Univerzitet u Novom Sadu

Prirodno-matematički fakultet

Departman za matematiku i informatiku

Miloš Knežević

STOHASTIČKA DOMINACIJA

Master rad

Novi Sad, 2015.

Sadržaj

1. Uvod 1
2. Osnovni pojmovi teorije verovatnoće 3
    2.1 Definicije osnovnih pojmova i osobine 3
    2.1 Pregled nekih apsolutno neprekidnih raspodela 6
        2.1.1 Uniformna raspodela 6
        2.1.2 Eksponencijalna raspodela 6
        2.1.3 Normalna raspodela 7
3. Donosilac odluka i njegove preferencije 9
    3.1 Relacije preferencije 10
    3.1 Definicije i osobine funkcija korisnosti 11
    3.2 Primeri funkcija korisnosti 14
        3.2.1 Linearna funkcija korisnosti 14
        3.2.2 Eksponencijalna funkcija korisnosti 14
        3.2.3 Logaritamska funkcija korisnosti 15
    3.3 Averzija prema riziku 16
4. Prvostepena stohastička dominacija 18
5. Drugostepena stohastička dominacija 24
6. Komparativna statika rizika 34
    6.1 Rangiranje transformacija slučajnih promenljivih 34
    6.2 Komparativna statika rizika 35
7. Primene 40
    7.1 Izbor portfolia I 40
    7.2 Izbor portfolia II 42
    7.3 Aukcije 44
8. Stohastička dominacija i arbitraža 48
9. Numerički primer 50
    9.1 FSD Algoritam 50
    9.2 SSD Algoritam 51
10. Zaključak 53
11. Dodatak 54
12. Literatura 57

1. Uvod

Pri rangiranju investicionih alternativa treba izabrati investiciju koja daje veću očekivanu vrednost i ima manju varijansu od druge investicije. Ako dve investicije imaju istu očekivanu vrednost investitor će se opredeliti za onu sa manjom varijansom, naravno, ako ne uzmemo u obzir diversifikaciju. U uslovima neizvesnosti pri rangiranju investicija najčeše se koristi analiza očekivane vrednosti i varijanse (Mean Variance Analysis) koju je razvio Hari Markovic. U ovom modelu koriste se samo dva parametra koji opisuju funkciju raspodela prinosa na investicije: očekivana vrednost i varijansa.

Stohastička dominacija predstavlja alternativni koncept koji rangiranje vrši koristeći celokupnu funkciju raspodela. Ona omogućava parcijalno uređenje skupa slučajnih promenljivih, koje su u našem slučaju prinosi investicija. Prvo pominjanje stohastičke dominacije je vezano za članak Kvirka i Saposnika (1962). Međutim, ovi autori su prilično uprošćeno tretirali stohastičku dominaciju, tako da se sa pravom nastanak koncepta vezuje za dva članka iz 1969. (Hanoch and Levy, 1969; Hadar and Russell, 1969) i rad objavljen od strane Rotšild i Stiglic (1970) je otvorio put za novu paradigmu nazvanu stohastička dominacija. Kao jedan od fundamentalnih koncepata teorije odlučivanja, stohastička dominacija je našla široke teorijske i praktične primene u poljima poput finansija, ekonomije, medicine i poljoprivrede. Pri tome postoje dva standardna modela. Ako se funkcije raspodela ne seku, reč je o prvostepenoj stohastičkoj dominaciji. Prvostepena stohastička dominacija se koristi pri definisanju VaR mere rizika i do nje dolazimo posmatrajući skup svih neopadajućih funkcija korisnosti iz čega sledi da investitor preferira veću zaradu. Ako funkcije raspodela imaju jedan presek primenjuje se drugostepena stohastička dominacija. Drugostepena stohastička dominacija je osnova za definisanje različitih mera rizika, kao što su CvaR i srednje apsolutno odstupanje od kvantila i do nje dolazimo uvodeći pretpostavku da investitor ujedno ima i odbojnost ka riziku, posmatrajući one funkcije korisnosti koje su neopadajuće i konkavne.

Stohastička dominacija jeste uopštenje teorije očekivane korisnosti i osnovni cilj njene primene jeste minimizacija efikasnog skupa investicija i ovom radu će biti date neke od njenih primena.

U radu će u drugom poglavlju biti predstavljene osnovne definicije i teoreme neophodne za razumevanje problematike. Treće poglavlje se bavi donosiocem odluka i njegovim preferencijama i predstavlja manifest da se nematematički problemi mogu vrlo uspešno matematički modelirati. U narednom, četvrtom poglavlju, dat je koncept prvostepene stohastičke dominacije. Peto poglavlje je rezervisano za koncept drugostepene stohastičke dominacije. Kroz šesto poglavlje se upoznajemo sa komparativnom statikom rizika koja analizira promenu optimalnog izbora pojedinca pri promeni jedne varijable dok ostale varijable ostaju nepromenjene. U sedmom poglavlju su date neke od primena stohastičke dominacije. Osmo poglavlje se bavi odnosom stohastičke dominacije i arbitraže. Konačno, u devetom poglavlju predstavljeni su rezultati dobijeni implementacijom modela.

Izuzetnu zahvalnost dugujem svom mentoru, dr Danijeli Rajter-Ćirić, za savete, pomoć i razumevanje koje mi je ukazala tokom izrade rada, za svo znanje preneto tokom osnovnih i master studija.

Takođe, želim da se zahvalim i članovima komisije dr Dori Seleši i dr Sanji Rapajić, prvenstveno na prenetom znanju tokom studija, na svim savetima, korisnim sugestijama i trudu koji su uložili prilikom izrade, kao i pregledanja rada.

2. Osnovni pojmovi teorije verovatnoće

2.1 Definicije osnovnih pojmova i osobine

Neka je Ω – skup elementarnih događaja tj. skup svih mogućih ishoda nekog eksperimenta. Elementi skupa Ω su elementarni događaji koje označavamo sa $\omega_1, \omega_2, \ldots$

Definicija 2.1.1 (Slučajan događaj). Slučajan događaj A (ili samo događaj A) je podskup skupa elementarnih događaja Ω. On se sastoji od onih elementarnih događaja koji imaju svojstvo kojim se događaj A definiše.

Definicija 2.1.2 (σ -polje). σ -polje (σ -algebra) nad skupom Ω je podskup Ƒ partitivnog skupa $P(\Omega)$ ukoliko važe sledeći uslovi:

1) $\Omega \in$ Ƒ
2) $B \in$ Ƒ $\Longrightarrow B^C \in$ Ƒ (klasa Ƒ je zatvorena u odnosu na operaciju komplementiranja);
3) $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq$ Ƒ $\Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in$ Ƒ (klasa Ƒ je zatvorena u odnosu na operaciju prebrojive unije)

Skup Ω sa σ-poljem Ƒ, u oznaci (Ω, Ƒ), se zove prostor sa σ-poljem.

Definicija 2.1.3 (Borelovo σ -polje). Borelovo σ -polje $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ je najmanje σ - polje koje sadrži sve zatvorene skupove skupa realnih brojeva.

Definicija 2.1.4 (Verovatnoća). Neka je (Ω, Ƒ) prostor sa σ -poljem. Funkcija P : Ƒ $\rightarrow$ $[0, 1]$ se zove verovatnoća na prostoru (Ω, Ƒ) ako važe sledeći uslovi:

1. $\mathrm{P}(\Omega) = 1$,
2. $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq$ Ƒ, $B_i \cap B_j \neq \emptyset, i \neq j, i, j = 1,2, \ldots \Longrightarrow P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i)$.

Uređena trojka (Ω, Ƒ, P) se naziva prostor verovatnoća.

Skup $A \cap B$ je presek događaja A i B, i realizuje se ako i samo ako se realizuju i A i B. Događaji A i B se međusobno isključuju (disjunktni su) ako važi da je $A \cap B = \emptyset$.
Definicija 2.1.5 (Nezavisnost događaja). Događaji A i B su nezavisni ako važi

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Definicija 2.1.6 (Slučajna promenljiva). Funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$ se zove slučajna promenljiva nad prostorom verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ ako za svako $B \in \mathcal{B}$ važi $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, gde je $\mathcal{B}$ Borelovo σ –polje. Ekvivalentno, kažemo da je X $\mathcal{F}$-merljivo.

Definicija 2.1.7 (Diskretna slučajna promenljiva). Slučajna promenljiva X je diskretna (diskretnog tipa) ako postoji prebrojiv skup različitih vrednosti $R_X = \{x_1, x_2, \dots\}$ takav da je $P\{\overline{R_X}\} = 0$, gde je $\overline{R_X}$ komplementarni skup od R_X. Verovatnoću događaja $\{X = x_i\}$ označavamo sa $p(x_i)$:

$$p(x_i) = P\{\omega \in \Omega \,\big|\, X(\omega) = x_i\} = P\{X = x_i\}, i = 1,2, \dots$$

Skup vrednosti diskretne slučajne promenljive $\{x_1, x_2, \dots\}$ i odgovarajuće verovatnoće $p(x_i)$, $i = 1,2, \dots$, čine zakon raspodele slučajne promenljive X.

Definicija 2.1.8 (Funkcija raspodele). Funkcija $F_X(x) : \mathbb{R} \to [0,1]$ definisana sa

$$F_X(x) = P(\omega \in \Omega | X(\omega) < x) = P\{X < x\},$$

naziva se funkcija raspodele slučajne promenljive X.

Definicija 2.1.9 (Apsolutno neprekidna slučajna promenljiva). Slučajna promenljiva X je apsolutno neprekidnog tipa ako postoji nenegativna integrabilna funkcija $\varphi(x)$, $-\infty < x < \infty$, takva da je za svaki skup $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$P(X \in S) = \int_S \varphi_X(x)dx$$

Funkcija $\varphi_X(x)$ zove se **gustina raspodele** verovatnoća slučajne promenljive X.

Jedna od najjednostavnijih slučajnih promenljivih jeste indikator događaja $B \in \mathcal{F}$, u oznaci I_B, koja se defniše na sledeći način:

$$I_B(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in B, \\ 0, & \omega \in B^C \end{cases}$$

Slučajna promenljiva $X : \Omega \to \mathbb{R}$ se naziva prosta slučajna promenljiva ako postoji konačno mnogo realnih brojeva $x_1, \dots, x_n$ tako da važi $\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$. U tom slučaju važi $\Omega = \sum_{i=1}^{n} A_i$, gde je $A_i = \{\omega \mid X(\omega) = x_i\}$ i $X = \sum_{i=1}^{n} x_i I_A$.
Integral proste slučajne promenljive X se definiše sa

$$\int XdP = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(A_i).$$

Definicija 2.1.10 (Očekivanje). Očekivanje slučajne promenljive X , u oznaci $E(X)$, se definiše na sledeći način:

i. Ukoliko je slučajna promenljiva X diskretnog tipa i važi $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| p(x_k) < \infty$, tada je

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p(x_k)$$

ii. Ukoliko je slučajna promenljiva X apsolutno neprekidnog tipa i važi $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \varphi_X(x) dx < \infty$, tada je

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \varphi_X(x) dx.$$

Definicija 2.1.11 (Centralni momenat). Centralni momenat reda k slučajne promenljive X definisan je sa $E((X - E(X))^k)$.

Definicija 2.1.12 (Disperzija). Centralni momenat reda 2 slučajne promenljive X zove se disperzija(varijansa) slučajne promenljive X i označava se sa $D(X)$ ili $\sigma^2(X)$.

Definicija 2.1.13 (Standardno odstupanje). Standardno odstupanje (standardna devijacija) slučajne promenljive X se definiše kao

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

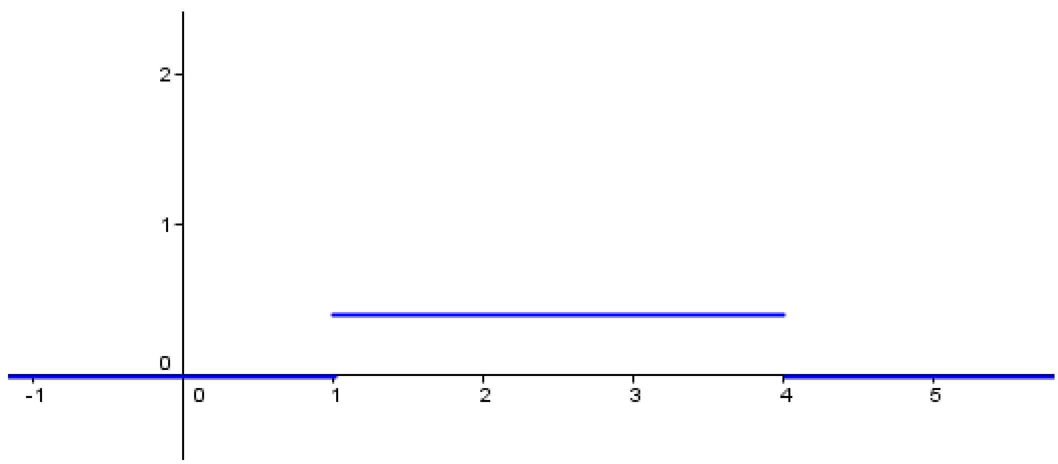
2.2 Pregled nekih apsolutno neprekidnih raspodela

U ovom radu su korišćene sledeće apsolutno neprekidne raspodele verovatnoća slučajnih promenljivih.

2.2.1 Uniformna raspodela

Uniformna raspodela spada u raspodelu verovatnoća apsolutno neprekidnih slučajnih promenljivih. Za slučajnu promenljivu X kažemo da ima uniformnu raspodelu na intervalu $[a, b], a < b$, i pišemo $X: U(a, b)$, ako ima gustinu raspodele oblika

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & inače \end{cases}$$



Slika 2.2.1: Funkcija gustine raspodele uniformne slučajne promenljive sa parametrima $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{1}\ \boldsymbol{i}\ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{4}$

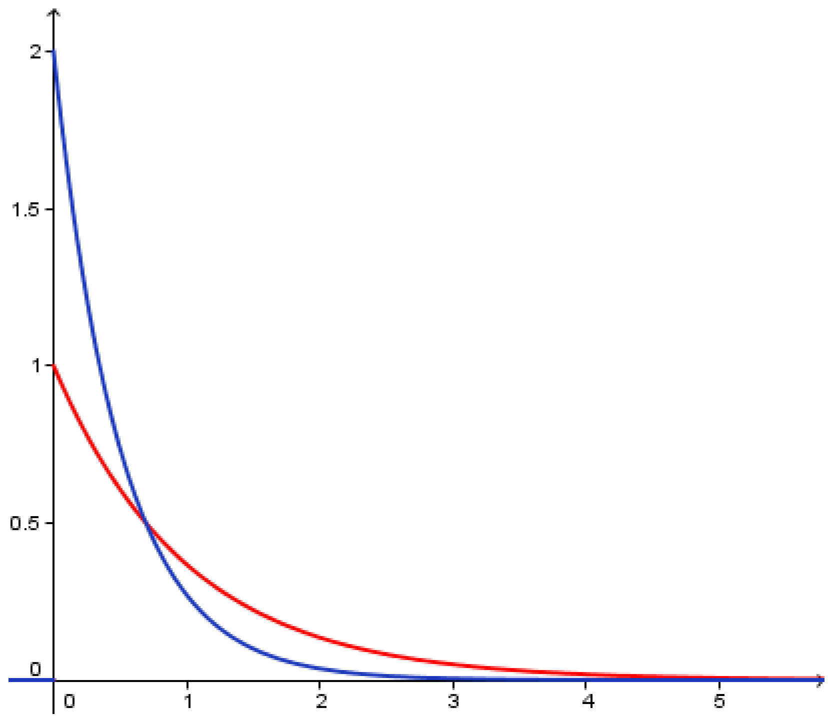
Funkcija raspodele slučajne promenljive X sa uniformnom raspodelom na intervalu $[a, b]$ je:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{1}{b-a}x - \dfrac{a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$

2.2.2 Eksponencijalna raspodela

Slučajna promenljiva ima eksponencijalnu $\varepsilon(\lambda)$ raspodelu, $\lambda > 0$, što zapisujemo $X\colon \varepsilon(\lambda)$, ako je njena gustina raspodele

$$\varphi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



Slika 2.2.2: Funkcija gustine raspodele eksponencijalne slučajne promenljive sa parametrom $\boldsymbol{\lambda} \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}\}$

Funkcija raspodele slučajne promenljive $X\colon \varepsilon(\lambda)$ je

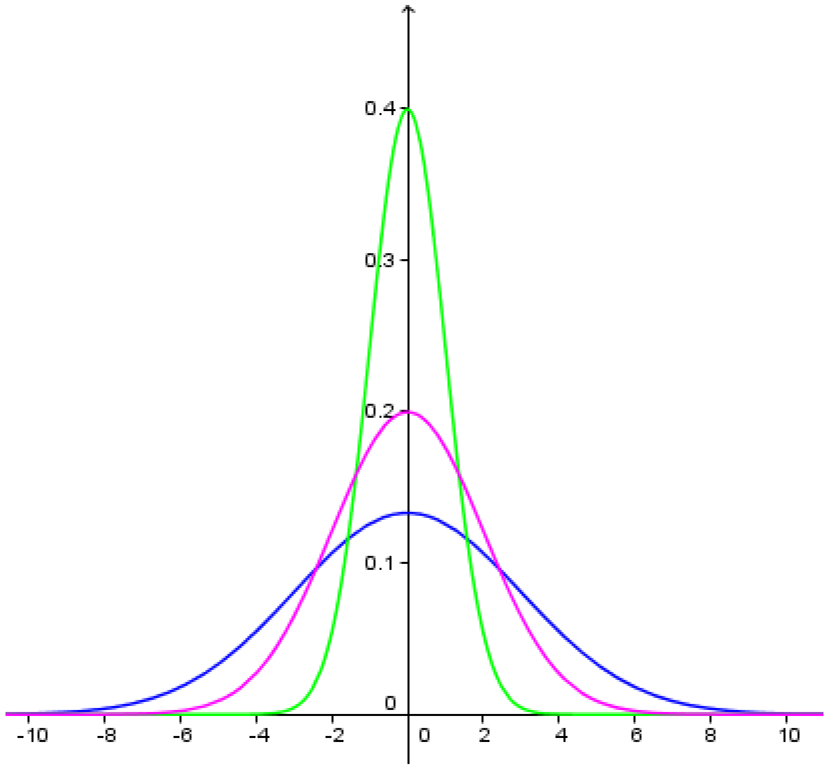
$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

2.2.3 Normalna raspodela

Slučajna promenljiva X ima normalnu raspodelu, pišemo $X\colon N(\mu, \sigma^2)$, gde je $\mu \in \mathbb{R}$, a $\sigma > 0$. U slučaju da su parametri $\mu = 0$ i $\sigma = 1$, dobija se $N(0,1)$ raspodela koja se još naziva i standardizovana normalna raspodela i koja je često korišćena u teoriji verovatnoće i matematičke statistike zbog svojih lepih osobina. Funkcija gustine normalne raspodele je data sa:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}$$

Može se pokazati da je μ matematičko očekivanje, a σ standardno odstupanje slučajne promenljive X. Na sledećem grafiku je dat prikaz normalnih raspodela sa $\mu = 0$ i različitim vrednostima σ:



Slika 2.2.3: Normalna raspodela sa parametrima $\boldsymbol{\mu = 0}$ ***i*** $\boldsymbol{\sigma \in \{1, 2, 3\}}$

Funkcija raspodele slučajne promenljive X sa normalnom $N(\mu, \sigma^2)$ raspodelom je:

$$F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt, x \in \mathbb{R}.$$

3. Donosilac odluka i njegove preferencije

Donosiocem odluka i njegovim izborima se bavi normativna teorija odlučivanja. Donosioca odluke možemo predstaviti kao savršeno racionalnog pojedinaca koji uvek zna šta hoće i nastoji da to realizuje. Njegova želja da smanji ili izbegne gubitke, odnosno, da poveća dobitke (bilo u materijalnom, emocionalnom ili nekom drugom smislu) sadržana je u ciljevima koje pred sebe postavlja i koji se među sobom razlikuju po formulaciji, sadržini, složenosti i značaju. Princip kojim se racionalni donosilac odluke rukovodi je maksimizacija lične dobrobiti.

U manjoj ili većoj meri, svako od nas odstupa od ovog »ideala« koji ne poznaje izbore iz navike, brzoplete, nepromišljene ili hirovite odluke. Pri važnim izborima pažljivo procenjujemo prednosti i nedostatke pojedinih alternativa i zapravo iako skloni greškama na ličnu štetu, pažnja sa kojom donosimo odluke obično raste sa njihovim značajem. Na osnovu subjektivnih kriterijuma kao što su naše želje, interesi, uverenja, moralni principi, ukusi i slično ocenjujemo dobrobit koju nam pružaju alternative. Naše individualne preferencije se formiraju kao proizvod manje ili više saglasnih ili nesaglasnih uticaja svih ovih faktora.

Stav prema alternativama izgrađujemo na osnovu preferencija i opredeljujemo se za jednu od njih. Preferencije određujemo relativno lako kada alternative poredimo po jednom ili malom broju kriterijuma, tim pre ako odlučujemo u uslovima izvesnosti. Na primer, izbor garderobe ujutro kad se probudimo, po pravilu vršimo bez ikakvih problema, iako broj alternativa može biti veliki. Međutim, važne odluke (kao što je izbor profesije ili mesta u kojem ćemo živeti) predstavljaju izbore između složenih opcija, koje vrednujemo na osnovu više karakteristika. Tada određivanje preferencija postaje složen, ponekad dugotrajan proces, praćen dilemama i neodlučnošću.

Teorija racionalnog izbora je zasnovana na modelu koji sadrži dve komponente: jednu komponentu čine sve akcije koje su, pod različitim okolnostima, dostupne donosiocu odluke, dok drugu komponentu predstavljaju upravo preferencije pojedinca. Bilo kakva novonastala situacija uzrokuje „sužavanje“ skupa svih mogućih akcija samo na one koje se pod datim okolnostima mogu realizovati. Tada iz ovog podskupa svih mogućih akcija, pojedinac bira onu koja će maksimizirati njegovo zadovoljstvo. Iz navedene priče je sasvim jasno da ovako prezentovana teorija racionalnog izbora predstavlja osnovu mnogih političkih pojava – nauku o interesnim grupama, glasanju na izborima, kao i formiranju koalicija između političkih partija. Naše preferencije treba da zadovolje neke polazne pretpostavke da bismo donosili racionalne odluke. Za precizno definisanje ovih pretpostavki neophodno je da se upoznamo sa osnovnim relacijama preferencije i indiferencije.

3.1 Relacije preferencije

Definicija 3.1.1 Direktan proizvod skupova $X_1, X_2 \dots X_n$ u oznaci $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ je skup uređenih n-torki sa koordinatama iz odgovarajućih skupova:

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \{(x_1, x_2 \dots x_n) | x_i \in X_i, i = 1,2, \dots n\}$$

Ako je $X_1 = X_2 = \cdots = X_n$, onda se odgovarajući direktan proizvod označava sa X^n. Relacije mogu biti unarne, binarne,…n-arne, u zavisnosti od toga koliki je broj elemenata čiji odnos relacija prikazuje.

Definicija 3.1.2 Ako je X neprazan skup i $n \in \mathbb{N}$, onda je podskup ρ iz X^n n-arna relacija na X. Broj n se naziva arnost relacije ρ. Binarna relacija ρ na skupu X je podskup iz X^2, odnosno $\rho \in X^2$. Ako je $(x, y) \in \rho$ kažemo da je x u relaciji sa y. To se označava i sa $x\rho y$.

Definicija 3.1.3 Relacija ρ na skupu X je:

1) Refleksivna ako $\forall x \in X, x\rho x$,

2) Simetrična ako $\forall x, y \in X, x\rho y \Rightarrow y\rho x$,

3) Antisimetrična ako $\forall x, y \in X, x\rho y \wedge y\rho x \Rightarrow y = x$,

4) Tranzitivna ako $\forall x, y, z \in X, x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x\rho z$

Ako za relaciju na nekom skupu važe osobine 1), 2) i 4), tu relaciju nazivamo još i relacija ekvivalencije. Slično, ako za relaciju važe osobine 1), 3) i 4), kažemo da je ona relacija poretka.

Definicija 3.1.4 Relacija preferencije $\succcurlyeq$ je binarna relacija na skupu X koja ima osobine:

1) $\forall x \in X, x \succcurlyeq x$ (refleksivnost)
2) $\forall x, y \in X, x \succcurlyeq y \ ili \ y \succcurlyeq x$ (kompletnost)
3) $\forall x, y, z \in X, x \succcurlyeq y \wedge y \succcurlyeq z \Rightarrow x \succcurlyeq z$ (tranzitivnost).

Definicija 3.1.5 Relacija striktne preferencije , u oznaci $\succ$ je definisana na sledeći način:

$$x \succ y \Leftrightarrow x \succcurlyeq y \wedge \rceil(y \succcurlyeq x).$$

Definicija 3.1.6 Relacija indiferentnosti je definisana na sledeći način:

$$x \sim y \Leftrightarrow x \succcurlyeq y \wedge y \succcurlyeq x$$

Pretpostavimo sada da x, y, z predstavljaju moguće izbore koje pojedinac ima na raspolaganju. Neke osobine koje relacija preferencije na skupu može imati su:

- Monotonost $(\forall x, y \in X, x \geq y \Rightarrow x \succcurlyeq y)$
- Striktna monotonost $(\forall x, y \in X, x > y \Rightarrow x \succ y)$ ekonomska interpretacija monotonosti bi mogla biti „što više to bolje"
- Lokalna nestacionarnost $(\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0,$ postoji $y \in X$ takvo da važi $\|x - y\| < \varepsilon \wedge y \succ x)$, odnosno, uvek postoji izbor koji je bolji od postojećeg
- Konveksnost $(\forall x, y, z \in X, x \succcurlyeq z \wedge y \succcurlyeq z \Rightarrow tx + (1-t)y \succcurlyeq z, t \in (0,1))$
- Striktna konveksnost $(\forall x, y, z \in X, x \succcurlyeq z \wedge y \succcurlyeq z \Rightarrow tx + (1-t)y \succ z, t \in (0,1))$ – ako preferiramo izbore x i y u odnosu na izbor z, onda i sve linearne kombinacije x i y preferiramo u odnosu na z.

3.2 Definicije i osobine funkcija korisnosti

Definicija 3.2.1: Funkcija $u: X \to \mathbb{R}$ naziva se funkcija korisnosti ako važi

$$x \succcurlyeq y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$$

gde je $\succcurlyeq$ relacija preferencije na skupu X.

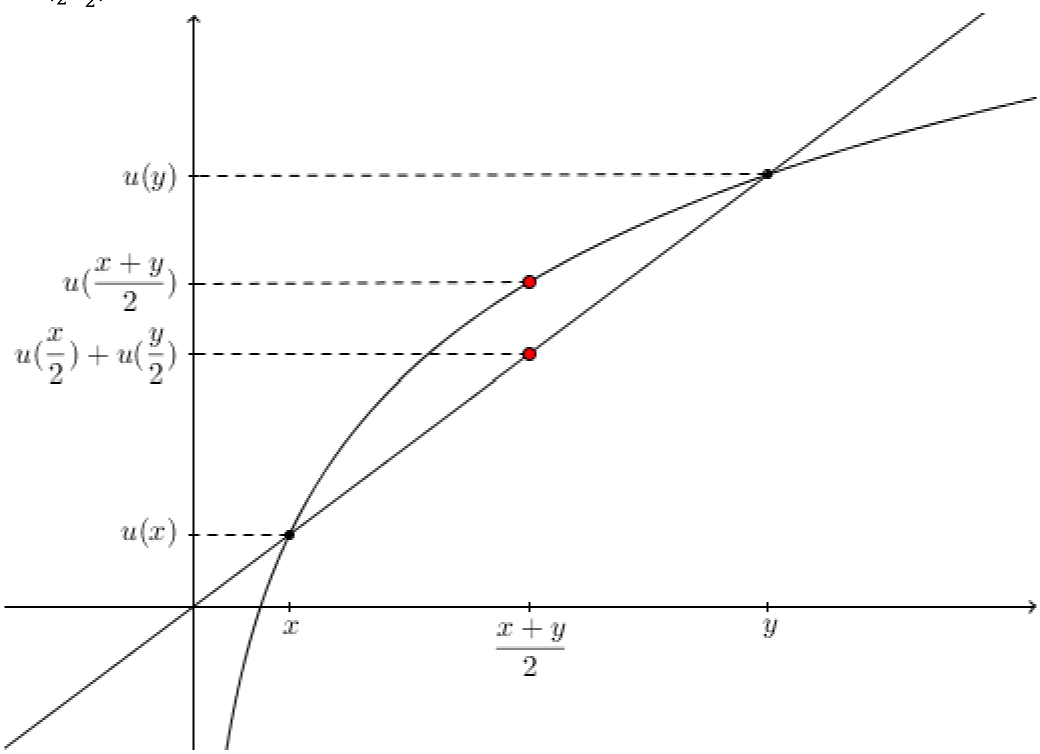
Funkcija korisnosti opisuje lični način vrednovanja kapitala pojedinca i može se smatrati njegovom karakteristikom. Međutim, može se govoriti i o funkciji korisnosti kompanije i tada funkcija korisnosti opisuje preference kompanije. Subjekti mogu imati različite funkcije korisnosti u zavisnosti od toga šta je više a šta manje vredno za njih i kakva je njihova tolerancija prema riziku. Sve funkcije korisnosti su: dva puta diferencijabilne funkcije, monotone i konkavne. Uglavnom su funkcije korisnosti monotono rastuće funkcije, međutim neke od njih sadrže tačke prevoja, a takve funkcije korisnosti se razmatraju samo po nekim svojim segmentima, najčešće baš tamo gde su rastuće.

Definicija 3.2.2 Funkcija $u(x): D \to \mathbb{R}$ je konkavna ako važi:

$$\forall x, y \in D, x \neq y, \forall \alpha \in [0,1], u(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha u(x) + (1-\alpha)u(y)$$

Primer 3.2.1 Pretpostavimo da postoje dve investicione alternative u koje investitor sa konkavnom funkcijom korisnosti može uložiti svoj novac.

1. Investicija A mu donosi količinu novca $X = \frac{x+y}{2}$ sa verovatnoćom 1.
2. Investicija B donosi količinu novca x sa verovatnoćom 0.5, ili količinu novca y takođe sa verovatnoćom 0.5. Ovo možemo prikazati slučajnom promenljivom $Y\colon \begin{pmatrix} x & y \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Jasno je da je, $E(Y) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = X$.



Slika 3.1.1 konkavnost funkcije označava odbojnost prema riziku

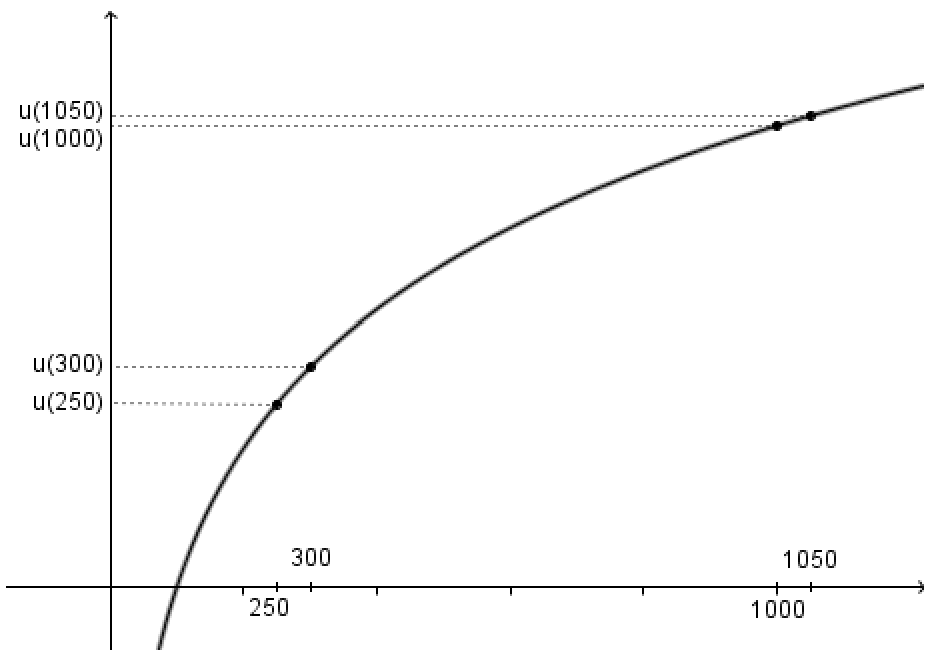
Prvo što vidimo iz Slike 3.1.1 je da dobrima koja više preferiramo možemo dodeliti veće vrednosti, što nam omogućava rast funkcije korisnosti. Na primer, neka je data funkcija korisnosti $u(x)$. Ukoliko su x i y dve količine novca koje možemo dobiti na lutriji, i važi $y \geq x$, tada će, jasno, veća korisnost odgovarati količini novca y.

Drugo, korisnost prve investicije je $u(X) = u(\frac{x+y}{2})$, dok je očekivana korisnost druge investicije $E\big(u(Y)\big) = \frac{1}{2}u(x) + \frac{1}{2}u(y)$. Zbog konkavnosti funkcije u biće

$$u\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{1}{2}u(x) + \frac{1}{2}u(y).$$

Očigledno da investitor ima veću preferenciju prema sigurnom bogatstvu, odnosno da je on rizik odbojan. Investitor koji je indiferentan između ponuda A i B je rizik neutralan, dok je investitor čija je funkcija korisnosti konveksna sklon riziku.

Dodavanje još jedne jedinice bogatstva znači mnogo više ako je bogatstvo malo nego kada je bogatstvo veliko, ovo je takozvana marginalna korisnost koja je još jedna posledica osobina funkcije korisnosti. Marginalna korisnost meri promenu korisnosti sa povećanjem bogatstva, odnosno potrošnog dobra i predstavlja prvi izvod funkcije korisnosti. Kako je konkavnost posledica negativnosti drugog izvoda funkcije korisnosti, jasno je da to znači opadanje funkcije prvog izvoda, odnosno opadajuću marginalnu korisnost. Na primer, posmatramo direktora neke firme koji ima platu od 1000 evra i nekog radnika sa platom od 250 evra. Kada bi povećali plate obojici za po 50 evra, to bi mnogo vise značilo radniku nego direktoru.



Slika 3.1.2 Opadajuća granična korisnost

Funkcije korisnosti za različite potrošače ili kompanije u opštem slučaju ne moraju biti iste, a čak ni za preferencije jednog te istog potrošača ne mora važiti da se one mogu prikazati samo jednom funkcijom korisnosti. To ilustruje sledeća teorema.

Teorema 3.2.1 *Ako je* u *funkcija korisnosti za relaciju preferencije* $\succcurlyeq$ *na skupu* X, *tada je za svaku strogo rastuću realnu funkciju* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funkcija* v *određena sa* $v(x) = f(u(x))$ *takođe funkcija korisnosti za tu relaciju preferencije.*

Dokaz
Iz definicije funkcije korisnosti sledi da je

$$x \succcurlyeq y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y).$$

Pošto je f rastuća funkcija imamo

$$f(u(x)) \geq f(u(y))$$

$$\Leftrightarrow v(x) \geq v(y).$$

□

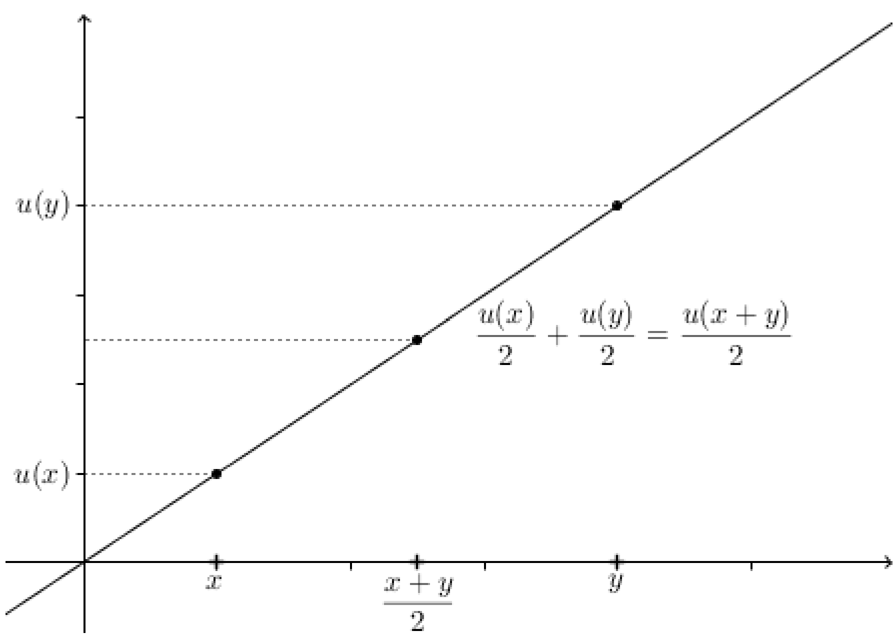
3.3 Primeri funkcija korisnosti

3.3.1 Linearna funkcija korisnosti

Linearna funkcija korisnosti je oblika $u(x) = ax + b,\ a, b \in \mathbb{R}$ i njena osnovna karakteristika je neutralnost prema riziku. Naime, za ovako definisanu funkciju korisnosti važi

$$u(\alpha x + (1-\alpha)y) = \alpha u(x) + (1-\alpha)u(y), \forall \alpha \in [0,1]$$

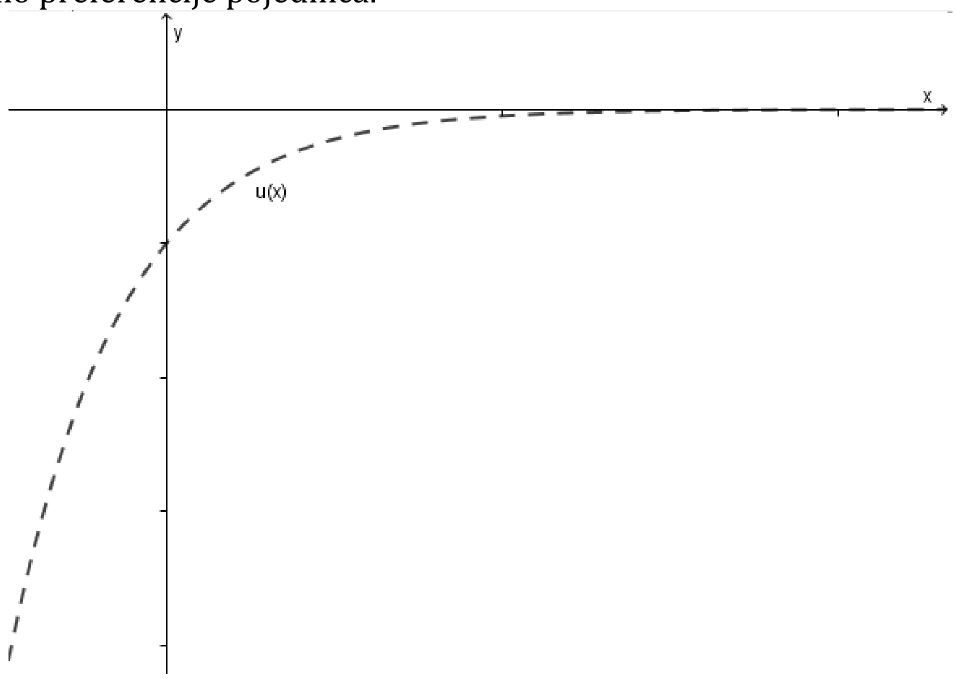
Stoga, investitor koji je rizik neutralan ima linearnu funkciju korisnosti. Prikazaćemo kako izgleda situacija iz Primera 3.2.1 u slučaju da je funkcija korisnosti linearna sa $a = 1, b = 0$:



Slika 3.2.1 Linearna funkcija korisnosti

3.3.2 Eksponencijalna funkcija korisnosti

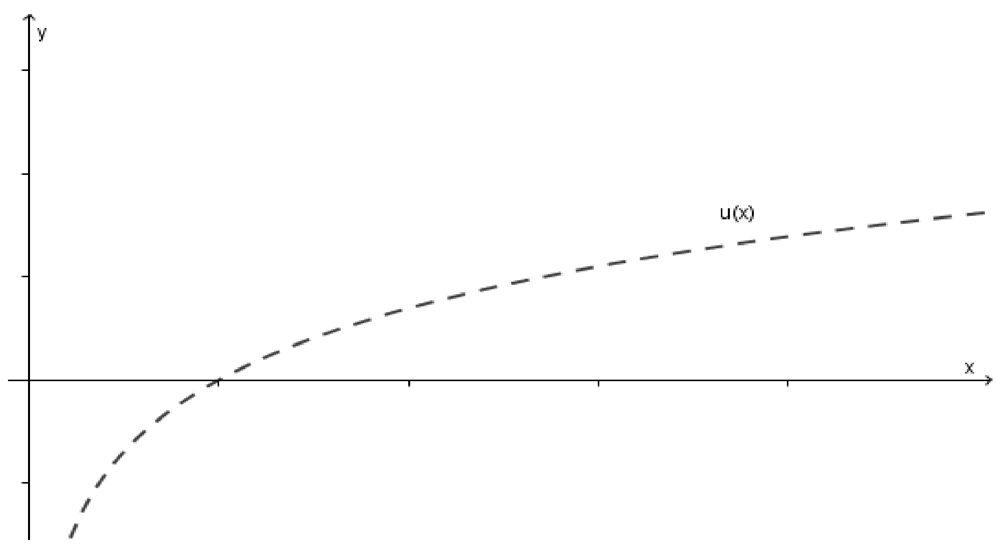
Ova funkcija korisnosti je data sa $u(x) = -e^{-\alpha x}$, gde $\alpha > 0$. Sa Slike 3.2.2 se vidi da su vrednosti ovako zadate funkcije korisnosti negativne. Ipak, jedino što nas zanima su upravo relativne vrednosti korisnosti, odnosno njihov poredak na osnovu koga utvrđujemo preferencije pojedinca.



Slika 3.2.2 Eksponencijalna funkcija korisnosti

3.3.3 Logaritamska funkcija korisnosti

Opšti oblik ove funkcije korisnosti je $u(x) = lnx$.

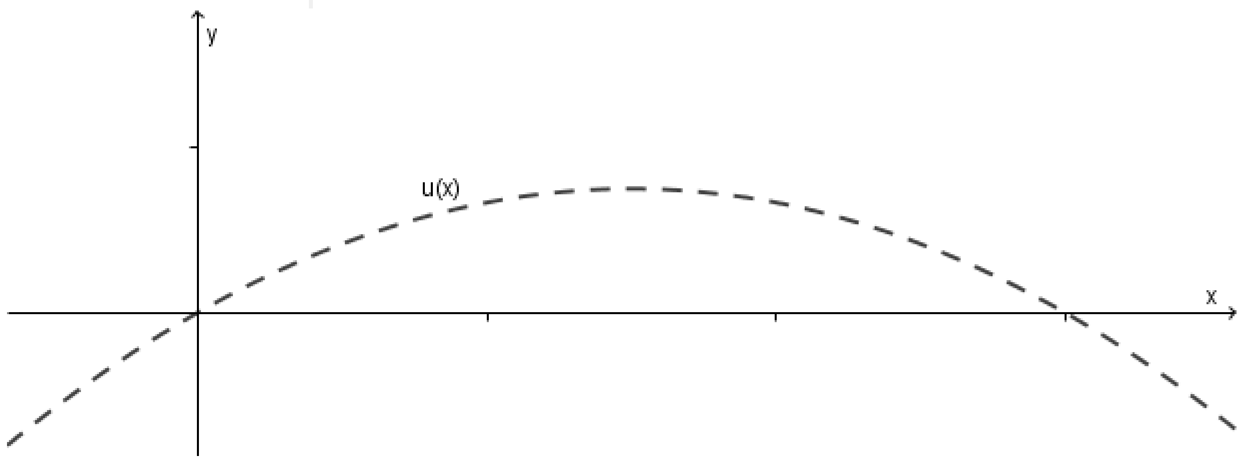


Slika 3.2.3 *Logaritamska funkcija korisnosti*

Funkcija je definisana samo za $x > 0$. Na Slici 3.2.3 se vidi da je ovakva funkcija korisnosti vrlo rigorozna kada su u pitanju vrednosti nezavisne promenljive (dobra, bogatstva, očekivanog dobitka) bliske 0, a ovo se može tumačiti kao “uplašenost “ investitora od ishoda i kojima ne profitira mnogo, ili čak gubi.

3.3.4 Kvadratna funkcija korisnosti

Ova funkcija je oblika $u(x) = x - bx^2$, gde je $b > 0$, i definisana je samo za vrednosti $x < \frac{1}{2b}$. Na slici se vidi grafik ove funkcije za $b = \frac{1}{3}$.



Slika 3.2.4 *Kvadratna funkcija korisnosti*

3.4 Averzija prema riziku

Averzija prema riziku je odbojnost, tj. nesklonost prema riziku koju ima većina investitora odnosno svaki prosečni ili racionalni investitor. Prema tom konceptu za investitora povećanje bogatstva uz povećanje rizika ima padajuću korisnost. Arrow-Pratt koeficijentom apsolutne rizik-averzije se meri stepen averzije prema riziku koji je dat relacijom

$$A(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

Arrow-Pratt koeficijent pokazuje kako se stepen averzije prema riziku menja sa porastom bogatstva. Kao što nam intuicija govori, u velikom broju slučajeva sklonost riziku raste sa porastom bogatstva, odnosno i pojedinci i kompanije su više spremne za rizik ukoliko su finansijski sigurni.

Za neke specifične funkcije korisnosti ćemo izračunati Arrow – Pratt koeficijente.

Za linearnu funkciju korisnosti datu sa $u(x) = ax + b$, važi da je $(x) = 0$, što se poklapa sa ranijim zaključkom da su subjekti koji imaju ovakvu funkciju korisnosti indiferentni prema riziku.
Za eksponencijalnu funkciju $(x) = -e^{-\alpha x}$, $\alpha > 0$ važi da je

$$u'(x) = \alpha e^{-\alpha x}$$

$$u''(x) = -\alpha^2 e^{-\alpha x}$$

pa koeficijent apsolutne averzije prema riziku iznosi $A(x) = \alpha$. Ovo znači da je kod eksponencijalne funkcije korisnosti averzija konstantna, bez obzira na bogatstvo pojedinca.

Za logaritamsku funkciju korisnosti $u(x) = lnx$, imamo sledeće rezultate

$$u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$u''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

pa je odatle $A(x) = \frac{1}{x}$, i baš tu se primećuje ranije pomenuta osobina smanjenja averzije sa porastom sigurnosti.

Pored koeficijenta apsolutne rizik averzije postoji i koeficijent relativne averzije prema riziku koji se računa po formuli

$$R(x) = x \cdot A(x)$$

Upravo za logaritamsku funkciju korisnosti važi $R(x) = 1$.

4. Prvostepena stohastička dominacija

Stohastička dominacija omogućava parcijalno uređenje skupa slučajnih promenljivih, a kako imamo samo parcijalnu informaciju o preferencijama investitora i, samim tim, izbora njihovih funkcija korisnosti, možemo ostvariti samo parcijalno uređenje datog skupa. Tako posmatrajući skup svih neopadajućih funkcija korisnosti, što implicira da investitor preferira veću zaradu, dolazimo do koncepta prvostepene stohastičke dominacije.
Zbog praktičnosti sve slučajne promenljive ćemo posmatrati na intervalu $I = [\underline{x}, \bar{x}], -\infty < \underline{x} < \bar{x} < \infty$.

Definicija 4.1 Slaba relacija prvostepene stohastičke dominacije, u oznaci $\succcurlyeq_{FSD}$, definiše se sa:

$$X \succcurlyeq_{FSD} Y \Leftrightarrow F_X(\eta) \leq F_Y(\eta), \text{ za sve } \eta \in \mathbb{R}.$$

gde su X i Y slučajne promenljive, a $F_X: \mathbb{R} \to [0,1]$ funkcija raspodela verovatnoća:

$$F_X(\eta) = P(X \leq \eta), \text{ za } \eta \in \mathbb{R},$$

ili drugim rečima $X \succcurlyeq_{FSD} Y \Leftrightarrow \ P(X > \eta) \geq P(Y > \eta)$ za sve $\eta \in \mathbb{R}$.

Definicija 4.2 Neka su X i Y slučajne promenljive. Kažemo da X dominira Y, prema FSD pravilu (prvostepeno dominira), u oznaci $X \succ_{FSD} Y$, ako i samo ako je:

$$F_X(\eta) \leq F_Y(\eta) \text{ , za sve } \eta \in \mathbb{R}$$

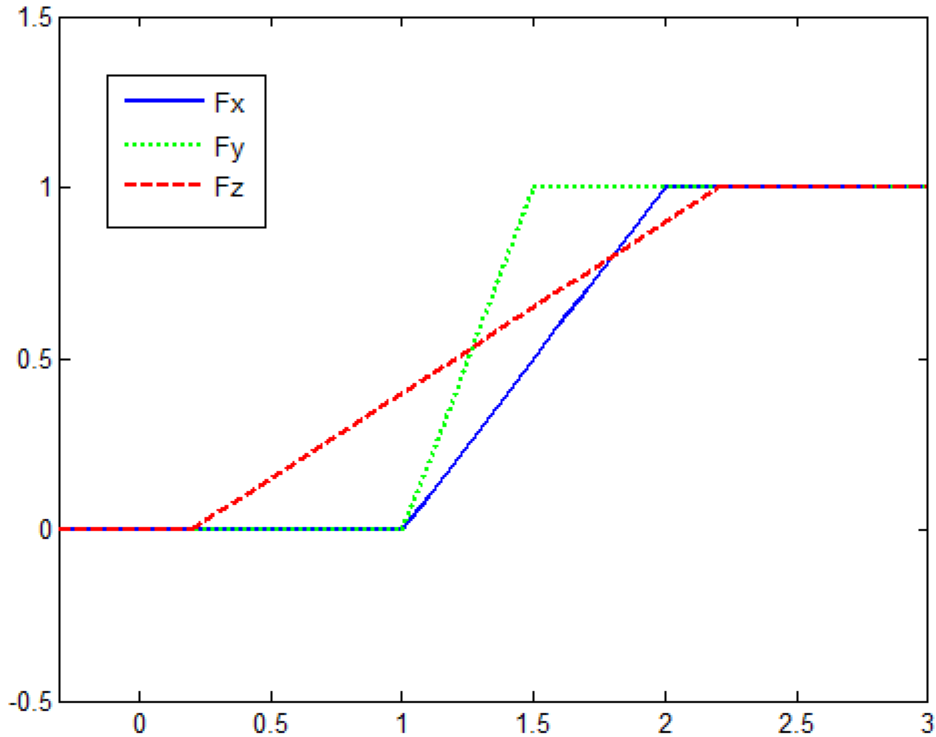
i za neko $\eta_0 \in \mathbb{R}$ važi $F_X(\eta_0) < F_Y(\eta_0)$.

Primer 4.1 Posmatrajmo tri slučajne promenljive sa uniformnim raspodelama. Neka $: U(1,2)$, $Y: U(1,1.5)$ i $Z: U(0.2,2.2)$. Onda

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ x - 1, & 1 \leq x \leq 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ 2x - 1, & 1 \leq x \leq 1.5 \\ 1, & x \geq 1.5 \end{cases}$$

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0.2 \\ x/2 - 0.1, & 0.2 \leq x \leq 2.2 \\ 1, & x \geq 2.2 \end{cases}$$



Slika 4.1: *Funkcije raspodela verovatnoća uniformnih slučajnih promenljivih X, Y i Z.*

Sa grafika uočavamo sledeće relacije prvostepene stohastičke dominacije
$X \succ_{FSD} Y, X \nsucc_{FSD} Z, Y \nsucc_{FSD} Z, Z \nsucc_{FSD} Y$.

Primer 4.2. Posmatrajmo dve investicione alternative:

Investicija A		Investicija B	
ishod	verovatnoća	ishod	verovatnoća
12	1/3	11	1/3
10	1/3	9	1/3
8	1/3	7	1/3

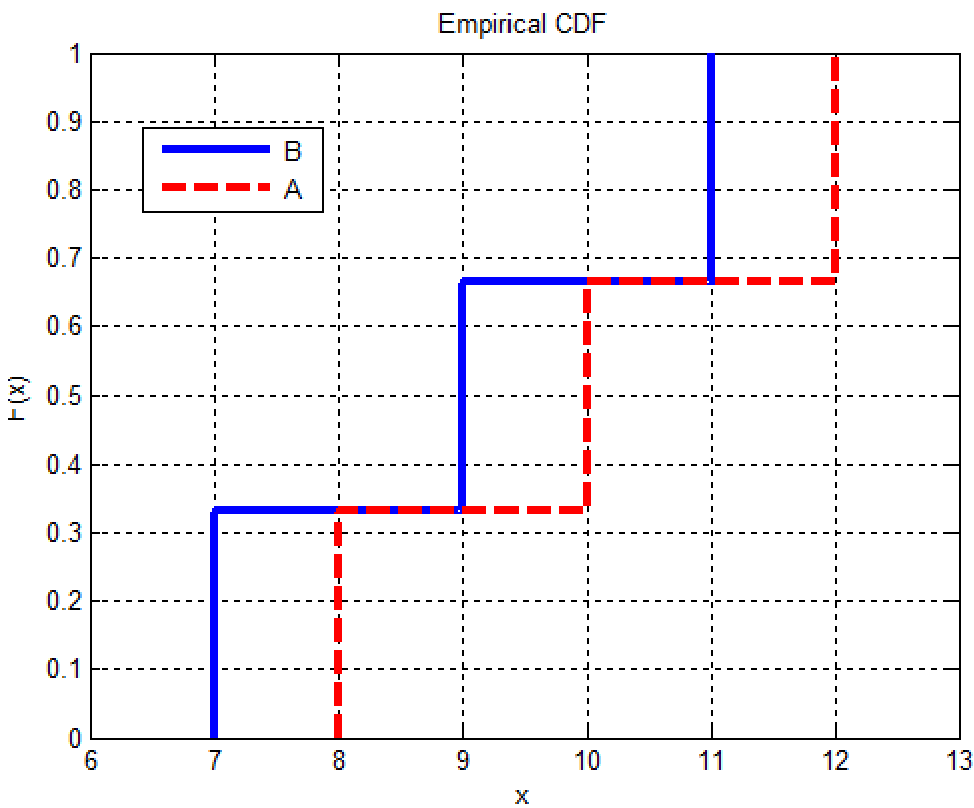
Tabela 4.1: *Prinosi i verovatnoće za investicije A i B*

Na osnovu Tabele 4.1 nije moguće doneti zaključak koju alternativu izabrati. Moguće je da prinos na investiciju B bude 11%, dok na investiciju A može da bude 10% ili 8%. Sledeća tabela u kojoj prikazujemo funkcije raspodele pomaže u rešavanju ove dileme:

Prinos	Funkcija raspodele	
R	A	B
7	0	1/3
8	1/3	1/3
9	1/3	2/3
10	2/3	2/3
11	2/3	1
12	1	1

Tabela 4.2: *Funkcije raspodele za investicije A i B*

Iz prethodne tabele uočavamo da je kumulativna verovatnoća ostvarenja nekog prinosa uvek veća za investiciju B, na osnovu čega zaključujemo da je verovatnoća ostvarenja nižeg prinosa veća za investiciju B. Dakle, investicija B je rizičnija pa će investitor koji preferira više u odnosu na manje izabrati investiciju A. U ovom primeru investicija A dominira nad investicijom B prema prvostepenoj stohastičkoj dominaciji.



Slika 4.2: *Prvostepena stohastička dominacija*

Lema 4.1

$$X \succcurlyeq_{FSD} Y \Longrightarrow E[X] \geq E[Y].$$

Dokaz

Podsetimo se da ćemo sve slučajne promenljive posmatrati na intervalu $I = [\underline{x}, \bar{x}], -\infty < \underline{x} < \bar{x} < \infty$.

1) Pretpostavimo da su X i Y nenegativne slučajne promenljive. Onda, iz osobine očekivane vrednosti sledi

$$E[X] = \int_0^{\bar{x}} \bar{F}_X(t)dt \geq \int_0^{\bar{x}} \bar{F}_Y(t)dt = E[Y]$$

gde je

$$\bar{F}_X(t) = 1 - F_X(t) \text{ } i \text{ } \bar{F}_Y(t) = 1 - F_Y(t)$$

2) Ako je $\underline{x} < 0$ onda imamo

$$E[X] = \int_0^{\bar{x}} dx - \int_{\underline{x}}^{\overline{x}} \bar{F}_X(t)\, dx \geq \int_0^{\bar{x}} dx - \int_{\underline{x}}^{\overline{x}} \bar{F}_Y(t)\, dx = E[Y]$$

Teorema 4.1 *Ako posmatramo agente sa monotono rastućim funkcijama korisnosti ($u'(x) > 0$), X je poželjnije od Y od strane svih agenata ako i samo ako*

$$X \succcurlyeq_{FSD} Y.$$

Drugim rečima, $X \succcurlyeq_{FSD} Y \Leftrightarrow E[u(X)] \geq E[u(Y)]$.

Dokaz:

Daćemo dokaz za neprekidne raspodele, ali tvrđenje takođe važi i za diskretne raspodele.

$$E[u(X)] - E[u(Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\,[\varphi_X(t) - \varphi_Y(t)]dt$$

$$= \left[u(t)[F_X(t) - F_Y(t)]\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} u'(t)\,[F_X(t) - F_Y(t)]dt$$

$$= 0 - \int_{-\infty}^{\infty} u'(t)\,[F_X(t) - F_Y(t)]dt > 0$$

Kako važi $F_X(\infty)$=$F_Y(\infty)$=1 i $F_X(-\infty)$=$F_Y(-\infty)$=0, F_X je preferirano u odnosu na F_Y ako je poslednji izraz pozitivan, odnosno ako je integral negativan. Prema pretpostavci važi $u'(t)$>0 i integral je negativan ako važi $F_X(t) \leq F_Y(t)$. Da bi vrednost integrala bila različita od nule, striktna nejednakost mora da važi bar za jednu vrednost.

□

Teorema 4.2 *Ako $X \succcurlyeq_{FSD} Y$ onda postoje slučajne promenljive X^* i Y^* koje imaju istu raspodelu verovatnoća kao X i Y, i zadovoljavaju "jaču" relaciju*

$$P(X^* \geq Y^*) = 1.$$

Dokaz: Obratimo pažnju na to slučajna promenljiva $Y^* = {F_Y}^{-1}\big(F_X(x)\big)$ ima raspodelu F_Y, baš kao i slučajna promenljiva Y, zato što

$$P(Y^* \leq x) = P\big({F_Y}^{-1}\big(F_X(x)\big) \leq x\big)$$

$$= P\big(F_X(x) \leq F_Y(x)\big)$$

$$= P\left(X \le F_X{}^{-1}\big(F_Y(x)\big)\right)$$

$$= F_X\left(F_X{}^{-1}\big(F_Y(x)\big)\right)$$

$$= F_Y(x) = P(Y \le x)$$

Sada stavimo $X^* = X$ i primetimo da $\mathrm{P}(X^* \ge Y^*) = P(X \ge F_Y{}^{-1}\big(F_X(x)\big) = P(F_Y\big(X \ge F_X(x)\big) = 1$ kako smo i tvrdili.

□

5. Drugostepena stohastička dominacija

Uvodeći dodatnu pretpostavku da investitor ima i odbojnost ka riziku posmatramo samo one funkcije korisnosti koje su neopadajuće i konkavne. Na ovaj način dolazimo do koncepta drugostepene stohastičke dominacije i ujedno dodavanjem informacije značajno smanjujemo skup efikasnih investicija.

Definicija 5.1 (drugostepena stohastička dominacija). Slaba relacija drugostepene stohastičke dominacije, u oznaci $\succcurlyeq_{SSD}$ se definiše sa:

$$X \succcurlyeq_{SSD} Y \Leftrightarrow F_X^{(2)}(\eta) \leq F_Y^{(2)}(\eta) \quad \text{za sve } \eta \in \mathbb{R}$$

gde je $F_X^{(2)}$ dato sa:

$$F_X^{(2)}(\eta) = \int_{-\infty}^{\eta} F_X(\xi)d\xi, \text{za sve } \eta \in \mathbb{R}$$

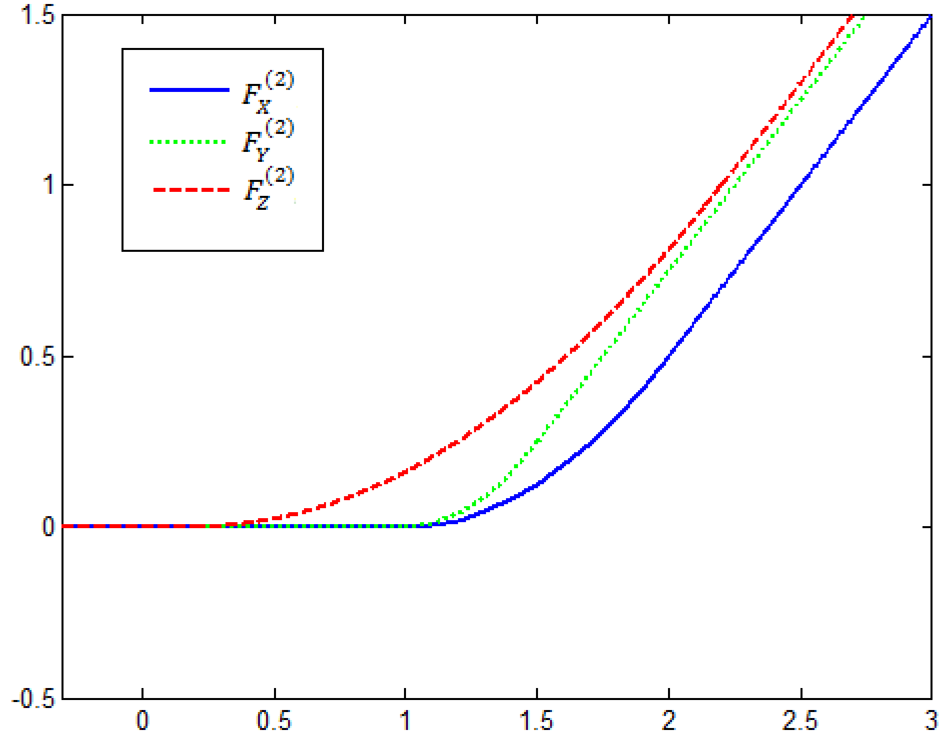
Definicija 5.2 Neka su X i Y slučajne promenljive. Kažemo da X dominira Y prema SSD pravilu (drugostepeno dominira), u oznaci $X \succ_{SSD} Y$, ako i samo ako je $F_X^{(2)}(\eta) \leq F_Y^{(2)}(\eta)$, za sve $\eta \in \mathbb{R}$ i $F_X^{(2)}(\eta_0) < F_Y^{(2)}(\eta_0)$, za neko $\eta_0 \in \mathbb{R}$.

Primer 5.1 Vratimo se na uniformne raspodele koje smo definisali u primeru kod prvostepene stohastičke dominacije, $X: U(1,2)$, $Y: U(1,1.5)$ i $Z: U(0.2,2.2)$. Da bi uporedili odnos drugostepene stohastičke dominacije definišemo sledeće funkcije

$$\int_{-\infty}^{x} F_X(y)dy = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ \dfrac{x^2}{2} - x + 0.5, & 1 \leq x \leq 2 \\ x - 1.5, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{x} F_Y(y)dy = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 1, & 1 \leq x \leq 1.5 \\ x - 1.25, & x \geq 1.5 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{x} F_X(y)dy = \begin{cases} 0, & x \leq 0.2 \\ \frac{x^2}{4} - 0.1x + 0.01, & 0.2 \leq x \leq 2.2 \\ x - 1.2, & x \geq 2.2 \end{cases}$$



Slika 5.1: *Prikaz funkcija* $F_X^{(2)}, F_Y^{(2)}$ *i* $F_Z^{(2)}$ *za uniformne slučajne promenljive X,Y i Z*

Kao što znamo $X \succcurlyeq_{FSD} Y$,pa onda sledi $X \succcurlyeq_{SSD} Y$, primetimo da obrnut smer ne važi. Vidimo da $Y \succcurlyeq_{SSD} Z$ i $X \succcurlyeq_{SSD} Z$ a kao što znamo $Y \not\succcurlyeq_{FSD} Z$ i $X \not\succcurlyeq_{FSD} Z$ pa možemo zaključiti da je relacija drugostepene stohastičke dominacije „jača“ od relacije prvostepene stohastičke dominacije.

Primer 5.2 Posmatrajmo dve investicione alternative slično kao kod prvostepene dominacije:

Investicija A		Investicija B	
ishod	verovatnoća	ishod	Verovatnoća
2	1/3	3	1/3
4	1/3	4	1/3
7.5	1/3	6.5	1/3

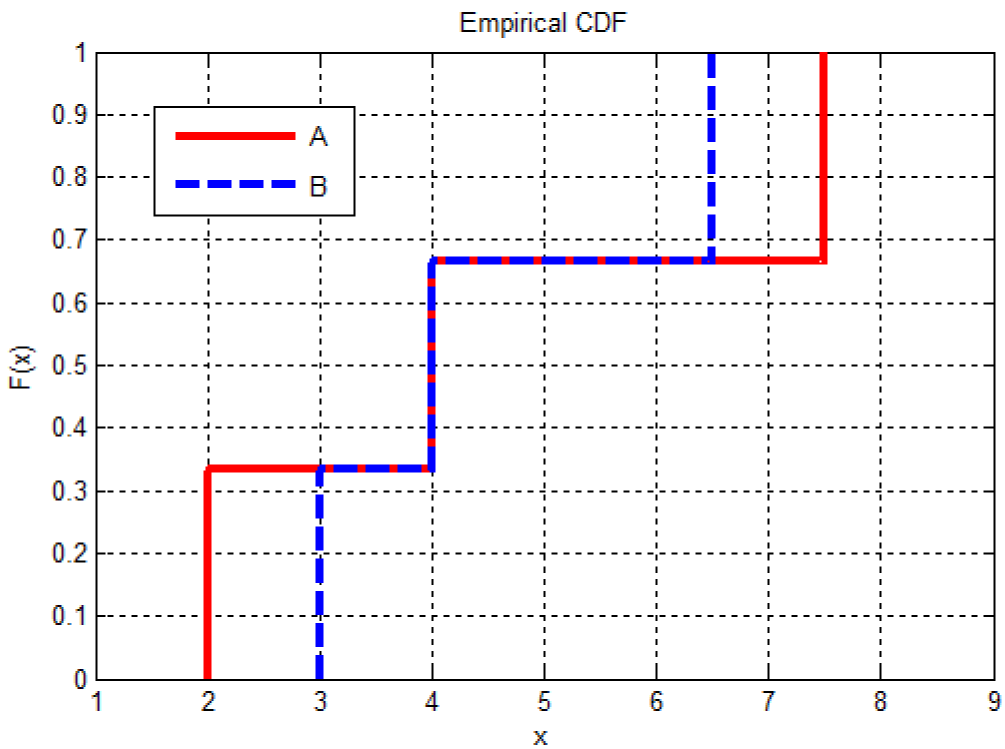
Tabela 5.1:*Prinosi i verovatnoće za investicije A i B*

i njihove kumulativne verovatnoće:

Prinos	Funkcija raspodele	
R	A	B
2	1/3	0
3	1/3	1/3
4	2/3	2/3
6.5	2/3	1
7.5	1	1

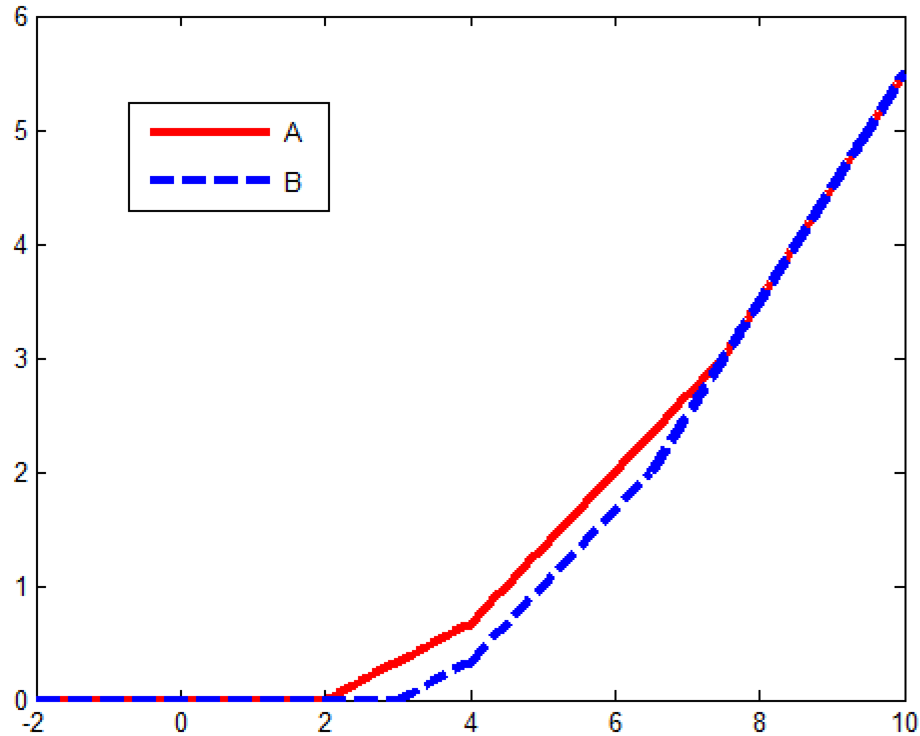
Tabela 5.2*: Funkcije raspodele za investicije A i B*

Uporedimo kumulativne verovatnoće koje su prikazane u prvoj koloni Tabele 5.2. Za stopu prinosa od 2% *A* ima veću verovatnoću ostvarenja lošijeg rezultata od *B*, dok za stopu prinosa od 6.5% *B* ima veću verovatnoću ostvarenja nižeg prinosa. Dakle, ova dva projekta ne možemo da rangiramo pomoću prvostepene stohastičke dominacije.



Slika 5.2: *Funkcije raspodele za investicije A i B, i prikaz nepostojanja prvostepene dominacije*

Da bismo rangirali *A* i *B* potrebno je da znamo da li je za investitora veća verovatnoća ostvarenja lošijeg rezultata između 2% i 3% važnija od verovatnoće ostvarenja lošijeg rezultata u intervalu od 6.5% do 7.5%. Ukoliko pretpostavimo da je investitor odbojan ka riziku, tada će on izabrati investiciju *B* jer mu ona omogućava da u najlošijem scenariju ostvari prinos od 3%, dok bi za *A* dobio 2%. Ako se desi drugi najlošiji scenario investitor dobija po 4% u oba slučaja, dok u najboljem scenariju dobija 7.5 od A a 6.5 od B. Ako je investitor odbojan ka riziku on će žrtvovati 1% dodatnog prinosa na višem nivou prinosa da bi ostvario 1% dodatnog prinosa na nižem nivou prinosa. Slika 5.3 prikazuje drugostepenu stohastičku dominaciju.



Slika 5.3: *Prikaz funkcija* $\boldsymbol{F_A^{(2)}}$, ***i*** $\boldsymbol{F_B^{(2)}}$ *za investicije A i B*

Polazeći od skupa svih raspoloživih investicija, koji se naziva ***dopustivi skup***, putem relacija stohastičke dominacije vršimo njegovu podelu na dva disjunktna skupa: skup neefikasnih i skup efikasnih investicija.

Definicija 5.3 Neka je Q skup slučajnih promenljivih. Slučajna promenljiva $X \in$ Q je SSD(FSD)-efikasna u Q, ako ne postoji slučajna promenljiva u $Y \in$ Q, takva da je $X \succ_{FSD} Y (Y \succ_{FSD} X)$.

Sledećim primerom se može ilustrovati prethodna definicija:

Neka je dat skup slučajnih promenljivih Q $= \{A, B, C, D, E, F, G\}$ I neka važe sledeće relacije prvostepene(drugostepene)stohastičke dominacije:

$$A \succ_{FSD} B, A \succ_{FSD} C, A \succ_{FSD} E, B \succ_{FSD} C, G \succ_{FSD} F$$

Na osnovu prethodne definicije možemo zaključiti da su promenljive $A, D\ i\ G$ FSD(SSD) efikasne u Q.

Lema 5.1

$$X \succcurlyeq_{SSD} Y \Longrightarrow E[X] \geq E[Y]$$

Dokaz. Opet ćemo X i Y posmatrati na intervalu $I = [\underline{x}, \bar{x}], -\infty < \underline{x} < \bar{x} < \infty$.

Dokaz slično kao kod Leme 4.2 sledi iz činjenice da je $E[X] = \int_0^{\bar{x}} \bar{F}_X(t)dt$, ako $\underline{x} \geq 0$, i $E[X] = \int_0^{\bar{x}} dt - \int_{\underline{x}}^{\bar{x}} F_X(t)dt$ ako $\underline{x} < 0$, pri čemu je, opet, $\bar{F}_X(t) = 1 - F_X(t)$.

Teorema 5.1 *Pretpostavimo da*

1. $u(x)' > 0$ *(investitor preferira veću zaradu)*
2. $u(x)'' < 0$ *(investitor je odbojan prema riziku)*

Onda, X je poželjnije od Y ($E[u(X)] \geq E[u(Y)]$) ako i samo ako $X \succcurlyeq_{SSD} Y$.

Dokaz. Prvo, zbog napomene je da je $u(x)' > 0$ i $u(x)'' < 0$, $u(x)'$ je pozitivna strogo opadajuća funkcija, dakle ograničenje $u(\infty)' = \lim_{x\to\infty} u(x)'$ mora postojati.
Sada je:
$E[u(X)] - E[u(Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\,[\varphi_X(t) - \varphi_Y(t)]dy$.

Koristeći parcijalnu integraciju dobijamo:

$$E[u(X)] - E[u(Y)] = \left[u(t)[F_X(t) - F_Y(t)]\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} u'(t)\,[F_X(t) - F_Y(t)]dt$$

$$= 0 - \int_{-\infty}^{\infty} u'(t)\,[F_X(t) - F_Y(t)]dt$$

$$= -\left[u'(t) \int_{-\infty}^{x} \left(F_X(t) - F_Y(t)\right) dt\right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} u''(v) \int_{-\infty}^{x} (F_i(t) - F_j(t))dtdv$$

$$= -u'(\infty) \int_{-\infty}^{\infty} (F_X(t) - F_Y(t))dt + \int_{-\infty}^{\infty} u''(v) \int_{-\infty}^{x} (F_X(t) - F_Y(t))dtdv \,.$$

Primetimo da:

1. $u'(\infty) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} (F_X(t) - F_Y(t))dt < 0$
3. $u''(v) < 0$
4. $\int_{-\infty}^{x} (F_X(t) - F_Y(t))dt < 0$

Otuda sledi da $E[u(X)] - E[u(Y)] > 0$.

□

Primer 5.3 Primetimo da funkcija $u(v) = v$ ne zadovoljava sve pretpostavke prethodne teoreme, pa je ne možemo koristiti na osnovu tog tvrđenja. Ipak, iste metode u dokazu te teoreme se mogu primeniti u ovom specifičnom slučaju, koristeći parcijalnu integraciju imamo:

$$E[X] - E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} t\,[\varphi_X(t) - \varphi_Y(t)]dt$$

$$= \big[t[F_X(t) - F_Y(t)]\big]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} [F_X(t) - F_Y(t)]\,dt$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} [F_X(t) - F_Y(t)]\,dt \geq 0$$

Obzirom da je $\int_{-\infty}^{\infty}[F_X(t) - F_Y(t)]\,dt \leq 0$. Zato je $E[X] \geq E[Y]$.

□

Teorema 5.2 *Ako $X \succcurlyeq_{SSD} Y$ onda postoje slučajne promenljive X^* i Y^* koje imaju istu raspodelu verovatnoća kao X i Y , i zadovoljavaju "više rizičnu" relaciju*

$$P\left(E\left[Y^* \,\middle|\, X^*\right] \leq X^*\right) = 1.$$

Teorema 5.3 (jedan presek i SSD) *Pretpostavimo da su X i Y nenegativne slučajne promenljive čije funkcije raspodele imaju tačno jedan presek, sa $F_X(x) \leq F_Y(x)$ za malo, i $F_X(x) \geq F_Y(x)$ za veliko x. Onda $X \succcurlyeq_{SSD} Y \Leftrightarrow E[X] \geq E[Y]$.*

Dokaz

Posmatramo X i Y na istom intervalu kao kod Leme 4.1 i Leme 4.2, $I = [\underline{x}, \bar{x}], -\infty < \underline{x} < \bar{x} < \infty$. Lema 4.1 već pokazuje da $X \succcurlyeq_{SSD} Y \Longrightarrow E[X] \geq E[Y]$. Stoga, treba samo dokazati da $E[X] \geq E[Y] \Longrightarrow X \succcurlyeq_{SSD} Y$. Iz pretpostavke o t*ačn*o jednom preseku funkcija raspodela odmah sledi da $\int_{\underline{x}}^{z}[\overline{F_X}(t) - \overline{F_Y}(t)]dt \geq 0$ za sve $z \in [\underline{x}, c)$, gde c označava tačku preseka. Sada ćemo pokazati da se ovaj odnos proširuje i na sve $z \in [c, \bar{x}]$. Neka $z \in [\underline{x}, c)$. Zbog pretpostavke teoreme važi

$$0 \leq E[X] - E[Y] = \int_0^{\bar{x}} [\overline{F_X}(t) - \overline{F_Y}(t)]dt$$

$$= \int_0^{z} [\overline{F_X}(t) - \overline{F_Y}(t)]dt + \int_z^{\bar{x}} [\overline{F_X}(t) - \overline{F_Y}(t)]dt$$

$$\leq \int_0^{z} [\overline{F_X}(t) - \overline{F_Y}(t)]dt.$$

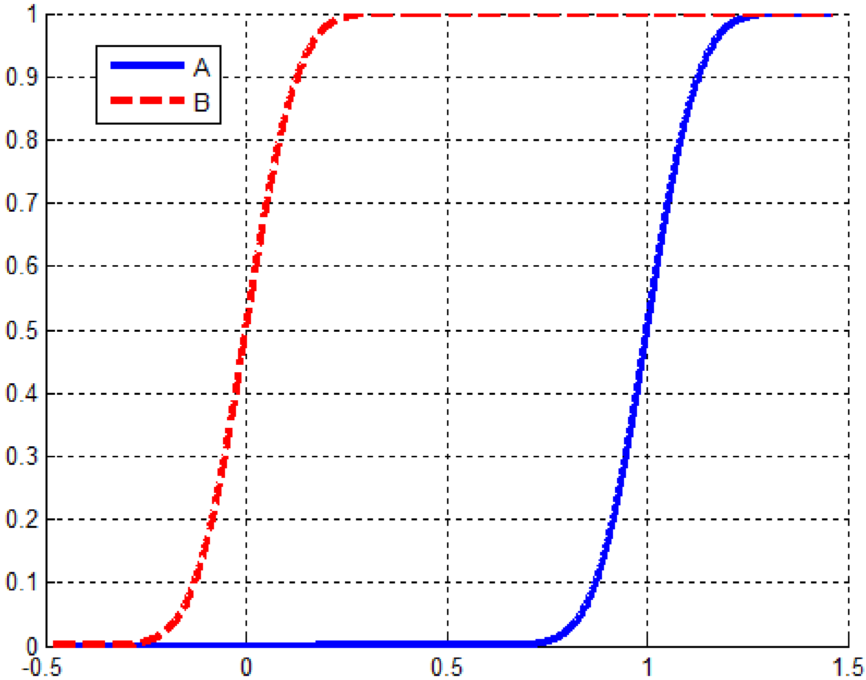
Dakle, $\int_0^z [\overline{F_X}(t) - \overline{F_Y}(t)]dt \geq 0$ važi za sve z.

Teorema 5.4 *Pretpostavimo da X i Y imaju normalne raspodele, i Y ima veću varijansu ili manju očekivanu vrednost nego X. Onda $X \succcurlyeq_{SSD} Y$.*

Dokaz

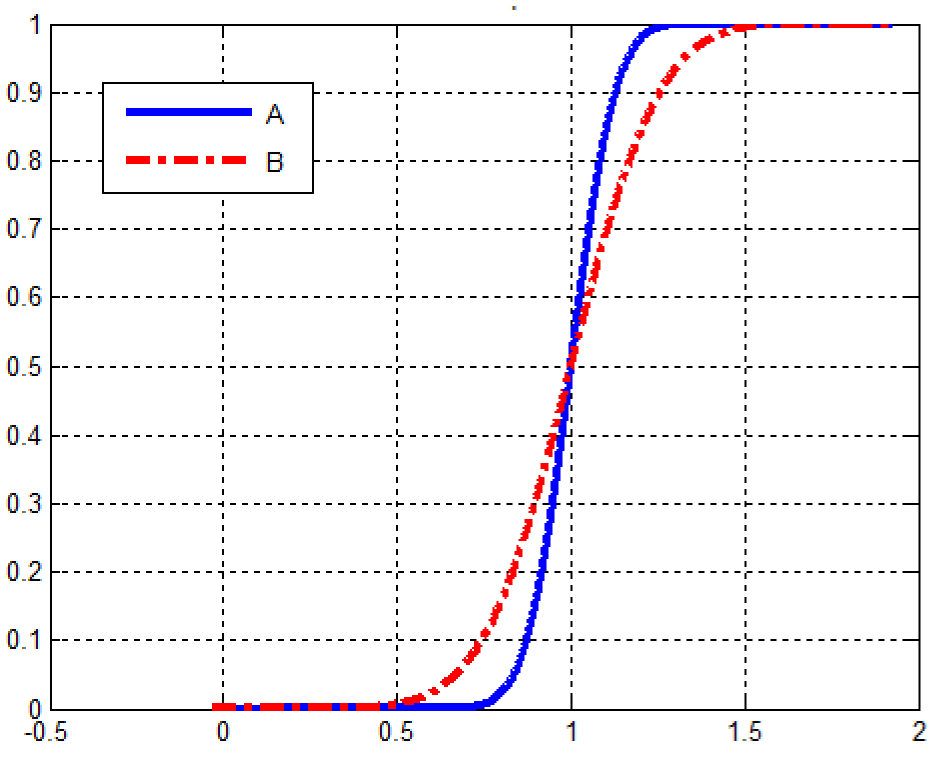
Ako su varijanse iste, a očekivna vrednost od X je veća nego očekivna vrednost od Y, onda već da znamo da $X \geq_{FSD} Y$ što implicira da važi i SSD. Ako je varijansa od X manja pri čemu su očekivane vrednosti iste, onda ove dve funkcije raspodela imaju jedan presek i iz Teoreme 5.3 sledi da $X \geq_{SSD} Y$. Ako X ima i veću očekivanu vrednost i manju varijansu nego Y, tvrdnja sledi iz tranzitivnosti stohastičke dominacije, koja se nalazi u Teoremi 5.5, koja će u nastavku biti predstavljena.

Primer 5.4 Posmatrajmo slučajne promenljive sa normalnim raspodelama, sa jednakim varijansama, a različitim očekivanjima. A: $N(1,1)$, B: $N(0,1)$, iz slike vidimo da slučajna promenljiva A prvostepeno dominira u odnosu na B, iz čega sledi i drugostepena dominacija.



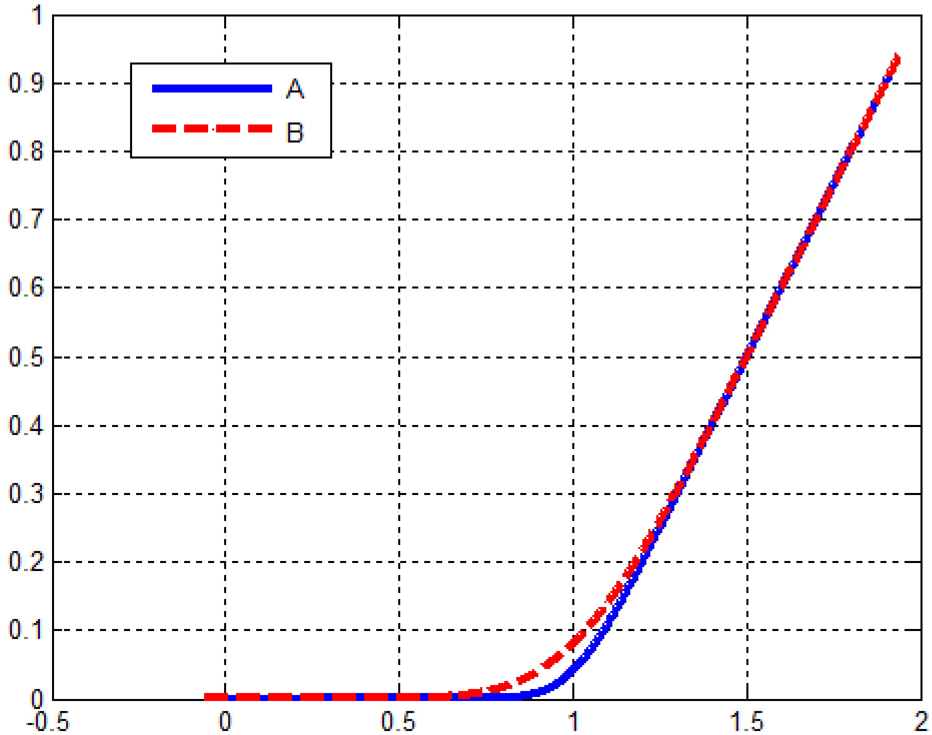
Slika 5.4 Funkcije raspodela za $\boldsymbol{A}: \boldsymbol{N}(\mathbf{1}, \mathbf{1})$ ***i*** $\boldsymbol{B}: \boldsymbol{N}(\mathbf{0}, \mathbf{1})$

Primer 5.5 Sada posmatramo drugi slučaj, dve slučajne promenljive sa normalnim raspodelama koje imaju različite varijanse dok su ima očekivanja ista. Uzmemo na primer $A: N(1,1)$, $B: N(1,2)$.



Slika 5.5 Funcije raspodela za $\boldsymbol{A}: \boldsymbol{N}(\mathbf{1}, \mathbf{1})$ *i* $\boldsymbol{B}: \boldsymbol{N}(\mathbf{1}, \mathbf{2})$

Vidimo da ni jedna slučajna promenljiva prvostepeno ne dominira u odnosu da drugu. Međutim iz sledećeg grafika se vidi da A drugostepeno dominira nad B, što i govori teorema 5.4:



Slika 5.6: *Prikaz funkcija* $\boldsymbol{F_A^{(2)}}$, ***i*** $\boldsymbol{F_B^{(2)}}$ *za* $\boldsymbol{A}$: $\boldsymbol{N(1,1)}$ *i* $\boldsymbol{B}$: $\boldsymbol{N(1,2)}$

Stohastička dominacija je očuvana kada su originalne slučajne promenljive pomnožena sa konstantom ili kada još jedna nezavisna slučajna promenljiva dodata.

Teprema 5.5 (Tranzitivnost). *Razmotrimo tri nezavisne nenegativne slučajne promenljive,* X, Y *i* W*, i linearne kombinacije* $aX + bW$ i $aY + bW$*, gde su* $a > 0, b \geq 0$*. Onda:*

1. $X \succcurlyeq_{FSD} Y \implies (aX + bW) \succcurlyeq_{FSD} (aY + bW)$
2. $X \succcurlyeq_{SSD} Y \implies (aX + bW) \succcurlyeq_{SSD} (aY + bW)$

6. **Komparativna statika rizika**

6.1 Rangiranje transformacija slučajnih promenljivih

Pretpostavimo da je slučajna promenljiva transformisana pomoću determinističke funkcije $t(x)$. Neka t bude monotono rastuća (da bi se osiguralo da transformacija ne preokreće preferencije rangiranja) i diferencijabilna.
Najpre navodimo dva rezultata koji pružaju potrebne i dovoljne uslove za FSD i SSD dominaciju $t(X)$ nad X.

Teorema 6.1.1 *Posmatrajmo transformaciju* $t(X)$. *Definišemo* $k(X) = t(X) - X$. *Onda:*

$$t(X) \succcurlyeq_{FSD} X \Leftrightarrow k(x) \geq 0, \forall x$$

$$t(X) \succcurlyeq_{SSD} X \Leftrightarrow \int_0^x k(t)dF(t) \geq 0, \forall x$$

Stroga dominacija zahteva striktne nejednakosti za neko x.

Dokaz. Dokažimo tvrđenje koje se odnosi na FSD. Primetimo da

$$P(t(X) > x) = P(X > t^{-1}(x)) > P(X > x)$$

$$\Leftrightarrow t^{-1}(X) < x \Leftrightarrow X < t(x).$$

□

Često korišćene transformacije su afine transformacije, $t(x) = \alpha + \beta x$.
Primer 6.1.1 ("istezanje") Posmatramo afine transfofmaciju slučajne promenljive X:

$$t(X) = \alpha + \beta X,$$

gde je $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 1$, pri čemu je najmanje jedna nejednakost stroga. Onda $t(X) \succ_{FSD} X$. Očigledno $t(X)$ može se posmatrati kao "istezanje " od X.
Direktan dokaz sledi iz:

$$P(t(X) > z) = P(X > \frac{z-\alpha}{\beta}) \geq P(X > z)$$

što već jeste posledica teoreme 6.1.

6.2 Komparativna statika rizika

Komparativna statika analizira promenu optimalnog izbora pojedinca pri promeni jedne varijable dok ostale varijable ostaju nepromenjene. Pri tome se ne bavimo dinamikom, tj, načinom uspostavljanja novog optimuma, već samo poredimo dva optimalna izbora. U ovom odeljku ćemo postaviti temelje za komparativnu statiku rizika, za klasu problema odlučivanja. Rezultati će se onda koristiti u analizi raznih tipičnih primena.

Pretpostavimo da donosilac odluke ima funkciju cilja

$$V(a, X) \coloneqq U(\pi(a, X)),$$

gde je a akcija, i $\pi(a, X)$ slučajan ishod koji zavisi od akcije a i nenegativne slučajne promenljive X. Funkcija π (koja može predstavljati funkciju profita firme) je strogo konkavna u a i $\pi_a = 0$ je zadovoljeno za neko konačno a, za svako x, gde je π_a izvod prvog reda funkcije π po a.
Donosilac odluke maksimizira očekivanu korisnost

$$\max_{\alpha \geq 0} E[V(a, X)]$$

Pretpostavićemo da postoji unutrašnje rešenje α^* koje rešava

$$E[V_a(a^*, X)] = 0 \quad \text{i} \quad E[V_{aa}(a^*, X)] < 0,$$

gde su V_a i V_{aa} odgovarajući parcijalni izvodi prvog i drugog reda.

Ključno je da mi želimo da saznamo kako se a^* menja ako je slučajna promenljiva X izmenjena FSD i SSD transformacijama. U tu svrhu razmotrimo konveksnu linearnu kombinaciju X i $t(X)$:

$$Z(\theta) \coloneqq \theta t(X) + (1-\theta)X, \qquad \theta \in [0,1]$$

$$= X + \theta k(X),$$

gde je

$$k(X) = t(X) - X.$$

Analiziraćemo funkciju rešenja $a^*(\theta)$

$$a^*(\theta) = arg \max_a E[V(a, Z(\theta))],$$

naročito njegov izvod u tački $\theta = 0$. Znak $a^{*\prime}(0)$ određuje efekat transformacije $t(X)$ na optimalnoj akciji.

Budući da $a^*(\theta)$ rešava prvostepeno stanje, $E[V_a] = 0$, po teoremi o implicitnoj funkciji mora da važi

$$a^{*\prime}(0) = \frac{E[V_{ax}k]}{E[V_{aa}]},$$

gde se sve funkcije ocenjuju u tački (a^*, X). Znamo da $E[V_{aa}] < 0$. Prema tome

$$sign\ a^{*\prime}(0) = sign\ E[V_{ax}k],$$

i komparativni statički problem se svodi na određivanje znaka $E[V_{ax}k]$.

Teorema 6.1 (Prva teorema za FSD transformacije) *Optimalna akcija se povećava (smanjuje), tj.* $a^{*\prime}(0) \geq 0$ $(a^{*\prime}(0) \leq 0)$ *za sve FSD transformacije, ako* $V_{ax}(a^*, X) \geq 0$ $(respektivno\ V_{ax}(a^*, X) \leq 0)$ *svuda.*

Teorema 6.2 (Prva teorema za SSD transformacije) *Optimalna akcija se povećava (smanjuje), tj.* $a^{*\prime}(0) \geq 0$ $(a^{*\prime}(0) \leq 0)$ *za sve SSD transformacije, ako* $V_{ax}(a^*, X) \geq 0$ *i* $V_{axx}(a^*, X) \leq 0$ $(respektivno\ V_{ax}(a^*, X) \leq 0\ i\ V_{axx}(a^*, X) \geq 0)$ *svuda.*

Dokaz. Korišćenjem parcijalne integracije dobijamo

$$E[V_{ax}k] = \int_0^{\bar{x}} V_{ax}(a^*, x) \frac{d}{dx}\left(\int_0^x k(t)dF(t)\right)dx$$

$$= V_{ax}(a^*, \bar{x}) \int_0^{\bar{x}} k(x)dF(x) - \int_0^{\bar{x}} V_{axx}(a^*, x) \int_0^x k(t)\, dF(t)dx.$$

Kako je $\int_0^x kdF \geq 0, \forall x$, na osnovu SSD, znak od $E[V_{ax}k]$ je nedvosmislen kada $V_{ax}(a^*, \bar{x}) < 0$ i $V_{axx} \geq 0$ za sve x, i tvrdnja sledi neposredno iz ovoga.

Za tumačenje ovih rezultata uvodimo pojam uopštene averzije prema riziku:

$$R = \frac{-U''\pi_a\pi_x}{U'}.$$

Sada, V_{ax} i V_{axx} mogu biti ponovo napisane na sledeći način

$$V_{ax} = U'(\pi_{ax} - R)$$

$$V_{axx} = U'(\pi_{axx} - R_x) + U''\pi_x(\pi_{ax} - R).$$

Stoga uslovi u Teoremi 7.1 i Teoremi 7.2 mogu biti zamenjeni uslovima koji se odnose na funkciju π i uopštenu averziju prema riziku R.

Na primer, za $\pi(a, X) = aX$, imamo $\pi_{ax} = 1$ i zato $a^{*\prime}(0) > 0$ za sve SSD transformacije ako $R(a^*, x) < 1$, $R_x(a^*, x) > 0$.

Uslovi navedeni u Teoremi 6.1 i Teoremi 6.2 su dovoljni za znak $a^{*\prime}(0)$, ali ne i potrebni. To ukazuje da ima još prostora za druge dovoljne uslove. Završićemo sa dva naredna rezultata koji su korisni u nekoliko primena. Ključni zahtevi su da $k(X)$'$\leq$ 0 i da apsolutna averzija prema riziku, $A = -U''/U'$, mora biti monotono opadajuća. Dok je naglasak prethodnih uslova bio na stepenu averzije prema riziku, naglasak sledećih uslova je na funkcionalnom obliku pravila transformacije.

Teorema 6.3 (Druga teorema za FSD transformacije) *Optimalna akcija raste za sve FSD transformacije ako su zadovoljeni sledeći uslovi:*

1. $U' > 0, U'' \leq 0, A' \leq 0$
2. $\pi_x > 0, \pi_{xx} \leq 0, \pi_{ax} \geq 0$
3. $k'(x) \leq 0$.

Dokaz. Koristeći apsolutnu averziju prema riziku A, V_{ax} može biti napisano u formi

$$V_{ax} = U'(\pi_{ax} - A\pi_x\pi_a)$$

Dakle

$$E[V_{ax}k] = \int_0^{\bar{x}} U' \pi_{ax} k dF - \int_0^{\bar{x}} U' A\pi_x \pi_a k dF.$$

Prvi integral je očigledno nenegativan, za sve FSD transformacije. U cilju utvrđivanja znaka drugog integrala, primetimo dve činjenice.

1) $A\pi_x k$ je pozitivno i opadajuće u x;

2) $U'\pi_a$ je negativno za malo x, recimo za sve $x < x_1$, pa se tako prvostepeni uslov $\int U'\pi_a dF = 0$ održava. Kombinujući ove činjenice, sledi da

$$\int_0^{x_1} (Ak\pi_x) U' \pi_a dF \leq Ak\pi_x \Big|_{x = x_1} \int_0^{x_1} U' \pi_a dF$$

$$\int_{x_1}^{\bar{x}} (Ak\pi_x) U' \pi_a dF \leq Ak\pi_x \Big|_{x = x_1} \int_{x_1}^{\bar{x}} U' \pi_a dF$$

Dakle, zbog prvostepenog uslova u vezi sa a

$$\int_0^{\bar{x}} (Ak\pi_x) U' \pi_a dF \leq Ak\pi_x \Big|_{x = x_1} \int_0^{\bar{x}} U' \pi_a dF = 0$$

Samim tim je $E[V_{ax}k] \geq 0$.

□

Sličan rezultat važi za sve SSD transformacije , ukoliko pretpostavimo jači uslov od uslova da π_a ne sme biti rastući i mora biti konkavan u x.

Teorema 6.4 (Druga teorema za SSD transformacije) *Optimalna akcija raste za sve SSD transformacije ako je pored uslova navedenih u Teoremi 6.3 zadovoljeno i* $\pi_{axx} \leq 0$.

Dokaz. Pogledajmo integral iz prethodne teoreme

$$\int_{\underline{x}}^{\bar{x}} U' \pi_{ax} k dF$$

Koristeći parcijalnu integraciju može biti zapisano kao

$$\int_{\underline{x}}^{\bar{x}} U' \pi_{ax} k dF = \int_{\underline{x}}^{\bar{x}} U' \pi_{ax} \frac{d}{dx}\left(\int_{\underline{x}}^{x} k(y)\, dy\right) dF(x)$$

$$= U'\pi_{ax} \int_{\underline{x}}^{x} k(y)\, dy \bigg|_{x\,=\,\overline{x}} - \int_{\underline{x}}^{\bar{x}} (U''\pi_{ax} + U'\pi_{axx}) \int_{\underline{x}}^{x} k(y)\, dy dF(x)$$

Tvrđenje se dokazuje korišćenjem argumenta kao u prethodnom dokazu.

□

Na kraju, rezimirajmo dovoljne uslove za $a^{*\prime}(0) \geq 0$, u tabeli:

Teoreme	FSD Transformacije	SSD Transformacije
6.1 i 6.2	$V_{ax} \geq 0$	$V_{axx} \leq 0, pored\ uslova\ za\ FSD$
6.3 i 6.4	$A', k', \pi_{xx} \leq 0, \pi_x, \pi_{xx} \geq 0$	$\pi_{axx} \leq 0, pored\ uslova\ za\ FSD$

Tabela 6.1

Oznake: $A = -\frac{U''}{U'}, R = A\pi_a\pi_x, V_{ax} = U'(\pi_{ax} - R),$
$V_{axx} = U'(\pi_{axx} - R_x) + U''\pi_x(\pi_{ax} - R)$

7. Primene

U uvodu smo naveli da je teorija stohastičke dominacije korisna u mnogim oblastima ekonomije. Da je tako, videćemo u ovom poglavlju na nekim primenama.

7.1 Izbor portfolia I

Portfolio predstavlja skup finansijske imovine pojedinca, sastavljen od različitih finansijskih instrumenata. Glavni razlog za sastavljanje portfolia je postizanje željenih finansijskih rezultata, uz definisanje nivoa rizika koji je pojedinac spreman prihvatiti. Portfolio svakog pojedinca trebao bi ocrtavati finansijske potrebe i biti usklađen sa trenutnim, kao i sa ciljanim budućim finansijskim položajem pojedinca. Portfolio je skup finansijskih sredstava koje neki pojedinac ili preduzeće poseduje. Može se sastojati od novca (gotovina, depoziti...) i od vrednosnih papira (deonice, obveznice...).

Portfolio, dakle, predstavlja skup svih hartija od vrednosti koje posedujemo. Neka imamo $A_1, \dots, A_n$ hartija od vrednosti sa cenama $P_1, \dots, P_n$. Ako sa K_1 obeležimo koliko komada A_1 smo kupili, sa K_2 obeležimo koliko komada A_2 smo kupili, i tako redom, K_n predstavlja koliko komada hartija A_n smo kupili, onda

$$\prod = \sum_{k=1}^{n} K_i \, P_i$$

predstavlja vrednost portfolia. Udeo i-te hartije u čitavom portfoliu je

$$\omega_i = \frac{K_i P_i}{\prod}$$

i $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n$ se nazivaju težinski koeficijenti portfolio, pa je portfolio predstavljen na sledeći način:

$$\pi = \sum_{k=1}^{n} \omega_i \, P_i$$

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_i = 1.$$

Investitor retko ulaže u jedan finansijski instrument, već obično investira u skup finansijskih instrumenata koji se naziva portfolio. Najprostiji portfolio se sastoji od dva instrumenta od kojih jedan predstavlja rizičnu, a drugi nerizičnu aktivu. Nerizična aktiva je teorijski koncept, jer je skoro nemoguće naći aktivu koja ne nosi nikakav rizik. Obično se kao aproksimacija nerizične aktive uzimaju obveznice trezora SAD kao najsigurniji oblik investiranja. S obzirom da rizična aktiva inkorporira određeni rizik, ona mora da daje i veći prinos u odnosu na nerizičnu aktivu.

Sada ćemo pokazati kako stohastička dominacija pomaže u odabiru portfolia. Investitor odbojan na rizik razmatra da uloži bogatstvo w između dva aktive: jednu manje rizičnu aktivu sa sigurnim povraćajem r, i drugu rizičnu sa slučajnim povraćajem $r + X$. Nisu izvodljive kratke prodaje. Kratka prodaja (short selling) podrazumeva prodaju nekog sredstva koje investitor ne poseduje (trgovina pozajmljenim sredstvom). Kratkom prodajom se ostvaruje profit ako cena pozajmljenog sredstva opada, u suprotnom dolazi do gubitka. Ovo je jedan od razloga zašto je kratka prodaja zabranjena na pojedinim finansijskim tržištima.
Problem odlučivanja je da se izabere ona investicija u rizičnoj aktivi $a \in [0, w]$, tako da se maksimizira očekivana korisnost:

$$\max_a E[U(\pi(a, X))], \text{gde je } \pi(a, X) = wr + aX.$$

Pretpostavimo da važi $E[X] > 0$ da bi se osiguralo unutrašnje rešenje $a^* \in (0, w)$.
Evidentno je da

$$\pi_a = X, \pi_{ax} = 1, \pi_{axx} = 0, \pi_x = a, \pi_{xx} = 0, R = -\frac{U''}{U'} aX.$$

Stoga je

$$V_{ax} = U'(1 - R), V_{axx} = -U'R_x + U''a(1 - R).$$

Teorema 7.1.1 *Ulaganje u rizičnu aktivu će porasti ako*

1. *njen povraćaj podleže FSD transformaciji, i* $R < 1$ *svuda*
2. *njen povraćaj podleže SSD transformaciji, i* $R < 1, R_x > 0$ *svuda*

Dva uslova u Teoremi 7.1.1 su prilično restriktivna. Zaista, $R < 1$ isključuje neke najčešće korišćene funkcije korisnosti, a uslov $R_x > 0$ je u suprotnosti sa uobičajenom pretpostavkom o smanjivanju odbojnosti prema riziku.

Međutim, ograničavanjem navedenih transformacija o povraćaju rizične aktive, može se pokazati da potražnja za rizičnom aktivom raste pod razumnim pretpostavkama koje se tiču stepena averzije prema riziku.
Kao što smo ranije definisali u poglavlju 6, *t(X)* predstavlja monotono rastuću funkciju i *k(X)=t(X)-X* i to ćemo koristiti u narednoj teoremi.

Teorema 7.1.2 *Ulaganje u rizičnu aktivu će se povećati ako povraćaj podleže SSD transformaciji, sa* $t'(x) \leq 1(ekvivalentno\ k'(x) \leq 0)$, *i apsolutna averzija rizika se smanjuje* $(A' \leq 0)$.

Za ilustraciju, pretpostavimo da je premija na rizičnu akciju povećana za fiksan iznos θ, za sve realizacije na X. Ovo dovodi do transformacije $t(X) = X + \theta$. Otuda $k(X) = \theta$, $k'(X) = 0$ i potražnja za rizičnom akcijom će se povećati, što zaključujemo iz prvog dela Teoreme 7.1.2. Kao još jedna ilustracija pretpostavimo da zarade na rizičnu akciju podležu porezu na dohodak. Pretpostavimo da se porez smanjuje na takav način da je smanjenje poreza veliko pri niskim realizacijama i malo za visoke realizacije. Onda $k(X) = t(X) - X > 0$ i $k'(X) = t'(X) - 1 < 0$. Opet, iz drugog dela Teoreme 7.1.2 sledi da će se potražnja za rizičnom aktivom povećati.

Zanimljivo, ako $t'(X) > 1$(ekvivalentno $k' > 0$), onda veći povrat rizične akcije može dovesti investitora u stanje da poseduje manje tih akcija. Tumačenje ovog paradoksalnog efekta koristi razliku između prihoda i efekta zamene. Činjenica da $t'(X) \geq X(k(X) \geq 0)$ podrazumeva da je efekat supstitucije pozitivan, što ukazuje da a^* bi trebalo povećati. Kako god, ako $t' > 1(k' > 0\,)$, transformisana slučajna promenljiva je rizičnija, i efekat prihoda može biti negativan i veći od efekta supstitucije.

7.2 Izbor portfolia 2

Korišćenjem mean-variance (MV) pristupa relativno je jednostavno saznati da li se isplati da se mešaju dve rizične aktive u portfolio, čak i ako bi jedna od aktiva bila strogo bolji izbor u slučaju da se bira samo jedna od njih. MV pristup međutim nije

dovoljno opšti. Zato pristupamo ovom pitanju, koristeći stohastičku dominaciju u rangiranju umesto MV pristupa.
Razmotrimo portfolie sastavljene od mešavine dve slučajne alternative. Interesuju nas uslovi pod kojima je diverzifikacija optimalna za sve rizik odbojne agente. Neka su ove dve alternative opisane sa dve nezavisne i pozitivne slučajne promenljive, X_1 i X_2. Onda, portfolio se karakteriše novom slučajnom promenljivom, $P(\lambda)$

$$P(\lambda) = \lambda X_1 + (1 + \lambda) X_2 \, .$$

Problem izbora portfolia je da se izabere $\lambda \in \mathbb{R}$ tako da se maksimizira investitorova očekivana korisnost, $E[U(P(\lambda))]$. Kažemo da je diversifikacija optimalna ako za sve konkavne funkcije funkcije korisnosti postoji $\lambda \in (0,1)$ za koje $E[U(P(\lambda))] > max\{E[U(P(0))], E[U(P(1))]\}$.

Teorema 7.2.1 *Neka su X_1 i X_2 dve nezavisne, identično raspodeljene slučajne promenljive. Tada se diverzifikacija isplati u jakom smislu tj. tako da*

$$E[U(P(\lambda))] > max\{E[U(P(0))], E[U(P(1))]\}, \forall \lambda \in (0,1).$$

Ali, da li se diverzifikacija isplati čak i ako, recimo $X_1 \geq_{SSD} X_2$? Iznenađujuće, odgovor je - DA, pod uslovom da dominacija nije preterana, objasnićemo kasnije šta to znači. Pre nego što nastavimo, mora se naglasiti da ovo pitanje ima smisla samo ako dve alternative imaju isto očekivanje: $E[X_1] = E[X_2]$. Ovo je potrebno prvo zbog toga što pretpostavka da $X_1 \geq_{SSD} X_2$ implicira $E[X_1] \geq E[X_2]$ iz Leme 5.1. Dakle, ako se $E[X_1]$ razlikuje od $E[X_2]$ onda bismo imali $E[X_1] > E[X_2]$. Ali onda, $\forall \lambda \in (0,1), EP(1) = E[X_1] > \lambda E[X_1] + (1-\lambda) E[X_2] = EP(\lambda)$, pa onda opet iz Leme 5.1, X_1 drugosepeno stohastički dominira $P(\lambda), \lambda \in (0,1)$, tako da tvrdnja ne može da važi. U svakom slučaju ,pretpostavka $E[X_1] = E[X_2]$ nije restriktivna. Ako je aktiva deljiva, to je samo stvar izbora jedinica .

Šta tačno mislimo kada kažemo da X_1 dominira nad X_2, ali ne preterano? Za potrebe formalizovanja ovog pojma, uvodimo još jednu slučajnu promenljivu. Neka su X_2 i Y nezavisne, jednako raspodeljene slučajne promenljive. Onda se kombinovanjem X_2 i Y dobija se nova slučajna promenljiva koja SSD dominira nad X_2. Koristeći ovu osobinu, napravićemo sledeću pretpostavku:

Pretpostavka *Postoji skup $S \subset (0,1), S \neq \emptyset$, tako da $\forall \lambda \in S$, $\tilde{P}(\lambda) = \lambda X_2 + (1-\lambda) Y$ drugostepeno stohastički dominira nad X_1.*

Ovo daje precizno značenje iskaza da X_1 SSD dominira X_2, ali ne preterano. Sada dolazimo do našeg glavnog rezultata “optimalnosti diverzifikacije”.

Teorema 7.2.2 *Neka su X_1 i X_2 dve nezavisne nenegativne slučajne promenljive sa jednakim očekivanjima. Pretpostavimo da $X_1 \geq_{SSD} X_2$ i da prethodna pretpostavka važi. Onda, za sve $\lambda \in S$, $P(\lambda) = \lambda X_1 + (1-\lambda)\, X_2$ SSD dominira nad X_2 kao i nad X_1.*

Dokaz.

U dokazu koristimo određene osobine "veštačkog " portfolia opisane u prethodnoj pretpostavci , koja podrazumeva konveksnu kombinaciju dve slučajne promenljive X_2 i Y, $\tilde{P}(\lambda) = \lambda X_2 + (1-\lambda)Y, \lambda \in S$. Pošto su X_2 i Y identično i nezavisno raspodeljene, verovatnoće raspodela $P(\lambda)$ i $\hat{P}(\lambda) = \lambda X_1 + (1-\lambda)Y$ moraju biti jednake. Dalje, primetimo da po Teoremi 5.5 (teorema o tranzitivnosti), $\hat{P}(\lambda) \geq_{SSD} \tilde{P}(\lambda)$. Kombinovanjem sa drugim pretpostavkama stižemo do sledećih SSD relacija:

$P(\lambda) = \lambda X_1 + (1+\lambda)X_2$

$>_{SSD} \lambda X_1 + (1+\lambda)Y = \hat{P}(\lambda)$

$>_{SSD} \lambda X_1 + (1+\lambda)Y = \tilde{P}(\lambda)$

$>_{SSD} X_1$

$>_{SSD} X_2$

Tvrdnja sledi iz tranzitivnosti stohastičke dominacije.

□

7.3 Aukcije

Aukcija je javno nadmetanje kupaca i prodavaca oko cene i drugih uslova kupoprodaje robe. Robe neujednačenog kvaliteta, i to: sirova koža, krzno, neprana vuna, duvan, proizvodi crne metalurgije, industrijske sirovine, kolonijalna roba i slično se najčešće putem aukcije prodaju. Takođe na ovaj način prodaje se i zaplenjena i havarisana roba. Putem aukcija prodaju se i antikviteti, umetničke slike, retki predmeti i slično, s tim što roba koja je predmet kupoprodaje mora biti na licu mesta.

Aukcije mogu biti organizovane za prodaju na veliko i malo. Na veliko se organizuju za raznovrsne nestardizovane proizvode, odnosno proizvode neujednačenog kvaliteta, a na malo uglavnom za antikvitete, umetničke slike i retke predmete.

Aukcije mogu biti organizovane u svim oblicima vlasništva, a najčešće su u privatnom vlasništvu. Pravilo je da obavezno unapred mora biti oglašeno mesto prodaje i naziv aukcije i agenta kao komisionara. Pre održavanja aukcijskog sastanka, roba se sortira po vrstama u lotove i u aukcijskim skladištima, odnosno na izložbenom mestima stavlja se na uvid zainteresovanim kupcima. Svaka partija robe nosi oznaku (lot) i upisana je u aukcijski katalog koji se stavlja na uvid potencijalnim kupcima, a najčešće su upisane i početne cene.

Po otvaranju aukcijskog sastanka, rukovodilac aukcije (koji je najčešće i njen vlasnik) obaveštava o početnoj ceni robe, a onda nastaje takmičenje prisutnih kupaca (aukcijski senzali, brokeri, makleri i slično) sve dok se ne postigne najveća cena robe. Roba se prodaje bez ikakve naknadne garancije kvaliteta, takva kakva je viđena i ugovorena. O prodaji robe sačinjava se zaključnica koja je osnov za plaćanje, a zatim se preuzima roba prodata na aukciji.

Postoji više vrsta online aukcija, a mi ćemo posmatrati sledeće dve vrste:

Engleska aukcija - započinje s niskom cenom koju postavlja prodavac. Kako rastu ponude, tako se povećava i cena. Proizvod je prodat onom ponuđaču koji je ponudio najvišu cenu.

Holandska aukcija – prodavac postavlja cenu koja je iznad realne cene proizvoda ili usluge te postepeno spušta traženu cenu. Proizvod je prodat onom ponuđaču koji prvi prihvati trenutno traženu cenu.

Razmotrimo Englesku i Holandsku aukciju, sa simetričnim nezavisnim vrednostima sa $N \geq 2$ ponuđača. Ravnotežne funkcije su $b_D(v) = (1 - \frac{1}{N})v$, i $b_E(v) = v$. Njima pridružene ravnotežne cene su slučajne promenljive P_D i P_E. Njihove funkcije raspodele su:

$F_D(x) = \left(\frac{N}{N-1}\right)^N x^N$ (holandska aukcija)

$F_E(x) = x^N + N(x^{N-1} - x^N)$ (engleska aukcija)

Ravnotežna cena u obema aukcijama jednaka je najvišoj ponudi. U holandskoj aukciji to je

$$P_D = b_1^*(V_{(N)})$$

i u engleskoj aukciji

$$P_E = b_2^*(V_{(N-1)})$$

gde $V_{(N)}, V_{(N-1)}$ označavaju najviši i drugi najviši red statistike uzorka N identičnih i nezavisno distribuiranih slučajnih procena , respektivno.
Važan rezultat u teoriji aukcija je da su očekivane vrednosti ravnotežnih cena u holandskoj i engleskoj aukciji iste, $E[P_D] = E[P_E]$. Međutim, P_D i P_E se razlikuju u svojim osobinama vezanim za rizik.

Teorema 7.3.1 (Holandska nasuprot Engleske aukcije) *Slučajna ravnotežna cena holandske aukcije, P_D drugostepeno stohastički dominira nad slučajnom ravnotežnom cenom engleske aukcije, P_E. Drugim rečima, svaki prodavac odbojan na rizik strogo preferira holandsku aukciju.*

Dokaz.

Da bi dokazali ovu relaciju stohastičke dominacije podsetimo se da jedna slučajna promenljiva drugostepeno stohastički dominira nad drugom, ako su im se očekivane vrednosti jednake, i njihove funkcije raspodele verovatnoće imaju jedan presek. Kako prodavac preferira više cene, dominirajuća slučajna promenljiva je ona koja ima više vrednost verovatnoće na oba repa distribucije.
Izračunajmo funkcije raspodele verovatnoće za , P_D i , P_E na sledeći način:

$$F_D(x) = P(P_D \leq x) = P(b_1^*(V_{(N)}) \leq x) = P(\frac{N-1}{N}V_{(N)} \leq x)$$

$$= P(V_{(N)} \leq \frac{N}{N-1}x) = F(\frac{N}{N-1}x)^N = (\frac{N}{N-1})^N x^N$$

$$F_E(x) = P(P_E \leq x) = P(V_{(N-1)} \leq x) = F(x)^N + N(F(x)^{N-1} - F(x)^N)$$

$$= x^N + N(x^{N-1} - x^N).$$

Razmotrimo razliku

$$\phi(x) = F_D(x) - F_E(x) = \left(\left(\frac{N}{N-1}\right)^N + (N-1)\right)x^N - Nx^{N-1}.$$

Polinom $\phi(x)$ je polinom N-tog stepena sa samo jednom promenom u znaku koeficienata. Po Dekartovom pravilu, iz toga sledi da $\phi(x)$ ima najviše jedan realan pozitivan koren. Istovremeno, $\phi(x)$mora imati najmanje jedan realan koren u $(0,1)$, jer su očekivane vrednosti P_D i P_E iste. Stoga, $\phi(x)$ ima tačno jedan realan koren u (0 ,1) što potvrđuje jedinstveni presek.

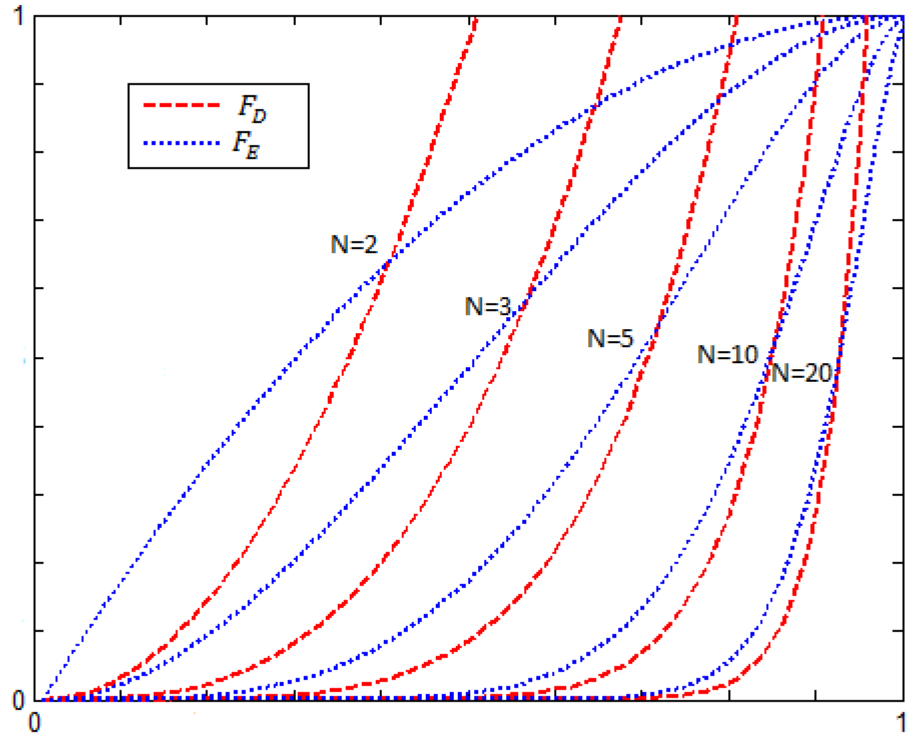
Na kraju, primetimo da

$$F_D\left(\frac{N}{N-1}\right) = 1 = F_E(1) > F_E\left(\frac{N}{N-1}\right)$$

Dakle, $P_D \geq_{SSD} P_E$.

□

Ilustracija odnosa stohastičke dominacije između P_D i P_E prikazana je na sledećoj slici:



Slika 7.3.1 *Distribucije verovatnoće za* P_D *i* P_E *za n=2, n=3, n=5, n=10 i n=20*

Vidimo da što je veći broj ponuđača onda se teži ravnotežnoj ceni.

8. Stohastička dominacija i arbitraža

Za vezu stohastičke dominacije i arbitraže koristićemo Džeruov model u kome posmatramo samo dva trenutka 0 i T (Početni trenutak označimo sa 0, a završni trenutak sa T). U trenutku T postoji konačan broj stanja prirode čiji skup obeležavamo da $\Omega = \{1,2,\dots,S\}$.

Neka je sa x obeležen određeni finansijski instrument, tada je $x(\omega)$ novčani tok tog instrumenta u trenutku T i stanju prirode $\omega \in \Omega$. Označimo sa M skup svih portfolija koji se dobijaju od m primarnih instrumenata $\{x_1, x_2,\dots,x_m\}$. Sa π_i obeležavamo cenu aktive x_i u trenutku 0, dok broj instrumenata obeležavamo sa n_i. Tada $\sum_{i=1}^{m} n_i\, x_i$ predstavlja novčani tok, a $\sum_{i=1}^{m} n_i\, \pi_i$ cenu portfolia koji se sastoji od m primarnih instrumenata u trenutku 0.

Definicija 8.1 Ukoliko je broj stanja prirode jednak broju linearno nezavisnih primarnih instrumenata, kažemo da je tržište kompletno u Erou-Debre smislu. Formalno, kompletnost tržišta zahteva da je $rang\{x_1, x_2,\dots,x_m\} = m = S$. U suprotnom tržište je nepotpuno ukoliko je $m < S$.

Definicija 8.2 Portfolio $(n_1, \dots, n_m)$ predstavlja arbitražnu mogućnost ukoliko je

1) $\sum_{i=1}^{m} n_i\, x_i(w) \geq 0$ za svako $\omega \in \Omega$,
2) $\sum_{i=1}^{m} n_i\, x_i(w) > 0$ za neko $\omega \in \Omega$,
3) $\sum_{i=1}^{m} n_i\, \pi_i \leq 0$.

Drugim rečima, arbitražna mogućnost predstavlja portfolio koji ima

1)nenegativan novčani tok u svim stanjima prirode u trenutku T,

2) striktno pozitivan novčani tok u nekom stanju prirode u trenutku T,

3) ima nultu ili nepozitivnu cenu u trenutku 0.

Veza prvostepene stohastičke dominacije i arbitražnih mogućnosti će biti pokazana na sledećim primerima:

Primer 8.1. Pretpostavimo da postoje samo dva instrumenta x i y i dva stanja prirode $\Omega=\{1,2\}$. Novčani tokovi za instrumente x i y u trenutku 1 u dva stanja prirode su $x =$

$(x(1), x(2)) = (2,2)$ i $y = (y(1), y(2)) = (1,2)$. Instrumenti su linearno nezavisni i tržište je potpuno u Erou-Debre smislu. Neka je π_x cena instrumenta x, a π_y cena instrumenta y. Novčani tok portfolija x - y je nenegativan u prvom stanju prirode i striktno pozitivan u drugom stanju, dok je cena ovog portfolija 0 i uslovi za arbitražu su ispunjeni.

Sa druge strane, instrument x stohastički dominira nad instrumentom y:

η	$F_x(\eta) = P(x \leq \eta)$	η	$F_y(\eta) = P(y \leq \eta)$
		$\eta \in (-\infty, 1)$	0
$\eta \in (-\infty, 2)$	0	$\eta \in [1, 2)$	1/2
$\eta \in [2, \infty)$	1	$\eta \in [2, \infty)$	1

Tabela 8.1: *Stohastička dominacija i arbitraža*

Iz tabele uočavamo da je sa striktnom nejednakošću za $\eta \in [1, 2)$. Dakle, postojanje arbitražnih mogućnosti implicira postojanje stohastičke dominacije.

Primer 8.2 Novčani tokovi za instrumente x i y su isti kao i u prethodnom primeru, ali je cena instrumenta x: $\pi_x = 1$, a cena instrumenta y: $\pi_y = 3/2$. Portfolio $x_1 = (x - y)$ ima novčani tok (1,0) dok je cena ovog portfolija ½. Portfolio $x_2 = -1/2x + y$ daje novčani tok (0,1) i ima cenu 1/2. Prema Definiciji 9.1 u ovom slučaju ne postoje arbitražne mogućnosti, ali x dominira nad y. Ovaj primer pokazuje da postojanje stohastički dominiranih instrumenata ne implicira postojanje arbitražnih mogućnosti.

9. Numerčki primer

U okviru ove tačke dajemo ilustraciju za moguću primenu koncepta stohastičke dominacije na konkretnom primeru. Uporediće se hartije sa najvećim prometom na Beogradskoj berzi za dan 05.12.2014, odnosno biće upoređene akcije od Energoprojekt holding a.d. , Beograd, (ENHL), NIS a.d., Novi Sad (NIIS), Soja protein a.d. , Bečej (SJPT), Aerodrom Nikola Tesla a.d. , Beograd (AERO), Komercijalna banka a.d. , Beograd (KMBN), Alfa plam a.d. , Vranje(ALFA), Metalac a.d. , Gornji Milanovac (MTLC) kao i obveznice Vlade Republike Srbije A2015 i A2016.

Posmatrane su dnevne prilagođene cene na zatvaranju u vremenskom periodu od 08.09.2014 do 05.12.2014.

Svi podaci su obrađeni u programskom paketu MATLAB, a pri utvrđivanju FSD i SSD relacija korišćeni su sledeći algoritmi:

9.1 FSD Algoritam

Pretpostavimo da postoji n opservacija, na primer n stopa prinosa. Neka imamo dve slučajne promenljive i njihove stope prinosa označimo sa x i y respektivno. Pre nego što definišemo algoritam potrebno je da promenimo redosled opcervacija x i y, od najmanje do najveće vrednosti:

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_n$$
$$y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq \cdots \leq y_n$$

Dalje, dodelimo verovatnoću $1 / n$ za svaku opservaciju (ako postoje dve identične opservacije, napišu se jedna za drugom i sve imaju $1 / n$ verovatnoću). FSD algoritam će dalje biti prikazan na sledeći način:

FSD algoritam: X dominira u odnosu na Y po prvostepenoj stohastičkoj dominaciji ako i samo ako $x_i \geq y_i$ za sve $i = 1,2, \dots n$ i postoji najmanje jedna stroga nejednakost.

Ova tvrdnja znači da ako $x_i \geq y_i$ za sve i, a $x_i > y_i$ za neke i, onda sa jednakim verovatnoćama dodeljenim svakoj opservaciji, X mora da se nalazi ispod Y u celom opsegu, a u nekom opsegu , to će biti strogo ispod Y.

9.2 SSD Algoritam

Kao i kod FSD, prvo što radimo je rangiranje svih opservacija od najmanje do najveće i dodelimo verovatnoće $1 / n$ za svaku opservaciju. Novo u odnosu na FSD je definisanje X_i', $(i = 1,2, \dots n)$, na sledeći način:

$$X_1' = x_1$$

$$X_2' = x_1 + x_2$$

$$\dots$$

$$X_i' = \sum_{j=1}^{i} x_j$$

$$\dots$$

$$X_n' = \sum_{j=1}^{n} x_j$$

Y_i' je definisano na isti način.

SSD Algoritam: X dominira u odnosu na Y po prvostepenoj stohastičkoj dominaciji ako i samo ako $X_i' \geq Y_i'$ za sve $i = 1,2, \dots n$ i postoji najmanje jedna stroga nejednakost.

Prinos je računat po formuli

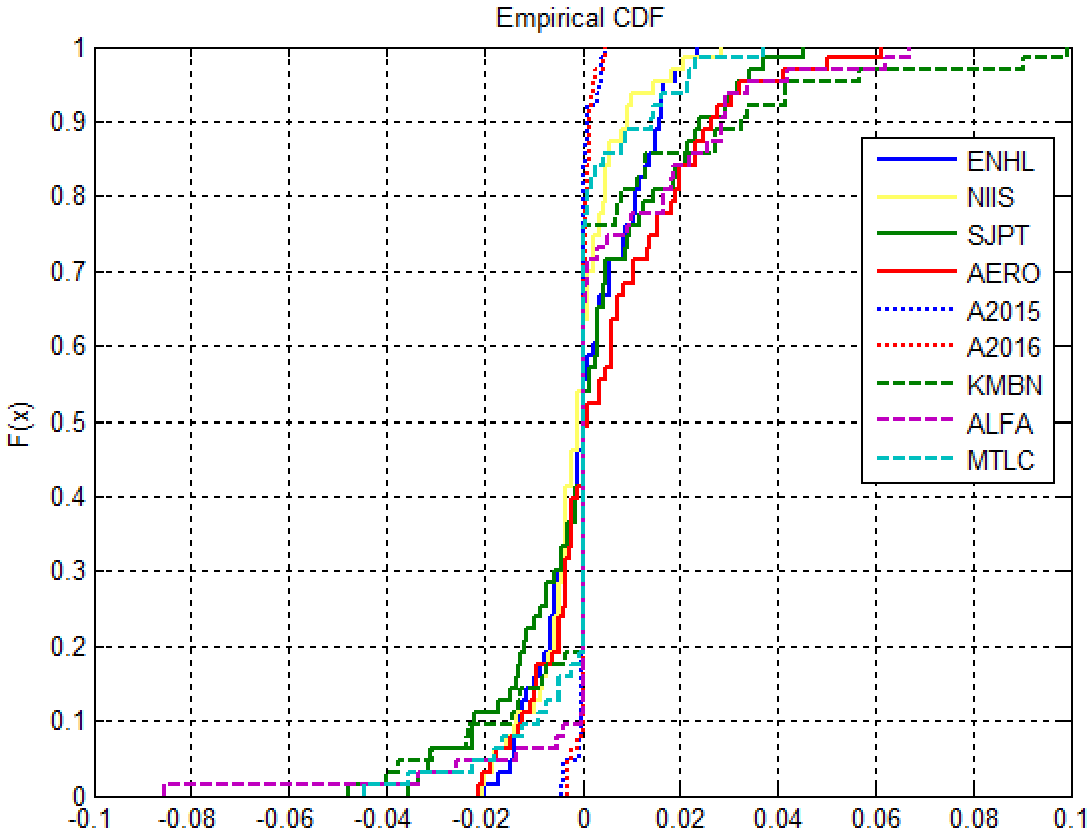
$$r_{ij} = \frac{P_{ij+1} - P_{ij}}{P_{ij}},$$

gde je P_{ij} cena i-te investicije na početku j-tog perioda. Tako dobijamo odgovarajuće vektore prinosa.

Očekovani prinos investicije i je dat sa

$$\overline{r_i} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} r_{ij}.$$

Koristeći gore navedeni algoritam, iz Definicije 5.3 sledi da nijedna hartija nije FSD neefikasna, odnosno sve hartije su FSD efikasne, da nijedna hartija prvostepeno ne dominira u odnosu na neku drugu vidimo i iz sledeće slike na kojoj su prikazane funkcije raspodela za svaku hartiju. Vidimo da se sve funkcije raspodela međusobno seku.



Slika 9.1 *Numerički primer*

Koristeći algoritam za SSD dobijamo da AERO $\succcurlyeq_{SSD}$KMBN, AERO $\succcurlyeq_{SSD}$SJPT ALFA$\succcurlyeq_{SSD}$KMBN, A2015$\succcurlyeq_{SSD}$NIIS, A2015$\succcurlyeq_{SSD}$MTLC, A2016$\succcurlyeq_{SSD}$NIIS, A2016$\succcurlyeq_{SSD}$MTLC, A2016$\succcurlyeq_{SSD}$A2015. Pa efikasni skup sada čine ENHL, ALFA, AERO, A2016 po Definiciji 5.3.

Iz urađene analize za određeni skup investitorovih preferencija, dobijamo i odgovarajući efikasni skup. Skup efikasnih investicija je veći što su pretpostavke slabije, a efikasni skup se drastično smanjuje dodatkom informacije o averziji prema riziku. Investicione alternative u SSD-efikasnom skupu su odgovarajuće svakom investitoru koji ima averziju prema riziku, ali u okviru efikasnog skupa se investicione alternative ne mogu porediti po kriterijumu koja je „bolja“. U slučaju da imamo potpunu informaciju o funkciji korisnosti datog investitora, tada bismo imali kompletno uređenje skupa investicija i s lakoćom bi našli najbolju investicionu alternativu.

10. Zaključak

U ovom radu predstavljen je jedan od alternativnih koncepata pomoću kojeg se vrši rangiranje investicija, odnosno predstavljen je koncept stohastičke dominacije koji rangiranje vrši koristeći celokupnu funkciju raspodela. Ona omogućava parcijalno uređenje skupa slučajnih promenljivih, koje su u našem slučaju prinosi investicija. Ukoliko se funkcije rasporeda ne seku, primenjuje se prvostepena stohastička dominacija. Ako se seku samo jednom, primenjuje se drugostepena dominacija.

Stohastička dominacija predstavlja pouzdan teorijski koncept za izbor odgovarajuće investicije, međutim, njegova primena u problemima odlučivanja u stvarnom svetu je komplikovana jer zahteva poređenje parova svih mogućih investicionih alternativa, zbog čega postoji potreba za jednostavnijim modelima, kao što su modeli očekivani prinos/rizik.

11. Dodatak

Primer 5.4 i Primer 5.5

Matlab kod preuzet sa http://www.mathworks.com/

```
function normalna
% ovaj kod nam pokazuje ako iz stohasticke dominacije nizeg reda sledi
dominacija viseg reda
% Poredicemo dve normalne raspodele

clear;  close all;  clc;

% stepen dominacije, kod primera 5.5, drugi grafik, Q=2
Q=1;

% postavljanje parametara za dve normalne slucajne promenljive,
mu_A=1;
sig_A=.1;

mu_B=0;
sig_B=.1;

% dodeljivanje vrednosti za x koja je diskretna slucajna promenljiva
N=2^16;
J=10^6;
dd=normrnd(mu_A,sig_A,1,J);
uu=normrnd(mu_B,sig_B,1,J);
Hi=max([dd uu]);
Lo=min([dd uu]);
h=(Hi-Lo)/(N-1);
X=[Lo+h : h : Hi]';

Iq_A = 1/h*(normcdf(X+h/2,mu_A,sig_A)-normcdf(X-h/2,mu_A,sig_A));
Iq_B = 1/h*(normcdf(X+h/2,mu_B,sig_B)-normcdf(X-h/2,mu_B,sig_B));


% provera dominacije
for q=2:Q+1
    Iq_A=h*cumsum(Iq_A);
    Iq_B=h*cumsum(Iq_B);
end

Result=['No dominance up to order ' num2str(Q)];
Condition_AdomB=prod(0+(Iq_A<=Iq_B));
if Condition_AdomB
    Result=['A order-' num2str(Q) ' dominates B' ];
end
Condition_BdomA=prod(0+(Iq_B<=Iq_A));
if Condition_BdomA
```

```
    Result=['B order-' num2str(Q) ' dominates A' ];
end

% crtanje grafika
figure
plot(X,Iq_A)
hold on
plot(X,Iq_B,'r')
grid on
legend('A','B')
title(Result)
end
```

Slika 8.3.1 Aukcije

```
function aukcije(n)

%definisanje funkcije koja zavisi od broja ponudjaca
x=[0:0.05:1];

Fd=((n/(n-1)).^n)*(x.^n)
Fe=x.^n+n*(x.^(n-1)-x.^n)

%funkcije raspodele za holandsku i englesku aukciju

plot(Fd)
hold on
plot(Fe)
% crtanje grafika

End
```

Numericki primer FSD

```
function primerfsd(x,y)

% definisanje koda koji poredi dva vektora po prvostepenoj dominaciji

% promena redosleda opservacija
xx=sort(x);
yy=sort(y);

 % provera duzine

a=length(xx);
b=length(yy);
if a==b

% fsd algoritam
  for i=1:a
      if xx(i)==yy(i)
          disp(0)
      elseif xx(i)>=yy(i)
```

```
            disp(1)
        elseif xx(i)<=yy(i)
            disp(2)
        end
    end
else
    disp('greska u unosu');
end

% crtanje grafika
cdfplot(xx)
hold on
cdfplot(yy)

end
```

Numericki primer SSD

```
function primerssd(x,y)
% definisanje koda koji poredi dva vektora po prvostepenoj dominaciji

% promena redosleda opservacija
xx=sort(x);
yy=sort(y);

% pravljenje novih kumulativnih nizova
xxx=cumsum(xx);
yyy=cumsum(yy);

% provera duzine
a=length(xxx);
b=length(yyy);
if a==b
% fsd algoritam
    for i=1:a
        if xxx(i)==yyy(i)
            disp(0)
        elseif xxx(i)>=yyy(i)
            disp(1)
        elseif xxx(i)<=yyy(i)
            disp(2)
        end
    end
else
    disp('greska u unosu');


% crtanje grafika
cdfplot(xxx)
hold on
cdfplot(yyy)

end
```

12. Literatura

[1] Levi H.,(2006) *Stochastic Dominance: Investment Decision Making under Uncertainty*, Second Edition, Springer

[2] De Giorgi E., (2002) *Reward-Risk Portfolio Selection and Stochastic Dominance* "Journal of Banking and Finance" 29 (4), pp. 895-926

[3] Ogryczak W., Ruszuczynski A., *From stochastic dominance to mean-risk models: Semideviations as risk measures "*European Journal of Operational Research" 116 (1999) 33-50

[4] Ogryczak W., Ruszuczynski A., *Dual Stochastic Dominance and Related Meanrisk Models*, "SIAM Journal on Optimization", Vol. 13, No. 1, pp. 60–78

[5] Wolfstetter E.,(1996) *Stochastic Dominance: Theory and Applications*

[6] Keung Wong W.,(2007) *Stochastic dominance and mean–variancemeasures of profit and loss for business planning and investment,* Hong Kong Baptist University

[7] Zhen Guo,(2012) *Stochastic Dominance and Its Applications in Portfolio Management*

[8] Levy M., (2012) *Almost Stohastic dominance and efficent investment sets,*The Hebrew University, Jerusalem, Israel

[9] Rajter-Ćirić D., (2009) *Verovatnoća*, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

[10] Lončar S., (2011) *Primena prvostepene i drugostepene stohastičke dominacije u rangiranju investicija*

[11] Wong W., (2006) *Stochastic Dominance Theory For Location–Scale Family*

[12] Dentecheva D., Ruszuczynski A., (2003)*Portfolio Optimization with Stochastic Dominance Constraints*,

[13] Linton O., Whang Y., (2005)*Testing for the Stochastic Dominance Efficiency of a Given Portfolio*,

[14] Klaver H., (2006) *Tests of Stochastic Dominance for Time Series Data*, University Koln

[15] Delgado M., (2011) *Conditional Stochastic Dominance Testing*, Universidad Carlos III de Madris, Getafe, Spain

[16] http://www.belex.rs/trgovanje/aktivnost/promet

[17] http://www.mathworks.com/

Kratka biografija

Miloš Knežević je rođen 3. marta 1989. godine u Kikindi. Završio je osnovnu školu „Petar Kočić“ u Nakovu kao djak generacije i nosilac Vukove diplome, a potom upisuje prirodno-matematički smer gimnazije „Dušan Vasiljev“ u Kikindi. Gimnaziju završava sa odličnim uspehom 2008. godine i upisuje osnovne akademske studije Primenjene matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, modul matematika finansija. Osnovne studije završava 2011. godine sa prosečnom ocenom 8,42 i iste godine upisuje master studije, modul matematika finansija na istom fakultetu. Položio je sve ispite predviđene planom i programom i stekao je uslov za odbranu master rada.

UNIVERZITET U NOVOM SADU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Departman za matematiku i informatiku

Ključna dokumentacijska informacija

Redni broj: **RBR**	
Identifikacioni broj: **IBR**	
Tip dokumentacije: **TD**	Monografska dokumentacija
Tip zapisa: **TZ**	Tekstualni štampani materijal
Vrsta rada: **VR**	Master rad
Autor: **AU**	Miloš Knežević
Mentor: **MN**	Dr Danijela Rajter-Ćirić

Naslov rada: **NR**	Stohastička dominacija
Jezik publikacije: **JP**	Srpski / latinica
Jezik izvoda: **JI**	Srpski
Zemlja publikacije: **ZP**	Srbija
Uze geografsko područje: **UGP**	Vojvodina
Godina: **GO**	2015.
Izdavac: **IZ**	autorski reprint
Mesto i adresa: **MA**	PMF,Trg D. Obradovića 3, Novi Sad
Fizički opis rada: **FO**	12 poglavlja, 58 strana, 19 slika, 6 tabela,

Naučna oblast: **NO**	Matematika
Naučna disciplina **ND**	Primenjena matematika
Predmetna odrednica / Ključne reči: **PO**	Stohastička analiza Prvostepena stoh. dom, Drugostepena stoh. dom, Izbor portfolio, Komparativna statika rizika
UDK:	
Čuva se: **CU**	Biblioteka Departmana za matematiku, i informatiku, Novi S

Izvod(**IZ**):

Koncept stohastičke dominacije predstavlja jedan od alternativnih koncepata pomoću kojeg se vrši rangiranje investicija koristeći celokupnu funkciju raspodela. Ona omogućava parcijalno uređenje skupa slučajnih promenljivih, koje su u našem slučaju prinosi investicija. Ukoliko se funkcije rasporeda ne seku, primenjuje se prvostepena stohastička dominacija. Ako se seku samo jednom, primenjuje se drugostepena dominacija.

Datum prihvatanja teme: 10.10.2013.

DP

Datum odbrane: April 2015.

DO

Članovi komisije:

1.) Dr Sanja Rapajić vanredni profesor
PMF, u Novom Sadu, predsednik

2.) Dr Danijela Rajter-Ćirić, redovni prof,.
PMF, u Novom Sadu, mentor

3.) Dr Dora Seleši, vanredni profe
PMF, u Novom Sadu, član

UNIVERSITY OF NOVI SAD

FACULTY OF SCIENCE

Department of mathematics and informatics

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: **DT**	Monograph type
Type of record: **TR**	Printed text
Contents code: **CC**	Graduate assay
Author: **AU**	Miloš Knežević
Mentor: **MN**	Danijela Rajter-Ćirić PhD

Title: **XI**	Stochastic dominance
Language of text: **LT**	Serbial / Latinic
Language of abstract: **LA**	Serbian
Country of publication: **CP**	Serbia
Locality of publication: **LP**	Vojvodina
Publication year: **PY**	2015.
Publisher: **PU**	Autor's reprint
Publik place: **PP**	21000 N.Sad, Trg D. Obradovića 3.
Phisical description: **PD**	12 chapters, 58 pages, 19 photos, 6 tables
Scientific field:	Mathematics

SF

Scientific discipline: Aplied mathematics

SD

Key words: First order dominance, Second order dominance, Potrfolio selection, Comparative statics of risk

UC

HD note:

Holding data: Library of Department of Mathematics and Informatics, N.Sad

SD

Abstract(**AB**):

The concept of stochastic dominance is one of the alternative concepts by which the ranking of investments by using the whole distribution function. It allows partial development of a set of random variables, which in our case yields investment. If the distribution functions do not intersect, applies to first-order stochastic dominance. If the cut only once applied Second instance domination.

Accepted by the Scientific Board on: 10.10.2013.

Defended: April 2015.

Thesys Defend Board:

1.) Sanja Rapajić PhD, associate profesor
PMF, N. Sad, president

2.) Danijela Rajter-Ćirić PhD, full proffesor
PMF, N. Sad, mentor

3.) Dora Seleši PhD, associate professor
PMF, N. Sad, member,