UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I
INFORMATIKU

**Milota Čorba**

# Varijacioni račun i metoda Galerkina

**Master rad**

**Mentor:**
**Prof. dr Nenad Teofanov**

**Novi Sad, 2014.**

# Sadržaj

# Predgovor

Varijacioni račun je nastao 1696. godine, kada je Johann Bernoulli u časopisu Acta Eruditorum objavio članak pod naslovom "Novi problemi, čijem se rešavanju pozivaju matematičari" ("Problema Novum ad Cujus Solutionem Mathematici Invitantur"), u kojem je bio postavljen problem o brahistohroni. Ovaj problem se smatra početkom varijacionog računa i u njemu se određuje glatka kriva, po kojoj će se telo, koje se kreće pod dejstvom sopstvene težine, spustiti iz tačke A do tačke B, za najkraće vreme. Teoretske osnove klasičnog varijacionog računa postavili su Euler i Lagrange u osamnaestom veku. Tokom osamnaestog i devetnaestog veka njim su se bavili mnogi veliki matematičari: Legendre, Jacobi, Hamilton, Weierstrass, Hilbert...

Varijacioni račun je metoda koja služi za modeliranje i rešavanje važnih matematičkih, fizičkih i inženjerskih problema. U vezi sa tim, u prvom delu rada navode se primeri koji to ilustruju. Nakon toga se dokazuje potreban uslov za ekstrem funkcionele. Navedena je teorija uslovnih ekstrema, parcijalne integracije i samoadjungovanog diferencijalnog operatora, koja je bitna za varijacioni račun i direktne metode rešavanja.

U drugom delu rada se izlaže varijacioni račun, navodeći i dokazujući odgovarajuće leme i teoremu, uz napomene o dovoljnom uslovu za ekstrem. Zatim se posmatra Ojler-Lagranžova jednačina različitih funkcionela, ne samo specijalnih oblika, već i funkcionela sa dve nezavisne promenljive. Ovaj deo rada završava se teorijom o varijacionom problemu sa ograničenjem, i Sturm-Liouvillovim problemom.

Treći deo je posvećen direktnim metodama: metodi Galerkina, Rayleigh-Ricovoj metodi, kao i FEM metodi baziranoj na dve prethodne. Izložena teorija se ilustruje zadacima, a uvode se i linearni i kvadratni Lagranžovi polinomi. Za izbor baznih funkcija kao linearnih Lagranžovih polinoma, rešava se 1D eliptični problem Galerkinovom FEM metodom. Primeri i Lagranžovi polinomi su crtani u programskom paketu *Matlab*.

U četvrtom delu rada prethodno izloženo se primenjuje na obradu slike. Rad se završava sa POD (Proper-Orthogonal Decomposition) kao jednom tehnikom redukcije modela i njenom vezom sa direktnim metodama.

U Dodatku se nalazi niz kodova za crtanje određenih slika, tj. grafika u *Matlab-u.*

★ ★ ★ ★

*Zahvaljujem se mentoru dr Nenadu Teofanovu na svim sugestijama i stručnom usmeravanju pri izradi ovog rada. Takođe, zahvaljujem se članovima komisije, dr Ljiljani Gajić i dr Heleni Zarin, kao i svim ostalim profesorima, sa kojima sam sarađivala tokom osnovnih i master akademskih studija.*

*Veliku zahvalnost dugujem mojoj porodici i dečku, koji su tokom mog studiranja bili uz mene. Hvala vam na beskrajnoj podršci tokom školovanja i života!*

*Milota Čorba*

# 1

# Uvod

Kao motivaciju rada sa varijacionim računom, navodimo Fermaov princip prelamanja svetlosti i problem određivanja najkraće trajektorije broda. Drugi deo rada, varijacioni račun, ne može se proučavati bez teoreme o potrebnom uslovu za ekstrem neprekidne diferencijabilne funkcionele, kao ni bez parcijalne integracije, i time se bavi prvi deo ovog rada. Prvi deo rada završava se samoadjungovanim diferencijalnim operatorom, koji je bitan za treći deo rada. Koristi se literatura [1].

### Fermaov princip

Fermaov princip je formulisao u 17. veku francuski matematičar Pierre de Fermat[1], i glasi: *svetlosni zrak se prostire tako, da mu je optička dužina puta najkraća moguća.*

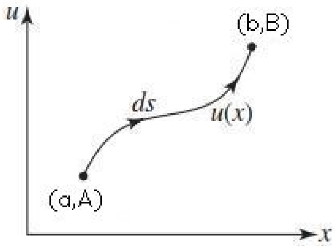
Pomoću Fermaovog principa prelamanja svetlosti, kao jednog primera iz optike, ilustrovaćemo razliku između diferencijalnog i varijacionog računa, a usput nas primer uvodi u priču o varijacionom računu.

Do diferencijalnog problema se dolazi, ako je sredina preko koje svetlo putuje homogena, dok se u slučaju nehomogene sredine dolazi do varijacionog problema.

Neka je $v(x,u)$ brzina svetlosti u datoj sredini, $c$ brzina svetlosti u vakumu, $n(x,u)$ indeks prelamanja svetlosti u datoj sredini, $ds$ je diferencijalni element po putanji $u(x)$ kao na slici 1.

Vreme putovanja svetla $T(u(x))$ se dobije pomoću integrala, sumirajući vreme koje je potrebno da svetlo pređe svaki "beskonačno mali" element $ds$ po putanji $u(x)$.

[1] 1601-1665, pored Dekarta, jedan od najznačajnijih matematičara Francuske 17.veka

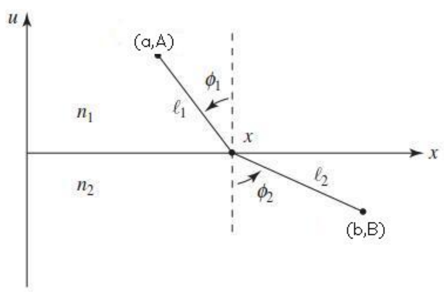



*Slika 1. Putanja svetla kroz sredinu sa promenljivim indeksom prelamanja svetlosti*

Fermaov princip teži da minimizira vreme putovanja svetla $T(u(x))$, po svim mogućim putanjama $u(x)$, koje svetlo može preći u datoj sredini između tačaka $a$ i $b$ u momentima $t_0$ i $t_1$, respektivno:

$$T(u(x)) = \int_{t_0}^{t_1} dt = \int_a^b \frac{ds}{v(x,u)} = \int_a^b \frac{n(x,u)}{c} ds \tag{1.1}$$

Posmatramo dve *homogene* sredine sa konstantnim indeksima prelamanja svetlosti $n_1$ i $n_2$, gde se granica ove dve sredine poklapa sa $x$ osom (slika 2).




*Slika 2. Putanja svetla kroz dve homogene sredine*

Zbog konstantnih indeksa prelamanja svetlosti $n_1$ i $n_2$ u odgovarajućim sredinama, svetlo se kreće po pravoj liniji u svakoj od tih sredina. Tj. da putanja ima najkraće vreme putovanja je isto kao da ima najkraću dužinu u homogenoj sredini. Zbog prethodnog zaključka, tražimo vrednost $x$, gde se putanja svetla seče sa granicom između dve sredine (tj. sa osom $x$). Za fiksirane tačke $(a, A)$ i $(b, B)$, i konstantne indekse prelamanja svetlosti, (1.1) postaje:

$$T(x) = \frac{1}{c}\Big[n_1 \int_a^x ds + n_2 \int_x^b ds\Big] = \frac{1}{c}[n_1 l_1 + n_2 l_2]$$

$$T(x) = \frac{1}{c}\Big[n_1\sqrt{(x-a)^2 + A^2} + n_2\sqrt{(b-x)^2 + B^2}\Big].$$

U homogenoj sredini, vreme putovanja svetla $T(x)$ je algebarska funkcija po $x$, i koristi se diferencijalni račun za minimizaciju.
U *diferencijalnom računu* se traži ekstrem, minimum ili maksimum, *funkcije.* Funkcija se diferencira, izjednačava sa nulom, i dobije vrednost nezavisne promenljive kada je funkcija u ekstremu.
Dakle, $T'(x) = \frac{dT}{dx} = 0$. Dobijemo:

$$T'(x) = \frac{1}{2}n_1[(x-a)^2+A^2]^{-\frac{1}{2}}[2(x-a)]+\frac{1}{2}n_2[(b-x)^2+B^2]^{-\frac{1}{2}}[-2(b-x)] = 0.$$

Faktori kvadratnih korena prethodne jednačine su dužine $l_1$ i $l_2$, date sa

$$x - a = l_1 \sin(\phi_1), \qquad b - x = l_2 \sin(\phi_2).$$

Iz geometrije je:

$$\frac{n_1}{l_1}(l_1 \sin(\phi_1)) = \frac{n_2}{l_2}(l_2 \sin(\phi_2)).$$

Ovo dovodi do Šnelovog zakona[2] za dve homogene sredine:

$$n_1 \sin(\phi_1) = n_2 \sin(\phi_2).$$

Najviše nas interesuje uopšteni slučaj, kada je indeks prelamanja svetlosti $n(x,u)$ *slučajna promenljiva*, u kom slučaju (1.1) uz $ds = \sqrt{dx^2 + du^2} = \sqrt{1 + (u'(x))^2}dx$ postaje:

$$T(u(x)) = \frac{1}{c}\int_a^b n(x,u)ds = \frac{1}{c}\int_a^b n(x,u)\sqrt{1 + \Big(\frac{du}{dx}\Big)^2}dx.$$

Dakle, u slučaju nehomogene sredine (indeks prelamanja svetlosti više nije konstanta) se traži putanja koja je predstavljena funkcijom $u(x)$ a koja je minimalno vreme putovanja svetlosti.

Drugim rečima, funkcionela[3] $T(u(x))$, koja je definisana preko određenog integrala sa nepoznatom funkcijom $u(x)$, se minimizira. Ovakav problem zahteva poznavanje *varijacionog računa.*

[2]Prelamanje svetlosti je promena pravca kretanja svetlosti usled promene brzine svetlosti. Svetlost koja pada na granicu dve sredine, koje imaju indekse prelamanja $n_1$ i $n_2$, prelaskom iz jedne sredinu u drugu se lomi, tako da ugao prelamanja i upadni ugao zadovoljavaju tzv. Šnelov zakon $n_1 \sin(\phi_1) = n_2 \sin(\phi_2)$.

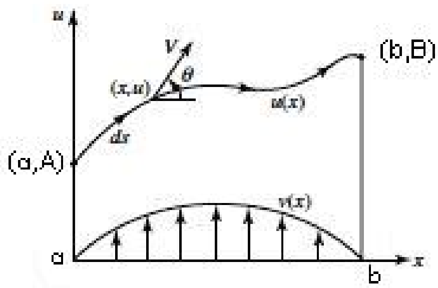
[3]Funkcionela je funkcija sa vrednostima (kodomenom) u $\mathbb{R}$.

**Trajektorija (putanja) broda**

Određujemo trajektoriju (putanju) broda, koji prelazi sa jedne strane reke na drugu, tako da je vreme tog prelaska što kraće.

Imamo sledeće parametre: $v(x)$ je brzina strujanja reke preko koje brod prelazi, $V$ je konstantna brzina kretanja broda (koja je relativna u odnosu na strujanje reke), ugao $\theta(x)$ koji je relativni u odnosu na fiksiran koordinatni sistem, $v_B(x,u)$ relativna brzina broda u odnosu na fiksiran koordinatni sistem.

Traži se putanja $u(x)$, gde bi brod, krećući se tom putanjom imao "najmanje troškove", tj. da vreme njegovog prelaska iz tačke $(a, A)$, do tačke $(b, B)$ bude što kraće. Sve rečeno vidimo na slici 3.



*Slika 3. Šema trajektorije broda*

Slično kao kod Fermaovog principa, da bi minimizirali vreme putovanja broda, želimo da minimiziramo funkcionelu:

$$T(u(x), \theta(x)) = \int_{t_0}^{t_1} dt = \int_{(a,A)}^{(b,B)} \frac{ds}{v_B(x,u)} \tag{1.2}$$

Vektor brzine broda nastaje kao kombinacija brzine strujanja reke $v(x)$ i relativne brzine broda $V : v_B = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{u}\boldsymbol{j}$, gde su:

$$\dot{x} = V\cos(\theta(x)), \qquad \dot{u} = v(x) + V\sin(\theta(x)).$$

Brzina broda je:

$$v_B(x,u) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{u}^2} = \sqrt{V^2(\cos\theta)^2 + v^2 + 2vV\sin\theta + V^2(\sin\theta)^2}$$
$$= \sqrt{V^2 + v^2 + 2vV\sin\theta}.$$

Uz diferencijal krive $ds = \sqrt{dx^2 + du^2} = \sqrt{1 + (u'(x))^2}dx$, menjajući sve u funkcionelu (1.2) dobija se:

$$T(u(x),\theta(x)) = \int_a^b \frac{\sqrt{1+(u')^2}}{\sqrt{V^2+v^2+2vV\sin\theta}}dx \tag{1.3}$$

Tražimo putanju $u(x)$ i ugao $\theta(x)$ koji minimiziraju funkcionelu (1.3).
**Napomena:** Minimizira se određen integral, pri čemu se moraju odrediti *dve* nepoznate funkcije.
Zbog date brzine reke $v(x)$ i relativne brzine broda $V$, može se izraziti veza između putanje $u(x)$ i ugla $\theta(x)$ i time smanjiti broj nepoznatih u funkcioneli, na jednu.
Nagib trajektorije je dat odnosom komponenata vektora brzine:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\dot{u}}{\dot{x}}$$

a uzimajući u obzir šta su $\dot{x}, \dot{u}$ dobije se:

$$\frac{du}{dx} = \frac{v(x)+V\sin(\theta(x))}{V\cos(\theta(x))} \tag{1.4}$$

Izraz (1.4) se može zameniti u funkcionelu (1.3) i dobije se funkcionela koja zavisi samo od ugla $\theta(x)$. Kada se izračuna ugao $\theta(x)$, jednačina (1.4) se može integraliti i dobijemo traženu najkraću putanju broda $u(x)$.
**Napomena:** Može se tražiti minimum funkcionele (1.3) uz ograničenje (1.4). Teorija traženja ekstrema uz ograničenje biće izložena kasnije.
**Napomena:** U varijacionom računu se određuje ekstrem funkcionele (integrala), koja sadrži nepoznatu funkciju. U Fermaovom principu nepoznata funkcija je bila putanja svetla $u(x)$, dok je u problemu trajektorije broda nepoznata funkcija bila ugao $\theta(x)$, a funkcionele koje se minimiziraju u tim primerima su vreme putovanja svetlosti i ukupno vreme putovanja broda, respektivno.

## 1.1 Potreban uslov za ekstrem

Kao što smo videli u primerima, tražimo ekstrem (minimum ili maksimum) funkcionele, čiji argument pripada nekom prostoru funkcija, pri čemu je funkcionela data u obliku određenog integrala.

U vezi toga, formulišemo jedan **potreban uslov** za ekstrem u opštem slučaju, kada je $I$ diferencijabilna funkcionela na normiranom prostoru, uz pomoć pojma diferencijala funkcionele.

Funkcionela je definisana nad normiranim[4] prostorom $(\mathbf{X}, \|\cdot\|)$.
Tražimo minimum ili maksimum funkcionele uz granične uslove:

$$I(u(x)) = \int_a^b F(x, u(x), u'(x))dx,$$

$$u(a) = A, \qquad u(b) = B$$

gde je $F(x, u(x), u'(x))$ data neprekidna diferencijabilna funkcija, $a, b, A, B$ su dati parametri.
Neka je $(\mathbf{X}, \|\cdot\|)$ normiran prostor, $I : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ funkcionela. *Priraštaj funkcionele* $I$ u tački $u \in \mathbf{X}$ je dat sa:

$$\triangle I_u(h) = I(u+h) - I(u),$$

gde je $h \in \mathbf{X}$ priraštaj "nezavisno promenljive" $u \in \mathbf{X}$.
Koristiće se oznake: $\triangle I_u(h) = \triangle I(h) = \triangle I$
**Napomena:** Menjajući funkciju u funkcionelu (integral), dobije se broj iz $\mathbb{R}$.

**Definicija 1.1.1.** *Neka je* $(\boldsymbol{X}, \|\cdot\|)$ *normiran prostor i neka* $I \colon \boldsymbol{X} \to \mathbb{R}$. *Funkcionela I je diferencijabilna u tački* $u_0 \in \boldsymbol{X}$ *ako se njen priraštaj* $\triangle I_{u_0}(h)$ *može napisati u obliku:*

$$\triangle I_{u_0}(h) = \delta I_{u_0}(h) + r_{u_0}(h),$$

*gde je* $\delta I_{u_0}(h)$ *neprekidna linearna funkcionela po* $h \in \boldsymbol{X}$, *a* $r_{u_0}(h) = o(\|h\|)$, *kada* $\|h\| \to 0$.

Glavni deo priraštaja $\triangle I_{u_0}$ je linearna funkcionela $\delta I_{u_0}$, koja se zove *diferencijal ili varijacija funkcionele* $I$ a označava se i sa $\delta I$.
Dat je normiran prostor $(\mathbf{X}, \|\cdot\|)$ i funkcionela $I : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$. Funkcionela $I$ dostiže lokalnu ekstremnu vrednost u tački $u_0 \in \mathbf{X}$ ako njen priraštaj $\triangle I_{u_0} = I(u) - I(u_0)$ ne menja znak u nekoj okolini tačke $u_0$, odnosno ako postoji $\eta > 0$ tako da za sve $u \in \mathbf{X}$ za koje je $\|u - u_0\| < \eta$ važi: $\triangle I_{u_0} \geq 0$ (lokalni minimum) ili $\triangle I_{u_0} \leq 0$ (lokalni maksimum).
**Izvodimo potreban uslov za ekstrem diferencijabilne funkcionele.**

[4]Prostor $(\mathbf{X}, \|\cdot\|)$ je normiran ako preslikavanje $\|\cdot\| : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ ispunjava uslove:
1. $\|x\| \geq 0; \|x\| = 0$ ako i samo ako je $x = 0$,
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in \mathbf{X}$,
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbf{X}$. $\|\cdot\|$ se zove norma na $\mathbf{X}$.

**Teorema 1.1.1.** *Neka je* $I : \boldsymbol{X} \to \mathbb{R}$ *diferencijabilna funkcionela nad normiranim prostorom* $(\boldsymbol{X}, \|\cdot\|)$*. Da bi funkcionela imala lokalni ekstrem u tački* $u_0$ *potrebno je da postoji* $\eta > 0$ *tako da*

$$\delta I_{u_0}(h) = 0,$$

*za sve* $h \in \boldsymbol{X}$ *za koje je* $\|h\| \leq \eta$.

**Dokaz:** Neka je $u_0 \in \mathbf{X}$ tačka lokalnog minimuma funkcionele $I$. Tada postoji $\eta > 0$ tako da važi :

$$I(u_0 + h) - I(u_0) \geq 0$$

za sve $h$ za koje je $\|h\| < \eta$ .
Iz pretpostavke da je $I$ diferencijabilna u $u_0$, definicija (1.1.1) njen priraštaj definiše:

$$I(u_0 + h) - I(u_0) = \delta I_{u_0}(h) + r_{u_0}(h)$$

gde je $r_{u_0}(h) = o(\|h\|)$ kada $\|h\| \to 0$.
Dovoljno je posmatrati $\tilde{h} = \eta h \in \mathbf{X}$, gde se $\eta$ može uzeti tako da je $\|\tilde{h}\| < \eta$.
$\cdot$ Za $\eta > 0$:

$$\frac{I(u_0 + \eta h) - I(u_0)}{\eta\|h\|} \geq 0. \tag{1.5}$$

Iz uslova diferencijabilnosti za $I$ i (1.5):

$$\frac{\delta I_{u_0}(\eta h) + r_{u_0}(\eta h)}{\eta\|h\|} \geq 0.$$

Varijacija je linearna, pa imamo:

$$\frac{\delta I_{u_0}(h)}{\|h\|} + \frac{r_{u_0}(\eta h)}{\|\eta h\|} \geq 0.$$

Iz definicije (1.1.1) znamo da: $r_{u_0}(\tilde{h}) = o(\|\tilde{h}\|)$ , kada $\|\tilde{h}\| \to 0$, pa primenjujući ovaj zaključak i limes na prethodni izraz, dobije se:

$$\lim_{\eta \to 0} \Big( \frac{\delta I_{u_0}(h)}{\|h\|} + \frac{r_{u_0}(\eta h)}{\|\eta h\|} \Big) = \frac{\delta I_{u_0}(h)}{\|h\|} + \lim_{\eta \to 0} \frac{r_{u_0}(\eta h)}{\|\eta h\|} = \frac{\delta I_{u_0}(h)}{\|h\|} \geq 0$$

iz čega sledi

$$\delta I_{u_0}(h) \geq 0$$

za sve $\|h\| < \eta$.
$\cdot$ Za $\eta < 0$ :

$$\frac{I(u_0 + \eta h) - I(u_0)}{\eta\|h\|} \leq 0.$$

Slično, iz definicije (1.1.1), uslova diferencijabilnosti funkcionele $I$, i linearnosti varijacije, dobije se:

$$\delta I_{u_0}(h) \leq 0$$

za sve $\|h\| < \eta$.
Dakle, ako je $u_0$ tačka lokalnog minimuma diferencijabilne funkcionele $I$, onda postoji $\eta > 0$ tako da važi

$$\delta I_{u_0}(h) = 0$$

za sve $h \in \mathbf{X}$ za koje je $\|h\| < \eta$. Dokaz ide slično ako je $u_0$ tačka lokalnog maksimuma. ★

## 1.2 Uslovni ekstrem i Lagranžovi množitelji

U primeru određivanja najkraće trajektorije broda, napomenuli smo da se može tražiti ekstrem funkcionele uz ograničenje. Ovde je navedena teorija o ekstremu algebarske funkcije uz dato ograničenje. Sličan aparat primenićemo i na varijacioni problem sa ograničenjem, u odeljku (2.5).
Potreban uslov za ekstrem funkcije $f(x, y, z)$ u tački $(x_0, y_0, z_0)$, bez ograničenja je:

$$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz = 0. \tag{1.6}$$

Kako su $x, y, z$ nezavisne promenljive, tačka $(x_0, y_0, z_0)$ se dobije rešavanjem:

$$f_x = 0, \qquad f_y = 0, \qquad f_z = 0.$$

Sada želimo doći do stacionare tačke (ili tačaka) funkcije $f(x, y, z)$, kada je dato ograničenje

$$g(x, y, z) = c = const.$$

**Napomena:** Ograničenje daje geometrijsku vezu između koordinata $x, y, z$.
Totalni diferencijal funkcije $g(x, y)$ je:

$$dg = g_x dx + g_y dy + g_z dz = 0, \tag{1.7}$$

što jeste 0, jer je $g$ konstanta.
Kako su izrazi (1.6) i (1.7) jednaki 0, može se napisati:

$$0 = df + \lambda dg = (f_x + \lambda g_x)dx + (f_y + \lambda g_y)dy + (f_z + \lambda g_z)dz, \tag{1.8}$$

gde je $\lambda$ proizvoljna konstanta, koja se zove *Lagranžov množitelj.*
Zbog ograničenja $g = c$, promenljive $x, y, z$ nisu više nezavisne. Uz jedno ograničenje, mogu biti samo dve od tri promenljive nezavisne, i ne može se

primeniti isti princip kao u (1.6). Umesto toga, pretpostavlja se da $g_z \neq 0$ u $(x_0, y_0, z_0)$. Zbog toga, poslednji sabirak u jednačini (1.8) može biti eliminisan stavljajući $\lambda = -\frac{f_z}{g_z}$ i dobije se:

$$(f_x + \lambda g_x)dx + (f_y + \lambda g_y)dy = 0.$$

Preostale promenljive $x$ i $y$ sada se mogu uzeti kao nezavisne, i koeficijenti uz $dx, dy$ moraju biti jednaki 0. Ovo rezultira sa 4 jednačine za 4 nepoznate $x_0, y_0, z_0, \lambda$ :

$$f_x + \lambda g_x = 0, \qquad f_y + \lambda g_y = 0, \qquad f_z + \lambda g_z = 0, \qquad g = c.$$

Zbog prethodnih zaključaka, traženje stacionarne tačke funkcije $f(x, y, z)$ sa ograničenjem $g(x, y, z) = c$ je ekvivalentno traženju stacionarne tačke *Lagranžove pomoćne funkcije*

$$\tilde{f}(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$$

bez ograničenja.
Stacionarna tačka $(x_0, y_0, z_0)$ se dobije rešavajući sistem:

$$\tilde{f}_x = \tilde{f}_y = \tilde{f}_z = 0.$$

**Napomena:** Kako je c konstanta, Lagranžova pomoćna funkcija se može napisati i na sledeći način: $\tilde{f} = f + \lambda(g - c)$. Ako imamo više ograničenja, ova funkcija se uopšti na isti način, gde će svako ograničenje imati svoj Lagranžov množitelj.
**Napomena:** Analogija sa $\delta I = 0$ u odeljku (1.2), je izjednačavanje totalnog diferencijala funkcije $f$ sa nulom, $df = 0$.

## 1.3 Parcijalna integracija

Parcijalna integracija igra značajnu ulogu u varijacionom računu. Pokazujemo na dva načina kako doći do formule za parcijalnu integraciju.
Zanimljiv je prvi pristup dolaženja do ove formule, pomoću *teoreme divergencije*[5] vektorskog kalkulusa:

$$\int\int_A \nabla \cdot \mathbf{v} dA = \oint_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds, \tag{1.9}$$

[5]Teorema divergencije povezuje površinski integral divergencije vektorskog polja sa krivolinijskim integralom komponenata vektora normale na krivu $C$

gde je $\mathbf{v}$ vektor, a $\mathbf{n}$ je spoljašnja normala na krivu $C$ koja okružuje površinu $A$.
Primenimo teoremu divergencije (1.9) na vektor:

$$\mathbf{v} = \psi \nabla \phi,$$

gde su $\psi = \psi(x, y)$ i $\phi = \phi(x, y)$ proizvoljne skalarne funkcije.

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (\psi \nabla \phi) = \psi \nabla^2 \phi + \nabla \psi \cdot \nabla \phi,$$
$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \psi(\nabla \phi \cdot \mathbf{n}).$$

Nakon zamene prethodnih izraza u (1.9) dobije se *Green-ova prva teorema*

$$\int\int_A \nabla \psi \cdot \nabla \phi dA = \oint_C \psi(\nabla \phi \cdot \mathbf{n}) ds - \int\int_A \psi \nabla^2 \phi dA. \tag{1.10}$$

U jednoj dimenziji sa $\psi = \psi(x), \phi = \phi(x)$, imamo $\nabla = \frac{d}{dx}\mathbf{i}, \mathbf{n}_0 = -\mathbf{i}, \mathbf{n}_1 = \mathbf{i}$, $dA = dx$. U jednoj dimenziji (1.10) je:

$$\int_a^b \frac{d\psi}{dx}\frac{d\phi}{dx} dx = \Big[\psi \frac{d\phi}{dx}\Big]_{x=b} - \Big[\psi \frac{d\phi}{dx}\Big]_{x=a} - \int_a^b \psi \frac{d^2\phi}{dx^2} dx.$$

Neka je $\psi(x) = q(x), \phi(x) = \int p(x) dx, \frac{d\phi}{dx} = p(x)$, čijom zamenom u Green-ovu prvu teoremu u jednoj dimenziji (prethodni izraz) se dobije formula za parcijalnu integraciju:

$$\int_a^b p dq = \Big[pq\Big]_a^b - \int_a^b q dp.$$

Drugi način dolaženja do formule za parcijalnu integraciju je jednostavniji. Posmatraju se dve funkcije $p(x)$ i $q(x)$, i određuje izvod proizvoda ove dve funkcije:

$$\frac{d}{dx}(pq) = p\frac{dq}{dx} + q\frac{dp}{dx}.$$

Integracijom po $x$ se dobije:

$$pq = \int p \frac{dq}{dx} dx + \int q \frac{dp}{dx} dx,$$

odnosno

$$pq = \int p dq + \int q dp.$$

Ovim smo brže došli do formule za parcijalnu integraciju:

$$\int p dq = pq - \int q dp$$

ili za određen integral u granicama $[a, b]$ :

$$\int_a^b pdq = \Big[pq\Big]_a^b - \int_a^b qdp.$$

Dakle, do formule za parcijalnu integraciju, pored standardnog izvođenja, se može doći i primenjujući teoremu divergencije na jednu dimenziju.

## 1.4 Adjungovan i samoadjungovan diferencijalni operator

Uvodimo jedan matematički aparat koji će nam trebati za direktne metode rešavanja.
Diferencijalni operator $\vartheta$ ima *adjungovan* operator $\vartheta^*$ koji zadovoljava:

$$\langle v, \vartheta u\rangle = \langle u, \vartheta^* v\rangle \tag{1.11}$$

gde su $u(x), v(x)$ proizvoljne funkcije koje zadovoljavaju homogene granične uslove.
Motivacija prethodnog dolazi iz sledeće priče: Posmatramo matricu $\mathbf{C}$ dimenzije $n \times n$ i proizvoljne vektore $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dimenzija $n \times 1$. Množimo levu stranu matrice sa $\mathbf{v}^T$, desnu stranu sa $\mathbf{u}$ i sve to transponujemo:

$$(\mathbf{v}^T\mathbf{C}\mathbf{u})^T = \mathbf{u}^T\mathbf{C}^T\mathbf{v}.$$

Leva strana je skalar, tj. $1 \times 1$ matrica, pa se transponovano može ukloniti i napisati u obliku unutrašnjeg proizvoda[6] ovako:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{C}\mathbf{u}) = (\mathbf{u}, \mathbf{C}^T\mathbf{v}\rangle.$$

Posmatra se linearna diferencijalna jednačina drugog reda sa koeficijentima koji su funkcije, a funkcija $r(x)$ $(r(x) \neq 0)$ je tzv. *težinska funkcija:*

$$\vartheta u = \frac{1}{r(x)}[a_0(x)u'' + a_1(x)u' + a_2(x)u] = 0, \qquad x \in [a, b]. \tag{1.12}$$

Pomoću ove jednačine ilustrujemo pristup određivanja adjungovanog operatora.

[6]Unutrašnji proizvod funkcija je definisan na sledeći način: $\langle g, h\rangle = \int_a^b g(x)h(x)dx$, a može se definisati i u odnosu na težinsku funkciju $r(x)$:$\langle g, h\rangle = \int_a^b g(x)h(x)r(x)dx$.

Uzmimo unutrašnji proizvod $\vartheta u$ sa proizvoljnom funkcijom $v(x)$,

$$\langle v, \vartheta u\rangle = \int_a^b r(x)v(x)\Big(\frac{1}{r(x)}[a_0(x)u'' + a_1(x)u' + a_2(x)u]\Big)dx,$$

tj. to je leva strana jednačine (1.11), pri čemu je unutrašnji proizvod $\langle v, \vartheta u\rangle$ uzet u odnosu na funkciju $r(x)$.

Pomoću parcijalne integracije zamenićemo uloge $u(x)$ i $v(x)$ u unutrašnjem proizvodu, i doći do $\langle u, \vartheta^* v\rangle$. Parcijalna itegracija se radi za prvi i drugi sabirak. Na prvi sabirak se primenjuje dva puta:

(1) $p = va_0, q = u', dp = (va_0)'dx, dq = u''dx$ gde se dobije:

$$\int_a^b a_0 v u'' dx = a_0 v u'|_a^b - \int_a^b u'(a_0 v)' dx$$

(2) $p = (va_0)', q = u, dp = (va_0)''dx, dq = u'dx$, dobije se:

$$\int_a^b a_0 v u'' dx = a_0 v u'|_a^b - \int_a^b u'(a_0 v)' dx = \Big(a_0 v u' - u(va_0)'\Big)|_a^b + \int_a^b u(va_0)'' dx.$$

Drugi sabirak: $p = va_1, q = u, dp = (va_1)'dx, dq = u'dx$, dobije se:

$$\int_a^b a_1 v u' dx = a_1 v u|_a^b - \int_a^b u(va_1)' dx.$$

Zamenom dobijenog u $\langle v, \vartheta u\rangle$ imamo:

$$\langle v, \vartheta u\rangle = \Big[a_0 v u' - u(va_0)' + a_1 v u\Big]_a^b$$

$$+ \int_a^b r(x)u(x)\Big\{\frac{1}{r(x)}[(a_0 v)'' - (va_1)' + a_2 v]\Big\}dx.$$

Izraz u $\{\}$ je $\vartheta^* v$, a ceo integral je desna strana jednačine (1.11), tj. $\langle u, \vartheta^* v\rangle$, $r(x)$ je težinska funkcija u odnosu na koju je uzet unutrašnji proizvod. Jedino prvi izraz pravi problem, koji je određen samo na krajevi intervala tj. $x = a$ i $x = b$, a njega izgubimo pod pretpostavkom da su granični uslovi na $u(x)$ i $v(x)$ homogeni.

Uz pretpostavku da su granični uslovi na $u(x)$ i $v(x)$ homogeni, *adjungovan* operator $\vartheta^*$ diferencijalnog operatora $\vartheta$ je:

$$\vartheta^* v = \frac{1}{r(x)}[(a_0(x)v)'' - (va_1(x))' + a_2(x)v]. \tag{1.13}$$

Ako su diferencijalni operator i njegov adjungovan jednaki, tj. $\vartheta = \vartheta^*$ onda $\vartheta$ zovemo *samoadjungovan* ili Hermitski, i različite karakteristične vrednosti daju ortogonalne karakteristične funkcije. Ovu činjenicu pokazujemo.
Neka je $\vartheta = \vartheta^*$ i $u(x)$ i $v(x)$ dve karakteristične funkcije diferencijalnog operatora takve da $\vartheta u = \lambda_1 u, \vartheta v = \lambda_2 v$. Zamenjujući u

$$\langle v, \vartheta u\rangle = \langle u, \vartheta^* v\rangle$$

uz $\vartheta = \vartheta^*$ dobije se:

$$\langle v, \lambda_1 u\rangle = \langle u, \lambda_2 v\rangle$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\langle u, v\rangle = 0$$

Ako su $\lambda_1 \neq \lambda_2$, odgovarajuće karakteristične funkcije moraju biti ortogonalne[7] da bi njihov unutrašnji proizvod bio 0.
Opet smo bili motivisani pričom o matricama i vektorima: Simetrična (ili Hermitska) matrica je ona koja je jednaka svojoj transponovanoj matrici, i ima osobinu da su njeni karakteristični vektori međusobno ortogonalni ako su karakteristični koreni različiti.
**Napomena:** Nemaju sve linearne jednačine drugog reda oblika (1.12), diferencijalni operator koji je samoadjungovan.
Napomenu potvrđujemo jednim primerom.

**Primer 1.4.1.** *Naći adjungovan operator za*

$$\vartheta = \frac{d^2}{dx^2} + x\frac{d}{dx}, \qquad x \in [0, 1]$$

*sa homogenim graničnim uslovima.*

Iz jednačine (1.12)

$$a_0(x) = 1, \quad a_1(x) = x, \quad a_2(x) = 0, \ r(x) = 1,$$

na osnovu (1.13), adjungovana jednačina je:

$$\vartheta^* v = (a_0 v)'' - (a_1 v)' + a_2 v = v'' - (xv)' = v'' - xv' - v.$$

Adjungovan operator za $\vartheta$ je:

$$\vartheta^* = \frac{d^2}{dx^2} - x\frac{d}{dx} - 1$$

Čime smo pokazali:

$$\vartheta^* \neq \vartheta.$$

[7]Funkcije $f$ i $g$ su ortogonalne ako je njihov unutrašnji proizvod 0, tj. $\langle f, g\rangle = 0$.

Nas interesuje skup jednačina oblika (1.12) čiji operatori jesu samoadjungovani, pa u vezi toga, pokazujemo činjenicu da je linearni diferencijalni operator drugog reda samoadjungovan ako i samo ako može biti zapisan u *Sturm-Liouvillovoj formi*

$$\vartheta = \frac{1}{r(x)}\Big(\frac{d}{dx}[p(x)\frac{d}{dx}] + q(x)\Big),$$

i granični uslovi su homogeni.
Posmatramo

$$\vartheta^* v = \frac{1}{r(x)}[(a_0 v)'' - (v a_1)' + a_2 v]$$

ili nakon računanja izvoda proizvoda (koeficijenti $a_0, a_1, a_2$ su funkcije!):

$$\vartheta^* v = \frac{1}{r(x)}\Big(a_0 v'' + [2a_0' - a_1]v' + [a_0'' - a_1' + a_2]v\Big). \tag{1.14}$$

Za $\vartheta$ samoadjungovan operator, operatori $\vartheta$ i $\vartheta^*$ u jednačinama (1.12) i (1.14), respektivno, moraju biti isti. Prvi izrazi su jednaki, posmatramo drugi i treći izraz:

$$a_1(x) = 2a_0'(x) - a_1(x)$$

ili

$$a_1(x) = a_0'(x).$$

Jednakost trećih izraza daje:

$$a_2(x) = a_0''(x) - a_1'(x) + a_2(x),$$

ali ovo je uvek tačno ako $a_1(x) = a_0'(x)$.
Zamenjujući $a_1(x) = a_0'(x)$ u (1.12) dobije se:

$$\vartheta u = \frac{1}{r(x)}(a_0 u'' + a_0' u' + a_2 u) = 0.$$

Diferencijalni operator od prethodne jednačine može biti napisan u obliku

$$\vartheta = \frac{1}{r(x)}\Big(\frac{d}{dx}[a_0(x)\frac{d}{dx}] + a_2(x)\Big),$$

i zove se *Sturm-Liouvillov diferencijalni operator.*
**Napomena:** Odgovarajuće karakteristične funkcije Sturm-Liouvillovog diferencijalnog operatora su ortogonalne u odnosu na težinsku funkciju $r(x)$.

# 2

# Varijacioni račun

Centralni deo drugog dela rada je Ojler-Lagranžova jednačina. Polazi se od integralne forme, i izvodi ova jednačina na više načina. Pokazuje se da je stacionarna tačka (u slabom smislu) funkcionele, u stvari rešenje ove jednačine. Urađena su i dva specijalna slučaja Ojler-Lagranžove jednačine, a posebno nas interesuje oblik ove jednačine u slučaju $u(x, y)$, jer nam je sa $u(x, y)$ u obradi slike predstavljena slika. Na kraju drugog dela rada, navedena je teorija o varijacionim ograničenjima i Sturm-Liouvillov problem. Korišćena je literatura [1],[2] i [3].

### Varijaciona notacija

Navodimo sličnosti i razlike između varijacione notacije - sa $\delta$ - i diferencijalne notacije - sa $d$ ili $\partial$ -.

Primarna razlika je: $d$ (ili $\partial$) predstavlja promenu funkcije *od tačke do tačke*, dok $\delta$ predstavlja promenu od *funkcije do funkcije.* Dakle, u varijacionom problemu $\delta u$ predstavlja razliku između stacionarne funkcije i njoj bliske funkcije.
Sličnosti vidimo u sledećem:

- Totalni diferencijal funkcije $f(x, y, z)$ je
$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz,$$
što predstavlja promenu funkcije $f(x, y, z)$ po krivoj od tačke do tačke.

- Totalni diferencijal funkcije $F(x, u(x), u'(x))$ je
$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial u}du + \frac{\partial F}{\partial u'}du'.$$

- Varijacija funkcije $F(x, u(x), u'(x))$ je

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u'}\delta u'.$$

Međutim, $x$ je nezavisna promenljiva, koja se u varijacionom problemu ne menja, tj. $\delta x = 0$, dobije se:

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u'}\delta u',$$

što predstavlja varijaciju $F$ od funkcije do funkcije.

- Stacionarna tačka funkcije $f(x, y, z)$ je tačka $(x, y, z)$ gde je $df = 0$.

- Stacionarna funkcija funkcionele $I(u)$ je funkcija $u(x)$ u kojoj je $\delta I = 0$.

- Suma i proizvod varijacije su analogni kao za diferencijal, npr. $\delta(F_1F_2) = F_1\delta F_2 + F_2\delta F_1$.

- Izvod varijacije je jednak varijaciji izvoda, a varijacija integrala je jednaka integralu varijacije (ovo je izvedeno u odeljku (2.1) prilikom pokazivanja puta za formulisanje dovoljnog uslova za ekstrem).

## 2.1 Ojler-Lagranžova jednačina

Isaac Newton i braća Bernoulli su dali osnovne ideje koje su postale varijacioni račun u kasne 1600te, dok su Ojler i Lagranž formalizovali ovu novu granu matematike polovinu veka kasnije. Ojler-Lagranžovu jednačinu je prvi put izveo Leonhard Euler 1744. godine, a kasnije, 1755. godine Joseph Louis Lagrange (Lagranž je imao samo 19 godina!). U čast njima je najbitnija jednačina u varijacionom računu nazvana Ojler-Lagranžova jednačina.

Rešenje varijacionog problema je funkcija $u(x)$ koja funkcioneli $I(u)$ saopštava minimum ili maksimum. Rešenje $u(x)$, ako postoji, mora da zadovoljava određene uslove. Jedan od neophodnih uslova je Ojler-Lagranžova jednačina. Rešenja ove jednačine zovemo *ekstremale.* Značaj ove jednačine je u tome, što ona određuje jednog kandidata za ekstrem, pri čemu se za egzistenciju i jedinstvenost ekstrema moraju vršiti dodatna ispitivanja.
**Napomena:** Sve dopustive funkcije $u(x)$ su neprekidno diferencijabilne. U nekim slučajevima, rešenje je prekidno (ili po delovima neprekidno), i takva rešenja se ne mogu dobiti iz varijacionog metoda. Postoji jedna važna klasa takvih rešenja koja nastaju u optimalnom upravljanju varijacionog kalkulusa (čitalac se upućuje na poglavlje 10, [1]).

Posmatramo varijacioni problem:

$$I(u(x)) = \int_a^b F(x, u(x), u'(x))dx,$$

$$u(a) = A, \qquad u(b) = B$$

gde je $F(x, u(x), u'(x))$ data neprekidna diferencijabilna funkcija, $a, b, A, B$ su dati parametri. Određujemo slab lokalni ekstrem funkcionele $I(u)$. Najpre odredimo njenu varijaciju.
Priraštaj funkcionele $I$ je:

$$\triangle I_u(h) = I(u+h)-I(u) = \int_a^b [F(x, (u+h)(x), (u+h)'(x))-F(x, u(x), u'(x))]dx.$$

Pretpostavlja se da je podintegralna funkcija $F$ dva puta neprekidno diferencijabilna funkcija po svakoj promenljivoj. Potreban i dovoljan uslov da bi priraštaj $u(x)+h(x)$ nezavisno promenljive $u(x)$ ispunjavao date granične uslove je $h(a) = h(b) = 0$.
Iz diferencijabilnosti podintegralne funkcije sledi:

$$\triangle I_u(h) = \int_a^b [F_u h + F_{u'} h' + r(x, u, u', h, h')]dx$$

gde $r(x, u, u', h, h')$ predstavlja članove višeg reda Tejlorovog[1] razvoja funkcije $F(x, u + h, (u + h)')$.
Dalje je:

$$\triangle I_u(h) = \int_a^b F_u h dx + \int_a^b F_{u'} h' dx + \int_a^b r(x, u, u', h, h')dx.$$

Parcijalnom integracijom drugog člana u prethodnoj jednačini, uzimajući $dq = h'dx, p = F_{u'}$, dobije se:

$$\triangle I_u(h) = \int_a^b F_u h dx + F_{u'} h(x)|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} F_{u'} h dx + \int_a^b r(x, u, u', h, h')dx.$$

Drugi sabirak se izgubi $F_{u'} h(x)|_a^b = F_{u'}|_{x=b} h(b) - F_{u'}|_{x=a} h(a) = 0$, jer $h(a) = h(b) = 0$.
Uvođenjem oznake

$$\int_a^b r(x, u, u', h, h')dx = \tilde{r}(x, u, u', h, h'),$$

[1] Tejlorov polinom n-tog stepena je među svim polinomima n-tog (ili nižeg) stepena, najbolja aproksimacija funkcije u okolini tačke $u_0$

dobije se:

$$\begin{aligned}\triangle I_u(h) &= \int_a^b F_u h dx - \int_a^b \frac{d}{dx} F_{u'} h dx + \tilde{r}(x,u,u',h,h') \\ &= \int_a^b (F_u - \frac{d}{dx} F_{u'}) h dx + \tilde{r}(x,u,u',h,h'),\end{aligned} \tag{2.1}$$

gde $\tilde{r}(x,u,u',h,h') \to 0$ kada $\|h\|_1 \to 0$.
Iz teoreme (1.1.1) potreban uslov za ekstrem funkcionele $I$ je dat sa $\delta I = 0$, odnosno, ako se uporedi (2.1) sa:

$$\triangle I_u(h) = \delta I_u(h) + r_u(h),$$

dobije se:

$$\delta I_u(h) = \int_a^b \Big(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'}\Big) h dx = 0.$$

U nastavku, pomoću lema i teoreme dokazuje se da je tada:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} = 0.$$

Jednačinu zovemo *Ojler-Lagranžova jednačina.*

**Lema 2.1.1.** *a) Neka važi $\int_a^b S(x)h(x)dx = 0$, za sve $h \in C^1[a,b]$, za koje je $h(a) = h(b) = 0$, gde je $S \in C[a,b]$ data funkcija. Tada je $S \equiv 0$.*

*b) Neka važi $\int_a^b G(x)h'(x)dx = 0$, za sve $h \in C^1[a,b]$, za koje je $h(a) = h(b) = 0$, gde je $G \in C[a,b]$ data funkcija. Tada je $G(x) = const$.*

**Dokaz:** a) Dokazujemo kontradikcijom. Pretpostavimo da postoji $x_0 \in [a,b]$ u kojoj je $S \neq 0$. Neka je $S(x_0) > 0$. Zbog neprekidnosti $S$, postoji interval $(c,d) \subset (a,b)$, koji sadrži tačku $x_0$ i važi $S(x) > 0$ za sve $x \in (c,d)$.
Kako je $h(x)$ proizvoljna, ona može biti: $h(x) := (c-x)^2(d-x)^2$, za $x \in (c,d)$, a za $x \in (a,b)/(c,d)$ važi $h(x) = 0$. Posmatramo integral

$$\int_a^b S(x)h(x)dx = \int_c^d S(x)(c-x)^2(d-x)^2 dx > 0,$$

što je kontradikcija sa uslovom iz a).

b) Teorema o srednjoj vrednosti integrala tvrdi da postoji $c \in \mathbb{R}$, tako da važi $\int_a^b G(x)dx = c(b-a)$, tj.

$$\int_a^b (G(x) - c)dx = 0.$$

Za proizvoljnu $J \in C[a, b]$ pokazujemo da važi:

$$\int_a^b (G(x) - c)J(x)dx = 0.$$

Ako je $\alpha = \frac{1}{b-a}\int_a^b J(x)dx$, a $\int_a^b \lambda(x)dx = 0$, $J$ se može napisati u obliku $J(x) = \lambda(x) + \alpha$. Primetimo da $h(x) = \int_a^x \lambda(r)dr$ ispunjava uslove zadatka ($h'(x) = \lambda(x)$).
Dobija se:

$$\int_a^b (G(x)-c)J(x)dx = \int_a^b G(x)\lambda(x)dx - c\int_a^b \lambda(x)dx + \alpha\int_a^b (G(x)-c)dx = 0,$$

za *proizvoljnu* funkciju $J \in C[a, b]$.
Za funkciju $J(x) = G(x) - c$, dobije se

$$\int_a^b (G(x) - c)^2 dx = 0,$$

tj. dobijemo traženo $G(x) = const.$ ★

**Lema 2.1.2** (Paul du Bois-Reimond)**.** *Neka su date funkcije $S, G \in C[a, b]$ i neka važi*

$$\int_a^b (S(x)h(x) + G(x)h'(x))dx = 0,$$

*za sve $h \in C^1[a, b]$ za koje je $h(a) = h(b) = 0$. Tada je $G$ diferencijabilna funkcija i važi $S(x) - G'(x) = 0$.*

**Dokaz:** Vršimo parcijalnu integraciju prvog dela integrala

$$\int_a^b S(x)h(x)dx = h(x)\tilde{S}(x)|_a^b - \int_a^b \tilde{S}(x)h'(x)dx = -\int_a^b \tilde{S}(x)h'(x)dx$$

gde je $\tilde{S}(x) = \int_a^x S(r)dr$, dobije se:

$$\int_a^b (S(x)h(x) + G(x)h'(x))dx = \int_a^b (G(x) - \tilde{S}(x))h'(x)dx = 0. \tag{2.2}$$

Na osnovu leme (2.1.1) b) i jednačine (2.2) je: $G(x) - \tilde{S}(x) = c$, tj. $G(x) = \tilde{S}(x) + c$, za $c \in \mathbb{R}$. Desna strana prethodne jednačine je diferencijabilna jer $\tilde{S}'(x) = S(x), x \in [a, b]$, i time je pokazano traženo, tj. $G \in C^1[a, b]$ i $G'(x) = S(x), x \in [a, b]$. ★

Dakle, znamo da je:

$$\int_a^b \Big(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'}\Big) h dx = 0.$$

za sve $h \in C^1[a,b]$ za koje je $h(a) = h(b) = 0$, pa iz leme (2.1.1) a), ako je $S = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'}$ dobijemo

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} = 0,$$

tj. *Ojler-Lagranžovu jednačinu .*
Takođe, Ojler-Lagranžovu jednačinu dobijemo primenjujući lemu (2.1.2) na izraz:

$$\int_a^b \Big[\frac{\partial F}{\partial u} h + \frac{\partial F}{\partial u'} h'\Big] dx + \int_a^b r(x, u, u', h, h') dx.$$

Prethodnim rezimiranjem smo dokazali sledeću teoremu:

**Teorema 2.1.1.** *Data je funkcionela* $I(u) = \int_a^b F(x, u(x), u'(x)) dx$, *gde je* $u \in C^1[a,b]$ *i važi* $u(a) = A, u(b) = B$.
*Ako funkcionela* $I$ *ima ekstrem u* $u_0 \in C^1[a,b]$, *onda je* $u_0$ *rešenje Ojler-Lagranžove jednačine*

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} = 0.$$

*sa graničnim uslovima* $u(a) = A, u(b) = B$.

Sledeći zadatak je da se pokaže put za formulisanje *dovoljnog* uslova za ekstrem. Ujedno, biće izvedena Ojler-Lagranžova jednačina na malo drugačiji način od gore urađenog, uvodeći funkciju $\bar{u}(x)$, za svako $x \in [a,b]$.
Neka je varijacija funkcije $u$ :

$$\delta_x u = \delta u = \bar{u}(x) - u(x),$$

$$\delta u = \eta \phi(x),$$

gde je $\eta$ "beskonačno mali" parametar, a $\phi(x)$ je proizvoljna funkcija.
Podsetimo se, da se prilikom variranja vrši samo promena funkcije, bez promene argument:

$$\delta x = 0.$$

Na dalje će nam trebati i činjenice da je izvod varijacije jednak varijaciji izvoda (1), i da je varijacija integrala jednaka integralu varijacije (2). To pokazujemo.

(1) Izvod varijacije:

$$\frac{d}{dx}(\delta u) = \frac{d}{dx}(\eta\phi(x)) = \eta\frac{d\phi}{dx}.$$

S druge strane, varijacija izvoda je:

$$\delta(\frac{du}{dx}) = \frac{d\bar{u}}{dx} - \frac{du}{dx} = \frac{d[\bar{u}(x) - u(x)]}{dx} = \eta\frac{d\phi}{dx}.$$

Pokazali smo:

$$\frac{d}{dx}(\delta u) = \delta(\frac{du}{dx}).$$

(2) Integracijom se dobije:

$$\delta\int_a^b u(x)dx = \int_a^b \bar{u}(x)dx - \int_a^b u(x)dx = \int_a^b [\bar{u}(x) - u(x)]dx = \int_a^b \delta u dx.$$

Uz pretpostavke koje su malo pre uvedene, priraštaj funkcionele je dat sa:

$$I(\bar{u}) - I(u) = \int_a^b [F(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x)) - F(x, u(x), u'(x))]dx. \tag{2.3}$$

Razvijemo funkciju $F$ u Tejlorov red u okolini "tačke" $u = u(x)$, pri čemu je $x$ fiksirano:

$$F(x, \bar{u}, \bar{u}') \approx F(x, u, u') + \frac{\partial F}{\partial u}(\bar{u} - u) + \frac{\partial F}{\partial u'}(\bar{u}' - u') +$$

$$+\frac{\partial^2 F}{2\partial u^2}(\bar{u} - u)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial u'}(\bar{u} - u)(\bar{u}' - u') + \frac{\partial^2 F}{2\partial u'^2}(\bar{u}' - u')^2 + \ldots$$

Zamenom ovog izraza u (2.3), uz $\delta u = \bar{u} - u = \eta\phi(x)$ dobije se:

$$I(\bar{u}) - I(u) = \int_a^b [F(x, u, u') + \frac{\partial F}{\partial u}\eta\phi + \frac{\partial F}{\partial u'}\eta\phi' + \frac{\partial^2 F}{2\partial u^2}\eta^2\phi^2 +$$

$$+\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial u'}\eta^2\phi\phi' + \frac{\partial^2 F}{2\partial u'^2}\eta^2\phi'^2 - F(x, u, u')]dx + o(\|\eta\|^2),$$

odnosno

$$I(\bar{u}) - I(u) = \eta\int_a^b \Big(\frac{\partial F}{\partial u}\phi + \frac{\partial F}{\partial u'}\phi'\Big)dx + \frac{1}{2}\eta^2\int_a^b \Big(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\phi^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial u'}\phi\phi' + \frac{\partial^2 F}{\partial u'^2}\phi'^2\Big)dx + o(\|\eta\|^2).$$

Neka

$$\delta I = \eta\int_a^b \Big(\frac{\partial F}{\partial u}\phi + \frac{\partial F}{\partial u'}\phi'\Big)dx,$$

predstavlja prvu varijaciju,

$$\delta^2 I = \frac{1}{2}\eta^2 \int_a^b \Big(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\phi^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial u'}\phi\phi' + \frac{\partial^2 F}{\partial u'^2}\phi'^2\Big)dx$$

neka predstavlja drugu varijaciju.

**Napomena:** *Potreban* uslov $\delta I = 0$ dovodi do stacionarne funkcije $u(x)$. $u(x)$ kao stacionarna funkcija može biti minimum, maksimum, ili ni jedno od toga. Da bi smo ispitali prirodu stacionarne funkcije, treba nam *dovoljan* uslov, tj.određivanje druge varijacije $\delta^2 I$.

**Napomena:** Tipično, nije potrebno određivanje druge varijacije u aplikacijama, zbog jednog od sledeća dva razloga: prvo, u nekim aplikacijama stacionarna funkcija je stvarno minimum, i nije potrebano da se to i potvrdi, drugo, neke aplikacije su koncentrisane samo na traženje stacionarne tačke a ne neophodno ekstrema. Što je slučaj, na primer, u aplikacijama Hamiltonovog principa do dinamičkih sistema (čitalac se upućuje na [1] (4.1)).

Pretpostavlja se da je parametar $\eta$ tako mali da važi:

$$I(\bar{u}) - I(u) = \eta \int_a^b \Big(\frac{\partial F}{\partial u}\phi + \frac{\partial F}{\partial u'}\phi'\Big)dx + r(x, u, \eta, \phi),$$

gde $r(x, u, \eta, \phi) \to 0$, kad $\eta \to 0$.

Kako je parametar $\eta$ proizvoljnog znaka, da bi $I(u)$ imalo ekstrem, $\delta I$ mora biti jednako 0:

$$\delta I = \eta \int_a^b \Big(\frac{\partial F}{\partial u}\phi + \frac{\partial F}{\partial u'}\phi'\Big)dx = 0$$

Znajući:

$$\frac{d}{dx}\Big(\phi\frac{\partial F}{\partial u'}\Big) = \phi'\frac{\partial F}{\partial u'} + \phi\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'},$$

tj.

$$\phi'\frac{\partial F}{\partial u'} = \frac{d}{dx}\Big(\phi\frac{\partial F}{\partial u'}\Big) - \phi\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'}$$

zamenjujući u $\delta I$ dobije se:

$$\delta I = \Big[\eta\phi(x)\frac{\partial F}{\partial u'}\Big]_a^b + \eta \int_a^b \Big(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'}\Big)\phi(x)dx = 0. \tag{2.4}$$

Varirane trajektorije moraju ispunjavati granične uslove $u(a) = A, u(b) = B$, pa važi:

$$\delta u(a) = \delta u(b) = 0,$$

tj.

$$\phi(a) = \phi(b) = 0. \tag{2.5}$$

Primenjujući (2.5) na jednačinu (2.4), izraz za prvu varijaciju postaje:

$$\delta I = \eta \int_a^b \Big(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'}\Big)\phi(x)dx = 0,$$

a uz $\delta u = \eta\phi(x)$ dobije se:

$$\delta I = \int_a^b \Big(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'}\Big)\delta u dx = 0.$$

Primenjujući $\delta u(a) = \delta u(b) = 0$ na dokazanu lemu (2.1.1) a) sledi ponovo *Ojler-Lagranžova jednačina*

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} = 0.$$

## 2.2 Specijalni slučajevi Ojler-Lagranžove jednačine

Posmatraju se dva specijalna slučaja Ojler-Lagranžove jednačine

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} = 0.$$

1. Ako funkcija $F(x, u(x), u'(x))$ ne zavisi eksplicitno od *zavisne promenljive u(x),* u kom slučaju $F = F(x, u')$, tada $\frac{\partial F}{\partial u} = 0$, i Ojler-Lagranžova jednačina postaje:

$$-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} = 0,$$

iz čega integracijom po $x$ se dobije:

$$\frac{\partial F}{\partial u'} = const.$$

2. Ako funkcija $F(x, u(x), u'(x))$ ne zavisi eksplicitno od *nezavisne promenljive x,* u kom slučaju $F = F(u, u')$, možemo posmatrati Ojler-Lagranžovu jednačinu direktno. Primetimo da za $F(x, u, u')$ važi:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial F}{\partial u'}\frac{d^2u}{dx^2}.$$

Izrazimo:

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial F}{\partial u'}\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{dF}{dx} - \frac{\partial F}{\partial x}. \tag{2.6}$$

Ojler-Lagranžova jednačina se množi sa $du/dx$:

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{dx} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial u'}\frac{du}{dx}\Big) + \frac{\partial F}{\partial u'}\frac{d^2u}{dx^2} = 0.$$

Umesto prvog i trećeg izraza u prethodnoj jednačini stavlja se (2.6), i dobije se sledeća forma Ojler-Lagranžove jednačine:

$$\frac{dF}{dx} - \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial u'}\frac{du}{dx}\Big) = 0$$

Kako zbog $F(u, u')$ je $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, prethodni izraz postaje:

$$\frac{dF}{dx} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial u'}\frac{du}{dx}\Big) = 0$$

Integracijom po $x$ se dobije:

$$F - \frac{\partial F}{\partial u'}\frac{du}{dx} = const.$$

Može se pokazati da je dobijena forma Ojler-Lagranžove jednačine ekvivalenta sa:

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x'} = const.$$

uz $\tilde{F}(u, x') = x'F(u, (x')^{-1})$.

Poslednji izrazi su dobijeni prilikom zamene uloge zavisne i nezavisne promenljive (što je još jedan način rešavanja 2.slučaja), tj.

$$I(u) = \int_a^b F(u, u')dx = \int_A^B F\Big[u, \Big(\frac{dx}{du}\Big)^{-1}\Big]\frac{dx}{du}du = \int_A^B F\Big[u, (x')^{-1}\Big]x'du$$

$$I(x(u)) = \int_A^B \tilde{F}(u, x')du,$$

gde je $\tilde{F}(u, x') = x'F[u, (x')^{-1}]$. Što opet dovodi na prvi slučaj, jer $x(u)$ kao zavisna promenljive nije data explicitno, pa Ojler-Lagranžova jednačina je:

$$-\frac{d}{du}\Big(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x'}\Big) = 0,$$

gde posle integracije po $u$ tačno dođemo do $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x'} = const.$

Sledeći primer se smatra elementarnim zadatkom pomoću kojeg se ilustruje primena varijacionog računa. Kroz primer, osvrnućemo se na specijalni slučaj 1. Ujedno ovaj primer pokazuje formalni matematički dokaz univerzalne činjenice, da je najkraća udaljenost između dve tačke prava linija.

**Primer 2.2.1.** *Koja kriva u ravni, koja spaja tačke $(a, A)$ i $(b, B)$ ima najmanju dužinu?*

Intuitivno, znamo da je to prava linija. Tražimo krivu $u(x)$ od tačke $(a, A)$ do $(b, B)$. Dužina luka krive $u(x)$ za koju važi $u(a) = A, u(b) = B$ je data sa:

$$I(u) = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + u'^2(x)}dx.$$

Tražimo krivu $u(x)$, koja minimizira funkcionelu $I(u)$. Podintegralna funkcija je $\sqrt{1 + u'^2(x)} = F(u')$, što nas dovodi do specijalnog slučaja 1.
$\frac{\partial F}{\partial u} = 0$ jer $F$ ne zavisi od $u$, pa Ojler-Lagranžova jednačina je:

$$-\frac{d}{dx}\Big(u'[1 + (u')^2]^{-\frac{1}{2}}\Big) = 0.$$

Računamo prethodnu diferencijalnu jednačinu prvog reda:

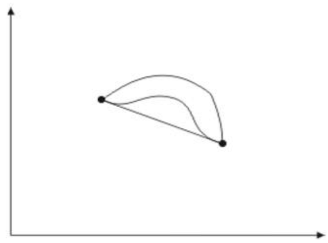
$$u'[1 + (u')^2]^{-\frac{1}{2}} = \tilde{c}$$

$$u' = \tilde{c}[1 + (u')^2]^{\frac{1}{2}}$$
$$(u')^2 = \tilde{c}^2[1 + (u')^2]$$
$$(1 - \tilde{c}^2)(u')^2 = \tilde{c}^2$$
$$(u')^2 = d$$
$$u' = c_1$$
$$u(x) = c_1 x + c_2.$$

Posle primene graničnih uslova $u(a) = A, u(b) = B$ dobije se:

$$u(x) = \frac{B - A}{b - a}x + \frac{bA - aB}{b - a}, \qquad x \in [a, b]$$

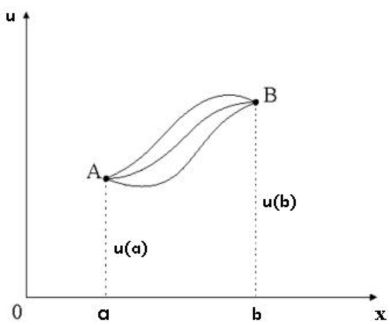
čime je potvrđena naša intuicija. To vidimo na slici 4.



*Slika 4. Najkraća udaljenost između dve tačke je prava linija*

## 2.3 Prirodni granični uslovi

Do sada su rađeni granični uslovi $u(a) = A, u(b) = B$, prikazani na slici 5.




*Slika 5. Granični uslovi* $u(a) = A, u(b) = B$

Posmatra se jednačina:

$$\Big[\frac{\partial F}{\partial u'}\delta u\Big]_a^b + \int_a^b \Big[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial u'}\Big)\Big]\delta u dx = 0. \qquad (2.7)$$

**Napomena:** Računa se: $\delta I(u) = \int_a^b \delta F(x, u, u')dx = 0$. Uz $\delta x = 0$, i činjenicu da su varijacioni i diferencijalni operator komutativni (ako se diferenciranje vrši u odnosu na nezavisnu promenljivu) pa nakon parcijalne integracije, dobije se prethodna jednačina.
Do sada je bio slučaj da su $u(a), u(b)$ fiksirani na krajevima intervala i $\delta u|_a^b = 0$, i time bi prvi izraz u (2.7) bio eliminisan.
Može se dogoditi da su krajevi intervala $a$ i $b$ poznati, ali vrednost funkcije $u(x)$ u njima nije poznata: $u(a) =?$ i/ili $u(b) =?$.
Međutim, i ako je na krajevima intervala $[a, b]$ vrednost funkcije $u(x)$ nepoznata i pored toga, generalno ne može se ceo integral (integralimo po $[a, b]$) skratiti sa $\frac{\partial F}{\partial u'}\delta u|_a^b$ (da bi se ovo odredilo trebaju samo dve tačke iz celog domena).
Zbog toga integral i dalje mora biti 0 nezavisno od prvog izraza, i opet se dobije Ojler-Lagranžova jednačina, kao i u slučaja kada su granični uslovi dati.
Zaključak ove priče je:

$$\Big[\frac{\partial F}{\partial u'}\delta u\Big]_a^b = 0.$$

Dakle, i ako nije data vrednost u krajnjim tačkama (u tom slučaju $\delta u|_a^b \neq 0$) granični uslovi koji se "prirodno" nametnu, su:

$$\frac{\partial F}{\partial u'}\Big|_a = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial u'}\Big|_b = 0.$$

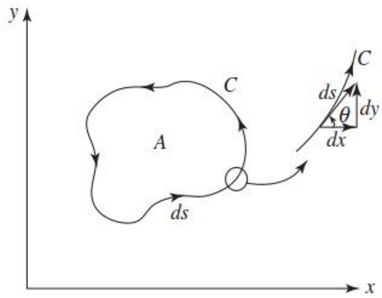
Zovu se *prirodni granični uslovi* za slučaj $F(x, u, u')$ i oni zamenjuju $u(a) = A$ i $u(b) = B$, u slučaju da ovi nisu dati.
**Napomena:** U nekim slučajevima granice domena nisu fiksne, i moraju se odrediti zajedno sa stacionarnom funkcijom. Primer najkraće udaljenosti između dve krive je idealno objašnjenje prethodno rečenog.

## 2.4 Funkcionela sa dve nezavisne promenljive

Funkcionela sa jednom nezavisnom promenljivom dovodi do diferencijalne jednačine prvog reda. Za funkcionelu sa dve nezavisne promenljive, $x$ i $y$, dobijemo Ojler-Lagranžovu jednačinu sa parcijalnim izvodima, što pokazujemo.
Posmatra se funkcija $u$ sa dve nezavisne promenljive $x, y$ :

$$I(u(x,y)) = \int\int_A F(x, y, u, u_x, u_y)dxdy$$

gde je $A$ oblast u $(x, y)$ ravni, a $ds$ diferencijalni element po krivoj $C$ koja okružuje oblast $A$, u smeru suprotnom od smera kazaljke na satu (slika 6).




*Slika 6. Šema dvo-dimenzionalne oblasti A ograničene sa krivom C*

Tražimo stacionarnu funkciju $u(x, y)$ funkcionele $I(u)$ u oblasti $A$. Određuje se varijacija funkcionele i izjednačava sa 0:

$$\delta I(u) = \int\int_A \delta F(x, y, u, u_x, u_y)dxdy = 0.$$

Posmatra se podintegralni deo, tj. primeni varijacija na $F$ :

$$\int\int_A \Big[\frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u_x}\delta u_x + \frac{\partial F}{\partial u_y}\delta u_y\Big]dxdy = 0.$$

Varijacije nezavisnih promenljivih su 0, pa je:

$$\int\int_A \Big[\frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u_x}\delta\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big) + \frac{\partial F}{\partial u_y}\delta\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)\Big] dxdy = 0$$

iz čega, zbog komutativnosti varijacije i izvoda sledi:

$$\int\int_A \Big[\frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u_x}\frac{\partial}{\partial x}(\delta u) + \frac{\partial F}{\partial u_y}\frac{\partial}{\partial y}(\delta u)\Big] dxdy = 0. \tag{2.8}$$

Dodajući i oduzimajući u podintegralnoj funkciji (2.8) sledeće izraze $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial F}{\partial u_x})\delta u$ i $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial F}{\partial u_y})\delta u$ i kombinujući određene delove dobije se:

$$\begin{aligned} \int\int_A \Big[\frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial F}{\partial u_x}\delta u\Big) - \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial F}{\partial u_x}\Big)\delta u \\ + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial F}{\partial u_y}\delta u\Big) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial F}{\partial u_y}\Big)\delta u\Big] dxdy = 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Podsetimo se *teoreme divergencije*

$$\int\int_A \nabla \cdot \mathbf{v} dA = \oint_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds,$$

gde je $\mathbf{v}$ vektor, a $\mathbf{n}$ je spoljašnja normala na krivu $C$ koja okružuje površinu $A$.
Neka je u dve dimenzije

$$\mathbf{v} = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}, \qquad \mathbf{n} = \frac{dy}{ds}\mathbf{i} - \frac{dx}{ds}\mathbf{j},$$

gde su $P(x,y), Q(x,y)$ proizvoljne funkcije. Uz

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j},$$

teorema divergencije postaje:

$$\int\int_A \Big(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\Big) dxdy = \oint_C \Big(P\frac{dy}{ds} - Q\frac{dx}{ds}\Big) ds = \oint_C (Pdy - Qdx).$$

Primenjujemo teoremu divergencije na (2.9). Neka je $P = \frac{\partial F}{\partial u_x}\delta u, Q = \frac{\partial F}{\partial u_y}\delta u$ tada jednačina (2.9) postaje:

$$\int\int_A \Big[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial F}{\partial u_x}\Big) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial F}{\partial u_y}\Big)\Big]\delta u dxdy + \oint_C \Big[\frac{\partial F}{\partial u_x}\frac{dy}{ds} - \frac{\partial F}{\partial u_y}\frac{dx}{ds}\Big]\delta u ds = 0.$$

Dakle, za $F(x, y, u, u_x, u_y)$ Ojler-Lagranžova jednačina je:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial F}{\partial u_x}\Big) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial F}{\partial u_y}\Big) = 0 \tag{2.10}$$

što je parcijalna diferencijalna jednačina.
**Napomena:** Ojler-Lagranžove jednačine, za funkcionelu sa **dve zavisne** promenljive $u, v : I(u, v) = \int\int_A F(x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y)dxdy$, su oblika (2.10). Jedna je identična sa (2.10) a druga se dobije zamenom $v$ umesto $u$ u jednačini (2.10).
Na granici $C$, funkcija $u(x, y)$ je data sa $u(x, y) = u_0(x, y)$, u kom slučaju je $\delta u = 0$, ili se mogu primeniti prirodni granični uslovi:

$$\frac{\partial F}{\partial u_x}\frac{dy}{ds} - \frac{\partial F}{\partial u_y}\frac{dx}{ds} = 0.$$

Uopšteno, Ojler-Lagranžova jednačina za funkciju $F = F(x, y, u, \nabla u)$ gde $u = u(x, y)$ je:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \nabla\Big(\frac{\partial F}{\partial \nabla u}\Big) = 0,$$

a prirodni granični uslovi su:

$$\mathbf{n}^T\frac{\partial F}{\partial \nabla u} = 0$$

na $C$, gde je $C$ granica oblasti A, a $\mathbf{n}$ je spoljašnja normala na krivu $C$.

## 2.5 Varijacioni problem sa ograničenjem

U mnogim varijacionim problemima se traži stacionarna funkcija funkcionele uz dato ograničenje. Primenimo priču iz odeljka (1.2) na datu funkcionelu. Posmatra se funkcionela:

$$I(u) = \int_a^b F(x, u, u')dx \tag{2.11}$$

sa ograničenjem datim u obliku određenog integrala

$$\int_a^b W(x, u, u')dx = K = const. \tag{2.12}$$

Ograničenje (2.12) se može napisati:

$$\lambda\Big[\int_a^b W(x, u, u')dx - K\Big] = 0,$$

gde je $\lambda$ Lagranžov množitelj. Radeći varijaciju:

$$\delta\Big(\lambda\Big[\int_a^b W(x,u,u')dx - K\Big]\Big) = 0,$$

ili

$$\lambda\delta\int_a^b W(x,u,u')dx = 0,$$

jer je $K = const.$
Poslednji rezultat se kombinuje sa varijacijom funkcionele (2.11), koja je nula (tj.kombinuju se dva izraza koji su nule, pa će i njihova suma biti 0):

$$\delta\Big[\int_a^b F(x,u,u')dx + \lambda\int_a^b W(x,u,u')dx\Big] = 0,$$

ili iz $\tilde{F} = F + \lambda W$ možemo pisati:

$$\delta\int_a^b \tilde{F}(\lambda,x,u,u')dx = 0.$$

Dakle, traženje stacionarne funkcije funkcionele (2.11) sa ograničenjem (2.12) u obliku integrala, je ekvivalentno traženju stacionarne funkcije funkcionele, čija je podintegralna funkcija $\tilde{F} = F + \lambda W$, bez ograničenja.
**Napomena:** Ograničenja mogu biti i u obliku algebarskih ili diferencijalnih jednačina, sa razlikom da $\lambda$ više nije konstanta već neprekidna funkcija, $\lambda(x)$.

## 2.6 Sturm-Liouvillov problem

Da bi obična diferencijalna jednačina bila samoadjungovana, njen operator mora biti u Sturm-Liouvillovoj formi, što je pokazano u odeljku (1.4). Posmatramo funkcionelu određene forme sa ograničenjem u obliku integrala. Odgovarajuću Ojler-Lagranžovu jednačinu dobićemo u Sturm-Liouvillovom obliku, iz čega sledi jedna važna posledica za varijacioni račun.
Traži se stacionarna funkcija $u(x)$ funkcionele $(p(x), q(x), r(x)$ su poznate funkcije):

$$I(u) = \int_a^b [q(x)u^2 - p(x)(u')^2]dx \tag{2.13}$$

sa ograničenjem

$$\int_a^b r(x)u^2 dx = 1. \tag{2.14}$$

Iz odeljka (2.5) Lagranžova pomoćna funkcija je:

$$\tilde{F}(\lambda, x, u, u') = q(x)u^2 - p(x)(u')^2 + \lambda[r(x)u^2].$$

Radeći parcijalne izvode potrebne za Ojler-Lagranžovu jednačinu dobije se:

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial u} = 2q(x)u + 2\lambda r(x)u, \qquad \frac{\partial \tilde{F}}{\partial u'} = -2p(x)u'.$$

Ojler-Lagranžova jednačina je:

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial u} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial u'}\Big) = 0$$

$$q(x)u + \lambda r(x)u - \frac{d}{dx}[-p(x)u'] = 0$$

ili

$$\frac{d}{dx}\Big[p(x)\frac{du}{dx}\Big] + [q(x) + \lambda r(x)]u(x) = 0. \tag{2.15}$$

Dakle, stacionarna funkcija $u(x)$ za funkcionelu (2.13) sa ograničenjem (2.14), zadovoljava Sturm-Liouvillovu jednačinu (2.15).
Drugim rečima, Ojler-Lagranžova jednačina je Sturm-Liouvillova jednačina. Jedna posledica ovog rezultata je da svaka jednačina koja je u samoadjungovanoj formi, može biti izražena u varijacionoj formi.

### Najbitniji zaključak drugog dela rada

*Tipična procedura rešavanja varijacionog problema:*
*1. Određivanje funkcionele (varijacione forme) problema*
*2. Određivanje ekvivalentne diferencijalne Ojler-Lagranžove jednačine*
*3. Rešavanje diferencijalne jednačine da bi se dobila stacionarna funkcija funkcionele.*

# 3

# Direktne metode rešavanja

U drugom delu rada smo iz varijacione forme došli do ekvivalentne diferencijalne Ojler-Lagranžove jednačine. Kako i pod kojim uslovima iz diferencijalne jednačine doći u njenu ekvivalentnu varijacionu formu ilustruje se u Rayleigh-Ricovoj metodi. Objašnjava se i Galerkinova metoda, a zatim se prelazi na metod konačnih elemenata (FEM). Razmatraju se linearni i kvadratni Lagranžovi polinomi. Urađeni primeri će pomoći boljem shvatanju razlike između lokalne i globalne aproksimacije stacionarne funkcije. Koristi se literatura [1], [4], i [5].

Neka rešenje varijacionog problema nije dato u zatvorenoj formi. Ako se Ojler-Lagranžova jednačina ne može rešiti u zatvorenoj formi, može se tražiti **aproksimativno (približno)** rešenje sledećim tehnikama:
1) Rešiti Ojler-Lagranžovu jednačinu numeričkim metodama kao što su npr. metoda konačnih elemenata ili spektralna metoda. Obe ove metode su bazirane na metodi težinskih reziduala (npr. Galerkinovoj metodi).
2) Rešiti integralnu varijacionu formu približno, koristeći Rayleigh-Ricov metod ili metod konačnih elemenata baziranom na Rayleigh-Ricovoj metodi.

Radimo Rayleigh-Ricovu i Galerkinovu metodu. Rayleigh-Ricova metoda se primenjuje direktno na varijacionu formu jednačine, koja se zove tzv. *slaba forma*, dok Galerkinova metoda počinje sa Ojler-Lagranžovom jednačinom, tzv. *jakom formom.*

**Napomena:** Prethodna terminologija se javlja zbog činjenice da je zahtevanje neprekidnosti slabiji uslov za integralnu formu, nego za diferencijalnu formu, zbog npr: izvodi drugog reda u diferencijalnoj Ojler-Lagranžovoj jednačini odgovaraju izvodima prvog reda u slaboj formi (posle parcijalne integracije).

## 3.1 Osnovna procedura-Rayleigh Ricov metod

Rayleigh-Ricovu metodu je 1877. godine uved Lord Rayleigh a proširio Walther Ritz 1909. godine. Ova metoda se primenjuje direktno na varijacionu formu da bi se došlo do stacionarne funkcije varijacionog problema. Posmatra se sledeći varijacioni problem:

$$\delta \int_a^b F(x, u, u', ...)dx = 0, \tag{3.1}$$

gde želimo da odredimo stacionarnu funkciju $u(x)$.
Ideja je da se nepoznata funkcija $u(x)$ aproksimira sa $\bar{u}(x)$ koristeći linearnu kombinaciju od $n+1$ unapred određenih baznih funkcija $\phi_0(x), \phi_1(x), ...\phi_n(x)$ na sledeći način:

$$\bar{u}(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i\phi_i(x) = \phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + ... + c_n\phi_n(x), \tag{3.2}$$

gde je $c_0 = 1$. Ova funkcija se zove *test funkcija.*
Na ovaj način se traže koeficijenti $c_i$ koji dovode do najbolje aproksimacije stacionarne funkcije $u(x)$, u zavisnosti od baznih funkcija, koje su date unapred. Ako su bazne funkcije linearno nezavisne, onda postoji jedinstvena kombinacija koeficijenata $c_1, c_2...c_n$.
Ako su krajnje tačke date:

$$u(a) = A, \qquad u(b) = B,$$

prvo se bira bazna funkcija $\phi_0$ tako da zadovoljava granične uslove, a preostale bazne funkcije se biraju ovako:

$$\phi_0(a) = A, \qquad \phi_1(a) = \phi_2(a) = ... = \phi_n(a) = 0,$$

$$\phi_0(b) = B, \qquad \phi_1(b) = \phi_2(b) = ... = \phi_n(b) = 0.$$

Npr., ako $x \in [0, l]$ i $u(0) = 0, u(l) = h$ jedna mogućnost je da se uzme:

$$\phi_0(x) = \frac{h}{l}x$$

što je prava linija između uslova na krajevima intervala. Ovakvi granični uslovi se zovu *esencijalni granični uslovi.*

Zamenom test funkcije (3.2) u funkcionelu (3.1) dobije se varijacioni problem:

$$\delta \int_a^b \bar{F}(x, c_1, c_2, ...c_n)dx = 0,$$

gde se traže koeficijenti $c_i$ za test funkciju.
**Napomena:** Povećavajući $n$ dobije se sve bolja aproksimacija stacionarne funkcije, ali ima više posla da se nađu koeficijenti $c_i$ za test funkciju $\bar{u}$.
*U Rayleigh-Ricovoj metodi tražimo rešenje sistema algebarskih jednačina, dimenzije $n \times n$, gde je $n$ broj konstanti u test funkciji.*

### 3.1.1 Inverzni problem i redukovana varijaciona forma

U drugom delu rada se iz varijacione forme došlo do ekvivalentne diferencijalne jednačine. *Inverzni problem* je pretvaranje diferencijalne jednačine u njenu ekvivalentnu varijacionu formu, pri čemu se diferencijalna jednačina množi sa varijacijom zavisne promenljive, $\delta u$, i integrali po domenu.
Podsetimo se iz odeljka (1.4): diferencijalni operator $\vartheta$ je samoadjungovan ako

$$\langle u, \vartheta v \rangle = \langle v, \vartheta u \rangle,$$

gde su $u(x)$ i $v(x)$ proizvoljne funkcije. Da bi linearni diferencijalni operator bio samoadjungovan, on mora biti u Sturm-Liouvillovoj formi:

$$\vartheta u = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right] + q(x)u = f(x), \tag{3.3}$$

Radimo inverzni problem za diferencijalnu jednačinu (3.3) tj. unutrašnji proizvod $\delta u$ sa diferencijalnom jednačinom: $\langle \vartheta u - f, \delta u \rangle = 0$. Po definiciji unutrašnjeg proizvoda je:

$$\int_a^b (\vartheta u - f)\delta u dx = 0. \tag{3.4}$$

Ova forma se zove *redukovana varijaciona forma.* Koristeći parcijalnu integraciju može se doći do odgovarajuće varijacione forme:

$$\delta \int_a^b F dx = 0. \tag{3.5}$$

Iz odeljka (2.6) znamo da za diferencijalne jednačine u samoadjungovanoj formi odgovarajuća varijaciona forma (3.5) postoji.
**Napomena:** $\vartheta u = f$ je Ojler-Lagranžova jednačina za odgovarajući varijacini problem (3.5) za koji je redukovana varijaciona forma (3.4) ekvivalentna.

Zaključak: U slučaju diferencijalne jednačine u samoadjungovanoj formi, lakše je primeniti Rayleigh-Ricovu metodu direktno na redukovanu varijacionu formu, nego prvo doći do odgovarajuće varijacione forme (3.5) a onda primeniti Rayleigh-Ricov metod. Ilustrujemo oba načina jednim primerom.

**Primer 3.1.1.** *Primeniti Rayleigh-Ricov metod na jednačinu:*

$$\frac{d^2u}{dx^2} - u = -x$$

*sa graničnim uslovima* $u(0) = 0, u(1) = 0$.

Diferencijalnu jednačinu pretvorimo u njenu ekvivalentnu varijacionu formu, da bi smo je mogli rešiti Rayleigh-Ricovom metodom. Tj.radimo *inverzni problem,* množimo jednačinu sa $\delta u$ i integralimo po domenu:

$$\int_0^1 (u'' - u + x)\delta u dx = 0.$$

Radeći parcijalnu integraciju dobije se:

$$u'\delta u|_0^1 + \int_0^1 (-u'\delta u' - u\delta u + x\delta u)dx = 0.$$

Zbog graničnih uslova prvi izraz je 0, a u drugom izrazu se $\delta$ izvuče:

$$\delta \int_0^1 \Big[ -\frac{1}{2}(u')^2 - \frac{1}{2}u^2 + xu \Big] dx = 0,$$

što se dalje može napisati:

$$\delta \int_0^1 \Big[ (u')^2 + u^2 - 2xu \Big] dx = 0. \tag{3.6}$$

Međutim, ako malo bolje pogledamo jednačinu, vidimo da je ovo samoadjungovana forma, sa $p(x) = 1, q(x) = -1, f(x) = -x$. U ovakvom slučaju zaključili smo, da je lakše primeniti Rayleigh-Ricovu metodu direktno na redukovanu varijacionu formu!
Dakle, nismo morali sve prethodno računati, već samo napisati u redukovanoj varijacionoj formi:

$$\int_0^1 (u'' - u + x)\delta u dx = 0.$$

Sledi ilustracija Rayleigh-Ricove metode.

Uzmimo $\phi_0 = 0$, da bi zadovoljavala date granične uslove. Neka je $n = 2$, tj. imamo dve bazne funkcije: $\phi_1 = x(1-x), \phi_2 = x^2(1-x)$. Primetimo da su bazne funkcije tako birane, da su 0 na krajevima intervala $x = 0, x = 1$. Aproksimativna funkcija je:

$$\bar{u}(x) = x(1-x)c_1 + x^2(1-x)c_2.$$

$$\bar{u}''(x) = -2c_1 + 2(1-3x)c_2$$

Zamenom u npr. redukovanu varijacionu formu sa:

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial c_1}\delta c_1 + \frac{\partial u}{\partial c_2}\delta c_2$$

dobije se:

$$\int_0^1 [-2c_1+2(1-3x)c_2-(x-x^2)c_1-(x^2-x^3)c_2+x]\cdot[(x-x^2)\delta c_1+(x^2-x^3)\delta c_2]dx = 0.$$

Množimo izraze, grupišemo po $\delta c_1$ i $\delta c_2$, pa integralimo po $x$, nakon čega se dobije:

$$\Big(-\frac{11}{30}c_1 - \frac{11}{60}c_2 + \frac{1}{12}\Big)\delta c_1 + \Big(-\frac{11}{60}c_1 - \frac{1}{7}c_2 + \frac{1}{20}\Big)\delta c_2 = 0.$$

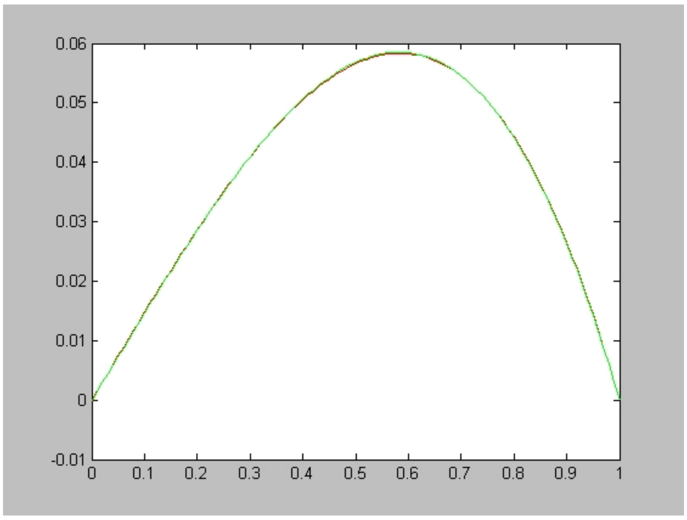
Izjednačavanjem koeficijenata uz $\delta c_1$ i $\delta c_2$ sa nulom, dolazi se do sistema $2\times 2$ čijim rešavanjem se dobije:

$$c_1 = \frac{69}{473}, \qquad c_2 = \frac{7}{43},$$

pa je aproksimativno rešenje sa $n = 2$:

$$\bar{u}(x) = \frac{69}{473}x(1-x) + \frac{7}{43}x^2(1-x).$$

Plotovanjem u programskom paketu *Matlab* prikazano je tačno rešenje jednačine iz ovog primera i aproksimativno rešenje koje smo dobili za $n = 2$ (slika 7). U Dodatku se nalazi kod za sliku.




*Slika 7. Crvenom bojom je označeno tačno rešenje ODJ iz primera (3.1.1), a zelenom bojom aproksimativno rešenje koje smo dobili za n=2*

## 3.2 Metoda Galerkina

Galerkin metodu je 1915. godine uveo ruski matematičar Boris Grigoryevich Galerkin.
Ova metoda je bazirana na *metodi težinskih rezidula.* Činjenica da nije potrebno pisati jednačinu u varijacionoj formi, ovoj metodi daje prednost u odnosu na Rayleigh-Ricovu metodu, i omogućuje da Galerkin metoda bude primenjena na mnogo širu klasu problema.
Posmatra se diferencijalna jednačina, tj. jaka forma:

$$\vartheta u = f,$$

i traži se aproksimacija rešenja ove jednačine.
Kao u Rayleigh-Ricovoj metodi, aproksimiramo tačno rešenje pomoću *test funkcije,* koja se sastoji od linearne kombinacije baznih funkcija:

$$\bar{u}(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \phi_i(x) = \phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + ... + c_n\phi_n(x).$$

Rezidual

$$R(x) = \vartheta \bar{u} - f,$$

predstavlja meru greške aproksimacije, gde je $\bar{u}$ aproksimativno rešenje.
**Napomena:** Naravno, ukoliko je $u(x) = \bar{u}(x)$, tada je rezidual 0.

**Metoda težinskih reziduala**

U metodi težinskih reziduala, rezidual se množi sa skupom težinskih funkcija $\omega_i(x), i = 1, 2...M$, i integrali po domenu:

$$\int_a^b (\vartheta\bar{u} - f)\omega_i dx = 0$$

ili

$$\langle R(x), \omega_i(x)\rangle = 0$$

za sve $i = 1, 2...M$.
Galerkin metoda se dobije u slučaju $\omega_i(x) = \phi_i(x)$. Za težinske funkcije se mogu uzeti i Dirakove delta funkcije, što je *kolokacioni metod,* takođe, može se uzeti rezidual kao težinska funkcija, što je *metod najmanjih kvadrata.*
**Napomena:** U metodi Galerkina je $n + 1 = M$, jer $\phi_i$ su u stvari težinske funkcije (u Galerkin metodi imamo $n + 1$ baznu funkciju).
*Galerkinova i Rayleigh-Ricova metoda daju isto aproksimativno rešenje $\bar{u}$ kada se radi sa samoadjungovanim operatorom i istom test funkcijom.*
Pokazujemo, da i Galerkin metoda daje isto aproksimativno rešenje kao i Rayleigh-Ricova metoda, za jednačinu iz primera (3.1.1).

**Primer 3.2.1.** *Rešiti Galerkin metodom :*

$$\frac{d^2u}{dx^2} - u = -x, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$

U primeru (3.1.1) je pokazano da jednačina jeste u samoadjungovanoj formi. Uzimamo istu test funkciju, tj. $n = 2$:

$$\bar{u}(x) = x(1 - x)c_1 + x^2(1 - x)c_2$$

i tražimo aproksimativno rešenje Galerkin metodom.
Za Galerkin metodu je

$$\langle R(x), \phi_i(x)\rangle = 0,$$

jer $\omega_i(x) = \phi_i(x)$, što u obliku integrala izgleda:

$$\int_0^1 (\vartheta\bar{u} - f)\phi_i dx = 0.$$

U našem slučaju je:

$$\int_0^1 (\bar{u}'' - \bar{u} + x)\phi_i dx = 0.$$

Posle parcijalne integracije i primene graničnih uslova dobije se slaba forma:

$$\int_0^1 (-\bar{u}'\phi_i' - \bar{u}\phi_i + x\phi_i)dx = 0.$$

Ova slaba forma sadrži samo izvode prvog reda, i manje je restriktivna u odnosu na neprekidnost izvoda, za razliku od izvoda drugog reda koji se javljaju u redukovanoj varijacionoj formi.
Za $i = 1$ tj. $\phi_1(x) = x(1 - x)$ je:

$$\int_0^1 \Big\{-[(1-2x)c_1+(2x-3x^2)c_2][1-2x]-[(x-x^2)c_1+(x^2-x^3)c_2][x-x^2]+x[x-x^2]\Big\}dx = 0.$$

Integracijom po $x$, uz granične uslove, dobije se prva jednačina sistema $2 \times 2$:

$$22c_1 + 11c_2 = 5.$$

Druga jednačina se dobije na isti način, tj. za $i = 2$: $77c_1 + 60c_2 = 21$. Rešavajući ovaj sistem, dobiju su koeficijenti $c_1, c_2$ isti kao u primeru (3.1.1), tj. dobije se ista test funkcija kao u Rayleigh-Ricovoj metodi.
**Napomena:** U primeru (3.1.1) rađen je unutrašnji proizvod varijacije zavisne promenljive i diferencijalne jednačine, što je u suštini isto kao uzimanje unutrašnjeg proizvoda sa težinskim funkcijama u (3.2.1) i u oba slučaja je rađena parcijalna integracija. Iz čega se vidi da su Galerkin i Rayleigh-Ricova metoda slične, a opet i različite.

## 3.3 Metoda konačnih elemenata-FEM

Metoda konačnih elemenata je jedna od najpopularnijih numeričkih metoda. U svojoj originalnoj formi, bila je bazirana na varijacionoj metodi. Početkom 1960. godine proširila se na druga polja.

U FEM metodi, neprekidan domen se diskretizuje u skup povezanih *konačnih elemenata* definisanih sa mrežom čvorova. U zavisnosti od domena, mogu biti desetine, hiljada, ili čak i milione elemenata za kompleksnije probleme.

Za razliku od Rayleigh-Ricove i Galerkinove metode, gde je test funkcija bila primenjena na ceo domen, u FEM se *test funkcija primenjuje na svaki element pojedinačno.* Zbog diskretizacije domena uz pomoć velikog broja elemenata, dovoljno je koristiti polinome nižeg reda kao test funkcije za svaki element. Linearni i kvadratni polinomi, o kojima ćemo pričati, dolaze u obzir.

U Rayleigh-Ricovoj metodi baziranoj na FEM, imamo ograničenje da jednačina mora imati varijacionu formu, i tu u obzir dolaze samo PDJ sa samoadjungovanim diferencijalnim operatorom. Ovakvo ograničenje se može prevazići koristeći metodu baziranu na težinskim rezidualima, npr. Galerkinovu.

## 3.4 Rayleigh-Ricova metoda bazirana na metodi konačnih elemenata

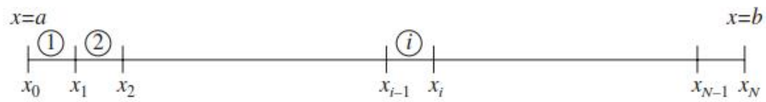
Polazi se od slabe, integralne forme. Traži se stacionarna funkcija funkcionele:

$$I(u) = \int_a^b F(x, u, u')dx$$

uzimajući njenu varijaciju i izjednačavajući sa nulom:

$$\delta \int_a^b F(x, u, u')dx = 0.$$

Domen $[a, b]$ se diskretizuje na $N$ intervala (tj. elemenata). Imamo $N + 1$ čvornih tačaka smeštenih u $x_i, i = 0, 1...N$ kao na slici 8.




*Slika 8. Diskretizovan domen u 1D*

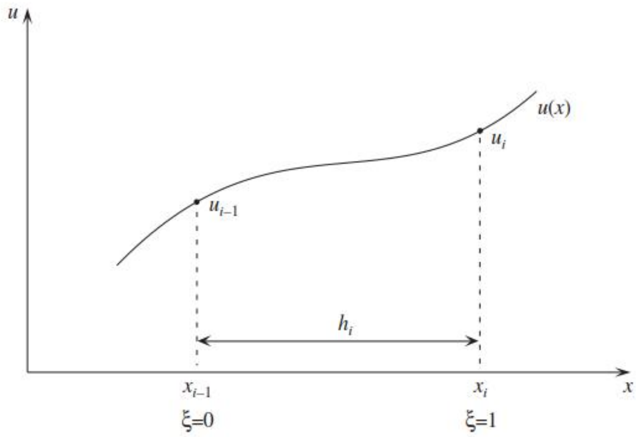
Posmatramo $i$-ti element na slici 9. Sa globalne promenljive $x$ se prelazi na *lokalnu promenljivu* $\xi$ na svakom elementu. $\xi = 0$ odgovara levom čvoru $x_{i-1}$, u kom $u(x) = u_{i-1}$, a $\xi = 1$ odgovara desnom čvoru $x_i$, u kom $u(x) = u_i$. Ako je razlika susednih čvorova $x_i - x_{i-1} = h_i$, tada

$$\xi = \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, \qquad x \in [x_{i-1}, x_i].$$

Ovim smo problem transformisali u:

$$x = x_{i-1} + h_i\xi, \qquad dx = h_i d\xi, \qquad \frac{d}{dx} = \frac{d\xi}{dx}\frac{d}{d\xi} = \frac{1}{h_i}\frac{d}{d\xi}.$$

Na intervalu $\xi \in [0, 1], u(\xi)$ može biti apriksimirano koristeći Rayleigh-Ricov metod u terminima test funkcije, zvane *shape funkcija,* tj. kada se test funkcija primeni na individualni element (kada se izvrši restrikcija test funkcije na element).




*Slika 9. Šema i-tog elementa*

Shape funkcija je data na sledeći način:

$$u(\xi) = u_{i-1}\phi_L(\xi) + u_i\phi_R(\xi).$$

**Napomena:** Vrednosti $u_{i-1}$ i $u_i$ zamenjuju konstante $c_i$ u Rayleigh-Ricovoj metodi.
Dakle, određuju se funkcije $\phi_L(\xi)$ i $\phi_R(\xi)$ i traže vrednosti čvorova $u_{i-1}, u_i$ između elemenata.
Generalno, svaka funkcija može biti shape funkcija. Međutim, zbog računanja integrala se koriste polinomi. Uzmimo linearne funkcije:

$$\phi_L(\xi) = 1 - \xi, \qquad \phi_R(\xi) = \xi,$$

u kom slučaju je funkcija $u(\xi)$ na $i - tom$ elementu aproksimirana sa:

$$u(\xi) = u_{i-1}(1 - \xi) + u_i\xi = u_{i-1} + \xi(u_i - u_{i-1}).$$

Primetimo da je $u(0) = u_{i-1}$ i $u(1) = u_i$. Varijacioni problem za ceo domen je suma Rayleigh-Ricovih aproksimacija na svakom elementu:

$$\delta I \approx \sum_{i=1}^{N} \delta \int_0^1 F_i(\xi, u_{i-1}, u_i) d\xi = 0,$$

gde je $I = I(u_0, u_1, ...u_N)$. Ovakvim rezonovanje smo, umesto do globalne aproksimacije kao kod Rayleigh-Ricovog metoda, došli do lokalne aproksimacije, gde se svaki element aproksimira sa test funkcijom.
**Napomena:** Uopšteno, sistem koji se dobije u Rayleigh-Ricovoj metodi baziranoj na FEM je tridijagonalni sistem od N+1 jednačine sa N+1 nepoznatom $u_0, u_1...u_N$.

## 3.5 Lagranžovi polinomi

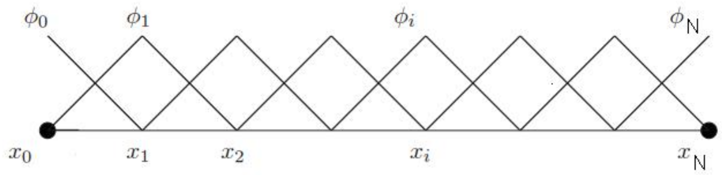
Aproksimacija tačnog rešenja i dalje je određena baznim funkcijama i koeficijentima, ali nas sada interesuju oblici baznih funkcija. Razmatramo linearne i kvadratne Lagranžove polinome.
Polinomi, za koje važi:

$$\phi_j(x_k) = \begin{cases} 1, & \text{ako } j = k, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

za $j, k = 0, 1/2, 1..., N-1, N-1/2, N$ zovu se *Lagranžovi polinomi.*
**Napomena:** Za bazne funkcije u FEM metodi se biraju funkcije koje su: jednostavne, imaju kompaktan nosač, i neprekidne i diferencijabilne, sem u čvornim tačkama.
Po delovima neprekidni linearni Lagranžovi polinomi, koji se definišu:

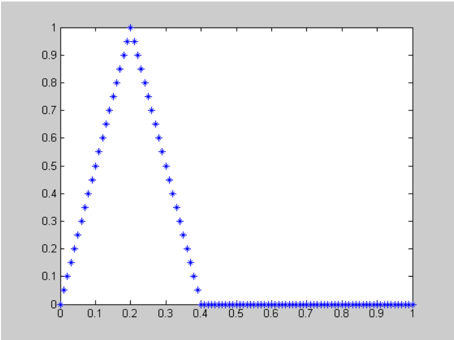
$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} = \frac{x-x_{i-1}}{h_i}, & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} = \frac{x_{i+1}-x}{h_{i+1}} & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

na mreži $x_0 < x_1 < ... < x_N$, zovu se *hat* funkcije. Prikazani su na slici 10. Kako su za njih ispunjeni uslovi iz prethodne napomene, hat funkcije se mogu uzeti kao bazne funkcije u FEM metodi.

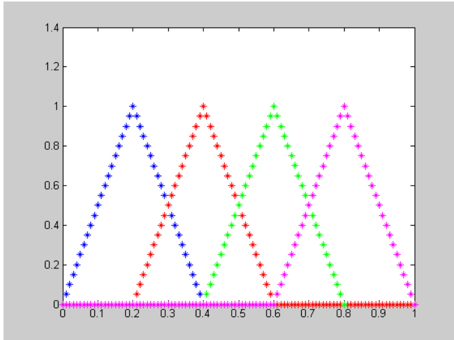



*Slika 10. Hat funkcije*

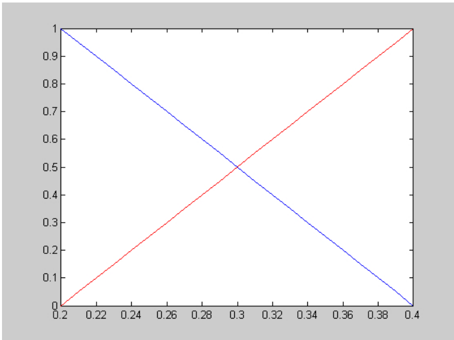
Neka su $0, 0.2, 0.4, 0.6.0.8, 1$ čvorne tačke na intervalu $[0, 1]$. Na slici 11. je prikazana hat funkcija $\phi_1$ na celom domenu $[0, 1]$. Na slici 12. su prikazane hat funkcije $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$. Na slici 13. su dve hat funkcije $\phi_1$ i $\phi_2$ prikazane na istom elementu $[x_1, x_2] = [0.2, 0.4]$. Kodovi za plotovanje ovih slika se nalaze u Dodatku.
FEM metoda nije ograničena samo na po delovima neprekidne linearne Lagranžove polinome, već postoje i proširenja na polinome većeg stepena, npr. kvadratni, kubni...itd Lagranžovi polinomi. Ovi polinomi se generišu dodavanjem određenog broja čvorova u unutrašnjost elemenata.



*Slika 11. Hat funkcija* $\phi_1$



*Slika 12. Hat funkcije* $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$



*Slika 13. Restrikcija hat funkcija na jedan element:* $\phi_1$ *plava,* $\phi_2$ *crvena*

### Kvadratni Lagranžovi polinomi

Za bazne funkcije mogu se uzeti i kvadratni Lagranžovi polinomi, koji se konstruišu dodavanjem dodatnog čvora $x_{i-1/2}$ u sredinu svakog elementa $[x_{i-1}, x_i], i = 1, ...N$.
Kvadratni Lagranžovi polinomi povezani sa čvorovima su:

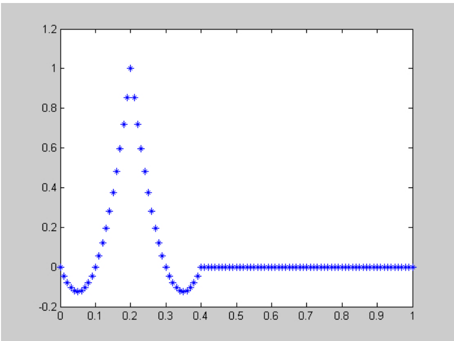
$$\phi_i(x) = \begin{cases} 1 + 3(\frac{x-x_i}{h_i}) + 2(\frac{x-x_i}{h_i})^2 & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ 1 - 3(\frac{x-x_i}{h_{i+1}}) + 2(\frac{x-x_i}{h_{i+1}})^2 & x \in [x_i, x_{i+1}], i = 0, ...N. \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

a oni povezani sa središnjom tačkom elementa su:

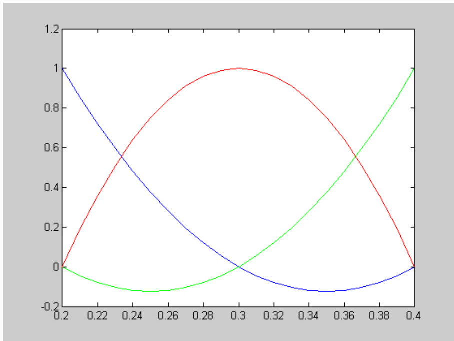
$$\phi_{i-1/2}(x) = \begin{cases} 1 - 4(\frac{x-x_{i-1/2}}{h_i})^2, & x \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, ...N. \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Analogno hat funkcijama, uradimo isto za kvadratne Lagranžove polinome.

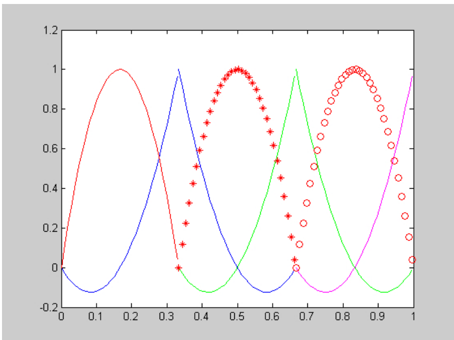
Na slici 14. je kvadratni polinom $\phi_1$ na celom domenu $[0,1]$. Na slici 15. je prikazan element $[0.2, 0.4]$ sa kvadratnim polinomima na njemu. Na elementu se nalaze tri nenula kvadratna polinoma, tj.restrikcije polinoma $\phi_1$ (plava), $\phi_2$ (zelena), i kvadratni polinom $\phi_{1/2}$ (crvena). Na slici 16. su prikazani kvadratni Lagranžovi polinomi uz podelu intervala na $0, 1/3, 2/3, 1$. Kodovi za plotovanje ovih slika se nalaze u Dodatku.




*Slika 14. Kvadratni polinom* $\phi_1$




*Slika 15. Kvadratni polinomi na jednom elementu*




*Slika 16. Kvadratni polinomi:* $\phi_1$ *plava,* $\phi_2$ *zelena,* $\phi_3$ *roza, crvene su kvadratne funkcije* $\phi_{1/2}, \phi_{3/2}, \phi_{5/2}$

Na slikama se vidi da linearni i kvadratni Lagranžovi polinomi imaju sledeće osobine:
1)$\phi_i, i = 0, 1...N$ je jedinica u čvoru $i$, u svim ostalim čvorovima je 0,
2)$\phi_i, i = 0, 1...N$ je nenula na dva elementa (na ona dva, koji sadrže čvor $i$).
Prva osobina pojednostavljuje određivanje rešenja u čvornim tačkama (tj. vrednosti aproksimativnog i tačnog rešenje se poklapaju u čvornim tačkama), dok druga osobina pojednostavljuje algebarski sistem koji sledi iz FEM diskretizacije.
Takođe, vidimo da su kvadratni Lagranžovi polinomi $\phi_{i-1/2}$ (oni povezani sa središnjim čvorovima) nenula na samo jednom elementu.

Test funkcija je i dalje linearna kombinacija baznih funkcija. Ako se za bazne funkcije uzmu kvadratni Lagranžovi polinomi, test funkcija je oblika:

$$\bar{u}(x) = \sum_{i=0}^{N} c_i\phi_i(x) + \sum_{i=1}^{N} c_{i-1/2}\phi_{i-1/2}(x) = \sum_{i=0}^{2N} c_{i/2}\phi_{i/2}(x).$$

Na elementu $\Gamma_i = [x_{i-1}, x_i]$, restrikcija test funkcije je:

$$\bar{u}(x) = c_{i-1}N_{i-1,i} + c_{i-1/2}N_{i-1/2,i} + c_iN_{i,i},$$

pri čemu su:

- desni deo funkcije $\phi_{i-1}(x)$ :

$$N_{i-1,i}(x) = 1 - 3(\frac{x - x_{i-1}}{h_i}) + 2(\frac{x - x_{i-1}}{h_i})^2,$$

- $\phi_{i-1/2}(x)$ :

$$N_{i-1/2,i}(x) = 1 - 4(\frac{x - x_{i-1/2}}{h_i})^2,$$

- i levi deo funkcije $\phi_i(x)$ :

$$N_{i,i}(x) = 1 + 3(\frac{x - x_i}{h_i}) + 2(\frac{x - x_i}{h_i})^2 \qquad x \in \Gamma_i.$$

$N_{k,i}$ je restrikcija funkcija povezanih sa čvorom $k, k = i-1, i-1/2, i$, elementa $\Gamma_i$. Na slici 15. $N_{i-1,i}$ je plava boja, $N_{i-1/2,i}$ je crvena boja, $N_{i,i}$ je zelena. Izrazom $\bar{u}(x)$ se aproksimira tačno rešenje na elementu $\Gamma_i = [x_{i-1}, x_i]$.
**Napomena:** Kvadratni Lagranžovi polinomi su, za razliku od hat funkcija, pozitivne i negativne na jednom istom elementu, što se može smatrati njihovim nedostatkom. To se vidi na slikama 14,15,16.

## 3.6 Galerkin metoda bazirana na FEM

Kao u literaturi [4], za ilustraciju Galerkin metode bazirane na FEM posmatra se 1D eliptični problem:

$$-u''(x) = f(x), \qquad x \in [0,1], \qquad u(0) = 0, \qquad u(1) = 0.$$

Ova metoda ima sledeće korake:
**1.** Izvesti varijacionu formu, množeći obe strane diferencijalne jednačine sa test funkcijom $v(x)$, $v(0) = 0$, $v(1) = 0$:

$$-u''v = fv.$$

Integrali se po domenu $[0,1]$, i vrši parcijalna integracija

$$\int_0^1 (-u''v)dx = \int_0^1 fvdx,$$

$$-u'v|_0^1 + \int_0^1 u'v'dx = \int_0^1 fvdx,$$

da bi se došlo do varijacione forme:

$$\int_0^1 u'v'dx = \int_0^1 fvdx.$$

**2.** Pravljenje mreže tačaka. Neka su $x_0 = 0, x_1, ...x_N = 1$ čvorne tačke, gde je $[x_{i-1}, x_i], i = 1, .., N$ element. Može se uzeti i ekvidistanta podela tačaka $x_i = ih, i = 0, 1..N, h = \frac{1}{N}$.
**3.** Konstruisanje skupa baznih funkcija baziranim na mreži. Koristićemo *hat funkcije:*

$$\phi_1(x) = \begin{cases} \frac{x}{h_1}, & x \in [0, x_1], \\ \frac{x_2 - x}{h_2}, & x \in [x_1, x_2], \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \frac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}}, & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \tag{3.7}$$

Za ekividistantu podelu čvornih tačaka bilo bi: $h_1 = ... = h_N$**=h** $(x_i - x_{i-1} = h_i, i = 1, ...N)$.
**4.** Aproksimativno rešenje je linearna kombinacija baznih funkcija:

$$\bar{u}(x) = \sum_{i=1}^{N-1} c_i \phi_i(x),$$

gde su koeficijenti $c_i$ nepoznati.
**Napomena:** Hat funkcije $\phi_i$ su po delovima neprekidne funkcije po $x$, njihova suma $\bar{u}$ je takođe linearna po delovima neprekidna funkcija.
Za čvor $x_k$ je: $\bar{u}(x_k) = \sum_{i=1}^{N-1} c_i \phi_i = c_k, k = 1, ...N-1$. Koeficijenti $c_k, k = 1...N-1$ su vrednosti funkcije $\bar{u}$ (tj. i $u$ jer se $u$ i $\bar{u}$ poklapaju u čvornim tačkama).
Mogu se u sumu dodati $\phi_0, \phi_N : \bar{u}(x) = \sum_{i=0}^{N} c_i \phi_i$, ali uz granične uslove $u(0) = 0, u(1) = 0$, sledi $\mathbf{c_0} = \mathbf{c_N} = \mathbf{0}$. Za $x = 0$ je: $u(0) = \phi_0(0)c_0$ iz čega zbog $u(0) = 0, \phi_0(0) = 1$ sledi $c_0 = 0$. Analogno za $c_N = 0$.

Koeficijenti $c_1, ...c_{N-1}$ se određuju iz linearnog sistema jednačina, koji se dobije iz varijacione forme, u koju se, umesto tačnog rešenja zamenjuje $\bar{u}(x)$ :

$$\int_0^1 \bar{u}'v'dx = \int_0^1 fvdx,$$

$$\int_0^1 \sum_{i=1}^{N-1} c_i\phi_i'v'dx = \int_0^1 fvdx,$$

$$\sum_{i=1}^{N-1} c_i \int_0^1 \phi_i'v'dx = \int_0^1 fvdx.$$

Sada, biramo $v(x)$ kao $\phi_1, \phi_2, ...\phi_{N-1}$, respektivno:

$$\Big(\int_0^1 \phi_1'\phi_1'dx\Big)c_1 + \Big(\int_0^1 \phi_1'\phi_2'dx\Big)c_2 + ... + \Big(\int_0^1 \phi_1'\phi_{N-1}'dx\Big)c_{N-1} = \int_0^1 f\phi_1dx$$

$$\Big(\int_0^1 \phi_2'\phi_1'dx\Big)c_1 + \Big(\int_0^1 \phi_2'\phi_2'dx\Big)c_2 + ... + \Big(\int_0^1 \phi_2'\phi_{N-1}'dx\Big)c_{N-1} = \int_0^1 f\phi_2dx$$

...... ...... ...... ...... ......

$$\Big(\int_0^1 \phi_i'\phi_1'dx\Big)c_1 + \Big(\int_0^1 \phi_i'\phi_2'dx\Big)c_2 + ... + \Big(\int_0^1 \phi_i'\phi_{N-1}'dx\Big)c_{N-1} = \int_0^1 f\phi_idx$$

...... ...... ...... ...... ......

$$\Big(\int_0^1 \phi_{N-1}'\phi_1'dx\Big)c_1+\Big(\int_0^1 \phi_{N-1}'\phi_2'dx\Big)c_2+...+\Big(\int_0^1 \phi_{N-1}'\phi_{N-1}'dx\Big)c_{N-1} = \int_0^1 f\phi_{N-1}dx$$

**Napomena:** Ovo je Galerkinova metoda, i u njoj se za težinske funkcije uzimaju bazne funkcije.
Uz oznake

$$a(\phi_i, \phi_j) = \int_0^1 \phi_i'\phi_j'dx, \qquad (f, \phi_i) = \int_0^1 f\phi_idx.$$

prethodni sistem, u matrično-vektorskoj formi $AU = F$ je:

$$\begin{bmatrix} a(\phi_1,\phi_1) & a(\phi_1,\phi_2) & \cdots & a(\phi_1,\phi_{N-1}) \\ a(\phi_2,\phi_1) & a(\phi_2,\phi_2) & \cdots & a(\phi_2,\phi_{N-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a(\phi_{N-1},\phi_1) & a(\phi_{N-1},\phi_2) & \cdots & a(\phi_{N-1},\phi_{N-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f,\phi_1) \\ (f,\phi_2) \\ \vdots \\ (f,\phi_{N-1}) \end{bmatrix}$$

Ako su $\phi_i$ hat funkcije (definisane sa (3.7) uz ekvidistantnu podelu mreže), sistem se svodi na:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} & & & & \\ -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} & & & \\ & -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} \\ & & & & -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{N-2} \\ c_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^1 f\phi_1 dx \\ \int_0^1 f\phi_2 dx \\ \int_0^1 f\phi_3 dx \\ \vdots \\ \int_0^1 f\phi_{N-2} dx \\ \int_0^1 f\phi_{N-1} dx \end{bmatrix}$$

**5.** Rešiti sistem linearnih jednačina $AU = F$ da bi se dobili koeficijenti $c_i$ a time i FEM rešenje koje je definisano $\bar{u}(x) = \sum_i c_i\phi_i(x)$.

**Napomena:** Posle računanja sistema, može se sprovesti analiza grešaka.

### 3.6.1 Matrica koeficijenata-stifnes matrica

Nakon određivanja varijacione forme, konstruisanja mreže i određivanja baznih funkcija, ključni deo FEM-a je određivanje matrice koeficijenata, tzv. *stifnes matrice za izvode prvog reda* $[a_{ij}] = [\int \phi_i'\phi_j']dx$ i desne strane jednačine $AU = F$, tj.vektor $F$, koji se zove *load vektor.*

Jedan način formiranja $A$ i $F$ je *konstrukcija element po element.* Elementi su:

$$[x_0, x_1] = \Gamma_1, \quad [x_1, x_2] = \Gamma_2 \quad ... \quad [x_{N-1}, x_N] = \Gamma_N.$$

Ideja je da se primeni integracija na svakom elementu, tj. za neku integrabilnu funkciju $m(x)$:

$$\int_0^1 m(x)dx = \sum_{k=1}^{N} \int_{\Gamma_k} m(x)dx,$$

gde je $\Gamma_k = [x_{k-1}, x_k]$.

Stifnes matrica se tada može napisati:

$$A = \begin{bmatrix} \int_0^1 (\phi_1')^2 dx & \int_0^1 \phi_1'\phi_2' dx & \dots & \int_0^1 \phi_1'\phi_{N-1}' dx \\ \int_0^1 \phi_2'\phi_1' dx & \int_0^1 (\phi_2')^2 dx & \dots & \int_0^1 \phi_2'\phi_{N-1}' dx \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \int_0^1 \phi_{N-1}'\phi_1' dx & \int_0^1 \phi_{N-1}'\phi_2' dx & \dots & \int_0^1 (\phi_{N-1}')^2 dx \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \begin{bmatrix} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (\phi_1')^2 dx & \int_{x_{k-1}}^{x_k} \phi_1'\phi_2' dx & \dots & \int_{x_{k-1}}^{x_k} \phi_1'\phi_{N-1}' dx \\ \int_{x_{k-1}}^{x_k} \phi_2'\phi_1' dx & \int_{x_{k-1}}^{x_k} (\phi_2')^2 dx & \dots & \int_{x_{k-1}}^{x_k} \phi_2'\phi_{N-1}' dx \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \int_{x_{k-1}}^{x_k} \phi_{N-1}'\phi_1' dx & \int_{x_{k-1}}^{x_k} \phi_{N-1}'\phi_2' dx & \dots & \int_{x_{k-1}}^{x_k} (\phi_{N-1}')^2 dx \end{bmatrix}$$

Za hat funkcije, svaki element ima samo dve nenula bazne funkcije, pa ako se prethodna suma raspiše uzimajući u obzir hat funkcije, dobije se:

$$A = \begin{bmatrix} \int_{x_0}^{x_1} (\phi_1')^2 dx & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_{x_1}^{x_2} (\phi_1')^2 dx & \int_{x_1}^{x_2} \phi_1'\phi_2' dx & \dots & 0 \\ \int_{x_1}^{x_2} \phi_2'\phi_1' dx & \int_{x_1}^{x_2} (\phi_2')^2 dx & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \int_{x_2}^{x_3} (\phi_2')^2 dx & \int_{x_2}^{x_3} \phi_2'\phi_3' dx & \dots & 0 \\ 0 & \int_{x_2}^{x_3} \phi_3'\phi_2' dx & \int_{x_2}^{x_3} (\phi_3')^2 dx & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \ldots + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \int_{x_{N-1}}^{x_N} (\phi_{N-1}')^2 dx \end{bmatrix}$$

Nenula podmatrica $2 \times 2$ iz prethodnog raspisivanja, oblika:

$$K_{ij} = \begin{bmatrix} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\phi_{i-1}')^2 dx & \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_{i-1}'\phi_i' dx \\ \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_i'\phi_{i-1}' dx & \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\phi_i')^2 dx \end{bmatrix}$$

se zove *lokalna stifnes matrica.*

Globalni load vektor $F$ se takođe može konstruisati element po element:

$$F = \begin{bmatrix} \int_{x_0}^{x_1} f\phi_1 dx \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_{x_1}^{x_2} f\phi_1 dx \\ \int_{x_1}^{x_2} f\phi_2 dx \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \int_{x_2}^{x_3} f\phi_2 dx \\ \int_{x_2}^{x_3} f\phi_3 dx \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + ... + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \int_{x_{N-1}}^{x_N} f\phi_{N-1} dx \end{bmatrix}$$

pa je lokalni load vektor definisan:

$$F_i = \begin{bmatrix} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f\phi_{i-1} dx \\ \int_{x_{i-1}}^{x_i} f\phi_i dx \end{bmatrix}$$

### 3.6.2 Računanje lokalne stifnes matrice i lokalnog load vektora

Znamo već, da na elementu $[x_{i-1}, x_i]$ su samo dve nenula hat funkcije, centrirane u čvoru $x_{i-1}$ i $x_i$. Označimo restrikcije te dve hat funkcije na isti element sa $\psi_{i-1}$ i $\psi_i$ :

$$\psi_{i-1}(x) = \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} = \frac{x_i - x}{h_i}, \qquad \psi_i(x) = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{x - x_{i-1}}{h_i}.$$

**Napomena:** $\psi_{i-1}$ i $\psi_i$ su restrikcije baznih funkcija $\phi_{i-1}$ i $\phi_i$ na isti element.

Ako posmatramo sliku 13. $\psi_1$ je plava a $\psi_2$ je crvena funkcija, tj.restrikcije hat funkcija $\phi_1$ i $\phi_2$.
Odredimo njihove izvode:

$$(\psi_{i-1})' = -\frac{1}{h_i}, \qquad (\psi_i)' = \frac{1}{h_i}.$$

Uz pomoć ovih izvoda se mogu uraditi delovi, koji su potrebni u stifnes matricu i load vektor:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} (\psi'_{i-1})^2 dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h_i^2} dx = \frac{1}{h_i}, \qquad \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\psi'_i)^2 dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h_i^2} dx = \frac{1}{h_i},$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \psi'_{i-1}\psi'_i dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} -\frac{1}{h_i^2} dx = -\frac{1}{h_i}.$$

Lokalna stifnes matrica $K_{ij}$ je:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{h_i} & -\frac{1}{h_i} \\ -\frac{1}{h_i} & \frac{1}{h_i} \end{bmatrix}.$$

Stifnes matricu tada konstruišemo ovako:

$$A = 0^{(N-1)\times(N-1)}, A = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0\dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} & -\frac{1}{h_2} & 0 & \dots \\ -\frac{1}{h_2} & \frac{1}{h_2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix},$$

$$......A = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} & -\frac{1}{h_2} & 0 & 0 & \dots \\ -\frac{1}{h_2} & \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} & -\frac{1}{h_3} & 0 & \dots \\ 0 & -\frac{1}{h_3} & \frac{1}{h_3} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}.$$

Krajnja konstruisana stifnes matrica je tridijagonalna matrica:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} & -\frac{1}{h_2} & & & & \\ -\frac{1}{h_2} & \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} & -\frac{1}{h_3} & & & \\ & -\frac{1}{h_3} & \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4} & -\frac{1}{h_4} & & \\ & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & -\frac{1}{h_{N-2}} & \frac{1}{h_{N-2}} + \frac{1}{h_{N-1}} & \frac{1}{h_{N-1}} \\ & & & & -\frac{1}{h_{N-1}} & \frac{1}{h_{N-1}} + \frac{1}{h_N} \end{bmatrix}.$$

**Napomena:** Dobijena je tridijagolna matrica (sistem), koji se lako reši, čime je opravdano biranje baznih funkcija sa kompaktnim nosačem, tj.da su funkcije skoro svugde nule, sem na nekom malom intervalu (hat funkcije su nule skoro svugde, sem na dva elementa).

### 3.6.3 Programiranje 1D modela u programu *Matlab*

Kod za Matlab, za rešavanje sledećeg problema:

$$-u''(x) = f(x), \qquad x \in [a, b], \qquad u(a) = u(b) = 0. \tag{3.8}$$

pomoću hat funkcija je preuzet iz literature [4], i nalazi se u Dodatku.

Neka je

$$f(x) = \pi\pi\sin(\pi x).$$

Uz ovakvu $f(x)$ tačno rešenje problema (3.8) je

$$u = \sin(\pi x).$$

i ove funkcije se stavljaju u m.file-ove: f.m i soln.m.
**Napomena:** Računanje integrala u m.file-ovima

```
int_hat2_f.m i int_hat1_f.m
```

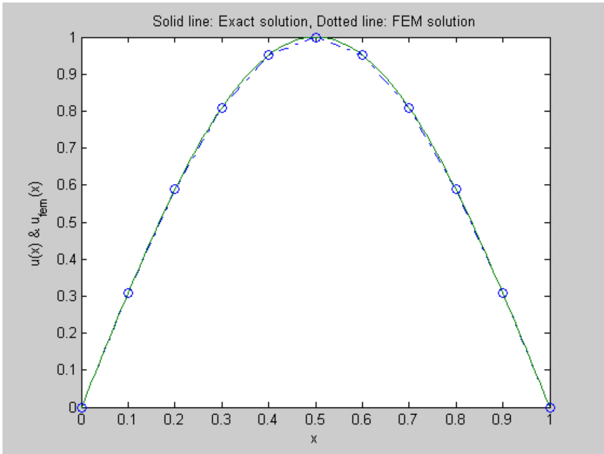
je rađeno koristeći Simpsonovo pravilo, što nije jedini način.

**Primer ćemo uraditi sa:**
**♡ ekvidistantnom podelom mreže,**
**♣ neekvidistantnom podelom mreže,**
**♠ sa većim brojem čvornih tačaka.**

♡ Za ekvidistantu podelu intervala $[0, 1]$ kao input u Matlab unosi se vektor sa čvorovima: $x(1) = 0$; $x(2) = 0.1$; $x(3) = 0.2$; $x(4) = 0.3$; $x(5) = 0.4$; $x(6) = 0.5$; $x(7) = 0.6$; $x(8) = 0.7$; $x(9) = 0.8$; $x(10) = 0.9$; $x(11) = 1$; ili kraće $x = 0 : 0.1 : 1$. Imamo 11 čvornih tačaka, 10 elemenata.
U Matlabu se kuca U=fem1D(x) što daje sledeći rezultat:

```
U =    0
    0.3090
    0.5878
    0.8090
    0.9510
    1.0000
    0.9510
    0.8090
    0.5878
    0.3090
         0
```

**Napomena:** U je output vektor u kodu, a da bi se razumelo šta su u njemu traženi koeficijenti mora se bolje pogledati kod fem1D.m. Koeficijenti $c_1, ...c_{N-1}$ su brojevi redom od U(2) do U(M-1), jer je ovaj vektor dimenzije: **broj čvorova x 1.** U(i) je i-ti broj u vektoru.
U Matlabu se kuca *crtanje*, i dobije sledeća slika:



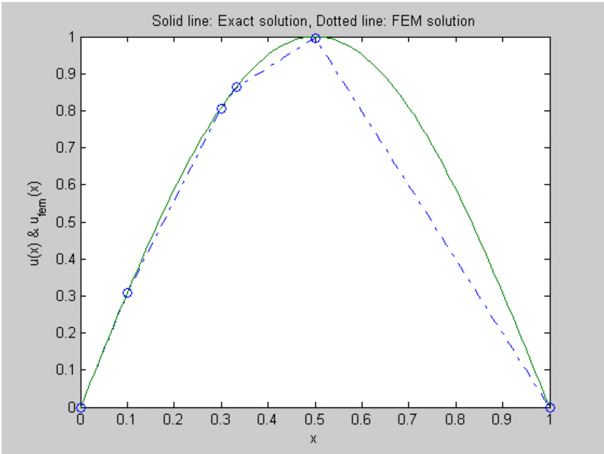

*Slika 17. Aproksimacija Galerkin FEM metodom, uz ekvidistantnu podelu mreže*

Na slici je zelenom bojom označeno tačno rešenje na $[0, 1]$, a isprekidanom plavom aproksimacija tačnog rešenja pomoću Galerkin FEM metode:

$$\bar{u}(x) = U(2)\phi_1(x) + U(3)\phi_2(x) + ... + U(10)\phi_9(x).$$

♣ Uzmimo neekvidistantnu podelu tačaka. U Matlabu se kuca: clear all; $x(1) = 0$; $x(2) = 0.1$; $x(3) = 0.3$; $x(4) = 0.333$, $x(5) = 0.5$; $x(6) = 1$. Imamo 6 čvorova, 5 elemenata. Kucamo: U=fem1D(x), dobije se:

```
U =      0
    0.3083
    0.8068
    0.8631
    0.9964
         0
```




*Slika 18. Aproksimacija Galerkin FEM metodom, uz neekvidistantnu podelu mreže*

Aproksimacija tačnog rešenja pomoću Galerkin FEM metode (plava boja) je:

$$\bar{u}(x) = U(2)\phi_1(x) + U(3)\phi_2(x) + U(4)\phi_3 + U(5)\phi_4(x).$$

Restrikcija prethodne test funkcije (pomoću oznake $\psi_i$) na element [0.5,1] je:

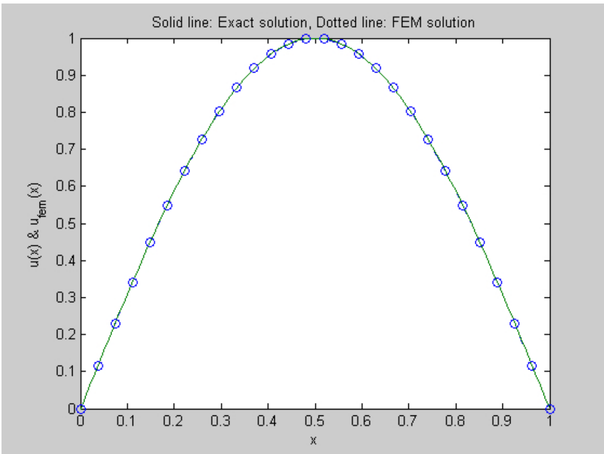
$$\bar{u}(x) = U(5)\psi_4$$

gde je $\psi_{i-1} = \frac{x_i - x}{h_i}$, tj. za $i = 5$ : $\psi_4 = \frac{1-x}{1-0.5}$. Prethodnom funkcijom $\bar{u}$ je aproksimirano tačno rešenje na elementu $[0.5, 1]$.

♠ Za gušću podelu mreže, od npr 28 tačaka, kucamo u Matlabu: $x = 0 : 1/27 : 1$. Stavljajući vektor x u U=fem1D(x), dobije se:

```
U=     0
    0.1161
    0.2306
    0.3420
    0.4488
    0.5495
    0.6428
    0.7274
    0.8021
    0.8660
    0.9182
    0.9580
    0.9848
    0.9983
```

```
0.9983
0.9848
0.9580
0.9182
0.8660
0.8021
0.7274
0.6428
0.5495
0.4488
0.3420
0.2306
0.1161
     0
```




*Slika 19. Aproksimacija Galerkin FEM metodom, uz gušću podelu mreže*

Iz prethodnih slika se vidi da, povećavajući broj čvorova, aproksimacija je sve bolja.

# 4

# Obrada slike i analiza podataka

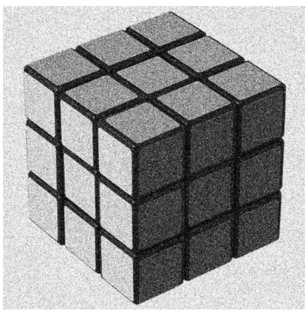
U ovom delu rada navedena je primena varijacionog računa u obradi slike, a direktnih metoda u redukciji modela-POD. U obradi slike navedene su funkcionele koje predstavljaju modele za četiri bitna zadatka u obradi slike. Na kraju je pokazano kako se dolazi do redukovanog modela. Korišćena je literatura [1].

## 4.1 Obrada slike

Obrada slike je bazirana na spektralnoj i Furijevoj metodi, ali u prethodne dve decenije svoje mesto u obradi slike našli su varijacione metode i optimizacija.

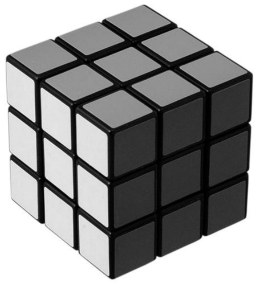
U medicini, pomoću npr.magnetne rezonance može se konstruisati tridimenzionalna geometrija npr. pacijentove aorte, i pri tome je neophodno izvesti *osnovne zadatke obrade slike: uklanjanje šuma, izoštravanje, oporavak izgubljenih podataka i segmentaciju.* Modelima ovih zadataka se bavimo u ovom poglavlju.

Dakle, *posmatranu* sliku 20. ili 21., želimo da rekonstruišemo u *obnovljenu* sliku 22., što je bliže moguće.



*Slika 20. Slika sa šumom*

*Slika 21. Zamućena slika*



*Slika 22. Obnovljena slika*

Slike se mogu posmatrati kao neprekidne distribucije crno-belih ili podataka u boji.

Neka je $u_0(x, y)$ posmatrana slika, koja može biti zamućena ili sa šumom, i želimo da je rekonstruišemo u (nepoznatu) obnovljenu sliku $u(x, y)$, što je bliže moguće.

Ako su slike crno-bele tada $u_0(x, y)$ i $u(x, y)$ su skalarne funkcije koje predstavljaju intenzitet, dok u slučaju slika u boji, ovo su vektorske funkcije i predstavljaju npr. RGB boje.

Dve slike su povezane na sledeći način:

$$u_0(x, y) = Ku(x, y) + w(x, y),$$

gde je $w(x, y)$ slučajni dodatni šum, $K$ je nediferencijalni linearni operator koji se javlja zbog zamućenosti.
*Varijaciona metoda zahteva određivanje nepoznate obnovljene slike* $u(x, y)$, *koja minimizira funkcionelu* oblika:

$$J(u) = \int\int_A \Big[\gamma^2(Ku - u_0)^2 + \Phi(|\nabla u|)\Big] dxdy. \tag{4.1}$$

*Mera performansi* $(Ku - u_0)^2$, teži da minimizira razliku između posmatrane slike sa šumom i obnovljene slike, *kaznena težinska funkcija* $\Phi(|\nabla u|)$ izglađuje rezultat, a $\gamma^2$ je težinski koeficijent.
**Napomena:** Kaznena težinska funkcija je funkcija absolutne vrednosti gradijenta obnovljene slike $u(x, y)$. Broj kaznenih funkcija je predložen ali sve imaju osobinu da su pozitivne i rastuće, jer $\Phi'(\cdot) > 0$, a time se osigurava egzistencija i jedinstvenost stacionarne funkcije $u(x, y)$.
Iz odeljka (2.4), za $F = F(x, y, u, \nabla u)$ Ojler-Lagranžova jednačina je:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \nabla\Big(\frac{\partial F}{\partial \nabla u}\Big) = 0,$$

a prirodni granični uslovi su:

$$\mathbf{n}^T \frac{\partial F}{\partial \nabla u} = 0$$

na $C$, gde je $C$ granica oblasti A, a $\mathbf{n}$ je spoljašnja normala na krivu $C$. Primenjujući prethodno na funkcionelu (4.1) dobije se uopštena forma Ojler-Lagranžove jednačine:

$$\nabla \cdot \Big( \Phi'(|\nabla u|) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \Big) - 2\gamma^2 K^*(Ku - u_0) = 0, \tag{4.2}$$

gde je $K^*$ adjungovan diferencijalni operator za $K$.
U opštem slučaju Ojler-Lagranžova jednačina (4.2) će biti nelinearna parcijalna diferencijalna jednačina. Prirodni granični uslovi zahtevaju:

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0$$

na $C$.
Totalna varijacija (TV) se koristi, jer se u obradi slike radi sa ivicama objekata na slici, u kojima se $u(x, y)$ iznenada može promeniti. Posmatra se priroda takvih prekida u kontekstu varijacionog pristupa. Za po delovima glatku funkciju $u(x, y)$, totalna varijacija je definisana na sledeći način:

$$TV(u) = \int\int_A |\nabla u| dxdy = \int\int_A \sqrt{(\nabla u)^2} dxdy = \int\int_A \sqrt{u_x^2 + u_y^2} dxdy.$$

Totalna varijacija je ograničena ako $TV(u) < \infty$. Varijacioni modeli obrade slike za uklanjanje šuma, izoštravanje i oporavak izgubljenih podataka su napravljeni tako da su ograničene varijacije, kako bi se omogućile iznenadne promene na slici, kao one na ivicama objekata, dok se ostale promene matematički dobro ponašaju.

### Model za uklanjanje šuma

*Rudin-Osher-Fatemi* varijacioni pristup za uklanjanje šuma sastoji se od minimiziranja funkcionele:

$$J(u) = \int\int_A \Big[ \gamma^2 (u - u_0)^2 + |\nabla u| \Big] dxdy.$$

što je funkcionela (4.1) sa $K = 1$ (tj. bez zamućenja) i $\Phi(|\nabla u|) = (|\nabla u|)$. Ovaj model se zove i *totalna varijacija, TV, uklanjanje šuma,* jer kaznena funkcija uključuje TV.

Odgovarajuća nelinearna parcijalna diferencijalna Ojler-Lagranžova jednačina je:

$$\nabla \cdot \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) - 2\gamma^2 (u - u_0) = 0,$$

uz granične uslove na $C$ :

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0.$$

**Napomena:** Problem može nastati zbog $|\nabla u|$, kada je ova vrednost jako mala. Način da se ovo prevaziđe je da se gradijent definiše: $|\nabla u|_\alpha = \sqrt{\alpha^2 + (\nabla u)^2}$, gde parametar $\alpha$ određuje korisnik.

**Model izoštravanja slike**

Funkcionela koja se posmatra u ovom slučaju je:

$$J(u) = \int \int_A \Big[ \gamma^2 (k * u - u_0)^2 + (|\nabla u|)^2 \Big] dxdy,$$

gde je $k(x, y)$ jezgro konvolucije[1], a $k * u$ je konvolucija slike. Ovo je funkcionela (4.1) za $Ku = k * u$ i kvadratnom kaznenom težinskom funkcijom $\Phi(|\nabla u|) = |\nabla u|^2$.
Ojler-Lagranžova jednačina postaje:

$$\nabla^2 u - \gamma^2 K^* (Ku - u_0) = 0,$$

gde je $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ Laplasov operator, a $K^*$ je adjungovan operator od $K$. Granični uslovi su: $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0$ na $C$.

**Model za oporavak izgubljenih podataka (interpolacija)**

Ovaj model se koristi za popunjavanje informacija, koje nedostaju na slici na praznom podskupu, a sve to na osnovu informacija koje se nalaze na ostatku slike.
Model je:

$$J(u) = \int \int_{A - A_i} \gamma^2 (u - u_0)^2 dxdy + \int \int_A |\nabla u| dxdy,$$

gde je $A_i$ podskup od $A$, a koji zahteva oporavak izgubljenih podataka.
Kako model sadrži totalnu varijaciju, često se zove *totalna varijacija, TV, oporavak izgubljenih podataka.*

[1] Konvolucija dve funkcije je definisana: $f * g = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - y) g(y) dy$

Totalna varijacija oporavka izgubljenih podataka je napravljena da sačuva oštre ivice, dok se vrši interpolacija slike po oblastima koje nedostaju.
Totalna varijacija dopunjavanja podataka često ne vodi do dobre povezanosti među ivicama objekata jer se interpoliraju u oblasti koje zahtevaju dopunjavanje. Metod baziran na *Ojlerovom elastičnom problemu* omogućuje krivama na ivici da se dobro prošire na prazne oblasti koje zahtevaju oporavak izgubljenih podataka. Ovaj problem kombinuje mere dužine i krivih u određenoj formi.
*Mumford-Shah-Euler* metoda modifikuje funkcinelu za TV uključujući Ojlerov elastični problem:

$$J(u) = \int\int_{A-A_i} \gamma^2 (u - u_0)^2 dxdy + \int\int_{A-\Gamma} |\nabla u|^2 dxdy + \int_\Gamma (a + bk^2) ds.$$

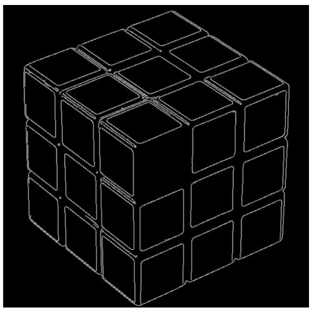
Kvadratna kaznena težinska funkcija se koristi, ali je primenjena samo na unutrašnjost objekata, izuzimajući ivice, tj. $A - \Gamma$. Ojlerov elastični izraz je primenjen na ivice $\Gamma$, $a > 0, b > 0$.
Da se dobiju ivice objekata $\Gamma$, mora se iskoristiti segmentacija.

### Segmentacija

Model za segmentaciju slike je baziran na *Mumford and Shah* modelu:

$$J(u, \Gamma) = \int\int_A \gamma^2 (u - u_0)^2 dxdy + \int\int_{A-\Gamma} |\nabla u|^2 dxdy + \beta^2 \int_\Gamma ds,$$

gde $\Gamma(s)$ obuhvata ivice između objekata, $s$ je koordinata po ivici $\Gamma$, kaznena funkcija je kvadratna, $\beta^2$ je težinski koeficijent na dužini ivice.
Ovaj model uklanja površinske teksture svakog objekta, koje su tipično glatke, da bi se otkrile diskretne ivice individualnih objekata.



*Slika 23. Segmentacija primenjena na figuru 22.*

## 4.2 Analiza podataka-POD

Zbog potrebe za razvojem metode, koja bi predstavila stanje sistema u manjim dimenzijama, uz zadržavanje osnovnih karakteristika celokupnog velikog skupa podataka, razvila se *POD(Proper-Orthogonal Decomposition)* tehnika. Ova popularna tehnika je primenljiva u redukciji modela.

*Jedna mogućnost za redukciju modela je aproksimiranje skupa podataka sa linearnom kombinacijom baznih funkcija, što je pristup koji smo koristili kod direktnih metoda.*

Postoji "optimalni" skup baznih funkcija, koje sadrže neke karakteristike posmatranog sistema i pomoću njih se podaci mogu lepo predstaviti, sa mnogo manjim brojem baznih funkcija-POD čvorova.

Posmatramo dati neprekidni skup podataka $u(x, y)$ pomoću baznih funkcija $\phi(x, y)$ na sledeći način:

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \phi_i(x, y).$$

Posmatra se dvo-dimenzionalni slučaj, i ako se prava korist POD-a vidi u skupovima podataka velikih dimenzija.

Bitne pretpostavke su:

1) biranje ortonormiranih baznih funkcija (ortogonalne uzajamno i normirane u odnosu na neku normu),

2) želimo da originalan skup podataka predstavimo što bolje, sa što manjim brojem baznih funkcija,

3) POD analiza bi trebala biti totalno nezavisna od izvora podataka.

Dakle, tražimo da nam skup optimalnih baznih funkcija omogući predstavljanje sistema velike dimenzije, sa sistemom manje dimenzije koji bi sadržao dinamiku početnog sistema.

Određuju se ortogonalne bazne funkcije $\phi_i(x, y)$ za dati skup podataka $u(x, y)$ koji minimizira funkcionelu:

$$J_1(\phi) = \|\phi_i(x, y) - u(x, y)\|^2 = \int\int_A [\phi_i(x, y) - u(x, y)]^2 dxdy, \qquad (4.3)$$

tako da razlika između ortonormiranih baznih funkcija i originalnog skupa podataka bude minimalna, u smislu integracije po celom domenu.

Minimiziranje prethodne funkcionele je ekvivalentno maksimiziranju sledeće:

$$J_2(\phi) = \langle \phi_i(x, y), u(x, y) \rangle^2 = \Big[ \int\int_A u(x, y)\phi_i(x, y) dxdy \Big]^2. \qquad (4.4)$$

Dakle, minimizira se (4.3) ili maksimizira (4.4), uz ograničenje

$$\|\phi_i\|^2 = \langle \phi_i, \phi_i \rangle = \int\int_A \phi_i^2(x,y)dxdy = 1,$$

jer su bazne funkcije normirane.
Lagranžova pomoćna funkcija je:

$$\begin{aligned}\tilde{J}_2(\phi) &= \langle u, \phi_i \rangle^2 - \lambda(\|\phi_i\|^2 - 1) = \\ &= \langle \phi_i, u \rangle \langle u, \phi_i \rangle - \lambda(\langle \phi_i, \phi_i \rangle - 1) = \\ &= \langle \langle \phi_i, u \rangle u, \phi_i \rangle - \lambda(\langle \phi_i, \phi_i \rangle - 1) = \\ &= \langle R\phi_i, \phi_i \rangle - \lambda(\langle \phi_i, \phi_i \rangle - 1),\end{aligned}$$

gde je R samoadjungovan operator, a $\lambda$ je Lagranžov množitelj.
Rešavajući parcijalne izvode Lagranžove pomoćne funkcije: $\frac{\partial \tilde{J}_2}{\partial \phi_i} = 0$, dobije se problem čije karakteristične funkcije su optimalne bazne funkcije koje tražimo:

$$R\phi_i = \lambda_i \phi_i, \qquad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_i \geq ... \geq 0,$$

a karakteristični koreni su Lagranžovi množitelji.
Kako je $R$ samoadjungovan a karakteristični koreni $\lambda_i$ su realni i nenegativni, karakteristične funkcije $\phi_i(x,y)$ su ortogonalne i mogu biti normalizovane da bi smo dobili ortonormiran skup.
Za dati skup podataka $u(x,y)$ i ortonormirane bazne funkcije $\phi_i(x,y)$ koeficijente dobijemo iz unutrašnjeg proizvoda:

$$c_i = \langle u(x,y), \phi_i(x,y) \rangle.$$

Kako su bazne funkcije optimalne, možemo predstaviti većinu informacija sadržanih u originalnom skupu, pomoću relativno malog broja POD čvorova, recimo $m$, tako da:

$$u(x,y) \approx \sum_{i=1}^{m} c_i \phi_i(x,y).$$

Ovaj model se zove *redukovan model.*

Kako su optimalne bazne funkcije određene iz stvarnog skupa podataka, oni daju najbolju reprezentaciju originalnog skupa podataka sa najmanjim brojem POD čvorova, što je primarna prednost POD-a. S druge strane, to znači da su ovakve bazne funkcije zavisne od problema, pa u slučaju nekog drugog skupa podataka za isti model, mora se tražiti novi skup optimalnih baznih funkcija.

Za dobijen optimalni skup baznih funkcija, *Galerkinovom projekcijom* se može dobiti projekcija *jednačine (ili jednačina) stanja* na optimalne bazne funkcije, radeći unutrašnji proizvod svake bazne funkcije sa jednačinom stanja (ili jednačinama). U ovakvom slučaju parcijalne diferencijalne jednačine stanja u prostoru i vremenu, postaju obične diferencijalne jednačine u vremenu, sa koeficijentima $c_i(t)$ zavisnim od vremena $t$. Ovakva tehnika redukovanja se zove tzv. tehnika *redukcije reda.*

Tehnika redukcije reda i POD su moćne i fleksibilne tehnike redukcije modela, koje se mogu primeniti i na linearne i nelinearne sisteme.

# 5

# Dodatak

U ovom delu rada naveden je niz kodova za pravljene određenih slika u ovom radu. Korišćen je programski paket *Matlab.*

Kod za plotovanje slike (7).

```
x=0:0.01:1 ;
u=(exp(1)*( exp(-x)- exp(x) ) / (exp(2)-1))+x ;
u1=(69/473)*(x-x.^2) + (7/43)*(x.^2-x.^3);
plot(x,u,'*r',x,u1,'-g')
```

Kod za plotovanje slike (11).

```
x=0:0.01:0.2;
fi1 = x/0.2;
plot(x, fi1, '*b')
hold on

x=0.2:0.01:0.4;
fi11= (0.4-x)/0.2;
plot(x, fi11,'*b')
hold on

x=0.4:0.01:1;
nula=0;
plot(x, nula, '*b')
hold on
```

Kod za plotovanje slike (12).

```
%FI1
x=0:0.01:0.2;
```

```
fi1 = x/0.2;
plot(x, fi1, '*b')
hold on

x=0.2:0.01:0.4;
fi11= (0.4-x)/0.2;
plot(x, fi11,'*b')
hold on

x=0.4:0.01:1;
nula=0;
plot(x, nula, '*b')

%FI2

x=0:0.01:0.2;
nula=0;
plot(x, nula, '*r')

x=0.2:0.01:0.4;
fi2 = (x-0.2)/0.2;
plot(x, fi2, '*r')
hold on

x=0.4:0.01:0.6;
fi22= (0.6-x)/0.2;
plot(x, fi22,'*r')
hold on

x=0.6:0.01:1
nula=0;
plot(x,nula,'*r')

%FI3

x=0:0.01:0.4;
nula=0;
plot(x, nula, '*g')

x=0.4:0.01:0.6;
fi3 = (x-0.4)/0.2;
```

```
plot(x, fi3, '*g')
hold on

x=0.6:0.01:0.8;
fi33= (0.8-x)/0.2;
plot(x, fi33,'*g')
hold on

%FI4

x=0:0.01:0.6
nula=0;
plot(x,nula,'*m')

x=0.6:0.01:0.8;
fi4 = (x-0.6)/0.2;
plot(x, fi4, '*m')
hold on

x=0.8:0.01:1;
fi44= (1-x)/0.2;
plot(x, fi44,'*m')
hold on
```

Kod za plotovanje slike (13):

```
x=0.2:0.01:0.4;
hat1=(0.4-x)/0.2;
hat2=(x-0.2)/0.2;
plot(x,hat1,'b',x,hat2,'r')
```

Kod za plotovanje slike (14):

```
x=0:0.01:0.2;
kv = 1+3*(x-0.2)/0.2 + 2*((x-0.2)/0.2).^2;
plot(x, kv, '*b')
hold on

x=0.2:0.01:0.4;
kv1=1-3*(x-0.2)/0.2 + 2*((x-0.2)/0.2).^2;
plot(x, kv1,'*b')
hold on
```

```
x=0.4:0.01:1;
nula=0;
plot(x, nula, '*b')
```

Kod za plotovanje slike (15):

```
x=0.2:0.01:0.4;
kv= 1-3*(x-0.2)/0.2+ 2*((x-0.2)/0.2).^2;
kv1=1+3*(x-0.4)/0.2 + 2*((x-0.4)/0.2).^2;
kv2=1-4*((x-0.3)/0.2).^2;
plot(x,kv,'b',x,kv1,'g', x, kv2, 'r')
```

Kod za plotovanje slike (16).

```
x=0:0.01:1/3;
kv1 = 1+9*(x-1/3) + 18*(x-1/3).^2;
plot(x, kv1, 'b')
hold on

x=1/3:0.01:2/3;
kv11=1-9*(x-1/3) + 18*(x-1/3).^2;
plot(x, kv11,'b')
hold on

x=1/3:0.01:2/3;
kv2=1+9*(x-2/3) + 18*(x-2/3).^2;
plot(x, kv2, 'g')
hold on

x=2/3:0.01:1;
kv22=1-9*(x-2/3) + 18*(x-2/3).^2;
plot(x, kv22, 'g')
hold on

x=2/3:0.01:1;
kv3=1+9*(x-1) + 18*(x-1).^2;
plot(x,kv3,'m')
hold on
```

```
x=0:0.01:(1/3)
kv12= 1-36*((x-1/6).^2);
plot(x, kv12, 'r')
hold on


x=1/3:0.01:2/3;
kv32=1-36*(x-1/2).^2;
plot(x, kv32, '*r')
hold on

x=2/3:0.01:1;
kv52=1-36*(x-5/6).^2;
plot(x, kv52, 'or')
hold on
```

M.file-ovi za rešenje 1D problema iz odeljka (3.6.3)

**fem1D.m**

```
function U = fem1d(x)
M = length(x);
for i=1:M-1,
  h(i) = x(i+1)-x(i);
end

A = sparse(M,M); F=zeros(M,1);
A(1,1) = 1; F(1)=0;
A(M,M) = 1; F(M)=0;
A(2,2) = 1/h(1); F(2) = int_hat1_f(x(1),x(2));

for i=2:M-2,
  A(i,i) = A(i,i) + 1/h(i);
  A(i,i+1)   = A(i,i+1) - 1/h(i);
  A(i+1,i)   = A(i+1,i) - 1/h(i);
  A(i+1,i+1) = A(i+1,i+1) + 1/h(i);
  F(i)       = F(i) + int_hat2_f(x(i),x(i+1));
  F(i+1)     = F(i+1) + int_hat1_f(x(i),x(i+1));
end

  A(M-1,M-1) = A(M-1,M-1) + 1/h(M-1);
  F(M-1)     = F(M-1) + int_hat2_f(x(M-1),x(M));
```

```
  U = A/F;

Return
```

**hat2.m**

```
function y = hat2(x,x1,x2)
y = (x2-x)/(x2-x1);
return
```

**int hat2 f.m**

```
function y = int_hat2_f(x1,x2)
  xm = (x1+x2)*0.5;
  y = (x2-x1)*(f(x1)*hat2(x1,x1,x2) + 4*f(xm)*hat2(xm,x1,x2)...
               + f(x2)*hat2(x2,x1,x2) )/6;
  return
```

**hat1.m**

```
function y = hat1(x,x1,x2)
y = (x-x1)/(x2-x1);
return
```

**int hat1 f.m**

```
function y = int_hata1_f(x1,x2)
xm = (x1+x2)*0.5;
y = (x2-x1)*(f(x1)*hat1(x1,x1,x2) + 4*f(xm)*hat1(xm,x1,x2)...
               + f(x2)*hat1(x2,x1,x2) )/6;
return
```

**soln.m**

```
function u = soln(x)
u=sin(pi*x);
```

**f.m**

```
function y = f(x)
y = pi*pi*sin(pi*x);
return
```

**fem soln.m**

```
function y = fem_soln(x,U,xp)
M = length(x);
for i=1:M-1,
  if xp >=x(i) & xp <= x(i+1)
     y = hat2(xp,x(i),x(i+1))*U(i) + hat1(xp,x(i),x(i+1))*U(i+1);
     return
  end
end
```

**crtanje.m**

```
x2 = 0:0.01:1; k2 = length(x2);
for i=1:k2,
  u_exact(i) = soln(x2(i));
  u_fem(i) = fem_soln(x,U,x2(i));
end

plot(x2,u_fem,'-.', x2,u_exact)   % Solid: the exact, %dotted: FEM solution
hold; plot(x,U,'o')              % Mark the solution at nodal points.
xlabel('x'); ylabel('u(x) & u_{fem}(x)');
title('Solid line: Exact solution, Dotted line: FEM solution')
```

# Zaključak

Stacionarna "tačka", koju smo tražili pomoću potrebnog uslova, je u stvari, funkcija. Ne treba zaboraviti, da se zamenom te funkcije u funkcionelu (integral), dobije broj! Na primeru sa trajektorijom broda, u tom slučaju bi se dobila *dužina* najkraće putanje, kojom bi brod imao minimalne troškove, što objašnjava i činjenicu da se funkcionela u primeru zove "funkcionela troškova".

Polazeći od varijacione forme u drugom delu rada, dobila se ekvivalentna diferencijalna Ojler-Lagranžova jednačina, čijim rešavanjem se dobije *stacionarna funkcija funkcionele*. Uz uslov da je linearni diferencijalni operator u datoj jednačini samoadjungovan, može se doći do njene varijacione forme. Ako se Ojler-Lagranžova jednačina ne može rešiti u zatvorenoj formi, tada, bilo iz jednačine (Galerkinova metoda) ili njene varijacione forme (Rayleigh-Ricova metoda), direktne metode dovode do *aproksimativnog (približnog) rešenja Ojler-Lagranžove jednačine.*

U Rayleigh-Ricovoj i Galerkinovoj metodi, se dobiju sistemi koji, u slučaju velikog broja koeficijenata, dovode do rešavanja komplikovanih sistema. Da bi se takvo računanje izbeglo, prelazi se na FEM, gde se za bazne funkcije biraju Lagranžovi polinomi, po delovima neprekidne funkcije, koje se u čvornim tačkama poklapaju sa stacionarnom funkcijom. Rezultat izbora linearnih baznih funkcija u Galerkin FEM metodi je da se stacionarna funkcija aproksimira sa linearnom test funkcijom, koja kada se restrikuje na element, ima svoj određen oblik. Istovremeno smo uporedili razliku između globalne i lokalne aproksimacije stacionarne funkcije. Videli smo, da u lokalnoj aproksimaciji, vidimo koliko nam je ta aproksimacija dobra, i to na svakom elementu pojedično, a ne samo globalno.

Ujedno, posledica biranja Lagranžovih polinoma je tridijagonalni sistem, koji se lako reši.

# Literatura


[1] K. W. Cassel, *Variational Methods with Applications in Science and Engineering*, University Press, Cambridge, 2013.

[2] N. Teofanov, Lj. Gajić, *Predavanja iz optimizacije*, Prirodno-matematički fakultet, TEMPUS CD JEP 17017-2002, Novi Sad, 2006.

[3] A. Kovačević, *Hamiltonova funkcija u modelima ekonomskog rasta*, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 2013.

[4] Zhilin Li, Zhonghua Qiao, Tao Tang, *Numerical Solutions of Partial Differential Equations - An Introduction to Finite Difference and Finite Element Methods*, North Carolina State University, USA and Hong Kong Baptist University, Hong Kong, 2011. (str.117-138)

[5] J.E. Flaherty, *Finite Element Analysis*, New York, 2000. (str.34-48)

# Biografija

Milota Čorba je rođena 14. januara 1990. godine u Novom Sadu. Završila je Osnovnu školu "Ljudovit Štur" u Kisaču 2005. godine, nakon čega upisuje Srednju ekonomsku školu "Svetozar Miletić", i završava je 2009. godine.

Iste godine upisuje Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, smer primenjena matematika. Zaključno sa septembarskim ispitnim rokom 2012. godine položila je sve predviđene ispite sa prosečnom ocenom 8.24 i stekla zvanje Matematičar primenjene matematike.

Nakon toga, oktobra 2012. godine upisuje master studije na istom fakultetu, smer primenjena matematika. Položila je sve ispite predviđene planom i programom zaključno sa junskim ispitnim rokom 2014. godine sa prosečnom ocenom 8.59 i time stekla uslov za odbranu master rada.

Milota Čorba
Novi Sad, 2014.godine

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

**Redni broj:**
**RBR**

**Identifikacioni broj:**
**IBR**

**Tip dokumentacije:** Monografska dokumentacija
**TD**

**Tip zapisa:** Tekstualni štampani materijal
**TZ**

**Vrsta rada:** Master rad
**VR**

**Autor:** Milota Čorba
**AU**

**Mentor:** dr Nenad Teofanov
**MN**

**Naslov rada:** Varijacioni račun i metoda Galerkina
**NR**

**Jezik publikacije:** srpski (latinica)
**JP**

**Jezik izvoda:** s / en
**JI**

**Zemlja publikovanja:** Republika Srbija
**ZP**

**Uže geografsko područje:** Vojvodina
**UGP**

**Godina:** 2014
**GO**

**Izdavač:** Autorski reprint
**IZ**

**Mesto i adresa:** Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
**MA**

**Fizički opis rada:** (5/84/0/0/23/0/0)(broj poglavlja/broj strana/broj literarnih citata/broj tabela/broj slika/broj grafika/broj priloga)
**FO:**

**Naučna oblast:** Matematika
**NO**

**Naučna disciplina:** Varijacioni račun, Numerička matematika
**ND**

**Predmetna odrednica/Ključne reči:** potreban uslov za ekstrem, varijacioni račun, Galerkin metoda, Rayleigh-Ricova metoda, metoda konačnih elemenata, obrada slike, POD
**PO, UDK**

**Čuva se:** Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
**ČU**

**Važna napomena:**
**VN**

**Izvod:** Ovaj master rad se bavi varijacionim računom i direktnim metodama, kao i teorijom koja je potrebna za njihovo razumevanje. Tražeći stacionarnu tačku u varijacionom računu, dolazi se do Ojler-Lagranžove jednačine, čije rešenje je tražena stacionarna tačka. U nekim slučajevima se ova jednačina ne može rešiti u zatvorenoj formi, i tada se njeno rešenje aproksimira koristeći direktne metode. U okviru direktnih metoda pokazuje se lokalna i globalna aproksimacija stacionarne funkcije. Rad se završava modelima obrade slike,

i POD tehnikom redukcije modela.
**IZ**

**Datum prihvatanja teme od strane NN veća:** 30.5.2014
**DP**

**Datum odbrane:**
**DO**

**Članovi komisije:**
**ČK**

**Predsednik:** dr Ljiljana Gajić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

**Član:** dr Nenad Teofanov, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor

**Član:** dr Helena Zarin, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

**Accession number:**
**ANO**

**Identification number:**
**INO**

**Document type:** Monograph type
**DT**

**Type of record:** Printed text
**TR**

**Contents Code:** Master's thesis
**CC**

**Author:** Milota Čorba
**AU**

**Mentor:** dr Nenad Teofanov
**MN**

**Title:** Variational calculus and Galerkin method
**TI**

**Language of text:** Serbian (Latin)
**LT**

**Language of abstract:** s / en
**LA**

**Country of publication:** Republic of Serbia
**CP**

**Locality of publication:** Vojvodina
**LP**

**Publication year:** 2014
**PY**

**Publisher:** Author's reprint
**PU**

**Publication place:** Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
**PP**

**Physical description:** (5/84/0/0/23/0/0)(chapters/pages/quotations/tables /pictures/ graphics/enclosures)
**PD**

**Scientific field:** Mathematics
**SF**

**Scientific discipline:** Variational calculus, Numerical Mathematics
**SD**

**Subject/Key words:** necessary condition for extreme, variational calculus, Galerkin method, Rayleigh-Ritz method, finite element method, image processing, POD
**SKW**

**Holding data:** The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
**HD**

**Note:**
**N**

**Abstract:** This master thesis is about the calculus of variations and direct methods, and the theory that is necessary for their understanding. Seeking stationary point in the calculus of variations leads to the Euler-Lagrange equation, whose solution is sought stationary point. In some cases, these equation can not be solved in closed form, and then its solution is approximated using a direct methods. Within the direct method shows the local and global approximation of stationary function. The work ends with the

image processing models, and POD model reduction technique.
**AB**

**Accepted by the Scientific Board on:** 30.5.2014
**ASB**

**Defended:**
**DE**

**Thesis defend board:**
**DB**

**President:** dr Ljiljana Gajić, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

**Member:** dr Nenad Teofanov, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, supervisor

**Member:** dr Helena Zarin , full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad