] \leq q + \frac{E(X-q)^+}{1-\delta},$$

gde $q \in R$.
(h) Kvantili

$$ES_\delta[X] = \frac{1}{1-\delta} \int_{[\delta,1)} q_u(X) du.$$

(i) Neka je $\{X_n\}_{n \in N}$ *ograničen od dole, tj. postoji konstanta* $a \in [0, \infty)$ *tako da je* $X_n \geq -a$ *za svako* $n \in N$*. Tada* $X := liminf_{n \to \infty} X_n$ *zadovoljava*

$$ES_\delta[X] \leq liminf_{n \to \infty} ES_\delta[X_n].$$

(j) Neka je $\{X_n\}_{n \in N}$ *ograničen od dole i konvergira u verovatnoći ka slučajnoj promenljivi* X*. Tada takođe važi:*

$$ES_\delta[X] \leq liminf_{n \to \infty} ES_\delta[X_n].$$

Posledica: Za svaku realnu slučajnu promenljivu X, preslikavanje

$$\delta \in (0,1) \to ES_\delta[X] \in R \bigcup \{\infty\}$$

je neprekidno i neopadajuće.

Dokaz(posledice):
Neprekidnost sledi na osnovu kvantila u delu (h). Za $\delta \leq \delta'$ imamo da je $\mathcal{F}_{\delta,X} \subset \mathcal{F}_{\delta',X}$ što implicira da je $ES_\delta[X] \leq ES_{\delta'}[X]$ na osnovu scenario reprezentacija pod (c).

Primedba: Osobine prethodne leme se mogu objasniti na sledeći način:
(a) Ako su svi gubici smanjeni, onda su i rizik i potreban kapital takođe smanjeni na isti način.
(b) Ukoliko se doda konstantan gubitak, odgovarajući iznos kapitala je potreban da bi se rizik učinio prihvatljivim.
(c) Ako se verovatnoća događaja poveća na najviši faktor $\frac{1}{1-\delta}$, tada $ES_\delta[X]$ predstavlja najgori mogući očekivani gubitak.
(d),(f) Diversifikacijom se ne povećava rizik.
(e) Za manje gubitaka potrebno manje kapitala.
(h) Predstavljanje kvantila podrazumeva da deficit stalno varira sa nivoom δ, dok suprotno za kvantile $\delta \in (0,1) \to q_\delta(X)$ koji mogu i skočiti. Za diskretne raspodele kao što je raspodela gubitka u kreditnom riziku, kvantili moraju da skoče.

Dokaz leme:

(a) dokaz sledi na osnovu homogenosti očekivanja korišćenjem da je

$$q_\delta(\alpha X) = \alpha q_\delta(X).$$

(b) važi zbog invarijantnosti očekivanja i korišćenjem da je $q_\delta(X+a) = q_\delta(X) + a$.
(c) Supremum je gornja procena i (i) važi u slučaju kada je $ES_\delta[X] = \infty$. Ako je $ES_\delta[X] < \infty$ tada je obavezno $E[X^+] < \infty$, pa je odatle $\mathcal{F}_{\delta,X} = \mathcal{F}_\delta$. Uzimajući u obzir da $f \in \mathcal{F}_\delta$ i $E[Xf] > -\infty$. Dobijamo da je $E[f - f_X] = 0$, odatle

$$E[Xf] - E[Xf_X] = E[(X - q_\delta(X))(f - f_X)] =$$
$$E[(X - q_\delta(X))(f - f_X)1_{\{X<q_\delta(X)\}}] + E[(X - q_\delta(X))(f - f_X)1_{\{X<q_\delta(X)\}}] \leq 0,$$

što znači da je supremum jednak sa $E[Xf_X]$.
(d) Dovoljno je da posmatramo slučaj kada je $ES_\delta[X] < \infty$ i $ES_\delta[Y] < \infty$. Tada su $E[X^+]$,$E[Y^+]$ i $E[(X+Y)^+]$ konačni i koristeći (c) pod (ii) dobijamo

$$ES_\delta[X+Y] = sup_{f\in\mathcal{F}_\delta}E[(X+Y)f] \leq sup_{f\in\mathcal{F}_\delta}E[Xf]+sup_{f\in\mathcal{F}_\delta}E[Yf] = ES_\delta[X]+ES_\delta[Y].$$

(e) Primetimo da je $ES_\delta[X] \leq ES_\delta[X-Y]+ES_\delta[Y]$ na osnovu (d). Za $Z := X-Y \leq 0$, imamo da je $ES_\delta[Z] \leq 0$ na osnovu definicije zbog toga $E[Z1_{\{Z>q_\delta(Z)\}}] \leq 0$ i $q_\delta(Z) \leq 0$ za nepozitivne slučajne promenljive i $P[Z \leq q_\delta(Z)] \geq \delta$ na osnovu definicije donjih kvantila.
Na osnovu (d) i (a).
(g) Donja granica sledi direktno iz definicije. Monotonost (e) implicira

$$ES_\delta[X] \leq ES_\delta[X^+].$$

Koristeći scenario (c) i činjenicu da je svaka gustina od f ograničena sa $\frac{1}{1-\delta}$.
(h) Proširujući prostor verovatnoće možemo pretpostaviti postojanje slučajne promenljive U na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ koja ima uniformnu raspodelu sa $(0,1)$, što znači da je $P[U \leq u] = u$, za svako $u \in [0,1]$. Neka $q_U(X)$ označava slučajni kvantil $\omega \in \Omega \to q_{U(\omega)}(X)$. Za svako $x \in R$ i $u \in (0,1)$ dobijamo

$$q_u(X) \leq x \Rightarrow P[X \leq x] \geq u$$

i $q_u(X) > x \Rightarrow P[X \leq x] < u$
na osnovu definicije donjeg kvantila, odatle

$$P[q_U(X) \leq x] = P[U \leq P[X \leq x]] = P[X \leq x]$$

za svako $x \in R$, što znači da $q_U(X)$ i X imaju istu raspodelu.
Definišimo $\delta' = P[X \leq q_\delta(X)]$. Primetimo da je $\delta' \geq \delta$ i $q_u(X) = q_\delta(X)$ za svako $u \in [\delta, \delta']$. Koristeći gornju implikaciju za $x = q_\delta(X)$ pokazuje se da je $\{U > \delta'\} = \{q_U(X) > q_\delta(X)\}$. Odatle imamo,

$$\begin{aligned}\int_{[\delta,1)} q_u(X)du = \int_{(\delta',1)} q_u(X)du + \int_{[\delta,\delta']} q_u(X)du = \\ = E[q_U(X)1_{\{U>\delta'\}}] + q_\delta(X)(\delta'-\delta) = \\ = E[X1_{\{X>q_\delta(X)\}}] + q_\delta(X)(P[X \leq q_\delta(X)] - \delta).\end{aligned}$$

Deljenjem sa $1-\delta$ dobijamo ono što treba po definiciji.
(i) Na osnovu invarijantnosti pod (b), možemo pretpostaviti bez gubitka opštosti da je svaki X_n nenegativan. Koristeći gustinu f_X za deficit i primenom Fatuove leme na niz $\{X_n f_X\}_{n\in N}$ kao i senario pod (c) ,dobijamo

$$ES_\delta[X] = E[Xf_X] \leq liminf_{n\to\infty} E[X_n f_X].$$

(j) Možemo pretpostaviti da $\{ES_\delta[X_n]\}_{n\in N}$ konvergira ka svom liminf(najmanjoj tački nagomilavanja). Takodje možemo pretpostaviti da $\{X_n\}_{n\in N}$ konvergira skoro sigurno ka X. Tako da sada iz (i) sledi (j).

Napomena:

Lema 6.3. *Neka $f_1, f_2, f_3, ...$ predstavlja nenegativan niz merljivih funkcija na prostoru (C, Σ, μ). Definišimo sada funkciju $f : S \to [0, \infty]$ koja ima oblik*

$$f(s) = liminf_{n\to\infty} f_n(s), \quad s \in S.$$

Tada je f merljivo i važi

$$\int_S f d\mu \leq liminf_{n\to\infty} \int_S f_n d\mu.$$

6.2.3 Doprinosi za deficit

Ako se rizik i potrebni rizik kapitala za portfolio gubitka računaju pomoću deficita, tada dolazimo do pitanja koliko individualna komponenta doprinosi riziku čitavog portfolija. Neka $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0(\Omega, \mathcal{A}, P)$ predstavlja vektorski prostor svih slučajnih promenljivih $X : \Omega \to R$ na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{L}, P)$. Neka $\mathcal{L}_1{}^-(P)$ označava konus od $X \in \mathcal{L}_0(P)$, za koje je negativni deo $X^- = max\{0, -X\}$ P-integrabilno. Neka sada $\mathcal{L}_1(P)$ označava vektorski prostor svih P-integrabilnih $X \in \mathcal{L}_0(P)$.
Dalje, ako sa $Z \in \mathcal{L}_0(P)$ označimo portfolio gubitka i $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{L}_1{}^-(P)$ sa $X_1 + \cdots + X_n = Z$ označavamo gubitke od n podportfolija i u tom slučaju možemo postaviti pitanje, na koji način treba rasporediti rizični kapital $ES_\delta[Z]$ na n podportfolija na fer i riziko adekvatan način.

Definicija 6.2.2. (Raspodela rizičnog kapitala uz pomoć deficita)
Za portfolio gubitka $Z \in \mathcal{L}_0(P)$ i za nivo $\delta \in (0, 1)$, posmatrajmo podportfolio

$X \in \mathcal{L}_0(P)$ sa $X1_{\{Z \geq q_\delta(Z)\}} \in \mathcal{L}_1{}^-(P)$. Tada se doprinos deficita za podportfolio gubitka X ka Z na nivou δ definiše na sledeći način:

$$ES_\delta[X, Z] = \frac{E[X1_{\{Z > q_\delta(Z)\}}] + \beta_Z E[X1_{\{Z = q_\delta(Z)\}}]}{1 - \delta}$$

gde β_Z ima sledeći oblik

$$\beta_Z = \begin{cases} \frac{P[Z \leq q_\delta(Z)] - \delta}{P[Z = q_\delta(Z)]} & \text{za } P[Z = q_\delta(Z)] > 0, \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

Primedba1: Možemo primetiti da je $ES_\delta[X, Z] = \infty$ moguće i da je u tom slučaju $X1_{\{Z \geq q_\delta(Z)\}} \in \mathcal{L}_1{}^-(P)$ zadovoljeno za sve $X \in \mathcal{L}_1{}^-(P)$.

Primedba2: Sa gustinom f_Z definisanom na sledeći način:

$$f_Z = \frac{1_{\{X > q_\delta(X)\}} + \beta_X 1_{\{X = q_\delta(X)\}}}{1 - \delta},$$

dobijamo da je $ES_\delta[X, Z] = E[X f_Z]$.

6.2.4 Teorijska svojstva

Raspodela rizičnog kapitala pomoću deficita ima niz dobrih osobina koje ćemo predstaviti sledećom lemom.

Lema 6.4. *Doprinos deficita na nivou $\delta \in (0, 1)$, za sve $X, Y \in \mathcal{L}_1{}^-(P)$ i $Z \in \mathcal{L}_0(P)$ ima sledeće osobine:*

(a) Konzistentnost sa deficitom: $ES_\delta[Z, Z] = ES_\delta[Z]$.
(b) Diversifikacija: $ES_\delta[X, Z] \leq ES_\delta[X, X]$.
(c) Linearnost: za sve $\alpha, \beta > 0$,

$$ES_\delta[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha ES_\delta[X, Z] + \beta ES_\delta[Y, Z].$$

U slučaju da $X, Y \in \mathcal{L}_1(P)$, data jednakost važi za sve $\alpha, \beta \in R$.
(d) Translatorna invarijantnost: Ako $a \in R$, tada je

$$ES_\delta[X + a, Z] = ES_\delta[X, Z] + a.$$

(e) Monotonost: Ako je $X \leq Y$, tada je $ES_\delta[X, Z] \leq ES_\delta[Y, Z]$.
(f) Nezavisnost: Ako su X i Z nezavisni, tada je $ES_\delta[X, Z] = E[X]$.
(g) Ivarijantnost portfolija: $ES_\delta[X, \alpha Z] = ES_\delta[X, Z]$, za svako $\alpha > 0$.
(h) Neprekidnost podportfolija: Ako $Y \in \mathcal{L}_1(P)$, tada

$$|ES_\delta[X, Z] - ES_\delta[Y, Z]| \leq ES_\delta[|X - Y|, Z] \leq \frac{E[|X - Y|]}{1 - \delta}.$$

(i) Neprekidnost portfolija: Pretpostavimo da $X \in \mathcal{L}_1(P)$. Ako je $P[Z \leq q_\delta(Z)] = \delta$ ili ako je X skoro sigurno konstantno na $\{Z = q_\delta(Z)\}$, tada je raspodela kapitala za X uz pomoć deficita na nivou δ neprekidna za Z, tj. za svaki niz $\{Z_n\}_{n \in N} \subset \mathcal{L}_0(P)$ konvergira ka Z u verovatnoći,

$$lim_{n \to \infty} ES_\delta[X, Z_n] = ES_\delta[X, Z].$$

(j) Predstavljanje doprinosa deficita pomoću izvoda po pravcu: Ako je raspodela kapitala za $X \in \mathcal{L}_1(P)$ pomoću deficita neprekidna na $Z \in \mathcal{L}_1(P)$ kao što je pod (i), tada je

$$ES_\delta[X, Z] = lim_{\varepsilon \to 0} \frac{ES_\delta[Z + \varepsilon X] - ES_\delta[Z]}{\varepsilon}.$$

Primedba: Osobina (b) nam pokazuje da ukoliko posmatramo X kao podportfolio bilo kog portfolija Z tada nam nije potreban nijedan drugi rizični kapital već je dovoljan onaj koji je sadržan u sebi. Što znači da diversifikacija ne povećava rizični kapital.

Primer: Ovim primerom ćemo pokazati da (i) i (j) ne važe za svako Z. Posmatramo za $\Omega \in \{0, 1\}$, $P[\{0\}] = \delta$ gde su proizvoljne promenljive date sa $X\omega = \omega$ i $Z(\omega) = 0$ za svako $\omega \in \Omega$. Definišimo $Z_\varepsilon = \varepsilon X$. Tada $Z_\varepsilon \to Z$, $\varepsilon \to 0$. Dalje je, na osnovu nezavisnosti $ES_\delta[X, Z] = E[X] = 1 - \delta$, na osnovu pod (g) imamo $ES_\delta[X, Z_\varepsilon] = ES_\delta[X, X] = ES_\delta[X] = 1$, za svako $\varepsilon > 0$ i konzistencije (a) kao i primedbe1' koristeći da je $q_\delta(X) = 0$. Kako je $ES_\delta[Z] = 0$ i $ES_\delta[Z + \varepsilon X] = \varepsilon ES_\delta[X] = \varepsilon$, tada vidimo da je $1 \neq 1 - \delta = ES_\delta[X, Z]$.

Dokaz leme: (a) Na osnovu oblika $E[X f_X] = ES_\delta[X]$ koji smo dobili na samom početku priče o deficitu kao i na osnovu primedbe2 važi da je:

$$ES_\delta[Z, Z] = E[Z f_Z] = ES_\delta[Z].$$

(b) Na osnovu primedbe2, Leme 6.2 (c) i pod (a) važi da je

$$ES_\delta[X,Z] = E[Xf_Z] \leq sup_{f\in\mathcal{F}_\delta} E[Xf] = ES_\delta[X] = ES_\delta[X,X].$$

(c) i (d) nam proizilazi na osnovu primedbe2 i koristeći linearnost očekivanja.
(e) Koristeći primedbu2 i $ES_\delta[X,Z] = E[Xf_Z] \leq E[Yf_Z] = ES_\delta[Y,Z]$.
(f) Na osnovu primedbe2, $ES_\delta[X,Z] = E[Xf_Z] = E[X]E[f_Z] = E[X]$.
(g) Kako je $q_\delta(\alpha Z) = \alpha q_\delta(Z)$, takođe za gustinu važi $f_{\alpha Z} = f_Z$. Odatle na osnovu primedbe2,

$$ES_\delta[X,\alpha Z] = E[Xf_{\alpha Z}] = E[Xf_Z] = ES_\delta[X,Z].$$

(h) Za prvi deo nejednakosti koristimo linearnost (c) i monotonost (e), dok za drugi deo nejednakosti koristimo primedbu2 i gornju granicu $\frac{1}{1-\delta}$ za gustinu f_Z.
(i) Kako je dokaz dugačak, najpre ćemo smanjiti problem. Za dato $X \in \mathcal{L}_1(P)$ i $\varepsilon > 0$, tada na osnovu teoreme o konvergenciji postoji konstanta M tako da ograničena slučajna promenljiva $X_\varepsilon := X1_{\{|X|\leq M\}}$ zadovoljava da je $E[|X-X_\varepsilon|] = E[|X|1_{\{|X|>M\}}] \leq \varepsilon$. Na osnovu neprekidnosti podportfolija pod (h) dovoljno je pokazati da je

$$lim_{n\to\infty} ES_\delta[X,Z_n] = ES_\delta[X,Z].$$

za sve $X \in \mathcal{L}_1(P)$.
Kako bi dalje pojednostavili za kvantile, definisaćemo $q = q_\delta(Z)$ i $q_n = q_\delta(Z_n)$. Bez gubitka opštosti možemo pretpostaviti da je $E[X1_{\{Z=q\}}] = 0$, zbog toga u slučaju da je $P[Z=q] > 0$ možemo koristiti invarijantnost pod (d), prebaciti na $X' := X - a$ sa $a := E[X|Z=q]$. Što pojednostavljuje naš oblik definicije. Na osnovu linearnosti pod (c), možemo ograničiti našu pažnju na one $X \in \mathcal{L}_1(P)$ koje su ograničene sa $1-\delta$.
Za $\varepsilon > 0$, postavimo $\eta > 0$ i $\eta_\varepsilon \in N$. Na osnovu neprekidnosti sa desne strane funkcije raspodele za $|Z-q|$, tada postoji $\eta > 0$ tako da je

$$P[0 < |Z-q| < 2\eta] \leq \varepsilon.$$

Definisaćemo $q^- = q - 2\eta$ i $q^+ = q + 2\eta$. Kako $\{Z_n\}_{n\in N}$ konvergira ka Z, tada postoji $n_\varepsilon \in N$ tako da je

$$P[|Z-Z_n| \geq \eta] \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq n_\varepsilon$$

i na osnovu leme 6.1 (a),

$$q_n \geq q - \eta, \quad \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Pokazaćemo koristeći slučaj $q_n \leq q + \eta$ i $q_n > q + \eta$ da je

$$|ES_\delta[X, Z_n] - ES_\delta[X, Z]| \leq 6\varepsilon, \quad \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Kako je $\varepsilon > 0$ proizvoljno, tada nas prethodna nejednakost dovodi do željenog rezultata. Primetimo da je

$$E[|1_A - 1_B|] = P[A \bigcap B^c] + P[A^c \bigcap B], \quad \forall A, B \in \mathcal{A}.$$

Prvi slučaj: Dokaz prethodne nejednakosti za slučaj kada je $q_n > q + \eta$ je lakši i nisu potrebne dodatne pretpostavke u odnosu na (i). Primetimo da je

$$\begin{aligned}(1 - \beta_{Z_n})E[1_{\{Z_n = q_n\}}] = \delta - P[Z_n < q_n] &\leq P[Z \leq q] - P[Z_n < q_n] \\ &\leq P[Z \leq q, Z_n \geq q_n] \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Podelom $\{Z_n \geq q_n\}$, dobijamo da je

$$1 - \delta \leq P[Z_n \geq q_n] = P\underbrace{[Z > q, Z_n \geq q_n]}_{=:A} + P\underbrace{\overbrace{[Z \leq q, Z_n \geq q_n]}^{=:B}}_{\leq \varepsilon},$$

odatle je $P[A] \geq 1 - \delta - \varepsilon$. Podelom $\{Z > q\}$ imamo

$$1 - \delta \geq P[Z > q] = P[A] + P\underbrace{[Z > q, Z_n < q_n]}_{=:C},$$

tako je $P[C] \leq \varepsilon$. Konačno koristeći dati oblik definicije($ES_\delta[X, Z] = \frac{E[X1_{\{Z > q_\delta(Z)\}}] + \beta_Z E[X1_{\{Z = q_\delta(Z)\}}]}{1-\delta}$), $E[X1_{\{Z_n = q_n\}}] = 0$ i $||X||_\infty \leq q - \delta$,

$$|ES_\delta[X, Z_n] - ES_\delta[X, Z]| \leq \underbrace{(1 - \beta_{Z_n})E[1_{\{Z_n = q_n\}}]}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{E[|1_{\{Z_n \geq q_n\}}|]}_{=P[B]+P[C]} \leq 3\varepsilon,$$

time smo pokazali da je

$$|ES_\delta[X, Z_n] - ES_\delta[X, Z]| \leq 6\varepsilon, \quad \forall n \geq n_\varepsilon.$$

za slučaj kada je $q_n > q + \eta$.
Drugi slučaj: Sada pokazujemo $|ES_\delta[X, Z_n] - ES_\delta[X, Z]| \leq 6\varepsilon$ kada je u pitanju slučaj gde je $q_n \leq q + \eta$. Definišimo $E = \{Z > q, Z_n \leq q_n\}$ i $F = \{Z \leq q, Z_n > q_n\}$. Posmatramo da je

$$P[E] = \underbrace{P[q < Z < q^+, Z_n \leq q_n]}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{P[Z \geq q^+, Z_n \leq q_n]}_{\leq \varepsilon} \leq 2\varepsilon.$$

Drugi slučaj (a): Pretpostavimo da je $P[Z \leq q] = \delta$ zadovoljeno. Podelom $\{Z_n \leq q_n\}$, dobijamo

$$\delta \leq P[Z_n \leq q_n] = P\underbrace{[Z \leq q, Z_n \leq q_n]}_{=:D} + P[E],$$

na osnovu gornje dve nejednakosti vidimo da je $P[D] \geq \delta - 2\epsilon$. Podelom $\{Z \leq q\}$

$$\delta = P[Z \leq q] = P[D] + P[F],$$

tako je $P[D] \leq \delta$ i $P[F] \leq 2\epsilon$. Malo dalje kada zapišemo koristeći prethodno

$$\beta_{Z_n} E[1_{\{Z_n = q_n\}}] = P[Z_n \leq q_n] - \delta = P[D] + P[E] - \delta \leq 2\epsilon.$$

Konačno koristeći početni oblik dat u definiciji, $E[X 1_{\{Z=q\}}] = 0$ i $||X||_\infty \leq 1 - \delta$,

$$|ES_\delta[X, Z_n] - ES_\delta[X, Z]| \leq \underbrace{\beta_{Z_n} E[1_{\{Z_n = q_n\}}]}_{\leq 2\varepsilon} + \underbrace{E[1_{\{Z_n > q_n\}} - 1_{\{Z > q\}}|]}_{=P[E]+P[F] \leq 4\varepsilon} \leq 6\varepsilon,$$

time smo pokazali ono što smo trebali za drugi slučaj pod (a).

Drugi slučaj (b): Neka je sada X konstanta na $\{Z = q\}$. Tada iz $E[X 1_{\{Z=q\}}] = 0$ sledi da je $E[|X| 1_{\{Z=q, Z_n = q_n\}}] = 0$ i $E[|X| 1_{\{Z=q, Z_n > q_n\}}] = 0$. Tako da je

$$\begin{aligned} \frac{E[|X| 1_{\{Z_n = q_n\}}]}{1 - \delta} &= \frac{E[|X| 1_{\{Z \neq q, Z_n = q_n\}}]}{1 - \delta} \leq P[Z \neq q, Z_n = q_n] \\ &\leq \underbrace{P[0 < |Z - q| < 2\eta]}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{P[|Z - q| \geq 2\eta, Z_n = q_n]}_{\leq \varepsilon} \leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

i

$$\frac{E[|X|1_F]}{1-\delta} \leq P[Z < q, Z_n > q_n] = \underbrace{P[q^- < Z < q, Z_n > q_n]}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{P[Z \leq q^-, Z_n > q_n]}_{\leq \varepsilon} \leq 2\varepsilon$$

Sada koristeći početnu definiciju 6.2.2 , $\beta_{Z_n} \in [0,1]$, $E[X1_{\{Z=q\}}] = 0$, i $||X||_\infty \leq 1-\delta$,

$$|ES_\delta[X, Z_n] - ES_\delta[X, Z]| \leq \underbrace{\frac{E[|X|1_{\{Z_n=q_n\}}]}{1-\delta}}_{\leq 2\varepsilon} + \underbrace{\frac{E[|X|1_E]}{1-\delta}}_{\leq 2\varepsilon} + \underbrace{\frac{E[|X|1_F]}{1-\delta}}_{\leq 2\varepsilon} \leq 6\varepsilon,$$

time je pokazano i za drugi slučaj pod (b).

(j) Neka je $\varepsilon > 0$. Na osnovu konzistencije (a), diversifikacije (b) i linearnosti (c),

$$ES_\delta[Z + \varepsilon X] = ES_\delta[Z + \varepsilon X, Z + \varepsilon X] \geq ES_\delta[Z + \varepsilon X, Z] = ES_\delta[Z] + \varepsilon ES_\delta[X, Z],$$

odakle je

$$\frac{ES_\delta[Z + \varepsilon X] - ES_\delta[Z]}{\varepsilon} \geq ES_\delta[X, Z].$$

Slično,

$$ES_\delta[Z] = ES_\delta[Z, Z] \geq ES_\delta[Z, Z + \varepsilon X] = ES_\delta[Z + \varepsilon X] - \varepsilon ES_\delta[X, Z + \varepsilon X],$$

odakle je

$$ES_\delta[X, Z + \varepsilon X] \geq \frac{ES_\delta[Z + \varepsilon X] - ES_\delta[Z]}{\varepsilon}.$$

Kako se za raspodelu kapitala X pomoću deficita pretpostavlja da je neprekidna u Z,

$$ES_\delta[X, Z] = lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{ES_\delta[Z + \varepsilon X] - ES_\delta[Z]}{\varepsilon}.$$

U slučaju da $\varepsilon \nearrow 0$, treba primeniti ovaj rezultat za $\varepsilon' = -\varepsilon$ i $X' = -X$ i koristimo da je $-ES_\delta[X', Z] = ES_\delta[X, Z]$ kako bi dobili da je

$$ES_\delta[X, Z] = lim_{\varepsilon \to 0} \frac{ES_\delta[Z + \varepsilon X] - ES_\delta[Z]}{\varepsilon}.$$

6.2.5 Izračunavanje doprinosa rizika u kreditnom riziku

Sada ćemo iskoristiti ideju o raspodeli rizičnog kapital pomoću deficita za kreditni portfolio gubitka L datog sa

$$L := L_J = \sum_{j \in J} L_j 1_{\{J=j\}}.$$

Ako je $E[L] < \infty$ tada definicija 6.2.2 daje

$$ES_\delta[L_{g,i,k}, L] = \frac{E[L_{g,i,k} 1_{\{L > q_\delta(L)\}}] + \beta_L E[L_{g,i,k} 1_{\{L = q_\delta(L)\}}]}{1 - \delta}$$

kao doprinos koji se pripisuje obvezniku $i \in \{1, \dots, m\}$ grupe $g \in G_i$ i riziku $k \in \{0, \dots, K\}$ za deficit $ES_\delta[L]$. Kako L ima diskretnu raspodelu, $P[L = q_\delta(L)] = 0$ nije moguće zbog definicije za $q_\delta(L)$. Primetimo da na osnovu konzistencije i linearnosti date prethodnom lemom (a) i (c),

$$ES_\delta[L] = ES_\delta[L, L] = \sum_{i=1}^{m} \sum_{g \in G_i} \sum_{k=0}^{K} ES_\delta[L_{g,i,k}, L],$$

Kako je

$$E[L_{g,i,k} 1_{\{L > q_\delta(L)\}}] = \underbrace{E[L_{g,i,k}]}_{= \lambda_g w_{g,k} E[L_{g,i,k,1}]} - E[L_{g,i,k} 1_{\{L \leq q_\delta(L)\}}],$$

potrebno je da izračunamo $E[L_{g,i,k} 1_{\{L=l\}}]$ za $l \in \{0, 1, \dots, q_\delta(L)\}$. To se može uraditi pomoću leme koju je formulisao Tasche.

Lema 6.5. *Za svakog obveznika $i \in \{1, \dots, m\}$, svaku grupu $g \in G_i$ i ukupan gubitak $l \in N_0$,*

$$E[L_{g,i,0} 1_{\{L=l\}}] = \lambda_g w_{g,0} \sum_{\nu=1}^{l} E[L_{g,i,0,1} 1_{\{L_{g,0,1} = \nu\}}] P[L = l - \nu]$$

i, za svaki rizik $k \in \{1, \ldots, K\}$,

$$E[L_{g,i,k} 1_{\{L=l\}}] = \lambda_g w_{g,k} \sum_{\nu=1}^{l} E[L_{g,i,k,1} 1_{\{L_{g,k,1}=\nu\}}] E[\Lambda_k 1_{\{L=l-\nu\}}].$$

Primedba: Za svakog obveznika $i \in \{1, \ldots, m\}$, svaku grupu $g \in G_i$, svaki rizik $k \in \{0, \ldots, K\}$ i svaki gubitak $\nu \in N_0$, na osnovu ranijih pretpostavki dobijamo sledeći oblik:

$$E[L_{g,i,k,1} 1_{\{L_{g,k,1}=\nu\}}] = \sum_{\mu=(\mu_j)_{j \in g} \in {N_0}^g} \mu_i \underbrace{P[L_{g,j,k,1} = \mu_j \forall j \in g]}_{=q_{g,k,\mu}},$$

što se može izračunati direktno iz ulaznih podataka i to na numerički stabilan način, pošto se samo negativni brojevi množe i dodaju.
(a) U slučaju kada je $g = \{i\}$, što je oblik klasičnog kreditnog rizika tada se prethodni oblik može zapisati jednostavnije

$$E[L_{g,i,k,1} 1_{\{L_{g,k,1}=\nu\}}] = \nu q_{g,k,\nu}.$$

(b) Ako se grupa gubitka ν pripisuje na deterministički način svojim članovima tada imamo oblik

$$E[L_{g,i,k,1} 1_{\{L_{g,k,1}=\nu\}}] = h_{g,i,k}(\nu) g^s_{g,k,\nu}.$$

(c) Na osnovu linearnosti očekivanja imamo,

$$\nu q^s_{g,k,\nu} = E[L_{g,k,1} 1_{\{L_{g,k,1}=\nu\}}] = \sum_{i \in g} E[L_{g,i,k,1} 1_{\{L_{g,k,1}=\nu\}}].$$

Ukoliko su $\{L_{g,i,k,1}\}_{i \in g}$ zamenljivi tada su sva očekivanja sa desne strane prethodne jednakosti jednaka i

$$E[L_{g,i,k,1} 1_{\{L_{g,k,1}=\nu\}}] = \frac{\nu}{|g|} q^s_{g,k,\nu}, \quad \forall i \in g.$$

Dokaz leme: Fiksirajmo rizik $k \in \{0, \ldots, K\}$, obveznika $i \in \{1, \ldots, m\}$ i grupu $g \in G_i$ koja sadrži i. Podsetimo se da je $L_{g,k} = \sum_{n=1}^{N_{g,k}} L_{g,k,n}$ i primetimo da je $L_{g,k} = 0$ ako je $N_{g,k} = 0$. Dalje ako je $L = l$, tada nijedan gubitak ne može biti veći od l. Definišimo

$M = L - L_{g,k}$ kao sumu svih gubitaka koji ne dolaze od grupe g zbog rizika k. Tako da za svako $\mu \in N$ i $n \in \{1, \ldots, \mu\}$ definišemo

$$M_{\mu,n} = \sum_{r=1 r\neq n}^{\mu} L_{g,k,r}$$

kao sumu prvih μ gubitaka grupe g zbog rizika k izostavljajući n-ti gubitak. Tada je

$$E[L_{g,i,k}1_{\{L=l\}}] = \sum_{\mu=1}^{\infty} E[\sum_{n=1}^{\mu} L_{g,i,k,n}1_{\{L=l,N_{g,k}=\mu\}}]$$
$$= \sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\mu}\sum_{\nu=1}^{l} E[L_{g,i,k,n}1_{\{\underbrace{L=l,N_{g,k}=\mu}_{=\{M+M_{\mu,n}+L_{g,k,n}=l,N_{g,k}=\mu\}},L_{g,k,n}=\nu\}}].$$

Na osnovu ranijih pretpostavki znamo da proizvoljni vektor $(L_{g,i,k,n})_{i\in g}$ zajedno sa sumom $L_{g,k,n}$ je nezavisan zajedno sa M, $M_{\mu,n}$ i $N_{g,k}$, odakle dobijamo da je

$$E[L_{g,i,k,n}1_{\{M+M_{\mu,n}+L_{g,k,n}=l,N_{g,k}=\mu,L_{g,k,n}=\nu\}}] = E[L_{g,i,k,n}1_{\{L_{g,k,n}\}}]P[M+M_{\mu,n} = l-\nu, N_{g,k} = \mu].$$

Na osnovu ranijih pretpostavki vektori gubitka $(L_{g,i,k,n})_{i\in g}$ i $(L_{g,i,k,1})_{i\in g}$ imaju istu raspodelu, pa na osnovu toga možemo zameniti n sa 1 u očekivanju sa desne strane. Takođe ista pretpostavka kaže da je $M_{\mu,n}$ nezavisno sa $(M, N_{g,k})$ i da $M_{\mu,1}, \ldots, M_{\mu,\mu}$ imaju istu raspodelu, pa odatle za svako $n \in \{1, \ldots, \mu\}$,

$$P[M + M_{\mu,n} = l - \nu, N_{g,k} = \mu] = P[M + M_{\mu,\mu} = l - \nu, N_{g,k} = \mu].$$

Sada posmatrajući slučaj gde $k \in \{1, \ldots, K\}$. Na osnovu pretpostavke o uslovnoj nezavisnosti kao i uslovnoj Poasonovoj raspodeli,

$$P[M + M_{\mu,\mu} = l - \nu, N_{g,k} = \mu] = E[P[M + M_{\mu,\mu} = l - \nu|\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m]P[N_{g,k} = \mu|\Lambda_k]]$$
$$= \frac{\lambda_g w_{g,k}}{\mu} E[\Lambda_k P[\underbrace{M + M_{\mu,\mu} = l - \nu, N_{g,k} = \mu - 1}_{=\{L=l-\nu,N_{g,k}=\mu-1\}}|\Lambda_k]],$$

gde koristimo da je

$$P[N_{g,k} = \mu|\Lambda_k] = \frac{(\lambda_g w_{g,k}\Lambda_k)^{\mu}}{\mu!} e^{-\lambda_g w_{g,k}\Lambda_k} = \frac{\lambda_g w_{g,k}\Lambda_k}{\mu} P[N_{g,k} = \mu - 1|\Lambda_k].$$

Sada zamenom prethodne tri jednakosti u četvrtu datu sa očekivanjem dobijamo,

$$\begin{aligned}E[L_{g,i,k}1_{\{L=l\}}] &= \lambda_g w_{g,k} \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{l} E[L_{g,i,k,1} 1_{\{L_{g,k,1}=\nu\}}] E[\Lambda_k 1_{\{L=l-\nu, N_{g,k}=\mu-1\}}] \\ &= \lambda_k w_{g,k} \sum_{\nu=1}^{l} E[L_{g,i,k,1} 1_{\{L_{g,k,1}=\nu\}}] E[\Lambda_k 1_{L=l-\nu}].\end{aligned}$$

Zaključak

Razvoj savremenog bankarstva i privrede povećava izloženost različitim vrstama rizika. Njihova indetifikacija kao i adekvatne mere zaštite postaju važan faktor uspešnog poslovanja. Cilj ovog rada je predstavljanje matematičkih modela pri modeliranje kreditnog rizika kao najznačajnijeg rizika kome je svaka finansijska institucija izložena u svom poslovanju, pomoću Pendžerove rekurzije. Kako bi što bolje i preciznije objasnili na samom početku smo se upoznali sa raspodelama koje smo u toku rada koristili, kao i sa uvodnom pričom o kreditnom riziku i Bazelskim komitetom za kreditni rizik. Gde smo pored Bazelskog komiteta pričali i o ponuđenom setu pristupa za merenje izloženosti kreditnom riziku i kalkulaciju ekonomskog kapitala u Bazelskom sporazumu II.
Zatim smo u daljem nastavku govorili o kreditnom $rizik^+$ koji je zasnovan na Poasonovoj aproksimaciji i upoznali smo se sa nesvojstvenim rizikom.

Glavni fokus je bio usresređen na izračunavanju funkcije generatrise verovatnoće za gubitke sa gama raspodelom, gde smo nakon što smo našli konačan oblik težinske funkcije generatrise verovatnoće koristili originalni algoritam za implementiranje kreditnog rizika koji je zasnovan na rekurzivnoj formuli poznatoj pod nazivom Pendžerova rekurzija. Na taj način smo uvideli koliko je Pendžerova rekurzija značajna za ovaj vid modeliranja kreditnog rizika. Na kraju smo se upoznali sa merama rizika i rizikom doprinosa. VaR je postao jedna od najpopularnijih metoda za merenje rizika. Svaki VaR model koristi istorijske podatke sa tržišta da bi prognozirao budući uspeh portfolija. U master radu je razmotren pristup za izračunavanje VaR-a, kao i neke njegove osobine. Objasnili smo sta je deficit(expected shortfall ili CVAR), kako se izračunava i objasnili neka teorijska svojstva i nakon toga smo se bavili doprinosom deficita gde smo takođe naveli teorijska svojstva za doprinos deficita.

Ono što bi mogli da zaključimo je da kreditni rizik ili drugačije rečeno rizik da otplata odobrenog kredita bude dovedena u pitanje predstavlja najznačajniji rizik sa kojima se banke danas susreću. Osnovni uzroci ovakvih problema i sve većih gubitaka koje snose banke kao posledice kreditnog rizika leže u slabim kreditnim standardima za zajmoprimaoce i druge ugovorne strane, kao i lošim upravljanjem rizikom.

Značaj upravljanja i modeliranja kreditnim rizikom proističe iz potencijalne opasnosti da veliki broj korisnika kredita neće biti sposobni da ispune svoje obaveze i na taj način banke ulaze u zonu tehničke insolventnosti.
Zato u cilju minimiziranja kreditnog rizika kreditni sektor mora da prati dejstvo svih faktora koji utiču na kvalitet kreditnog portfelja banke i da na vreme reaguje na ona kretanja koja mogu da dovedu do bankrotstva banke.

Literatura

[1] P.Embrechts, C.Klüppelberg, and T. Mikosch, Modelling Extremal Events for Insurance and Finance, Applications of Mathematics (New York), vol. 33, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[2] S.A.Klugman, H.H. Panjer, and G.E. Willmot, Loss Models: From Data to Decisions, 2^{nd} ed., John Wiley Sons, 2004.

[3] Vesna Matić, PhD, ASB, Banking risk 13: Basel II-The Standardised approach to credit risk, 2009.

[4] A. McNeil, R. Frey, and P. Embrechts, Quantative Risk Management: Concepts, Techniques, and Tools, Princeton University Press, 2005.

[5] Danijela Rajter-Ćirić, Verovatnoća, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, 2009.

[6] Prof. Dr. Uwe Schmock, Modelling Dependent Credit Risks with Extensions of CreditRisk and Application to Operational Risk, Vienna University of Technology, Austria, 2013.

[7] R. Warnung, The Construction of an Integrand and Improved Recursions for Risk Aggregation, Ph.D. thesis, Vienna University of Technology, Austria, 2008.

Biografija

Milovan Ninkov je rođen 09.01.1990 u Novom Sadu. Završio je osnovnu školu "Prva vojvođanska brigada" u Novom Sadu 2004 godine, a potom upisao gimnaziju "Jovan Jovanović Zmaj", prirodno-matematički smer.

Godine 2009 upisao Prirodno-matematički fakutet u Novom Sadu, smer Matematičar-matematike finansija, i završio u septembru 2012, sa prosečnom ocenom 8,08. Zatim je upisao master studije, smer Primenjena matematika i poslednji ispit položio u junu 2014 godine. Tokom master studija je učestvovao na VisMath Tempus projektu gde je u aprilu 2013 bio student Universität für angewandte Kunst Wien.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČki FAKULTET
KLJUCNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Završni rad
VR

Autor: Milovan Ninkov
AU

Mentor: Dr Dora Seleši
MN

Naslov rada: Modeliranje kreditnog rizika
MR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: s/e
JI

Zemlja publikovanja: Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2014.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: 6 poglavlja/ 69 strana/ 1 tabela
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Primenjena matematika
ND

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku
ČU

Važn napomena:
VN

Izvod: Tema master rada je Modeliranje kreditnog rizika. Osnovni cilj i motiv ovog rada je predstavljanje matematičkih modela pri modeliranju kreditnog rizika. Najveći akcenat će biti stavljen na originalni algoritam za implementiranje kreditnog rizika koji se zasniva na rekurzivnoj formuli poznatoj pod nazivom Pendžerova rekurzija. U radu smo se upoznali sa Poasonovom raspodelom, mešovitom Poasonovom raspodelom ,zatim sa Gama-mešovitom Poasonovom raspodelom i (a,b,0), (a,b,1) klasom. Na kraju rada bavimo se merom rizika Expected shortfall kao koncepta koji se koristi u oblasti finansijskog rizika za procenu kreditnog rizika i rizikom doprinosa.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 04.03.2014
DP
Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
KO
Predsednik: Dr Zorana Lužanin, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član: Dr Sanja Rapajić redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član: Dr Dora Seleši, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, mentor

UNIVERSITY OF NOVI SAD FACULTY OF SCIENCE KEY WORDS DOCUMENTATION

Accesion number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents code: Master's thesis
CC

Author: Milovan Ninkov
AU

Mentor: Dora Seleši, PhD
MN

Title: Credit risk modelling
TI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract:
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2014.
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publication place: Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: 6 chaters/ 69 pages/ 1 table
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Applied Mathematics
SD

Holding data: Library of the Department of Mathematics and Informatics
HD

Note:
N

Abstract Subject of master thesis is Credit risk modelling. The main aim and motive of this master work is to present mathematical models in Credit risk modelling. The greatest emphasis will be placed on the original algorithm for the implementation of credit risk based on recursive formula known as Panjer recursion. In this master work, we were introduced to the Poisson distribution, the mixed Poisson distribution, then the Gamma-mixed Poisson distribution and (a,b,0), (a,b,1) class. At the end, we can measure risk using Expected shortfall as a concept that is used in the field of financial risk for credit risk assessment and risk contributions.
AB

Accepted by the Scientific Board on: 04.03.2014
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB
President: Zorana Lužanin, PhD, Full Professor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Novi Sad
Member: Sanja Rapajić, PhD, Full Professor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Novi Sad
Member: Dora Seleši, PhD, Associate Professor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Novi Sad, advisor