UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Miloš Bubnjević

Modeli računanja tehničkih rezervi u aktuarstvu

-master rad-

Mentor:
prof. dr Dora Seleši

Novi Sad, januar 2015.

Sadržaj

Zahvalnica

Želeo bih da se zahvalim svojoj mentorki prof. dr Dori Seleši koja mi je bila velika podrška da napišem sjajan rad. Kad sam došao da je pitam za mišljenje i samo u kratkim crtama naznačio polja aktuarstva koja me interesuju, ona je uspela da pronadje pravu temu za mene, kao i da me posavetuje oko svih pojedinosti iz aktuarske prakse.

Hvala članovima komisije, prof. dr Sanji Rapajić i prof. dr Nataši Krejić na korekcijama i sugestijama oko poboljšanja kvaliteta rada.

Zahvalio bih se Milanu Rankovu koji mi je pomogao oko dobijanja podataka o plaćanjima obaveza osiguravajućeg društva na osnovu kojih je napisano poslednje poglavlje u ovom radu i na kojima su primenjeni svi modeli rezervisanja. Uz pomoć njega ovaj rad je dobio i praktičnu primenu teorije na podatke iz svakodnevnog poslovanja.

Hvala prof. dr England Peteru, velikom stručnjaku za metode rezervisanja u osiguranju, sa kojim sam razmenio nekoliko mejlova i koji je nesebično podelio sa mnom svoje radove i znanje iz primene podataka na softvere.

Veliko hvala dugujem mojoj porodici, majci Lidiji, ocu Dragomiru, sestri Milici, baki Savki, koji su me bodrili i podržavali da napišem što bolji rad. Diplomiraću na vreme, ma koliko to trajalo! Hvala mojoj devojci Suzani koja je sve vreme bila uz mene, koja mi je davala motivaciju da radim i koja mi je pravila društvo u dugim satima učenja nekad i do kasno u noć.

Predgovor

Aktuarske poslove u osiguravajućem društvu obavljaju ovlašćeni aktuari, tj. lica koja su dobila ovlašćenje Narodne banke Srbije za obavljanje aktuarskih poslova. Medju mnogobrojnim funkcijama koje aktuar obavlja u osiguravajućem društvu, dve najvažnije su davanje mišljenja o načinu izračunavanja tarifa premija osiguranja, kao i pravilno utvrdjivanje iznosa tehničkih rezervi. U ovom radu će biti stavljen veći značaj ovoj drugoj funkciji.

Zadatak ovlašćenog aktuara je da odredi kolika je vrednost budućih isplata naknada šteta i koliko novca treba da se izdvoji da bi se mogli isplatiti svi potencijalni zahtevi za odštetu. Osiguravajuće društvo je u obavezi da u svakom trenutku poseduje rezerve radi isplate obaveza prema svojim klijentima. Upravo ove rezerve su najveća obaveza i odgovornost svakog društva, bez obzira da li obavlja poslove životnih ili neživotnih osiguranja. Rezerve koje se obrazuju radi plaćanja budućih obaveza karakteriše visok stepen nesigurnosti zato što se odnose na obaveze koje će nastati u budućnosti. Pošto niko od nas ne može da predvidi budućnost, ne može se znati koji će biti broj niti iznos zahteva za odštetu, pa samim tim postoji i problem utvrdjivanja što adekvatnijeg i preciznijeg načina izračunavanja rezervi za sve buduće obaveze.

Aktuar koji računa rezerve mora da se postavi kao poverenik dve strane. Prvo, aktuar mora da štiti prava osiguranika, tj. lica koja plaćaju premiju osiguranja i koja imaju pravo na naknadu štete onog trenutka kada se dogodi predmet osiguranja. Potvrdjujući da osiguravajuće društvo izdvaja u dovoljnim količinama sredstva da bi platilo sve buduće obaveze, aktuar uverava osiguranike da će sve njihove nastale štete biti nadoknadjene. Ako postoji dovoljno sredstava u rezervama društva, to će osiguranicima garantovati potpuno nadoknadjivanje nastalih šteta. Sa druge strane, aktuar mora da vodi računa i o svom poslodavcu, osiguravajućem društvu, i da čuva njegove interese. Potvrdjujući da osiguravajuće društvo izdvaja u dovoljnim količinama sredstva da bi platilo sve buduće obaveze, aktuar daje uverenje da je društvo solventno. Ovo je važna informacija za vlasnike društva, kao i za potencijalne investitore i kupce akcija tog društva.

U praksi se dešava da se zahtevi za naknadu nastale štete ne mogu isplatiti do kraja kalendarske godine u kojoj su se dogodili. Ovo je čest slučaj kod osiguranja od odgovornosti u saobraćaju kod kojeg se nekada ne može na jednostavan način utvrditi visina nastale štete i kod kojeg duge zakonske procedure značajno produžuju datum plaćanja naknade. Slično, u slučaju povrede osiguranika potrebno je vreme da se odradi lekarski pregled i utvrdi stepen povrede, a tek potom se može izvršiti isplata naknade osiguraniku. Kod nekih vrsta osiguranja moguće je da se naknada štete isplaćuje u nekoliko anuiteta, ne odjednom, što će usloviti pomeranje datuma plaćanja. Svi ovi faktori mogu da izazovu kašnjenje plaćanja zahteva za odštetu.

Na početku, osiguravajuća društva su se vodila sistemom tekućeg finansiranja ili "$pay - as - you - go$" sistemom. On je zasnovan na ideji da se sve štete koje dolaze na naplatu u jednoj godini isplaćuju sredstvima koja su sakupljena u toj tekućoj godini, bez obzira što su se neke štete dogodile i bile prijavljene u prethodnim godinama, a tek sada bivaju isplaćene. Problemi u poslovanju društava su nastajali onda kada bi se pojavio veliki varijabilitet u dobicima i gubicima u jednoj kalendarskoj godini, odn. kada je postojala velika razlika izmedju sakupljenih premija osiguranja i zahteva za naknadu štete. Upravo zbog ovoga se pojavila potreba za novim sistemom u kojem bi se čuvale rezerve u svrhu plaćanja šteta koje su nastale i prijavljene u prethodnim godinama. Aktuarima se učinilo logično i prirodno da svaki zahtev za odštetu pridruže kalendarskoj godini u kojoj je šteta nastala, a ne godini u kojoj treba izvršiti plaćanje naknade.

U praksi se može sresti i slučaj da je šteta nastala, ali još nije prijavljena. Ovakve štete se označavaju akronimom $IBNR$ (Incurred But Not Reported) što označava štete koje su već nastale, ali osiguranik još nije podneo zahtev za odštetu osiguravajućem društvu. Društvo ne zna kada će biti prijavljena neka šteta niti koliko će taj iznos iznositi, pa da bi obezbedilo solventnost, ono mora čuvati odredjenu količinu rezervi. Takodje, postoje štete koje su prijavljene, ali čiji se iznos ne zna. Ovo predstavlja još jednu nepriliku za osiguravajuće društvo koje će morati da ispuni svoju obavezu u budućnosti, ali ne zna tačan iznos te obaveze. Ovakve štete se označavaju akronimom $RBNS$ (Reported But Not Settled). Pod ovim štetama se podrazumevaju i prijavljene štete koje nisu plaćene do kraja ili koje nisu plaćene uopšte.

Veoma je važno da osiguravajuće društvo obezbedi dovoljnu količinu rezervi da bi isplatilo sve zahteve za odštetu svojih klijenata, ali sa druge strane, takodje je važno da društvo ne čuva previše sredstava u ime rezervi, jer time sebi stvara oportunitetni trošak. Svako osiguravajuće društvo može da sva svoja slobodna sredstva imenuje za rezerve da bi izbeglo bilo kakav rizik procenjivanja budućih isplata i zasigurno obezbedilo plaćanje budućih obaveza, ali prevelika vrednost rezervi neće biti potrebna da se isplate sve obaveze društva. Čuvajući više od potrebnih vrednosti rezervi, osiguravač nepotrebno čuva novac koji neće biti iskorišćen za plaćanje budućih šteta, a mogao bi ga uloziti u investicije ili depozite kod banaka, čime bi ostvario dodatni profit.

Iz prethodnog izlaganja se može zaključiti da se osiguravajuće društvo često susreće sa nesigurnostima pri isplati naknada šteta i da svakodnevno mora da predvidja visinu budućih naknada i visinu rezervi. Veliki je problem napraviti dobru predikciju budućih zahteva za odštetu, jer niko od nas ne zna koliki će broj šteta nastati niti na koliko će te štete biti procenjene. Zato je priča o rezervama krucijalna: da bi osiguravajuće društvo moglo na vreme da isplati sve svoje obaveze, da obezbedi dovoljno sredstava da ostane platežno sposobno i da nadomesti štete nastale njenim osiguranicima.

Glava 1

Rezerve osiguravajućeg društva u Srbiji

Rezerve koje pokrivaju obaveze iz redovnog poslovanja osiguranja se nazivaju **tehničke rezerve**. Prema zakonu o osiguranju u Republici Srbiji svako osiguravajuće društvo je u obavezi da na kraju svakog obračunskog perioda utvrdi tehničke rezerve. U kalendarskoj godini postoje četiri obračunska perioda, što znači da se računanje rezervi vrši 31. marta, 30. juna, 30. septembra i 31. decembra. Tehničke rezerve imaju za cilj zaštitu osiguranika koja obezbedjuje dovoljno sredstava osiguravajućem društvu iz kojih ono izvršava svoje ugovorne obaveze.

Tehničke rezerve se na različit način utvrdjuju u zavisnosti od toga kojim se vrstama osiguranja osiguravajuće društvo bavi. Tokom 20. i 21. veka mnogi svetski autori i teoretičari osiguranja osmislili su mnoštvo podela po raznim kriterijumima. Prema zakonu o osiguranju Republike Srbije, osiguranja se dele na životna i neživotna osiguranja.

Vrste **životnih osiguranja** su:
1. osiguranje života;
2. rentno osiguranje;
3. dopunsko osiguranje uz osiguranje života;
4. dobrovoljno penzijsko osiguranje;
5. druge vrste životnih osiguranja.

Vrste **neživotnih osiguranja** su:
1. osiguranje od posledica nezgode, uključujući osiguranje od povreda na radu i profesionalnih bolesti;
2. dobrovoljno zdravstveno osiguranje;
3. osiguranje motornih vozila;
4. osiguranje šinskih vozila;
5. osiguranje vazduhoplova;
6. osiguranje plovnih objekata (morskih, rečnih i jezerskih);
7. osiguranje robe u prevozu;
8. osiguranje imovine od požara i drugih opasnosti (eksplozija, oluja, atomske energije, klizanja i sleganja tla . . .);
9. ostala osiguranja imovine;

10. osiguranje od odgovornosti zbog upotrebe motornih vozila;
11. osiguranje od odgovornosti zbog upotrebe vazduhoplova;
12. osiguranje od odgovornosti zbog upotrebe plovnih objekata;
13. osiguranje od opšte odgovornosti za štetu;
14. osiguranje kredita;
15. osiguranje jemstva;
16. osiguranje finansijskih gubitaka;
17. osiguranje troškova pravne zaštite, koje pokriva sudske troškove, troškove advokata i druge troškove postupka;
18. osiguranje pomoći na putovanju;
19. druge vrste neživotnih osiguranja.

Kao što je ranije napomenuto, tehničke rezerve se različito računaju u zavisnosti od vrste osiguranja. Prema zakonu o osiguranju Republike Srbije ukoliko osiguravajuće društvo obavlja poslove jedne ili više vrsta životnih osiguranja, ono je dužno da utvrdi tehničke rezerve za:
1. prenosne premije;
2. rezervisane štete;
3. učešće u dobiti;
4. matematičku rezervu.

Ukoliko osiguravajuće društvo obavlja poslove jedne ili više vrsta neživotnih osiguranja, ono je dužno da utvrdi tehničke rezerve za:
1. prenosne premije;
2. rezervisane štete;
3. izravnanje rizika.

Prenosne premije obrazuju se izdvajanjem iz ukupne premije osiguranja na kraju tekućeg obračunskog perioda, odvojeno za svaku vrstu osiguranja, srazmerno vremenu trajanja osiguranja. Prenosne premije su deo premije koji se koristi za pokriće obaveza iz osiguranja koje nastaju u narednom obračunskom periodu. Ugovori o osiguranju se zaključuju u toku cele poslovne godine i zato se veći broj ugovora zaključen u jednom obračunskom periodu prenosi i u sledeći. Osiguravač mora da prenese deo plaćene premije u sledeći period proporcionalno trajanju ugovora u tom novom obračunskom periodu. Prema radu prof. dr Jasne Pak "Margina solventnosti, tehničke rezerve i plasman sredstava osiguranja" kod obračuna rezervi za prenosne premije se mora voditi računa o tome:

1. da rezerve budu **dovoljne** za plaćanje svih šteta. U obzir se uzima i uticaj inflacije na obaveze (npr. porast troškova lekova u dobrovoljnom zdravstvenom osiguranju ili porast vrednosti radnog časa u auto servisu u osiguranju od odgovornosti u saobraćaju);

2. da se premije obračunaju **bez umanjenja obaveza** prenosom rizika u reosiguranje;

3. da **sadrže troškove** sprovodjenja ugovora i likvidacije šteta.

Rezervisane štete obrazuju se u visini procenjenog iznosa obaveza za nastale prijavljene, a nerešene štete - $RBNS$, kao i za nastale neprijavljene štete - $IBNR$ u tekućem periodu. Ako se štete za pojedine vrste osiguranja pojavljuju u obliku rente, rezervisane štete utvrdjuju se u kapitalizovanom iznosu svih budućih obaveza. Ova vrsta rezervi je potrebna za osiguravajuće društvo zato što postoji odredjen vremenski period od trenutka kada je šteta nastala do trenutka njene naknade. Na primer, vreme čekanja je duže za telesne štete nego za imovinske zato što je potrebno više vremena da bi se utvrdile posledice povrede, kao i duže vreme trajanja sudskog postupka u vezi sa zahtevom za naknadu ovih šteta.

U radu "Margina solventnosti, tehničke rezerve i plasman sredstava osiguranja" je detaljno objašnjen način računanja rezervisanih šteta. Da bi se utvrdile ukupne rezervisane štete, prvo se računa iznos šteta koje su prijavljene ali nisu rešene. Ovo je dug i delikatan posao zato što se svaka šteta obračunava pojedinačno i mora da bude zasnovana na brojnoj dokumentaciji (izjava osiguranika, zapisnik policije, izveštaj veštaka, izjava druge strane, sudske odluke i dr.). Ovoj vrednosti se dodaje paušalni iznos za štete koje nisu prijavljene, a desile su se. Ovo se odnosi na štete koje su nastale pred kraj obračunskog perioda i osiguranik nije stigao da obavesti osiguravajuće društvo o nastanku štete. Iako će šteta biti prijavljena u narednom obračunskom periodu, ona se pridružuje onom u kojem je nastala, pa stoga mora da se izdvoji deo sredstava za njenu isplatu. Na kraju se dodaje vrednost **troškova poslovanja** koji pokrivaju spoljne i unutrašnje troškove koje društvo ima prilikom obrade šteta. U pitanju su troškovi advokata, honorari veštaka, zarade zaposlenih, sudski troškovi itd. Ove vrste troškova se izračunavaju za svaki predmet pojedinačno, ali se često odredjuju paušalno (npr. 5% od ukupnog iznosa rezerve za nenaplaćene štete).

Osiguravajuće društvo ima obavezu da svake poslovne godine utvrdi **merodavni tehnički rezultat**. On je pokazatelj koliki je odnos izmedju ukupnih sakupljenih premija u toku jedne godine i plaćanja ugovornih obaveza. Negativni merodavni rezultat znači da su iznosi koje je osiguravač platio veći od iznosa sakupljenih premija. Za posmatrani period (koji ne može biti kraći od 10 godina) utvrdjuje se prosečni merodavni tehnički rezultat kao aritmetička sredina godišnjih merodavnih tehničkih rezultata u tom periodu. Zbog mogućnosti odstupanja godišnjih merodavnih tehničkih rezultata od prosečnog merodavnog rezultata u posmatranom periodu, osiguravajuća društva obrazuju **rezerve za izravnanje rizika** za svaku vrstu neživotnih osiguranja sa stanjem na dan 31. decembra tekuće godine. Društvo je u obavezi da obrazuje ove rezerve ukoliko je u datoj vrsti osiguranja standardno odstupanje godišnjih merodavnih tehničkih rezultata od prosečnog merodavnog rezultata veće od odredjenog propisanog iznosa (u Republici Srbiji propisano odstupanje je do 0,05). Ako odstupanja nema, rezerve za izravnanje rizika date vrste osiguranja se smanjuju na propisani način.

Prema zakonu o osiguranju **matematička rezerva** je tehnička rezerva društva za osiguranje koja se računa posebno za svaki ugovor o osiguranju života poslednjeg dana tekućeg obračunskog perioda i namenjena je izmirivanju budućih obaveza po osnovu životnog osiguranja. Najznačajnija je kod osiguranja za slučaj smrti zaključenih na ceo život osiguranika. Kod osiguranja za ceo život rizik smrti osiguranika je sve veći što je osiguranik stariji, te je logično da se godinama povećava i premija osiguranja. Da osiguranik ne bi morao da plaća preveliku premiju u kasnijim godinama, osiguravajuća društva su našla rešenje da naprave nivelaciju iznosa premije: da iznos premije bude isti za sve vreme trajanja ugovora, tj. da se plaća prosečan nivo premije. U prvim godinama osiguranik plaća veći iznos premije nego što je rizik od njegove smrti, a u kasnijim godinama plaća manji iznos. Od "*viška*" sredstava koja su bila uplaćivana u ranijim godinama formira se matematička rezerva za ovu vrstu osiguranja. Sredstva matematičke rezerve moraju biti dovoljna za ispunjenje obaveza iz ugovora o osiguranju koje se odnose na prava iz matematičke rezerve.

Rezerve za učešće u dobiti obrazuju se kod onih ugovora o osiguranju ako su osiguranici prihvatili da učestvuju u riziku deponovanja i ulaganja sredstava tehničkih rezervi. Kod ovih ugovora osigurana suma (ili renta) nije izražena u dinarima ili devizama, već u obračunskim jedinicama ustanovljenih ulaganjima. Rezerve se obrazuju u visini iznosa na koji osiguranici imaju pravo po osnovu učešća u dobiti. Takodje, osigurana suma ili renta se obrazuje s obzirom na vrednost koju je dostigla obračunska jedinica prilikom ulaganja i deponovanja sredstava tehničkih rezervi. Na ovaj način osiguranik sam snosi finansijski rizik pada ili povećanja vrednosti ulaganja.

Važno je napomenuti da sredstva tehničkih rezervi nisu *sopstvena* sredstva osiguravača, već su to sredstva osiguranika koja su formirana iz premije koju klijenti plaćaju kao cenu za osiguravajuću zaštitu. Drugim rečima, osiguravajuće društvo sebe štiti od potencijalne nemogućnosti plaćanja obaveza tako što deo premije koju plaća osiguranik čuva kao rezerve za slučaj nesolventnosti. Sopstvena imovina obuhvata ona sredstva društva koja se ne formiraju iz premije osiguranja. To su sredstva osnovnog kapitala, rezerve iz dobiti, neraspoređjena dobit iz ranijih godina, revalizacione rezerve i dr.

Prof. dr Jasna Pak u radu "Margina solventnosti, tehničke rezerve i plasman sredstava osiguranja" objašnjava kako u praksi postoji mogućnost da tehničke rezerve nisu dovoljne da bi se pokrio sav rizik plaćanja ugovorom preuzetih obaveza. Može se desiti da u jednom vremenskom intervalu bude prijavljeno mnogo zahteva za odstetu (npr. vremenske nepogode, zemljotresi, poplave, erupcije vulkana ...). Da bi se zaštitilo od ovakvih neočekivanih vanrednih okolnosti, osiguravajuće društvo ima obavezu da utvrdi i fond sopstvenih sredstava radi izvršenja obaveza. Ova vrsta rezervi naziva se **margina solventnosti**. Prema zakonu o osiguranju Republike Srbije margina solventnosti, kao i tehničke rezerve, se računa posebno za životna i za neživotna osiguranja na kraju svakog obračunskog perioda (31. marta, 30. juna, 30. septembra i 31. decembra) i izračunava se kao ukupna aktiva osiguravajućeg društva umanjena za nematerijalna ulaganja, aktivna vremenska razgraničenja, gubitke, obaveze (uključujući matematičku rezervu osiguranja života) i prenosne pozicije (prenosne premije i rezervisane štete). Osiguravajuće društvo je u obavezi da na kraju svakog obračunskog perioda obezbedi propisanu marginu solventnosti iz njegove slobodne sopstvene imovine, čime garantuje da će biti isplaćene sve naknade štete osiguranicima i biti izvršene sve obaveze čak i kada se društvo nadje u finansijskim teškoćama.

Svi modeli koji će biti predstavljeni u ovom radu su relativno novijeg doba. Teorija rezervi u aktuarstvu se u svetu počela razvijati početkom 80-tih godina prošlog veka i još je u fazi razvijanja. Takodje je važno napomenuti da se ovi modeli primenjuju za računanje visine rezervi samo za *neživnotna* osiguranja, dok se za životna osiguranja koriste drugačiji modeli koji uzimaju u obzir uticaj prirodnih karakteristika života kao što su stopa mortaliteta populacije, pol osiguranika, nasledne bolesti itd. što nije slučaj kod modeliranja visine rezervi neživotnih osiguranja.

Glava 2

Chain-Ladder metod

Svako društvo je u obavezi da obezbedi dovoljnu količinu rezervi da bi isplatilo naknade za štetu koju su njeni osiguranici pretrpeli, za zahteve čije su štete prijavljene, ali se još ne zna visina štete u trenutku podnošenja zahteva - $RBNS$, kao i za naknade šteta koje su se dogodile, ali još nisu prijavljene osiguravaču - $IBNR$. Jedan od osnovnih, ali ujedno i visoko primenljivih metoda za računje rezervi je Chain-Ladder metod. On se zasniva na ideji da se rezerve za buduće periode mogu predvideti i proceniti na osnovu zahteva za odštetu iz prethodnih perioda, tj. na osnovu istorijskih podataka šteta nastalih u prethodnim godinama. Ovaj metod je elementaran i vrlo lagan za primenu, što su njegove velike prednosti. Da bi se primenio u svakodnevnom poslovanju nije potreban stručni statistički softver, već je dovoljan samo Majkrosoftov Eksel. Takodje, razumevanje ovog modela je jasno na intuitivnom nivou i nije potrebno ozbiljnije znanje matematike i aktuarstva. Sa druge strane, baš zbog svoje jednostavnosti, metod ima dosta propusta i mana. Da bi rešili uočene probleme Chain-Ladder-a, aktuari su tokom godina razvijali ovaj metod i raznim modulacijama i unapredjenjima došli do novih metoda zasnovanih na ideji Chain-Ladder-a. U osiguravajućim društvima se često koristi ovaj metod za računanje aktuarskih rezervi ili neka od njegovih varijacija.

2.1 Objašnjenje metoda

Na početku se bira period od n godina u kojem su se dešavale štete za koje su klijenti podnosili zahteve za odštetu i neka se znaju podaci o dinamici i visini isplata tih odšteta. Ove godine se nazivaju **godine štete**. Glavna pretpostavka Chain-Ladder metoda je da je potrebno $n-1$ godina da se plate svi zahtevi za štete nastale u istoj godini. Broj n je konačan i zavisi od obima podataka kojima raspolaže osiguravajuće društvo. Na osnovu poznatih podataka o plaćanjima zahteva za odštetu za sve godine štete, pravi se **tabela plaćanja** u obliku trougla u koju se unose poznati podaci.

U ovom radu biće prikazana praktična primena Chain-Ladder metoda na primeru, tako da će svaki korak algoritma biti potkrepljen numeričkim primerom. Pretpostavlja se da su poznati podaci o nastalim štetama klijentima jednog osiguravajućeg društva u periodu od 2006. do 2013. godine (8 godina šteta). Iz ovoga sledi da je $n-1$ jednak broju 7, odn. da je potrebno 7 godina da se isplate svi zahtevi za odštetu za štete nastale u jednoj kalendarskoj godini. Na primeru, ovo znači da je od svih šteta koje su nastale 2006. godine poslednja isplaćena do 31. decembra 2013. godine (najkasnije 7 godina na-

	Razvojna godina:							
Godina štete:	0	1	2	3	4	5	6	7
2006	1780	893	201	220	63	9	20	16
2007	3226	993	313	349	263	55	24	
2008	3652	1337	773	674	284	135		
2009	2723	1578	1225	705	386			
2010	2923	1743	683	1140				
2011	2990	2427	1593					
2012	3917	1972						
2013	3545							

Tabela 2.1: Plaćanja zahteva za odštetu tokom razvojnih godina

kon godine štete). Pretpostavlja se da se zahtev za odštetu plaća klijentu onog trenutka kada je poznata njegova vrednost, tj. vrednost nastale štete. Stoga se može zaključiti da za štete koje su nastale 2006. godine plaćanje može da se izvrši odmah u 2006. godini, ali i kasnijih godina, od 2007. do 2013. godine. Analogno, zahtevi za odštetu koji su podneti 2007. godine se otplaćuju u periodu od 2007. do 2013. godine. Po pretpostavci da je potrebno sedam godina da se isplate svi podneti zahtevi, postoje štete koje su se realizovale 2007. godine, ali koje osiguravajuće društvo nije nadoknadilo, jer još nije utvrdjena njihova vrednost. Visina isplata u 2014. godini je još nepoznata, ova vrednost mora da se predvidja i za nju moraju da se obezbede rezerve. Za zahteve šteta koje su nastale 2013. godine poznata su plaćanja samo za 2013. godinu, dok se za narednih sedam godina ne zna iznos plaćanja i za sve te vrednosti moraju da se odvoje rezerve.

Chain-Ladder pretpostavlja da postoje ustaljeni obrasci u ponašanju visine isplata tokom godina, tj. da se vrednosti budućih plaćanja mogu predvideti na osnovu istorijskih podataka ranijih isplata. U ovom primeru, na osnovu vrednosti poznatih isplata iz perioda od 2006. do 2013. godine, pokušaće se predvideti kolike će biti vrednosti isplata u 2014. godini i nadalje, a kao posledica toga, dobiće se i ocena količine rezervi koje osiguravajuće društvo treba da čuva.

Prva kolona u tabeli 2.1 označava godine štete, dok prva vrsta označava **razvojne godine**. Za proizvoljnu godinu štete X, razvojna godina 0 označava baš tu godinu X, dok razvojna godina 2 označava kalendarsku godinu $X + 2$. Polje tabele koje se nalazi u preseku godine štete X i razvojne godine 2 označava visinu plaćenih zahteva za odštetu u $X + 2$. godini za X-tu godinu štete.

Polja u tabeli 2.1 označavaju poznate podatke u inkrementalnom obliku - visine plaćenih naknada šteta za svaku godinu posebno u periodu od 2006. do 2013. godine:

$$C_{ij} : i = 1, 2, \ldots, n; j = 0, 1, 2, \ldots, n - i,$$

pri čemu je u ovom primeru $n = 8$.

Kao što se vidi u tabeli 2.1, unešeni podaci obrazuju gornje trougaonu matricu. Cilj je da se predvide vrednosti očekivanih budućih plaćanja u narednim kalendarskim godi-

	Razvojna godina:							
Godina štete:	0	1	2	3	4	5	6	7
2006	1780	2673	2874	3094	3157	3166	3186	3202
2007	3226	4219	4532	4881	5144	5199	5223	
2008	3652	4989	5762	6436	6720	6855		
2009	2723	4301	5526	6231	6617			
2010	2923	4666	5349	6489				
2011	2990	5417	7010					
2012	3917	5889						
2013	3545							

Tabela 2.2: Plaćanja tokom razvojnih godina - kumulativni oblik

nama i na taj način dobije odgovarajuć iznos rezervi. Ove vrednosti budućih plaćanja se nalaze u donjem desnom trouglu tabele, što znači da je cilj dopuniti trougao poznatih vrednosti plaćanja sa ocenama budućih plaćanja do kvadrata. Tabela će se dopuniti baš do kvadrata zato što je glavna pretpostavka da se sva plaćanja prijavljenih zahteva za odštetu vrše u roku od narednih 7 godina. Tabela će biti većih/manjih dimenzija ukoliko se pretpostavi duži/kraći period isplate odšteta.

Kako je pretpostavljeno da će se svi zahtevi za odštetu iste godine štete otplatiti u roku od $n-1$ godine, ovom tehnikom se dobijaju predikcije plaćanja za tačno $n-1$ razvojnu godinu za svaku godinu štete, dok se podaci posle $n-1$. godine neće moći oceniti na ovaj način. Ovom pretpostavkom je uvedeno ograničenje da su sva plaćanja posle $n-1$. razvojne godine jednaka nuli tj. pretpostavlja se da nema tzv. "repova plaćanja". Svejedno je da li se u tabelu plaćanja unose podaci u kumulativnom obliku D_{ij}, ili kao vrednosti plaćenih naknada u iznosima samo za jednu godinu (inkrementalni oblik C_{ij}). Ako su dostupni nekumulativni podaci lako se može doći do kumulativnih sabiranjem vrednosti plaćenih naknada iz svih prethodnih razvojnih godina:

$$D_{ij} = \sum_{k=0}^{j} C_{ik},$$

za sve godine štete $i = 1, \dots, n$.

Posmatrajući tabelu 2.2 sa kumulativnim iznosima plaćanja odšteta može se doći do zaključka koliki je iznos isplaćenih odšteta do 2014. godine za svaku godinu štete, kako su tokom godina bili otplaćivani zahtevi za odštetu i koja je bila dinamika isplate. Takodje, iz podataka u ovom obliku mogu se dobiti **količnici isplata** koji označavaju odnos isplaćenih zahteva za dve uzastopne godine:

$$B_{ij} = \frac{D_{ij}}{D_{i,j-1}},$$

za sve $i = 1, \dots, n-1$ i $j = 1, \dots, n-i$. Za ranije pomenuti primer, količnici su izračunati i prikazani u tabeli 2.3.

	Količnici:						
Godina štete:	1/0	2/1	3/2	4/3	5/4	6/5	7/6
2006	1.5017	1.0752	1.0765	1.0204	1.0029	1.0063	1.0050
2007	1.3078	1.0742	1.0770	1.0539	1.0107	1.0046	
2008	1.3661	1.1549	1.1170	1.0441	1.0201		
2009	1.5795	1.2848	1.1276	1.0619			
2010	1.5963	1.1464	1.2131				
2011	1.8117	1.2941					
2012	1.5034						

Tabela 2.3: Količnici isplata

Analizirajući vrednosti količnika iz tabele 2.3, dolazi se do zaključka da će za dve uzastopne godine količnik uvek biti neki broj veći ili jednak jedinici. On nikada neće biti manji od 1 zato što se dobija iz tabele sa kumulativnim podacima, odn. iz količnika većeg iznosa plaćanja zahteva za odštetu sa manjim ili jednakim iznosom. Ukoliko je količnik baš jednak jedinici, to znači da izmedju dve uzastopne godine nije bilo plaćanja odšteta.

Koristeći količnike plaćanja, dolazi se do **razvojnih faktora**. Oni su jako bitni za Chain-Ladder, jer se na osnovu njih prave predikcije budućih plaćanja odšteta. Postoje različite metode računanja razvojnih faktora koje se medjusobno razlikuju po načinu na koji se uzimaju u obzir količnici plaćanja. Razlikuju se sledeće tri metode: metoda proseka, metoda petogodišnjeg proseka i metoda težinskog proseka. Različitim metodama se dobijaju različite vrednosti faktora, ali bez obzira koja se metoda koristi, cilj je dobijanje razvojnih faktora koji se označavaju sa $\lambda_j : j = 1, 2, \ldots, n-1$, uz pomoć kojih će se predvideti vrednosti budućih plaćanja zahteva za odštetu i izračunati vrednost rezervi.

Prvi metod računanja razvojnih faktora je metod proseka. On računa razvojni faktor kao aritmetičku sredinu svih količnika plaćanja. Za svaku kolonu u tabeli plaćanja, što predstavlja jednu razvojnu godinu, računa se jedan faktor. Tako se j-ti faktor računa kao aritmetička sredina svih količnika plaćanja u j-toj koloni tabele plaćanja. Drugim rečima, razvojni faktor za j-tu razvojnu godinu se računa kao aritmetička sredina svih količnika plaćanja za odgovarajuće j-te razvojne godine:

$$\lambda_j = \sum_{i=1}^{n-j} \frac{B_{ij}}{n-j}, j = 1, \ldots, n-i.$$

Metod petogodišnjeg proseka je drugi metod za računanje razvojnih faktora. Ovaj metod je analogan prethodnom samo što se u aritmetičku sredinu uzima samo pet poslednjih količnika plaćanja. Petogodišnji prosek se zasniva na ideji da su podaci iz poslednjih pet godina merodavniji i bolji za predvidjanje očekivanih budućih vrednosti plaćanja od onih podataka starijih od pet godina:

$$\lambda_j = \begin{cases} \sum_{i=n-j-4}^{n-j} \frac{B_{ij}}{5}, & \text{ako } j = 1, 2, \ldots, n-5; \\ \sum_{i=1}^{n-j} \frac{B_{ij}}{n-j}, & \text{ako } j = n-4, \ldots, n-1. \end{cases}$$

	Razvojni faktori:						
Metod:	1	2	3	4	5	6	7
Prosek	1.5238	1.1716	1.1222	1.0451	1.0112	1.0055	1.0050
Petogodišnji prosek	1.5714	1.1909	1.1222	1.0451	1.0112	1.0055	1.0050
Težinski prosek	1.5159	1.1823	1.1284	1.0483	1.0132	1.0053	1.0050

Tabela 2.4: Razvojni faktori

Poslednji, treći metod koji će u ovom radu biti prezentovan je metod težinskog proseka koji j-ti razvojni faktor λ_j, računa kao količnik zbira svih kumulativnih vrednosti plaćanja u $j+1$. razvojnoj godini i zbira svih kumulativnih vrednosti plaćanja u j-oj razvojnoj godini za odgovarajuće godine štete. U primeru iz ovog rada, posmatrajući podatke iz tabele 2.2, prvi razvojni faktor se računa kao količnik zbira svih sedam vrednosti u drugoj koloni i zbira odgovarajućih sedam vrednosti u prvoj koloni. Analogno tome, drugi razvojni faktor se računa kao količnik zbira svih šest vrednosti isplata iz kolone 2 i zbira odgovarajućih vrednosti isplata iz kolone 1:

$$\lambda_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} D_{ij}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} D_{i,j-1}}.$$

Ovaj metod se naziva metod težinskog proseka zato što uzima u obzir visine iznosa u svakoj godini štete. Koncept računanja težinske aritmetičke sredine je jasan na intuitivnom nivou i daje veći značaj (težinu) godinama sa većim iznosom isplata, dok obična aritmetička sredina daje jednak značaj (težinu) svakoj godini. Takodje, usled rasta broja klijenata osiguravajućeg društva i stope inflacije tokom godina, vrednosti plaćanja će biti sve veće i veće, a samim tim će i ovaj metod dodeliti poslednjim godinama veći značaj, što mu daje još realističniju notu.

U tabeli 2.4 se vide rezultati računanja razvojnih faktora preko sva tri metoda. Razvojni faktori su dalje potrebni da bi se napravile predikcije budućih vrednosti isplata šteta. Konačna suma svih ocena budućih plaćanja će biti vrednost rezervi koja mora da se čuva. Još jednom je važno napomenuti da Chain-Ladder metod pretpostavlja da su podaci iz prethodnih godina dovoljni da se predvide buduća plaćanja. Upravo zbog toga se isti razvojni faktor koristi za računanje očekivanih budućih plaćanja za odredjenu razvojnu godinu svake godine štete. U tabeli 2.5 se mogu videti izračunate vrednosti budućih plaćanja na osnovu metoda proseka.

U prvom redu tabele 2.5 su poznate sve vrednosti plaćanja odšteta za štete nastale 2006. godine. Kako je početna pretpostavka da je potrebno sedam godina da se otplate svi zahtevi jedne godine štete, svi zahtevi iz 2006. godine su plaćeni do 2013. godine, te za tu godinu štete ne treba praviti nikakve predikcije. Sa druge strane, zahtevi šteta iz 2007. godine su bili plaćani klijentima u periodu od šest godina, tj. od 2007. do 2013. godine, tako da treba izračunati očekivanu buduću vrednost plaćanja samo za 2014. godinu. Ona se dobija tako što se vrednost plaćanja iz 2013. godine pomnoži sa razvojnim faktorom za sedmu razvojnu godinu. Na ovaj način se dobija iznos očekivane buduće isplate, a

	Razvojna godina:									
Godina štete:	1	2	3	4	5	6	7	Očekivana ukupna plaćanja:	Isplate do 2014. godine:	Očekivana buduća plaćanja (rezerve):
2006								3202	3202	0
2007							5249	5249	5223	26
2008						6892	6927	6927	6855	72
2009					6691	6728	6762	6762	6617	145
2010				6782	6858	6895	6930	6930	6489	441
2011			7867	8222	8314	8359	8401	8401	7010	1391
2012		6900	7743	8092	8183	8227	8269	8269	5889	2380
2013	5402	6329	7102	7423	7506	7547	7585	7585	3545	4040
UKUPNO:								53325	44830	**8494**

Tabela 2.5: Rezerve dobijene metodom proseka

ujedno i iznos rezerve koje društvo treba da čuva za isplatu šteta nastalih 2007. godine. Za štete nastale u 2013. godini poznata je samo vrednost plaćanja u 2013. godini, dok ostale vrednosti moraju da se predvide. Očekivana buduća vrednost plaćanja za 2014. godinu se dobija tako što se razvojni faktor za prvu razvojnu godinu pomnoži sa poznatom vrednosti plaćanja iz 2013. godine i tako redom razvojnim faktorima množi do sedme razvojne godine. Na ovaj način se dobija poslednji red u tabeli 2.5.

$$\hat{D}_{i,n-i+1} = D_{i,n-i}\lambda_{n-i+1}$$

$$\hat{D}_{i,k} = \hat{D}_{i,k-1}\lambda_k,$$
$$k = n-i+2, n-i+3, \ldots, n-1 \ .$$

Poslednje tri kolone u tabeli su jako važne. Prva kolona predstavlja vrednosti očekivanih ukupnih budućih plaćanja za svaku godinu posebno. To su prediktivne vrednosti isplata svih zahteva za naknadu šteta koje su se dogodile u istoj godini štete, odn. to je ukupna vrednost koja je isplaćena tokom sedam razvojnih godina da bi se namirile sve obaveze iz zahteva za odštetu jedne godine štete. Druga kolona pokazuje vrednosti isplata do 2014. godine, koje su poznate i koje su već plaćene, dok treća daje razliku prve dve kolone i predstavlja vrednost očekivanih budućih plaćanja za svaku godinu štete posebno. U poslednjem redu tabele se vidi zbir ukupnih vrednosti očekivanih budućih plaćanja za sve godine štete. Ovo je ujedno i vrednost rezervi koje osiguravajuće društvo mora da čuva da bi obezbedilo solventnost i plaćanje ugovornih obaveza na vreme. U tabelama 2.6 i 2.7 se mogu videti izračunate vrednosti budućih plaćanja i ukupne rezerve koje su izračunate metodama petogodišnjeg proseka i težinskog proseka.

Metodi petogodišnjeg proseka i težinskog proseka su izračunali vrednost rezervi osiguravajućeg društva i one iznose 8997 i 8897, respektivno. Uporedjujući ove dve vrednosti sa vrednošću dobijenom metodom proseka 8494, jasno se vidi da metod proseka procenjuje najmanju vrednost rezervi, metod petogodišnjeg proseka najveću vrednost, dok metod

	Razvojna godina:									
Godina štete:	1	2	3	4	5	6	7	Očekivana ukupna plaćanja:	Isplate do 2014. godine:	Očekivana buduća plaćanja (rezerve):
2006								3202	3202	0
2007							5249	5249	5223	26
2008						6892	6927	6927	6855	72
2009					6691	6728	6762	6762	6617	145
2010				6782	6858	6895	6930	6930	6489	441
2011			7867	8222	8314	8359	8401	8401	7010	1391
2012		7013	7870	8225	8317	8363	8405	8405	5889	2516
2013	5571	6634	7445	7781	7868	7911	7951	7951	3545	4406
UKUPNO:								53827	44830	**8997**

Tabela 2.6: Rezerve dobijene metodom petogodišnjeg proseka

	Razvojna godina:									
Godina štete:	1	2	3	4	5	6	7	Očekivana ukupna plaćanja:	Isplate do 2014. godine:	Očekivana buduća plaćanja (rezerve):
2006								3202	3202	0
2007							5249	5249	5223	26
2008						6891	6926	6926	6855	71
2009					6705	6740	6774	6774	6617	157
2010				6802	6892	6928	6963	6963	6489	474
2011			7910	8292	8402	8446	8488	8488	7010	1478
2012		6963	7857	8236	8345	8389	8431	8431	5889	2542
2013	5374	6354	7170	7516	7615	7655	7694	7694	3545	4149
UKUPNO:								53727	44830	**8897**

Tabela 2.7: Rezerve dobijene metodom težinskog proseka

težinskog proseka procenjuje neku vrednost rezervi izmedju njih. Ovaj odnos izračunatih rezervi ne mora da važi u opštem slučaju, on isključivo zavisi od podataka u tabeli plaćanja tj. od visina isplata iz prethodnih godina.

2.2 Implementacija u programskom paketu R

U prethodnom delu rada, da bi se izračunala vrednost aktuarskih rezervi, objašnjen je Chain-Ladder metod koji je dosta jednostavan i intuitivan. Njegova velika prednost je što nije potrebno posedovati sofisticiran matematički softver da bi se došlo do željenih rezultata. Pomoću Excel tabele, unošenjem podataka i odgovarajućim množenjem ćelija, dobija se vrednost budućih rezervi. Doduše, ovaj postupak može biti tehnički komplikovan, jer su za njega potrebni preciznost i vreme, pre svega za unošenje poznatih podataka, a potom i za pravljenje odgovarajućih tabela koje daju predikciju budućih plaćanja. Ono što je moguće da se desi prilikom računanja vrednosti rezervi na ovaj način je da se napravi neka greška pogrešnim unošenjem vrednosti ili množenjem pogrešnih ćelija u tabelama.

Danas su razvijeni mnogi softveri koji na jednostavan način računaju rezerve umesto nas. U ovom radu biće korišćen programski paket *R* i biće objašnjen postupak kojim se može doći do istih rezultata Chain-Ladder-a pomoću samo nekoliko komandi. *R* zahteva da se prvo instalira poseban paket - Chain Ladder paket, pomoću kojeg se može raditi sa podacima za računanje rezervi osiguravajućeg društva (podaci dati u obliku trougla). U konzolni prozor je potrebno ukucati komandu:

$$install.packages('ChainLadder')$$

Kada je završena instalacija, počinje unos poznatih podataka. U ovom primeru matrica sa podacima o plaćanjima u prethodnim godinama je nazvana *trougao* i unosi se u program na sledeći način:

$$\begin{gathered}
trougao <- matrix(c(\\
+1780, 2673, 2874, 3094, 3157, 3166, 3186, 3202, \\
+3226, 4219, 4532, 4881, 5144, 5199, 5223, NA, \\
+3652, 4989, 5762, 6436, 6720, 6855, NA, NA, \\
+2723, 4301, 5526, 6231, 6617, NA, NA, NA, \\
+2923, 4666, 5349, 6489, NA, NA, NA, NA, \\
+2990, 5417, 7010, NA, NA, NA, NA, NA, \\
+3917, 5889, NA, NA, NA, NA, NA, NA, \\
+3545, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA), \\
+nrow = 8, byrow = TRUE)
\end{gathered}$$

Da bi se pravilno računale rezerve pomoću Chain-Ladder metoda, u program je potrebno uneti podatke u kumulativnom obliku. Potom treba izračunati razvojne faktore $\lambda_j : j = 1, 2, \dots, n-1$. R koristi metodu težinskog proseka da bi dobio razvojne faktore, tako da se koristi sledeća formula:

$$\lambda_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} D_{ij}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} D_{i,j-1}}.$$

Razvojni faktori se dobijaju tako što se u konzolni prozor unesu sledeće komande:

$$n < - 8$$
$$f < - \text{sapply(1:(n-1), function(i)sum(trougao[c(1:(n-i)),i+1])/sum(trougao[c(1:(n-i)),i]))}$$

Na ovaj način je unet broj n koji označava broj godina štete koji se pojavljuju u poznatim podacima, kao i f koji predstavlja vektor sa vrednostima razvojnih faktora. Može se primetiti da je formula za dobijanje razvojnih faktora ista kao u metodu težinskog proseka samo što je prilagodjena pisanoj strukturi i oznakama programa. Koristeći ove komande, dobijaju se vrednosti razvojnih faktora u vektoru f koje su identične ranije dobijenim pomoću obične Excel tabele. Program neće sam prikazati dobijene vrednosti, već je potrebno ukucati vektor f u konzolni prozor da bi se iščitale izračunate vrednosti razvojnih faktora:

$$[1.515912, 1.182296, 1.128437, 1.048251, 1.013248, 1.005260, 1.005022].$$

Nakon što je ovo izračunato, u program treba da se ukuca komanda kojom će se tabela sa poznatim podacima plaćanja u obliku trougla dopuniti do kvadrata sa ocenama budućih plaćanja dobijenih metodom težinskog proseka. Nova tabela sa punim podacima će u ovom radu biti nazvana *ceotrougao*. Ona se može izračunati na sledeći način:

$$ceotrougao < - \, cbind(trougao, Ult = rep(0, 8))$$
$$for(k \; in \; 1 : n)ceotrougao[(n - k + 1) : n, k + 1] < -ceotrougao[(n - k + 1) : n, k] * f[k]$$

Ovim putem se na već postojeću tabelu *trougao* primenjuju razvojni faktori i dobijaju predikcije budućih plaćanja. Takodje, komandom *cbind* se dodaje nova kolona u tabeli: *Ult*, koja označava ukupna kumulativna plaćanja za svaku godinu štete. U ovom radu, kolona *Ult* je jednaka sedmoj, poslednjoj razvojnoj godini, zato što je napravljena pretpostavka da se sve isplate zahteva za odštetu izvršavaju do kraja sedme razvojne godine i ništa posle toga. U programu R se može izračunati i dodatni razvojni faktor za sva plaćanja koja nastanu nakon $n - 1$. razvojne godine, tzv. "repovi plaćanja". Na ovaj način se vrši korekcija vrednosti u poslednjoj razvojnoj godini množenjem sa novim razvojnim faktorom, što se može iščitati u koloni *Ult*.

Dalje je potrebno uneti komandu *round* pomoću koje se vrši zaokruženje dobijenih ocena budućih plaćanja na cele brojeve. Konačno se računa vrednost rezervi osiguravajućeg društva tako što se oduzme ukupna kumulativna ocena budućih plaćanja (data u sedmoj razvojnoj godini) sa poslednjim poznatim kumulativnim vrednostima plaćanja iz tabele *trougao*. Ocena rezervi se dobija sledećim komandama:

$$round(ceotrougao)$$
$$sum(ceotrougao[, 8] - getLatestCumulative(trougao))$$

Koristeći programski paket R dolazi se do iste vrednosti ocene rezervi kao što se moglo doći peške pravljenjem tabela u Excelu. Ova vrednost iznosi 8897, baš kao što je dobijeno u tabeli 2.7 korišćenjem metode težinskog proseka. Već je napomenuto da za računanje aktuarskih rezervi Chain-Ladder metod ne zahteva specijalni softver, ali u današnjem svetu brzih računara i specijalnih matematičkih programa, postoji mogućnost da se olakša način računanja rezervi koji garantuje brzo dobijanje željenih rezultata bez mogućnosti nastanka greške.

	Razvojna godina:							
Godina štete:	0	1	2	3	4	5	6	7
2006	1780	2673	2874	3094	3157	3166	3186	3202
2007	3226	4219	4532	4881	5144	5199	5223	**5249**
2008	3652	4989	5762	6436	6720	6855	**6891**	**6926**
2009	2723	4301	5526	6231	6617	**6705**	**6740**	**6774**
2010	2923	4666	5349	6489	**6802**	**6892**	**6928**	**6963**
2011	2990	5417	7010	**7910**	**8292**	**8402**	**8446**	**8488**
2012	3917	5889	**6963**	**7857**	**8236**	**8345**	**8389**	**8431**
2013	3545	**5374**	**6354**	**7170**	**7516**	**7615**	**7655**	**7694**

Tabela 2.8: Ocene budućih plaćanja dobijene pomoću softvera *R*

2.3 Kritike Chain-Ladder metoda

Chain-Ladder metod je pogodan za računanje rezervi zato što je jednostavan u tehničkom smislu i intuitivan u suštinskom smislu. Prilikom računanja, metod ni u jednom trenutku ne sadrži profesionalno mišljenje ovlašćenog aktuara, već je apsolutno objektivan, što znači da će očekivana vrednost rezervi biti izračunata u zavisnosti koje su vrednosti unetih podataka u tabeli plaćanja. Takodje, kako godine prolaze i kako se prikupljaju informacije o plaćanjima zahteva za odštetu, tako tabela plaćanja postaje većih dimenzija, a i dobijena ocena teži stvarnoj vrednosti rezervi. Što je veći uzorak iz kojeg se donose zaključci o plaćanjima, to je bolja ocena rezervi osiguravajućeg društva.

Baš zbog svoje jednostavnosti i linearnosti, Chain-Ladder ima mnoge propuste. Ovlašćeni aktuar mora dobro da prouči podatke date u tabeli plaćanja pre nego što primeni ovaj metod. Ukoliko se desi da je jedne godine bilo isplaćeno znatno više zahteva nego uobičajeno, to će se odraziti na vrednost razvojnih faktora. Sa većim faktorima dobijaju se i veće vrednosti budućih isplata, a samim tim i veće vrednosti rezervi nego što je to zaista potrebno. Ovaj problem nastaje usled pretpostavke da plaćanja iz prethodnih godina mogu dobro da predvide plaćanja u budućnosti, stoga ovaj metod ne može da se primeni u onim slučajevima kada se pojavljuju odstupanja od uobičajenih vrednosti. Drugim rečima, Chain-Ladder daje pouzdane informacije o visini rezervi koje treba čuvati samo kada su podaci o plaćanjima konzistentni i bez velikih varijacija.

Pretpostavka o konzistentnosti i maloj varijabilnosti podataka često nije primenljiva u praksi. Dovoljno je da se u toku godine pojavi jedan ili više "*velikih*" zahteva za odštetu u toku jedne godine ili da se promeni strategija menadžmenta društva o načinu isplaćivanja odšteta, procena rezervi će se značajno promeniti. Na primer, ako se u tabeli plaćanja sa kumulativnim vrednostima poveća iznos plaćenih šteta za godinu štete 2012. i prvu razvojnu godinu za 10%, tj. promeni vrednost u tabeli sa 5889 na 6478, svi dalje izračunati podaci će se takodje promeniti. Ovo je slučaj kada je jedne godine isplaćeno više nego obično zahteva za odštetu podnetih jedne godine štete, npr. usled neke elementarne nepogode (poplave, zemljotresi, erupcija vulkana . . .).

Kao što se vidi iz tabela 2.8 , 2.9 i 2.10 , koristeći metodu petogodišnjeg proseka dobijena je ukupna vrednost rezervi veća za 10%, tj. iznos rezervi se povećao sa 9348 na

	Razvojna godina:							
Godina štete	0	1	2	3	4	5	6	7
2006	1780	2673	2874	3094	3157	3166	3186	3202
2007	3226	4219	4532	4881	5144	5199	5223	
2008	3652	4989	5762	6436	6720	6855		
2009	2737	4301	5526	6231	6617			
2010	2923	4666	5349	6489				
2011	2990	5417	7010					
2012	3917	**6478**						
2013	3545							

Tabela 2.9: Povećanje jednog iznosa plaćanja za 10%

	Količnici:						
Godina štete	1/0	2/1	3/2	4/3	5/4	6/5	7/6
2006	1.5017	1.0752	1.0765	1.0204	1.0029	1.0063	1.0050
2007	1.3078	1.0742	1.0770	1.0539	1.0107	1.0046	
2008	1.3661	1.1549	1.1170	1.0441	1.0201		
2009	1.5795	1.2848	1.1276	1.0619			
2010	1.5963	1.1464	1.2131				
2011	1.8117	1.2941					
2012	**1.6538**						
Razvojni faktori:	**1.6015**	1.1909	1.1222	1.0451	1.0112	1.0055	1.0050

Tabela 2.10: Količnici i razvojni faktori

9671. Ono što se može zaključiti iz primera, prilikom male promene podataka u tabeli, nastala je velika promena u predikciji rezervi, stoga je Chain-Ladder nestabilan metod.

Može da se desi i slučaj da je menadžment osiguravajućeg društva jedne kalendarske godine napravio novu strategiju isplata odšteta i odlučio da se svi zahtevi isplaćuju brže i efikasnije nego u prethodnom periodu. Na primer, neka se pretpostavi da je ova promena nastala u 2013. godini i da su isplate svih zahteva u 2013. godini, bez obzira na godinu štete, uvećane za 10%. Ova promena će se na tabeli odraziti u povećanju svih vrednosti plaćanja u 2013. godini za 10%, tj. svih vrednosti na sporednoj dijagonali tabele.

	Razvojna godina:									
Godina štete	1	2	3	4	5	6	7	Očekivana ukupna plaćanja:	Isplate do 2014. godine:	Očekivana buduća plaćanja (rezerve):
2006								3202	3202	0
2007							5249	5249	5223	26
2008						6892	6927	6927	6855	72
2009					6691	6728	6761	6762	6617	145
2010				6782	6858	6895	6930	6930	6489	441
2011			7867	8222	8314	8359	8401	8401	7010	1391
2012		7715	8658	9048	9149	9199	9246	9246	6478	2768
2013	5677	6761	7587	7929	8018	8062	8103	8103	3545	4558
UKUPNO:								54819	45419	**9400**

Tabela 2.11: Rezerve u slučaju jednog povećanja za 10%

Koristeći metodu petogodišnjeg proseka i nove podatke iz tabele, može se izračunati iznos rezervi koje treba čuvati za buduće isplate zahteva za odštetu. Kao što se može videti iz primera u tabelama 2.11 , 2.12 i 2.13, rezultati su u kontradiktornosti sa našom intuicijom. Odluka da se zahtevi za odštetu plaćaju brže i efikasnije treba da rezultira da će u budućnosti biti manje isplata zahteva za odštetu (zato što je veliki deo prijavljenih šteta brže isplaćen usled nove strategije plaćanja) i da će ukupan iznos budućih obaveza da se smanji, a samim tim i da će ukupan iznos rezervi da se smanji. Sa druge strane, iz tabele 2.13 se može primetiti da metod preporučuje veću vrednost čuvanih rezervi, sa 9348 na 23211, tj. za čak 248%!

Chain-Ladder metod ne ume sam da prepozna ovakve vanredne situacije. Povećanje vrednosti u tabeli plaćanja metod tumači kao da je osiguravajuće društvo imalo više prijavljenih zahteva za odštetu i više plaćanja u toku godina, pa stoga treba da čuva više rezervi. Ovlašćeni aktuar treba da uzme u obzir promenu strategije isplaćivanja ili pojavu elementarnih nepogoda kada računa rezerve za buduća plaćanja pomoću ovog metoda, jer će ove promene usloviti nepotrebno povećanje ocene rezervi. Najbolji način da se provere promene u plaćanjima zahteva za odštetu u jednoj kalendarskoj godini je da se iščitaju i medjusobno uporede vrednosti na sporednoj dijagonali i na svim dijagonalama iznad sporedne dijagonale tabele plaćanja, zato što jedna dijagonala predstavlja plaćanja u jednoj kalendarskoj godini. Ukoliko se primeti velika varijabilnost medju podacima, to je znak ovlašćenom aktuaru da ne može doneti zaključke o rezervama samo na osnovu dobijene ocene iz ovog modela.

	Razvojna godina:							
Godina štete	0	1	2	3	4	5	6	7
2006	1780	2673	2874	3094	3157	3166	3186	**3522**
2007	3226	4219	4532	4881	5144	5199	**5745**	
2008	3652	4989	5762	6436	6720	**7541**		
2009	2737	4301	5526	6231	**7279**			
2010	2923	4666	5349	**7138**				
2011	2990	5417	**7711**					
2012	3917	**6478**						
2013	**3900**							

Tabela 2.12: Povećanje svih iznosa plaćanja u 2013. godini za 10%

	Količnici:						
Godina štete	1/0	2/1	3/2	4/3	5/4	6/5	7/6
2006	1.5017	1.0752	1.0765	1.0204	1.0029	1.0063	**1.1055**
2007	1.3078	1.0742	1.0770	1.0539	1.0107	**1.1051**	
2008	1.3661	1.1549	1.1170	1.0441	**1.1221**		
2009	1.5795	1.2848	1.1276	**1.1681**			
2010	1.5963	1.1464	**1.3344**				
2011	1.8117	**1.4235**					
2012	**1.6538**						

Razvojni faktori:	1.6015	1.2168	1.1465	1.0716	1.0452	1.0557	1.1055

Tabela 2.13: Količnici i razvojni faktori

	Razvojna godina:									
Godina štete	1	2	3	4	5	6	7	Očekivana ukupna plaćanja:	Isplate do 2014. godine:	Očekivana buduća plaćanja (rezerve):
2006								3522	3522	0
2007							6352	6352	5745	606
2008						7960	8801	8801	7541	1260
2009					7608	8032	8879	8879	7279	1600
2010				7649	7995	8440	9331	9331	7138	2193
2011			8841	9474	9902	10454	11557	11557	7711	3846
2012		7882	9037	9684	10122	10686	11813	11813	6478	5335
2013	6245	7599	8712	9336	9758	10302	11389	11389	3900	7489
UKUPNO:								71643	49313	**22330**

Tabela 2.14: Rezerve u slučaju povećanja iznosa plaćanja u 2013. godini za 10%

Glava 3

Bornhuetter-Fergusonov metod

Aktuari su tokom vremena pokušavali da smisle nove metode računanja tehničkih rezervi kako bi unapredili već postojeći Chain-Ladder metod i ublažili njegove nedostatke. Kao što je već navedeno, Chain-Ladder je objektivan i sprovodi se mehanički bez tumačenja podataka koji su dati. Metod koji će u nastavku rada biti predstavljen pretpostavlja da istorijski podaci o plaćanjima zahteva za odštetu nisu dovoljno dobri ocenjivači budućih plaćanja. Bornhuetter-Fergusonov metod inkorporira u ocenjivanje rezervi stručno mišljenje aktuara, kao i druge poznate informacije o tržištu osiguranja.

Poznato je da Chain-Ladder pretpostavlja vezu izmedju kumulativnih plaćanja u razvojnim godinama preko razvojnih faktora $\lambda_j, j = 1, 2, \ldots, n-1$ na sledeći način:

$$\hat{D}_{ij} = D_{i,j-1}\lambda_j.$$

Na ovaj način, preko razvojnih faktora, može se dobiti ocena ukupnih plaćanja za odštetu i-te godine štete:

$$\hat{D}_{i,n-1} = D_{i,j-1}\lambda_j\lambda_{j+1}\ldots\lambda_{n-1}.$$

U ovoj jednakosti, $D_{i,j-1}$ predstavlja kumulativnu vrednost otplaćenih zahteva za odštetu do sada, a $\hat{D}_{i,n-1}$ predstavlja ocenu ukupne vrednosti plaćanja koju će osiguravajuće društvo morati da izdvoji za štete koje su nastale u i-toj godini štete. Iz prethodne jednakosti važi:

$$D_{i,j-1} = \frac{\hat{D}_{i,n-1}}{\lambda_j\lambda_{j+1}\ldots\lambda_{n-1}}.$$

Chain-Ladder računa vrednost rezervi za i-tu godinu štete tako što od očekivanih ukupnih plaćanja oduzme vrednost već isplaćenih vrednosti do sada:

$$\hat{R}_i = \hat{D}_{i,n-1} - D_{i,j-1} = \hat{D}_{i,n-1}(1 - \frac{1}{\lambda_j\lambda_{j+1}\ldots\lambda_{n-1}}).$$

Ovde je važno napomenuti da je vrednost $\hat{D}_{i,n-1}$ dobijena preko Chain-Ladder metoda, pa se može napisati sa oznakom CL : $\hat{D}^{CL}_{i,n-1}$. Bornhuetter-Fergusonov metod se razlikuje od Chain-Ladder-a po tome što na drugačiji način dolazi do ove vrednosti. $\hat{D}^{BF}_{i,n-1}$ se dobija množenjem dve komponente: vrednosti sakupljenih premija od osiguranika u i-toj godini štete i **očekivanog procenta gubitka**. Očekivani procenat gubitka je broj izmedju

Godina štete	P_i	$\hat{D}^{BF}_{i,n-1}$	Λ_i	$\hat{R}_i$
2007	8770	6139	1.0050	31
2008	10880	7616	1.0105	79
2009	9050	6335	1.0218	135
2010	9740	6818	1.0679	434
2011	11220	7854	1.1985	1301
2012	11920	8344	1.4041	2401
2013	12330	8631	2.1396	4597
UKUPNO:				**8978**

Tabela 3.1: Rezerve dobijene Bornhuetter-Fergusonovom metodom

0 i 1 koji daje predikciju koliki procenat ukupno sakupljenih premija će biti isplaćen na izvršenje obaveza iz ugovora o osiguranju. Ovo znači da se kumulativna vrednost ukupnih plaćanja zahteva za odštetu jedne godine štete računa kao procenat ukupno sakupljenih premija u toj godini štete:

$$\hat{D}^{BF}_{i,n-1} = \xi P_i.$$

U prethodnoj jednakosti ξ predstavlja očekivani procenat gubitka, a P_i označava vrednost sakupljene premije u i-toj godini štete. Bornhuetter-Fergusonov metod pretpostavlja da se vrednost ukupnih isplata u jednoj godini može izračunati na osnovu informacije o sakupljenim premijama te godine. Vrednost ξ predstavlja deo modela koji se ne može saznati na osnovu informacija o plaćanjima zahteva za odštetu u prethodnim godinama, već se odredjuje na osnovu stručnog mišljenja aktuara i drugih spoljnih informacija koje poseduju aktuar i menadžment osiguravajućeg društva. Ovde nastaje razlika izmedju Chain-Ladder metoda koji je apsolutno objektivan i ne dopušta da mišljenje aktuara o poznatim podacima utiče na ocenjivanje rezervi osiguravača. Kombinujući dva metoda dobija se ocenjena vrednost rezervi za i-tu godinu štete:

$$\hat{R}_i = \hat{D}^{BF}_{i,n-1}(1 - \frac{1}{\lambda_j \lambda_{j+1} \dots \lambda_{n-1}}) = \hat{D}^{BF}_{i,n-1}(1 - \frac{1}{\Lambda_i}),$$

dok se ukupna vrednost rezervi računa sabiranjem ocenjenih vrednosti rezervi po svim godinama štete:

$$\hat{R} = \sum_{i=1}^{n} \hat{R}_i.$$

U tabeli 3.1 se jasno može videti način na koji je izračunata ocena rezervi. U primeru je pretpostavljen očekivan procenat gubitka $\xi = 70\%$. Iz tehničkih razloga, radi dobijanja preglednije formule, uvodi se oznaka $\Lambda_i = \prod_{j=n-i}^{n-1} \lambda_j$ za svaku godinu štete $i = 1, 2, \dots, n-1$ koja označava proizvod odgovarajućih razvojnih faktora koje je potrebno pomnožiti sa $\hat{D}^{BF}_{i,n-1}$ da bi se dobila ocena rezervi za i-tu godinu štete. Kao što se vidi u tabeli i iz formula za računanje rezervi, ovaj model zahteva informaciju o visini sakupljenih premija osiguranja P_i tokom posmatranih godina štete.

Važno je napomenuti da očekivani procenat gubitka ne mora da bude isti za sve godine. Ova vrednost može da se računa za svaku godinu štete, pa će se na taj način dobiti vrednosti ξ_i , $i = 1, 2, \ldots, n$ tj. procene aktuara za svaku godinu štete koji će procenat od ukupnih sakupljenih premija biti potrošen na plaćanje zahteva za odštetu prijavljenih u toj godini štete.

Postoji veliki rizik od greške kada se koristi ovaj metod. Ukoliko menadžment društva ili aktuar loše procene vrednost ξ, može se doći do netačnih i nepreciznih vrednosti ocene rezervi. Na osnovu jednostavnog primera se može uvideti kako se stiže do nelogičnih podataka o rezervama ukoliko se metod ne sprovodi uz pažljivo proučavanje podataka koji su poznati. Na primer, neka važi pretpostavka da je osiguravajuće društvo do sada računalo rezerve za svaku godinu štete sa očekivanim procentom gubitka od 75% i neka je menadžment društva odlučio da ove godine smanji premijske stope koje plaćaju osiguranici. U ovom slučaju doći će do smanjenja ukupne vrednosti sakupljenih premija osiguranja (usled manje stope premije koju osiguranici plaćaju), a samim tim i do smanjenja ocene rezervi koja se i dalje dobija koristeći procenat gubitka od 75%.

Prednosti ovog metoda su pre svega njegova stabilnost, za razliku od Chain-Ladder-a. Ovo znači da se za male promene očekivanog procenta gubitka ili male promene vrednosti sakupljenih premija dobijaju male promene u oceni rezervi. U nekim slučajevima kada ne postoje istorijski podaci o plaćanjima zahteva za odštetu (kao kod novih vrsta osiguranja) neće moći da se primeni Chain-Ladder metod, već će ovo biti jedini način da se dodje do informacija o rezervama osiguravajućeg društva, preko poznatih informacija o sakupljenim premijama i očekivanom procentu gubitka. Takodje, Bornhuetter-Fergusonov metod dozvoljava da se koriste podaci iz ostalih, spoljašnjih izvora da bi se dobila procena očekivanog procenta gubitka, čime se unosi subjektivnost i stručno mišljenje u model. Ova činjenica može da bude i velika mana prilikom računanja ukoliko informacije o kretanjima na tržištu nisu dostupne ili ukoliko menadžment loše upravlja istima.

Glava 4

Stohastički pristup računanja rezervi

4.1 Uvod

U Chain-Ladder metodu podaci o visinama plaćanja zahteva za odštetu posmatrani su kroz razvojne godine za svaku godinu štete posebno. Uvodjenjem pretpostavke da se vrednosti plaćanja zahteva za odštetu dobijaju kao realizovane vrednosti neke raspodele verovatnoće, dobijaju se novi modeli računanja rezervi koje se zasnivaju na Chain-Ladder metodu. Ovo su **stohastički modeli** koji su dobri ocenjivači ocene rezervi i koji su u velikoj prednosti u odnosu na ostale vrste modela zato što računaju vrednost greške te ocene.

Modeli koji će biti prezentovani u radu se zasnivaju na Chain-Ladder metodu i svi imaju isti cilj: da daju dobru ocenu rezervi koje osiguravajuće društvo treba da čuva da bi moglo da plati sve ugovorne obaveze. Različiti modeli se dobijaju pretpostavljanjem različite raspodele koja za realizacije daje plaćanja zahteva za odštetu u tabeli plaćanja. Na primer:

$$C_{ij} : \mathcal{P},$$

ili

$$C_{ij} : \mathcal{NB},$$

pri čemu su $\mathcal{P}$ i $\mathcal{NB}$ oznake za Poasonovu i Negativno-binomnu raspodelu. Suštinska razlika izmedju Chain-Ladder i stohastičkih modela je dodeljivanje raspodele verovatnoće plaćanjima zahteva za odštetu, čime se stvara stohastički deo modela, a ne samo deterministički, kakav je prevladavao u Chain-Ladder-u. Ovi modeli posmatraju otplatu zahteva kao stohastički (slučajni) proces, a poznate vrednosti plaćanja kao realizacije tog procesa. U Chain-Ladder metodu nema pretpostavke o raspodeli verovatnoće za iznose plaćanja zahteva za odštetu. Ukoliko se pretpostavi da C_{ij} ima Poasonovu raspodelu, izvršena plaćanja se posmatraju kao realizacije te raspodele. Takodje, važi i pretpostavka da su slučajne promenljive nezavisne za svako $i = 1, 2, \ldots, n$ i $j = 0, 1, \ldots, n-1$, dok se kod Chain-Ladder-a pretpostavljalo da su godine štete i razvojne godine bile medjusobno zavisne, pa su se zato mogle ocenjivati vrednosti budućih plaćanja zahteva za odštetu na osnovu onih iz prethodnih godina.

Kako su nesigurnost i nepredvidivost osnovne karakteristike svakog stohastičkog procesa, posmatraće se vrednosti očekivanja i disperzije procesa, kako bi se došlo do značajnih informacija za svaki model. U stohastičkim modelima se pretpostavlja da je očekivanje slučajne promenljive $C_{ij} : E[C_{ij}]$, dobra ocena budućeg plaćanja $\hat{C}_{ij}$.

Različite raspodele imaju različit broj parametara koji se moraju izračunati. Činjenica da neki model ima više, a neki manje parametara može na prvi pogled da zavara. Modeli koji imaju više parametara zahtevaju duži i komplikovaniji proces izračunavanja iz razloga jer ima više tehničkog posla, ali na kraju daju istu ili približnu ocenu rezervi kao i modeli koji imaju manje parametara. Većina stohastičkih modela koristi metod maksimalne verodostojnosti (MMV) da bi izračunala vrednosti svojih parametara. Ovo je pogodan statistički metod zato što se dobijaju ocene parametara koje su centrirane i najefikasnije (disperzija greške je najmanja od svih disperzija ocena). Većina modela zahteva jedan parametar za jednu razvojnu godinu, tako da povećanjem tabele plaćanja značajno se povećava broj parametara. U ovom radu, radi lakšeg i bržeg računanja koristiće se neki od statističkih softvera koji daju MMV ocene parametara.

Kod stohastičkih modela svejedno je da li se koriste kumulativne vrednosti plaćanja D_{ij} ili inkrementalne vrednosti C_{ij}. U ovom radu, kod svih modela će se koristiti inkrementalne vrednosti plaćanja da bi se izračunale rezerve. Takodje, u radu će se koristiti podaci samo pozitivnih vrednosti. Oni se mogu primeniti na sve stohastičke modele bez ograničavanja i uslovljvanja, dok pojava negativnih vrednosti može da pravi problem kod nekih modela. Chain-Ladder metod može da računa rezerve i kada se u tabeli nalaze negativne vrednosti. One mogu da nastanu u slučaju subrogacije, tj. u slučaju kada osiguravač prenosi svoju obavezu na reosiguravajuće društvo ili neko treće lice koje je odgovorno za plaćanje nastale štete. Takodje, negativne vrednosti mogu da nastanu u slučaju kada je procenjena vrednost štete veća od njene stvarne vrednosti, pa se osiguraniku isplaćuje samo deo prijavljene štete. Postoji mogućnost i da se zahtevi uopšte ne isplate usled sudske odluke o poništenju zahteva za odštetu zbog pokušaja prevare osiguravajućeg društva.

Ne preporučuje se korišćenje istog modela u svim situacijama. Različiti modeli davaće različite ocene rezervi nad istim podacima iz tabele. Jednostavno, nad nekim podacima je pogodnije koristiti jedan model, dok nad drugima drugi. Za ovlašćenog aktuara, koji treba da izračuna rezerve osiguravajućeg društva, jako je važno da ima sposobnost raščitavanja podataka koji mu se prilažu, da razume kako su ti podaci prikupljeni i da donese kvalitetne zaključke iz njih, a tek potom da se odluči za odgovarajući model, umesto što će koristiti isti pristup nad svim informacijama.

U ovom radu biće objašnjeno nekoliko stohastičkih modela. Prvo će biti prezentovan Poasonov model sa povećanom disperzijom, potom Log-normalni model, Mack-ov model, zatim Negativno-binomni model sa povećanom disperzijom i na kraju Normalna aproksimacija Negativno-binomnog modela. Oni pretpostavljaju da su plaćanja zahteva za odštetu slučajne promenljive sa različitim raspodelama. Svi su objektivni tj. u njima nije inkorporirano lično mišljenje aktuara i svi se sprovode mehanički, bez proučavanja podataka koji su dati i bez profesionalnog suda o njima.

4.2 GLM modeli

Generalized Linear Models ili uopšteni linearni modeli predstavljaju uopštenje linearne regresije. Kako većina posmatranih pojava Y, zavisi od više slučajnih promenljivih koje je objašnjavaju $X_1, X_2, \ldots, X_n$, cilj GLM modela je da se prouči da li postoji zavisnost i da se ispita efekat promenljivih X_i za svako $i = 1, 2, \ldots, n$ na očekivanu vrednost posmatrane pojave $Y : E(Y)$. Dobar model je onaj koji na dobar način fituje raspoložive podatke, koji daje uvid u medjusobnu povezanost zavisnih i nezavisnih varijabli i koji daje dobre ocene potrebnih parametara modela.

Kod ovih vrsta modela, zavisna promenljiva ne mora nužno da bude normalno raspodeljena, kao kod linearne regresije. Posmatraće se **eksponencijalna familija raspodela** čija je gustina verovatnoće data sledećom funkcijom:

$$f(y;\theta) = a(y)b(\theta)\exp[yQ(\theta)] = \exp[yQ(\theta) + c(\theta) + d(y)],$$

pri čemu važi da je:

$$a(y) = \exp(d(y)),$$

$$b(\theta) = \exp(c(\theta)).$$

Ovo je kanonički oblik gustine raspodele i on je najzastupljeniji. Q, a i b su poznate funkcije, a $Q(\theta)$ se naziva normalan parametar raspodele. Pogodno je koristiti baš ovu klasu zato što obuhvata širi izbor raspodela i zato što ima "*lepe*" osobine kao i Normalna raspodela. Ovoj familiji pripadaju Poasonova, Binomna i Normalna raspodela, izmedju ostalih, a dobijaju se specijalnim biranjem funkcija Q, a i b.

Uopšteni linearni modeli se sastoje iz tri komponente:

1. **slučajna komponenta** je zavisna promenljiva Y sa parametrom θ, koja ima raspodelu iz eksponencijalne familije raspodela

2. **sistemska komponenta** je vrednost η - linearna kombinacija nezavisnih promenljivih $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i ona predstavlja linearni prediktor modela:

$$\eta = \sum_{i=1}^{n} \beta_i X_i,$$

Ova komponenta se satoji iz skupa promenljivih $[X_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ pomoću kojih se pokušava objasniti posmatrana pojava Y, kao i skupa parametara $[\beta_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

3. **link funkcija** je treća komponenta GLM modela koja spaja prve dve komponente. Neka je očekivanje slučajne promenljive Y označeno sa $\mu = E(Y)$. Link funkcija je monotona, diferencijabilna funkcija g koja povezuje η sa μ na sledeći način:

$$\eta = g(\mu).$$

Raspodela	a	b	Q	Link funkcija
Poasonova	$-\theta$	$-\log(y!)$	$\log(\theta)$	logaritamska
Normalna	$-\frac{(\mu)^2}{2(\sigma)^2}-\frac{\log(2\pi(\sigma)^2)}{2}$	$-\frac{y^2}{2(\sigma)^2}$	$\frac{\mu}{(\sigma)^2}$	identička
Binomna	$n\log(1-\pi)$	$\log\binom{n}{y}$	$\log(\frac{\pi}{1-\pi})$	logit

Tabela 4.1: Poasonova, Normalna i Binomna raspodela kao članovi eksponencijalne familije raspodela

Ovo znači da g spaja očekivanu vrednost Y sa promenljivama X_i, odn. da je $g(E(Y))$ linearni prediktor tog modela:

$$g(\mu) = g(E(Y)) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i X_i.$$

Svaka raspodela ima svoju link funkciju i ona se dobija iz gustine verovatnoće posmatrane raspodele. Ako je gustina prikazana u kanoničkom obliku, link funkcija je jednaka normalnom parametru:

$$g(\mu) = Q(\theta).$$

U slučaju da Y ima Normalnu raspodelu, link funkcija je $g(\mu) = \mu$ i važi da je $\eta = \mu$. Ovo se zove identička link funkcija i ona je uobičajena za Normalnu raspodelu. Odavde se može jasno videti da je linearna regresija specijalni slučaj GLM modela kada je link funkcija identička.

Ako Y ima Poasonovu raspodelu sa parametrom μ , tada važi da je $E(Y) = \mu$ i gustina verovatnoće je data sledećom funkcijom:

$$f(y;\mu) = \frac{\exp(-\mu)(\mu)^y}{y!}.$$

Ova funkcija može da se svede na oblik gustine eksponencijalne familije promenljivih:

$$f(y;\mu) = \exp(-\mu)\frac{1}{y!}\exp(y\log(\mu)),$$

pri čemu se zaključuje da je $\theta = \mu$, $a(\mu) = \exp(-\mu)$, $b(y) = \frac{1}{y!}$ i $Q(\mu) = \log(\mu)$. Kako je normalan parametar jednak $\log(\mu)$, to znači da je link funkcija Poasonove raspodele logaritamska link funkcija i važi da je:

$$\log(\mu) = \eta,$$

pa je samim tim linearni prediktor Poasonovog modela jednak:

$$\log(E(Y)) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i X_i.$$

Analizirajući na ovaj način gustinu raspodele, može se izvesti link funkcija za svaku raspodelu koja pripada eksponencijalnoj familiji raspodela. U tabeli 4.1. se može videti tabelarni prikaz poznatijih raspodela, njihovih vrednosti funkcija a, b i Q u gustini verovatnoće, kao i njihovih link funkcija.

4.3 Poasonova raspodela sa povećanom disperzijom

Poasonova raspodela sa povećanom disperzijom se razlikuje od obične Poasonove raspodele tako što disperzija raspodele više nije jednaka očekivanju, nego mu je proporcionalna. Kod obične Poasonove raspodele postoji samo jedan parametar i on je jednak očekivanju i disperziji. U zavisnosti kako se parametar menja, tako se menjaju i očekivanje i disperzija te raspodele, što znači da su ove dve vrednosti povezane i ne mogu da se menjaju nezavisno jedna od druge. Sa druge strane, kod Poasonove raspodele sa povećanom disperzijom pretpostavlja se da je disperzija proporcionalna očekivanju, odn. da joj je veća ili manja u zavisnosti od faktora proporcionalnosti.

U Poasonovom modelu sa povećanom disperzijom vrednosti plaćanja zahteva za odštetu C_{ij} su slučajne promenljive koje imaju Poasonovu raspodelu sa povećanom disperzijom. Pretpostavlja se da su C_{ij} medjusobno nezavisne za svako $i = 1, 2, \ldots, n$ i $j = 0, 1, 2, \ldots, n - i$, što znači da vrednosti plaćanja u jednoj godini štete ne zavise od vrednosti plaćanja u nekoj drugoj godini. Takodje, pretpostavlja se da su očekivanje i disperzija slučajne promenljive C_{ij} oblika:

$$E[C_{ij}] = m_{ij} = x_i y_j,$$

$$Var[C_{ij}] = \phi m_{ij} = \phi x_i y_j.$$

Odavde se vidi da je zadovoljena pretpostavka o povećanoj disperziji:

$$Var[C_{ij}] = \phi E[C_{ij}].$$

U formulama, x_i predstavlja očekivano ukupno plaćanje za i-tu godinu štete, tj. poslednju kolonu u tabeli sa kumulativnim vrednostima. Ova vrednost predstavlja ukupnu vrednost svih plaćanja zahteva za odštetu koji su podneti u i-toj godini štete tokom svih razvojnih godina. Vrednost y_i označava broj koji pokazuje koliko je procentualno plaćeno u j-toj razvojnoj godini od očekivanog ukupnog plaćanja za i-tu godinu štete. U formuli za disperziju, ϕ označava faktor proporcionalnosti i pokazuje razliku izmedju obične Poasonove raspodele i raspodele sa povećanom disperzijom. On je nepoznat i mora se oceniti iz podataka koji su dati u tabeli.

Baš zato što y_j označava deo ukupnog plaćanja neke godine štete u j-toj razvojnoj godini godini, suma po svim razvojnim godinama mora da daje ukupnu vrednost plaćanja neke godine štete. Matematički zapisano, ovo znači da mora da važi uslov:

$$\sum_{k=0}^{n-1} y_k = 1.$$

Cilj modela je da se obezbedi ocena rezervi osiguravajućeg društva za buduće obaveze prema osiguranicima. U ovom, kao i u ostalim modelima stohastičkog tipa, ocena plaćanja za C_{ij} je njena očekivana vrednost $E[C_{ij}]$. Stoga, ukupna vrednost rezervi je suma svih ocena budućih plaćanja zahteva za odštetu $\hat{C}_{ij}, i = 2, 3, \ldots, n, j = n - i + 1, \ldots, n - 1$.

Kao što se vidi iz formula, očekivanje i disperzija modela su definisani preko multiplikativnog oblika, odn. dobijaju se kao proizvod efekta vrste x_i i efekta kolone y_j, za koju se računaju. I očekivanje i disperzija zavise od mesta na kojem se računaju u tabeli, jer na njihove vrednosti različito utiču vrste i kolone. Vrednosti x_i i y_j su nepoznate i predstavljaju parametre modela koje treba oceniti. Ocenjivanje parametara se uglavnom radi pomoću metode maksimalne verodostojnosti koristeći neki statistički softver.

Ovako definisan model je jasan na intuitivnom nivou zato što postoji fizički smisao parametara x_i i y_j. Loša strana modela je što ne postoji linearnost po parametrima, već je:

$$m_{ij} = x_i y_j.$$

Nelinearnost modela po parametrima može praviti problem prilikom računanja parametara. Radi lakše primene MMV, model se prebacuje u takozvani GLM oblik, tj. oblik uopštenog linearnog modela, koji je linearan po parametrima. Kako se pretpostavlja Poasonova raspodela za plaćanja zahteva za odštetu, link funkcija je logaritamska. Sledi da je:

$$log(E[C_{ij}]) = log(m_{ij}) = c + \alpha_i + \beta_j = \eta_{ij}.$$

Ovo je nova forma modela na kojoj se lakše može primeniti MMV i dobiti ocena parametara. Takodje, ova struktura je i posle logaritamske promene bliska Chain-Ladder tipu, zato što u sebi sadrži parametre za svaku vrstu i svaku kolonu. Loša strana ovog oblika je to što novi parametri α_i i β_j nemaju fizički smisao. Da bi se dobila jasna interpretacija parametara, α_i i β_j se moraju prebaciti nazad u formu koja sadrži parametre x_i i y_j. Konstanta c je postavljena u formulu iz tehničkih razloga. Takodje, pretpostavlja se da je $\alpha_1 = \beta_1 = 0$.

Nakon što se dobiju ocene parametara c, α_i, β_j : $\hat{c}$, $\hat{\alpha}_i$, $\hat{\beta}_j$, mogu se dobiti ocene plaćanja zahteva za odštetu za j-tu razvojnu godinu i-te godine štete:

$$\hat{C}_{ij} = E[C_{ij}] = m_{ij} = exp(\hat{\eta}_{ij}) = exp(\hat{c} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j).$$

Ukupne rezerve za i-tu godinu štete se označavaju sa $\hat{C}_{i+}$ i računaju na sledeći način:

$$\hat{C}_{i+} = \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \hat{C}_{ij},$$

dok se ukupna vrednost rezervi označava sa $\hat{C}_{++}$ i računa pomoću formule:

$$\hat{C}_{++} = \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \hat{C}_{ij}.$$

4.3.1 Implementacija programskom paketu R

Za brzo i lako računanje parametara modela metodom maksimalne verodostojnosti, u ovom radu biće korišćen softver R. Na početku je potrebno uneti sve podatke o poznatim plaćanjima u inkrementalnom obliku. Podaci se mogu uneti u data.frame obliku ili u obliku matrice:

$$\begin{gathered} n <- 8 \\ trougao <- data.frame(stetaf = factor(rep(2006:2013, n:1)), \\ +razvoj = sequence(n:1), \\ +placeno = c(\\ +1780, 893, 201, 220, 63, 9, 20, 16, \\ +3226, 993, 313, 349, 263, 55, 24, \\ +3652, 1337, 773, 674, 284, 135, \\ +2723, 1578, 1225, 705, 386, \\ +2923, 1743, 683, 1140, \\ +2990, 2427, 1593, \\ +3917, 1972, \\ +3545)) \end{gathered}$$

Na ovaj, data.frame način se dolazi do podataka prikazanih u tri kolone, pri čemu su u prvoj koloni prikazane godine štete, u drugoj razvojne godine, dok se u trećoj koloni mogu iščitati podaci o plaćenim vrednostima zahteva za odštetu. Isti podaci se mogu prikazati i u matrici *inkre* inkrementalnih vrednosti plaćanja:

$$\begin{gathered} (inkre <- with(trougao, \{ \\ +M <- matrix(nrow = n, ncol = n, \\ +dimnames = list(steta = levels(stetaf), razvoj = 1:n)) \\ +M[cbind(stetaf, razvoj)] <- placeno \\ +M \\ +\})) \end{gathered}$$

Unošenjem ovih kodova dobijaju se isti poznati podaci plaćanja samo u trougaonom obliku. Jednostavnom funkcijom se podaci mogu prebaciti u kumulativnu oblik, tj. matricu *kumul* kumulativnih vrednosti plaćanja:

$$kumul <- t(apply(inkre, 1, cumsum))$$

R je praktičan program za računanje aktuarskih rezervi zato što pomoću samo nekoliko lakih komandi dolazi do podataka značajnih za aktuara. Jedna od mogućnosti programa je da računa poslednje kumulativne vrednosti u tabeli *kumul*, tj. da se prikaže vektor sa ukupnim do sada plaćenim vrednostima za svaku godinu štete:

$$poslednje <- kumul[row(kumul) == n - col(kumul) + 1]$$

Takodje, moguće je napraviti podatke u kumulativnom obliku i pripojiti ih tabeli *trougao*. Na ovaj način se dobija vektor koji sadrži sve vrednosti poznatih plaćanja u kumulativnom obliku:

$$trougao\$placenokum <- kumul[with(trougao, cbind(stetaf, razvoj))]$$

Parametri:	Ocene parametara:	Standardna greška parametara:
(Intercept)	7.29668	0.01855
steta2007	0.49431	0.02248
steta2008	0.77146	0.02146
steta2009	0.74928	0.02160
steta2010	0.77687	0.02172
steta2011	0.97494	0.02156
steta2012	0.96814	0.02232
steta2013	0.87661	0.02503
razvoj1	-0.66182	0.01177
razvoj2	-1.28611	0.01622
razvoj3	-1.46885	0.01968
razvoj4	-2.32703	0.03285
razvoj5	-3.57247	0.07156
razvoj6	-4.48303	0.15125
razvoj7	-4.52409	0.25069

Tabela 4.2: Parametri Poasonove raspodele

Sada je potrebno kreirati tablicu podataka u takvom obliku da bi se na njoj primenio metod maksimalne verodostojnosti i Poasonov GLM model. U ovom koraku se na tabelu *trougao* dodaju kolone sa inkrementalnim i kumulativnim plaćanjima iz prethodnog perioda, tj. iste godine štete, ali prethodne razvojne godine:

$$\begin{gathered} names(trougao)[3:4] < -\ c("placenoink", "placenokum") \\ ids < -\ with(trougao, cbind(stetaf, razvoj)) \\ trougao < -\ within(trougao, \{ \\ +kumulativno < -\ cbind(kumul[, -1], NA)[ids] \\ +inkrementalno < -\ cbind(inkre[, -1], NA)[ids] \\ +razvojf < -\ factor(razvoj) \\ +\}) \end{gathered}$$

Ovim putem će se doći do proširene tabele *trougao* u kojoj će se sada prikazati dodatna tabela sa kumulativnim vrednostima plaćanja za svaki period, ali i podaci sa inkrementalnim i kumulativnim vrednostima plaćanja za prethodni period. Na ovakvu tabelu se konačno može primeniti metod maksimalne verodostojnosti. Sada kada su podaci u obliku u kojem to program zahteva, potrebno je samo uneti komandu *glm* i izabrati odgovarajuću raspodelu slučajnih promenljivih plaćanja. U ovom modelu se bira Poasonova raspodela i njena odgovarajuća logaritamska link funkcija. Pozivanjem komande *summary* dobija se detaljan pregled svih informacija o parametrima modela.

$$\begin{gathered} Poason < -\ glm(placenoink \sim stetaf + razvojf, data = trougao, \\ +family = poisson(link = "log")) \\ summary(Poason) \end{gathered}$$

Pomoću R-a su dobijeni parametri $\hat{c}$, $\hat{\alpha}_i$ i $\hat{\beta}_j$ iz Poasonovog modela sa povećanom disperzijom. Rezultati su prikazani u tabeli 4.2. Prateći ranije predstavljen model i koristeći odgovarajuće formule, može se doći do ocene budućih inkrementalnih plaćanja.

	Razvojna godina:									
Godina štete:	0	1	2	3	4	5	6	7	Ukupno	Rezerve
2006	1780	893	201	220	63	9	20	16	3202	0
2007	3226	993	313	349	263	55	24	**26**	5249	26
2008	3652	1337	773	674	284	135	**36**	**35**	6926	71
2009	2723	1578	1225	705	386	**88**	**35**	**34**	6774	157
2010	2923	1743	683	1140	**313**	**90**	**36**	**35**	6963	474
2011	2990	2427	1593	**900**	**382**	**110**	**44**	**42**	8488	1478
2012	3917	1972	**1074**	**894**	**379**	**109**	**44**	**42**	8431	2542
2013	3545	**1829**	**980**	**816**	**346**	**100**	**40**	**38**	7694	4149
UKUPNO:										**8897**

Tabela 4.3: Rezerve dobijene Poasonovim modelom sa povećanom disperzijom

Ocena plaćanja zahteva za odštetu za j-tu razvojnu godinu i-te godine štete, pri čemu je $i = 2, \dots, n$ i $j = n - i + 1, \dots, n - 1$, dobija se sledećom jednačinom:

$$\hat{C}_{ij} = E[C_{ij}] = exp(\hat{c} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j).$$

Ukoliko su poznate pojedinačne vrednosti budućih plaćanja, može se doći do ocene rezervi po razvojnim godinama i ocene ukupnih vrednosti rezervi osiguravajućeg društva pomoću sledećih formula:

$$\hat{C}_{i+} = \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \hat{C}_{ij},$$

$$\hat{C}_{++} = \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \hat{C}_{ij}.$$

Kao što se može videti u tabeli 4.3, dobijena je vrednost rezervi 8897 što je ista vrednost dobijena težinskim metodom Chain-Ladder-a. Ovo pokazuje koliko je ovaj stohastički model dobar i precizan. Ovlašćeni aktuar treba da izračuna rezerve pomoću više različitih tehnika, a kako su ova dva modela dala iste rezultate, velika verovatnoća je da će se prava vrednost rezervi realizovati oko ove vrednosti. Jedna od prednosti Poasonovog modela u odnosu na Chain-Ladder je ta što postoji mogućnost računanja greške dobijene ocene. U narednom odeljku biće objašnjen teoretski pristup računanja greške, kao i njegova implementacija u softveru.

4.3.2 Ocena greške

Modeli u kojima se predvidjaju rezerve osiguravajućeg društva se zasnivaju na proučavanju podataka o već izvršenim plaćanjima zahteva za odštetu, a potom predvidjanju budućih plaćanja. Kod stohastičkih modela računanja rezervi, buduća plaćanja su slučajne promenljive čija će se realizovana vrednost znati tek u budućnosti. Da bi osiguravač mogao da unapred predvidi visinu budućih obaveza i napravi odgovarajuće rezerve, pretpostavlja se da je očekivana vrednost $E[\hat{C}_{ij}]$ ocena budućih plaćanja. Kod ovakvih vrsta modela moguće je izračunati i grešku ocene. U literaturi je najčešće zastupljena **srednje kvadratna greška ocene – MSEP** (Mean Squarred Error of Prediction).

Neka je Y slučajna promenljiva i $\hat{Y}$ njen ocenjivač. Realizacijom slučajne promenljive $\hat{Y}$ dobija se ocena za Y. Cilj svakog matematičkog modela je pronaći najbolji ocenjivač $\hat{Y}$ koji će davati najpreciznije ocene veličine Y. Srednje kvadratna greška ocene (MSEP) za slučajnu promenljivu $\hat{Y}$ se računa na sledeći način:

$$MSEP(\hat{Y}) = E[(Y - \hat{Y})^2] = E[((Y–E[Y])–(\hat{Y}–E[Y]))^2]$$

$$\approx E[((Y–E[Y])–(\hat{Y}–E[\hat{Y}]))^2]$$

$$= E[(Y–E[Y])^2]–2E[(Y–E[Y])(\hat{Y}–E[\hat{Y}])] + E[(\hat{Y}–E[\hat{Y}])^2]$$

Koristeći osobine očekivanja može se pokazati da je sabirak u sredini jednak nuli, stoga je srednje kvadratna greška:

$$E[(Y - \hat{Y})^2] \approx E[(Y–E[Y])^2] + E[(\hat{Y}–E[\hat{Y}])^2].$$

Kada se prouči struktura prethodne formule može se primetiti da se srednje kvadratna greška sastoji iz dve komponente, prva predstavlja varijansu procesa, dok druga označava varijansu ocenjivača. Varijansa procesa je odstupanje realizovanih vrednosti od očekivanja slučajne promenljive. Ona nastaje usled slučajne prirode posmatrane pojave i na nju se ne može uticati. Sa druge strane, varijansa ocenjivača pokazuje koliko je on precizan i sa kojom sigurnošću će davati dobre ocene promenljive Y.

U slučaju kada je poznata cela prediktivna raspodela, kao u Bootstrap metodu (koji je objašnjen u narednom poglavlju) MSEP se računa kao standardna devijacija raspodele. Nažalost, u stohastičkim modelima poznata su samo prva dva momenta raspodele, očekivanje i disperzija, tako da se greška ocene mora računati na složeniji način. Važno je uočiti razliku izmedju standardnog odstupanja i srednje kvadratne greške. Dok se standardno odstupanje računa kao kvadratni koren varijanse ocene, srednje kvadratna greška prilikom računanja uzima u obzir nesigurnost ocenjivanja parametara modela, kao i nesigurnost celog procesa predvidjanja budućih veličina. Kod Poasonovog modela sa povećanom disperzijom poznat je oblik disperzije plaćanja zahteva za odštetu:

$$Var[C_{ij}] = \phi m_{ij} = \phi exp(\eta_{ij}) = \phi exp(c + \alpha_i + \beta_j).$$

Prethodna jednačina predstavlja varijansu procesa. Ovo je varijabilnost slučajne promenljive na koju se ne može uticati. Da bi se izračunala srednje kvadratna greška potrebno je pronaći i varijansu ocenjivača koja je komplikovanija za izvodjenje i za koju je potrebno koristiti Tejlorov razvoj funkcija da bi se ona dobila:

$$Var[\hat{C}_{ij}] = (\hat{m}_{ij})^2 Var[\hat{\eta}_{ij}].$$

Sabirajući prethodne dve vrednosti dobija se srednje kvadrana greška ocene budućih plaćanja $\hat{C}_{ij}$:

$$MSEP[\hat{C}_{ij}] \approx \phi\hat{m}_{ij} + (\hat{m}_{ij})^2 Var[\hat{\eta}_{ij}].$$

Takodje, moguće je izračunati grešku rezervi za svaku godinu štete posebno. Srednje kvadratna greška rezervi za i-tu godinu štete se računa na sledeći način:

$$MSEP[\hat{C}_{i+}] \approx \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \phi \hat{m}_{ij} + \sum_{j=n-i+1}^{n-1} (\hat{m}_{ij})^2 Var[\hat{\eta}_{ij}] +$$

$$+2 \sum_{j_1=n-i+1}^{n-1} \sum_{j_2=n-i+1}^{n-1} \hat{m}_{i,j_1} \hat{m}_{i,j_2} Cov[\hat{\eta}_{i,j_1}, \hat{\eta}_{i,j_2}],$$

pri čemu je $j_2 > j_1$. Za aktuara je važno da zna i grešku ocene ukupnih rezervi $\hat{C}_{++}$. Koristeći sledeću formulu, dobija se vrednost koliko je moguće odstupanje realizovane vrednosti rezervi od njene ocene dobijene Poasonovim modelom sa povećanom disperzijom:

$$MSEP[\hat{C}_{++}] \approx \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \phi \hat{m}_{ij} + \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=n-i+1}^{n-1} (\hat{m}_{ij})^2 Var[\hat{\eta}_{ij}] +$$

$$+2 \sum_{i_1=2}^{n} \sum_{j_1=n-i_1+1}^{n-1} \sum_{i_2=2}^{n} \sum_{j_2=n-i_2+1}^{n-1} \hat{m}_{i_1,j_1} \hat{m}_{i_2,j_2} Cov[\hat{\eta}_{i_1,j_1}, \hat{\eta}_{i_2,j_2}],$$

pri čemu je par indeksa i_1, j_1 različit od para i_2, j_2. Iz prethodnih ocena grešaka se može videti da srednje kvadratnu grešku rezervi ne čini samo zbir pojedinačnih grešaka $MSEP[\hat{C}_{ij}]$, već se posmatra i odnos budućih plaćanja kroz varijansu i kovarijansu usled postojanja medjusobne zavisnosti. Mora se uzeti u obzir kolika je zavisnost izmedju ocena plaćanja zato što su one dobijene množenjem i deljenjem parametara $\hat{\alpha}_i$ i $\hat{\beta}_j$. Ocene plaćanja iz iste godine štete i iste razvojne godine su množene istim parametrima, te je i intuitivno logično da postoji neka zavisnost medju njima. Da bi se na lakši način izračunala greška rezervi po razvojnim godinama i greška ukupnih rezervi koristiće se program R. U ovom programskom paketu se odredjenim komandama može doći do **matrice varijanse i kovarijanse** u kojoj se nalaze vrednosti potrebne za izračunavanje ocena $MSEP[\hat{C}_{i+}]$ i $MSEP[\hat{C}_{++}]$.

Da bi se izračunala matrica varijanse i kovarijanse, prvo je potrebno formirati dizajniranu matricu (design matrix) i buduću dizajniranu matricu (future design matrix). **Dizajnirana matrica** je matrica X čiji su elementi nule i jedinice. Svaka kolona predstavlja jedan parametar godine štete ili razvojne godine $\hat{\alpha}_i$, $\hat{\beta}_j$, dok svaka vrsta predstavlja jednu vrednost plaćanja iz prethodnih godina. Polja u tabeli gde se nalaze jedinice predstavljaju slaganje onog plaćanja sa odgovarajućim parametrima koji se koriste za njegovo dobijanje. Na primer, neka je dat model koji ima tri godine štete i tri razvojne godine. Dizajnirana matrica je prikazana u tabeli 4.4.

Na ovom jednostavnom primeru se vidi kako se raspodeljuju jedinice, a kako nule, u zavisnosti za koje plaćanje $C_{i,j}$ se koriste koji parametri $\hat{\alpha}_i$, $\hat{\beta}_j$. Na sličan način se formira i **buduća dizajnirana matrica** X_f. Ova matrica je, takodje, sačinjena iz jedinica i nula, samo što se ovde posmatraju, kao što i sam naziv kaže, buduća plaćanja zahteva za odštetu. Koristeći prethodni primer sa tri godine štete i tri razvojne godine, dobija se matrica X_f prikazana u tabeli 4.5.

godina štete	razvojna godina	plaćanje	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$
1	0	$C_{1,0}$	1	0	0	0	0
1	1	$C_{1,1}$	1	0	0	1	0
1	2	$C_{1,2}$	1	0	0	0	1
2	0	$C_{2,0}$	0	1	0	0	0
2	1	$C_{2,1}$	0	1	0	1	0
3	0	$C_{3,0}$	0	0	1	0	1

Tabela 4.4: Dizajnirana matrica X

godina štete	razvojna godina	plaćanje	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$
2	2	$C_{2,2}$	0	1	0	0	1
3	1	$C_{3,1}$	0	0	1	1	0
3	2	$C_{3,2}$	0	0	1	0	1

Tabela 4.5: Buduća dizajnirana matrica X_f

Matrice X i X_f su potrebne da bi se mogla izračunati matrica varijanse i kovarijanse V. Formula pomoću koje se dolazi do nje je sledeća:

$$V = (\sigma)^2 X_f (X^T X)^{-1} X_f^T$$

Sada kada su poznati matrica V i njene vrednosti, moguće je izračunati vrednost greške rezervi po godinama štete i vrednost greške ukupnih rezervi koje osiguravajuće društvo treba da čuva. Kao što je ranije napomenuto, vrednosti iz matrice varijanse i kovarijanse govore o medjusobnoj zavisnosti izmedju budućih plaćanja zahteva za odštetu i ove vrednosti su neophodne za izračunavanje grešaka rezervi $MSEP[\hat{C}_{i+}]$ i $MSEP[\hat{C}_{++}]$.

U slučaju da su poznati podaci za veliki broj godina unazad (kao što je u ovom radu $n = 8$), broj parametara koji se ocenjuju se značajno povećava, a samim tim i dimenzije dizajnirane i buduće dizajnirane matrice. Takodje, formula kojom se dolazi do matrice V je tehnički zahtevna za izračunavanje zbog velikog broja množenja, transponovanja i vršenja inverzije matrica, a pogotovo se tehnički deo izračunavanja usložnjava kako su matrice X i X_f većih dimenzija. Da bi se smanjio komplikovan postupak računanja, u ovom radu će biti prezentovan kod u R-u pomoću kojeg će se doći do željenih rezultata. U konzolni prozor programa potrebno je uneti sledeće komande:

$$SviZahtevi < - \, data.frame(steta = sort(rep(2006:2013, n)), razvoj = rep(1:n, n))$$
$$SviZahtevi < - \, within(SviZahtevi, \{$$
$$+razvojf < - \, factor(razvoj)$$
$$+godina < - \, steta + razvoj - 1$$
$$+stetaf < - \, factor(steta)$$
$$+\})$$

$$(inkr.trougao < - \, t(matrix(predict(Poason, type = "response",$$
$$+newdata = SviZahtevi), n, n)))$$
$$sum(predict(Poason, type = "response",$$
$$+newdata = subset(SviZahtevi, godina > 2013)))$$

$$summary(povecPoason <- glm(placenoink \sim stetaf + razvojf,$$
$$+data = trougao, family = quasipoisson))$$

$$eta <- predict(povecPoason, newdata = SviZahtevi,$$
$$+type = "response") * (SviZahtevi\$godina > 2013)$$
$$fi <- summary(povecPoason)\$dispersion$$
$$sigma <- vcov(povecPoason)$$
$$model.formula <- as.formula(paste("\ ", formula(povecPoason)[3]))$$
$$X <- model.matrix(model.formula, data = SviZahtevi)$$
$$Cov.eta <- X \ \%*\% \ sigma \ \%*\% \ t(X)$$
$$sqrt(fi * sum(eta) + t(eta) \ \%*\% \ Cov.eta \ \%*\% \ eta)$$

Pomoću prethodnog koda dolazi se do potrebnih informacija o grešci ocene rezervi. $SviZahtevi$ predstavlja tabelarni prikaz svih već plaćenih zahteva za odštetu, kao i predikcija budućih plaćanja, fi je ocena parametra ϕ koji pokazuje koliko je proporcionalno veća disperzija Poasonovog modela od njegovog očekivanja. Koristeći podatke iz primera iz rada, dobija se da je $\phi = 101.4726$. Takodje, poslednjom funkcijom u kodu, dobija se i $MSEP[\hat{C}_{++}]$, tj. srednje kvadratna greška ukupnih rezervi, što u ovom primeru iznosi 1725. U R-u postoji još jedna veoma korisna funkcija $glmReserve$ pomoću koje se dobijaju dodatne informacije o budućim plaćanjima. Da bi se ova funkcija primenila, potrebno je prvo instalirati paket Chain-Ladder pomoću komande:

$$install.packages('ChainLadder')$$

a potom se može uneti sledeća funkcija:

$$odp <- glmReserve(as.triangle(inkre), var.power = 1, cum = FALSE).$$

Poslednjom komandom dobija se analiza podataka iz tabele $inkre$ dobijenih Poasonovim modelom sa povećanom dispreziјom. $glmReserve$ funkcijom aktuar ima mogućnost da dobije ocene rezervi po godinama štete $\hat{C}_{i+}$ i ocenu ukupnih rezervi $\hat{C}_{++}$, kao i greške ovih ocena $MSEP$. Ukoliko se u program ubace podaci tabele $inkre$ dobija analiza rezervi osiguravajućeg društva u tabeli 4.6. Analizirajući vrednosti iz tabele može se zaključiti da je ocena rezervi ista kao i ocena dobijena pomoću Chain-Ladder metoda. Velika prednost Poasonovog modela je što ima mogućnost računanja greške ocene, tako da se iz četvrte kolone tabele 4.6 mogu iščitati vrednosti $MSEP[\hat{C}_{i+}]$ za svaku godinu štete. Poslednja, peta, kolona tabele deli vrednost greške sa samom ocenom i time dobija procentualno moguće odstupanje ocene od zaista realizovane vrednosti. U poslednjem redu tabele 4.6 može se videti da Poasonov model sa povećanom disperzijom pretpostavlja da je $MSEP[\hat{C}_{++}] = 1725$, tj. jednak 19% vrednosti ocene rezervi. Ovim putem se tvrdi da će realizovana vrednost ukupnih rezervi osiguravajućeg društva biti u intervalu od 7172 do 10622.

Godina štete:	Očekivana ukupna plaćanja:	Isplate do 2014. godine:	Očekivana buduća plaćanja (rezerve):	Standardna greška rezervi:	Procenat greške:
2006	3202	3202	0	0	0%
2007	5249	5223	26	84	323%
2008	6926	6855	71	134	189%
2009	6774	6617	157	175	111%
2010	6963	6489	474	279	59%
2011	8488	7010	1478	505	34%
2012	8431	5889	2542	696	27%
2013	7694	3545	4149	1051	25%
UKUPNO:	53727	44830	**8897**	**1725**	**19%**

Tabela 4.6: Rezerve dobijene Poasonovim modelom sa povećanom disperzijom

4.4 Log-Normalni model

Jedan od prvih stohastičkih modela koji je bio razvijan i koji je računao rezerve za buduće obaveze je Log-Normalni model. Krajnje dobijeni rezultati rezervi mogu biti slični rezultatima koje predvidja Chain-Ladder metod, ali se mogu i dosta razlikovati, u opštem slučaju se ne može reći sa sigurnošću, već iznos dobijenih rezervi zavisi od podataka o plaćanjima u prethodnim godinama. Sličnost rezultata izmedju ovog modela i Chain-Ladder-a je u tome što se i ovde pretpostavlja parametrizacija po vrstama i kolonama, tj. po godinama štete i razvojnim godinama, koja je ista kao kod Chain-Ladder-a.

Prema Log-normalnom modelu sve vrednosti inkrementalnih plaćanja C_{ij} treba preračunati u njihov logaritamski oblik, tj. treba da se izračunaju vrednosti placanja: $Y_{ij} = log(C_{ij})$. Model pretpostavlja da se plaćanja zahteva za odštetu sastoje iz dve komponente:

$$Y_{ij} = m_{ij} + \epsilon_{ij},$$

pri čemu je m_{ij} deterministički, a ϵ_{ij} stohastički deo modela. ϵ_{ij} se nazivaju slučajne greške i predstavljaju odstupanje realizovanih vrednosti plaćanja od prosečne vrednosti m_{ij}. Takodje, model pretpostavlja da su ϵ_{ij} slučajne promenljive koje nezavisno uzimaju vrednosti za svako $i = 1, 2, \dots, n$ i svako $j = 0, 1, 2, \dots, n-i$, kao i da imaju približno Normalnu raspodelu:

$$\epsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2).$$

Poznavajući raspodelu za ϵ_{ij}, može se ustanoviti i raspodela za Y_{ij} na sledeći način:

$$E[Y_{ij}] = E[m_{ij} + \epsilon_{ij}] = E[m_{ij}] + E[\epsilon_{ij}] = m_{ij} + 0 = m_{ij},$$

$$Var[Y_{ij}] = Var[m_{ij} + \epsilon_{ij}] = Var[\epsilon_{ij}] = \sigma^2,$$

iz čega sledi da je raspodela za Y_{ij} :

$$Y_{ij} \sim N(m_{ij}, \sigma^2).$$

Kako se na početku postupka ovog modela moraju pretvoriti sve vrednosti plaćanja C_{ij} u njihove logaritamske vrednosti Y_{ij}, model odmah postavlja ograničenje da svi podaci iz tabele plaćanja moraju biti pozitivni (zato što se ne mogu izračunati logaritamske vrednosti negativnih brojeva). U ovom radu to neće predstavljati ograničenje, zato što je na početku pretpostavljeno da će se posmatrati samo pozitivne vrednosti plaćanja zahteva za odštetu.

Koristeći tehniku uopštenih linearnih modela (GLM), kao i u prethodnim poglavljima, model se prebacuje u oblik koji je linearan po parametrima, zato što se na ovaj način lakše dobijaju vrednosti parametara metodom maksimalne verodostojnosti:

$$E[Y_{ij}] = m_{ij} = \alpha_i + \beta_j.$$

Izračunavajući ocene parametara $\hat{\alpha}_i$ i $\hat{\beta}_j$ za $i = 2, \ldots, n$ i $j = 1, 2, \ldots, n-i$ dobijaju se ocene determinističkog dela plaćanja:

$$\hat{m}_{ij} = \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j.$$

Ocena budućih plaćanja zahteva za odštetu se dobija tako što se uračuna i varijabilitet svakog paramatra i varijansa celog procesa:

$$\hat{C}_{ij} = \exp(\hat{m}_{ij} + \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_{ij})^2),$$

gde je:

$$(\hat{\sigma}_{ij})^2 = Var[\hat{m}_{ij}] + (\hat{\sigma})^2.$$

Kao što je ranije napisano, $(\hat{\sigma})^2$ je varijansa procesa i na nju se ne može uticati. Ova vrednost se takodje ocenjuje preko statističkog softvera. Sa druge strane, $(\hat{\sigma}_{ij})^2$ je ukupna ocena greške linearnih parametara koja se dobija tako što se sabere varijansa linearnih parametara i varijansa procesa.

Važno je prodiskutovati zašto se u oceni budućih inkrementalnih plaćanja uopšte nalazi komponenta varijanse. Za razliku od ostalih stohastičkih modela koji koriste inkrementalne vrednosti da bi izračunali parametre, Log-normalni model koristi logaritam od inkrementalnih vrednosti. Takodje, $\hat{C}_{ij}$ je datog oblika baš zato što je i očekivanje Log-normalne raspodele tog oblika.

4.4.1 Implementacija u programskom paketu R

Da bi se izračunali parametri metodom maksimalne verodostojnosti, potrebno je primeniti odgovarajući softver koji će taj posao da uradi brzo i tačno. U ovom radu, kao i u prethodnim delovima, biće korišćen program *R*. Na početku je potrebno uneti sve podatke o poznatim plaćanjima u inkrementalnom obliku. Pravi se matrica sa imenom *trougao* na sledeći način:

$$trougao <- t(matrix(c($$
$$+1780, 893, 201, 220, 63, 9, 20, 16,$$
$$+3226, 993, 313, 349, 263, 55, 24, NA,$$
$$+3652, 1337, 773, 674, 284, 135, NA, NA,$$

$$+2723, 1578, 1225, 705, 386, NA, NA, NA,$$
$$+2923, 1743, 683, 1140, NA, NA, NA, NA,$$
$$+2990, 2427, 1593, NA, NA, NA, NA, NA,$$
$$+3917, 1972, NA, NA, NA, NA, NA, NA,$$
$$+3545, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA),$$
$$+nc = 8, dimnames = list(razvojna = 0 : 7, stete = 2006 : 2013)))$$

Potom se definišu dimenzije matrice *trougao* unoseći sledeću komandu:

$$m < - \; dim(trougao)[1]$$
$$n < - \; dim(trougao)[2]$$

Posle toga se vrši sredjivanje poznatih podataka iz matrice *trougao* u posebne kolone, zato što se na tako prikazanim podacima može primeniti GLM metod:

$$podaci < - \; data.frame(stete = rep(2006 : (2006 + m - 1), n),$$
$$+razvojna = rep(0 : (n - 1), each = m), value = as.vector(trougao))$$
$$rownames(podaci) < - \; with(podaci, paste(stete, razvojna, sep = -"))$$
$$podaci < - \; podaci[order(podaci\$razvojna),]$$
$$podaci < - \; with(podaci, data.frame(stete, razvojna,$$
$$+suma = stete + razvojna,$$
$$+value, logaritam = log(value), stetaf = factor(stete),$$
$$+razvojf = as.factor(razvojna), sumaf = as.factor(stete + razvojna)))$$
$$podaci < - \; podaci[order(podaci\$razvojna),]$$

Na ovaj način dobijena je tablica *podaci* sa kolonama koje sadrže sve poznate podatke o plaćanjima, ali u obliku na kojem se može primeniti metod maksimalne verodostojnosti. Za kraj postupka, potrebno je napraviti funkciju *Fit* u obliku Log-normalnog modela i komandom *summary* prikazati dobijene rezultate:

$$Fit < - \; lm(logaritam \sim stetaf + razvojf + 0, data = podaci)$$
$$summary(Fit)$$

U ovoj formuli $stetaf$ označava parametre α_i, dok $razvojf$ označava parametre β_j iz Log-normalnog modela. Kada se objašnjen postupak primeni na podatke iz tabele *trougao* dobijaju se vrednosti parametara i njihova standardna odstupanja prikazana u tabeli 4.7.

Sada kada su poznate vrednosti parametara α_i i β_j, može se preći na računanje ocena budućih inkrementalnih plaćanja:

$$\hat{C}_{ij} = \exp(\hat{m}_{ij} + \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_{ij})^2),$$

pri čemu je:

$$\hat{m}_{ij} = \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j,$$

$$(\hat{\sigma}_{ij})^2 = Var[\hat{m}_{ij}] + (\hat{\sigma})^2.$$

U R-u se, takodje, može izračunati vrednost $(\hat{\sigma})^2$, tako što se u komandni prozor unese sledeća funkcija:

Parametri:	Ocene parametara:	Standardna greška parametara:
steta2007	7.6608	0.2252
steta2008	8.1986	0.2297
steta2009	8.2146	0.2379
steta2010	8.1899	0.2511
steta2011	8.4507	0.2731
steta2012	8.2750	0.3139
steta2013	8.1733	0.4152
razvoj1	-0.6901	0.2219
razvoj2	-1.4912	0.2354
razvoj3	-1.5696	0.2511
razvoj4	-2.4242	0.2718
razvoj5	-3.8974	0.3018
razvoj6	-4.2149	0.3530
razvoj7	-4.1702	0.4724

Tabela 4.7: Parametri Log-normalne raspodele

	Razvojna godina:									
Godina štete:	0	1	2	3	4	5	6	7	Ukupno:	Rezerve:
2006	1780	893	201	220	63	9	20	16	3202	0
2007	3226	993	313	349	263	55	24	**40**	5263	40
2008	3652	1337	773	674	284	135	**62**	**69**	6986	131
2009	2723	1578	1225	705	386	**86**	**64**	**70**	6837	2250
2010	2923	1743	683	1140	**365**	**84**	**62**	**69**	7069	580
2011	2990	2427	1593	**1118**	**478**	**111**	**82**	**90**	8889	1879
2012	3917	1972	**1027**	**953**	**408**	**94**	**70**	**77**	8518	2629
2013	3545	**2165**	**975**	**905**	**387**	**89**	**66**	**73**	8205	4660
UKUPNO:										**10139**

Tabela 4.8: Rezerve dobijene Log-normalnim modelom

$$sigma <- summary(Fit)\$sigma$$
$$sigma$$

U primeru iz ovog rada, sa podacima iz matrice *trougao* dobija se vrednost $\hat{\sigma} = 0.4152093$, dok je $(\hat{\sigma})^2 = 0,172399$. Sada su poznati svi potrebni podaci da bi se izračunale vrednosti $\hat{C}_{ij}$. Koristeći gore objašnjeni postupak u programu R i formule iz Log-normalnog modela, dobijaju se vrednosti budućih plaćanja prikazane u tabeli 4.8.

Kao što se može videti iz tabele 4.8, dobijena vrednost rezervi Log-normalnim modelom je 10139, dok se Chain-Ladder metodom dobijaju rezerve u visini od 8897. Ovo je za 14% viša vrednost, što je veliko odstupanje, ne samo u odnosu na Chain-Ladder, već i na ostale modele. Kao što je i napomenuto na početku teksta o Log-normalnom modelu, ocena rezervi može da više ili manje odstupa od Chain-Ladder-a, sve zavisi od posmatranih podataka koji više ili manje odgovaraju Log-normalnoj raspodeli.

4.4.2 Ocena greške

Prednost stohastičkih modela u odnosu na ostale je što imaju mogućnost računanja greške ocene rezervi. Da bi se izračunala ukupna varijansa ocene potrebno je uzeti u obzir i varijansu ocena budućih plaćanja i varijansu celog procesa. Stohastički modeli su zasnovani na slučajnim promenljivama kojima se ne može znati realizovana vrednost u budućnosti, stoga uvek će postojati odstupanje vrednosti procesa od njegove očekivane vrednosti. Na jednostavan način se dolazi do varijanse ocene budućih plaćanja:

$$MSEP[\hat{C}_{ij}] = (\hat{C}_{ij})^2(exp((\hat{\sigma}_{ij})^2) - 1) = (\hat{C}_{ij})^2(exp(Var[\alpha_i + \beta_j] + (\hat{\sigma})^2) - 1).$$

Prethodna formula je standardni oblik za disperziju Log-Normalne raspodele, te je i intuitivno jasno da ocena greške budućih plaćanja ima ovakav oblik. Kada su izračunate ocene $\hat{C}_{ij}$ i $(\hat{\sigma}_{ij})^2$, koristeći prethodnu jednačinu može se doći do odstupanja vrednosti budućih plaćanja od svoje očekivane vrednosti. Za model je značajno izračunati i grešku ocene ukupnih rezervi. Kao i u Poasonovom modelu, da bi se došlo do ove ocene, potrebno je sprovesti duži postupak.

$$MSEP[\hat{C}_{++}] = \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=n-i+1}^{n-1} MSEP[\hat{C}_{ij}] +$$

$$+2\sum_{i_1}^{n} \sum_{j_1=n-i_1+1}^{n-1} \sum_{i_2}^{n} \sum_{j_2=n-i_2+1}^{n-1} \hat{C}_{i_1,j_1}\hat{C}_{i_2,j_2}(exp(Cov[\hat{m}_{i_1,j_1}, \hat{m}_{i_2,j_2}]) - 1).$$

$MSEP[\hat{C}_{++}]$ predstavlja grešku ocene ukupnih rezervi osiguravajućeg društva. Kao i u prethodnom modelu, da bi se lakše izračunala ova greška koristiće se program R. U ovom programskom paketu se može doći do matrice varijanse i kovarijanse u kojoj se nalaze vrednosti potrebne za izračunavanje ocene $MSEP[\hat{C}_{++}]$.

Dalje u radu biće prezentovan kod pomoću kojeg se dolazi do dizajnirane matrice X i buduće dizajnirane matrice X_f, kao i do matrice varijanse i kovarijanse V. R ima mogućnost da unošenjem odgovarajućih komandi izračuna greške budućih plaćanja, kao i grešku ukupnih rezervi. U kodu koji sledi, *dm* predstavlja dizajniranu matricu, *fdm* buduću dizajniranu matricu, *varcovar* matricu varijanse i kovarijanse, *sterrorC* standardne devijacije grešaka budućih plaćanja, dok *ukupno.SE* označava standardnu devijaciju greške ukupnih rezervi. Deljenjem vrednosti rezervi i standardnog odstupanja dolazi se do procenta koliko je moguće odstupanje realizovanih vrednosti rezervi od njihove ocene Log-Normalnim modelom.

$$dm <- model.matrix(formula(Fit), dat = model.frame(Fit))$$
$$fdm <- model.matrix(\sim stetaf + razvojf + 0,$$
$$+data = podaci[is.na(podaci\$value),])$$
$$varcovar <- fdm\% * \%vcov(Fit)\% * \%t(fdm)$$
$$round(varcovar, 4)$$

$$sigma <- summary(Fit)\$sigma$$
$$Var <- varcovar + sigma^2$$
$$VarY <- Var[row(Var) == col(Var)]$$
$$Y <- fdm\% * \%coef(Fit)$$
$$C <- exp(Y + VarY/2)$$

$$VarC < - exp(2 * Y + VarY) * (exp(VarY) - 1)$$
$$sterrorC < - sqrt(VarC)$$
$$i < - fdm\% * \%c((1 : m) - 1, rep(0, (n - 1)))$$
$$j < - fdm\% * \%c(rep(0, (m - 1)), (1 : n) - 1)$$
$$rezultati < - data.frame(i, j, Y, VarY, C, VarC, sterrorC)$$

$$buduca.placanja < - xtabs(C \sim i + j, dat = rezultati)$$
$$inkr.trougao < - trougao$$
$$inkr.trougao[row(trougao) > (nrow(trougao) + 1 - col(trougao))] < -$$
$$+buduca.placanja[row(buduca.placanja) >$$
$$+(nrow(buduca.placanja) - col(buduca.placanja))]$$
$$kumul.trougao < - apply(inkr.trougao, 1, cumsum)$$

$$CoVar < - sweep(sweep((exp(varcovar) - 1), 1, C, " * "), 2, C, " * ")$$
$$CoVar[col(CoVar) == row(CoVar)] < - 0$$
$$round(CoVar, 0)$$
$$ukupno.Var < - sum(CoVar) + sum(VarC)$$
$$ukupno.SE < - sqrt(ukupno.Var)$$
$$Rezerve < - sum(buduca.placanja)$$
$$ukupno.SE/Rezerve$$

Unoseći prethodne komande u program, dobija se da ocena ukupnih rezervi osiguravajućeg društva iznosi 10139, dok greška iznosi 3052 što čini 30 procenata. Uporedjivajući vrednosti Log-normalnog modela sa Poasonovim, jasno se vidi da Log-normalni model daje takve informacije o budućim plaćanjima da je potrebno čuvati više rezervi, kao i da je procenat greške veći.

4.5 Mack-ov model

Jedan od prvih modela stohastičkog tipa koji je nastao bio je Mack-ov model razvijan od strane profesora doktora Tomasa Meka (Thomas Mack). Ovaj model se razlikuje od ostalih po tome što se ne pretpostavlja nijedna raspodela za buduća plaćanja zahteva za odštetu, nego se samo preciziraju prvi i drugi momenat slučajne promenljive. Model se dosta oslanja na Chain-Ladder i računa tehničke rezerve na sličan način. Najveća razlika izmedju dva modela je to što je Chain-Ladder deterministički metod, dok se u Mack-ovom modelu pretpostavlja da su buduća plaćanja zahteva za odštetu slučajne promenljive. Uvodeći komponentu verovatnoće moguće je izračunati disperziju slučajnih promenljivih, a potom i ukupnu grešku ocene rezervi. Samim tim, Mek je posmatrao očekivanje i varijansu, kao dobre pokazatelje ponašanja slučajne promenljive D_{ij} i pretpostavio njihov oblik:

$$E[D_{ij}] = \lambda_j D_{i,j-1},$$

$$Var[Dij] = (\sigma_j)^2 D_{i,j-1}.$$

Kao što se odmah može primetiti iz formula, Mack-ov model predvidja vrednost budućeg plaćanja u j-toj razvojnoj godini tako što se plaćanje iz prethodne razvojne godine pomnoži sa razvojnim faktorom λ_j, što je ista ideja kao i kod Chain-Ladder metoda. Već je napomenuto da je Mack-ov model stohastičkog tipa, tako da se moraju koristiti očekivane vrednosti plaćanja, zato što D_{ij} više nisu determinističke vrednosti. U svom radu iz 1993. godine "*Which Stochastic Model is Underlying the Chain Ladder Method*?" Mek je izveo ocenjivače za parametre λ_j na sledeći način:

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} w_{ij} f_{ij}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} w_{ij}},$$

pri čemu su:

$$w_{ij} = D_{i,j-1},$$

$$f_{ij} = \frac{D_{ij}}{D_{i,j-1}}.$$

U prethodnoj jednakosti w_{ij} predstavlja kumulativnu vrednost plaćanja za $j-1$. razvojnu godinu, dok f_{ij} predstavlja odnos kumulativne vrednosti plaćanja izmedju dve susedne razvojne godine, tj. koliko je više/manje plaćeno u odnosu dve susedne razvojne godine. Kao što se može primetiti iz oblika formule za λ_j, Mekov razvojni faktor je sličan razvojnom faktoru u Chain-Ladder metodu samo što je ovde izražen u težinskom obliku. Na ovaj način dobija se nepristrasna ocena za razvojne faktore. U svom radu iz 1993. godine, Mek je proučavao i netežinsku ocenu za razvojne faktore kao kod Chain-Ladder-a, ali je preporučio korišćenje svoje, težinske ocene zbog manje varijanse i greške ocene.

Mek je, takodje, odredio ocenjivač za parametre $(\sigma_j)^2$. On je predstavljen kao suma težina reziduala podeljena sa brojem reziduala minus jedan. Jedinica se mora oduzeti od broja reziduala da bi se dobila nepristrasna ocena parametra. U ovom modelu, $(\sigma_j)^2$ ne služi za dobijanje budućih plaćanja zahteva za odštetu, nego standardnih grešaka ocena plaćanja, tj. govori koliko je potencijalno odstupanje ocenjene vrednosti od vrednosti koja će biti realizovana u budućnosti:

$$(\hat{\sigma}_j)^2 = \frac{1}{n-j} \sum_{j=0}^{n-j} w_{ij}(f_{ij} - \hat{\lambda}_j)^2.$$

Za ovaj model je dosta pogodna činjenica da se ne mora koristiti ozbiljniji softver da bi se došlo do ocene parametara λ_j i $(\sigma_j)^2$, a samim tim i do ocene rezervi koje osiguravajuće društvo treba da čuva. Sva izračunavanja mogu da se izvrše u jednostavnoj Excel tabeli množenjem i sabiranjem poznatih vrednosti plaćanja sa dobijenim razvojnim faktorima. Sa druge strane, danas su razvijeni brojni statistički programi koji na brz i jednostavan način računaju potrebne parametre modela, ali i ukupnu vrednost rezervi. Softver je praktičan i zato što se smanjuje mogućnost nastanka greške prilikom unošenja i rada sa podacima.

Mack-ov model pretpostavlja da je očekivanje dobra ocena budućih kumulativnih plaćanja, tako da se koristi sledeća jednačina:

$$\hat{D}_{ij} = E[D_{ij}] = \hat{\lambda}_j D_{i,j-1}.$$

Množeći razvojne faktore sa poznatim vrednostima plaćanja dolazi se do ocene ukupnih plaćanja za i-tu razvojnu godinu $D_{i,n}$. Od ovog broja se mora oduzeti kumulativna vrednost do sada plaćenih zahteva za odštetu $D_{i,n-i}$, da bi se dobila vrednost rezervi za i-tu razvojnu godinu $\hat{R}_{i+}$:

$$\hat{R}_{i+} = \hat{D}_{i,n} - D_{i,n-i},$$

pri čemu je $i = 2, 3, \ldots, n$. Kada se saberu ocene rezervi za sve godine štete dobija se ocena ukupnih rezervi osiguravajućeg društva $\hat{R}_{++}$:

$$\hat{R}_{++} = \sum_{i=2}^{n} \hat{R}_{i+}.$$

4.5.1 Implementacija u programskom paketu R

Mack-ov model se na dosta jednostavan način može implementirati u R-u. Kao što je ranije napomenuto, za njegovo izračunavanje dovoljno je koristiti i Excel tabelu, ali radi lakšeg i bržeg dobijanja vrednosti rezervi primer će biti sproveden u softveru R. Za početak je potrebno instalirati paket Chain-Ladder komandom:

$$install.packages('ChainLadder')$$

Pomoću ove komande korisnik programa instalira funkcije koje su korisne za računanje rezervi osiguravajućeg društva, a koje su zasnovane na Chain-Ladder tehnikama. Potom je potrebno uneti podatke o dosadašnjim plaćanjima zahteva za odštetu. U ovom radu, podaci su uneti u matricu *trougao* na sledeći način:

$$\begin{gathered} trougao <- matrix(c(\\ +1780, 2673, 2874, 3094, 3157, 3166, 3186, 3202, \\ +3226, 4219, 4532, 4881, 5144, 5199, 5223, NA, \\ +3652, 4989, 5762, 6436, 6720, 6855, NA, NA, \\ +2723, 4301, 5526, 6231, 6617, NA, NA, NA, \\ +2923, 4666, 5349, 6489, NA, NA, NA, NA, \\ +2990, 5417, 7010, NA, NA, NA, NA, NA, \\ +3917, 5889, NA, NA, NA, NA, NA, NA, \\ +3545, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA), \\ +nrow = 8, byrow = TRUE) \end{gathered}$$

Podaci se unose u matricu u kumulativnom obliku zato što Mack-ov model računa rezerve preko ove vrste podataka. Kada se napravi matrica u ovakvom obliku, moguće je primeniti funkciju $MackChainLadder$. Pomoću nje program primenjuje Mack-ov model na podatke iz matrice *trougao*. U konzolni prozor potrebno je uneti sledeću komandu:

$$mack <- MackChainLadder(trougao, est.sigma = "Mack")$$

Pozivanjem komande *mack* program će prikazati detaljnu analizu podataka pomoću Mack-ovog stohastičkog modela. R daje na uvid podatke o rezervama za svaku godinu štete i o ukupnim rezervama osiguravajućeg društva. U tabeli 4.9 prikazani su dobijeni rezultati nakon što je uneta poslednja komanda. Iz tabele se može iščitati da Mack-ov model predvidja da je potrebno čuvati rezerve u iznosu od 8897. Čitalac može primetiti

Godina štete:	Očekivana ukupna plaćanja:	Isplate do 2014. godine:	Očekivana buduća plaćanja (rezerve):	Standardna greška rezervi:	Procenat greške:
2006	3202	3202	0	0	0%
2007	5249	5223	26	1	4%
2008	6926	6855	71	9	13%
2009	6774	6617	157	59	38%
2010	6963	6489	474	122	26%
2011	8488	7010	1478	416	28%
2012	8431	5889	2542	774	30%
2013	7694	3545	4149	1124	27%
UKUPNO:	53727	44830	**8897**	**1569**	**18%**

Tabela 4.9: Rezerve dobijene Mack-ovim modelom

	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_6$	$\hat{\lambda}_7$
Razvojni faktori:	1.5159	1.1823	1.1284	1.0482	1.0132	1.0053	1.0050

Tabela 4.10: Razvojni faktori dobijeni Mack-ovim modelom

da je dobijeni iznos rezervi isti kao kod težinskog Chain-Ladder metoda i kod Poasonovog modela sa povećanom disperzijom.

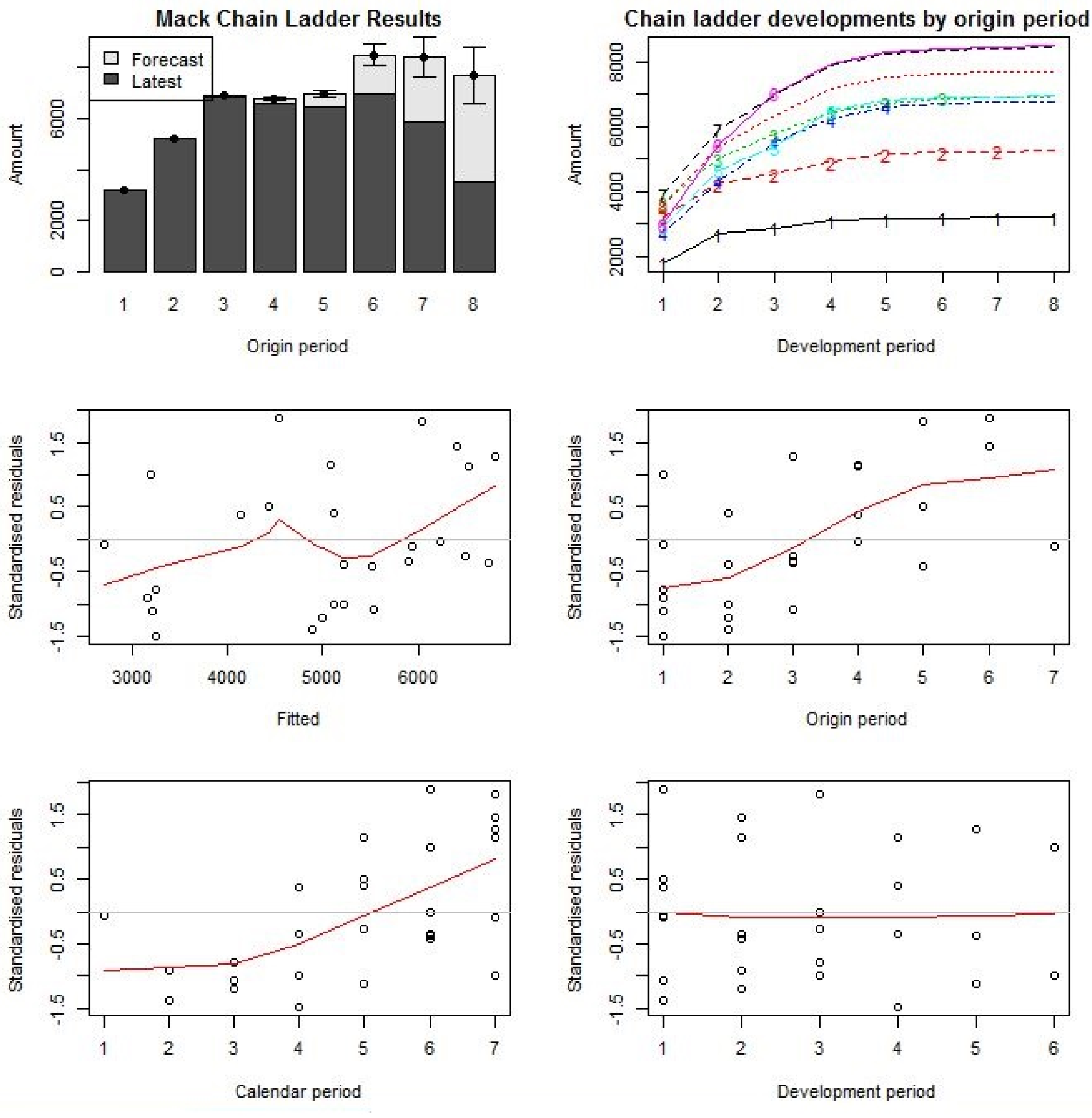
Velika prednost korišćenja softvera je mogućnost brzog i preciznog izračunavanja parametara modela. R ima ugradjenu funkciju kojom se, pomoću samo jedne jednostavne komande, može doći do ocenjenih vrednosti razvojnih faktora Mack-ovog modela $\hat{\lambda}_j$:

$$mack\$f$$

U tabeli 4.10 prikazani su dobijeni rezultati nakon pozvane prethodne funkcije u konzolnom prozoru. Može se primetiti da su vrednosti ocenjenih razvojnih faktora identične razvojnim faktorima dobijenih Chain-Ladder metodom. Ovo pokazuje da je Mek napravio dobar ocenjivač pomoću kojeg se dolazi do tačnih i nepristrasnih ocena razvojnih faktora. Takodje, softver ima mogućnost prikaza cele tabele sa podacima nakon što su poznate ocene budućih plaćanja. Pozivanjem sledeće komande, dobija se matrica u kojoj su prikazana plaćanja iz prethodnih perioda i na njima primenjene ocene razvojnih faktora da bi se dobila buduća plaćanja zahteva za odštetu:

$$mack\$FullTriangle$$

Funkcija koja može biti jako korisna za ovaj model je $plot(mack)$ koja prikazuje izračunate podatke preko šest različitih grafika. Gornji levi grafik po svakoj godini štete prikazuje visinu do sada plaćenih zahteva za odštetu $D_{i,n-i}$ crnom bojom, dok sivom bojom prikazuje ocenu ukupnih plaćanja za i-tu godinu štete $\hat{D}_{i,n}$. Razlika izmedju te dve vrednosti plaćanja, tj. izmedju sive i crne površine predstavlja ocenu rezervi za svaku godinu štete. Na grafiku je, takodje, prikazano za svaku godinu štete koliko je moguće donje i gornje odstupanje ocene ukupnih plaćanja od realizovanih vrednosti. Na gornjem desnom grafiku se može videti kako su se kretale visine plaćanja tokom razvojnih godina. Za svaku godinu štete prikazana je jedna rastuća funkcija (zato što su podaci u kumulativnom obliku). Preostala četiri grafika prikazuju standardizovane reziduale u odnosu na unešene podatke o plaćanjima, u odnosu na godinu štete, kalendarski period i razvojnu godinu. Jedan od pokazatelja da li je Mack-ov model primenljiv i dobro sproveden na unešenim podacima je položaj standardizovanih reziduala na graficima. Ukoliko ne postoji očigledna pravilnost u njihovom položaju i ukoliko je bar 95% reziduala u rangu od -2 do 2 na y-osi, to je pokazatelj da je model primenljiv.



	$(\hat{\sigma}_1)^2$	$(\hat{\sigma}_2)^2$	$(\hat{\sigma}_3)^2$	$(\hat{\sigma}_4)^2$	$(\hat{\sigma}_5)^2$	$(\hat{\sigma}_6)^2$
Parametri:	479.1535	55.7600	53.3595	9.7102	0.8239	0.0062

Tabela 4.11: Parametri $(\hat{\sigma}_j)^2$ dobijeni Mack-ovim modelom

4.5.2 Ocena greške

Mack-ov model pripada vrsti stohastičkih modela i ima prednost da može da odredi grešku ocene aktuarskih rezervi. Model pretpostavlja da je varijansa budućih plaćanja poznata i sledećeg oblika:

$$Var[D_{ij}] = (\sigma_j)^2 D_{i,j-1},$$

te se izračunavanjem ocene parametara $(\sigma_j)^2$ može doći do ocene greške za svaku buduću vrednost D_{ij}. Velika pogodnost Mack-ovog modela je što je poznat ocenjivač za ove parametre i što se isti mogu izračunati bez posebne implementacije softvera. Ocena za $(\sigma_j)^2$ se dobija kao suma težina reziduala podeljena sa brojem reziduala minus jedan:

$$(\hat{\sigma}_j)^2 = \frac{1}{n-j} \sum_{j=0}^{n-j} w_{ij}(f_{ij} - \hat{\lambda}_j)^2,$$

pri čemu su:

$$w_{ij} = D_{i,j-1},$$
$$f_{ij} = \frac{D_{ij}}{D_{i,j-1}}.$$

Prateći prethodne formule na jednostavnan način se dolazi do ocene parametara $(\hat{\sigma}_j)^2$. U tabeli 4.11 su prikazani dobijeni rezultati, tj. ocene parametara. Dalje se ove vrednosti množe sa $D_{i,j-1}$ da bi se dobile varijanse plaćanja u sledećoj razvojnoj godini D_{ij}.

Koristeći dve formule koje slede u tekstu dobijaju se vrednosti ocena rezervi za i-tu godinu štete $\hat{R}_{i+}$ i vrednost ocene ukupnih rezervi osiguravajućeg društva $\hat{R}_{++}$:

$$MSEP[\hat{R}_{i+}] = (\hat{D}_{i,n})^2 \sum_{k=n-i+1}^{n-1} \frac{(\hat{\sigma}_{k+1})^2}{(\hat{\lambda}_{k+1})^2} \Big(\frac{1}{\hat{D}_{i,k}} + \frac{1}{\sum_{q=1}^{n-k} D_{q,k}} \Big),$$

$$MSEP[\hat{R}_{++}] = \sum_{i=2}^{n} \Big\{ MSEP[\hat{R}_{i+}] + \hat{D}_{i,n} (\sum_{q=i+1}^{n} \hat{D}_{q,n}) \sum_{k=n-i+1}^{n-1} \frac{2(\hat{\sigma}_{k+1})^2}{(\hat{\lambda}_{k+1})^2 \sum_{q=1}^{n-k} D_{q,k}} \Big\}.$$

Velika prednost implementacije programa R u računanju rezervi je ta što se na jednostavan način, samo pomoću komande $MackChainLadder$, dolazi do ocena greške. Važno je još jednom napomenuti da se ocene $\hat{R}_{i+}$ i $\hat{R}_{++}$ mogu izračunati i ručno u programu Excel tipa, ali je potrebno voditi računa da se ne napravi greška prilikom množenja i sabiranja odgovarajućih vrednosti. R je sa ove tačke gledišta jako pogodan zato što sa sigurnošću prikazuje ocene greške i isključuje mogućnost nastanka grečke prilikom računanja. U tabeli 4.9 su prikazane ocene rezervi, ali ujedno i standardne greške ocene rezervi. U trećoj koloni tablice se može iščitati vrednost $MSEP[\hat{R}_{i+}]$ za svaku godinu štete, dok se u četvrtoj koloni može videti izračunati procenat greške koji je dobijen deljenjem vrednosti standardne greške sa ocenom rezervi. Važan podatak koji se može saznati iz poslednje vrste tabele je ocena greške za ukupne tehničke rezerve $MSEP[\hat{R}_{++}]$. Mack-ov model je dao ocenu ukupnih rezervi 8897, ali je prikazao da će realizovane vrednosti rezervi odstupati od svoje ocene za najviše 18 procenata, što je njegova prednost u odnosu na Chain-Ladder metod koji nema mogućnost dobijanja ocene greške.

4.6 Negativno-binomni model sa povećanom disperzijom

Negativno-binomni model sa povećanom disperzijom pretpostavlja da su vrednosti plaćanja zahteva za odštetu C_{ij} slučajne promenljive koje imaju Negativnu binomnu raspodelu sa povećanom disperzijom. Sličnost sa Poasonovim modelom je u pretpostavci da su C_{ij} medjusobno nezavisne za svako $i = 1, 2, \ldots, n$ i $j = 0, 1, 2, \ldots, n-i$, dok je razlika izmedju modela ta što se ovde pretpostavlja da slučajne promenljive imaju Negativnu-binomnu raspodelu, pa stoga, i očekivanje i disperzija raspodele C_{ij} imaju nov oblik:

$$E[C_{ij}] = (\lambda_j - 1)D_{i,j-1},$$

$$Var[C_{ij}] = \phi\lambda_j(\lambda_j - 1)D_{i,j-1},$$

iz čega se vidi da je disperzija povećana proporcionalno očekivanju:

$$Var[C_{ij}] = \phi\lambda_j E[C_{ij}].$$

$D_{i,j-1}$ označava kumulativnu vrednost plaćanja zahteva za odštetu odn. zbir svih plaćanja do $j-1$. razvojne godine za zahteve podnete u i-toj godini štete. U formuli za disperziju se pojavljuje faktor proporcionalnosti ϕ koji ukazuje da je raspodela sa povećanom disperzijom, tj. da je disperzija slučajne promenljive proporcionalna njenom očekivanju. ϕ se ocenjuje iz podataka koji su dati.

Novost u modelu je pojava parametara λ_j koji su pandani razvojnim faktorima kod Chain-Ladder metoda. Zbog sličnosti parametara λ_j sa razvojnim faktorima, ceo model je intuitivniji nego Poasonov i na njemu je lakše primeniti Chain-Laddder tehniku. Velika olakšica za računanje je činjenica da se znatno smanjuje broj parametara zato što se ne posmatraju parametri po redovima tabele, već samo po kolonama. Takodje, smanjen broj parametara će usloviti manju ukupnu grešku koja nastaje ocenjivanjem parametara. Važno je ponovo napomenuti da broj parametara nema ulogu u krajnjem rezultatu modela, štaviše, ocena rezervi dobijena Negativno-binomnim modelom će biti jednaka oceni dobijenoj Poasonovim modelom.

Kao i kod Poasonovog modela, za ocenu plaćanja C_{ij} se uzima njena očekivana vrednost $\hat{C}_{ij} = E[C_{ij}]$. Stoga je ukupna vrednost rezervi jednaka sumi svih budućih plaćanja zahteva za odštetu $\hat{C}_{ij}, i = 2, 3, \ldots, n, j = n-i+1, \ldots, n-1$.

Iz osnovnih pretpostavki modela se vidi da je model nelinearan po parametrima. Radi lakše primene metode maksimalne verodostojnosti, model se prebacuje u oblik uopštenog linearnog modela (GLM oblik) koji je pogodan za računanje zato što je linearan po parametrima. Takodje, da bi se na lak način ocenili parametri, koriste se statistički softveri koji u sebi imaju mogućnost računanja MMV.

$$E[C_{ij}] = m_{ij} = (\lambda_j - 1)D_{i,j-1},$$

Ukoliko se logaritmuje leva i desna strana jednakosti, dobija se:

$$log(m_{ij}) = log((\lambda_j - 1)D_{i,j-1}) = log(\lambda_j - 1) + log(D_{i,j-1}).$$

Kako je pretpostavljena Negativna binomna raspodela, odgovarajuća link funkcija je logaritamska. Stoga sledi:

$$log(\lambda_j - 1) = c + \alpha_{j-1},$$

pri čemu je $j \geq 2$, $\alpha_1 = 0$, a α_{j-1} su nepoznati parametri koje treba oceniti. Na osnovu prethodnog računa, konačno sledi da je:

$$log(m_{ij}) = c + \alpha_{j-1} + log(D_{i,j-1}).$$

Ovo je novi oblik modela gde se na lakši način može primeniti MMV i dobiti ocena parametara c i α_{j-1} . Koristeći statistički softver dobijaju se ocene $\hat{c}$ i $\hat{\alpha}_{j-1}$. Ovi parametri nemaju fizički smisao, već su definisani samo radi lakšeg izračunavanja ocena parametara i radi lakše primene metode maksimalne verodostojnosti. Da bi se dobili parametri λ_j, koji imaju fizički smisao, potrebno je da se uradi antilogaritmovanje link funkcije:

$$log(\lambda_j - 1) = c + \alpha_{j-1},$$

$$\lambda_j - 1 = exp(c + \alpha_{j-1}),$$

$$\lambda_j = 1 + exp(c + \alpha_{j-1}), j \geq 2.$$

Na osnovu ovog, na lak način se mogu izračunati ocene za parametre λ_j:

$$\hat{\lambda}_j = 1 + exp(\hat{c} + \hat{\alpha} + j - 1), j \geq 2, \hat{\alpha}_1 = 0.$$

Nakon ocenjivanja parametara c i λ_j - $\hat{c}$, $\hat{\lambda}_j$, mogu se dobiti ocene plaćanja:

$$\hat{C}_{ij} = E[C_{ij}] = \hat{m}_{ij} = (\hat{\lambda}_j - 1)D_{i,j-1}.$$

Kao i kod Poasonovog modela, ocena ukupnih rezevi za i-tu godinu štete se označava sa $\hat{C}_{i+}$ i računa na sledeći način:

$$\hat{C}_{i+} = \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \hat{C}_{ij},$$

dok se ocena ukupnih rezervi označava sa $\hat{C}_{++}$ i računa na sledeći način:

$$\hat{C}_{++} = \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \hat{C}_{ij}.$$

4.7 Normalna aproksimacija Negativno-binomnog modela

Normalna aproksimacija Negativno-binomnog modela je nastavak priče o Negativno-binomnom modelu i služi kao nadogradnja za rešavanje problema negativnih parametara koji se mogu pojaviti u modelu. Da podsetimo, parametri u Negativno-binomnom modelu su λ_j , koji imaju fizički smisao i koji su parnjaci razvojnim faktorima u Chain-Ladder metodu. Sa pojavom negativnih vrednosti u tabeli plaćanja, prilikom primene Negativno-binomnog modela može se pojaviti vrednost parametara manja od jedinice, tj. $\lambda_j < 1$. Ovaj slučaj će se desiti onda kada je suma svih vrednosti plaćanja C_{ij} negativna za fiksiranu kolonu j, pa će samim tim kumulativne vrednosti plaćanja za j-tu razvojnu godinu - D_{ij}, biti manje od kumulativnih vrednosti za razvojnu godinu $j-1$ - $D_{i,j-1}$. Za Negativno-binomni model, pojava negativnih vrednosti parametara će uslovititi da disperzija bude negativna, što nije dozvoljeno, pa stoga ovde model puca i ne dozvoljava slobodno računanje rezervi. U Negativno-binomnom modelu je pretpostavljen sledeći oblik disperzije zahteva za odštetu:

$$Var[C_{ij}] = \phi\lambda_j(\lambda_j - 1)D_{i,j-1}.$$

Pretpostavlja se da ϕ i $D_{i,j-1}$ imaju pozitivne vrednosti, pa pojavom $\lambda_j < 1$, sledi da je $Var[C_{ij}] < 0$. Ovo se rešava konstruisanjem posebne promenljive f_{ij} koja će izbeći problem negativne disperzije i koja će imati Normalnu raspodelu. U ovom modelu se pretpostavlja da su očekivanje i disperzija sledećeg oblika:

$$E[C_{ij}] = (\lambda_j - 1)D_{i,j-1},$$

$$Var[C_{ij}] = \phi D_{i,j-1}.$$

$D_{i,j-1}$ označava kumulativnu vrednost plaćanja zahteva za odštetu, dok je ϕ faktor proporcionalnosti. C_{ij} su medjusobno nezavisne slučajne promenljive za svako $i = 1, 2, \ldots, n$ i $j = 0, 1, 2, \ldots, n-i$, odn. vrednosti plaćanja u jednoj razvojnoj godini nezavisno primaju vrednosti od plaćanja u ostalim razvojnim godinama, kao i što vrednosti plaćanja jedne godine štete nezavisno primaju vrednosti od plaćanja u ostalim godinama štete.

Iz definicije kumulativnih vrednosti plaćanja važi sledeća jednakost koja povezuje inkrementalne i kumulativne vrednosti isplata osiguravajućeg društva:

$$D_{ij} = D_{i,j-1} + C_{ij}.$$

Ako se pretpostavi da je $D_{i,j-1}$ poznata vrednost data u tabeli plaćanja, mogu se doneti zaključci o očekivanju i disperziji kumulativnih zahteva za odštetu D_{ij} :

$$E[D_{ij}] = E[D_{i,j-1} + C_{ij}] = E[D_{i,j-1}] + E[C_{ij}] = D_{i,j-1} + (\lambda_j - 1) * D_{i,j-1} = \lambda_j * D_{i,j-1},$$

$$Var[D_{ij}] = Var[D_{i,j-1} + C_{ij}] = Var[C_{ij}] = \phi D_{i,j-1}.$$

Na sličan način se može izračunati očekivanje i disperzija za slučajnu promenljivu $\frac{D_{ij}}{D_{i,j-1}}$:

$$E[\frac{D_{ij}}{D_{i,j-1}}] = \frac{E[D_{ij}]}{D_{i,j-1}} = \lambda_j,$$

$$Var[\frac{D_{ij}}{D_{i,j-1}}] = \frac{Var[D_{ij}]}{D_{i,j-1}{}^2} = \frac{\phi}{D_{i,j-1}}.$$

Ova raspodela se označava sa $f_{ij} = \frac{D_{ij}}{D_{i,j-1}}$ i značajna je za ovaj model zato što ima Normalnu raspodelu. f_{ij} pokazuje koliki je odnos izmedju kumulativnih vrednosti plaćanja u j-oj razvojnoj godini i $j-1$. razvojnoj godini, odn. koliko će biti novih plaćanja u j-oj razvojnoj godini u odnosu na prethodnu. U Chain-Ladder metodu, ovaj odnos je pokazivao razvojni faktor, samo što je to bila deterministička veličina dobijena iz poznatih podataka, a ovde se ta vrednost dobija kao količnik dve slučajne promenljive, pa je samim tim i sama slučajna promenljiva. Primećuje se odredjena povezanost dva modela zato što je očekivanje slučajne promenljive f_{ij} upravo razvojni faktor λ_j, tj. odnosom dve kumulativne vrednosti plaćanja dobija se centrirana ocena razvojnog faktora. Računajući ocene slučajnih promenljivih $f_{ij} : \hat{f}_{ij}$, dobijaju se ocene razvojnih faktora pomoću kojih se predvidjaju buduće vrednosti plaćanja zahteva za odštetu.

Kao i u prethodnim modelima, iz očekivanja slučajne promenljive f_{ij} primećuje se da je model nelinearan po parametrima. Model se prvo mora prebaciti u GLM oblik da bi se dobila linearnost po parametrima, kao i da bi se na lakši način ocenili parametri modela metodom maksimalne verodostojnosti. Slučajna promenljiva f_{ij} ima normalnu raspodelu tako da će se dalje primeniti identička link funkcija da bi se došlo do željenog oblika modela:

$$E[f_{ij}] = E[\frac{D_{ij}}{D_{i,j-1}}] = \lambda_j = c + \alpha_{j-1}, j \geq 2, \alpha_1 = 0.$$

Da bi se dobile ocene parametara c i α_{j-1} koristi se statistički softver. Ovim putem, na jednostavan i brz način se dobijaju ocenjeni parametri $\hat{c}$ i $\hat{\alpha}_{j-1}$. I u ovom modelu računavaju se parametri samo po kolonama, ne po vrstama tabele plaćanja, čime se značajno smanjuje broj parametara za ocenjivanje.

$$E[f_{ij}] = \hat{c} + \hat{\alpha}_{j-1} = \hat{\lambda}_j.$$

Nakon što se uvrste poznate vrednosti parametara $\hat{c}$ i $\hat{\alpha}_{j-1}$ u prethodnu jednakost, dobijaju se vrednosti parametara $\hat{\lambda}_j$, što su, kao što je ranije napomenuto, ocene razvojnih faktora. Kako su izračunate ocene razvojnih faktora, potrebno je samo još razviti ostatak tabele sa kumulativnim plaćanja, tj. treba poznate podatke, koji su u obliku trougla, proširiti do tabele oblika kvadrata, baš kao kod Chain-Ladder metoda. Ako se na taj način proširi tabela, poslednja kolona će sadrzati vrednosti $\hat{D}_{i,n}$ za svaku godinu štete i. Ove vrednosti označavaju ocene svih očekivanih ukupnih vrednosti plaćanja za n razvojnih godina za svaku godinu štete i. Oduzimajući vrednost već plaćenih zahteva za odštetu u i-toj godini štete $D_{i,n-i}$, dobiće se očekivana vrednost budućih plaćanja, odn. rezerve koje treba čuvati za plaćanje šteta prijavljenih u i-toj godini štete. Sabiranjem vrednosti rezervi za svaku godinu štete dobija se ukupna vrednost rezervi koje osiguravajuće društvo treba da čuva da bi sa sigurnošću moglo da isplaćuje buduće obaveze.

Važno je napomenuti da je ovaj model nastavak Negativno-binomnog modela, pa će samim tim računati iste vrednosti rezervi. Razlika izmedju modela će se primetiti u grešci ocene modela, zato što se pretpostavljaju različite raspodele slučajnih promenljivih C_{ij}.

NAPOMENA: U ovom radu, Negativno-binomni model sa povećanom disperzijom i Normalna aproksimacija Negativno-binomnog modela neće biti implementirani u programskom paketu R niti će za njih biti uradjen primer. Ova dva modela su značajno komplikovanija od ostalih po svojoj teoretskoj strukturi i načinu računanja greške ocene. Oba modela spadaju u grupu tzv. „rekurzivnih modela“ zato što se varijansa stohastičkog procesa predvidja preko varijanse za ocene k razvojnih perioda unapred, koristeći uslovnu verovatnoću:

$$Var[D_{j+k-1}|C_1, C_2, \ldots, C_{j-1}] = \phi\lambda_j\lambda_{j+1}\ldots\lambda j + k - 1(\lambda_j \ldots \lambda_{j+k-1} - 1)D_{j-1}.$$

Na sličan način, u oba modela računa se i disperzija svakog budućeg plaćanja preko disperzija za odredjen broj koraka unazad $Var[\hat{D}_n|D_{n-i+1}]$.

Implementacija u softveru, takodje, nije jednostavna i linearna kao kod ostalih stohastičkih modela. Većina softvera koji računaju GLM modele čak ni nemaju mogućnost primene Negativno-binomne raspodele. Mnogi svetski matematičari su morali sami da prave svoje programe i tabele za dobijanje parametara ovih modela. Na kraju, ipak glavni razlog zašto se u ovom radu neće dublje proučavati ovi modeli je zato što ni jedan ni drugi model nisu toliko zastupljeni u literaturi niti su značajni za svakodnevnu stohastičku praksu. Teoretski deo oba modela je predstavljen u radu da bi čitalac bio upućen u mogućnosti i potencijale statističkih modela i njihovu raznovrsnost.

Glava 5

Bootstrap metod

Tvorac ove metode je američki statističar Bradley Efron, koji je 1979. godine predložio Bootstrap kao novu kompjutersku statističku tehniku. Naziv Bootstrap potiče od engleskog izraza "to pull oneself by one's bootstraps", što u prenesenom smislu znači postići uspeh bez oslanjanja na pomoć spolja. Bootstrap se može definisati kao metoda kojom se na osnovu raspoloživih podataka iz nekog uzorka kreira veliki broj novih uzoraka, **slučajnim biranjem sa vraćanjem** iz skupa raspoloživih podataka. Ovo znači da svaki element ima jednaku verovatnoću da udje u uzorak i da se pri tome neki elementi mogu pojaviti više puta, a neki nijednom.

Bootstrap spada u grupu statističkih tehnika sa idejom o recikliranju informacija sadržanih u jednom jedinom raspoloživom uzorku. Osnovni princip ovih "*resampling*" metoda je da se realizovani uzorak $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tretira kao virtuelna populacija iz koje će biti generisani novi uzorci – *resamples*. Na ovaj način se dobija uzorak $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*)$ pri čemu dva uzorka ne moraju biti istih obima, tj. nije nužno $m = n$. Nagla ekpanzija ovakvih metoda je nastala zahvaljujući razvitku brzih kompjutera u poslednjih nekoliko decenija. Sve više su primenjivi metodi koji se zasnivaju na simulaciji podataka, a računarskim softverima je omogućeno da se na lak i brz način dodje do relativno pouzdanih rezultata i ocena.

Na primer, neka je $x = (2, 4, 5, 6, 6)$ realizovani uzorak. Pomoću kompjutera ili generatora slučajnih brojeva se dobijaju "$pseudo - uzorci$" slučajnim biranjem vrednosti sa vraćanjem iz uzorka x. Na ovaj način se mogu dobiti x^*:

$$\begin{gathered}(2,6,5,6,5),\\(6,6,6,5,4),\\(2,4,6,2,2),\\(4,2,2,6,2),\\(2,2,2,2,2),\\(6,6,4,6,6).\end{gathered}$$

Bootstrap metod je praktičan zato što se generisanje novih uzoraka može računati u Excel-u i nije potrebno imati poseban statistički softver koji vrši simulacije niti koji računa složene formule. Za primenu ovog metoda potrebno je imati podatke koji su nezavisni i sa istom raspodelom. Kod problema računanja tehničkih rezervi, podaci o plaćanjima zahteva za odštetu jesu nezavisni, ali nisu isto raspodeljeni, zato što se očekivanja razlikuju kroz razvojne godine (generalno opada očekivana vrednost slučajnih promenljivih kako

	Razvojna godina:							
Godina štete:	0	1	2	3	4	5	6	7
2006	1780	893	201	220	63	9	20	16
2007	3226	993	313	349	263	55	24	
2008	3652	1337	773	674	284	135		
2009	2723	1578	1225	705	386			
2010	2923	1743	683	1140				
2011	2990	2427	1593					
2012	3917	1972						
2013	3545							

Tabela 5.1: Plaćanja zahteva za odštetu tokom razvojnih godina - C_{ij}

prolaze razvojne godine). Stoga, umesto da se kao poznati uzorak za primenu bootstrap-a uzmu vrednosti plaćanja zahteva za odštetu C_{ij}, uzimaju se vrednosti reziduala, tj. razlike prave vrednosti plaćanja od njihove ocenjene vrednosti. Reziduali su takodje nezavisni i imaju približno istu raspodelu ili se na jednostavan način mogu svesti na istu raspodelu, pa se može zaključiti da zadovoljavaju pretpostavku o obliku podataka na kojima se može primeniti Bootstrap.

Postoji mnoštvo oblika u kojima se reziduali mogu prikazati. Za računanje rezervi osiguravajućeg društva uglavnom se koriste Pirsonovi reziduali, u oznaci r^p, a definisani su na sledeći način:

$$r_{ij}^{p} = \frac{C_{ij} - \hat{m}_{ij}}{\sqrt{\hat{m}_{ij}}}.$$

U prethodnoj jednačini, C_{ij} je vrednost realizovanog plaćanja zahteva za odštetu u j-toj razvojnoj godini, i-te godine štete, dok je $\hat{m}_{ij} = E[C_{ij}] = \hat{C}_{ij}$ ocena tog plaćanja. Ovakav oblik reziduala može da se primeni samo na Poasonovom modelu, dok se za druge stohastičke modele moraju napraviti odredjene promene, ali je i dalje moguće dobiti ocenu rezervi koristeći Bootstrap tehniku.

5.1 Objašnjenje modela

Kao što je ranije u radu napomenuto, kada se računaju tehničke rezerve, Bootstrap metoda se ne primenjuje na same vrednosti plaćanja, već na njihove reziduale. Ovlašćenom aktuaru koji računa ove rezerve, poznati su podaci o plaćanjima u inkrementalnom obliku: C_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, n$ i $j = 0, 1, \ldots, n-i$ kao što se vidi u tabeli 5.1. Koristeći Chain-Ladder metodu na ovim vrednostima plaćanja lako se može doći do kumulativnih vrednosti D_{ij}, a potom i do razvojnih faktora $\lambda_j, j = 1, 2, \ldots, n-1$. U tabeli 5.2 se vide vrednosti razvojnih faktora dobijene pomoću metode težinskog proseka. Na osnovu razvojnih faktora Chain-Ladder metod može da izračuna ocenu budućih plaćanja zahteva za odštetu: $\hat{D}_{ij}, i = 2, 3, \ldots, n, j = n-i+1, \ldots, n-1$ na sledeći način:

	Razvojni faktori:						
	1	2	3	4	5	6	7
Težinski prosek	1.5159	1.1823	1.1284	1.0483	1.0132	1.0053	1.0050

Tabela 5.2: Razvojni faktori λ_j dobijeni metodom težinskog proseka

	Razvojna godina:							
Godina štete:	0	1	2	3	4	5	6	7
2006	1475	2237	2644	2984	3128	3169	3186	**3202**
2007	2419	3667	4335	4892	5128	5196	**5223**	
2008	3191	4838	5719	6454	6765	**6855**		
2009	3121	4731	5594	6312	**6617**			
2010	3208	4864	5750	**6489**				
2011	3911	5929	**7010**					
2012	3885	**5889**						
2013	**3545**							

Tabela 5.3: Ocenjena prošla plaćanja pomoću razvojnih faktora - kumulativni oblik

$$\hat{D}_{i,n-i+1} = D_{i,n-i}\lambda_{n-i+1}$$
i
$$\hat{D}_{i,k} = \hat{D}_{i,k-1}\lambda_k,$$
$$k = n-i+2, n-i+3, \dots, n-1\ .$$

Kod Bootstrap metoda razvojni faktori će služiti da se izračunaju vrednosti $\hat{m}_{ij}$. Posmatraju se poslednji podaci koji su poznati o plaćanjima za sve godine štete $D_{i,n-i}$, to su podebljane vrednosti u tabeli 5.3. Počevši od njih, vršiće se obrnut proces od Chain-Ladder-a, gde će se pomoću razvojnih faktora doći do ocene već poznatih plaćanja u gornjem trouglu tablice:

$$\hat{D}_{i,n-i-1} = \frac{D_{i,n-i}}{\lambda_{n-i}}, i = 1, \dots, n.$$

Na ovaj način se dolazi do kumulativnih vrednosti ocena ranijih plaćanja, koje su izračunate u tabeli 5.3. Da bi se napravili **Pirsonovi reziduali**, potrebne su ocene vrednosti plaćanja u inkrementalnom obliku, tako da se koristi sledeća jednačina:

$$\hat{C}_{i,n-i} = D_{i,n-i} - \hat{D}_{i,n-i-1}, i = 1, \dots, n.$$

Ove vrednosti su zapravo $\hat{m}_{ij} = \hat{C}_{ij}$ pomoću kojih se mogu izračunati Pirsonovi reziduali na kojima će se primeniti Bootstrap tehnika. Reziduali su prikazani u tabeli 5.5 i dobijeni su preko ranije pomenute formule:

$$r^p_{ij} = \frac{C_{ij} - \hat{m}_{ij}}{\sqrt{\hat{m}_{ij}}}, i = 1, \dots, n, j = 0, 1, \dots, n-i.$$

Pre nego što se Pirsonovi reziduali upotrebe u Bootstrap simulacijama, često se prvo uradi korekcija reziduala da bi se dobila bolja ocena sa osobinom nepristrasnosti (centriranosti),

	Razvojna godina:							
Godina štete:	0	1	2	3	4	5	6	7
2006	1475	761	408	340	144	41	17	16
2007	2419	1248	668	557	236	68	27	
2008	3191	1646	882	735	311	90		
2009	3121	1610	863	718	305			
2010	3208	1655	887	739				
2011	3911	2018	1081					
2012	3885	2004						
2013	3545							

Tabela 5.4: Ocenjena prošla plaćanja pomoću razvojnih faktora - inkrementalni oblik

	Razvojna godina:							
Godina štete:	0	1	2	3	4	5	6	7
2006	7,93	4,78	-10,24	-6,49	-6,75	-5,04	0,82	0,00
2007	16,41	-7,21	-13,75	-8,81	1,76	-1,57	-0.64	
2008	8,16	-7,62	-3,67	-2,24	-1,55	4,79		
2009	-7,13	-0,80	12,34	-0,50	4,67			
2010	-5,04	2,16	-6,84	14,77				
2011	-14,73	9,11	15,58					
2012	0,52	-0,72						
2013	0,00							

Tabela 5.5: Pirsonovi reziduali

	Razvojna godina:							
Godina štete:	0	1	2	3	4	5	6	7
2006	4,89	2,95	-6,32	-4,01	-4,17	-3,11	0,50	0,00
2007	10,13	-4,45	-8,48	-5,43	1,08	-0,97	-0,39	
2008	5,04	-4,71	-2,26	-1,38	-0,96	2,96		
2009	-4,40	-0,50	7,62	-0,31	2,88			
2010	-3,11	1,33	-4,22	9,12				
2011	-9,09	5,62	9,61					
2012	0,32	-0,44						
2013	0,00							

Tabela 5.6: Korigovani Pirsonovi reziduali

a potom ti novi **korigovani reziduali** upotrebe u Bootstrap metodu. Korekcija se vrši na sledeći način:

$$r_{ij}^{kor} = \sqrt{\frac{n}{\frac{1}{2}n(n-1) - 2n + 1}} r_{ij}^{p}, i = 1, \ldots, n, j = 0, 1, \ldots, n - i.$$

U primeru je pretpostavljeno da je $n = 8$, te se korekcija vrši tako što se Pirsonovi reziduali pomnože sa brojem $0,617213$. Dobijeni korigovani reziduali se mogu videti u tabeli 5.6. Podaci iz te tabele predstavljaju jedini realizovan uzorak iz kojeg će se simulirati pseudo-uzorci. Vrednosti u novim uzorcima će se birati na slučajan način sa vraćanjem iz vrednosti korigovanih Pirsonovih reziduala. Korišćenjem simulatora slučajnih brojeva ili nekog softvera, dobijaju se tabele slične tabeli 5.6, pri čemu se neke vrednosti mogu pojaviti više puta usled biranja brojeva sa vraćanjem, dok se druge ne moraju pojaviti nijednom. Ovde počinje iterativna petlja i korake koji slede treba ponoviti što više puta. Bootstrap daje sve tačnije rezultate kako se broj simulacija povećava. Pseudo-uzorci koji se dobiju Bootstrap metodom se označavaju sa r_{ij}^*. Iz jednačine koja povezuje reziduale i vrednosti plaćanja mogu se izračunati vrednosti **Bootstrap inkrementalnih plaćanja** zahteva za odštetu C_{ij}^*:

$$C_{ij}^* = r_{ij}^* \sqrt{\hat{m}_{ij}} + \hat{m}_{ij},$$

za sve $i = 1, \ldots, n$ i $j = 0, 1, \ldots, n - i$. Koristeći Chain-Ladder metod dobijeni inkrementalni podaci se prebacuju u kumulativni oblik:

$$D_{ij}^* = \sum_{k=0}^{j} C_{ik}^*,$$

za sve $i = 1, \ldots, n$ i $j = 0, 1, \ldots, n - i$. Ove vrednosti se zovu **Bootstrap kumulativna plaćanja** i na osnovu njih se izračunavaju razvojni faktori jednom od tri ranije navedene metode. Najčešće se koristi metoda težinskog proseka:

$$\lambda_j^* = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} D_{ij}^*}{\sum_{i=1}^{n-j+1} D_{i,j-1}^*},$$

pri čemu se razvojni faktor računa za svaku razvojnu godinu $j = 1, 2, \ldots, n - 1$. Množeći odgovarajuće bootstrap kumulativne vrednosti plaćanja sa razvojnim faktorima dobijaju se ocene budućih plaćanja koji se nalaze u donjem trouglu tabele plaćanja.

$$\hat{D}_{i,n-i+1}^* = D_{i,n-i}^* \lambda_{n-i+1}^*$$

i

$$\hat{D}_{i,k}^* = \hat{D}_{i,k-1}^* \lambda_k^*,$$
$$k = n - i + 2, n - i + 3, \ldots, n - 1 .$$

Na ovaj način se dobijaju ocene budućih plaćanja zahteva za odštetu u kumulativnom obliku. Koristeći poznatu jednačinu sa odnosom kumulativnih i inkrementalnih vrednosti dobijaju se ocene budućih plaćanja zahteva za odštetu u inkrementalnom obliku:

$$\hat{C}_{i,j}^* = \hat{D}_{i,j}^* - \hat{D}_{i,j-1}^*,$$

za sve godine štete $i = 2, \ldots, n$ i razvojne godine $j = n - i + 1, \ldots, n - 1$. Ove vrednosti se nisu mogle dobiti razvojem direktno iz Bootstrap inkrementalnih plaćanja $C_{ij}^*, i =$

$1,\ldots,n, j = 0,1,\ldots,n-i$, zato što se razvojni faktori računaju i primenjuju samo na kumulativne vrednosti D^*_{ij}. Kao što je ranije spomenuto, u ovom postupku su korišćeni Pirsonovi reziduali zato što se pretpodstavljala Poasonova raspodela plaćanja budućih zahteva za odštetu. Kod Poasonovog stohastičkog modela sa povećanom disperzijom je važila pretpostavka o posebnom obliku očekivanja i disperzije:

$$E[C_{ij}] = m_{ij},$$
$$Var[C_{ij}] = \phi m_{ij} \ .$$

m_{ij} predstavlja očekivanu vrednost Poasonove raspodele, dok je ϕ parametar povećane disperzije (kod ovog modela važila je pretpostavka o proporcionalnom odnosu očekivanja i disperzije). Bootstrap metodom i Chain-Ladder razvojem dobijene su vrednosti ocena očekivanih vrednosti $\hat{C}^*_{i,j}, i = 2,\ldots,n, j = n-i+1,\ldots,n-1$. Ove vrednosti su ustvari m^*_{ij} za Poasonov model sa povećanom disperzijom i predstavljaju parametar očekivanja. Parametar disperzije se dobija tako što se m^*_{ij} pomnoži sa parametrom povećane disperzije:

$$\phi = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}(r^p_{ij})^2}{\frac{1}{2}n(n+1) - 2n + 1}.$$

Ovaj parametar je suma kvadrata Pirsonovih reziduala podeljena sa brojem stepena slobode tj. sa ukupnim brojem reziduala u sumi minus broj parametara koji se ocenjuju. U primeru kada je $n = 8$, broj stepeni slobode je 21, a kada su Pirsonovi reziduali r^*_{ij} izračunati u tabeli 4.5 , dobija se da je njihova suma jednaka $2130,91$. Na kraju se može izračunati da je parametar ϕ jednak broju $101,4721$. Sada je potrebno generisati buduće vrednosti plaćanja iz Poasonove raspodele sa povećanom disperzijom čije je očekivanje m^*_{ij}, a disperzija ϕm^*_{ij}:

$$C^*_{ij} : \mathcal{P}(m^*_{ij}, \phi m^*_{ij}),$$

pri čemu je $i = 2,3,\ldots,n-1$ i $j = n-i+1,\ldots,n-1$. Ove vrednosti se simuliraju pomoću softvera tako da se dobiju realizovane vrednosti Poasonove raspodele C^{real}_{ij}. Konačno, ove vrednosti predstavljaju ocenu budućih plaćanja, tj. rezervi koje osiguravajuće društvo treba da čuva za obaveze u budućnosti. Sabiranjem vrednosti C^{real}_{ij} po svim i-ovima i j-ovima dobija se ocena ukupnih aktuarskih rezervi R^*. Na ovaj način se Bootstrap tehnikom došlo do ocene rezervi. Da bi bila što bolja ocena, potrebno je ponoviti Bootstrap iteraciju što više puta. U ovom radu uradiće se 1000 iteracija uz pomoć statističkog paketa R. Program za svaku iteraciju daje jednu ocenu rezervi R^*. Konačna ocena ukupnih rezervi osiguravajućeg društva pomoću Bootstrap metoda se dobija tako što se izračuna prosečna vrednost rezervi R^* dobijenih u svakoj iteraciji. Bootstrap metod takodje može da pruži informaciju ovlašćenom aktuaru i o grešci ocene rezervi. Greška se računa preko standardne devijacije vrednosti rezervi R^* dobijenih u svakoj iteraciji.

Velika prednost Bootstrap-a u odnosu na ostale metode je to što pravi **prediktivnu raspodelu** ukupnih plaćanja osiguravajućeg društva. Na osnovu nje je moguće doći do mnogo šireg opsega informacija o plaćanjima u budućnosti. U nastavku rada biće prikazan postupak vršenja Bootstrap simulacija u softveru R kao i detaljan opis komandi kojim se može doći do željene ocene rezervi. Takodje, biće prikazana dobijena prediktivna raspodela na osnovu simuliranih kvazi-uzoraka.

5.2 Simulacije u programskom paketu R

U ovom radu se koristi softver za računanje rezervi pomoću Bootstrap metoda zato što ceo postupak zahteva veliki broj simulacija Pirsonovih reziduala, ali i realizovanih vrednosti Poasonove raspodele sa povećanom disperzijom. Koristeći softver, na lak i jednostavan način se radi veliki tehnički posao, čime se olakšava računanje ovlašćenog aktuara. Takodje, ovim putem se vrši slučajno biranje vrednosti slučajnih promenljivih koje se moraju odraditi preko nekog simulatora brojeva. Za početak, u R-u je potrebno instalirati poseban paket - Chain Ladder paket, pomoću kojeg se može raditi sa podacima za računanje rezervi osiguravajućeg društva. U konzolni prozor se ukuca:

$$install.packages('ChainLadder')$$

Da bi se izračunale rezerve podaci se u kumulativnom obliku prvo unose u matricu. U ovom primeru matrica sa podacima je nazvana *trougao* i u program se unosi na sledeći način:

$$\begin{gathered} trougao <- matrix(c(\\ +1780, 2673, 2874, 3094, 3157, 3166, 3186, 3202, \\ +3226, 4219, 4532, 4881, 5144, 5199, 5223, NA, \\ +3652, 4989, 5762, 6436, 6720, 6855, NA, NA, \\ +2723, 4301, 5526, 6231, 6617, NA, NA, NA, \\ +2923, 4666, 5349, 6489, NA, NA, NA, NA, \\ +2990, 5417, 7010, NA, NA, NA, NA, NA, \\ +3917, 5889, NA, NA, NA, NA, NA, NA, \\ +3545, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA), \\ +nrow = 8, byrow = TRUE) \end{gathered}$$

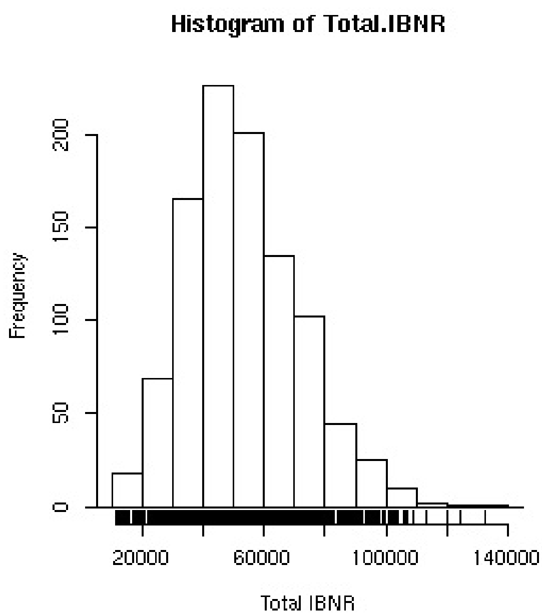
U ovakvom obliku, matrica *trougao* može da se koristi za računanje Bootstrap metode. U Chain-Ladder paketu je ugradjena posebna funkcija koja simulira Bootstrap metodu:

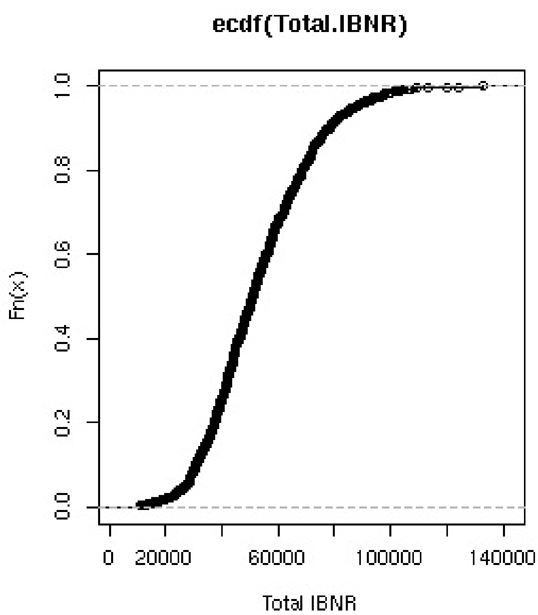
$$B = BootChainLadder(Triangle = trougao, R = 1000, process.distr = "od.pois")$$

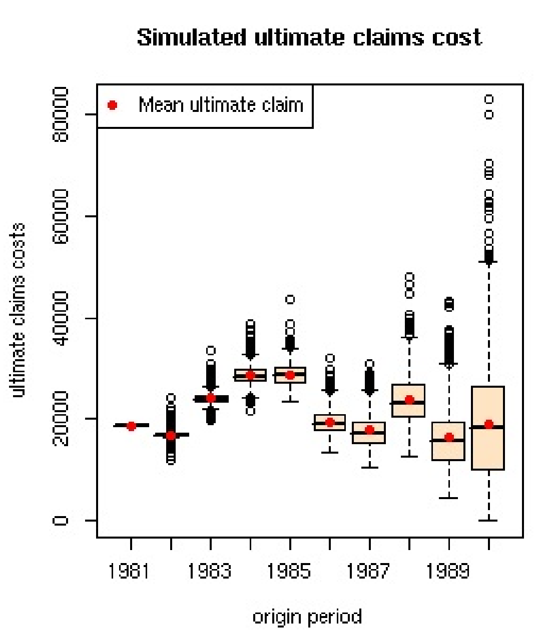
Funkcijom $BootChainLadder$ softver primenjuje Bootstrap metodu na podatke u matrici *trougao*. $R = 1000$ znači da se vrši 1000 iteracija računanja rezervi, dok $process.distr$ $=$ "*od.pois*" označava pretpostavku da plaćanja zahteva za odštetu imaju Poasonovu raspodelu sa povećanom disperzijom. U ovom delu komande se može uneti i $process.distr =$ "*gamma*", čime se pretpostavlja Gama raspodela zahteva za odštetu i dobija drugačiji Bootstrap model, ali ujedno i druga ocena aktuarskih rezervi. Pozivanjem vrednosti B u konzolnom prozoru, dobija se tabela 5.7 sa vrednostima ocena rezervi, a pozivanjem $plot(B)$ dobijaju se četiri grafika prikazana na sledećoj strani. Na osnovu prikazane tabele i grafika mogu se videti rezultati dobijeni vršenjem simulacija i konačna vrednost Bootstrap ocene rezervi osiguravajućeg društva. Proučavajući podatke dobijene u tabeli 5.7 zaključuje se da je ocena rezervi dobijena Bootstrap metodom jako bliska oceni dobijenoj pomoću Chain-Ladder metode. Ovo je pravi pokazatelj da se Bootstrap metod može primeniti za rešavanje aktuarskih problema, kao što je računanje tehničkih rezervi osiguravajućeg društva.

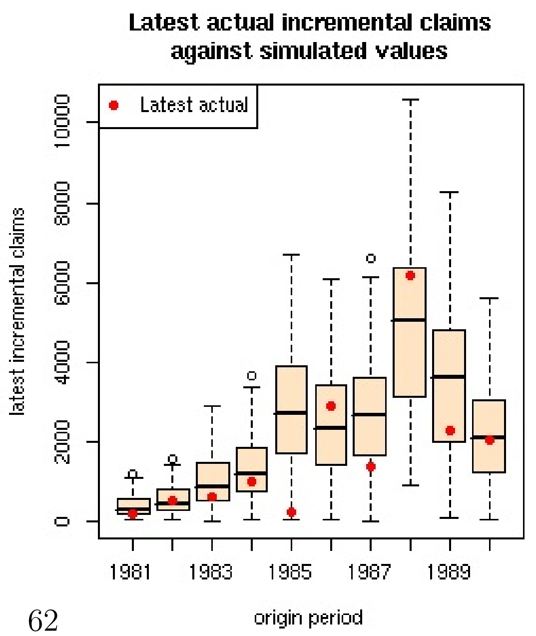
Godina štete:	Očekivana ukupna plaćanja:	Isplate do 2014. godine:	Očekivana buduća plaćanja (rezerve):	Standardna greška rezervi:	Procenat greške:
2006	3202	3202	0	0	0%
2007	5247	5223	24	106	441%
2008	6921	6855	66	157	238%
2009	6778	6617	161	198	123%
2010	6954	6489	465	295	63%
2011	8457	7010	1447	489	34%
2012	8386	5889	2497	693	28%
2013	7667	3545	4122	1073	26%
UKUPNO:	53612	44830	**8782**	**1749**	**20%**

Tabela 5.7: Rezerve dobijene Bootstrap metodom sa 1000 iteracija









Za razliku od Bootstrap-a, Chain-Ladder ne poseduje mogućnost računanja standardne greške ocene rezervi. Ova činjenica daje jednu značajnu prednost Bootstrap metodu zato što standardna greška procenjuje koliko je ocena verodostojna i koliko je eventualno odstupanje stvarnog budućeg stanja isplata od budućeg stanja predvidjenom Bootstrap ocenom. Na osnovu mogućnosti greške ovlašćeni aktuar donosi odluku da li da prihvati ili odbaci dobijenu ocenu rezervi. U primeru iz ovog rada se dobija standardna greška od 20% vršenjem 1000 iteracija u programu i sa pretpostavkom da plaćanja zahteva za odštetu imaju Poasonovu raspodelu sa povećanom disperzijom.

Grafici sa prethodne strane su dobijeni pomoću softvera i dosta su korisni za aktuara zato što daju uvid o rezultatima simulacija koje su izvršene. Gornji levi grafikon naziva se histogram i na njemu se mogu iščitati vrednosti očekivanih ukupnih plaćanja dobijenih pomoću R iteracija. Ovo su vrednosti ukupnih plaćanja za sve godine štete i označavaju vrednost koju će osiguravajuće društvo morati da plati za sve štete koje su nastale u vremenskom periodu od n godina šteta, takoreći ukupan trošak društva za n godina štete. Na grafiku se jasno vidi koje su vrednosti bile češće zastupljene prilikom simulacija, a koje redje. Sve ove vrednosti predstavljaju izvesni uzorak pomoću kojeg se može formirati prediktivna raspodela ukupnih budućih plaćanja zahteva za odštetu.

Chain-Ladder metod je imao samo jedan uzorak na raspolaganju na osnovu kojeg se izračunavala ocena ukupnih plaćanja, dok se u Bootstrap metodu simuliralo hiljadu pseudo-uzoraka pomoću kojih se izračunalo hiljadu ocena ukupnih plaćanja. Na osnovu hiljadu simuliranih uzoraka, dobijen je histogram koji jasno pokazuje realizovane vrednosti, ali i njihove frekvencije (učestalost realizacije u odnosu na sve realizacije). Ovaj grafik se može posmatrati i kao prediktivna funkcija gustine verovatnoće za ukupna plaćanja zahteva za odštetu. Na osnovu nje se može dobiti **prediktivna raspodela ukupnih plaćanja**, koja je prikazana na gornjem desnom grafiku na prethodnoj strani. Prediktivna raspodela je jedna od važnih prednosti Bootstrap metoda u odnosu na druge metode koji predvidjaju buduća plaćanja osiguravajućeg društva i računaju rezerve za buduće obaveze. Svi modeli prezentovani ranije u radu su pretpostavljali oblik očekivanja i disperzije plaćanja zahteva, što su u suštini samo prvi momenat i drugi centralni momenat cele raspodele. Bootstrap daje mogućnost da se napravi cela prediktivna raspodela pomoću simuliranih novih podataka.

Za svaku raspodelu verovatnoće mogu se izračunati **kvantili**, tj. tačke koje dele populaciju na jednake delove. Za slučajnu promenljivu X kvantil reda p, ili drugim rečima p-kvantil, je vrednost x_p slučajne promenljive sa osobinom:

$$P(X < x_p) \leq p, P(X > x_p) \leq 1 - p,$$

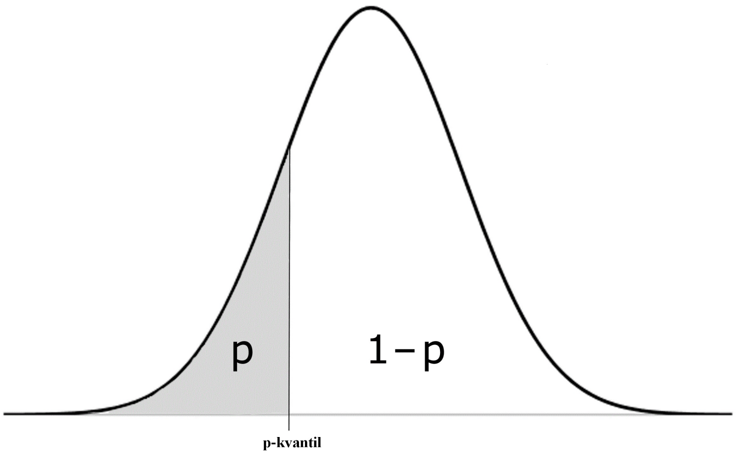
odnosno bilo koje rešenje jednačine:

$$F(x_p) = p,$$

pri čemu je F funkcija raspodele slučajne promenljive, x_p realan broj, a p vrednost iz skupa $(0, 1)$. Kvantil reda p ima osobinu da je 100p% vrednosti slučajne promenljive manje od x_p, a 100(1-p)% vrednosti je veće od x_p. Kvantil x_p deli varijacioni niz $y_1, y_2, \ldots, y_N$ vrednosti slučajne promenljive u odnosu 100p% prema 100(1-p)%, odnosno 100p% elemenata varijacionog niza je manje od x_p, a 100(1-p)% elemenata je veće od x_p.

Godina štete	0.9-kvantil	0.95-kvantil	0.975-kvantil	0.99-kvantil
2006	0	0	0	0
2007	134	231	304	377
2008	275	355	403	530
2009	395	471	597	707
2010	812	947	1017	1164
2011	2178	2413	2608	2880
2012	3520	3836	4198	4461
2013	5676	6122	6414	7010
UKUPNO:	**11177**	**11836**	**12660**	**13683**

Tabela 5.8: Kvantili po godinama štete



Zbog ove lepe osobine kvantila, statističarima je značajno da izračunaju kvantile sa vrednostima bliskim jedinici, jer na taj način dobijaju nove informacije o mogućim realizovanim vrednostima. Uglavnom se u praksi računaju kvantili reda 0.90 , 0.95 , 0.975 i 0.99. Dobra stvar je da program R ima mogućnost računanja kvantila brzo i na jednostavan način. Željeni kvantili se dobijaju pozivanjem komande:

$$quantile(B, c(0.90, 0.95, 0.975, 0.99))$$

R računa kvantile na ranije dobijenu prediktivnu raspodelu ukupnih plaćanja osiguravajućeg društva. Ovde još jednom dolazi do izražaja prednost dobijene prediktivne raspodele koja daje mogućnost dobijanja novih informacija o mogućim vrednostima plaćanja zahteva za odštetu. Jednostavnom komandom *quantile* se dolazi do kvantila željenih redova. U tabeli 5.8 su prikazani dobijeni rezultati kvantila prediktivne raspodele. U njoj se može iščitati da će 90% realizovanih vrednosti ukupnih plaćanja biti najviše 11177, dok će 99% realizovanih vrednosti ukupnih plaćanja biti 13683 ili manja. Na ovaj način, kvantili su dali informacije koje se realizovane vrednosti ukupnih plaćanja očekuju i koje vrednosti će biti gornja granica realizacije slučajne promenljive.

5.3 Diskusija o metodu

Bootstrap metod je dosta jednostavan i jasan na intuitivnom nivou. Njegova velika prednost je da je za njegovu upotrebu potrebno napraviti samo jednu pretpostavku – da podaci koji se simuliraju i na osnovu koji se stvaraju novi uzorci u odgovarajućoj meri predstavljaju reprezentativan uzorak populacije iz koje su izvučeni. Sa druge strane, neki kritičari smatraju da se resampling metode ne mogu smatrati formom statističkog zaključivanja baš zato što vrše generalizaciju na osnovu samo jednog datog uzorka.

Još jedna od zamerki Bootstrap metoda je slučaj kada uzorak loše predstavlja populaciju iz koje je realizovan. Ovo je slučaj kada uzorak predstavlja neku neprosečnu vrednost, tj. ekstrem. Koristeći Bootstrap simulacije da se dobiju novi uzorci, može se samo ponoviti ista ili čak i povećati greška ocenjivanja rezervi, jer će novi, pseudo-uzorci takodje predstavljati ekstremne vrednosti populacije. Uzorak nad kojim se vrši Bootstrap metod mora da na pravi način prikazuje sve glavne osobine posmatrane populacije i da uveri da se donošenjem zaključaka nad uzorkom dobijaju dobre ocene cele populacije. Ukoliko je početni uzorak adekvatan i ostali pseudo-uzorci dobijeni Bootstrap metodom imaju veću verovatnoću da budu reprezentativni.

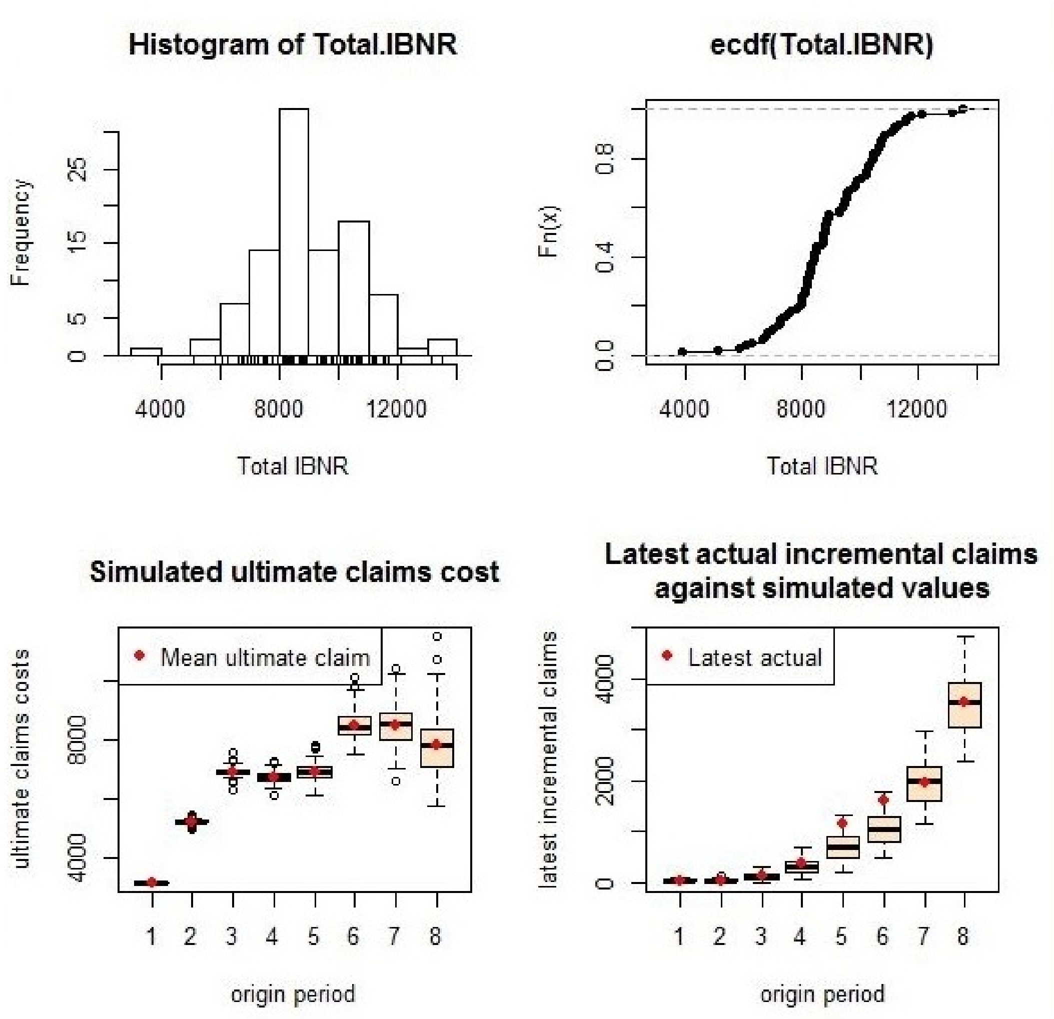
Medjutim, sve ove zamerke se mogu odnositi i na situacije kada bi se primenom „klasičnih“ statističkih metoda pravile greške, npr. u zaključivanju o parametrima populacije, odlukama prihvatanja ili odbijanja tačnosti statističkog testa ili, kao sa slučajevima u ovom radu, greške o visini rezervi koju treba da čuva osiguravajuće društvo. Jednostavno, svaka procedura koja se bavi procenjivanjem i donošenjem zaključaka o populaciji na osnovu ograničenog broja podataka, mora da se susretne sa mogućnošću greške na koju se ne može uticati. Jedini način da se proveri koliko je ocena rezervi dobra je da uporedi sa pravim realizovanim budućim plaćanjima zahteva za odštetu. Ali kako se to neće znati tek do u budućnosti, verodostojnost ocene se može pretpostaviti samo na osnovu reprezentativnog uzorka koji je korišćen prilikom računanja te ocene.

Bootstrap je metod zasnovan na ideji da se nova saznanja o populaciji mogu dobiti na osnovu velikog broja simulacija jednog uzorka. Ovde nastaje problem oko samog broja simulacija koje je potrebno sprovesti. Kao što je broj uzoraka jedan od pokazatelja reprezentativnosti populacije, tako je i broj simulacija pokazatelj približnije ocene rezervi osiguravajućeg društva. Jasno je da će se većim brojem simulacija dobiti sigurnija ocena rezervi, baš kao što bi se većim brojem realizovanih uzoraka dobijao sigurniji uvid u populaciju. Ovo naravno ne važi sa stopostotnom sigurnošću. Vršenjem odredjenog broja simulacija dobiće se jedna ocena, dok se ponovnim vršenjem istog broja simulacija dobija druga ocena koja je bliža ili dalja onoj prvoj. Ova pojava se može pripisati uvek postojećoj uzoračkoj grešci i slučajnošću pomoću koje se stvaraju novi pseudo-uzorci.

U tabelama koje slede, 5.9 , 5.10 i 5.11 mogu se videti rezultati vršenjem 100, 10000 i 50000 iteracija koristeći softver R. Ocene rezervi koje su dobijene na ovaj način iznose: 8979, 8833 i 8820, pri čemu su procenti greške: 18%, 20% i 20%. Ovde može da se zaključi da se ocena rezervi polako stabilizovala oko vrednosti 8820 kako se povećavao broj iteracija.

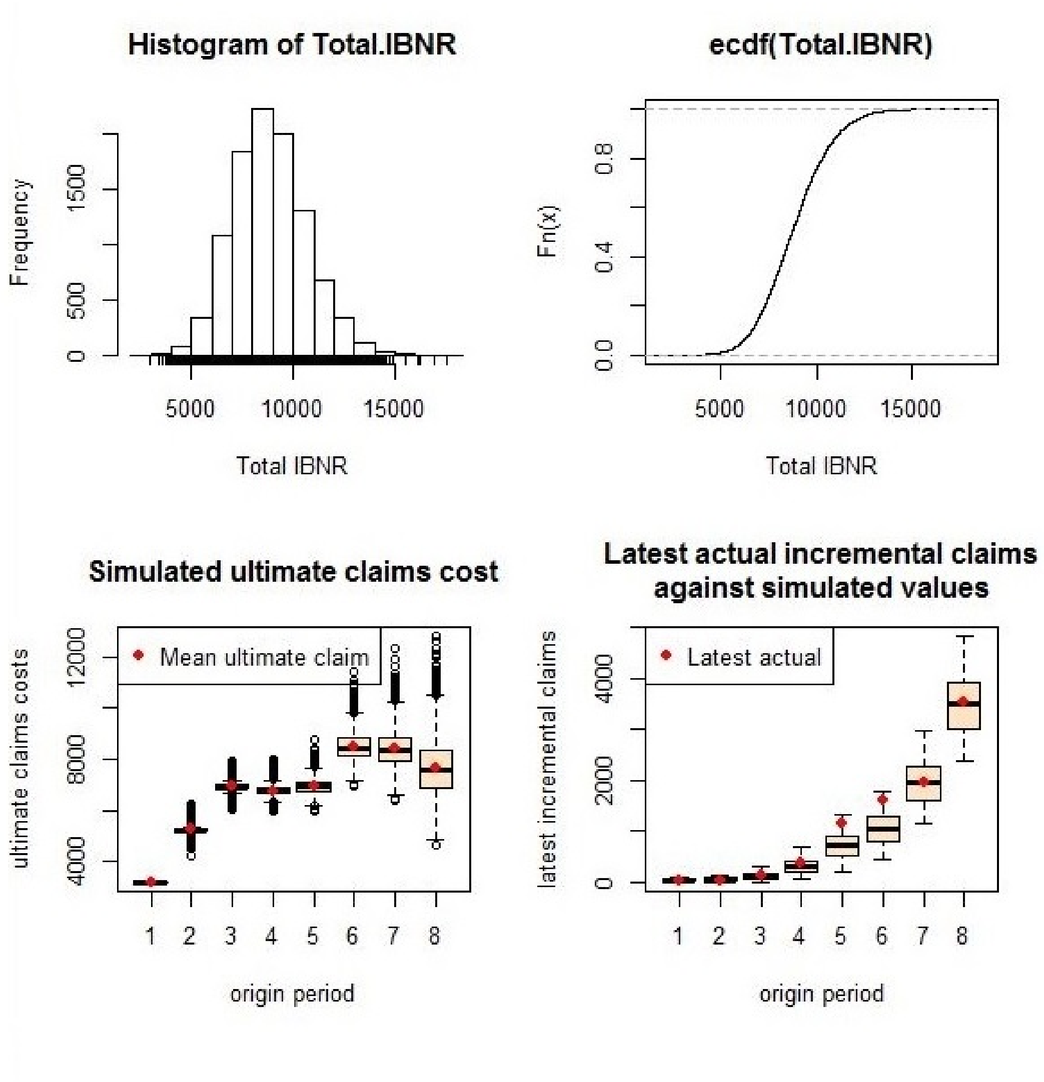
Godina štete:	Očekivana ukupna plaćanja:	Isplate do 2014. godine:	Očekivana buduća plaćanja (rezerve):	Standardna greška rezervi:	Procenat greške:
2006	3202	3202	0	0	0%
2007	5236	5223	13	81	623%
2008	6918	6855	63	155	246%
2009	6741	6617	124	187	151%
2010	6933	6489	444	286	64%
2011	8482	7010	1472	497	34%
2012	8486	5889	2597	667	26%
2013	7811	3545	4266	1038	24%
UKUPNO:	53809	44830	**8979**	**1638**	**18%**

Tabela 5.9: Rezerve dobijene Bootstrap metodom sa 100 iteracija



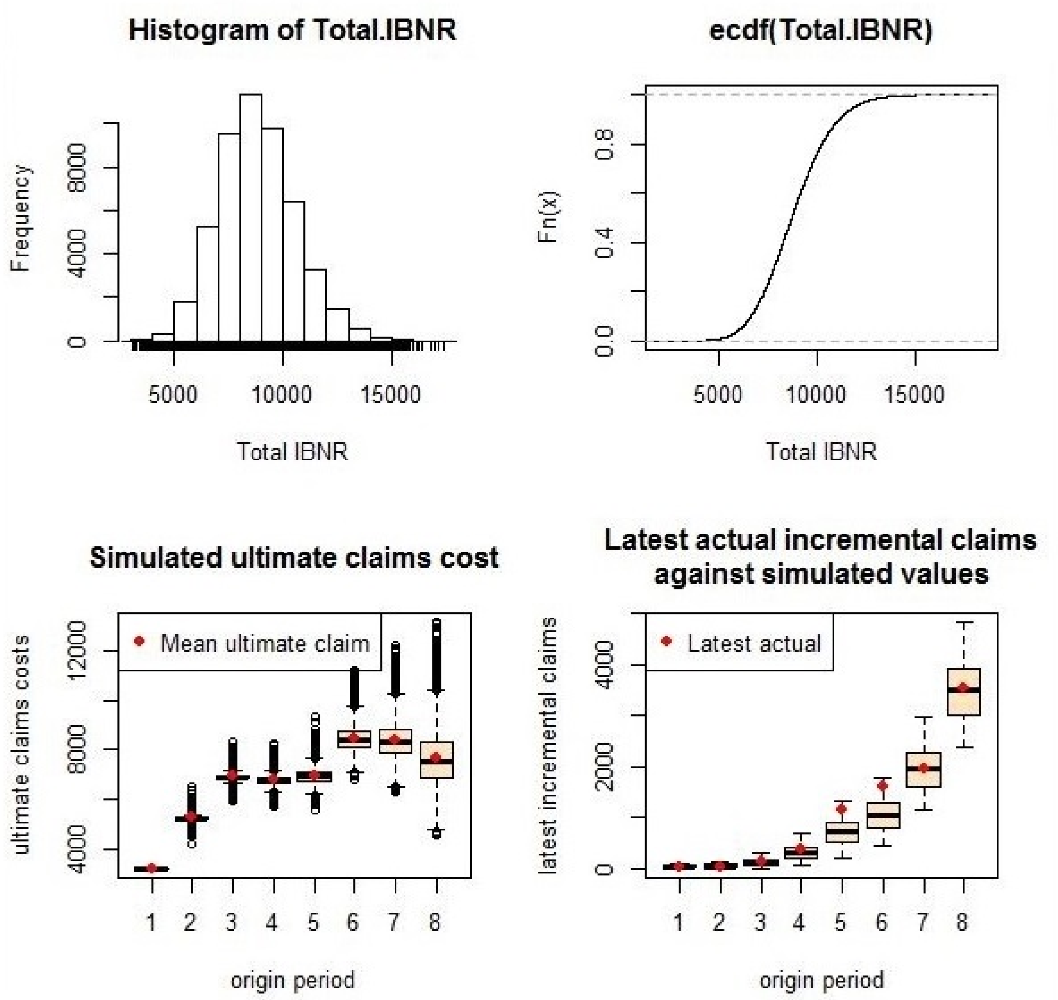
Godina štete:	Očekivana ukupna plaćanja:	Isplate do 2014. godine:	Očekivana buduća plaćanja (rezerve):	Standardna greška rezervi:	Procenat greške:
2006	3202	3202	0	0	0%
2007	5248	5223	25	103	412%
2008	6921	6855	66	155	235%
2009	6769	6617	152	192	126%
2010	6958	6489	469	294	63%
2011	8473	7010	1463	514	35%
2012	8424	5889	2535	710	28%
2013	7668	3545	4123	1073	26%
UKUPNO:	53663	44830	**8833**	**1772**	**20%**

Tabela 5.10: Rezerve dobijene Bootstrap metodom sa 10000 iteracija



Godina štete:	Očekivana ukupna plaćanja:	Isplate do 2014. godine:	Očekivana buduća plaćanja (rezerve):	Standardna greška rezervi:	Procenat greške:
2006	3202	3202	0	0	0%
2007	5248	5223	25	102	408%
2008	6921	6855	66	155	235%
2009	6768	6617	151	193	128%
2010	6956	6489	467	292	63%
2011	8473	7010	1463	512	35%
2012	8411	5889	2522	702	28%
2013	7670	3545	4125	1061	26%
UKUPNO:	53650	44830	**8820**	**1763**	**20%**

Tabela 5.11: Rezerve dobijene Bootstrap metodom sa 50000 iteracija



Podaci dobijeni metodama zasnovanim na simulacijama, kao što je Bootstrap, se uvek moraju uzeti sa rezervom. Simulacije nisu najbolji niti najtačniji način da se donesu zaključci o rezultatima zato što se ne zasnivaju na matematičkim modelima i računu, pa se često može desiti da simulacije daju pogrešne vrednosti. Uglavnom se u matematičkom svetu simulacione metode izbegavaju ili se rade, eventualno, ako ne postoji nijedan bolji raspoloživi način kojim bi se došlo do željenih rezultata.

U problemima ovakvog tipa, kao što je predvidjanje budućih plaćanja osiguravajućeg društva, Bootstrap ima prednost u odnosu na ostale modele zato što daje celu raspodelu ukupnih plaćanja i zato što je u mogućnosti da pruži više informacija o rezervama od ostalih modela (kod ostalih modela se dobijaju samo prva dva momenta - očekivanje i disperzija). Na ovlašćenom aktuaru je izbor da li će se koristiti nekim modelima koji daju manje informacija, ali koje su tačnije, ili nekim simulacionim metodima koji daju više informacija, ali koje možda i nisu tako pouzdane, jer se ne zasnivaju na matematičkom zaključivanju.

Glava 6

Implementacija modela na podacima

U ovom poglavlju će biti implementirani svi prethodno objašnjeni modeli na podacima iz aktuarske prakse. Podaci koji će biti prezentovani u nastavku rada su dobijeni od strane jednog poznatog osiguravajućeg društva u Srbiji koji se pretežno bavi životnim osiguranjem. [1] Ranije je u radu napomenuto da modeli rezervisanja zasnovani na Chain-Ladder tehnici nisu preporučljivi za korišćenje kod životnih osiguranja, ali u razgovoru sa ovlašćenim aktuarom zaposlenom u tom društvu ustanovio sam da se ovaj metod može koristiti u nekim vrstama životnog osiguranja kao što je **dopunsko osiguranje od nezgode**. Ova vrsta osiguranja štiti od iznenadnih i nepredvidivih događaja. Nezgoda se ne može sprečiti, ali ovom vrstom osiguranja mogu da se ublaže posledice kroz finansijsku nadoknadu. Kupovinom polise, osigurano lice je pokriveno 24 sata dnevno, 365 dana u godini, na bilo kom mestu na svetu. Ugovarač osiguranja plaća odredjenu godišnju premiju, a osiguravajuće društvo se obavezuje na isplatu ugovorne osigurane sume ukoliko se dogodi neki iznenadni ili nepredvidjeni dogadjaj. Pod ovim dogadjajima se podrazumevaju **trajna invalidnost, lom kosti i bolnički dani** (naknada za svaki dan proveden u bolnici usled nastanka nezgode).

6.1 Analiza sa troškovima

U tabelama koje sam dobio od osiguravajućeg društva bili su prikazani iznosi plaćanja prijavljenih šteta od strane osiguranika hronološki po godinama u periodu od 2008. do 2013. godine. Iz tih tabela je bilo potrebno srediti podatke u oblik trougla, tj. oblik koji odgovara modelima iz ovog rada. Važno je napomenuti da su u tabelama bili dati podaci o vremenu nastanka štete (datum osiguranog slučaja), zatim datum prijave štete osiguravajućem društvu, kao i datum isplate štete osiguraniku. Za modele iz ovog rada krucijalni su prvi i treći datum, jer se odredjen iznos plaćanja unosi u ono mesto u tabeli plaćanja u zavisnosti u kojoj godini je ta šteta nastala (odredjuje vrstu u kojoj se iznos nalazi) i u zavisnosti u kojoj razvojnoj godini je šteta likvidirana (odredjuje kolonu u kojoj se iznos nalazi). Na primer, ukoliko je jedan osiguranik doživeo nesreću 2009. godine i iste godine mu je isplaćena osigurana suma, tada će se isplaćeni iznos uneti u polje tabele koje se nalazi u preseku vrste koja označava 2009. godinu štete i kolone koja označava nultu razvojnu godinu (nulta razvojna godina neke godine štete predstavlja upravo tu

[1] Čelnici ovog poznatog osiguravajućeg društva su mi dali odobrenje da u svom radu iskoristim podatke o plaćanjima zahteva za odštetu u prethodnih 6 godina, ali sa molbom da podaci ostanu stroga poslovna tajna i da se iz pravnih i sigurnosnih razloga ne otkrivaju nikakvi detalji o klijentima i samom osiguravajućem društvu.

	Razvojna godina:					
Godina štete:	0	1	2	3	4	5
2008	17109.26	7734.17	3946.50	2231.23	0.00	0.00
2009	65982.27	21781.96	12545.29	64.36	836.88	
2010	74083.59	38571.92	7770.76	7606.41		
2011	78943.41	27658.73	5725.47			
2012	123427.29	54704.32				
2013	135189.74					

Tabela 6.1: Inkrementalna plaćanja zahteva za odštetu tokom razvojnih godina

	Razvojna godina:					
Godina štete:	0	1	2	3	4	5
2008	17109.26	24843.43	28788.93	31020.16	31020.16	31020.16
2009	65982.27	87764.23	100309.52	100373.88	101210.76	
2010	74083.59	112655.51	120426.27	128032.68		
2011	78943.41	106602.14	112327.61			
2012	123427.29	178131.61				
2013	135189.74					

Tabela 6.2: Kumulativna plaćanja zahteva za odštetu tokom razvojnih godina

godinu štete). Ali ukoliko je šteta nastala u 2009. godini, a plaćena iz nekog razloga tek 2011. godine, tada bi taj iznos bio unet polje tabele koje se nalazi u preseku vrste koja označava 2009. godinu štete i kolone koja označava drugu razvojnu godinu. Kao što je ranije napomenuto, datum prijavljivanja štete u ovim modelima nije bitan, što znači da se u ovom radu sabiraju sve vrednosti $IBNR$ i $RBNS$ šteta, tj. šteta koje su se desile ali još nisu prijavljene i šteta koje su prijavljene ali još nisu isplaćene. Moguće je sprovesti pojedinačnu analizu tehničkih rezervi u zavisnosti od različitih vrsta šteta.

Podaci koji su prikazani u tabeli 6.1 prikazuju iznose plaćanja zahteva za odštetu od 2008. do 2013. godine u ovom osiguravajućem društvu za dopunsko osiguranje od nezgode. Iznosi plaćanja su dati u inkrementalnom obliku i u evrima. Podaci prikazani na ovakav način mogu da se primene na modelima rezervisanja iz ovog rada. Kao što se može videti iz tabele 6.1, za likvidiranje šteta bilo je potrebno i po nekoliko godina. Potrebno je odredjeno vreme da bi osiguravač procenio nastalu štetu i odredio visinu obeštećenja svojim klijentima, kao i da bi se uverio da li je došlo do potencijalnog pokušaja prevare i ostvarivanja protivzakonite dobiti na račun društva. Zato postoje štete koje su nastale odredjene godine, ali bivaju isplaćene tek posle tri ili četiri godine.

	Razvojni faktori:				
Metod:	1	2	3	4	5
Prosek	1.4192781	1.1061111	1.0471023	1.0041688	1.0000000
Težinski prosek	1.4184476	1.0903590	1.0396834	1.0063692	1.0000000

Tabela 6.3: Razvojni faktori

Važno je napomenuti da su u tabeli 6.1 sa inkrementalnim isplatama uračunati i svi dodatni troškovi vezani za isplaćivanje naknade osiguranja. Pod ovim se podrazumevaju **troškovi procene osiguranog slučaja, sudski troškovi, plaćene kamate...** U ovom delu rada biće primenjeni različiti modeli da bi se izračunale rezerve koje osiguravajuće društvo treba da čuva da bi obezbedilo dovoljno sredstava za isplatu budućih zahteva za odštetu, kao i dodatnih troškova koji prate isplatu naknada. U narednom delu rada biće ponovljen isti postupak računanja potrebnih rezervi, ali samo na osnovu podataka o prethodnim plaćanjima zahteva za odštetu, bez pratećih troškova. Na ovaj način će se utvrditi razlika u visini rezervi koje osiguravajuće društvo čuva za sva dodatna plaćanja koja prate isplate šteta.

U tabeli 6.2 su prikazani isti podaci o plaćanjima zahteva za odštetu u periodu od 2008. do 2013. godine kao u tabeli 6.1, samo u kumulativnom obliku. Ovi iznosi su takodje u evrima. Na osnovu njih se mogu izračunati razvojni faktori za Chain-Ladder metod. Da bi se dobili razvojni faktori u ovom primeru, mogu se primeniti metod proseka i metod težinskog proseka. Metod petogodišnjeg proseka se ne može primeniti, jer ne postoji dovoljan broj godina štete za koje su nam poznati podaci o plaćanjima. Zapravo, ovaj metod se može primeniti, ali će daviti iste vrednosti razvojnih faktora kao i metod proseka zato što će metod proseka takodje koristiti poslednjih pet godina da utrvdi razvojne faktore. U tabeli 6.3 prikazani su dobijeni razvojni faktori za sve razvojne godine koristeći metod proseka i metod težinskog proseka. Kada se ovi rezultati primene na poznatim podacima plaćanja iz tabele 6.2 dobijaju se ocene budućih plaćanja zahteva za odštetu. Na ovaj način se vrši popunjavanje preostalih polja u tabeli plaćanja tj. na ovaj način se tabela iz oblika trougla dopunjuje do kvadrata.

U tabelama 6.4 i 6.5 podebljanim fontom su prikazane izračunate ocene budućih plaćanja zahteva za odštetu dobijene metodom proseka i težinskog proseka, respektivno. Poslednje tri kolone u tabelama su jako važne za analizu rezervi osiguravajućeg društva. Prva kolona predstavlja vrednosti očekivanih ukupnih budućih plaćanja za svaku godinu štete posebno. To je ukupna vrednost koja je isplaćena tokom svih razvojnih godina da bi se namirile obaveze iz zahteva za odštetu prijavljenih jedne godine štete. Druga kolona pokazuje poznate vrednosti isplata do 2014. godine, dok treća daje razliku prve dve kolone i predstavlja vrednost očekivanih budućih plaćanja, tj. ocenu rezervi za svaku godinu štete posebno. U poslednjem redu tabele se može videti zbir ocena rezervi po godinama što predstavlja ocenu ukupnih rezervi osiguravajućeg društva. Na osnovu podataka iz tabela 6.4 i 6.5 se može zaključiti da metod proseka daje ocenu rezervi 123322.41 evro, dok metod težinskog proseka daje ocenu 114685.32 evra za sve štete koje su nastale u periodu od 2009. do 2013. godine, a još nisu likvidirane. Analizirajući ove dve vrednosti primećuje se da dobijene ocene nisu baš slične, jer je metod proseka dao vrednost rezervi za 7.5% veću od metoda težinskog proseka, tj. 8637.10 evra više.

	Razvojna godina:							
Godina štete:	1	2	3	4	5	Očekivana ukupna plaćanja:	Isplate do 2014. godine:	Očekivana buduća plaćanja (rezerve):
2008						31020.16	31020.16	0.00
2009					**0**	101210.76	101210.76	0.00
2010				**533.74**	**0**	128566.42	128032.68	533.74
2011			**5290.89**	**490.33**	**0**	118108.83	112327.61	5781.22
2012		**18901.75**	**7280.73**	**860.09**	**0**	207174.18	178131.61	29042.57
2013	**56682.10**	**20359.74**	**9996.61**	**926.43**	**0**	223154.61	135189.74	87964.87
UKUPNO:						809234.97	685912.56	**123322.41**

Tabela 6.4: Rezerve dobijene metodom proseka

	Razvojna godina:							
Godina štete:	1	2	3	4	5	Očekivana ukupna plaćanja:	Isplate do 2014. godine:	Očekivana buduća plaćanja (rezerve):
2008						31020.16	31020.16	0.00
2009					**0**	101210.76	101210.76	0.00
2010				**815.47**	**0**	128848.15	128032.68	815.47
2011			**4457.55**	**743.83**	**0**	117528.99	112327.61	5201.38
2012		**16095.80**	**7707.61**	**1286.17**	**0**	203221.19	178131.61	25089.58
2013	**56569.83**	**17327.20**	**8297.28**	**1384.57**	**0**	218768.63	135189.74	83578.89
UKUPNO:						800597.88	685912.56	**114685.32**

Tabela 6.5: Rezerve dobijene metodom težinskog proseka

Jedan od mogućih razloga zašto se pojavila tako velika razlika u ocenama rezervi izmedju metoda je zbog vrednosti podataka iz tabele plaćanja 6.1 na osnovu kojih su dobijeni razvojni faktori. Analizirajući podatke može se zaključiti da je isplata zahteva za odštetu varirala od jedne do druge godine štete. Na primer, zahtevi koji su se dogodili 2009. godine su bili otplaćivani procentualno mnogo više u drugoj razvojnoj godini od šteta koje su se dogovile 2008. ili 2010. razvojne godine. Takodje, visina isplata u trećoj i drugoj razvojnoj godini se skoro nije promenila za štete koje su nastale 2008. i 2010. godine, dok je 2009. godine naglo opao na rekordno nisku vrednost isplate 64.36 evra. Sa druge strane, za 2009. godinu štete specifična je činjenica da se izvršilo plaćanje i u četvrtoj razvojnoj godini, dok su sve štete nastale 2008. godine isplaćene već u trećoj razvojnoj godini. Ovo pokazuje veliku nestabilnost i nepredvidivost u plaćanjima tokom posmatranih godina.

Kao što je napomenuto u poglavlju 2 medju kritikama Chain-Ladder-a, ovaj metod je strogo objektivan i daje buduće ocene rezervi samo na osnovu istorijskih podataka o plaćanjima iz prethodnih godina. On ne uzima u obzir subjektivno mišljenje aktuara

Godina štete:	Očekivana ukupna plaćanja:	Isplate do 2014. godine:	Očekivana buduća plaćanja (rezerve):	Standardna greška rezervi:	Procenat greške:
2008	31020	31020	0	0	0%
2009	101211	101211	0	0	0%
2010	128790	128033	757	1685	223%
2011	117699	112328	5372	3736	69%
2012	203602	178132	25470	30909	121%
2013	219126	135190	83936	17554	21%
UKUPNO:	801447	685913	**115535**	**22748**	**20%**

Tabela 6.6: Bootstrap metoda, Poasonova raspodela, 1000 iteracija

Godina štete:	Očekivana ukupna plaćanja:	Isplate do 2014. godine:	Očekivana buduća plaćanja (rezerve):	Standardna greška rezervi:	Procenat greške:
2008	31020	31020	0	0	0%
2009	101211	101211	0	0	0%
2010	128953	128033	921	1632	177%
2011	117679	112328	5351	3716	69%
2012	203782	178132	25651	8998	35%
2013	220344	135190	85155	17477	21%
UKUPNO:	802990	685913	**117077**	**23133**	**20%**

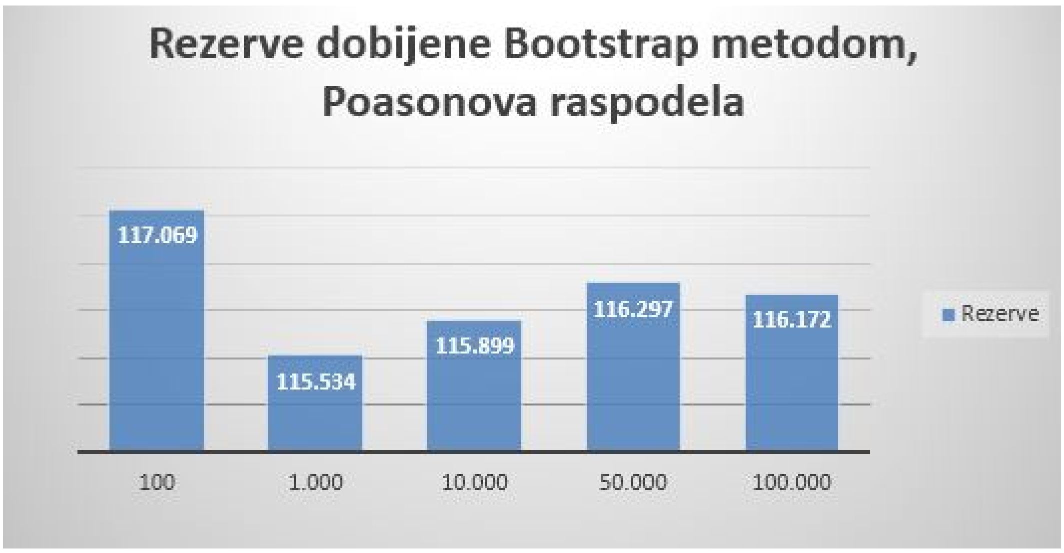
Tabela 6.7: Bootstrap metoda, Gama raspodela, 1000 iteracija

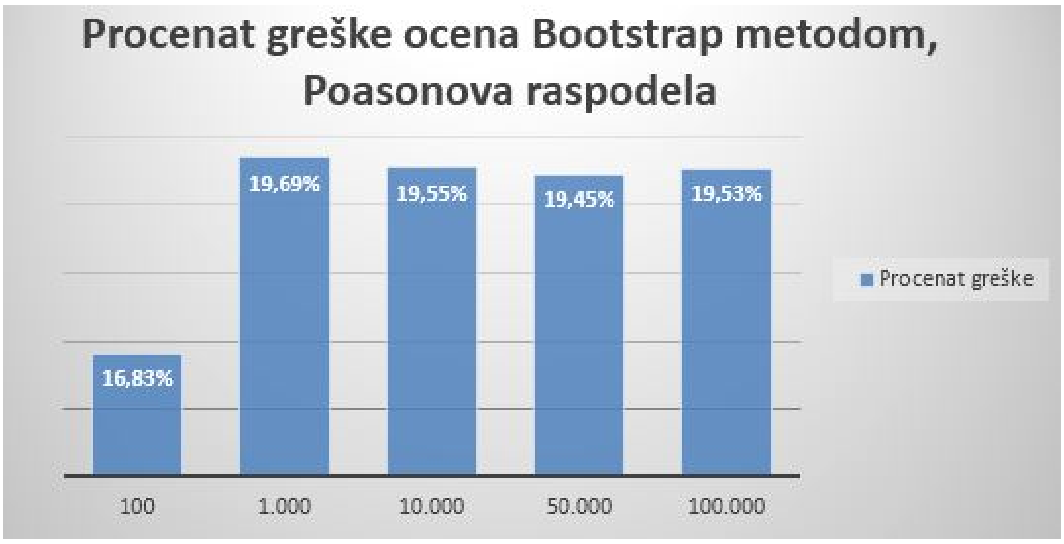
ili promene načina otplate zahteva za odštetu tokom godina. Metod ume da raspozna pojavu varijabilnosti, ali ne ume da je objasni, tj. ne može da ustanovi kako je do te varijabilnosti došlo. Još jedna važna stvar koja se može primetiti je činjenica da dobijanje vrednosti razvojnih faktora i ocene rezervi ne zavise od visine plaćanja u tabeli. Svejedno je da li su vrednosti u desetinama, hiljadama ili milionima, da li su u dinarima ili evrima. Za Chain-Ladder važan je samo odnos izmedju tih vrednosti, na primer nije značajno da li je u tabeli odnos izmedju dve razvojne godine 2:1 ili 200:100 evra, Chain-Ladder će izračunati ocenu rezervi proporcionalno 100 puta veću / manju. Ocena rezervi će se razlikovati izmedju tabela ukoliko su odnosi izmedju uzastopnih razvojnih godina različiti, na primer 200:100 evra i 500:100 evra.

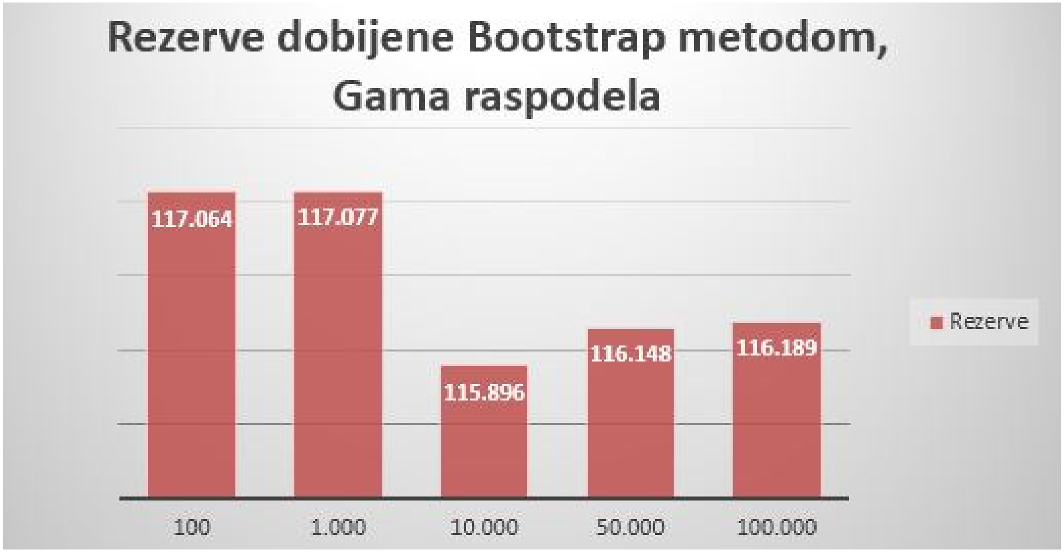
Sledeća metoda koja će biti upotrebljena da bi se dobila ocena tehničkih rezervi je Bootstrap. Kao što je pojašnjeno u poglavlju 5, Bootstrap simulira kvazi-uzorke na osnovu jednog poznatog uzorka. Simulacijom se dobijaju "nove poznate" vrednosti plaćanja u Bootstrap inkrementalnoj tabeli pomoću kojih se procenjuju buduća plaćanja i dobija ocena rezervi. Za Bootstrap metodu u ovom radu je pretpostavljeno da buduća plaćanja zahteva za odštetu prate **Poasonovu raspodelu sa povećanom disperzijom** i **Gama raspodelu**. Proces simulacije novih uzoraka se ponavlja što više puta i u svakoj iteraciji se računa ocena rezervi. Konačna ocena ukupnih rezervi osiguravajućeg društva pomoću

Bootstrap metoda se dobija tako što se izračuna prosečna vrednost rezervi dobijenih u svakoj iteraciji. Moguće je izračunati i grešku ocene rezervi kao standardna devijacija vrednosti rezervi dobijenih u svakoj izvršenoj iteraciji. Kao i kod svih modela zasnovanih na simulacijama, bolja ocena se dobija izvršavanjem više iteracija. U tabelama 6.6 i 6.7 su prikazani dobijeni rezultati vršenjem 1000 iteracija Bootstrap metode, pri čemu je pretpostavljeno da buduća plaćanja zahteva za odštetu imaju Poasonovu raspodelu sa povećanom disperzijom i Gama raspodelu, respektivno.

Kao što se vidi u tabelama 6.6 i 6.7, dobijene ocene rezervi su 115535 i 117077 evra, što čini približno slične rezultate (razlika je oko 1500 evra). Dobijene ocene su mnogo sličnije Chain-Ladder oceni težinskog proseka nego metodi proseka. Problem koji može da nastane je izračunata jako visoka potencijalna greška Bootstrap ocene: 20% za oba Bootstrap modela. Na ovaj način je dobijena ocena odstupanja buduće realizovane vrednosti rezervi u odnosu na dobijenu ocenu. Oba Bootstrap modela su predvidela da postoji veliko potencijalno odstupanje od očekivane vrednosti, pri čemu Poasonov model sa povećanom disperzijom pretpostavlja da će realizovana vrednost rezervi biti u intervalu od 22748 evra više i manje od očekivane vrednosti 115535 evra, dok Gama model pretpostavlja da će realizovana vrednost biti u intervalu od 23133 evra više i manje od očekivane vrednosti 117077 evra. Dobra stvar je što Bootstrap ima moć da izračuna grešku ocene i da da informaciju aktuaru unutar kojih intervala će se realizovati vrednost rezervi, ali problem je što su oni jako široki, pa ni ocena rezervi nije precizna. U ovom primeru, usled varijabilnosti u plaćanjima tokom godina dobijene su visoke vrednosti odstupanja od očekivane vrednosti rezervi, čak 22748 i 23133 evra, što uopšte nije mali niti zanemarljiv iznos.




Procenat greške ocena Bootstrap metodom, Poasonova raspodela
16,83%
19,69%
19,55%
19,45%
19,53%
Procenat greške
100
1.000
10.000
50.000
100.000


Rezerve dobijene Bootstrap metodom, Gama raspodela
117.064
117.077
115.896
116.148
116.189
Rezerve
100
1.000
10.000
50.000
100.000


Procenat greške ocena Bootstrap metodom, Gama raspodela
21,67%
19,76%
19,73%
19,55%
19,49%
Procenat greške
100
1.000
10.000
50.000
100.000

Na graficima na prethodne dve strane prikazani su rezultati Bootstrap metoda simuliranjem podataka 100, 1000, 10000, 50000 i 100000 puta. Dva grafika kod kojeg su podaci označeni plavom bojom predstavljaju rezultate Poasonovog modela sa povećanom disperzijom, tj. u tom modelu je napravljena pretpostavka da buduća plaćanja imaju Poasonovu raspodelu sa povećanom disperzijom, dok su na graficima sa podacima sa crvenom bojom prikazani rezultati dobijeni pretpostavljanjem Gama raspodele za buduća plaćanja zahteva za odštetu. I za Poasonov i za Gama model data su po dva grafika, pri čemu prvi prikazuje ocene rezervi dobijene tim modelom i sprovodjenjem različitog broja iteracija, dok drugi grafik prikazuje procenat greške ocene dobijene sprovodjenjem različitog broja iteracija. Procenat greške se računa kao količnik dobijene standardne greške i dobijene ocene rezervi.

Na sva četiri grafika x-osa označava broj izvršenih iteracija u tom Bootstrap metodu. Ovakav grafički način je pogodan za prikazivanje rezultata u odnosu na broj izvršenih iteracija da bi čitalac lakše primetio razlike izmedju Poasonovog i Gama modela, kao i uticaj broja iteracija na ukupnu ocenu rezervi. Važno je ponoviti da metodi simulacija, kao što je Bootstrap, za iste podatke i isti broj izvršenih iteracija ponovnim računanjem simulacija umeju da daju drugačije ocene. To je usled same prirode simuliranja podataka. Upravo iz tog razloga što će se svaki put pojaviti nešto drugačije, ovakvi metodi i nisu najpogodniji za dobijanje procena, pa se preporučuju samo u slučajevima kada nije moguće primeniti nijedan drugi model.

Sa grafika se može zaključiti da se ocene rezervi i za Poasonov i za Gama model kreću izmedju 16000 i 17000 evra. Interesantno je primetiti kako se prilikom sprovodjenja manjeg broja iteracija rezultati dobijeni pomoću dva različita modela dosta razlikuju, dok se sa povećavanjem broja izvršenih simulacija ocene u oba modela stabilizuju oko 16200 evra. Sa dva grafika koja pokazuju procenat greške može se zaključiti da je potencijalna greška Bootstrap ocene uvek oko 19.5% bez obzira na izvršen broj iteracija i pretpostavljenu raspodelu budućih plaćanja. Ove informacije su veoma važne za aktuara koji donosi odluke o rezervama osiguravajućeg društva. Kako dva različita Bootstrap modela teže jako bliskim vrednostima rezervi, to je dobar pokazatelj kolika bi očekivana vrednost rezervi trebala da bude. Sa druge strane, loš predznak je visoka standardna greška ocene koja upozorava aktuara da može doći do značajnih odstupanja i da medju posmatranim podacima o plaćanjima ima dosta nekonzistentnosti.

U nastavku rada na podacima iz ovog primera će biti primenjeni stohastički modeli rezervisanja. Tabele 6.8 i 6.9 prikazuju rezultate dobijene Mack-ovim stohastičkim modelom, dok su u tabelama 6.10 i 6.11 ocene rezervi dobijene primenjivanjem Poasonovog stohastičkog modela sa povećanom disperzijom. I Poasonov i Mack-ov model pretpostavljaju istu ocenu tehničkih rezervi: 114685.32 evra. Ova vrednost je jednaka težinskoj Chain-Ladder oceni. U tabelama 6.8 i 6.10 se mogu videti ocenjene buduće vrednosti plaćanja zahteva za odštetu za sve godine štete i sve razvojne godine, kao i ukupne rezerve osiguravajućeg društva. Sa druge strane, tabele 6.9 i 6.11 daju informacije o standardnim greškama tih ocena za oba stohastička modela. Ono što je interesantno primetiti posmatrajući dobijene rezultate je da i Poasonov i Mack-ov model pretpostavljaju velike procente greške, čak 19%! Ovo je još jedan dokaz da su podaci o plaćanjima iz prethodnih godina krajnje nestabilni i da se prilikom ocenjivanja budućih plaćanja i odredjivanja rezervi treba obratiti velika pažnja da se ne bi napravila greška.

	Razvojna godina:							
Godina štete:	1	2	3	4	5	Očekivana ukupna plaćanja:	Isplate do 2014. godine:	Očekivana buduća plaćanja (rezerve):
2008						31020.16	31020.16	0.00
2009					**0**	101210.76	101210.76	0.00
2010				**815.47**	**0**	128848.15	128032.68	815.47
2011			**4457.55**	**743.83**	**0**	117528.99	112327.61	5201.38
2012		**16095.80**	**7707.61**	**1286.17**	**0**	203221.19	178131.61	25089.58
2013	**56569.83**	**17327.20**	**8297.28**	**1384.57**	**0**	218768.63	135189.74	83578.89
UKUPNO:						800597.88	685912.56	**114685.32**

Tabela 6.8: Rezerve dobijene Mack-ovim modelom

Godina štete:	Očekivana ukupna plaćanja:	Isplate do 2014. godine:	Očekivana buduća plaćanja (rezerve):	Standardna greška rezervi:	Procenat greške:
2008	31020	31020	0	0	0%
2009	101211	101211	0	0	0%
2010	128848	128033	815	656	80%
2011	117529	112328	5201	4676	90%
2012	203221	178132	25090	10087	40%
2013	218769	135190	83579	14789	18%
UKUPNO:	800598	685913	**114685**	**21899**	**19%**

Tabela 6.9: Ocena greške rezervi dobijena Mack-ovim modelom

Ocene rezervi dobijene većinom metoda iz ovog rada, uključujući težinski prosek Chain-Ladder-a, Bootstrap, Poasonov stohastički model sa povećanom disperzijom i Mack-ov model, su dosta slične, ali sa visokim procentima standardnih grešaka što ukazuje da dobijene ocene rezervi ovim metodama možda i nisu toliko pouzdane zbog velike varijabilnosti u korišćenim podacima plaćanja. Sa druge strane, metod proseka Chain-Ladder-a je dao mnogo više ocene rezervi koje osiguravajuće društvo treba da čuva. Problem ovog metoda je što ne daje standardnu grešku ocene, pa se ne može napraviti matematička predikcija odstupanja realizovane vrednosti od dobijene ocene. Ukoliko se ovlašćeni aktuar odluči za jednu od metoda koje zahtevaju obezbedjivanje manjeg iznosa rezervi, postoji relativno velika šansa da se napravi greška, kao i da će biti potrebno više sredstava da bi društvo namirilo sve ugovorne obaveze. Ovo znači da sačuvan iznos rezervi nije dovoljan za sve buduće isplate. Ukoliko aktuar odluči da čuva onaj iznos rezervi koliko je pokazao metod proseka Chain-Ladder-a, mnogo je veća verovatnoća da će biti dovoljno sredstava za isplatu svih budućih obaveza, ali se ovde javlja problem prerezervisanja i nepotrebnog čuvanja novca u ime rezervi koje bi se inače mogle uložiti na neki drugi način čime bi se ostvarila veća dobit društva.

	Razvojna godina:							
Godina štete:	1	2	3	4	5	Očekiva-na ukupna plaćanja:	Isplate do 2014. godine:	Očekivana buduća plaćanja (rezerve):
2008						31020.16	31020.16	0.00
2009					**0**	101210.76	101210.76	0.00
2010				**815.47**	**0**	128848.15	128032.68	815.47
2011			**4457.55**	**743.83**	**0**	117528.99	112327.61	5201.38
2012		**16095.80**	**7707.61**	**1286.17**	**0**	203221.19	178131.61	25089.58
2013	**56569.83**	**17327.20**	**8297.28**	**1384.57**	**0**	218768.63	135189.74	83578.89
UKUPNO:						800597.88	685912.56	**114685.32**

Tabela 6.10: Rezerve dobijene Poasonovim modelom

Godina štete:	Očekivana ukupna plaćanja:	Isplate do 2014. godine:	Očekivana buduća plaćanja (rezerve):	Standardna greška rezervi:	Procenat greške:
2008	31020	31020	0	0	0%
2009	101211	101211	0	0	0%
2010	128848	128033	815	1566	192%
2011	117529	112328	5201	3528	68%
2012	203221	178132	25090	8457	34%
2013	218769	135190	83579	17229	21%
UKUPNO:	800598	685913	**114685**	**22007**	**19%**

Tabela 6.11: Ocena greške rezervi dobijena Poasonovim modelom

VAŽNA NAPOMENA: Na ovom primeru nisu mogli biti primenjeni Bornhuetter-Fergusonov metod i Log-Normalni stohastički model. Podaci koje sam dobio od osiguravajućeg društva su davali informacije samo o iznosima otplata zahteva za odštetu i njihovim datumima plaćanja, a da bi se dobile ocene rezervi pomoću Bornhuetter-Fergusonovog metoda potrebno je imati podatke i o iznosu ukupno sakupljenih premija za tu vrstu osiguranja. Specifičan problem koji se javio u ovom primeru je i pojava odredjenog broja nula u tabeli plaćanja. Osiguravajuće društvo je na veoma efikasan i brz način vršilo isplatu naknada šteta, pa se iz tog razloga pojavljuju nule u kasnijim razvojnim godinama. Kao što je objašnjeno u podeljku 4.4 ovog rada, Log-Normalni model prebacuje vrednosti iz tabele plaćanja u njihov logaritamski oblik i tako dalje računa ocenu rezervi. Svaka tabela koja u sebi sadrži nule ili negativne iznose plaćanja će imati problem sa nemogućnošću računanja logaritamskih vrednosti, stoga je, nažalost, i ceo model nemoguć za dalju primenu.

6.2 Analiza bez troškova

Analogno prethodnom delu rada, i ovde će se analizirati ocene tehničkih rezervi i standardna odstupanja tih ocena koja su dobijena primenom različitih metoda, ali razlika je što će se u ovom delu rada zaključci donositi samo na osnovu podataka o plaćanjima iz prethodnih godina, ne i iz dodatnih troškova osiguravajućeg društva. Podaci koji su dati u tabeli 6.12 predstavljaju samo ona plaćanja osiguravača koja se odnose na isplatu naknade štete dopunskog osiguranja od nezgode u periodu od 2008. do 2013. godine, pri čemu se ne uzimaju u obzir troškovi procene osiguranog slučaja, sudski troškovi, plaćene kamate itd. Vrednosti u tabeli su u evrima i u inkrementalnom obliku. Ukoliko se uporedi tabela 6.12 sa tabelom 6.1, gde su prikazani inkrementalni podaci o svim plaćanjima osiguravajućeg društva vezanim za izvršenje ugovornih obaveza prema klijentima, može se primetiti da su sve vrednosti u tabeli 6.12 manje ili eventualno jednake kao u tabeli 6.1 iz razloga zato što ovde nisu uračunati dodatni troškovi koje osiguravajuće društvo snosi.

Koristeći standardni postupak računanja rezervi preko Chain-Ladder metoda dobijaju se rezultati u tabelama 6.13 i 6.14. U prvoj tabeli je data ocena rezervi u iznosu od 115590.88 evra pri čemu je korišćen metod proseka, dok se u drugoj tabeli može videti izračunata ocena rezervi od 105092.54 evra dobijena metodom težinskog proseka. Kao i u analizi ocena rezervi u kojoj su uračunati troškovi, tako i u analizi ocena rezervi bez troškova, u tabelama se pojavljuje velika razlika izmedju dobijenih ocena pomoću dva modela. Razlog za tako nešto je pojava varijabilnosti u iznosima plaćanja izmedju posmatranih godina štete. Inkrementalne vrednosti plaćanja se dosta razlikuju po dinamici isplate tokom godina i Chain-Ladder metod ne ume da raspozna nastali problem i da da objašnjenje zbog čega se ovo desilo, već objektivno posmatra date podatke i daje ocene rezervi.

Uporedjivajući dve tabele, jednu u kojoj su uračunati troškovi i drugu gde nisu, primećuje se da je vrednost isplata do 2014. godine smanjena sa 685912.56 na 642896.19 evra. Ovo znači da su prateći troškovi osiguranja u prethodnim godinama iznosili 43016.37 evra, tj. razliku ove dve vrednosti. Chain-Ladder je kod podataka bez uračunatih troškova pretpostavio da je potrebno čuvati 115590.88 i 105092.54 evra koristeći metodu proseka i težinskog proseka, dok je kod podataka sa uračunatim troškovima dobijena ocena rezervi 123322.41 i 114685.32 evra. Ocene rezervi koje su dobijene u tabelama 6.13 i 6.14 predstavljaju zbir očekivanih budućih plaćanja, dok ocene rezervi iz tabela 6.4 i 6.5 predstvljaju novac koji je potrebno čuvati ne samo za plaćanje zahteva za odštetu, već i mogućih dodatnih troškova koji prate likvidaciju obaveza.

Dalje u radu biće uradjen isti primer bez uračunatih troškova preko Bootstrap metode. Na graficima na stranama 82 i 83 se mogu videti rezultati dobijeni vršenjem 100, 1000, 10000, 50000 i 100000 iteracija. Na svakom od grafika x-osa označava broj izvršenih iteracija u tom modelu. Grafici obojeni plavom bojom prikazuju rezultate Bootstrap metoda kod kojeg je pretpostavljeno da buduća plaćanja imaju Poasonovu raspodelu sa povećanom disperzijom, dok je kod dva grafika čiji su podaci obojeni crvenom bojom napravljena pretpostavka o Gama raspodeli. Kao što se može primetiti, za oba modela prikazana su po dva grafika, pri čemu prvi po redu daje ocene rezervi sprovodjenjem različitog broja iteracija, dok drugi prikazuje procenat greške ocene za različite modele. Na osnovu grafika koji prikazuju rezerve moguće je videti visinu predikcija koje daje Boot-

	Razvojna godina:					
Godina štete:	0	1	2	3	4	5
2008	14924.00	7500.00	3900.00	1842.00	0.00	0.00
2009	63966.49	20600.00	12300.00	0.00	792.00	
2010	68606.00	35582.23	7150.00	5514.07		
2011	73462.50	26149.00	5530.00			
2012	115907.50	52204.90				
2013	126965.50					

Tabela 6.12: Inkrementalna plaćanja zahteva za odštetu tokom razvojnih godina

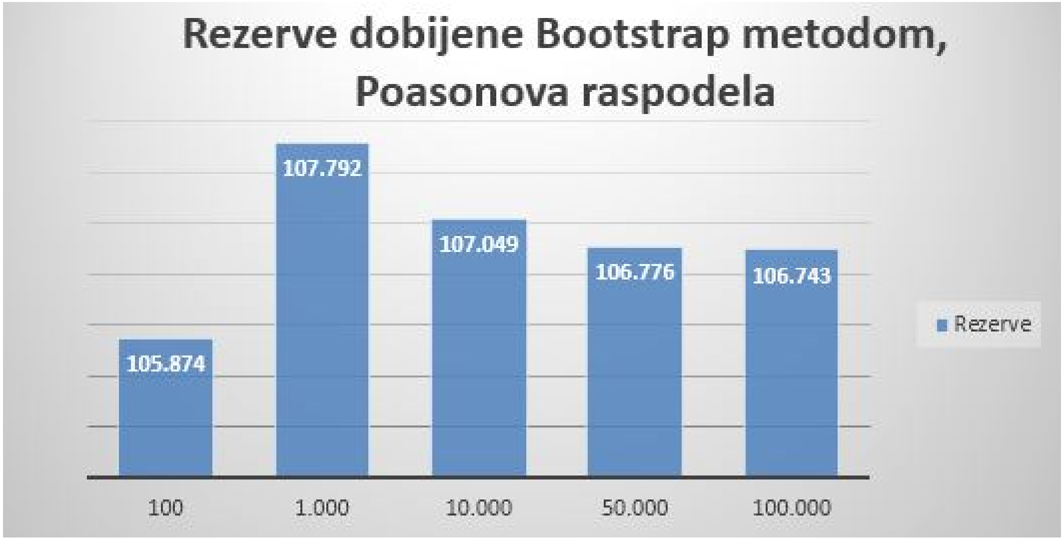
	Razvojna godina:							
Godina štete:	1	2	3	4	5	Očekivana ukupna plaćanja:	Isplate do 2014. godine:	Očekivana buduća plaćanja (rezerve):
2008						28166.00	28166.00	0.00
2009					**0**	97658.49	97658.49	0.00
2010				**477.70**	**0**	117330.00	116852.30	477.70
2011			**4188.12**	**446.95**	**0**	109776.57	105141.50	4635.07
2012		**18639.88**	**7438.94**	**793.87**	**0**	194985.09	168112.40	26872.69
2013	**54584.69**	**20129.83**	**8033.56**	**857.33**	**0**	210570.91	126965.50	83605.41
UKUPNO:						758487.07	642896.19	**115590.88**

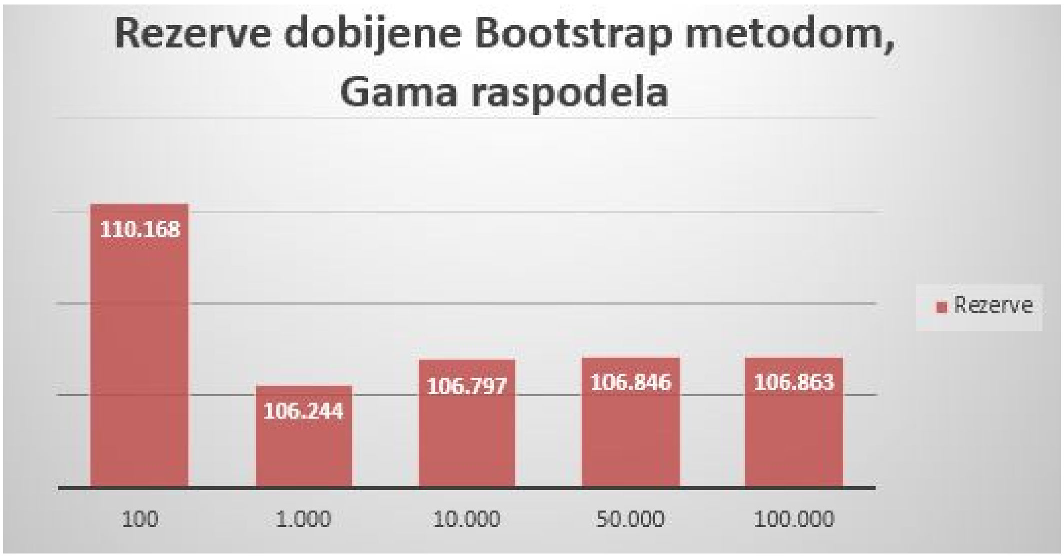
Tabela 6.13: Rezerve dobijene metodom proseka

	Razvojna godina:							
Godina štete:	1	2	3	4	5	Očekivana ukupna plaćanja:	Isplate do 2014. godine:	Očekivana buduća plaćanja (rezerve):
2008						28166.00	28166.00	0.00
2009					**0**	97658.49	97658.49	0.00
2010				**740.18**	**0**	117592.48	116852.30	740.18
2011			**3297.80**	**686.89**	**0**	109126.19	105141.50	3984.69
2012		**15621.75**	**5762.88**	**1200.34**	**0**	190697.37	168112.40	22584.97
2013	**53533.64**	**16772.78**	**6187.50**	**1288.78**	**0**	204748.20	126965.50	77782.70
UKUPNO:						747988.73	642896.19	**105092.54**

Tabela 6.14: Rezerve dobijene metodom težinskog proseka

strap metod za različit broj iteracija, dok sa grafika koji prikazuju procenat greške čitalac može da donese zaključak o preciznosti dobijene ocene.





Ne može se sa sigurnošću reći koji model daje više, a koji niže ocene rezervi zato što se odnos rezultata razlikuje kako se menja broj iteracija u modelu, tj. u nekim slučajevima više rezervi pretpostavlja jedan model, a u nekim slučajevima drugi model. Ono što se može primetiti iz grafika je da su Bootstrap modelima dobijeni dosta slični rezultati, pa se može zaključiti da je ocena pouzdana. Razlike izmedju ocena nisu velike: Poasonov metod pretpostavlja rezerve u visini od 106700 evra kako se broj iteracija povećava, dok Gama model daje ocenu rezervi od 106800 evra sa porastom broja iteracija. Modeli zasnovani na simulacijama daju pouzdanije ocene kako se broj iteracija povećava.

Dobijena ocena rezervi preko Bootstrap metoda je bliža težinskom metodu Chain-Ladder-a nego metodu proseka. Velika prednost Boostrap metoda u odnosu na Chain-Ladder je ta što postoji mogućnost računanja standardne greške na osnovu koje se procenjuje tačnost i pouzdanost dobijene ocene rezervi. Sa grafika koji označavaju procente greške ocene za Poasonov i Gama model može se primetiti da iznos standardne greške varira od 19 do 20 procenata u zavisnosti od pretpostavljene raspodele i broja izvršenih iteracija. Posmatrano kroz vrednosti u evrima, standardna greška iznosi oko 20000 evra. Ovo znači da će se realizovana vrednost nalaziti u intervalu od 20000 evra više ili manje od ocenjene vrednosti rezervi. Uporedjujući vrednosti standardnih grešaka dobijenih u modelu sa dodatnim troškovima osiguranja zapaža se da je procenat greške sličan, tj. podjednako su nepredvidive ocene rezervi i široki intervali unutar kojih će se vrednosti rezervi realizovati.

Sledeći modeli pomoću kojih će se dobiti ocene tehničkih rezervi su Mack-ov model i Poasonov model sa povećanom disperzijom. Oni pripadaju stohastičkim modelima i takodje imaju mogućnost dobijanja greške ocene rezervi. U tabelama 6.15 i 6.16 su prikazani rezultati dobijeni primenjujući Mack-ov model na podatke o plaćanjima zahteva za odštetu bez troškova osiguranja, dok su u tabelama 6.17 i 6.18 prikazane dobijene ocene rezervi Poasonovim stohastičkim modelom sa povećanom disperzijom. Ono što se može primetiti uporedjivanjem dobijenih predvidjanja rezervi kroz različite metode je da su i Mack-ov i Poasonov model dali iste ocene rezervi kao i Chain-Ladder metod koristeći težinski prosek, tj. vrednot od 105092.54 evra. Na osnovu ovih modela moguće je izračunati koliko će biti odstupanje realizovane vrednosti rezervi od njene dobijene ocene pomoću standardne greške. Veliki je problem što su modeli dali visoki procenat standardne greške: i Mack-ov i Poasonov model 19%. Kao što je ranije diskutovano, podaci iz

	Razvojna godina:							
Godina štete:	1	2	3	4	5	Očekivana ukupna plaćanja:	Isplate do 2014. godine:	Očekivana buduća plaćanja (rezerve):
2008						28166.00	28166.00	0.00
2009					**0**	97658.49	97658.49	0.00
2010				**740.18**	**0**	117592.48	116852.30	740.18
2011			**3297.80**	**686.89**	**0**	109126.19	105141.50	3984.69
2012		**15621.75**	**5762.88**	**1200.34**	**0**	190697.37	168112.40	22584.97
2013	**53533.64**	**16772.78**	**6187.50**	**1288.78**	**0**	204748.20	126965.50	77782.70
UKUPNO:						747988.73	642896.19	**105092.54**

Tabela 6.15: Rezerve dobijene Mack-ovim modelom

Godina štete:	Očekivana ukupna plaćanja:	Isplate do 2014. godine:	Očekivana buduća plaćanja (rezerve):	Standardna greška rezervi:	Procenat greške:
2008	28166	28166	0	0	0%
2009	97658	97658	0	0	0%
2010	117592	116852	740	587	79%
2011	109126	105142	3985	3676	92%
2012	190697	168112	22585	9122	40%
2013	204748	126966	77783	13877	18%
UKUPNO:	747989	642896	**105093**	**19760**	**19%**

Tabela 6.16: Ocena greške rezervi dobijena Mack-ovim modelom

	Razvojna godina:							
Godina štete:	1	2	3	4	5	Očekivana ukupna plaćanja:	Isplate do 2014. godine:	Očekivana buduća plaćanja (rezerve):
2008						28166.00	28166.00	0.00
2009					**0**	97658.49	97658.49	0.00
2010				**740.18**	**0**	117592.48	116852.30	740.18
2011			**3297.80**	**686.89**	**0**	109126.19	105141.50	3984.69
2012		**15621.75**	**5762.88**	**1200.34**	**0**	190697.37	168112.40	22584.97
2013	**53533.64**	**16772.78**	**6187.50**	**1288.78**	**0**	204748.20	126965.50	77782.70
UKUPNO:						747988.73	642896.19	**105092.54**

Tabela 6.17: Rezerve dobijene Poasonovim modelom

Godina štete:	Očekivana ukupna plaćanja:	Isplate do 2014. godine:	Očekivana buduća plaćanja (rezerve):	Standardna greška rezervi:	Procenat greške:
2008	28166	28166	0	0	0%
2009	97658	97658	0	0	0%
2010	117592	116852	740	1437	193%
2011	109126	105142	3985	2981	75%
2012	190697	168112	22585	7719	34%
2013	204748	126966	77783	16020	21%
UKUPNO:	747989	642896	**105093**	**20192**	**19%**

Tabela 6.18: Ocena greške rezervi dobijena Poasonovim modelom

tabele plaćanja su jako različiti i nekonzistentni. Različite metode kroz standardno odstupanje skreću pažnju ovlašćenom aktuaru da postoji velika varijabilnost medju korišćenim podacima, kao i nestabilnost prilikom ocenjivanja rezervi. Dobijena ocena nije sigurna i postoji velika mogućnost odstupanja realizacije od ocena koje pretpostavljaju ovi modeli.

Isto kao što je diskutovano u prethodnom delu rada kod modela sa uračunatim dodatnim troškovima osiguranja, tako i u modelu bez troškova, ocene rezervi dobijene većinom metoda iz ovog rada su dosta slične, ali sa visokim procentima standardnih grešaka, dok je metod proseka Chain-Ladder-a dao mnogo višu ocenu rezervi koje osiguravajuće društvo treba da čuva, ali bez ikakvog znanja o grešci ocene. Ukoliko se ovlašćeni aktuar odluči za jednu od metoda koje zahtevaju obezbedjivanje manjeg iznosa rezervi, postoji šansa da sačuvan iznos rezervi neće biti dovoljan za plaćanje ugovornih obaveza. Ukoliko aktuar odluči da čuva onaj iznos rezervi koliko je pokazao metod proseka Chain-Ladder-a, veća je verovatnoća da će biti dovoljno sredstava za isplatu svih budućih plaćanja, ali se ovde javlja mogućnost prerezervisanja. Na ovlašćenom aktuaru je da izabere da li će rizikovati i ostaviti manje novca na ime tehničkih rezervi, a da pritom zna da ne postoji mogućnost oportunitetnog troška ili će ići na sigurniju ocenu rezervi, a da pritom zna da je sačuvano dovoljno sredstava za nadoknadjivanje svih šteta svojim osiguranicima.

6.3 Ocena troškova osiguranja

U ovom delu rada biće reči o predvidjanju troškova osiguravajućeg društva koji prate isplatu odšteta osiguranicima koji su prijavili nastalu štetu. Kao što je ranije napomenuto, pod ovim troškovima se podrazumevaju troškovi procene osiguranog slučaja, sudski troškovi, plaćene kamate. U tabeli 6.19 prikazene su vrednosti plaćenih troškova osiguranja za štete nastale u periodu od 2008. do 2013. godine. Iznosi su u inkrementalnom obliku i u evrima. U tabelama 6.20 i 6.21 prikazane su ocene budućih troškova koje će snositi osiguravajuće društvo izračunate metodom proseka i metodom težinskog proseka Chain-Ladder-a. Kao što se može videti u tabelama, ocena rezervi koje je potrebno čuvati za buduće troškove na osnovu metoda proseka je 8373.75 evra, dok metod težinskog proseka pretpostavlja rezerve u visini od 9518.51 evro.

U tabeli 6.22 prikazani su rezultati Bootstrap metode koja je sprovedena na podacima iz inkrementalnih vrednosti iz tabele 6.19. Vršeći različit broj iteracija Bootstrap metoda i pretpostavljanjem različitih raspodela o budućim troškovima osiguranja, dobijaju se različite ocene potrebnih rezervi, standardna greška tih ocena, kao i procenat greške kao količnik standardne greške i ocene rezervi. Iz tabele se može primetiti da svi modeli pretpostavljaju rezerve u visini od oko 9450 evra, dok upozoravaju da je procenat greške čak oko 27%! Ovo je izrazuto visok stepen nesigurnosti ocene i pritom Bootstrap daje vrlo širok interval unutar kojeg će se realizovati prava vrednost troškova osiguranja.

Na ovom primeru sprovedeni su i stohastički modeli. Mack-ov stohastički model je dao ocenu očekivanih ukupnih plaćanja u visini od 52534.88 evra, pa ako se oduzme vrednost isplata do 2014. godine što iznosi 43016.37 evra, dobija se ocena rezervi u visini od 9518.51 evro. Takodje, Mack-ovim modelom je moguće dobiti visinu greške ove ocene, tako da je izračunata standardna greška od 2719.18 evra, što iznosi čak 28.57 procenata greške! Poasonov stohastički model sa povećanom disperzijom je dao istu ocenu rezervi kao i Mack-ov model: 9518.51 evro. Standardna greška kod ovog modela je 2448.99 evra što bi značilo 25.73 procenata greške. Kao što se može primetiti iz prethodnog izlaganja i dobijenih rezultata, i u ovom primeru računanja troškova društva stohastički modeli su dali istu ocenu rezervi kao i težinski metod Chain-Ladder-a.

Iz svih dobijenih rezultata pomoću modela rezervisanja može se zaključiti da su svi modeli dali približne ocene rezervi koje osiguravajuće društvo treba da čuva zbog troškova osiguranja u budućnosti. Sa druge strane, Bootstrap i stohastički modeli (modeli koji imaju mogućnost računanja standardne greške ocene) su upozorili ovlašćenog aktuara da je moguće odstupanje realizovanih vrednosti od ocene jako veliko. U ovom slučaju odstupanje iznosi skoro trećinu vrednosti ocene, pa se može zaključiti da je odstupanje jako veliko i ocena rezervi jako neprecizna. Kod procene troškova nije preporučljivo korišćenje ovih metoda da se predvide buduće obaveze društva. Aktuar može da odredi visinu rezervi kako mu predlažu modeli iz ovog rada, ali se susreće sa rizikom da se realizuje veći iznos troškova osiguranja nego što je to ocenjeno i da se osiguravajuće društvo nadje u dodatnim nepredvidjenim troškovima.

	Razvojna godina:					
Godina štete:	0	1	2	3	4	5
2008	2185.26	234.17	45.50	389.23	0.00	0.00
2009	2015.78	1181.96	245.29	64.36	44.88	
2010	5477.59	2989.69	620.76	2092.34		
2011	5480.91	1509.73	195.47			
2012	7519.79	2499.42				
2013	8224.24					

Tabela 6.19: Inkrementalna plaćanja zahteva za odštetu tokom razvojnih godina

	Razvojna godina:							
Godina štete:	1	2	3	4	5	Očekivana ukupna plaćanja:	Isplate do 2014. godine:	Očekivana buduća plaćanja (rezerve):
2008						2854.16	2854.16	0.00
2009					**0**	3552.27	3552.27	0.00
2010				**71.53**	**0**	11251.91	11180.38	71.53
2011			**974.51**	**52.21**	**0**	8212.83	7186.11	1026.72
2012		**492.91**	**1425.55**	**76.38**	**0**	12014.05	10019.21	1994.84
2013	**3038.28**	**554.08**	**1602.45**	**85.85**	**0**	13504.90	8224.24	5280.66
UKUPNO:						51390.12	43016.37	**8373.75**

Tabela 6.20: Rezerve dobijene metodom proseka

	Razvojna godina:							
Godina štete:	1	2	3	4	5	Očekivana ukupna plaćanja:	Isplate do 2014. godine:	Očekivana buduća plaćanja (rezerve):
2008						2854.16	2854.16	0.00
2009					**0**	3552.27	3552.27	0.00
2010				**78.88**	**0**	11259.26	11180.38	78.88
2011			**1220.01**	**59.30**	**0**	8465.43	7186.11	1279.32
2012		**526.28**	**1790.35**	**87.03**	**0**	12422.87	10019.21	2403.66
2013	**3051.53**	**592.29**	**2014.89**	**97.94**	**0**	13980.89	8224.24	5756.65
UKUPNO:						52534.88	43016.37	**9518.51**

Tabela 6.21: Rezerve dobijene metodom težinskog proseka

Bootstrap model:	Broj iteracija	Očekivana ukupna plaćanja:	Isplate do 2014. godine:	Očekivana buduća plaćanja (rezerve):	Standardna greška	Procenat greške
Poason	100	52504	43016	**9488**	2480	**26.14%**
Poason	1000	52453	43016	**9437**	2564	**27.17%**
Poason	10000	52504	43016	**9488**	2593	**27.33%**
Poason	50000	52495	43016	**9479**	2561	**27.02%**
Poason	100000	52494	43016	**9478**	2563	**27.04%**
Gama	100	52439	43016	**9423**	2551	**27.07%**
Gama	1000	52586	43016	**9570**	2556	**26.71%**
Gama	10000	52509	43016	**9493**	2577	**27.15%**
Gama	50000	52473	43016	**9457**	2573	**27.21%**
Gama	100000	52500	43016	**9484**	2566	**27.06%**

Tabela 6.22: Rezerve dobijene Bootstrap metodom

6.4 Provera ocene

U nastavku rada biće napravljen test na primeru iz ovog poglavlja koji će proveriti da li modeli iz ovog rada daju dobre predikcije budućih plaćanja. Prvo će se pretpostaviti da su poznati podaci o plaćanjima samo od 2008. do 2012. godine, ne i iz 2013. godine. Primenjujući metode rezervisanja na tabelu plaćanja sa godinama štete od 2008. do 2012. predvideće se vrednosti budućih isplata zahteva za odštetu. Na ovaj način će se dobiti predikcija potrebnih rezervi za naredne godine, a ujedno i za 2013. godinu. Uporedjujući ove ocene rezervi i vrednosti koje znamo da su se realizovale u 2013. godini, dobiće se pregled koliko su ocene bliske realizovanim vrednostima plaćanja, kao i uvid da li modeli daju dovoljno dobre ocene rezervi. U potpoglavlju 6.3.1 će biti uradjena provera modela koristeći podatke o plaćanjima zajedno sa troškovima osiguranja, dok će u potpoglavlju 6.3.2 biti sprovedena ista analiza, ali samo na podacima koji označavaju plaćanja nastalih šteta bez uračunavanja dodatnih troškova.

6.4.1 Sa troškovima

Tabela 6.23 predstavlja iznose plaćanja podnetih zahteva za odštetu za štete koje su nastale u periodu od 2008. do 2012. godine. Podaci u tabeli su u evrima i sadrže uračunate dodatne troškove koje osiguravač snosni prilikom procene visine osigurane sume i isplate utvrdjene naknade. Vrednosti koje su podvučene predstavljaju realizovana plaćanja u 2013. godini koja su poznata, ali radi testiranja metoda rezervisanja pretpostavlja se da nisu i da ih treba oceniti.

Standardnim postupkom Chain-Ladder metoda i primenom istog na tabelu 6.23, lako se može doći do ocene rezervi. U tabeli 6.24 i 6.25 prikazani su dobijeni rezultati primenom metoda proseka i težinskog proseka. Ovim putem ocenjene su sve nepoznate vrednosti iz tabele plaćanja, ali u ovom delu rada zanimljive su samo podebljane vrednosti u tabelama, tj. ocene vrednosti koje će biti isplaćene u 2013. godini za različite godine

	Razvojna godina:				
Godina štete:	0	1	2	3	4
2008	17109.26	7734.17	3945.50	2231.23	0.00
2009	65982.27	21781.96	12545.29	64.36	<u>836.88</u>
2010	74083.59	38571.92	7770.76	<u>7606.41</u>	
2011	78943.41	27658.73	<u>5725.47</u>		
2012	123427.29	<u>54704.32</u>			

Tabela 6.23: Inkrementalna plaćanja zahteva za odštetu tokom razvojnih godina

	Razvojna godina:				
Godina štete:	0	1	2	3	4
2008	17109.26	7734.17	3945.50	2231.23	0.00
2009	65982.27	21781.96	12545.29	64.36	**0.00**
2010	74083.59	38571.92	7770.76	**4705.34**	0.00
2011	78943.41	27658.73	**13173.74**	4679.92	0.00
2012	123427.29	**51011.87**	21556.95	7658.03	0.00

Tabela 6.24: Rezerve dobijene metodom proseka

	Razvojna godina:				
Godina štete:	0	1	2	3	4
2008	17109.26	7734.17	3945.50	2231.23	0.00
2009	65982.27	21781.96	12545.29	64.36	**0.00**
2010	74083.59	38571.92	7770.76	**2141.38**	0.00
2011	78943.41	27658.73	**11481.38**	2099.73	0.00
2012	123427.29	**50050.14**	18684.06	3416.96	0.00

Tabela 6.25: Rezerve dobijene metodom težinskog proseka

štete. Većina ostalih modela prezentovanih u radu, npr. Bootstrap, Poasonov model sa povećanom disperzijom, Mack-ov model, daju približne ocene rezervi kao i težinski metod Chain-Ladder-a, stoga oni neće biti prezentovani.

Kao što se vidi u tabeli 6.24 metod proseka je pretpostavio da neće biti više isplata zahteva za odštetu podnetih 2009. godine, dok će se otplatiti 4705.34 , 13173.74 i 51011.87 evra zahteva za odštetu podnetih 2010. 2011. i 2012. godine štete, respektivno. Sa druge strane, metod težinskog proseka je takodje dao predikciju da neće biti isplata za štete nastale u 2009. godini, ali da će biti manje isplata zahteva za 2010. 2011. i 2012. godinu štete (2141.38 , 11481.38 i 50050.14 evra). Ukoliko se uporede ove dobijene ocene sa zaista realizovanim vrednostima plaćanja u 2013. godini, može se zaključiti da je metod proseka dao približniju ocenu rezervi. Metod proseka je pretpostavio ukupna plaćanja od 68890.95 evra, metod težinskog proseka je dao predikciju od 63672.91 evro, dok je realizovana vrednost iznosila 68873.08 evra. Na ovakvom testu se metod težinskog proseka pokazao kao lošiji ocenjivač i ukoliko se aktuar odlučio da čuva ovu vrednost rezervi, u 2013. godini bi se susreo sa problemom manjka sredstava za isplate obaveza prema osiguranicima. Sa druge strane, metod proseka je dao jako dobru ocenu i ukoliko se aktuar odlučio da čuva ovu vrednost rezervi, u 2013. godini bi imao dovoljno sredstava da isplati sve ugovorne obaveze, a da u ime rezervi ostane samo oko 20 evra čime je izbegnut problem prerezervisanja.

Važno je prokomentarisati pojavu vrednosti od 836.88 evra u četvrtoj razvojnoj godini 2009. godine štete. Kao što je rečeno, Chain-Ladder daje pretpostavke budućih plaćanja na osnovu istorijskih podataka plaćanja u prethodnim godinama, tako da su oba metoda, i proseka i težinskog proseka, pretpostavila da u četvrtoj razvojnoj godini 2009. godine štete neće biti isplata zahteva za odštetu zato što ih nije bilo ni u četvrtoj razvojnoj godini za 2008. godinu štete. Ovo je varijabilitet koji Chain-Ladder ne može da pretpostavi. Zahvaljujući većem iznosu čuvanih rezervi za 2010. 2011. i 2012. godinu nego što je za to bilo potrebe, neočekivani troškovi od 836.88 evra mogu da se nadoknade, ali u suprotnom ovo bi predstavljao veliki problem za osiguravajuće društvo zbog svoje slučajnosti i nepredvidivosti.

6.4.2 Bez troškova

Kao i u prethodnom potpoglavlju, napraviće se provera metoda rezervisanja iz ovog rada da bi se utvrdilo koliko su pouzdane ocene koje se dobijaju ovim putem. Tabela 6.26 predstavlja iznose plaćanja nastalih šteta tokom perioda od 2008. do 2012. godine u evrima. Podaci u tabeli su samo vrednosti isplata naknada osiguranicima za prijavljene štete, što znači da ovde nisu uračunati dodatni troškovi osiguravajućeg društva. Vrednosti koje su podvučene u tabeli 6.26 predstavljaju realizovana plaćanja u 2013. godini koja su poznata, ali koja će se radi testa ocenjivati metodama proseka i težinskog proseka Chain-Ladder-a. U tabeli 6.27 i 6.28 prikazani su dobijeni rezultati primenom metoda proseka i težinskog proseka, respektivno.

Ukupna realizovana vrednost plaćanja u 2013. godini iznosi 64040.97 evra. Kao i u prethodnom delu, metod proseka je dao bolju ukupnu ocenu plaćanja u 2013. godini od 66015.40 evra, dok je metod težinskog proseka pretpostavio plaćanja u visini od 59801.19 evra. Metod težinskog proseka je obezbedio manji iznos rezervi nego što je za to bilo potrebe, čime je napravljen problem osiguravajućem društvu koje mora da isplaćuje veći iznos sredstava nego što je za to predvidjeno. Sa druge strane, metod proseka je dao dovoljno visoku ocenu rezervi da se pokriju sva potrebna plaćanja ugovornih obaveza u 2013. godini, sa oko 2000 evra viška. Ovaj iznos predstavlja prerezervisanje osiguravajućeg društva.

Na osnovu dva testa iz potpoglavlja 6.3.1 i 6.3.2 može se zaključiti da je u ovom primeru metod proseka mnogo primereniji za predvidjanje budućih plaćanja i formiranja tehničkih rezervi od metoda težinskog proseka kojim se ne čuva dovoljan iznos rezervi. U ovom primeru može se reći da je aktuar koji je prihvatio ocenu rezervi metoda proseka napravio dobru pretpostavku i spasao osiguravajuće društvo od nepredvidivih gubitaka. Metod težinskog proseka se u ovom primeru pokazao kao veoma loš pokazatelj budućih plaćanja. Kao što je u ranijim delovima rada napomenuto metod težinskog proseka daje približnu predikciju Bootstrap metode i stohastičkim modelima, ali je kod njih poznata standardna greška te ocene. Kako je standardna greška veća, tako postoji veća verovatnoća da će realizovane vrednosti imati veće potencijalno odstupanje od ocenjenih vrednosti. Za aktuara je važno da odluči da li je zadovoljan tačnošću ocene dobijene pomoću standardnog odstupanja ovih metoda ili će da se odluči za višu ocenu rezervi koju je u ovom primeru dao metod proseka, ali sa kojom se ne može izračunati greška ocene.

	Razvojna godina:				
Godina štete:	0	1	2	3	4
2008	14924.00	7500.00	3900.00	1842.00	0.00
2009	63966.49	20600.00	12300.00	0.00	792.00
2010	68606.00	35582.23	7150.00	5514.07	
2011	73462.50	26149	5530		
2012	115907.50	52204.90			

Tabela 6.26: Inkrementalna plaćanja zahteva za odštetu tokom razvojnih godina

	Razvojna godina:				
Godina štete:	0	1	2	3	4
2008	14924.00	7500.00	3900.00	1842.00	0.00
2009	63966.49	20600.00	12300.00	0.00	**0.00**
2010	68606.00	35582.23	7150.00	**3895.40**	0.00
2011	73462.50	26149	**12882.90**	3935.85	0.00
2012	115907.50	**49237.11**	21358.39	6525.20	0.00

Tabela 6.27: Rezerve dobijene metodom proseka

	Razvojna godina:				
Godina štete:	0	1	2	3	4
2008	14924.00	7500.00	3900.00	1842.00	0.00
2009	63966.49	20600.00	12300.00	0.00	**0.00**
2010	68606.00	35582.23	7150.00	**1664.78**	0.00
2011	73462.50	26149	**11014.03**	1654.12	0.00
2012	115907.50	**47122.38**	18026.19	2707.23	0.00

Tabela 6.28: Rezerve dobijene metodom težinskog proseka

Zaključak

U ovom radu prezentovani su različiti modeli računanja ocena budućih plaćanja i rezervi koje osiguravajuće društvo mora da čuva u svakom trenutku da bi održalo svoju solventnost i da bi bilo u mogućnosti da isplaćuje na vreme sve ugovorne obaveze prema svojim osiguranicima. Osiguravajućim društvima je ovo nezgodan problem, koji se u suštini svodi na predvidjanje budućnosti. Zato svi ovi modeli nose sa sobom odredjeni rizik, pa pored ocene budućih plaćanja računaju i kolika je mogućnost greške.

Prezentovani modeli su najzastupljeniji u aktuarskoj literaturi. U svetu su oni razvijani od 90-tih godina prošlog veka, pa do danas. Pojavljivanjem brzih računara i naprednih statističkih softvera, mnogo je olakšan postupak računanja rezervi, ali je i otvoren put za razvitak novih, složenijih modela. Na primer, postoje modeli koji ne koriste parametarsku strukturu za računanje budućih plaćanja i izbegavaju „preparametrizaciju“. Jedan od takvih modela je Hoerlova kriva koja ima oblik sličan krivi sa iscrtanim inkrementalnim vrednostima plaćanja. Ova kriva brzo raste, a kako razvojne godine prolaze, ona eksponencijalno opada do nule. Ovaj model je značajan zato što daje vrednosti budućih plaćanja ne samo u diskretnim vremenskim trenucima, već neprekidno u vremenu. Dok sa jedne strane postoje metode koje se zasnivaju na Chain-Ladder-u, a sa druge na parametarskim krivama, početkom 21. veka su se pojavili „izglačavajući modeli“ (smoothing models) koji na veoma elegantan način prave spoj izmedju ove dve vrste metoda. Na ovaj način je aktuaru omogućeno da računa rezerve praveći kombinaciju ove dve vrste modela koja mu odgovara.

U literaturi se često pojavljuju i varijacije prezentovanih modela. Na primer, postoje razne vrste Chain-Ladder metoda koje koriste različite načine da izračunaju razvojne faktore ili bar koriste različite oblike podataka plaćanja prilikom računanja. Razvijeni su i neki stohastički modeli koji ne dobijaju parametre preko metode maksimalne verodostojnosti i GLM oblika parametara, nego ih dobijaju praveći simulacije, pa na osnovu njih donose zaključke o ocenama parametara. U nekim radovima se spominju stohastički modeli koji koriste GLM oblik, ali koji uzimaju netipične link funkcije za računanje parametara, npr. kod Negativno-binomnog modela se ne uzima logaritamska link funkcija, nego logaritam od logaritma!

Cilj ovog rada je da čitaoca upozna sa osnovnim modelima računanja tehničkih rezervi u osiguravajućim društvima, da napravi paralelu izmedju njih i da uputi na najbolji mogući model. Iako je u poslednjih 20 godina značajno poraslo interesovanje matematičara za ovakvu vrstu problema i značajno se povećao broj matematičkih modela računanja rezervi, i dalje je slabo zastupljena njihova primena u praksi. Postoje različiti razlozi za ovakvo stanje, kao što su: opšte nepoznavanje postojećih modela, nefleksibilnost postojećih modela, nedostatak odgovarajućih softvera za njihovu primenu itd.

Bibliografija

[1] A. AGRESTI, *Categorical Data Analysis, Second Edition*, A John Wiley & Sons, INC. Publication, New Jersey, 2002.

[2] E.D. ALBA, *Claims reserving when there are negative values in the runoff triangle*, 39th Acturial Research Conference, The University of Iowa, 2004.

[3] R.L. BROWN, L.R. GOTTLIEB *Introduction to ratemaking and loss reserving for property and casualty insurance*, ACTEX, 2001.

[4] S. CHRISTOFIDES, *Regression models based on log-incremental payments*, Faculty and Institute of Actuaries, 1997.

[5] A.J. DOBSON, *Introduction to generalized linear models, Second Edition*, Chapman & Hall / CRC, Boca Raton, Florida, 2002.

[6] P.D. ENGLAND, R.J. VERRALL, *Standard errors of prediction in claims reserving: a comparison of methods workshop*, General Insurance Convention & ASTIN Colloquium, 1998.

[7] P.D. ENGLAND, R.J. VERRALL, *Stochastic claims reserving in general insurance*, Bell & Bain Ltd. Glasgow, 2002.

[8] M. GESMANN, *Stochastic reserving and modelling seminar*, Lloyd's of London, London, 2008.

[9] M. GESMANN, D. MURPHY, W. ZHANG *Claims reserving in R*, DRAFT, 2014.

[10] I.L. GOULD, *Stochastic Chain-Ladder models in Nonlife Insurance*, Dissertation for the degree master of statistics in insurance mathematics and finance at the University od Bergen, 2008.

[11] P.D. JONG, G.Z. HELLER, *Generalized Linear Models for Insurance Data*, Cambridge University Press, New York, 2008.

[12] R. KAAS, M. GOOVAERTS, J. DHAENE, M. DENUIT *Modern Acturial Risk Theoryress*, Kluwer Academic Publishers, New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow, 2002.

[13] Z. LOZANOV-CRVENKOVIĆ, *Statistika*, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, 2012.

[14] T. MACK, *Which Stochastic Model is Underlying the Chain Ladder Method?*, Munich Reinsurance Company, Munich, 1993.

[15] I. MALIĆ, *Mali uzorci i primena bootstrap metoda u ekonometriji*, master rad, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, 2012.

[16] A. OLIVIERI, E. PITACCO *Introduction to Insurance Mathematics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.

[17] J. PAK, *Margina solvetnosti, tehničke rezerve i plasman sredstava osiguranja*, Fakultet Političkih nauka, Univerzitet u Beogradu

[18] S. PRICA, *Teorija i praksa dobijanja uzoraka na osnovu raspoloživih podataka*, master rad, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, 2014.

[19] M.V. WUTHRICH, M. MERZ, *Stochastic Claims Reserving Methods in Insurance*, John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, 2008.

[20] *Zakon o osiguranju*, Službeni glasnik RS, br. 55/2004, 70/2004 – ispr., 61/2005, 61/2005 – dr. zakon, 85/2005 – dr. zakon, 101/2007, 63/2009 – odluka US, 107/2009, 99/2011, 119/2012 i 116/2013

[21] http://www.magesblog.com/2013/01/reserving-based-on-log-incremental.html

Kratka biografija

Miloš Bubnjević je rodjen 25. maja 1990. godine u Novom Sadu. Završio je osnovnu školu "Jovan Jovanović Zmaj"u Sremskoj Kamenici 2005. godine kao nosilac Vukove diplome. Upisuje gimnaziju "Isidora Sekulić"u Novom Sadu, prirodno-matematički smer, koju završava 2009. godine, takodje kao nosilac Vukove diplome.

Zbog sklonosti ka matematici i ekonomiji, iste godine upisuje Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, smer primenjena matematika. Zaključno sa septembarskim ispitnim rokom 2012. godine položio je sve predvidjene ispite sa prosekom 9.00 i stekao zvanje Matematičar - primenjena matematika.

Oktobra 2012. godine upisuje master studije na istom fakultetu, smer master primenjena matematika. Položio je sve ispite zaključno sa septembarskim ispitnim rokom 2014. godine sa prosečnom ocenom 8.81 i time stekao uslov za odbranu master rada.

Tokom fakulteta volontira na festivalima: "Interzone", "S one strane duge" i "A šta ti radiš ovih dana?". 2012. godine postaje član Upravnog odbora "Kluba Umetnika Bina - KUB" i aktivno učestvuje u organizaciji manifestacija, kao i u njihovom izvodjenju. Od maja 2014. godine je zaposlen u firmi "Schneider Electric DMS NS".

2005. godine je završio osnovnu muzičku školu "Isidor Bajić"u Novom Sadu za violinu, a potom 2012. godine za solo-pevanje. U slobodno vreme se bavi plesom: latinoameričkim, standardnim plesovima i argentinskim tangom. Voli da igra karte i društvene igre.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Miloš Bubnjević
AU

Mentor: prof. dr Dora Seleši
MN

Naslov rada: Modeli računanja tehničkih rezervi u aktuarstvu
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: s / e
JI

Zemlja publikovanja: Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2015.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno–matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (6, 100, 21, 65, 3, 23, 0) - (broj poglavlja, strana, lit. citata, tabela, slika, grafika, priloga)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Aktuarska matematika

ND

Predmetna odrednica / Ključne reči: Aktuarske rezerve, Tehničke rezerve neživnog osiguranja, Chain-ladder metod, Bornhuetter-Fergusonov metod, Stohastički modeli računanja rezervi, Uopšteni linearni modeli (GLM), Bootstrap metoda

PO, UDK

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno–matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod:

U radu su prezentovani različiti načini računanja aktuarskih rezervi osiguravajućeg društva za različite obračunske periode. Problem je što niko ne može da predvidi budućnost, da zna koliko će nastati šteta i koliki iznosi će biti u pitanju, stoga je priča o rezervama krucijalna da bi osiguravajuće društvo obezbedilo dovoljno sredstava da bi ostalo platežno sposobno, da bi moglo da na vreme isplati sve svoje obaveze i da nadomesti štete nastale njenim osiguranicima.

Sve metode koje su predstavljene u radu se zasnivaju na Chain-Ladder metodu, kao jednom od osnovnih, ali ujedno i visoko primenljivih metoda izračunavanja rezervi. On se bazira na ideji da se aktuarske rezerve mogu predvideti na osnovu zahteva za odštetu iz prethodnih perioda, tj. na osnovu istorijskih podataka već nastalih šteta.

Ako se vrednosti podnetih zahteva posmatraju nedeterministički, već kao slučajne promenljive, pretpostavkama o različitim raspodelama za njih (Poasonova, Negativna binomna, Log-normalna, ...), dobijaju se različiti stohastički modeli računanja rezervi.

U radu je prezentovan i Bornhuetter-Fergusonov metod koji inkorporira stručno mišljenje aktuara i spoljašnje informacije, da bi dao precizniju ocenu rezervi. Za kraj, detaljno je objašnjen Bootstrapping metod koji od jednog uzorka pravi mnoštvo novih pseudouzoraka i time stvara nove informacije na osnovu kojih se mogu doneti zaključci o rezervama.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 10.4.2014.

DP

Datum odbrane: Januar 2015.

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik:	**dr Nataša Krejić**, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu,
Mentor:	**dr Dora Seleši**, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu,
Član:	**dr Sanja Rapajić**, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu.

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Miloš Bubnjević
AU

Mentor: Dora Seleši, Ph.D.
MN

Title: Loss reserving models in insurance
TI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract: English
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2015.
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: (6, 100, 21, 65, 3, 23, 0) - (number of chapters, pages, references, tables, pictures, graphs, additional lists)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Actuarial Mathematics

SD

Subject / Key words: Acturial Reserves, Reserves in General Insurance, Chain-Ladder method, Bornhueter-Ferguson method, Stochastic loss reserving models, Generel Linear Models (GLM), Bootstrap method

SKW, UC

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

HD

Note:

N

Abstract:

In this paper are presented different methods of calculating loss reserves of insurance companies. The main problem about this topic is that no one can predict the future, no one can know for a fact how many claims will be incurred at any point in future and what will be the values of those incurred claims. Having said that, this topic is crucial to the insurance companies to make sure that they have enough resources to keep liquidity and to pay in time all liabilities to their policyholders.

All of the methods presented in this paper are based on Chain-Ladder method, which is one of the basic methods for loss reserving in insurance, but also one of the most applicable ones. Chain-Ladder proposes the idea that the future payment of an insurance company can be predicted using information from previous years, that is using information about already made payments in previous period of time.

If values of the claims are assumed to be random variables, not deterministic values, then assuming different probability distribution (Poisson, Negative binomial, Log-normal, ...) one can get different stochastic loss reserving model.

In this paper, Bornhuetter-Ferguson method is also presented as one of the ways of calculating reserves using expert opinion of the actuary to get better prediction. In the end, Bootstrap method is explained and applied on loss reserving problem. This method makes pseudo-samples from one and only one known sample and in that way provides new information on which actuary can make better prediction of claim reserves.

AB

Accepted by the Scientific Board on: 10.4.2014.

ASB

Defended: January 2015.

DE

Thesis defend board:

DB

President:	**Nataša Krejić, Ph.D.** Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Supervisor:	**Dora Seleši, Ph.D.** Associate Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad,
Member:	**Sanja Rapajić, Ph.D.** Associate Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad.