UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Miloš Kovačević

Martingalska metoda u optimizaciji portfolija

-master rad-

Mentor: prof. dr Danijela Rajter-Ćirić

jul, 2017.

Sadržaj

Predgovor

Svaki investiotor koji izlazi na tržiste hartija od vrednosti ima za cilj da kapital preraspodeli u optimalnom odnosu, kako bi umanjio rizik od nepredviđenih oscilacija u ceni akcija i kako bi maksimizirao očekivanu dobit. Može se reći da je temelj u teoriji o optimizaciji portfolija postavio američki ekonomista i nobelovac Harry Markowitz 1952. godine. Njegov pristup je zbog svoje jednostavnosti i verodostojnosti postao veoma popularan u teoriji i praksi, a uspešno se primenjuje i danas. Međutim, ta jednostavnost kojom se model odlikuje je ujedno i njegova mana. Naime, ovaj model podrazumeva da investitor donese odluku o raspodeli svog kapitala na pocetku perioda, a posledice te odluke se vide tek na kraju. Nisu dozvoljene nikakve intervencije u međuvremenu i zbog toga se ovaj model zove statičan model. Tokom druge polovine dvadesetog veka razvilo se jos dosta modela, pogotovo neprekidnih pristupa optimizaciji portfolija, koji dozvoljavaju trgovinu u bilo kom trenutku izmedju početka i kraja trgovanja. Jedan od tih modela je takozvana martingalska metoda u optimizaciji portfolija koja je i tema ovog rada. Obzirom da je za razumevanje ove metode potrebno poznavanje stohastičke analize, u prvom delu rada dat je pregled osnovnih pojmova iz teorije verovatnoće i slučajnih procesa. U drugom delu rada predstavljen je model sa teorijskog stanovišta. U poslednjem, trećem delu, dat je primer u kojem su upotrebljeni istorijski podaci o kretanju cena akcija na Njujorškoj berzi preuzeti sa sajta www.finance.yahoo.com. Rad je baziran na radovima Ralfa Korna, profesora sa Tehničkog Univerziteta u Kajzerslauternu u Nemačkoj.

Pregled oznaka i simbola

1. $a \wedge b = \min\{a, b\}$,
2. $\mathbb{R}$ - skup realnih brojeva,
3. $\mathbb{R}^+$ - skup pozitivnih realnih brojeva,
4. $\mathbb{R}_0^+$ - skup nenegativnih realnih brojeva,
5. $\mathbb{N}$ - skup prirodnih brojeva,
6. a' - transponovani vektor a,
7. $f \in \mathcal{C}(a, b)$ - funkcija f je neprekidna na intervalu (a, b),
8. $f \in \mathcal{C}^n(a, b)$ - funkcija f je n puta neprekidno diferencijabilna na intervalu (a, b),
9. $f \in \mathcal{C}^{m,n}$ - funkcija f je m puta neprekidno diferencijabilna po prvoj promenljivoj i n puta neprekidno diferencijabilna po drugoj,
10. HoV - hartije od vrednosti,
11. s.s. - skoro sigurno.

Glava 1

Prostor verovatnoća i slučajni procesi

Posmatrajmo eksperiment čiji je ishod slučajan. Sa Ω ćemo označiti skup svih mogućih ishoda tog eksperimenta, takozvani prostor elementarnih događaja. Podskupove od Ω ćemo nazivati događaji.

Događaji A i B se meusobno isključuju (disjunktni su) ako važi da je $A \bigcap B = \emptyset$.

Konačna ili prebrojiva familija međusobno disjunktnih skupova $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ je familija događaja koji se međusobno isključuju ako je $A_i \bigcap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, ...$

Kada su događaji A i B disjunktni, uniju ćemo označavati sa $A + B$. Uniju familije međusobno disjunktnih događaja ćemo označavati sa $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$.

Definicija:

1. *Podskup $\mathcal{F}$ partitivnog skupa $\mathcal{P}(\Omega)$ je σ -polje nad Ω ako važe uslovi:*
   - $\Omega \in \mathcal{F}$,
   - *ako $A \in \mathcal{F}$ onda $\bar{A} \in \mathcal{F}$, pri čemu je $\bar{A}$ komplement skupa A,*
   - *ako $A_i \in \mathcal{F}$, $i \in \mathbb{N}$, onda i $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.*
2. *Uređeni par $(\Omega,\mathcal{F})$ sa σ -poljem $\mathcal{F}$ se zove **merljiv prostor**.*
3. *Funkcija $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ se zove verovatnoća na prostoru $(\Omega,\mathcal{F})$ ako zadovoljava uslove:*
   - *$P(\Omega)$=1,*

- *Ako* $A_i \in \mathcal{F}$, $i \in \mathbb{N}$, $A_i \bigcap A_j = \emptyset$,$i \neq j$, $i, j = 1, 2, ...$, *onda*

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Definicija: *Borelovo σ -polje $\mathcal{B}$ je jedno σ -polje definisano nad skupom $\mathbb{R}$. Formira se pomoću familije poluotvorenih intervala $[a, b)$,* $\quad a, b, \in \mathbb{R}$.

Borelovo $\sigma-$polje $\mathcal{B}$ sadrži sve skupove koji se dobijaju kao konačne ili prebrojive unije ili preseci te familije kao i skupovi koji se dobijaju uzimanjem komplemenata. Može se pokazati da $\mathcal{B}$ sadrži sve otvorene, zatvorene, poluotvorene podskupove od $\mathbb{R}$.

Trojka (Ω,$\mathcal{F}$,P) se naziva prostor verovatnoća, gde je Ω skup svih mogućih ishoda, $\mathcal{F}$ je σ -polje definisana nad Ω i P je verovatnoća nad $(\Omega, \mathcal{F})$.

Definicija: *Prostor verovatnoća (Ω,$\mathcal{F}$,P) naziva se* ***kompletan prostor verovatnoća*** *ako za svako $B \in \mathcal{F}$, za koje je $P(B) = 0$ i svako $A \subset B$ važi i da $A \in \mathcal{F}$.*

Definicija: *Preslikavanje $X : \Omega \to \mathbb{R}$ je* ***slučajna promenljiva*** *na prostoru verovatnoća (Ω,$\mathcal{F}$,P) ako X^{-1} $(S) \in \mathcal{F}$ za svako S iz $\mathcal{B}$, gde je $\mathcal{B}$ Borelovo σ polje. Ekvivalentno, kazemo da je X $\mathcal{F}$-merljivo.*

Definicija: *Slučajna promenljiva X je* ***diskretna*** *ako postoji prebrojiv skup različitih vrednosti $R_X = \{x_1, x_2, ...\}$, takav da je $P\{X \in \bar{R_X}\} = 0$, gde je $\bar{R_X}$ komplement skupa R_X. Verovatnoću događaja $\{X = x_i\}$ označavamo sa $p(x_i)$:*

$$p(x_i) = P(\omega \in \Omega | X(\omega) = x_i) = P\{X = x_i\}, i = 1, 2, ...$$

Skup vrednosti diskretne slucajne promenljive $\{x_1, x_2, ...\}$ i odgovarajuće verovatnoće $p(x_i)$, i = 1,2,..., čine zakon raspodele slučajne promenljive X.

Definicija: *Slučajna promenljiva X je* ***apsolutno neprekidna*** *ako postoji nenegativna integrabilna funkcija $\varphi_X(x)$, $-\infty < x < \infty$, takva da je za svaki skup $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,*

$$P(X \in S) = \int_S \varphi_X(x) dx.$$

Funkcija $\varphi_X(x)$ naziva se funkcija gustine slučajne promenljive X.

Slučajna promenljiva X ima normalnu $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ raspodelu, $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, ako je njena funkcija gustine data sa

$$\varphi_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Definicija: ***Očekivanje slučajne promenljive*** *X, $E(X)$, definiše se na sledeći način*:

i) a*ko je slučajna promenljiva X diskretnog tipa sa zakonom raspodele $p(x_i)$, $i = 1, 2, ...$ i važi da je $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p(x_i) < \infty$, tada je*

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i),$$

ii) *ako je slučajna promenljiva X apsolutno neprekidna sa gustinom $\varphi_X(x)$, i važi da je $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \varphi_X(x) dx < \infty$, tada je:*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \varphi_X(x) dx < \infty.$$

Definicija: ***Centralni moment*** *reda r, $r = 1, 2, ...$ slučajne promenljive X, m_r, definiše se kao*:

$$m_r = E((X - E(X))^r).$$

Definicija: *Centralni momenat reda dva slučajne promenljive X zove se disperzija (varijansa) slučajne promenljive X i označava se sa $D(X)$ ili σ^2.*

Definicija: *Standardno odstupanje (standardna devijacija) slučajne promenljive X se definiše kao*

$$\sigma = \sqrt{D(X)}.$$

Slučajne promenljiva X sa normalnom raspodelom $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ ima očekivanje m i dispreziju σ^2.

Definicija: Kovarijansa slučajne promenljive (X, Y), $cov(X, Y)$ ili σ_{XY} je:

$$cov(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Definicija: *Niz σ -polja $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$... na Ω, takvih da je*

$$\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_3 \subset ...\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$$

naziva se ***filtracija****.*

Ovde $\mathcal{F}_n$ intuitivno predstavlja naše znanje u trenutku n. Tačnije $\mathcal{F}_n$ sadrži sve dogadjaje A za koje je u trenutku n moguce odlučiti da li se dogodio ili ne. Kako vreme teče biće sve više takvih događaja A, tj. filtracija $\mathcal{F}_n$ postaje sve veća. $\sigma-$polje $\mathcal{F}_t$, $t \in I$ se obično koristi za modeliranje događaja koji se posmatraju do trenutka t.

Definicija: *Skup* $\{(X_t, \mathcal{F}_t)\}$ *gde je*

i) $\{\mathcal{F}_t\}$*,* $t \in I=[0,T]$*, filtracija,*

ii) $\{X_t\}$*,*$t \in I$*, familija realnih slučajnih promenljivih, tako da je* X_t $\mathcal{F}_t$*-merljivo i*

$$
\begin{aligned}
X : [0, T] \times \Omega &\to \mathbb{R} \\
(t, \omega) &\to X_t(\omega) = X(t, \omega)
\end{aligned}
$$

se zove stohastički ili slučajan proces u odnosu na filtraciju $\mathcal{F}_t$*.*

Primetimo da je stohasticki proces $X(t, \omega)$ funkcija dva parametra $\omega \in \Omega$, $t \in I$.

Napomena:

i) Za fiksirano $t \in I$, $X(t, \omega)$ postaje slučajna promenljiva $X(t)$

ii) Za fiksirano $\omega \in \Omega$, $X(t, \omega)$ postaje realna funkcija vremena i ovo se zove trajektorija (jedna moguća staza realizacije stohastičkog procesa).

Definicija: *Stohastički proces* $\{X_t\}_{t \in [0,\infty)}$ *je neprekidan sa desne strane ako su sve njegove trajektorije* $t \to X_t(\omega)$ *neprekidne sa desne strane, odnosno* $\lim_{s \to t+} X_s(\omega) = X_t(\omega)$ *za svako* $t \in [0, \infty)$*.*

Definicija: *Stohastički proces* $\{X_t\}_{t \in [0,\infty)}$ *je neprekidan sa leve strane ako su sve njegove trajektorije* $t \to X_t(\omega)$ *neprekidne sa leve strane, odnosno* $\lim_{s \to t-} X_s(\omega) = X_t(\omega)$ *za svako* $t \in [0, \infty)$*.*

Definicija: *Stohastički proces* $\{X_t\}_{t \in [0,\infty)}$ *ima ograničene varijacije ako skoro sve njegove trajektorije imaju konačne varijacije na intervalu* $[0, t]$*.*

Definicija:

i) *σ-algebra $\mathcal{W}_t = \mathcal{F}\{W_s, 0 \leq s < t\}$ zove se istorija Braunovog kretanja do trenutka t.*

ii) *σ-algebra $\mathcal{W}_t^+ = \mathcal{F}\{W_s - W_t, s \geq t\}$ zove se budućnost Braunovog kretanja posle trenutka t.*

Definicija: *Familija $\mathcal{U}(\cdot)$ σ-algebri iz $\mathcal{F}$ zove se neanticipirajuća σ-algebra ako:*

i) $\mathcal{U}(t) \supseteq \mathcal{U}(s), 0 \leq s \leq t,$

ii) $\mathcal{U}(t) \supseteq \mathcal{W}_t, t \geq 0,$

iii) $\mathcal{U}$(t) *je nezavisno od* $\mathcal{W}_t^+, \forall t \geq 0.$

Definicija: *Stohastički proces $X(t)$ je neanticipirajući ako je za svako $t \geq 0$ $X(t)$ $\mathcal{U}(t)$-merljivo.*

Definicija: *Stohastički proces $X(t) = X(t, \omega)$ je **progresivno merljiv** ako je neanticipirajući i ako je zajedniko merljiv, i po t i po ω.*

Definicija: *Neka je $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$ stohastički proces. σ-algebra $\mathcal{F}_t^X$ je generisana slučajnom promenljivom $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$ do trenutka t ako je to najmanja σ-algebra za koju je slučajna promenljiva X_s, $s \leq t$, $\mathcal{F}_t$-merljiva.*

1.1 Braunovo kretanje

Braunovo kretanje je jedan od najvažnijih stohastičkih procesa. Pokazao se kao značajan matematicki alat u opisivanju raznih pojava u fizici i finansijama. Do prvih važnih primena Braunovog kretanja dosli su L.Bachelier i A.Einstein. Bachelier ga je koristio u opisivanju modela vezanih za trgovinu hartijama od vrednosti, dok je Einstein koristio Braunovo kretanje za opisivanje kretanja čestica u tečnosti.

Definicija: *Realni stohastički proces* $\{W_t\}_{t\geq 0}$ *sa neprekidnim trajektorijama i osobinama:*

i) $W_0 = 0$ *s.s.*

ii) $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ *za* $0 \leq s < t$ *(proces ima stacionarne priraštaje,)*

iii) *Za* $0 \leq t < s < u < r$, $W_t - W_s$ *je nezavisno od* $W_u - W_r$ *(proces ima nezavisne priraštaje),*

zove se (jednodimenzionalno) Braunovo kretanje.

U opštem slučaju možemo posmatrati $n-$dimenzionalni proces

$$W(t) = (W_1(t), W_2(t), ..., W_n(t))',$$

čije komponente $W_i(t)$ su nezavisna, jednodimenzionalna Braunova kretanja. Takav proces se naziva $n-$dimenzionalno Braunovo kretanje.

Filtracija za Braunovo kretanje može biti definisana na dva načina.

- kao **prirodna filtracija**, koja je definisana sa $\bar{\mathcal{F}}_t^W := \sigma\{W_s | 0 \leqslant s < t\}$, ili kao
- **Braunovska filtracija**, koja je definisana sa $\mathcal{F}_t^W := \sigma\{\bar{\mathcal{F}}_t^W \cup N | N \in \mathcal{F}, P(N) = 0\}$.

Definicija: *Filtracija* $\mathcal{F}_t$ *je neprekidna sa desne strane ako važi da je*

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+} := \bigcap_{\epsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\epsilon}.$$

Definicija: *Filtracija $\mathcal{F}_t$ je neprekidna sa leve strane ako važi da je*

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^-} := \sigma(\bigcup_{s \leqslant t} \mathcal{F}_s).$$

Definicija: *Filtracija $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$ ispunjava standardne uslove ako:*

- $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$ *je neprekidna sa desne strane i*
- $\mathcal{F}_0$ *sadrži sve skupove $N \in \Omega$ takve da je $P(N) = 0$*

Teorema: *Braunovska filtracija je neprekidna i sa desne i sa leve strane.*

Zbog tehničkih razloga, u daljem radu, koristićemo Braunovsku filtraciju jer je neprekidna i sa desne i sa leve strane.

1.2 Uslovno očekivanje

Definicija: *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća i neka je ν jedna $\sigma-$ algebra definisana na $\mathcal{F}$. Neka je $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ jedna slučajna promenljiva definisana na prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Uslovno očekivanje $E(X|\nu)$ definišemo kao svaku $\nu-$merljivu slučajnu promenljivu koja zadovoljava:*

$$\int_A X dp = \int_A E(X|\nu) dp, A \in \nu.$$

Teorema: *Osobine uslovnog očekivanja:*

1. $E(E(X|\nu)) = E(X)$,
2. $E(X|\nu) = X$ *ako je X $\nu-$merljivo ,*
3. $E(X|\nu) = E(X)$ *ako je X nezavisno od ν,*
4. Ako su $a, b \in \mathbb{R}$, *tada je $E(aX + bY|\nu) = aE(X|\nu) + bE(Y|\nu)$ skoro sigurno.*

Kada kažemo da je slučajna promenljiva X nezavisna od ν, mislimo da je $\sigma-$algebra generisana slučajnom promenljivom X nezavisna od $\sigma-$algebre ν. Dve $\sigma-$algebre $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ su nezavisne ako za svako $A \in \mathcal{F}_1$ i svako $B \in \mathcal{F}_2$ važi da je $P(AB) = P(A)P(B)$.

1.3 Martingali

Teorija martingala je nastala sa ciljem da dokaže da je nemoguće ostvariti siguran profit u fer igrama na sreću, bez obzira na to kakvu strategiju razvijemo. Kasnije se ispostavilo da ova teorija moze imati veliku primenu, a martingali su postali jedan od glavnih alata u proučavanju slučajnih procesa.

Definicija: *Niz slučajnih promenljivih* $M_1, M_2, M_3, ...$ *je adaptiran (prilagođen) filtraciji* $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3 ...$ *ako je* M_n $\mathcal{F}_n-$*merljivo.*

Uslov u definiciji intuitivno znači da $\mathcal{F}_n$ sadrži sve što se može saznati iz slučajnog niza $M_1, M_2, M_3, ...$

Definicija: *Niz slučajnih promenljivih* $M_1, M_2, M_3, ...$ *zove se martingal u odnosu na filtraciju* $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3 ...$ *ako*

i) M_n *je integrabilno za sve* $n = 1, 2, ...$ *(ima očekivanje),*

ii) $M_1, M_2, M_3, ...$ *je adaptiran filtraciji* $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3 ...$*, odnosno svako* X_t *je* $\mathcal{F}_t-$*merljivo*

iii) $E(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = M_n$ *(glavno martingalsko svojstvo).*

Za nas će najvažniji biti neprekidni martingali, odnosno oni $\{X_t\}_{t\geq 0}$ za koje postoji $\Omega_0 \in \Omega$ tako da je $P(\Omega_0) = 1$ i za svako $\omega \in \Omega_0$ funkcija na $[0, \infty)$ data sa $t \to X_t(\omega)$ neprekidna.

Da bismo slikovito objasnili šta je zapravo martingal, koristićemo sledeći primer. Slučajnu promenljivu X_i možemo posmatrati kao dobitak kockara u $i-$tom bacanju novčića, dok $M_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ možemo posmatrati kao dobitak kockara nakon n bacanja novčića. Glavno martingalsko svojstvo nam govori da će očekivano bogatsvo kockara nakon $(n + 1)-$og bacanja imati istu onu vrednost koju je kockar imao nakon n bacanja. Dakle, ne možemo očekivati da profitiramo u fer igri na sreću.

Definicija: *Niz slučajnih promenljivih* $M_1, M_2, M_3, ...$ *zove se supermartingal (submartingal) u odnosu na filtraciju* $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3 ...$ *ako:*

i) M_n *je integrabilno za sve* $n = 1, 2, ...$ *(ima očekivanje),*

ii) $M_1, M_2, M_3, ...$ *je adaptiran filtraciji* $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3 ...$*,*

iii) $E(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leqslant M_n$ *(odnosno* $E(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geqslant M_n$*)*

Tvrđenje: Braunovo kretanje je martingal.
Dokaz:

$$\begin{aligned} E(W_t|\mathcal{F}_t) &= E(W_t - W_s + W_s|\mathcal{F}_t) \\ &= E(W_t - W_s|\mathcal{F}_t) + E(W_s|\mathcal{F}_t) \\ &= E(W_t - W_s|\mathcal{F}_t) + W_s \\ &= E(W_t - W_s) + W_s \\ &= W_s \end{aligned}$$

Treća jednakost sledi iz činjenice da je $W_s - \mathcal{F}_s$ merljivo. Sledaća jednakost zbog toga što je $W_t - W_s$ nezavisno od $\mathcal{F}_s$, poslednja iz osobine Braunovog kretanja $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$.

Primer: Neka je $X_i = \mu_i \cdot t + \sigma \cdot W_t$, $\mu_i, \sigma \in \mathbb{R}, t \geqslant 0, i = 1, 2, 3$, Braunovo kretanje sa *driftom* μ i *volatilnošću* σ. Tada je:

i) $\mu_1 > 0 \Rightarrow X_1(t)$ je submartingal

ii) $\mu_2 = 0 \Rightarrow X_2(t)$ je martingal

iii) $\mu_3 < 0 \Rightarrow X_3(t)$ je supermartingal

Neka je $X_n, n \in \mathbb{N}$, kapital investitora nakon n dana trgovanja na berzi. "Fer"tržište ispunjava martingalski uslov $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$, odnosno očekivani iznos kapitala nakon $n+1$ dana, je isti kao iznos nakon n dana. Poželjno tržište za investitora bi bio submartingal ($E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geq X_n$), dok bi nepoželjno bio supermartingal ($E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leq X_n$).

1.4 Vreme zaustavljanja

Definicija: *Vreme zaustavljanja (eng.*stopping time*) u odnosu na filtraciju* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$ *(ili* $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*) je* $\mathcal{F}-$*merljiva slučajna promenljiva*

$$\tau : \Omega \to [0,\infty]$$

ili

$$\tau : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

tako da $\{\omega \in \Omega | \tau(\omega) \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$ *za svako* $t \in [0,\infty)$*, odnosno* $\{\omega \in \Omega | \tau(\omega) \leqslant n\} \in \mathcal{F}_n$ *za svako* $n \in \mathbb{N}$.

Teorema: *Neka su* τ_1 *i* τ_2 *vremana zaustavljanja, tada je i* $\tau_1 \wedge \tau_2 := \min\{\tau_1, \tau_2\}$ *takođe vreme zaustavljanja.*

Proces zaustavljanja. Neka je $\{(X_t, \mathcal{F}_t)\}_{t\in I}$ stohastički proces i neka I označava skup $\mathbb{N}$ ili interval $[0,\infty)$. Sada možemo definisati proces zaustavljanja $\{X_{t\wedge\tau}\}_{t\in I}$ sa

$$X_{t\wedge\tau}(\omega) = \begin{cases} X_t(\omega), & \text{ako } t \leqslant \tau(\omega) \\ X_{\tau(\omega)}(\omega), & \text{ako } t > \tau(\omega) \end{cases}$$

Vreme zaustavljanja stoga predstavlja momenat u kom zamrzavamo proces u datom trenutku. Uslov $\{\omega \in \Omega | \tau(\omega) \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$ znači da u trenutku t možemo da odlučimo da li da zaustavimo proces ili ne.

Filtracija zaustavljanja: Neka je τ vreme zaustavljanja u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$. Definisimo $\sigma-$polje $\mathcal{F}_\tau$ sastavljeno od događaja do vremena zaustavljanja τ sa

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} | A \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t, \quad \forall t \in [0,\infty)\}$$

Primetimo da je τ $\mathcal{F}_\tau-$merljivo. Kako su τ i $\tau \wedge t$ vremena zaustavljanja možemo definisati filtraciju zaustavljanja $\{\mathcal{F}_{\tau\wedge t}\}_{t\in[0,\infty)}$. Primetimo da važi $\{\mathcal{F}_{\tau\wedge t}\} \subset \mathcal{F}_t$.

Sada se postavlja pitanje: Šta će se desiti sa martingalom ili submartingalom ako ga zaustavimo. Da li će ostati martingal odnosno submartingal?

Teorema: *Neka je* $\{X_t, \mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$ *submartingal ili martingal neprekidan sa desne strane. Neka su* τ_1 *i* τ_2 *vremena zaustavljanja tako da važi* $\tau_1 \leq \tau_2$*. Tada* *za svako $t \in [0, \infty)$ važi:*

$$E(X_{t \wedge \tau_2} | \mathcal{F}_{t \wedge \tau_1}) \geq X_{t \wedge \tau_1}$$

odnosno

$$E(X_{t \wedge \tau_2} | \mathcal{F}_{t \wedge \tau_1}) = X_{t \wedge \tau_1}.$$

Drugim rečima, neka je τ vreme zaustavljanja i neka je $\{X_t, \mathcal{F}_t\}_{t \in [0,\infty)}$ submartingal, odnosno martingal, neprekidan sa desne strane. Tada je proces zaustavljanja $\{(X_{t \wedge \tau}, \mathcal{F}_t)\}_{t \in [0,\infty)}$ takođe submartingal, tj. martingal.

Definicija: *Neka je $\{X_t, \mathcal{F}_t\}_{t \in [0,\infty)}$ stohastički proces i neka je $X_0 = 0$. Ako postoji neopadajući niz vremena zaustavljanja $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ takvih da važi*

$$P(\lim_{n \to \infty} \tau_n = \infty) = 1$$

tako da je

$$\{(X_t^{(n)} = X_{t \wedge \tau_n}, \mathcal{F}_t)\}_{t \in [0,\infty)}$$

martingal za svako $n \in \mathbb{N}$, tada je X lokalni martingal.

Napomene:

1. Svaki martingal je lokalni martingal,
2. Ako je X lokalni martigal sa neprekidnim trajektorijama, tada se zove neprekidni lokalni martingal,
3. Postoje lokalni martingali koji nisu martingali.

Teorema: *Nenegativni lokalni martingal je supermartingal.*

1.5 Itov integral

U modeliranju cena akcija pojaviće se problem kako rešiti sledeći integral:

$$\int_0^t X_s(\omega)dW_s(\omega),$$

gde je $W_t(\omega)$ Braunovo kretanje, a $X_t(\omega)$ je merljiva nenegativna funkcija $X_t(\omega) : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}_0^+$.

Ovaj integral ne možemo rešiti kao Rimanov budući da su trajektorije Braunovog kretanja nisu skoro nigde diferencijabilne. Ne možemo ga posmatrati ni kao Lebegov jer trajektorije imaju neograničene varijacije.

Pošto ne možemo izračunati ovaj integral, moramo ga nekako aproksimirati. Ideja je da definišemo stohastičke integrale za step procese. Onda ćemo pokazati da se ostali stohastički procesi mogu predstaviti preko step procesa i tada ćemo doći do rešenja integrala.

Sa $\mathbb{L}^2[0, T]$ označićemo prostor progresivno merljivih stohastičkih procesa X takvih da važi

$$E\left(\int_0^T X^2 dW\right) < \infty$$

Definicija: *Stohastički proces $X \in \mathbb{L}^2[0, T]$ naziva se step proces (proces koraka) ako postoji particija $P = \{0 = t_0 < t_1 < ... < t_m = T\}$ intervala $[0, T]$ tako da je*

$$X(t) = X_k, \text{za } t_k \leq t \leq t_{k+1}, k = 0, 1, ..., m-1$$

odnosno, na svakom intervalu proces X je jednak određenoj slučajnoj promenljivoj (konstantan je po vremenu).

Definicija: *(Itov integral step procesa) Neka je $X \in \mathbb{L}^2[0, T]$ step proces. Tada je*

$$\int_0^T XdW = \sum_{k=0}^{m-1} X_k[W(t_{k+1}) - W(t_k)]$$

Itov integral step procesa X na $[0, T]$.

Stohastički integral je slučajna promenljiva (kao suma slučajnih promenljivih).

Teorema: *Ako je* $X \in \mathbb{L}^2[0,T]$ *onda postoji niz ograničenih step procesa* $\{X^n\}_n$ *takvih da* $E\big(\int_0^T (X - X^n)^2 dt\big) \to 0$.

Definicija: *Za* $X \in \mathbb{L}^2[0,T]$ *definišemo Itov integral kao*

$$\int_0^T X dW = \lim_{n\to\infty} \int_0^T X^n dW$$

gde je $\{X^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *niz odgovarajućih step procesa.*

Teorema:*(Osobine Itovog integrala) Neka su* $X, Y \in \mathbb{L}^2[0,T]$, $a, b \in \mathbb{R}$. *Tada:*

i) $\int_0^T (aX + bY) dW = a \int_0^T X dW + b \int_0^T Y dW$

ii) $E\big(\int_0^T X dW\big) = 0$

iii) $E\Bigg(\big(\int_0^T X dW\big)^2\Bigg) = E\big(\int_0^T X^2 dt\big)$

iv) $E\big(\int_0^T X dW \cdot \int_0^T Y dW\big) = E\big(\int_0^T XY dt\big)$.

1.6 Itova formula

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ kompletan prostor verovatnoća sa filtracijom $\{\mathcal{F}_t\}_t$ koja zadovoljava uobičajne uslove. Dalje neka je na ovom prostoru u odnosu na ovu filtraciju definisano Braunovo kretanje $\{(W_t, \mathcal{F}_t)\}_{t\in[0,\infty)}$.

Definicija: *Neka je* $\{(W_t, \mathcal{F}_t)\}_{t\in[0,\infty)}$ *m-dimenzionalno Braunovo kretanje,* $m \in \mathbb{N}$.

- $\{(X_t, \mathcal{F}_t)\}_{t\in[0,\infty)}$ *je Itov proces ako se za svako* $t \geq 0$ *može zapisati u obliku*

$$\begin{aligned} X(t) &= X(0) + \int_0^t K(s) ds + \int_0^t H(s) dW(s) \\ &= X(0) + \int_0^t K(s) ds + \sum_{j=1}^{m} \int_0^t H_j(s) dW(s) \end{aligned}$$

Ovde je $X(0)$ $\mathcal{F}_0$*-merljivo, a* $\{K(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ *i* $\{H(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ *su progresivno merljivi procesi za koje važi*

$$\int_0^t |K(s)| ds < \infty, \quad \int_0^t H_i^2(s) ds < \infty$$

za svako $t \geq 0, i = 1, ..., m$

- *n-dimenzionalan Itov proces je vektor* $X = (X^{(1)}, ..., X^{(n)})$ *čije su komponente jednodimenzionalni Itovi procesi.*

Itov proces možemo zapisati i u obliku diferencijala na sledeći način:

$$dX_t = K_t dt + H_t dW_t$$

Definicija: *Neka su X i Y dva Itova procesa data sa:*

$$X(t) = X(0) + \int_0^t K(s)ds + \int_0^t H(s)dW(s)$$

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t L(s)ds + \int_0^t M(s)dW(s).$$

Tada se

$$\langle X, Y \rangle_t = \sum_{i=1}^m \int_0^t H_i(s)M_i(s)ds$$

naziva kvadratna kovarijansa od X i Y. Specijalno $\langle X, X \rangle_t$ *se zove kvadratna varijansa procesa X.*

Teorema: *(Jednodimenzionalna Itova formula) Neka je* W_t *jednodimenzionalno Braunovo kretanje, a* X_t *Itov proces dat sa*

$$X(t) = X(0) + \int_0^t K(s)ds + \int_0^t H(s)dW(s).$$

Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dva puta neprekidno diferencijabilna funkcija. Tada, za svako* $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d\langle X \rangle_s \\ &= f(X_0) + \int_0^t (f'(X_s) \cdot K(s) + \frac{1}{2}f''(X_s) \cdot H_s^2)ds + \int_0^t f'(X_s)H_s dW_s \end{aligned}$$

Itovu formulu možemo zapisati i u obliku diferencijala:

$$df(X_t) = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)d\langle X \rangle_t$$

Pravilo proizvoda Neka su X_t i Y_t jednodimenzionalni Itovi procesi dati sa:

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s,$$
$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s$$

tada važi

$$\begin{aligned} X_t \cdot Y_t &= X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t d\langle X, Y\rangle_s \\ &= X_0 Y_0 + \int_0^t (X_s \mu_s + Y_s K_s + H_s \sigma_s) ds + \int_0^t (X_s \sigma_s + Y_s H_s) dW_s. \end{aligned}$$

1.7 Stohastičke diferencijalne jednačine

Teorema: *Neka je* $\{(W_t, \mathcal{F}_t)\}_{t\in I}$ *m-dimenzionalno Braunovo kretanje a* $\sigma_j, j = 1, ..., m$ *i* b *stohastički procesi adaptirani filtraciji* $\mathcal{F}_t$ *tako da važi:*

i)

$$\sigma_j : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}, (t, \omega) \to \sigma_j(t, \omega)$$
$$b : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}, (t, \omega) \to b(t, \omega)$$

ii)

$$\int_0^t |b(s)| ds < \infty, \quad \forall t \in I$$
$$\int_0^t \sigma_j^2(s) ds < \infty, \quad \text{za} \quad j = 1, ..., m.$$

Tada homogena stohastička diferencijalna jednačina

$$dP(t) = P(t)\left(b(t)dt + \sum_{j=1}^{m} \sigma_j(t) dW_j(t)\right)$$
$$P(0) = p$$

ima jedinstveno rešenje

$$P(t) = p \cdot \exp\left(\int_0^t (b(s) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} \sigma_j(s)^2) ds + \sum_{j=1}^{m} \int_0^t \sigma_j(s) dW_j(s)\right)$$

Dokaz: U nastavku je dat dokaz da je $P(t)$ zaista rešenje navedene jednačine, bez dokaza jedinstvenosti:

i) $P(0) = p \cdot \exp(0) = p$

ii) Neka je $m = 1$ (u slučaju kada je $m > 1$ koristi se višedimenzionalna Itova formula)

Neka je

$$Z_t = 0 + \int_0^t (b(s) - \frac{1}{2}\sigma(s)^2) ds + \int_0^t \sigma(s) dW_s$$

odnosno

$$dZ_t = \left(b(t) - \frac{1}{2}\sigma^2(t)\right) dt + \sigma(t) dW_t$$

$f(z) = p \cdot \exp(z)$
$P(t) = p \cdot e^{Z_t}$.
Primenom Itove formule dobijamo da je

$$
\begin{aligned}
P_t &= \left(0 + p \cdot e^{Z_t} \cdot (b(t) - \frac{1}{2}\sigma^2(t)) + \frac{1}{2}p \cdot e^{Z_t}\sigma^2(t)\right)dt + p \cdot e^{Z_t}\sigma(t)dW_t \\
&= p \cdot e^{Z_t}\left(b(t) - \frac{1}{2}\sigma^2(t) + \frac{1}{2}\sigma^2(t) + \sigma(t)dW_t\right) \\
&= p \cdot e^{Z_t}\left(b(t) + \sigma(t)dW_t\right) \\
&= P(t) \cdot \left(b(t) + \sigma(t)dW_t\right).
\end{aligned}
$$

Teorema: *(Varijacija konstanti) Neka je $\{W_t, \mathcal{F}_t\}$ m-dimenzionalno Braunovo kretanje. Neka je $x \in \mathbb{R}$ i A, a, S_j, σ_j progresivno merljivi realni stohastički procesi takvi da važi*

$$\int_0^t (|A(s)| + |a(s)|)ds < \infty$$
$$\int_0^t (S_j^2(s) + \sigma_j^2(s))ds < \infty$$

za svako $t \geq 0$.

Tada stohastička diferencijalna jednačina

$$
\begin{aligned}
dX_t &= \big(A(t) \cdot X(t) + a(t)\big) + \sum_{j=1}^{m} \big(S_j(t)X(t) + \sigma_j(t)\big)dW_j(t) \\
X(0) &= x
\end{aligned}
$$

ima jedinstveno rešenje $\{(X_t, \mathcal{F}_t)\}$ dato sa

$$X(t) = Z(t) \cdot \left(x + \int_0^t \frac{1}{Z(s)} \cdot \big(a(s) - \sum_{j=1}^{m} S_j(s)\sigma_j(s)\big)ds + \sum_{j=1}^{m}\int_0^t \frac{\sigma_j(s)}{Z(s)}dW_j(s)\right),$$

gde je

$$Z(t) = \exp\left(\int_0^t \big(A(s) - \frac{1}{2}||S(s)||^2\big)ds + \int_0^t S(s)dW_s\right)$$

jedinstveno rešenje homogene jednačine

$$
\begin{aligned}
dZ_t &= Z(t)(A(t)dt + S'(t)dW_t) \\
Z(0) &= 1.
\end{aligned}
$$

1.8 Teorema o reprezentaciji martingala

Definicija: *Martingal* $\{(M_t, \mathcal{F}_t)\}_{t\in[0,T]}$ *definisan u odnosu na Braunovsku filtraciju* $\mathcal{F}_t$ *se zove Braunovski martingal.*

Teorema: *(Teorema o reprezentaciji martingala) Neka je* $\{(M_t, \mathcal{F}_t)\}_{t\in[0,T]}$ *Braunovski martingal za koji važi*

$$E(M_t^2) < \infty \qquad \forall t \in [0, T].$$

Tada postoji m-dimenzionalni realni stohastički proces $\Psi(t)$, $t \in [0, T]$ *za koji važi*

$$E\left(\int_0^T ||\Psi(t)||^2 dt\right) < \infty$$

i

$$M_t = M_0 + \int_0^t \Psi(s)' dW_s.$$

Glava 2

Optimizacija portfolija

2.1 Modeliranje cena hartija od vrednosti

Posmatrajmo tržiste hartija od vrednosti koje se sastoji od $d+1$ aktive. Među njima je d akcija, odnosno rizičnih aktiva. Neka su njihove vrednosti u početnom trenutku $t = 0$ date sa $p_1, p_2, ..., p_d$ i neka su njihove vrednoti u nekom trenutku $t > 0$ u budućnosti date sa $P_1(t), ..., P_d(t)$. Ne možemo tačno znati ove vrednosti. Na tržistu postoji i jedna nerizična aktiva (obveznica) čiju ćemo vrednost u trenutku $t = 0$ označiti sa p_0. Njena vrednost u bilo kom trenutku u budućnosti je deterministička i označićemo je sa $P_0(t)$. U ovom modelu pretpostavićemo da je moguće trgovati samo u konačnom vremenskim intervalu $[0, T]$. Takođe pretpostavićemo i da je moguće trgovati u bilo kom trenutku s obzirom da se radi o neprekidnom modelu, kao i to da su aktive savršeno deljive i da nema troškova transakcije.

Cena obveznice. Prinos kod obveznice sličan je kao prinos kod štednje u banci. Pretpostavimo da obveznica donosi prinos po osnovu kamate nakon godinu dana, ili uopštenije nakon nekog perioda. Zamislimo da ulažemo kapital u iznosu K na period od godinu dana i neka je kamatna stopa r. Na kraju tog perioda vrednost našeg kapitala je

$$K + r \cdot K = K \cdot (1 + r).$$

Ako bi se kamatna stopa od $\frac{r}{2}$ obračunavala u trenutku $t = \frac{1}{2}$, onda bi se obračunavala i dodatna kamata u periodu $[\frac{1}{2}, 1]$. Tada je vrednost kapitala u trenutku $t = 1$

$$(K + \frac{r}{2}K) + (K + \frac{r}{2}K) \cdot \frac{r}{2} = K \cdot \left(1 + \frac{r}{2}\right)^2.$$

Uopšteno, ako bi se obračunavala kamata od $\frac{r}{n}$ u trenucima $\frac{i}{n}$, $i = 1, ..., n$, $n \in \mathbb{N}$, tada bi vrednost kapitala u trenutku $t = 1$ bila

$$K \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n.$$

S obzirom da hoćemo da napravimo neprekidni model puštamo $n \to \infty$ i dobijamo da je vrednost kapitala u trenutku $t = 1$ data sa

$$K \cdot e^{r \cdot 1}$$

odnosno u trenutku $t \in [0, 1]$:

$$K \cdot e^{r \cdot t}.$$

Od sada ćemo pretpostaviti neprekidno obračunavanje kamate na obveznicu. To nas dovodi do formule za cenu obveznice u trenutku $t \in [0, T]$

$$P_0(t) = p_0 \cdot e^{r \cdot t}.$$

Ova formula može biti uopštena na slučaj kada kamatna stopa nije konstantna, već zavisi od vremena. Tada je cena obveznice data sa

$$P_0(t) = p_0 \cdot e^{\int_0^t r(s)ds}.$$

Ovu formulu možemo zapisati u obliku diferencijalne jednačine

$$dP_0(t) = P_0(t)r(t)ds, \qquad P_0(0) = p_0, \qquad t \in [0, T],$$

ili integralne jednačine

$$P_0(t) = p_0 + \int_0^t P_0(s)r(s)ds \qquad t \in [0, T].$$

Cena akcije. Cena akcije nije predvidiva. Kada je investitor kupuje, on na sebe preuzima određeni rizik koji se nadomešćuje većom očekivanom stopom prinosa u odnosu na bezrizičnu aktivu (obveznicu). Očekivanu stopu prinosa možemo odrediti iz istorijskih podataka.

Pretpostavimo da je na tržistu dostupno d akcija. Označimo sa $P_i(t)$ cenu i-te akcije u trenutku t, sa $P_i(0) = p_i$ njenu vrednost u početnom trenutku $t = 0$ i sa $\tilde{b}_i$ njen očekivani prinos. Poređenja radi, za obveznicu smo izveli formulu

$$\ln(P_0(t)) = \ln(p_0) + r \cdot t.$$

Slično možemo modelirati i cenu akcije:

$$\ln(P_i(t)) = \ln(p_i) + \tilde{b_i} \cdot t + \epsilon$$

odnosno, pretpostavljamo da cena akcije fluktuira oko svoje predviđene vrednosti.

Ovde ϵ predstavlja odstupanje od predviđene cene. Često se zove beli šum. Za ovo odstupanje uvešćemo određene pretpostavke:

i) $E(\epsilon) = 0$,

ii) Njegova vrednost u trenutku t ne sme da zavisi od njegove vrednosti u trenutku s za bilo koje $s < t$,

iii) Zavisi od vremena,

iv) Predstavlja sumu svih odstupanja stvarne cene $P_i(t)$ od predviđene $\ln(p_i) + \tilde{b_i} \cdot t$. Ako su ova odstupanja nezavisna, tada ϵ ima normalnu raspodelu $\mathcal{N}(0, \sigma^2 t)$, što se i može dokazati primenom centralne granične teoreme.

Na osnovu svega prethodnog definišemo beli šum sa

$$Y(t) = \ln(P_i(t)) - \ln(p_i) - \tilde{b_i} \cdot t.$$

$Y(t)$ ispunjava gore navedene uslove i)-iv). Šta više, $Y(t) - Y(s)$ zavisi od $(t - s)$ i nezavisno je od $Y(u)$ za $u \leq s$. Drugim rečima $Y(t) - Y(s) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2(t - s))$.

Sve ove osobine su sadržane u Braunovom kretanju $\{(W_t, \mathcal{F}_t)\}$ sa filtracijom $\mathcal{F}_t$, tako da će nam ono poslužiti u log-linearnom modelu cene akcije. Posmatrajmo najpre slučaj kada je $d = 1$ (tržiste se sastoji od jedne akcije i jedne obveznice). Tada beli šum možemo predsaviti kao Braunovo kretanje sa volatilnošću σ_{11}:

$$\ln(P_1(t)) = \ln(p_1) + \tilde{b_i} \cdot t + \sigma_{11} W_t,$$

odnosno

$$P_1(t) = p_1(t) \cdot e^{\tilde{b_i} \cdot t + \sigma_{11} W_t}.$$

Ukoliko se vratimo na realno stanje na tržistu, gde postoji d akcija, moramo obratiti pažnju i na činjenicu da su akcije medjusobno korelirane. Volatilnost σ_{ij} označavaće uticaj akcije i na akciju j. Dolazimo do formule

$$\ln(P_i(t)) = \ln(p_i) + \tilde{b_i} \cdot t + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij} W_j(t), \qquad i = 1, .., d$$

Odnosno

$$P_i(t) = p_i \cdot \exp\left(\tilde{b_i} \cdot t + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij} W_j(t)\right) \qquad i = 1, .., d,$$

gde je $W(t) = (W_1(t)), ..., W_d(t))$ d-dimenzionalno Braunovo kretanje.
Primetimo da $\sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij} W_j(t)$ ima normalnu raspodelu $\mathcal{N}\big(0, \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}^2 t\big)$, odnosno

$$\ln(P_i(t)) \sim \mathcal{N}\big(\ln(p_i) + \tilde{b_i} t, \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}^2 t\big).$$

Primetimo i to da je

$$P_i(t) = p_i \cdot \exp\left(\tilde{b_i} t + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij} W_j(t)\right), \qquad i = 1, ..., d$$

jedinstveno rešenje homogene stohastičke diferencijalne jednačine

$$\begin{aligned} dP_i(t) &= P_i(t)\left(b_i dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij} dW_j(t)\right) \\ P_i(0) &= p_i \qquad i = 1, ..., d \end{aligned}$$

gde je $b_i = \tilde{b_i} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}^2$, i=1,...,d.

Lema (Osobine cene akcije):

i) $E(P_i(t)) = p_i e^{b_i t}$

ii) $Var(P_i(t)) = p_i^2 \cdot \exp(2b_i t) \cdot \left(\exp(\sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}^2 t) - 1\right)$

iii) $Y_t = a \cdot \exp\left(\sum_{j=1}^{d} (c_j W_j(t) - \frac{1}{2} c_j^2 t)\right)$ gde $a, c_j \in \mathbb{R}, j = 1, ..., d$ je martingal

Dokaz: Bez umanjenja opštosti stavimo $d = 1$.

i) $E(P_i(t)) = E\left[p_i \cdot \exp\left(b_i t - \frac{1}{2}\sigma_i^2 t + \sigma_i W_t\right)\right]$

$$= p_i \cdot \exp(b_i t) E\left[\exp\left(- \frac{1}{2}\sigma_i^2 t + \sigma_i W_t\right)\right]$$

$$= p_i \cdot \exp(b_i t) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Bigg(-\tfrac{1}{2}\sigma_i^2 t + \sigma_i x \Bigg) \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\Bigg(-\tfrac{x^2}{2t} \Bigg) dx$$

$$= p_i \cdot \exp(b_i t) \int_{-\infty}^{\infty} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\Bigg(-\tfrac{(x-\sigma_i t)^2}{2t} \Bigg) dx = p_i \cdot \exp(b_i t) \cdot 1.$$

ii) Sledi direktno iz formule $Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$.

iii) Pokazujemo da je $E(Y_t|\mathcal{F}_s) = Y_s$

$$E(Y_t|\mathcal{F}_s) =$$

$$= E\Bigg(a \cdot \exp(c_1 W_t - \tfrac{1}{2}c_1^2 t) | \mathcal{F}_s \Bigg)$$

$$= a \cdot \exp(c_1 W_s - \tfrac{1}{2}c_1^2 s) \cdot E\Bigg(\exp\big(c_1(W_t - W_s) - \tfrac{1}{2}c_1^2(t-s)\big) | \mathcal{F}_s \Bigg)$$

$$= Y_s \cdot E\Bigg(\exp\big(c_1(W_t - W_s) - \tfrac{1}{2}c_1^2(t-s)\big) \Bigg)$$

$$= Y_s \cdot 1.$$

Poslednji identitet znamo iz dokaza pod i), dok je pretposlednji posledica nezavisnosti $W_t - W_s$ od $\mathcal{F}_s$.

Dakle, cena akcije je proizvod

- njene očekivane vrednosti $p_i e^{b_i t}$,
- i martingala sa očekivanjem 1

$$\exp\left(\sum_{j=1}^{d} (\sigma_{ij} W_j(t) - \frac{1}{2}\sigma_{ij}^2 t) \right)$$

koji zapravo modelira odstupanje stvarne cene akcije od predvidjene.

Vektor

$$b = (b_1, ..., b_d)'$$

se zove vektor očekivanih prinosa, a matrica

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & ... & \sigma_{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{d1} & ... & \sigma_{dd} \end{pmatrix}$$

se naziva kovarijansna matrica.
Stohastički proces oblika kao $P_i(t)$ zove se geometrijsko Braunovo kretanje sa driftom b_i i volatilnošću $\sigma_i = (\sigma_{i1}, ..., \sigma_{id})'$.

Sada kada smo se upoznali sa Itovim kalkulusom možemo formulisati uopšteniji model cena akcija i obveznica koji bi dozvolio nekonstantne, zavisne od vremena i integrabilne stope prinosa $b_i(t)$ i volatilnost $\sigma(t)$.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća i neka je na tom prostoru definisano $d-$dimenzionalno Braunovo kretanje $\{(W(t), \mathcal{F}_t)\}_{t\in[0.\infty)}$. Vrednost obveznice, odnosno akcije u trenutku t data je sa:

$$P_0(t) = p_0 \cdot \exp\big(\int_0^t r(s)ds\big)$$

$$P_i(t) = p_i \cdot \exp\big(\int_0^t \big(b_i(s) - \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^d \sigma_{ij}^2(s)\big)ds + \sum_{j=1}^d \int_0^t \sigma_{ij}(s)dW_j(s)\big),$$

za $t \in [0, T], \quad T > 0, \quad i = 1, ..., d$. Procesi $r(t), b(t) = (b_1(t), ..., b_d(t))'$, $\sigma(t) = (\sigma_{ij}(t))_{ij}$ bi trebalo da budu progresivno merljivi u odnosu na filtraciju $\mathcal{F}$. Takođe pretpostavićemo da je matrica $\sigma(t)$ pozitivno definitna.

Na osnovu teoreme o varijaciji konstanti ove cene su jedinstvena rešenja sledećih stohastičkih diferencijalnih jednačina.

$$dP_0(t) = P_0(t) \cdot r(t)dt$$

$$P_0(0) = p_0 \text{ (obveznica)}$$

$$dP_i(t) = P_i(t)\Bigg(b_i(t)dt + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}(t)dW_j(t)\Bigg), \quad i = 1, ..., d$$

$$P_i(0) = p_i \text{ (akcije)}$$

Ove jednačine nam predstavljaju cene kao Itove procese.

Napomena: U modelu koji smo predstavili, više ne zahtevamo da prinos na obveznicu $r(t)$ bude konstantan. Sada je $r(t)$ stohastički proces. To znači da obveznica više nije bezrizična aktiva, ali je svakako manje rizična od akcija koje su povezane sa Braunovim kretanjem.

2.2 Portfolio proces i strategija trgovanja

Kada investitor izlazi na tržiste, on izlazi sa određenim početnim kapitalom koji ulaže u hartije od vrednosti. Posle njegove prve investicije on može da izvrši preraspodelu svog kapitala. Može da proda neke od svojih aktiva pa da dobijeni novac investira u druge hartije od vrednosti. Druga mogućnost je da konzumira deo svog bogatstva koji je dobio od prodaje dela svojih hartija od vrednosti.

Sada ćemo uvesti neke pretpostavke za naš model:

1. Investitor ne može da zna šta će se dogoditi u budućnosti. Pogotovo ne sme da zna cene akcija u budućnosti,
2. Investitor izlazi na tržiste sa određenim početnim kapitalom,
3. Novac koji nije investiran u akcije mora biti investiran u obveznice,
4. Svaka promena bogatstva investitora dolazi zbog promene cena akcija ili konzumacije. Nema novih izvora novca,
5. Hartije od vrednosti su savršeno deljive,
6. Dozvoljene su negativne pozicije,
7. Nema troškova transakcije kod preraspodele aktiva.

Neka je sa x, $x > 0$, označen početni kapital investitora kojim on želi da kupi određeni broj aktiva. Komponente vektora

$$\varphi(0) = (\varphi_0(0), \varphi_1(0), ..., \varphi_d(0))'$$

označavaju broj aktive i koje investitor poseduje u trenutku $t = 0$. Takođe, $\varphi(t) = (\varphi_0(t), \varphi_1(t), ..., \varphi_d(t))'$ označava broj aktiva u posedu investitora u trenutku t. Ovaj vektor $\varphi(t)$ se naziva strategija trgovanja. Pretpostavka pod brojem 1. je uvedena da bi strategija trgovanja bila progresivno merljiv proces u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t\}_t$. Odluke o kupovini i prodaji moraju biti donete samo na osnovu informacija dostupnih do trenutka t, što je zapravo modelirano sa $\{\mathcal{F}_t\}_t$.

Primer self-financing strategije u diskretnom slučaju Neka je x početni kapital kojim investitor raspolaže. Dalje, neka je moguće trgovati u trenucima $t = 0, 1, 2$ i neka $X(t)$ označava investitorovo bogatstvo u trenutku t ($X(0) = x$). To bogatstvo može rasti usled rasta cena akcija, ili se smanjivati zbog pada cena akcija ili zbog procesa konzumacije. Predpostavimo i da su na tržistu dostupne jedna obveznica i samo jedna akcija. Komponente vektora $(\varphi_0(t), \varphi_1(t))'$ označavaće broj obveznica, odnosno akcija, koje investitor poseduje u trenutku t. Neka je $c(t)$ konzumacija investitora u trenutku t i predpostavimo da je $c(0) = 0$. Kao i do sada $P_0(t)$ je cena obveznice, a $P_1(t)$ je cena akcije u trenutku t.

U trenutku $t = 0$ investitor se odlučuje da svojim kapitalom kupi određen broj obveznica i akcija:

$$X(0) = x = \varphi_0(0)P_0(0) + \varphi_1(0)P_1(0).$$

U trenutku $t = 1$ cene hartija od vrednosti su se promenile. Sadašnje bogatsvo investitora dato je sa

$$X(1) = \varphi_0(0)P_0(1) + \varphi_1(0)P_1(1) - C(1),$$

što možemo zapisati i na sledeći način:

$$X(1) = x + \varphi_0(0) \cdot \Big(P_0(1) - P_0(0)\Big) + \varphi_1(0) \cdot \Big(P_1(1) - P_1(0)\Big) - C(1).$$

Dakle, bogatsvo u trenutku $t = 1$ je jednako početnom bogatstvu uvećanom za dobitke zbog promene u cenama hartija od vrednosti, umanjenom zbog gubitaka na osnovu promene u ceni određenih akcija i umanjenom za iznos konzumacije.

Investitoru je sada, u trenutku $t = 1$ dozvoljeno da izvrši preraspodelu svog kapitala:

$$X(1) = \varphi_0(1)P_0(1) + \varphi_1(1)P_1(1).$$

Slično, u trenutku $t = 2$ imamo

$$X(2) = \varphi_0(2)P_0(2) + \varphi_1(2)P_1(2),$$

što možemo zapisati i na sledeći način:

$$X(2) = x + \sum_{i=1}^{2}[\varphi_0(i-1) \cdot (P_0(i) - P_0(i-1)) + \varphi_1(i-1) \cdot (P_1(i) - P_1(i-1))] - \sum_{i=1}^{2} C(i).$$

U diskretnom modelu uslov *self-financing trading strategy* može se okarakterisati kao: bogatstvo pre preraspodele umanjeno za konzumaciju mora biti jednako bogatstvu nakon preraspodele. Ovo ima smisla u diskretnom modelu, ali ne i u neprekidnom, gde je moguće trgovati u bilo kom trenutku. Za neprekidan model, sume u poslednjoj jednačini zamenićemo odgovarajućim integralima:

$$X(t) = x + \int_0^t \varphi_0(s)dP_0(s) + \int_0^t \varphi_1(s)dP_1(s) - \int_0^t c(s)ds.$$

Pošto je proces cene akcije Itov proces, moramo uvesti neka ograničenja da bi navedeni integrali imali smisla.

Definicija:

a) *Strategija trgovanja (eng. trading strategy) φ je realan $(d+1)$-dimenzionalan progresivno merljiv proces u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$*

$$\varphi(t) = (\varphi_0(t), \varphi_1(t), ..., \varphi_d(t))'$$

koji zadovoljava

$$\int_0^T |\varphi_0(t)|dt < \infty$$
$$\int_0^T \Big(\varphi_i(t)P_i(t)\Big)^2 dt < \infty \qquad i = 1, ..., d.$$

Vrednost $x = \sum_{i=0}^d \varphi_i(0)p_i$ je početna vrednost od $X(t)$.

b) *Neka je φ strategija trgovanja sa početnom vrednošću x. Tada se proces*

$$X(t) = \sum_{i=1}^d \varphi_i(t)P_i(t)$$

zove ***proces bogatstva*** *u odnosu na φ sa početnom vrednošću x.*

c) *Nenegatvan progresivno merljiv proces $c(t)$ u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ koji zadovoljava:*

$$\int_0^T c(t)dt < \infty$$

se zove ***proces konzumacije***.

Definicija: *Uređeni par (φ, c) koji se sastoji od strategije trgovanja φ i procesa konzumacije c zave se* ***samofinansirajući par*** *ako odgovarajući proces bogatstva $X(t), t \in [0, T]$ zadovoljava*

$$X(t) = x + \sum_{i=0}^d \int_0^t \varphi_i(s)dP_i(s) - \int_0^t c(s)ds.$$

Napomena:

$$\int_0^t \varphi_0(s)dP_0(s) = \int_0^t \varphi_0(s)P_0(s)r(s)ds,$$
$$\int_0^t \varphi_i(s)dP_i(s) = \int_0^t \varphi_i(s)P_i(s)b_i(s)ds + \sum_{j=1}^{d}\int_0^t \varphi_i(s)P_i(s)\sigma_{ij}(s)dW_j(s), \quad i = 1, ..., d.$$

Svi ovi integrali postoje zbog uslova iz pretposlednje definicije kao i zbog ograničenosti procesa r, b i σ.

Definicija: *Neka je (φ, c) samofinansirajući par koji se sastoji od strategije trgovanja i procesa konzumacije koji se odnose na proces bogatstva $X(t)$. Tada se d-dimenzionalni proces*

$$\pi(t) = (\pi_1(t), ..., \pi_d(t))', \quad t \in [0, T], \quad gde \quad je \quad \pi_i(t) = \frac{\varphi_i(t) \cdot P_i(t)}{X(t)}$$

se zove ***samofinansirajući portfolio proces*** *u odnosu na (φ, c).*

Komponente portfolio procesa predstavljaju udeo kapitala uložen u različite akcije. Deo kapitala uložen u obveznicu dat je sa:

$$(1 - \pi(t)'\underline{1}) = \frac{\varphi_0(t)P_0(t)}{X(t)} \quad \text{gde je} \quad \underline{1} = (1, ..., 1)' \in \mathbb{R}^d.$$

Jednačina bogatstva. Prethodna definicija portfolio procesa pomoći će nam da dođemo do jednačine bogatstva.

$$\begin{aligned}
dX(t) &= \sum_{i=0}^{d} \varphi_i(t)dP_i(t) - c(t)dt \\
&= \varphi_0(t)P_0(t)r(t)dt + \sum_{i=1}^{d} \varphi_i(t)P_i(t)\Big(b_i(t)dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}(t)dW_j(t)\Big) - c(t)dt \\
&= (1 - \pi(t)'\underline{1})X(t)r(t)dt + \sum_{i=1}^{d} X(t)\pi_i(t)\Big(b_i(t)dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}(t)dW_j(t)\Big) - c(t)dt \\
&= (1 - \pi(t)'\underline{1})X(t)r(t)dt + X(t)\pi(t)'b(t)dt + X(t)\pi(t)'\sigma(t)dW(t) - c(t)dt
\end{aligned}$$

Iz ovoga konačno dobijamo jednačinu bogatstva:

$$dX(t) = \big(r(t)X(t) - c(t)\big)dt + X(t)\pi(t)'\Big(\big(b(t) - r(t)\underline{1}\big)dt + \sigma(t)dW(t)\Big)$$

$X(0) = x$

Pošto $r(t)$, $\sigma(t)$, i $b(t)$ zadovoljavaju potrebne uslove, na osnovu teoreme o varijaciji konstanti jedini uslov koji je još potreban da bi navedena jednačina imala jedinstveno rešenje je da bude ispunjeno i:

$$\int_0^T \pi_i^2(t)dt < \infty$$

za svako $i = 1, ..., d$.

Sada ćemo dati ekvivalentnu definiciju portfolio procesa.

Definicija: *Progresivno merljiv d-dimenzionalni proces $\pi(t)$ se zove samofinansirajući portfolio u odnosu na odgovarajuci proces konzumacije $c(t)$ ako odgovarajuća jednačina bogatstva ima jedinstveno rešenje $X(t) = X^{\pi,c}(t)$ za koji važi:*

$$\int_0^T (X(t) \cdot \pi(t))^2 dt < \infty \quad za \quad i = 1, ..., d$$

Definicija: *Uređeni parovi (φ, c) i (π, c) nazivaju se dopustivi za početno bogatstvo $x > 0$ ako za odgovarajući proces bogatstva važi*

$$X(t) \geq 0, \quad \forall t \in [0, T]$$

Uređeni dopustivi par (π, c) označićemo sa $\mathcal{A}(x)$.

2.3 Teorema o kompletnosti tržišta

Vlasnik kapitala može želeti da maksimizira prinos i/ili da živi od procesa konzumacije. Takođe, može želeti da dođe do određenog bogatstva, određenog unapred. Zbog toga moramo definisati diskontni faktor koji bi omogućio izračunavanja unazad, u odnosu na trenutak T, do bilo kog trenutka $t \in [0, T]$. Jedan deo tog diskontnog faktora mora se odnositi na obveznicu:

$$\gamma(t) = \exp\Bigg(- \int_0^t r(s)ds \Bigg).$$

Dalje ćemo definisati

$$\theta(t) = \sigma^{-1}(t)(b(t) - r(t)\underline{1})$$

$$Z(t) = \exp\Bigg(- \int_0^t \theta(s)' dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t ||\theta(s)||^2 ds \Bigg)$$

$$H(t) = \gamma(t) \cdot Z(t) \text{ (diskontni faktor)}$$

Zbog ograničenosti procesa r i b kao i zbog pozitivne definitnosti od σ sledi i ograničenost od $||\theta(t)||^2$. Za proces $H(t)$ primetimo da je pozitivan, neprekidan i progresivno merljiv u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$. Takođe, on je i jedinstveno rešenje jednačine

$$\begin{aligned} dH(t) &= -H(t)\Bigg(r(t)dt + \theta(t)' dW(t) \Bigg) \\ H(0) &= 1. \end{aligned}$$

Napomena: Za objašnjenje procesa $\theta(t)$, pojednostavićemo celu situaciju i posmatrati slučaj kada je $d = 1$, a procesi r, b i σ konstantni tokom vremena. Time dolazimo do rezultata $\theta = \frac{b-r}{\sigma}$, što je zapravo Šarpeov indeks. Sada je jasno da $\theta(t)$ pretstavlja nadoknadu za rizik investiranja u akcije umesto u obveznicu.

Teorema: *(Kompletnost tržista)*

(1) *Neka je samofinansirajući par (π, c), koji se sastoji iz portfolio procesa π i procesa konzumacije c, prihvatljiv za početno bogatstvo $x \geq 0$, odnosno $(\pi, c) \in \mathcal{A}(x)$. Tada odgovarajuci proces bogatstva $X(t)$ zadovoljava*

$$E\Bigg(H(t)X(t) + \int_0^t H(s)c(s)ds \Bigg) \leq x, \quad \forall t \in [0, T].$$

(2) *Neka je $B \geq 0$ $\mathcal{F}_T$-merljiva slučajna promenljiva, a $c(t)$, $t \in [0, T]$ proces konzumacije za koji važi*

$$x = E\bigg(H(T)B + \int_0^t H(s)c(s)ds\bigg) < \infty.$$

Tada postoji portfolio proces $\pi(t)$, $t \in [0, T]$, tako da $(\pi, c) \in \mathcal{A}(x)$ i odgovarajući proces bogatstva $X(t)$ zadovoljava

$$X(T) = B.$$

Dokaz: U dokazu ćemo koristiti činjenicu da je $H(t)$ jedinstveno rešenje stohastičke diferencijalne jednačine

$$\begin{aligned} dH(t) &= -H(t)\bigg(r(t)dt + \theta(t)'dW(t)\bigg) \\ H(0) &= 1. \end{aligned}$$

(1) Neka je $(\pi, c) \in \mathcal{A}(x)$. Koristeći gornju interpretaciju procesa $H(t)$ i jednačinu bogatstva, te primenjujući pravilo proizvoda na $H_t X_t$ dobijamo sledeći rezultat:

$$\begin{aligned} &H(t)X(t) + \int_0^t H(s)c(s)ds \\ &\quad = x + \int_0^t H(s)dX_s + \int_0^t X(s)dH(s) + \langle X, H\rangle_t + \int_0^t H(s)c(s)ds \quad (*) \\ &\quad = x + \int_0^t H(s)X(s)\bigg(r(s) + \pi(s)'\big(b(s) - r(s)\cdot \underline{1}\big) - r(s) - \pi(s)'\sigma(s)\theta(s)\bigg)ds \\ &\qquad + \int_0^t H(s)X(s)\bigg(\pi(s)'\sigma(s) - \theta(s)'\bigg)dW(s) \\ &\quad = x + \int_0^t H(s)X(s)\bigg(\pi(s)'\sigma(s) - \theta(s)'\bigg)dW(s) \quad (*) \end{aligned}$$

Kako su $H(t)$, $X(t)$ i $c(t)$ nenegativni, tako je i leva strana gornje jednačine nenegativna. S druge strane, izraz nakon poslednjeg znaka jednakosti je lokalni martingal, a kako je svaki nenegativni lokalni martingal ujedno i supermartingal sledi da je:

$$\begin{aligned} &E\bigg(H(t)X(t) + \int_0^t H(s)c(s)ds\bigg) \\ &= E\bigg(x + \int_0^t H(s)X(s)\bigg(\pi(s)'\sigma(s) - \theta(s)'\bigg)dW(s)\bigg) \\ &\leq x \end{aligned}$$

(2) Definišimo

$$X(t) = \frac{1}{H(t)} \cdot E\Big(\int_t^T H(s)c(s)ds + H(T) \cdot B|\mathcal{F}_t\Big)$$

pa je $X(t)$ $\mathcal{F}_t$-merljivo i važi da je $X(T) = B$. Kako je $\{\mathcal{F}_t\}_t$ Braunovska filtracija, uslovno očekivanje u odnosu na $\mathcal{F}_0$ ($t = 0$) je konstantno, odnosno $X(0) = x$. Sada ćemo definisati proces $M(t)$ kao:

$$\begin{aligned} M(t) =& X(t)H(t) + \int_0^t H(s)c(s)ds \\ =& E\Big[\int_0^T H(s)c(s)ds + H(T)B|\mathcal{F}_t\Big] \end{aligned}$$

Ovaj proces je martingal u odnosu na $\mathcal{F}_t$ i važi $M(0) = x$. Na osnovu teoreme o reprezentaciji martingala, M se može zapisati preko Itovog integrala:

$$M(t) = x + \int_0^t \Psi(s)' dW(s), \quad \forall t \in [0, T]$$

pri čemu je $\Psi(t)$ d-dimenzionalni, progresivno merljiv proces u odnosu na $\mathcal{F}_t$ koji zadovoljava i

$$\int_0^T ||\Psi(t)||^2 dt < \infty.$$

Konačno dolazimo do identiteta:

$$X(t)H(t) + \int_0^t H(s)c(s)ds = x + \int_0^t \Psi(s)' dW(s) \quad (**)$$

Ukrštajući (*) i (**) sa lemama 1 i 2 (koje su navedene u nastavku) zaključujemo da je onakvo $X(t)$, kakvo je prethodno definisano, proces bogatstva koji odgovara paru $(\pi, c) \in \mathcal{A}(x)$ i

$$\pi(t) = \begin{cases} \Big(\sigma(t)\big)^{-1}\big(\frac{\Psi(t)}{H(t)X(t)} + \theta(t)\big), & \text{X(t)>0} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Lema 1: Neka su $X(t)$ i $\pi(t)$ kao u dokazu pod (2) prethodne teoreme tada je

$$\int_0^T (\pi_i(t)X(t))^2 < \infty, \quad i = 1, ..., d.$$

Lema 2: Neka su $X(t)$, $c(t)$ i $\pi(t)$ kao u dokazu pod (2) prethodne teoreme. Ako je $X(t)$ rešenje stohastičke diferencijalne jednačine

$$\begin{aligned} d(H(t)X(t)) &= H(t)X(t)(\pi(t)'\sigma(t) - \theta(t)')dW(t) - H(t)c(t)dt \\ X(0) &= x, \end{aligned}$$

tada je $X(t)$ proces bogatstva koji odgovara paru (π, c) i $X(0) = x$.

Interpretacija teoreme o kompletnosti tržišta: Najpre ćemo razdvojiti

$$E\left(H(t)X(t) + \int_0^t H(s)c(s)ds\right)$$

na

$$E\big(H(t)X(t)\big) \quad (\star)$$

i na

$$E\left(\int_0^t H(s)c(s)ds\right) \quad (\star\star).$$

Ako $H(t)$ posmatramo kao odgovarajući diskontni faktor, vidimo da $(\star)$ pretstavlja očekivani, diskontovani kapital u trenutku t, dok $(\star\star)$ pretstavlja očekivanu, diskontovanu konzumaciju. Za $t = T$, X_T pretstavlja krajnje bogatstvo. Dakle,

$$E\big(H(T)X(T)\big) + E\left(\int_0^T H(s)c(s)ds\right)$$

označava potreban početni kapital, koji investitor treba da poseduje da bi došao do svojih ciljeva, koji se odnose na krajnje bogatstvo i konzumaciju. Ono što nam ova teorema zapravo kaže je da ako unapred odredimo konzumaciju i krajnje bogatstvo koji zadovoljavaju uslove

$$E\left(H(t)X(t) + \int_0^t H(s)c(s)ds\right) \leq x$$

i

$$x = E\left(H(T)B + \int_0^t H(s)c(s)ds\right),$$

možemo naći portfolio proces $(\pi, c) \in \mathcal{A}(x)$.

2.4 Optimizacija portfolija

Za početni kapital $x > 0$ *portfolio problem* se sastoji u određivanju optimalne konzumacije i optimalne strategije trgovanja. Odnosno, investitor mora da odluči koje i koliko akcija želi da ima u određenom trenutku i koliko sme da konzumira da bi maksimizirao korisnost procesa konzumacije i krajnjeg bogatstva. Postoje dva glavna načina da se reši ovaj problem:

- **Pristup uz pomoć stohastičke kontrole**. Ovaj metod je razvio Merton 1969. godine i poznat je jos pod imenom *Mertonov problem*.

- **Martingalska metoda**. Ovaj metod je prvi put prezentovan osamdesetih godina proslog veka.

U ovom radu bavimo se samo drugom metodom. Ona se zasniva na teoriji o martingalima i stohastičkoj integraciji. Takođe, snažno se oslanja i na teoremu o kompletnosti tržista i upravo zbog toga ima svoje prednosti. Naime, možemo raditi sa parametrima tržišta koji nisu konstantni i sa uopštenim funkcijama korisnosti.

Definicija:

1. *Neka je* $U : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *strogo konkavna i diferencijabilna funkcija koja zadovoljava*

$$U'(0) = \lim_{x \to 0} U(x) = +\infty, \qquad U'(\infty)(x) = \lim_{x \to \infty} = 0.$$

   Tada se U naziva funkcija korisnosti.

2. *Neprekidna funkcija* $U : [0, T] \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *tako da je za svako* $t \in [0, T]$ *funkcija* $U(t, \cdot)$ *funkcija korisnosti, u smislu definicije pod (1), je takodje funkcija korisnosti.*

Primeri funkcija korisnosti:

1) $U(x) = \ln(x)$

2) $U(x) = \sqrt{x}$

3) $U(x) = x^{\alpha}$, za $0 < \alpha < 1$

4) $U(t, x) = e^{-\rho t} \cdot U_1(x), \rho > 0$, gde je $U_1(x)$ funkcija korisnosti kao kao u 1) ili 2).

Investitor želi da maksimizira korisnost krajnjeg bogatstva i procesa konzumacije, to jest:

$$\int_0^T U_1(c(s))ds + U_2(X_T) \to \max$$

gde su U_1 i U_2 funkcije korisnosti.

Pošto radimo sa slučajnim promenljivama, moramo preformulisati problem:

$$E\left[\int_0^T U_1(c(s))ds + U_2(X_T) \right] \to \max$$

Znamo da $X(t)$ ima proces konzumacije $c(t)$ i portfolio proces $\pi(t)$. Kako i dalje važe pretpostavke teoreme o kompletnosti tržišta sledi da $(\pi, c) \in \mathcal{A}(x)$, gde je x početno bogatstvo. Zbog ovoga ćemo preformulisati naš problem:

$$\begin{aligned} &\max \quad J(x; \pi, c) = E\left[\int_0^T U_1(c(s))ds + U_2(X_T) \right] \\ &\text{tako da} \quad (\pi, c) \in \mathcal{A}(x). \end{aligned}$$

Primetimo da za proizvoljno $(\pi, c) \in \mathcal{A}(x)$ očekivanje u $J(x; \pi, c)$ ne mora da bude konačno. Zato ćemo se ograničiti samo na one samofinansirajuće parove $(\pi, c) \in \mathcal{A}(x)$ gde imamo konačno očekivanje.

Definicija: *Problem zadat sa*

$$
\begin{aligned}
&J(x; \pi, c) \to \max, \quad (\pi, c) \in \mathcal{A}'(x), \\
&\mathcal{A}'(x) = \{(\pi, c) \in \mathcal{A}(x) | E\left[\int_0^T U_1(c(s))ds + U_2(X_T)\right] < \infty\}
\end{aligned}
$$

*se zove **neprekidni portfolio problem**.*

2.5 Martingalska metoda

Martingalska metoda se bazira na razlaganju problema iz prethodne definicije (*dynamical problem*) na dva problema. Prvi je *static optimization problem*, drugi je *representation problem*. Prvi deo se odnosi na izračunavanje optimalne kozumacije i optimalnog krajnjeg bogatstva. Drugi deo (representation problem) se odnosi na pronalaženje optimalne strategije koja vodi do (već izračunatog) optimalnog bogatstva i optimalne konzumacije.

Za početak ograničićemo se samo na optimizaciju krajnjeg bogatstva. Kasnije ćemo se vratiti na prethodno definisani uopšteni problem.

Kao što smo već istakli, glavna ideja martingalske metode je razlaganje dinamičkog problema

$$
\begin{aligned}
&\max \quad E\big(U_2(X^{x,\pi}(T))\big) \\
&(\pi, 0) \in \mathcal{A}'(x)
\end{aligned}
\qquad \textbf{(P)}
$$

na **statički problem:**

$$\max \quad E\big(U_2(B)\big), \quad B \in \mathcal{B}$$

(O)

$$\mathcal{B} = \{B|B \geq 0, B \quad je \quad \mathcal{F}_T - merljivo, E(H(T)B) \leq x, E(U_2(B)) < \infty\}$$

i na **problem reprezentacije** (*eng. representation problem*)

Naći portfolio proces $\pi^* \in \mathcal{A}'(x)$ tako da

$$X^{x,\pi^*}(T) = B^*$$

(R)

gde je B^* rešenje problema (O)

Na osnovu teoreme o kompletnosti tržista znamo da svaki proces bogatstva $X^{x,\pi}(t)$, koji odgovara portfolio procesu $(\pi, 0) \in \mathcal{A}(x)$, zadovoljava

$$E\big(H(T)X^{x,\pi}(T) \leq x.$$

Posmatramo dakle problem $O2$

$$\max \qquad J_2(B) = E\big(U_2(B)\big)$$

$$\text{tako da} \quad E\big(H(T)B\big) - x \leq 0.$$

Privremeno ćemo zanemariti ograničenja $B \geq 0$ i da je B $\mathcal{F}_T$-merljivo. Primetimo sledeće:

- J_2 je strogo konkavna, zato što je i U_2 strogo konkavna,
- $J_2 \in C^1$ jer i $U_2 \in C^1$,
- $g(B) = E\big(H(T)B\big) - x \in C^1$ i g je konveksna,
- Rešenje problema $O2$ sa pozitivnim Lagranžovim množiteljem je isto kao i za problem $\tilde{O}2$: (na osnovu teoreme iz dodatka)

$$\max \quad J_2(B)$$

$$\text{tako da} \quad E\big(H(T)B\big) - x = 0$$

Kun-Takerovi uslovi za $O2$ su:

1. $g(B) \leq 0$

2. $J_2'(B) - \lambda g'(B) = 0$

3. $\lambda \geq 0, \lambda g(B) = 0$

Formiramo Lagranžovu funkciju:

$$\mathcal{L} = J_2(B) - \lambda g(B)$$

i izjednačimo njen prvi izvod sa 0.

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B} = J_2'(B) - \lambda g'(B) = 0$

$E\big(U_2'(B) - \lambda H(T)\big) = 0$

$U_2'(B) - \lambda H(T) = 0$ (na osnovu osobina inverzne funkcije)

$U_2'(B) = \lambda H(T) > 0$

Kako je $H(T) > 0$ to je i $\lambda > 0$

$$\Rightarrow \exists! I_2 = (U_2')^{-1}$$
$$\Rightarrow B = I_2(\lambda H(T)) > 0$$

Kako smo dobili da je $\lambda > 0$, mora da važi $g(B) = 0$ zbog Kun-Takerovih uslova (3)

$$g(B) = 0$$
$$E\big(H(T) I_2(\lambda H(s))\big) = x$$

Označimo sa $A_2 = E\big(H(T) I_2(\lambda H(s))\big)$. Dakle imamo:

$$A_2(\lambda) = x$$

Pretpostavimo sada da postoji jedinstveno A_2^{-1}, tako da možemo dobiti optimalno resenje B^*:

$$\lambda = A_2^{-1}(A_2(\lambda)) = A_2^{-1}(x) > 0$$

$$\Rightarrow B^* = I_2(A_2^{-1}(x) H(T)) > 0$$

Posmatrajmo sada problem $O1$ koji podrazumeva optimizaciju konzumacije $(O1)$:

$$\max \qquad J_1(c) = E\bigg(\int_0^T U_1(c)ds \bigg)$$

$$\text{tako da} \quad E\bigg(\int_0^T H(s)c(s)ds \bigg) - x \leq 0$$

Pretpostavimo da ovaj problem $(O1)$ ima slično rešenje c^* kao i $(O2)$:

1. $c(s) = I_1(\lambda H(s))$ tako da je $\lambda > 0$
2. $A_1(\lambda) = E\bigg(\int_0^T H(s) I_1(\lambda H(s))ds = x$
3. $\exists! A_1^{-1}$ tako da $\lambda = A_1^{-1}(x) \Rightarrow \quad c^*(t) = I_1(A_1^{-1}(x)H(t)) > 0$

Sada ćemo pokazati da c^* zaista jeste optimalno resenje.

$$\begin{aligned} J_1(c^*) &= E\bigg(\int_0^T U_1(c^*)ds \bigg) \\ &= E\bigg(\int_0^T U_1(I_1(A_1^{-1}(x)H(s)))ds \bigg) \\ &\geq E\bigg(\int_0^T U_1(c(s)) + A_1^{-1}(x)H(s)(c^*(s) - c(s))ds \bigg) \text{(osobina funkcije korisnosti)} \\ &= J_1(c) + A_1^{-1}(x)\bigg[E\bigg(\int_0^T c^*(s)H(s)ds \bigg) - E\bigg(\int_0^T c(s)H(s)ds \bigg) \\ &\geq J_1(c) \end{aligned}$$

Poslednja nejednakost važi zbog $A_1^{-1}(x) \geq 0$, $E\bigg(\int_0^T c^*(s)H(s)ds \bigg) = x$ i $E\bigg(\int_0^T c(s)H(s)ds \bigg) \leq x$

Napomena: Ako je $\lambda > 0$, onda c^* rešava problem $\tilde{O}1$:

$$\max \quad J_1(c) = E\left(\int_0^T U_1(c)ds \right)$$

$$\text{tako da} \quad E\left(\int_0^T H(s)c(s)ds \right) - x = 0$$

Prethodna dva navedena specijalna slučaja nisu realistična. Nijedan investitor ne želi u potpunosti da se odrekne krajnje isplate ili konzumacije. "Istina"je negde izmedju. Posmatrajmo sada problem $\tilde{O}$

$$\max \quad J(B,c) = E\left(\int_0^T U_1(c(s))ds + U_2(B) \right)$$

$$\text{tako da} \qquad E\left(\int_0^T H(s)c(s)ds + H(T)B \right) = x$$

Uvedimo oznaku

$$A(\lambda) = E\left(\int_0^T H(s)I_1(\lambda H(s))ds + H(T)I_2(\lambda H(T)) \right) = x$$

Sada je $A^{-1}(x) = \lambda$
$\Rightarrow c^*(t) = I_1(A^{-1}(x)H(t))$
$\Rightarrow B^* = I_2(A^{-1}(x)H(T))$

Ostaje da pokažemo da je (B^*, c^*) optimalno rešenje za **(P)** i da postoji jedinstvena inverzna funkcija A^{-1}. Pre toga, proširićemo definiciju funkcija korisnosti i navesti neke njihove osobine.

Definicija ***(Proširene funkcije korisnosti)***

a) *Neka je $u : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ strogo konkavna, $u \in C^1$ i:*

- **i)** $u'(0) = \lim_{x \to 0} u'(x) > 0$ *i*
- **ii)** $u'(\bar{x}) = 0$ *za jedinstveno $\bar{x} \in (0, \infty]$ tada je u funkcija korisnosti.*

b) *Dalje, $U : [0, T] \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ je funkcija korisnosti ako zadovoljava:*

- **i)** $U_t = U(t, \cdot)$ *je funkcija korisnosti za svako $t \in I$,*
- **ii)** $U(\cdot, x) \in C^0$ *za svako $x \in (0, \infty)$,*
- **iii)** $U_t'(\bar{x}) = \frac{\partial U}{\partial x}(t, \bar{x}) = 0$ *za jedinstveno $\bar{x} \in (0, \infty]$,*

iv) $\lim_{x\to 0} U_t'(x) > 0$.

Primeri. Neka su $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+$. Primeri funkcija korisnosti su:

i) $u(x) = \alpha - \beta \exp(-\gamma x)$

ii) $U(t, x) = -\beta(x - \gamma)^2 \cdot \exp(-\alpha x)$

Lema. (Osobine funkcija korisnosti.) Neka su u, U funkcije korisnosti. Tada:

1. *u, U su strogo rastuće na $(0, \bar{x}]$*

2. *u', U' su strogo opadajuće na $[\bar{x}, \infty)$*

3. *$u' \in C^0$ je strogo opadajuća za $x \in [0, \bar{x}]$*

4. *U' je strogo opadajuca za fiksirano t i za $x \in [0, \bar{x}]$*

Lema: (Osobine od I_1 i I_2) Neka su I_1 i I_2 inverzne funkcije funkcija U_1' i U_2' respektivno. Tada:

1. I_1 i I_2 su strogo opadajuće na $[0, U_1'(0)]$, odnosno na $[0, U_2'(0)]$,

2. $I_1 \in C^0[0, U_1'(0)]$

3. $I_1 : [0, U_1'(0)] \to [0, x_1]$, $\lim_{y\to 0} I_1(y) = x_1$ i $\lim_{y\to U_1'(0)} I_1(y) = 0$

4. $I_2 \in C^0[0, U_2'(0)]$

5. $I_2 : [0, U_2'(0)] \to [0, x_2]$, $\lim_{y\to 0} I_2(y) = x_2$ i $\lim_{y\to U_2'(0)} I_2(y) = 0$

Sada ćemo proširiti inverzne funkcije I_1 i I_2:

$$I_1(y) = \begin{cases} I_1(y), & y \in [0, U_1'(0)] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$$I_2(y) = \begin{cases} I_2(y), & y \in [0, U_2'(0)] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Ove proširene funkcije su neprekidne i opadajuće na $[0, \infty)$
Vratimo se sada na

$$A(\lambda) = E\bigg(\int_0^T H(s)I_1(\lambda H(s))ds + H(T)I_2(\lambda H(T))\bigg)$$

Lema (Osobine od $A(\lambda)$) Pretpostavimo da važi:

- $A(\lambda) < \infty$ za svako $\lambda \in (0, \infty)$
- $U_1'(0) < \infty \; \forall t \in [0, T]$ i $U_2'(0) < \infty$
- $\int_0^T ||\theta(s)||^2 ds > 0$

Tada važi:

1. $A(\lambda) \in C^0(0, \infty)$
2. $A(\lambda)$ je strogo opadajuće na $(0, \infty)$
3. $A(\infty) = \lim_{\lambda \to \infty} A(\lambda) = 0$
4. $$A(0) = \begin{cases} \infty, & \text{ako važi uslov } \star \\ x_1 E\Big(\int_0^T H(s)ds \Big) + x_2 E(H(T)), & \text{inače} \end{cases}$$

$(\star) \lim_{x \to \infty} U_1'(x) = 0 \quad \forall t \in [0, T] \vee \lim_{x \to \infty} U_2'(x) = 0$

Definišimo sada

$$\dot{x} = \begin{cases} x_1 E\Big(\int_0^T H(s)ds \Big) + x_2 E(H(T)), & x_1, x_2 < \infty \\ \infty, & \text{inače} \end{cases}$$

Teorema: *Neka* $A(\lambda) : [0, \infty] \to [0, \dot{x}]$. *Tada postoji jedinstveno* $A^{-1} : [0, \dot{x}] \to [0, \infty]$ *i važi:*

i) $A^{-1} \in C^0$

ii) A^{-1} *je opadajuće.*

Sada možemo formulisati i dokazati jednu od najvažnijih teorema ovog rada:

Teorema(*Optimalni portfolio*) *Neka su ispunjene sledeće pretpostavke:*

1) $A(\lambda) < \infty, \quad \forall \lambda \in (0, \infty)$

2) $U_1'(0) < \infty, \quad \forall t \in [0, T]$ i $U_2'(0) < \infty$

3) $\int_0^T ||\theta(s)||^2 ds > 0$

Neka je $U_1'(x_1) = 0$ *i* $U_2'(x_2) = 0$ *za* $x_1, x_2 \in (0, \infty]$. *Rešenja portfolio problema (P) su data sa*

1. *Optimalno krajnje bogatstvo je dato sa*

$$B^* = \begin{cases} x_2, & x \geq \dot{x} \\ I_2(A^{-1}(x)H(T)), & \text{inače} \end{cases}$$

2. *Optimalni proces konzumacije* $c^*(t)$ *dat je sa*

$$c^*(t) = \begin{cases} x_1, & x \geq \dot{x} \\ I_1(A^{-1}(x)H(t)), & \text{inače} \end{cases}$$

3. Postoji $x^* \in [0, x]$ i odgovarajući portfolio proces $\pi^*(t)$, $t \in [0, T]$ tako da

   i) $(\pi^*(t), c^*(t)) \in \mathcal{A}'(x^*)$

   ii) $X^{x^*, \pi^*(t), c^*(t)}(T) = B^*$

   iii) $J(x^*, \pi^*(t), c^*(t)) = \max J(z, \pi(t), c(t))$ za $z \leq x$ i $(\pi(t), c(t)) \in \mathcal{A}'(z)$

   iv) ako nije ispunjeno **2)** tada je $x^* = x$

Dokaz: Razložićemo dokaz na dva slučaja:

1. Slučaj kada je $x \geq \dot{x}$

   Znamo da je

   $\max U_1(\cdot) = x_1$, gde je $x_1 = I_1(0)$ i

$\max U_2(\cdot) = x_2$, gde je $x_2 = I_2(0)$

$$\Rightarrow E\bigg[\int_0^T U_1(x_1)ds + U_2(x_2)\bigg]$$
$$= E\bigg[\int_0^T U_1(I_1(0))ds + U_2(I_2(0))\bigg]$$
$$\geq E\bigg[\int_0^T U_1(c(s))ds + U_2(X^{y,\pi,c}(T))\bigg] \text{ za svako}(\pi, c) \in \mathcal{A}'(z), \text{ gde je } y \leq x.$$

Primetimo da je egzistencija od $\pi^*(t)$, gde $(\pi^*(t), c^*(t)) \in \mathcal{A}'(x^*)$ garantovana iz kompletnosti tržista.

Kako su B^* i $c^*(t)$ determinističke vrednosti, imamo

$$\begin{aligned} &E\bigg[\int_0^T U_1(c(s))ds + U_2(X^{\dot{x},\pi^*,c^*}(T))\bigg] \\ =&E\bigg[\int_0^T U_1(x_1)ds + U_2(x_2)\bigg] \\ <&\infty \end{aligned}$$

posledično, (B^*, c^*) je optimalno rešenje problema **(P)** u ovom slučaju.

2. Slučaja kada je $x < \dot{x}$

   a) $E\bigg[\int_0^T H(s)c^*(s)ds + H(T)B^*\bigg] = x$ zbog definicije uređenog para $(c^*(t), B^*)$,

   b) Kako je $A^{-1}(x)H(t) > 0$ za svako $t \in I$ i $I_1, I_2 > 0$ sledi da su $c^*(t), B^*(t) > 0$,

   c) Egzistencija portfolio procesa $\pi^*(t)$, gde $(\pi^*(t), c^*(t)) \in \mathcal{A}(x)$, sledi iz egzistencije rešenja $(c^*(t), B^*)$ i teoreme o kompletnosti tržista,

   d) Da bismo pokazali da $(\pi^*(t), c^*(t)) \in \mathcal{A}'(x^*)$ koristićemo osobinu funkcije korisnosti: $U_t(I_t(y)) \geq U_t(x) + y(I_t(y) - x)$

   Iz ove osobine sledi:

   $U_1(c^*(t)) \geq U_1(1) + A^{-1}(x)H(t)(c^*(t) - 1)$ i

$U_2(B^*) \geq U_2(1) + A^{-1}(x)H(T)(B^* - 1)$

Iz ovih osobina i dokaza pod b) dobijamo:

$$
\begin{aligned}
&E\bigg[\int_0^T U_1(C^*(s))ds + U_2(B^*)\bigg] \\
\leq &E\bigg[\int_0^T \big(|U_1(1)| + A^{-1}(x)H(s)(c^*(s)-1)\big)\bigg] + E[|U_2(1)| + A^{-1}(x)H(T)(B^*-1)] \\
= &\int_0^T |U_1(1)|ds + |U_2(1)| + A^{-1}(x)\bigg(E\bigg[\int_0^T H(s)c^*(s)ds + H(T)B^*\bigg] + E\bigg[\int_0^T H(s)ds\bigg] + E[H(T)]\bigg) \\
< &\infty
\end{aligned}
$$

jer je svaki od sabiraka manji od beskonačno.

e) Dokazujemo da je $(B^*, c^*(t))$ optimalno rešenje problema (P)

$$
\begin{aligned}
J(x, \pi^*, c^*(t)) &= E\bigg[\int_0^T U_1(c(s))ds + U_2(B^*)\bigg] \\
&\geq E\bigg[\int_0^T U_1(c(s)) + A^{-1}(x)H(s)(c^*(s) - c(s))ds \\
&+ U_2(X^{y,\pi,c(t)}(T)) + A^{-1}(x)H(T)(B^* - X^{y,\pi,c(t)}(T))\bigg] \\
&= E\bigg[\int_0^T U_1(c(s)) + U_2(X^{y,\pi,c(t)}(T))\bigg] \\
&+ A^{-1}(x)E\bigg[\int_0^T H(s)c^*(s)ds + H(T)B^*\bigg] \\
&- A^{-1}E\bigg[\int_0^T H(s)c(s)ds + H(T)X^{y,\pi,c(t)}(T)\bigg] \\
&\geq J(x, \pi, c(t)) + A^{-1}(x)(x - y) \\
&\geq J(x, \pi, c(t))
\end{aligned}
$$

U dokazu je korišćen identitet $E\bigg[\int_0^T H(s)c^*(s)ds + H(T)B^*\bigg] = x$.

Izraz $E\bigg[\int_0^T H(s)c(s)ds + H(T)X^{y,\pi,c(t)}(T)\bigg]$ je označen sa y i važi da je $y \leq x$. Poslednja nejednakost sledi iz činjenice da su $A^{-1}(x) \geq 0$ i $(x - y) \geq 0$.

Teorema (*Rešenje od (R)*). *Pretpostavke teoreme:*

- *Pretpostavimo da je tržište kompletno,*
- $$X(t) = \frac{1}{H(t)} E\bigg[\int_t^T H(s)c^*(s)ds + H(T)B^* | \mathcal{F}_t \bigg] = f(t, W_1(t), ..., W_d(t))$$

  gde je $f \geq 0$, $f \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^d)$ *i* $f(0, ..., 0) = x$,
- B^* *je optimalno krajnje bogatstvo za problem (P),*
- $c^*(t)$ *je optimalan proces konzumacije problema (P),*
- x^* *je početni kapital dobijen iz prethodne teoreme za problem (P).*

Tada je optimalna strategija trgovanja $\varphi^*(t) = (\varphi_0^*(t), ..., \varphi_d^*(t))'$, $t \in [0,T]$ *data sa*

$$\begin{aligned}
\varphi_i^* &= \frac{1}{P_i(t)} \Big(\sigma^{-1}(t) \cdot \nabla_W f(t, W_1(t), ..., W_d(t)) \Big)_i, \quad i = 1, ..., d \\
\varphi_0^* &= \frac{X(t) - \sum_{i=1}^n \varphi_i^*(t) P_i(t)}{P(0)(t)},
\end{aligned}$$

gde je

$$\nabla_W f(t, W_1(t), ..., W_d(t)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial W_1}(t, W_1(t), ..., W_d(t)) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial W_d}(t, W_1(t), ..., W_d(t)) \end{pmatrix}.$$

Optimalan portfolio proces $\pi^*(t) = (\pi_1^*(t), ..., \pi_d^*(t))$ *dat je sa*

$$\pi^*(t) = \frac{1}{X(t)} \sigma^{-1}(t) \cdot \nabla_W f(t, W_1(t), ..., W_d(t)).$$

Dokaz: Iz dokaza teoreme o kompletnosti tržista znamo da važi:

$$\frac{1}{H(t)} E\bigg[\int_t^T H(s)c^*(s)ds + H(T)B^* | \mathcal{F}_t \bigg] = X(t)$$

gde je $(B^*, c^*(t))$ dobijeno iz prethodne teoreme. $X(t)$ takođe zadovoljava jednačinu

$$X(t) = x^* + \int_0^t \left[\varphi_0(s)P_0(s)r(s) + \sum_{i=1}^n \varphi_i(s)P_i(s)b_i(s)\right] ds +$$
$$\sum_{i=1}^n \int_0^t \sum_{j=1}^n \varphi_i(s)P_i(s)\sigma_{ij}(s)dW_j(s) - \int_0^t c^*(s)ds \qquad (*)$$

Sa druge strane, možemo primeniti višedimenzionalnu Itovu formulu na

$$\begin{aligned} f(t, W_1(t), ..., W_n(t)) &= \frac{1}{H(t)} E\left[\int_0^T H(s)c^*(s)ds + H(T)B^* | \mathcal{F}_t\right] \\ &= f(0, ..., 0) + \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial t}(s, W_1(s), ..., W_n(s)) + \right. \\ &\left. \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(s, W_1(s), ..., W_n(s))\right) ds \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(s, W_1(s), ..., W_n(s)) dW_i(s) \qquad (**) \end{aligned}$$

Kako je sa $(*)$ i $(**)$ predstavljeno isto uslovno očekivanje i kako je $f(0, ..., 0) = x^*$ i $\vartheta(t) = (\varphi_1(t)P_1(t), ..., \varphi_n(t)P_n(t))'$, poređenjem podintegralnih procesa dobijamo da je

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \varphi_i(t)P_i(t)\sigma_{ij}(t) &= \vartheta(t)^t \sigma(t) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, W_1(t), ..., W_n(t)) \\ &= \nabla_W f(t, W_1(t), ..., W_n(t)) \end{aligned}$$

Kako je $\sigma(t)$ invertibilna matrica, imamo:

$$\begin{aligned} &\vartheta(t) = (\sigma(t))^t \cdot \nabla_W f(t, W_1(t), ..., W_n(t))^t \\ \Rightarrow\ &\vartheta_i(t) = \varphi_i(t)P_i(t) = \left((\sigma(t))^t \cdot \nabla_W f(t, W_1(t), ..., W_n(t))^t\right)_i \\ \Rightarrow\ &\varphi_i^*(t) = \frac{1}{P_i(t)}\left((\sigma(t))^t \cdot \nabla_W f(t, W_1(t), ..., W_n(t))^t\right)_i \end{aligned}$$

Dalje, znamo da uvek važi:

$$\varphi_0^*(t) = \frac{X(t) - \sum_{i=1}^n \varphi_i^*(t) P_i(t)}{P_0(t)}.$$

Sada lako dobijamo $\pi_i^*(t), \quad i = 1, .., n$

$$\pi_i^*(t) = \frac{\varphi_i^*(t) P_i(t)}{X(t)} = \frac{\Big((\sigma(t))^t \cdot \nabla_W f(t, W_1(t), ..., W_n(t))^t \Big)_i}{X(t)}$$
$$\Rightarrow \pi_i^*(t) = \frac{1}{X(t)} (\sigma(t))^t \cdot \nabla_W f(t, W_1(t), ..., W_n(t))^t$$

Primer: Uzećemo logaritamske funkcije za funkcije korisnosti za neko $\alpha > 0$:

$$U_1(x) = \exp(-\alpha t) \ln(x)$$
$$U_2(x) = \ln(x)$$

i sada hoćemo da nađemo opšte rešenje za portfolio problem

$$(P) \begin{cases} \max J(x, \pi, c) = E\big[\int_0^T \exp(-\alpha s) \ln(c(s)) ds + \ln(X^{x,\pi,c}(T)) \big] \\ \text{tako da} \quad (\pi, c) \in \mathcal{A}'(x) \end{cases}$$

Korak 1

$U_1(x,t) = \exp(-\alpha t)\ln(x) \quad \Rightarrow \quad U_1'(x) = \frac{\exp(-\alpha t)}{x} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \infty$
$U_2(x) = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad U_2'(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \infty \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \infty$

Korak 2

Kako je $x, y > 0$ imamo:

$$y = \frac{\exp(-\alpha t)}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\exp(-\alpha t)}{y} = I_1(y), i \quad y = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y} = I_2(y)$$

Korak 3

$$\begin{aligned}
A(\lambda) &= E\bigg(\int_0^T H(s)I_1(\lambda H(s))ds + H(T)I_2(\lambda H(T))\bigg) \\
&= E\bigg(\int_0^T H(s)\frac{\exp(-\alpha s)}{\lambda H(s)}ds + H(T)\frac{1}{\lambda H(T)}\bigg) \\
&= \frac{1}{\lambda}E\bigg(\int_0^T \exp(-\alpha s)ds + 1\bigg) \\
&= \frac{1}{\lambda}\bigg(\int_0^T \exp(-\alpha s)ds + 1\bigg) \\
&= \frac{1}{\lambda}(-\frac{1}{\alpha}\exp(-\alpha T) + \frac{1}{\alpha} + 1) \\
&= \frac{1}{\lambda\alpha}(-\exp(-\alpha T) + 1 + \alpha) \quad (= x)
\end{aligned}$$

$$A^{-1}(x) = \frac{1}{x\alpha}(-\exp(-\alpha T) + 1 + \alpha) \quad (= \lambda)$$

Korak 4

$$\begin{aligned}
B^* = I_2(A^{-1}(x)H(T)) &= \frac{x\cdot\alpha}{\alpha + 1 - \exp(-\alpha T)} \cdot \frac{1}{H(T)} \\
c(t)^* = I_1(A^{-1}(x)H(t)) &= \frac{x\cdot\alpha\cdot\exp(-\alpha t)}{\alpha + 1 - \exp(-\alpha T)} \cdot \frac{1}{H(t)}
\end{aligned}$$

Korak 5

$$\begin{aligned}
X(t) &= \frac{1}{H(t)} E\bigg[\int_t^T H(s)c^*(s)ds + H(T)B^*|\mathcal{F}_t\bigg] \\
&= \frac{1}{H(t)} E\bigg[\int_t^T \frac{x \cdot \alpha \cdot \exp(-\alpha s)}{\alpha + 1 - \exp(-\alpha T)} \cdot \frac{H(s)}{H(s)} + \frac{x \cdot \alpha}{\alpha + 1 - \exp(-\alpha T)} \cdot \frac{H(T)}{H(T)}|\mathcal{F}_t\bigg) \\
&= \frac{1}{H(t)} \cdot \frac{x \cdot \alpha}{\alpha + 1 - \exp(-\alpha T)} \cdot E\bigg(\int_t^T \exp(-\alpha s)ds + 1|\mathcal{F}_t\bigg) \\
&= \frac{1}{H(t)} \cdot \frac{x \cdot \alpha}{\alpha + 1 - \exp(-\alpha T)} \cdot E\bigg(-\frac{1}{\alpha}\exp(-\alpha T) + \frac{1}{\alpha}\exp(-\alpha t) + 1|\mathcal{F}_t\bigg) \\
&= \frac{1}{H(t)} \cdot \frac{x \cdot \alpha}{\alpha + 1 - \exp(-\alpha T)} \cdot \frac{1}{\alpha}\big(\alpha + \exp(-\alpha t) - \exp(-\alpha T)\big) \cdot E[1|\mathcal{F}_t] \\
&= x \cdot \frac{\alpha + \exp(-\alpha t) - \exp(-\alpha T)}{\alpha + 1 - \exp(-\alpha T)} \cdot \frac{1}{H(t)}
\end{aligned}$$

Primećujemo da je ispunjeno $X(0) = x$ i $X(T) = B^*$. Takođe, možemo izraziti $c^*(t)$ preko $X(t)$:

$$c^*(t) = \frac{\alpha \exp(\alpha t)}{\alpha + \exp(-\alpha t) - \exp(-\alpha T)} \cdot X(t)$$

Korak 6

$$\begin{aligned}
X(t) &= \frac{x}{\alpha + 1 - \exp(-\alpha T)} \cdot \big(H^{-1}(t)(\alpha + \exp(-\alpha t) - \exp(-\alpha T))\big) \\
&= \eta \cdot g(t, W_1(t), ..., W_d(t)) \\
&= f(t, W_1(t), ..., W_d(t))
\end{aligned}$$

gde je

$$\eta = \frac{x}{\alpha + 1 - \exp(-\alpha T)}$$

i

$$\begin{aligned}
g(t) &= (H^{-1}(t)(\alpha + \exp(-\alpha t) - \exp(-\alpha T)) \\
&= (\alpha + \exp(-\alpha t) - \exp(-\alpha T)) \exp\bigg(\int_0^t \big(r(s) + \frac{1}{2}||\theta(s)||^2\big)ds + \theta(s)dW_s\bigg)
\end{aligned}$$

Korak 7

$$\begin{aligned}\nabla_W f(t, W_1(t), ..., W_d(t)) &= \eta \cdot g(t, W_1(t), ..., W_d(t)) \\ &= \eta g(t, W_1(t), ..., W_d(t)) \cdot \theta^t \\ &= X(t) \cdot \theta(t)^t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \varphi_i^*(t) = \frac{X(t)}{P_i(t)} \cdot \big((\sigma(t)^{-1})^t \theta(t)\big)_i \\ &\Rightarrow \varphi_0^*(t) = \frac{X(t) - \sum_{i=1}^d \varphi_i^*(t) \cdot P_i(t)}{P_0(t)} = \frac{X(t)}{P_0(t)} \cdot \left(1 - \sum_{i=1}^d \big((\sigma(t)^{-1})^t \cdot \theta(t)\big)_i\right) \\ &\Rightarrow \pi^*(t) = \frac{1}{X(t)} \cdot (\sigma(t)^{-1})^t \cdot X(t)\theta(t) = (\sigma(t)^{-1})^t \cdot \theta(t)\end{aligned}$$

Korak 8

$$\begin{aligned}dX(t) &= \big(X(t)r(t) - c(t)\big)dt + X(t)(\pi^*(t))^t(b(t) - r(t)\underline{1}dt) + X(t)\pi^*(t)^t \sigma dW_t \\ &= \Bigg[X(t)r(t) - \frac{x \cdot \alpha}{\alpha + 1 - \exp(-\alpha T)} \cdot \frac{\alpha + \exp(-\alpha t) - \exp(-\alpha T)}{\alpha + \exp(-\alpha t) - \exp(-\alpha T)} H(T)^{-1} \\ &+ X(t)\theta(t)^t \sigma(t)^{-1}(b(t) - r(t)\underline{1})\Bigg] dt + X(t)\theta(t)^t dW_t \\ &= X(t)\left(\left(r(t) - \frac{\alpha \exp(-\alpha t)}{\alpha + \exp(-\alpha t) - \exp(-\alpha T)} + ||\theta(t)||^2\right) dt + \theta(t)^t dW_t\right)\end{aligned}$$

Glava 3

Implementacija stvarnih podataka

U ovom delu rada biće pretstavljeno kako martingalska metoda može biti uspešno primenjena u praksi. Pretpostavimo da investitor poseduje početni kapital od $100,000.00\$$ i da želi da u periodu od pola godine ($T = 0.5$), od 1.8.2014. do 30.1.2015. trguje na Njujorškoj berzi akcijama sledećih kompanija:

1. International Business Machines Corporation (IBM),
2. Microsoft Corporation (MSFT),
3. General Motors Company (GM),
4. Bank of America (BAC),
5. United States Steel Corporation (X),
6. The Coca-Cola Company (KO),
7. General Electric Company (GE),
8. Target Corporation (TGT),
9. Textron Inc. (TXT),
10. Altria Group Inc. (MO).

Pretpostavka modela je da investitor može kupiti, ili pozajmiti, neograničeni broj akcija. U trenutku kada investitor kreće sa trgovinom (1.8.2014.), na tržištu postoji obveznica (bezrizična aktiva) koju izdaje Vlada Sjedinjenih Američkih Država i koja na godišnjem nivou donosi prinos u iznosu od $r_G = 0,1\%$. Pretpostavimo i da investitor želi da vrši preraspodelu kapitala svakih mesec dana (1.8.2014., 2.9.2014., 1.10.2014., 3.11.2014.

1.12.2014. i 2.1.2015.). Zbog toga će nam trebati i bezrizična kamatna stopa r_M koja odgovara periodu od mesec dana. Vrednost kapitala u iznosu K, uloženog na period od godinu dana po kamtnoj stopi r_G, nekon godinu dana mora biti jednak vrednosti istog tog kapitala K uloženog 12 puta po mesečnoj kamatnoj stopi r_M.

$$
\begin{aligned}
K(1+r_G) &= K \cdot (1+r_M)^{12} \\
1+r_G &= (1+r_M)^{12} \\
(1+r_G)^{1/12} &= 1+r_M \\
r_M &= (1+r_G)^{1/12} - 1 \\
r_M &= 0.00832\%
\end{aligned}
$$

Pretpostavimo, kao u prethodnom poglavlju, da investitor koristi logaritamske funkcije korisnosti: $U_1(x,t) = \exp(-\alpha t)\ln(x)$ i $U_2(x) = \ln(x)$. Neka investitor, s obzirom na svoju averziju prema riziku, bira $\alpha = 30$, odnosno $U_1(x,t) = \exp(-30 \cdot t)\ln(x)$ i $U_2(x) = \ln(x)$. Iz prethodnih rezultata znamo i da je optimalan portfolio proces dat sa

$$\pi^*(t) = (\sigma(t)^{-1})^t \cdot \theta(t),$$

dok je optimalan proces konzumacije dat sa

$$c^*(t) = \frac{\alpha \exp(\alpha t)}{\alpha + \exp(-\alpha t) - \exp(-\alpha T)} \cdot X(t)$$

tačnije

$$c^*(t) = \frac{30\exp(-30t)}{30 + \exp(-30t) - \exp(-15)} \cdot X(t).$$

Sada ćemo uvesti oznaku

$$k(t) = \frac{30\exp(-30t)}{30 + \exp(-30t) - \exp(-15)},$$

tako da je

$$c^*(t) = k(t) \cdot X(t).$$

U sledećoj tabeli prikazane su vrednosti od $k(t)$ u vremenskim trenucima kada investitor vrši trgovinu:

Datum	t	k(t)
29.8.	1/12	0.08186101
30.9.	2/12	0.00673643
31.10.	3/12	0.00055307
28.11.	4/12	0.00004540
31.12.	5/12	0.00000373

Pretpostavimo dalje, da investitor svaki put kada vrši preraspodelu kapitala, posmatra istorijske podatke samo za prethodnih mesec dana. Tako da, ako izlazi na berzu 1. avgusta 2014. godine, posmatraće cene akcija u periodu od 1. jula 2014. do 31. jula 2014. Vrednosti pomenutih akcija izražene su u američkim dolarima i date su u sledećoj tabeli:

Datum	IBM	MSFT	GM	BAC	X	KO	GE	TGT	TXT	MO
7/1/2014	186.35	41.87	37.59	15.6	26	42.29	26.4	58.37	38.48	41.83
7/2/2014	188.39	41.9	37.74	15.85	26.94	42.29	26.61	58.77	38.17	41.87
7/3/2014	188.53	41.8	37.74	16.03	27.35	42.23	26.86	59.51	38.33	42.39
7/7/2014	188.04	41.99	37.44	15.94	27.09	42.14	26.75	59.99	37.71	42.62
7/8/2014	187.22	41.78	37.58	15.58	27.14	41.94	26.37	59.8	37.18	42.71
7/9/2014	188.42	41.67	37.97	15.6	27.1	41.95	26.32	60.05	37.34	42.8
7/10/2014	187.7	41.69	37.75	15.44	26.78	42.26	26.2	59.93	37.34	42.95
7/11/2014	188	42.09	37.95	15.38	27.64	41.97	26.55	60	37.89	43.43
7/14/2014	189.86	42.14	37.7	15.57	26.16	42.38	26.66	60.18	38.56	43.35
7/15/2014	188.49	42.45	37.58	15.81	25.97	42.1	26.61	60.71	38.37	41.76
7/16/2014	192.36	44.08	37.48	15.51	26.84	42.12	27.02	60.14	39	41.82
7/17/2014	192.49	44.53	37.1	15.2	26.6	42.02	26.61	59.72	38.32	41.58
7/18/2014	192.5	44.69	37.41	15.49	27.38	42.43	26.46	60.01	38.76	42.17
7/21/2014	190.85	44.84	37.43	15.52	27.11	42.4	25.98	59.3	38.81	42.01
7/22/2014	194.09	44.83	37.76	15.52	27.46	41.19	26.02	59.38	38.89	41.93
7/23/2014	193.63	44.87	37.41	15.52	27.78	40.81	25.91	60.73	38.2	41.72
7/24/2014	195.24	44.4	35.74	15.62	27.48	40.97	25.94	60.99	37.99	42.04
7/25/2014	194.4	44.5	35.07	15.59	27.72	41	25.79	60.39	37.63	41.74
7/28/2014	195.78	43.97	34.9	15.5	27.84	40.68	25.59	60.3	37.01	41.65
7/29/2014	194.57	43.89	34.45	15.34	27.67	40.35	25.45	61.1	36.7	41.54
7/30/2014	194	43.58	34.31	15.58	33.03	39.62	25.64	61.38	36.88	41.12

Na osnovu podataka iz prethodne tabele dobijamo dnevne stope prinosa akcija:

IBM	MSFT	GM	BAC	X	KO	GE	TGT	TXT	MO
0.028	0.0041	0.0355	0.015	-0.0015	-0.0017	0.0046	0.0072	0.005	-0.0026
0.0109	0.0007	0.004	0.016	0.0362	0	0.008	0.0069	-0.0081	0.001
0.0007	-0.0024	0	0.0114	0.0152	-0.0014	0.0094	0.0126	0.0042	0.0124
-0.0026	0.0045	-0.0079	-0.0056	-0.0095	-0.0021	-0.0041	0.0081	-0.0162	0.0054
-0.0044	-0.005	0.0037	-0.0226	0.0018	-0.0047	-0.0142	-0.0032	-0.0141	0.0021
0.0064	-0.0026	0.0104	0.0013	-0.0015	0.0002	-0.0019	0.0042	0.0043	0.0021
-0.0038	0.0005	-0.0058	-0.0103	-0.0118	0.0074	-0.0046	-0.002	0	0.0035
0.0016	0.0096	0.0053	-0.0039	0.0321	-0.0069	0.0134	0.0012	0.0147	0.0112
0.0099	0.0012	-0.0066	0.0124	-0.0535	0.0098	0.0041	0.003	0.0177	-0.0018
-0.0072	0.0074	-0.0032	0.0154	-0.0073	-0.0066	-0.0019	0.0088	-0.0049	-0.0367
0.0205	0.0384	-0.0027	-0.019	0.0335	0.0005	0.0154	-0.0094	0.0164	0.0014
0.0007	0.0102	-0.0101	-0.02	-0.0089	-0.0024	-0.0152	-0.007	-0.0174	-0.0057
0.0001	0.0036	0.0084	0.0191	0.0293	0.0098	-0.0056	0.0049	0.0115	0.0142
-0.0086	0.0034	0.0005	0.0019	-0.0099	-0.0007	-0.0181	-0.0118	0.0013	-0.0038
0.017	-0.0002	0.0088	0	0.0129	-0.0285	0.0015	0.0013	0.0021	-0.0019
-0.0024	0.0009	-0.0093	0	0.0117	-0.0092	-0.0042	0.0227	-0.0177	-0.005
0.0083	-0.0105	-0.0446	0.0064	-0.0108	0.0039	0.0012	0.0043	-0.0055	0.0077
-0.0043	0.0023	-0.0187	-0.0019	0.0087	0.0007	-0.0058	-0.0098	-0.0095	-0.0071
0.0071	-0.0119	-0.0048	-0.0058	0.0043	-0.0078	-0.0078	-0.0015	-0.0165	-0.0022
-0.0062	-0.0018	-0.0129	-0.0103	-0.0061	-0.0081	-0.0055	0.0133	-0.0084	-0.0026
-0.0029	-0.0071	-0.0041	0.0156	0.1937	-0.0181	0.0075	0.0046	0.0049	-0.0101

Iz ovih podataka dobijamo vektor

$$\tilde{b}(t) = (0.00259, 0.00161, -0.00311, -0.00027, 0.01239, -0.00338, -0.00195,$$
$$0.00132, -0.00227, -0.00142)'$$

čije komponente predstavljaju srednje vrednosti kolona iz prethodne tabele. Takođe, na osnovu prethodne tabele, uz pomoć ugrađene funkcije u excelu, dobijamo kovarijansnu matricu $\sigma(0)$.

8.5956	3.1222	-2.5654	-0.2231	1.8816	-1.7141	-0.8395	1.1608	-0.2649	-1.0908
3.1222	1.5308	-0.6102	-0.1067	0.3777	-0.4162	-0.2496	0.2774	0.2054	-0.437
-2.5654	-0.6102	1.7892	0.0932	-1.8076	1.081	0.5318	-0.456	0.6946	0.6222
-0.2231	-0.1067	0.0932	0.0389	-0.1024	0.0669	0.0457	-0.0177	0.0364	0.0313
1.8816	0.3777	-1.8076	-0.1024	3.4221	-1.4035	-0.5897	0.3692	-0.8472	-0.721
-1.7141	-0.4162	1.081	0.0669	-1.4035	0.8306	0.3785	-0.3223	0.4646	0.417
-0.8395	-0.2496	0.5318	0.0457	-0.5897	0.3785	0.2336	-0.1151	0.2385	0.1885
1.1608	0.2774	-0.456	-0.0177	0.3692	-0.3223	-0.1151	0.4999	-0.1932	-0.0577
-0.2649	0.2054	0.6946	0.0364	-0.8472	0.4646	0.2385	-0.1932	0.5523	0.1265
-1.0908	-0.437	0.6222	0.0313	-0.721	0.417	0.1885	-0.0577	0.1265	0.4496

Iz nje dobijamo njenu inverznu matricu $\sigma^{-1}(0)$ koja je jednaka matrici $(\sigma^{-1})'(0)$ jer je matrica σ simetrična matrica. Dakle, $\sigma^{-1}(0)$ je data sa

2.0832	-4.0029	1.971	-2.7618	0.9155	4.3302	-3.4188	0.1444	0.049	-2.48
-4.0029	11.8769	-2.9505	12.15	-1.6073	-8.8259	12.5072	-2.8796	-6.4549	6.87
1.971	-2.9505	6.0889	-1.4434	1.0216	3.1736	-4.6349	1.0107	-3.1786	-4.74
-2.7618	12.15	-1.4434	48.8411	-0.815	-6.1108	5.3259	-4.63	-9.0641	7.78
0.9155	-1.6073	1.0216	-0.815	1.5741	4.5835	-2.8951	0.7111	0.129	-1.15
4.3302	-8.8259	3.1736	-6.1108	4.5835	25.3757	-18.7636	4.8575	-0.5454	-9.57
-3.4188	12.5072	-4.6349	5.3259	-2.8951	-18.7636	37.9264	-7.2756	-10.4009	8.75
0.1444	-2.8796	1.0107	-4.63	0.7111	4.8575	-7.2756	5.7447	3.2513	-4.01
0.049	-6.4549	-3.1786	-9.0641	0.129	-0.5454	-10.4009	3.2513	15.0883	0.1
-2.4813	6.8796	-4.7485	7.7884	-1.156	-9.579	8.7544	-4.0166	0.12	11.72

Dalje dobijamo vektor $b(t)$ koji smo definisali kao $b_i = \tilde{b_i} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}^2$, (uzimamo da je $d = 10$).

$$b(t) = (50.03, 6.583, 7.977, 0.045, 11.194, 3.787, 0.85, 1.09, 0.97, 1.358)'$$

Znamo da je $\theta(t) = \sigma^{-1}(t)(b(t) - r(t)\underline{1})$

tj.

$$\theta(0) = \sigma^{-1}(0)(b(0) - r_M\underline{1})$$

$\theta(0) = (114.04, -185.9, 138.77, -98.49, 75.18, 306.79, -202.8, 20.25, -56.92, -146.48)'$

Konačno, pošto za logaritamske funkcije korisnosti važi da je optimalan portfolio proces dat sa

$$\pi^*(t) = (\sigma(t)^{-1})^t \cdot \theta(t)$$

Pa je

$$\pi^*(0) = (3981.45, -10334.13, 4647.74, -11319.05, 2913.26,$$

$$16644.16, -18385.95, 4686.83, 2798.28, -9595.22)'$$

Time smo dobili odnos u kom investitor treba da preraspodeli svoj početni kapital. Vektor $\pi^*(0)$ možemo skalirati, tj. podeliti zbirom njegovih komponenti. Kako je u ovom slučaju taj zbir negativan, to znači da investitor treba da se zaduži u određenom iznosu, a svoj početni kapital od 100,000.00 dolara da uloži u bezrizičnu aktivu. Pretpostavimo da investitor sada, a i svaki naredni put kada je vektor π negativan, želi da se zaduži u iznosu od 50,000.00 dolara. Nakon skaliranja vektora π apsolutnom vrednošću zbira njegovih komponenti, imamo da je

$$\pi^*(0) = (0.2852, -0.7401, 0.3329, -0.8107,$$

$$0.2086, 1.1921, -1.3168, 0.3357, 0.2004, -0.6872)'$$

Ovo zapravo znači da bi investitor u početnom trenutku $t = 0$, trebao da pozajmi akcije Microsofta, BAC-a, General Electrica i Altria grupe. Akcije Microsofta će pozajmiti u iznosu 0.7401*50,000.00, tj. u iznosu od 37.006 dolara, itd. Te akcije će istog momenta prodati i kupiti akcije IBM, GM, X, KO, TGT, TXT. Akcije IBM-a će kupiti u iznosu 0.2852*50,000.00 odnosno u iznosu od 14,257.51 dolara.

Pozitivne komponente vektora $\pi^*(0)$ znače da martingalska metoda tvrdi da će cene odgovarajućih akcija (IBM, General Motorsa, US Steel, Coca-Cola, Target i Textron) u budućnosti rasti. Suprotno njima, negativne komponente vektora znače da model tvrdi da će cene odgovarajućih akcija (Microsoft, Bank of America, General Electric i Altria Group) u budućnosti padati. Takođe, npr. kako je $\pi_1^*(0) < \pi_3^*(0)$, model je sigurniji u rast akcija General Motors-a, nego u rast IBM-a. Analogno, mnogo je sigurniji u pad cena akcija General Electric-a, nego u pad cena akcija Microsoft-a.

U sledećoj tabeli dat je procenat ulaganja u određenu akciju (1), iznos u dolarima investiran u svaku od njih (2) , cena pojedinačnih akcija na dan 30.5. 2014.(3) i broj kupljenih akcija(4):

Akcija	Udeo ulaganja (1)	(2)=(1)*100000	(3)	Broj kupljenih akcija (4)=(2)/(3)
IBM	0.2852	14257.51	191.67	74.39
MSFT	-0.7401	-37006.37	43.16	-857.42
GM	0.3329	16643.5	33.82	492.12
BAC	-0.8107	-40533.38	15.25	-2657.93
X	0.2086	10432.34	33.49	311.51
KO	1.1921	59602.5	39.29	1516.99
GE	-1.3168	-65839.82	25.15	-2617.89
TGT	0.3357	16783.47	59.59	281.65
TXT	0.2004	10020.61	36.37	275.52
MO	-0.6872	-34360.35	40.6	-846.31

Kako je investitor odlučio da vrši preraspodelu svog kapitala na svakih mesec dana, sada mu preostaje da sačeka 29. avgust 2014. i da vidi da li se prognoza o kretanju cena akcija zaista obistinila.

U sledećoj tabeli date su cene akcija 29.8.2014. kao i profit koji je investitor ostvario po osnovu pojedinačnih akcija

Akcija	cena 29.8.	Profit po akciji
IBM	192.3	46.86
MSFT	45.43	-1946.35
GM	34.8	482.28
BAC	16.09	-2232.66
X	38.65	1607.37
KO	41.72	3686.28
GE	25.98	-2172.85
TGT	60.07	135.19
TXT	38	449.1
MO	43.08	-2098.86

Profit po akciji dobija se tako što se broj akcija koje investitor poseduje pomnoži sa razlikom u cenama između dva datuma (29.8. i 1.8.). Iz priložene tabele se vidi da investitor nije dobro predvideo kretanje cena akcija MSFT-a, BAC-a, GE-a i Altria grupe. Suma poslednje kolone je -2,043.63, što zapravo predstavlja gubitak investitora nakon prvih mesec dana trgovanja. Sada (29.8.2014.) on poseduje kapital od $X(1/12) = 97964.69$ dolara, u koji je uračunat i dobitak po osnovu bezrizične aktive.

Shodno pretpostavci modela, deo novca će konzumirati $k(1/12) \cdot 97964.69 = 8019.49$. Preostaje mu iznos od 89,945.21 koji će dalje da investira.

Napomena: Pretpostavka modela je da investitor u svakom trenutku može da kupi, odnosno pozajmi, neograničeni broj akcija. Ova pretpostavka nije realna. Kada bi došao u situaciju da je na tržištu ponuđeno manje akcija nego što model pokazuje da treba da kupi/pozajmi, svakako bi kupio/pozajmio akcije u odnosu u kom se nalaze komponente vektora $\pi^*(t)$, ali do iznosa u kojem su akcije dostupne. Preostali kapital bio bi investiran u bezrizičnu aktivu.

Dana 29.8.2014., investitor želi da preraspodeli svoj kapital u iznosu od 89,945.21 dolara. U potrazi za optimalnim odnosom u kojem bi ta preraspodela bila izvršena, posmatraće istorijske podatke o kretanju cena akcija u periodu od 1. do 29. avgusta 2014. Ovi podaci dati su sledećoj tabeli:

Datum	IBM	MSFT	GM	BAC	X	KO	GE	TGT	TXT	MO
8/1/2014	189.15	42.86	33.44	14.98	33.44	39.29	25.35	59.85	36.2	40.5
8/4/2014	189.64	43.37	33.61	15.05	34	39.4	25.27	60.7	36.24	40.73
8/5/2014	187.1	43.08	33.36	15	34.84	39.18	25.02	58.03	36.53	40.57
8/6/2014	185.97	42.74	33.4	15.2	34.78	39.92	25.44	57.97	36.16	41.43
8/7/2014	184.3	43.23	33.11	15.12	34.77	39.35	25.5	57.5	36.15	41.15
8/8/2014	186.63	43.2	33.53	15.2	35.4	39.45	25.66	58.54	37.31	41.63
8/11/2014	187.47	43.2	33.8	15.22	35.54	39.57	25.79	58.36	37.8	42.01
8/12/2014	187.34	43.52	33.7	15.21	35.68	39.68	25.61	58.46	37.57	41.96
8/13/2014	187.95	44.08	33.95	15.25	36.11	39.94	25.83	58.26	38.22	42.07
8/14/2014	187.88	44.27	33.95	15.32	36.84	40.18	25.88	58.74	37.74	42.26
8/15/2014	187.38	44.79	33.84	15.22	36.38	40.88	25.64	58.2	37.49	42.2
8/18/2014	189.36	45.11	34.4	15.45	37.88	41.35	26.07	58.55	37.97	42.5
8/19/2014	190.07	45.33	34.57	15.45	37.65	41.26	26.05	59.25	38.29	42.7
8/20/2014	190.1	44.95	34.53	15.52	37.42	41.25	26.36	60.33	38.94	42.46
8/21/2014	191.23	45.22	34.6	16.16	36.83	41.41	26.43	61.07	39.03	42.58
8/22/2014	190.41	45.15	34.24	16.13	37.81	41.12	26.15	61.05	38.85	42.59
8/25/2014	191.16	45.17	34.67	16.29	38.8	41.41	26.2	60.98	38.93	42.77
8/26/2014	192.99	45.01	34.85	16.33	39.49	41.6	26.01	60.7	38.76	42.86
8/27/2014	192.25	44.87	34.71	16.2	39.03	41.6	26.13	60.79	38.5	42.82
8/28/2014	192	44.88	34.68	16.01	37.55	41.63	26.01	60.35	38.01	42.91
8/29/2014	192.3	45.43	34.8	16.09	38.65	41.72	25.98	60.07	38	43.08

Primenjujući isti postupak kao i prethodnog meseca, dolazi se do vektora

$$\pi^*(1/12) = (0.3801, -0.0004, -2.2901, -0.2881, 0.121, 0.1647, 0.9628, -0.2118, 0.0308, 0.1309)'.$$

U odnosu u kom se nalaze komponente vektora $\pi^*(1/12)$, investitor će 29.8.2014. preraspodeliti kapital od 89,945.21 dolara. U sledećoj tabeli dat je udeo ulaganja u određenu akciju (1), iznos u dolarima investiran u svaku od njih (2) , cena pojedinačnih akcija na dan 29.8. 2014.(3) i broj kupljenih akcija(4):

Akcija	Udeo ulaganja (1)	(2)=(1)*89,945.21	(3)	Broj kupljenih akcija (4)=(2)/(3)
IBM	0.3801	19005.69	192.3	98.83
MSFT	-0.0004	-18.7	45.43	-0.41
GM	-2.2901	-114503.64	34.8	-3290.33
BAC	-0.2881	-14406.58	16.09	-895.38
X	0.121	6048.25	38.65	156.49
KO	0.1647	8235.04	41.72	197.39
GE	0.9628	48140.43	25.98	1852.98
TGT	-0.2118	-10589.27	60.07	-176.28
TXT	0.0308	1541.57	38	40.57
MO	0.1309	6547.21	43.08	151.98

Ponovo mu preostaje da sačeka mesec dana, odnosno 30.9.2014. i pogleda stanje svog portfolija. U sledećoj tabeli dati su podaci o cenama akcija 30.9. i profit koji je investitor ostvario po osnovu svake:

IBM	189.83	-244.12
MSFT	46.36	-0.38
GM	31.94	9410.35
BAC	17.05	-859.56
X	39.17	81.37
KO	42.66	185.54
GE	25.62	-667.07
TGT	62.68	-460.1
TXT	35.99	-81.54
MO	45.94	434.66

Sabirajući poslednju kolonu, dobijamo ukupan profit investitora koji nakon dva meseca od izlaska na berzu iznosi 7,799.16 dolara, a ukupan kapital kojim sada raspolaže je 97,751.85 dolara. Ponovo će deo bogatstva konzumirati. Kako je $k(2/12) = 0.00673643$, to je iznos koji će konzumirati:

$$\begin{aligned} c^*(2/12) &= k(2/12) \cdot X(2/12) \\ &= 658.50 \end{aligned}$$

Preostaje mu 97,093.36 dolara da ih preraspodeli 30.9.2014.

Potpuno isto kao i do sada, investitor će preraspoređivati kapital poslednjeg dana u mesecu i to 30.9. ($t = 2/12$), 31.10. ($t = 3/12$), 28.11. ($t = 4/12$) i 31.12. ($t = 5/12$), a povući će se sa berze 30.1.2014. ($t = 6/12$). Takođe, odluke će donositi na osnovu podataka od poslednjih mesec dana. Na narednim stranama su prikazane cena akcija u periodu od početka septembra 2014. do kraja januara 2015. godine.

Datum	IBM	MSFT	GM	BAC	X	KO	GE	TGT	TXT	MO
9/2/2014	191.56	45.09	34.8	16.27	38.14	41.64	25.85	60.19	38.43	43.19
9/3/2014	191.95	44.96	34.47	16.1	39.13	41.78	25.95	60.39	38.02	43.22
9/4/2014	190.68	45.26	34.63	16.11	40.15	41.87	25.96	61.03	37.72	43.14
9/5/2014	191.2	45.91	34.58	16.02	40.14	41.84	26.1	61.08	38.34	43.39
9/8/2014	190.14	46.47	33.24	16.35	39.49	41.78	26.08	60.56	38.05	43.49
9/9/2014	189.99	46.76	33.07	16.14	38.48	41.94	25.9	60.88	37.42	43.65
9/10/2014	191.54	46.84	33.29	16.36	38.38	42.17	25.95	61.95	37.8	43.86
9/11/2014	191.72	47	33.61	16.57	40.2	41.95	26.02	62.59	37.49	43.19
9/12/2014	191.28	46.7	33.27	16.79	39.92	41.46	25.87	62.53	36.46	43.16
9/15/2014	191.81	46.24	33.63	16.74	39.66	41.5	25.92	62.21	36.36	44.27
9/16/2014	192.96	46.76	33.71	16.71	41.41	41.64	26.21	62.86	36.92	44.36
9/17/2014	192.8	46.52	33.85	16.77	45.61	41.61	26.27	62.87	36.78	44.61
9/18/2014	193.75	46.68	34.03	17.04	46	41.79	26.21	63.93	36.74	44.74
9/19/2014	194	47.52	33.94	16.95	45.19	42.05	26.29	63.81	36.81	44.99
9/22/2014	193.11	47.06	33.44	17.03	43.85	42.22	26.08	63.36	36.45	45.35
9/23/2014	191.62	46.56	33.22	17.05	43.9	41.89	26.02	63.08	36.11	44.82
9/24/2014	192.31	47.08	33.65	17.18	42.71	42.27	25.93	63.88	36.14	45.7
9/25/2014	189.01	46.04	32.87	16.85	41.77	41.78	25.55	62.88	35.54	45.11
9/26/2014	190.06	46.41	33.17	17.03	41.5	42.2	25.63	63.15	36.71	45.81
9/29/2014	189.64	46.44	32.22	17.01	40.63	42.25	25.42	63.04	36.36	46.04
9/30/2014	189.83	46.36	31.94	17.05	39.17	42.66	25.62	62.68	35.99	45.94
10/1/2014	187.17	45.9	32.49	16.82	37.13	42.74	25.16	62.07	35.48	45.77
10/2/2014	186.91	45.76	33.18	16.88	36.9	42.66	25.12	62.57	35.38	45.47
10/3/2014	188.67	46.09	33.76	17.29	36.34	43	25.4	63.07	35.89	46.19
10/6/2014	189.04	46.09	33.75	17.29	35.73	43.6	25.22	62.28	35.4	46.51
10/7/2014	185.71	45.53	31.77	16.88	35.54	43.92	24.81	61.54	34.19	46.05
10/8/2014	189.36	46.78	32.18	17.12	36.58	44.55	25.25	62.81	34.72	46.8
10/9/2014	186.42	45.85	31.03	16.59	33.9	43.87	24.78	61.6	33.51	46.37
10/10/2014	185.93	44.03	30.29	16.48	32.55	44.47	24.27	60.59	33.19	46.72
10/13/2014	183.52	43.65	29.79	16.4	32.18	44.07	23.95	60.44	32.28	46.05
10/14/2014	183.8	43.73	30.11	16.52	32.8	43.64	24.1	61.69	33.83	46.18
10/15/2014	181.75	43.22	29.69	15.76	32.9	43.23	24.28	59.98	33.75	45.53
10/16/2014	179.84	42.74	29.94	16.08	32.88	42.56	24.25	59.44	33.66	45.17
10/17/2014	182.05	43.63	30.24	16.21	33.63	42.88	24.82	59.07	36.65	45.66
10/20/2014	169.1	44.08	30.34	16.26	33.97	43.29	25.03	60.29	36.45	46.42
10/21/2014	163.23	44.88	30.84	16.6	36.16	40.68	25.45	61.64	37.54	47.02
10/22/2014	161.79	44.38	31.31	16.4	35.24	40.62	25.19	61.33	36.6	47.06
10/23/2014	162.18	45.02	30.93	16.6	36.76	40.86	25.44	62.03	38.16	47.13
10/24/2014	162.08	46.13	30.04	16.72	36.92	41.03	25.64	61.57	38.76	47.49
10/27/2014	161.87	45.91	30.08	16.59	36.3	40.76	25.52	61.56	38.89	47.64
10/28/2014	163.6	46.49	31.17	16.8	38.15	40.56	25.88	60.65	40.49	47.53
10/29/2014	163.46	46.62	30.72	16.99	40.08	40.96	25.66	60.89	40.66	47.57
10/30/2014	164.35	46.05	30.78	17.03	38.94	41.4	25.67	61.78	41.07	47.5
10/31/2014	164.4	46.95	31.4	17.16	40.04	41.88	25.81	61.82	41.53	48.34

Datum	IBM	MSFT	GM	BAC	X	KO	GE	TGT	TXT	MO
11/3/2014	164.36	47.44	31.18	17.27	39.14	41.81	25.7	61.59	41.41	48.92
11/4/2014	162.65	47.57	30.82	17.21	36.57	41.82	25.7	61.37	41.37	49.42
11/5/2014	161.82	47.86	30.73	17.34	36.36	42.31	25.82	61.12	42.05	49.75
11/6/2014	161.46	48.7	31.37	17.36	36.1	42.29	26.36	61.89	42.23	49.56
11/7/2014	162.07	48.68	31.59	17.36	37.57	42.32	26.41	64.17	41.89	49.87
11/10/2014	163.49	48.89	31.12	17.37	36.7	42.39	26.47	65.52	42.09	49.87
11/11/2014	163.3	48.87	31.35	17.32	35.06	42.51	26.38	65.72	41.8	49.28
11/12/2014	161.92	48.78	31.42	17.29	34.78	42.71	26.52	66.72	42.09	49.33
11/13/2014	162.79	49.61	31.65	17.22	35.25	42.79	26.42	67.5	42.15	49.45
11/14/2014	164.16	49.58	31.79	17.14	36.24	42.73	26.46	68.13	41.74	48.78
11/17/2014	164.16	49.46	32.31	17.09	36.11	42.92	26.61	67.13	41.8	49.05
11/18/2014	161.89	48.74	32.27	17.14	36	43.53	27.01	67.51	42.45	49.27
11/19/2014	161.43	48.22	32.15	17.06	34.38	44.22	26.92	72.5	42.83	49.14
11/20/2014	160.64	48.7	32.13	17	34.35	44.25	26.85	71.19	42.99	48.83
11/21/2014	160.92	47.98	32.13	17.12	34.69	44.5	26.99	71.51	43.58	49.24
11/24/2014	162.15	47.59	32.19	17.18	34.91	44.27	27	71.57	44.23	49.25
11/25/2014	161.76	47.47	32.23	17.1	35.84	44.43	26.86	72.1	43.69	49.46
11/26/2014	161.95	47.75	32.07	17.11	35.34	44.29	26.87	72.16	43.29	49.72
11/28/2014	162.17	47.81	33.43	17.04	33.35	44.83	26.49	74	43.32	50.26
12/1/2014	161.54	48.62	32.94	16.79	31.16	44.55	26.02	72.75	42.53	50.3
12/2/2014	162.67	48.46	33.26	17.15	31.2	44.54	26.05	73.07	42.16	50.56
12/3/2014	164.52	48.08	33.64	17.29	32.36	43.8	26.38	73.33	43.22	51.19
12/4/2014	164.05	48.84	33.09	17.21	32.2	43.5	26.09	73.28	42.47	50.94
12/5/2014	163.27	48.42	33.93	17.68	32.1	43.53	26.01	73.66	42.32	51.07
12/8/2014	161.86	47.7	32.68	17.66	30.04	43.14	25.69	73.78	41.61	50.93
12/9/2014	162.99	47.59	32.81	17.56	31.04	42.04	25.58	73.6	41.84	50.7
12/10/2014	160.51	46.9	31.97	17.38	29.08	41.6	25.27	72.91	40.52	49.99
12/11/2014	161.07	47.17	32.19	17.47	28.54	41.53	25.41	73.53	40.59	50.21
12/12/2014	155.38	46.95	31.57	17.13	27.82	40.91	24.89	72.4	39.33	49.65
12/15/2014	153.06	46.67	31	16.85	27.71	40.57	24.59	73.2	39.67	49.51
12/16/2014	151.41	45.16	30.73	16.72	27.9	40.39	24.49	72.28	39.49	49.33
12/17/2014	151.93	45.74	31.15	17.26	28.68	41.55	24.66	73.57	40.65	49.94
12/18/2014	157.68	47.52	31.75	17.53	28.65	42.39	25.14	74.64	41.99	51.27
12/19/2014	158.51	47.66	32.81	17.62	28.59	41.95	25.62	73.95	42.71	50.56
12/22/2014	161.44	47.98	33.23	17.71	26.19	42.35	25.71	74.5	42.9	50.2
12/23/2014	162.24	48.45	33.56	17.93	26.4	42.97	25.88	74.69	43.28	50.53
12/24/2014	161.82	48.14	33.43	17.98	26.51	42.94	25.83	74.65	43	50.36
12/26/2014	162.34	47.88	33.73	17.98	26.65	42.96	25.78	75.06	43.05	50.6
12/29/2014	160.51	47.45	34.6	18.11	26.9	42.86	25.7	75.53	43.1	50.23
12/30/2014	160.05	47.02	35.09	18.13	27.12	42.76	25.57	75.71	42.69	49.83
12/31/2014	160.44	46.45	34.91	17.89	26.74	42.22	25.27	75.91	42.11	49.27

Datum	IBM	MSFT	GM	BAC	X	KO	GE	TGT	TXT	MO
1/2/2015	162.06	46.76	34.84	17.9	26.59	42.14	25.06	75.33	42.17	48.97
1/5/2015	159.51	46.33	34.33	17.38	25.35	42.14	24.6	73.98	41.36	48.69
1/6/2015	156.07	45.65	34.85	16.86	24.58	42.46	24.07	73.97	41.18	48.98
1/7/2015	155.05	46.23	35.84	16.94	24.64	42.99	24.08	76.77	41.45	49.88
1/8/2015	158.42	47.59	36.2	17.29	25.18	43.51	24.37	77.13	43.32	50.72
1/9/2015	159.11	47.19	35.59	16.98	24.57	43.03	24.03	76.43	42.58	50.6
1/12/2015	156.44	46.6	35.84	16.68	23.38	42.64	23.98	76.63	42.14	50.92
1/13/2015	156.81	46.36	35.25	16.45	22.9	42.63	23.86	75.95	42.43	51.32
1/14/2015	155.8	45.96	34.3	16.04	22.41	42.56	23.78	74.33	42.19	51.73
1/15/2015	154.57	45.48	33.43	15.2	21.61	42.38	23.58	75.67	42.33	52.47
1/16/2015	157.14	46.24	33.68	15.38	22.01	42.53	23.59	74.94	42.87	53.05
1/20/2015	156.95	46.39	33.93	15.26	21.58	43.16	23.85	73.67	42.56	53.83
1/21/2015	152.09	45.92	33.89	15.41	22.06	43.36	24.04	73.95	42.46	54.27
1/22/2015	155.39	47.13	33.82	16.09	22.71	43.78	24.28	75.77	43.46	54.66
1/23/2015	155.87	47.18	33.75	15.73	20.58	43.31	24.48	75.29	42.37	54.19
1/26/2015	156.36	47.01	33.7	15.85	21.33	43	24.59	75.25	42.45	54.44
1/27/2015	153.67	42.66	33.42	15.63	21.27	42.39	24.38	74.76	41.37	54.56
1/28/2015	151.55	41.19	32.84	15.2	23.58	41.92	23.84	74.26	41.99	54.01
1/29/2015	155.48	42.01	33.16	15.43	23.07	42.1	24.08	75.49	42.56	54.39
1/30/2015	153.31	40.4	32.62	15.15	24.44	41.17	23.89	73.61	42.56	53.1

Na osnovu ovih podataka i koresteći formule iste kao i do sada u vremenskim trenucima $t = 2/12, 3/12, 4/12$ i $5/12$ računaće vektore $\pi^*(t)$, a na osnovu njih će preraspoređivati kapital u datim trenucima. U sledećoj tabeli dati su podaci o periodu u kojem su posmatrani podaci na osnovu kojih je konstruisana strategija trgovanja (1), zatim datum trgovanja(2), uloženi kapital (3), stanje kapitala nakon trgovanja (4), kao i iznos konzumacije i stanje kapitala nakon konzumacije:

(1)	(2)	(3)	(4)	Konzumacija	Krajnji kapital
1.7.2014.-31.7.2014.	31.7.2014.	100000	97964.7	8019.49	89845.21
1.8.2014-29.8.2014.	29.8.2014.	89845.21	97751.85	658.5	97093.36
2.9.2014.-30.9.2014.	30.9.2014.	97093.36	96031.8	53.11	95978.69
1.10.2014.-31.10.2014.	31.10.2014.	95978.69	95097.27	0	95097.27
3.11.2014.-28.11.2014.	28.11.2014.	95097.27	101028.47	0	101028.47
1.12.2014.-31.12.2014.	31.12.2014	101028.47	105821.09	0	105821.09

Vidimo da je martingalska metoda u ovom primeru dala više nego odlične rezultate. Investitor je sa uloženih 100,000.00 dolara u narednih 6 meseci mogao da konzumira ukupno 8,731.1 dolar, a ostvario je i profit u iznosu od 5,821.17 (5.82%).

Zaključak

Martingalska metoda daje jedan mogući odgovor na pitanje kako izvršiti optimizaciju portfolija. Njena velika prednost je što je neprekidna u vremenu. Investitor može da konzumira svoje bogatsvo ili da vrši preraspodelu kapitala u bilo kom trenutku za vreme trajanja trgovanja. Investitoru je takođe dozvoljeno da sam bira funkcije korisnosti koje mu najviše odgovaraju, uzimajući u obzir averziju prema riziku i proces konzumacije. Još jedna prednost ove metode je jednostavnost kojom se odlikuje krajnji rezultat, koji zapravo zahteva poznavanje samo osnovnih matematčkih alata kao što su množenje matrice vektorom ili pronalaženje inverzne matrice.

Martingalska metoda se snažno oslanja na komletnost tržišta. Bez nje ne bi bilo moguće razlaganje portfolio problema na statički problem i problem reprezentacije, odnosno ne bi se moglo doći do optimalnih procesa strategije trgovanja i portfolio procesa. Jedna od mana ovog modela je što često preporučuje kratke pozicije i time izlaže investitora većem riziku.

Kao što je pokazano u trećem poglavlju, ako zanemarimo i troškove transakcije, ova metoda može dovesti do odličnih rezultata sa kojima bi većina investitora bila i više nego zadovoljna.

Dodatak

Posmatrajmo problem nelinearnog programiranja zadat sa:

$$(NLP) = \begin{cases} \max & J(B) \\ \text{s.t.} & g(B) \leq 0 \end{cases}$$

gde za funkcije J i g važi $J, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $J, g \in C^1$, J je strogo konkavna, a g je konveksna.

Definicija: Funkcija $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definisana sa:

$$L(B, \lambda) = J(B) - \lambda g(B)$$

zove se Lagranžova fulkcija za *(NLP)*.

Definicija: Kun-Takerovi uslovi su:

a) $g(B) \leq 0$

b) $J'(B) - \lambda \cdot g'(B) = 0$

c) $\lambda \geq 0, \lambda \cdot g(B) = 0$

Teorema:

1. Ako postoji rešenje B^* problema *(NLP)*, onda je B^* optimalno,
2. Ako je B^* rešenje problema *(NLP)*, onda su Kun-Takreovi uslovi ispunjeni,
3. Ako je za B^*, Lagranžov množitelj λ pozitivan, onda je B^* takođe rešenje problema

$$(N\bar{L}P) = \begin{cases} \max & J(B) \\ \text{s.t.} & g(B) = 0 \end{cases}$$

Literatura

[1] Ralf Korn, Elke Korn, *Option pricing and portfolio optimization: Modern methods of financial mathematics*, American Mathematical Society, 2001.

[2] Ralf Korn, *Optimal portfolios: Stochastic models for optimal investment and risk management in continuous time*, World Scientific, Singapore, 1999.

[3] J. Michael Steele, *Stochastic calculus and financial applications*, Springer-Verlag, New York, 2001.

[4] Ralf Korn, *Moderne Finanzmathematik- Theorie und praktische Anwendung*, Springer-Spektrum.

[5] Bernt Oksendal, *Stochastic differential equations*, Springer, New York, 2003.

[6] Danijela Rajter-Ćirić, *Verovatnoća*, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 2009.

[7] Danijela Rajter-Ćirić, *Stohastička analiza, skripta sa predavanja*, 2012.

[8] David G. Luenberger, *Investment Science*, Oxford University Press, Oxford, 1998.

[9] www.finance.yahoo.com.

Biografija

Miloš Kovačević je rođen 5. juna 1990. godine u Šapcu. Godine 2009. završio je prirodno-matematički smer "Šabačke gimnazije"u Šapcu kao odličan đak, nakon čega upisuje Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, smer primenjena matematika - matematika finansija. Osnovne studije zavrsava 2012. godine i upisuje master studije na istom fakultetu istog smera. Poslednji ispit položio je u septembru 2015. godine.

Radnu karijeru započeo je u školi matematike i računara "Rajak", gde je od 2013. do januara 2016. radio kao profesor matematematike. U februaru 2016. dobija dvomesečnu praksu u osiguravajućoj kući „DDOR a.d.o. Novi Sad". Od maja 2016. do januara 2017. bio zaposlen u ovoj kompaniji u direkciji za aktuarske poslove na poziciji nižeg aktuara. Od februara 2017. zaposlen je u "Opportunity Banci a.d. Novi Sad"u direkciji za tržišne i ostale rizike kao saradnik za upravljanje portfoliom.

Govori engleski i nemački jezik.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Miloš Kovačević
AU

Mentor: prof. dr Danijela Rajter-Ćirić
MN

Naslov rada: Martingalska metoda u optimizaciji portfolija
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: s / e
JI

Zemlja publikovanja: Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2017.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno–matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4

MA

Fizički opis rada: (3, 81, 0, 10, 0, 0, 1) - (broj poglavlja, strana, lit. citata, tabela, slika, grafika, priloga)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Stohastička analiza
ND

Predmetna odrednica / Ključne reči: Martingali, optimizacija portfolija, portfolio proces, strategija trgovanja, teorema o kompletnosti tržišta, proces bogatstva, martingalska metoda, proširene funkcije korisnosti
PO, UDK

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno–matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: U radu je predstavljena martingalsaka metoda u optimizaciji portfolija, kao jedan od mogućih odgovora na pitanje kako u optimalnom odnosu preraspodeliti kapital ulažući u hartije od vrednosti čije vrednosti u budućnosti nisu poznate. Osnov za primenu ove metode jeste teorema o kompletnosti tržišta, odnosno ispunjenost njenih pretpostavki. Ideja ove metode je razlaganje dinamičkog problema na statički problem i problem reprezentacije. Objašnjeno je kako se dolazi do optimalne strategije trgovanja, a samim tim i do optimalnog procesa konzumacije. U poslednjem poglavlju data je praktična primena modela na istorijske cene akcija sa Njujorške berze.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 18.10.2016.
DP

Datum odbrane: Jun 2017.
DO

Članovi komisije:

	Predsednik:	**dr Dora Seleši**, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu,
KO	Mentor:	**dr Danijela Rajter-Ćirić**, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu,
	Član:	**dr Nataša Krklec-Jerinkić**, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu.

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Miloš Kovačević
AU

Mentor: Danijela Rajter-Ćirić, Ph.D.
MN

Title: The martingale method in portfolio optimization
TI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract: English
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2017.
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4

PP

Physical description: (3, 81, 0, 10, 0, 0, 1) - (number of chapters, pages, references, tables, pictures, graphs, additional lists)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Stochastic calculus
SD

Subject / Key words: Martingales, portfolio optimization, portfolio process, trading strategy, completeness of the market, wealth process, extended utility functions
SKW, UC

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: In this is presented martingale approach to portfolio optimization, as one of many possible answers to the question how to allocate capital in different assets. Prices of these assets are not deterministic in the future. This method is based on the theorem about the completeness of the market. The main ideo of martingale method is decomposition of the dynamical portfolio problem into static optimization problem and representation problem. In the paper is also explained how to calculate optimal trading strategy and optimal consumption process. In last chapter is presented application of the this theory on the historical prices of different assets taken from New York Stock Exchange.
AB

Accepted by the Scientific Board on: 18.10.2016.
ASB

Defended: June 2017.
DE

Thesis defend board:
DB

President:	**Dora Seleši**, Associate Professor Ph.D. , Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Supervisor:	**Danijela Rajter-Ćirić, Ph.D.** Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad,
Member:	**Nataša Krklec-Jerinkić, Ph.D.** Assistant Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad.