



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I
INFORMATIKU



Miljana Karanović

Modeliranje tolerancije rizika donosioca odluke primenom FLC procesa

-master rad-

Novi Sad, 2012.

Sadržaj

Uvod	3
1 Fazi skup	5
1.1 Osnovne definicije i pojmovi	5
1.2 Operacije sa fazi skupovima.....	9
1.3 Trougaone norme	13
1.3.1 Operacije sa fazi skupovima bazirane na t -normama i t -konormama	16
1.4 Fazi brojevi.....	18
1.4.1 $L-R$ fazi brojevi.....	20
1.4.2 Trougaoni fazi brojevi	22
1.4.3 Fazi interval	24
1.5 Operacije sa fazi brojevima	26
2 Fazi logika	28
2.1 Viševrednosna logika	28
2.2 Osnovni pojmovi fazi logike	29
2.3 Osnovne operacije u fazi logici bazirane na t -normama i t -konormama	32
3 FLC (Fuzzy logic control) procesi i njihova primena	33
3.1 Modeliranje tolerancije rizika donosioca odluke pomoću FLC procesa	33
3.2 Specijalan slučaj modela	52
4 Modifikovani FLC procesi i njihova primena	61
4.1 Modeliranje tolerancije rizika donosioca odluke pomoću modifikovanih FLC procesa.....	61
4.2 Specijalan slučaj modifikovanog modela	73
Zaključak	81
Literatura	82
Biografija.....	83
Ključna dokumentacija	84

Uvod

Tema ovog master rada su FLC (Fuzzy logic control) procesi. Reč je o savremenoj tehnici primene fazi skupova i fazi logike u cilju rešavanja različitih problema industrijskog inženjeringa, finansijskih i menadžerskih sistema. U ovom radu FLC procesi su korišćeni kako bi se opisalo ponašanje ljudi i izvršilo modeliranje klijentove spremnosti za prihvatanje rizika prilikom investiranja sredstava u određene projekte.

Rad se sastoji iz četiri poglavlja. Prva dva poglavlja za cilj imaju da čitaoca uvedu u osnove fazi razmišljanja kroz osnovne pojmove iz teorije fazi skupova i fazi logike. Poslednja dva dela, kroz nekoliko različitih modela, ilustruju primenu FLC procesa u rešavanju realnih problema.

U prvom poglavlju je dat detaljan pregled osnovnih pojnova i definicija vezanih za fazi skupove. Kroz primere je predstavljena razlika između klasičnih i fazi skupova. Posebna pažnja je posvećena trougaonim fazi brojevima i operacijama definisanim nad njima. Takođe, ovaj deo sadrži i opis trougaonih normi i konormi, kao i njihovih osobina, zbog izuzetne važnosti ovih operatora na dalji rad. Literatura korišćena pri izradi ovog poglavlja je [1,2,3,4,5,6,7,8,9,11,12,13].

U drugom poglavlju su prikazani osnovni pojmovi iz oblasti fazi logike sa akcentom na if-then pravilima i operacijama sa njima, baziranim na operatorima minimuma i maksimuma. Rezultati prezentovani u ovom delu su iz [1,3,6,10,11].

U trećem delu je tema rada u potpunosti razrađena. Pored teorijskog pristupa FLC procesima sa dve ulazne i jednom izlaznom promenljivom, sa dva modela je na detaljan način opisana njihova primena na klijentovu toleranciju rizika. Rezultati prikazani u ovom poglavlju se baziraju na [1,2,10].

Poslednji deo rada je originalan, a zasniva se na modifikovanim FLC procesima do kojih se dolazi uvrštavanjem Lukaševičeve T_L norme. Novodobijeni FLC procesi su primenjeni na modeliranje klijentove tolerancije rizika i kao krajnji rezultat svakog modela dobijene su dekodirane izlazne vrednosti pomoću kojih su doneti zaključci o najprihvatljivijem nivou rizika za donosioca odluke.

Izuzetnu zahvalnost dugujem svom mentoru, dr Ivani Štajner-Papuga, na ukazanom poverenju, kao i na korisnim sugestijama i primedbama bez kojih rad ne bi primio sadašnji oblik. Takođe, zahvaljujem se prof.dr Zagorki Lozanov-Crvenković na podršci i znanju koje mi je pružila tokom studija, kao i svim članovima komisije.

Posebnu zahvalnost dugujem svojim roditeljima, naročito majci, bratu i prijateljima. Hvala im na razumevanju i bezuslovnoj podršci koju su mi pružali tokom celokupnog školovanja.

Novi Sad, decembar 2012.godine

Miljana Karanović

1 Fazi skup

U klasičnoj teoriji skupova, pripadanje objekta nekom skupu je jasno i precizno definisano: objekat je ili član nekog skupa ili nije, što se može i uočiti iz toga da karakteristična funkcija klasičnog skupa prima isključivo vrednosti 0 ili 1. Međutim, veoma su česte situacije kada nije moguće napraviti jasnu razliku između pripadanja i nepripadanja nekog elementa datom skupu. Na primer, sistemi savremenog poslovanja, finansija i menadžerstva su izuzetno kompleksni i zbog značajne uloge ljudskog faktora često ne raspolažu jasnim i preciznim informacijama, te tradicionalne tehnike ne uspevaju na najbolji način da ih oslikaju. Upravo iz tih razloga, vremenom se razvila teorija fazi skupova kao efikasno oruđe za modeliranje takvih sistema.

1.1 Osnovne definicije i pojmovi

U ovom poglavlju prikazani su osnovni pojmovi vezani za fazi skupove počevši od definicije. Pored toga, kroz primere će biti prikazana razlika između klasičnih i fazi skupova i date su definicije osobina koje su karakteristične samo za fazi skupove (videti [1,2,3,4,5,6,7,8,9,11,13]).

Osnovna osobina fazi skupova je to što dozvoljavaju da neki element samo u određenoj meri pripada skupu. Funkcija kojom se opisuje stepen pripadnosti nekog elementa fazi skupu naziva se *funkcija pripadnosti* i data je sledećom definicijom ([1,2,7,11]).

Definicija 1.1 Funkcija pripadnosti μ je preslikavanje $\mu : U \rightarrow [0,1]$ gde je U univerzalni skup.

Fazi skupovi se definišu preko svoje funkcije pripadnosti ([1,7,11]).

Definicija 1.2 Neka je A klasičan podskup univerzalnog skupa U . Fazi skup A_f je skup uređenih parova $(x, \mu_{A_f}(x))$ definisan na sledeći način:

$$A_f = \{(x, \mu_{A_f}(x)) \mid x \in A, \mu_{A_f}(x) \in [0,1]\}.$$

Prvi element x iz para $(x, \mu_{A_f}(x))$ predstavlja objekat iz klasičnog skupa A koji zadovoljava neku osobinu P , dok drugi element $\mu_{A_f}(x)$ predstavlja broj iz intervala $[0,1]$ i ukazuje na to s kolikim stepenom x zadovoljava osobinu P . Veće vrednosti funkcije $\mu_{A_f}(x)$ ukazuju na veći stepen pripadnosti.

Iz definicije se lako može uočiti da klasični skupovi predstavljaju specijalan oblik fazi skupova gde su svi stepeni pripadanja jednaki jedinici.

Ukoliko fazi skup ima konačno mnogo elemenata, oni se mogu nabrojati pri čemu se elementi koji imaju nulti stepen pripadnosti uglavnom ne navode. Takođe, u slučaju konačnog broja elemenata fazi skupa, može se koristiti i tabelarni prikaz na dole dat način navodeći u jednom redu elemente, a u drugom odgovarajuće vrednosti funkcije pripadnosti.

$$A \triangleq \begin{array}{|c|c|c|} \hline & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline \mu_A(x_1) & \mu_A(x_2) & \mu_A(x_3) \\ \hline \end{array} \quad \text{pri čemu simbol } \triangleq \text{ označava „definisan pomoću“.}$$

U radu je korišćena sledeća notacija: klasični skupovi su obeležavani velikim štampanim latiničnim slovima A, B, C ..., dok su fazi skupovi označeni velikim pisanim latiničnim slovima sa indeksom f koji ukazuju na to da je reč o fazi skupovima: A_f, B_f, C_f, \dots

Uz sledeće primere biće prikazana razlika između klasičnih i fazi skupova.

Primer 1.1. [1] Neka je dat klasičan skup pomoću koga želimo da opišemo visoke ljude, odnosno neka je skup $A = \{\text{visoki ljudi}\}$. Pretpostavimo da je čovek visok ako njegova visina iznosi 180 cm ili više, dok u suprotnom čovek nije visok. Karakteristična funkcija (Funkcija pripadnosti) skupa $A = \{\text{visoki ljudi}\}$, data je na sledeći način:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{za } 180 \leq x, \\ 0 & \text{za } 160 \leq x < 180 \end{cases}.$$

Možemo zaključiti da opis skupa $A = \{\text{visoki ljudi}\}$ nije zadovoljavajući zbog toga što ne dozvoljava gradaciju. Reč *visok* je neodređena. Na primer, osoba koja je visoka 179 cm nije iste visine kao osoba od 160 cm. Takođe, po ovome zaključujemo da je osoba od 180 cm visoka kao što je i osoba od 200 cm, dok se pravi drastična razlika između osoba koje su visoke 179 cm i onih čija je visina 180 cm.

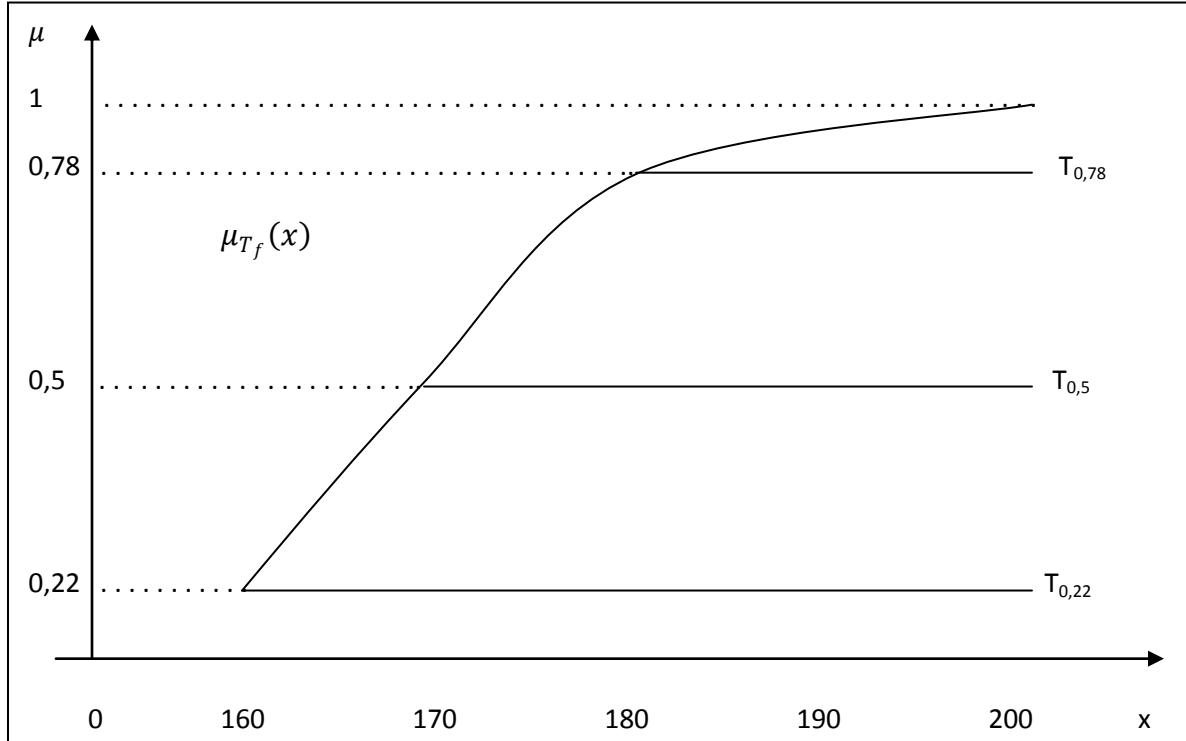
Kod opisivanja jezičkih promenljivih pomoću klasičnih skupova dolazi do izražaja njihov nedostatak, kojeg u teoriji fazi skupova nema zahvaljujući načinu na koji su definisani.

Primer 1.2. [1] Opisaćemo skup $A = \{\text{visoki ljudi}\}$ pomoću fazi skupa. Neka je dat fazi skup $T_f = \{(x, \mu_{T_f}(x))\}$, gde x predstavlja vrednost iz intervala $[160, 200]$ izraženu u cm, a $\mu_{T_f}(x)$ je definisana na sledeći način:

$$\mu_{T_f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(30)^2} (x - 140)^2, & \text{za } 160 \leq x \leq 170, \\ -\frac{1}{2(30)^2} (x - 200)^2 + 1, & \text{za } 170 < x \leq 200. \end{cases}$$

Brojevi na horizontalnoj x osi prikazuju visinu izraženu u cm, a vertikalna osa μ prikazuje stepene kojima ljudi mogu biti označeni kao visoki. Svi ljudi visine između 160 i 200 cm

pripadaju skupu *visoki ljudi*, s tim da su im stepeni pripadnosti tom skupu različiti. Prema tome, sa Slike 1.1 se vidi da funkcija pripadnosti za osobu visine 160 cm iznosi 0,22, za osobu visine 180 cm je 0,78, dok je vrednost funkcije pripadnosti 1 za osobu visine 200 cm. Interval $[0,22,1]$ vertikalne ose μ predstavlja kvantifikaciju stepena neodređenosti reči visok.



Slika 1.1 Opis pojma „visoka osoba“ pomoću fazi skupa

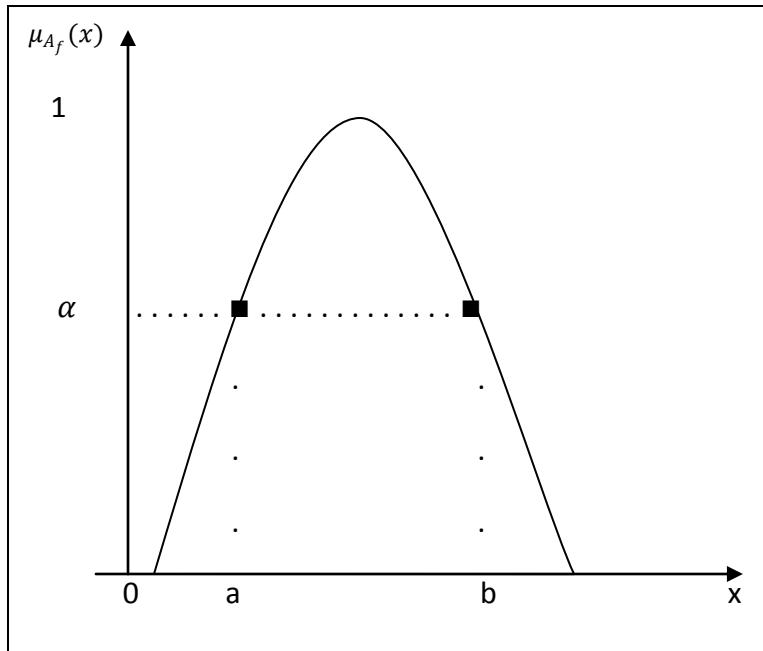
Definicija 1.3 [1] Fazi skup A_f je normalizovan ako postoji bar jedan element, iz univerzalnog skupa, takav da je vrednost funkcije pripadnosti jednaka jedinici. U suprotnom fazi skup nije normalizovan.

Prepostavimo da fazi skup A_f nije normalizovan; odnosno da je $\mu_{A_f}(x) < 1$. Možemo normalizovati skup A_f ukoliko izvršimo normalizaciju njegove funkcije pripadnosti na sledeći način: $\frac{\mu_{A_f}(x)}{\max \mu_{A_f}(x)}$.

Definicija 1.4 [1] α -presek (eng. α -cut) fazi skupa A_f , u oznaci A_α , predstavlja klasičan skup elemenata koji pripadaju fazi skupu A_f sa stepenom pripadnosti bar α , tj.

$$A\alpha = \{ (x \in U \mid \mu_{A_f}(x) \geq \alpha \}, \alpha \in [0,1].$$

α -presek nam pruža granicu nivoa poverenja α koji ćemo koristiti prilikom modeliranja donošenja odluka pomoću fazi skupova. Pomoću te granice moguće je odbaciti iz razmatranja one elemente x čiji je stepen pripadanja $\mu_{A_f}(x) < \alpha$.



Slika 1.2 α -presek fazi skupa A_f

Na Slici 1.2 ([1]) je ilustrovan jedan α -presek fazi skupa A_f .

Definicija 1.5 [1] Fazi skup A_f je konveksan ako za svaka dva elementa $u, v \in A_\alpha$ i svako $\alpha \in [0,1]$ važi: $\lambda u + (1 - \lambda)v \in A_\alpha$, $\lambda \in [0,1]$; odnosno, ako i samo ako je svaki α -presek konveksan skup.

Konveksnost fazi skupa se može definisati i preko funkcije pripadnosti na sledeći način:

Definicija 1.6 Fazi skup A_f je konveksan ako i samo ako važi :

$$\mu_{A_f}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\mu_{A_f}(x_1), \mu_{A_f}(x_2)\}, \text{ za } x_1 \text{ i } x_2 \in U \text{ i } \lambda \in [0,1].$$

Prethodna definicija se može tumačiti na sledeći način: Ako se uzmu dva elementa x_1 i x_2 iz konveksnog fazi skupa A_f i povuče duž koja ih spaja, vrednost funkcije pripadnosti za svaku tačku sa te duži mora biti veća ili jednaka od minimum vrednosti funkcije pripadnosti za elemente x_1 i x_2 .

Fazi skup sa Slike 1.2 jeste konveksan. Može se pokazati da je fazi skup konveksan ako i samo ako se α -preseci sastoje iz jednog segmenata.

1.2 Operacije sa fazi skupovima

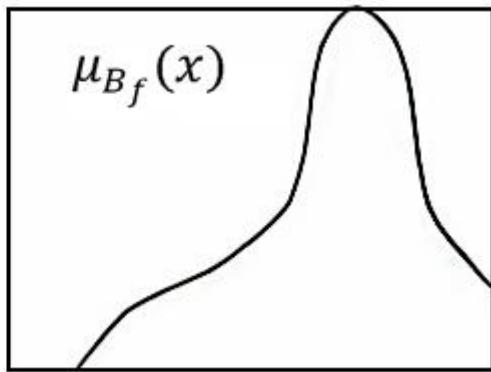
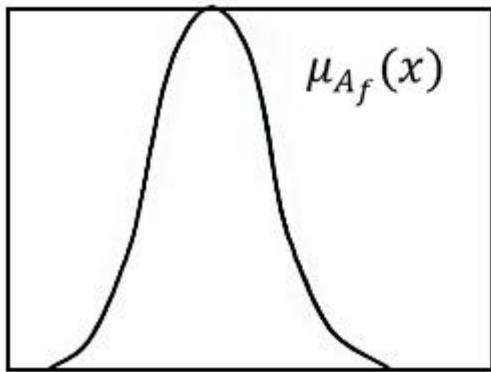
U ovom poglavlju fokus je na fazi skupovima koji su definisani nad istim unverzalnim skupom U. Neka su dati sledeći fazi skupovi:

$$A_f = \{(x, \mu_{A_f}(x)) \mid \mu_{A_f}(x) \in [0,1]\}$$

i

$$B_f = \{(x, \mu_{B_f}(x)) \mid \mu_{B_f}(x) \in [0,1]\}.$$

Operacije sa fazi skupovima definisane su preko operacija nad funkcijama pripadnosti.



Slika 1.3 Funkcije pripadnosti fazi skupova A_f i B_f .

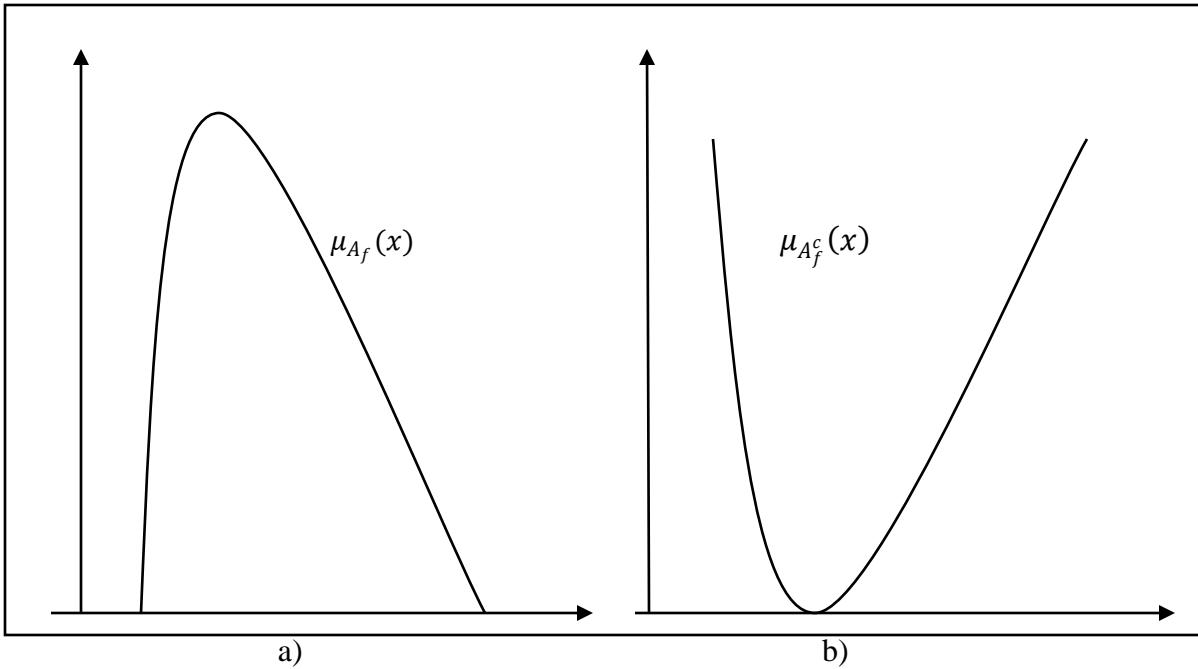
Definicija 1.7 [1] Fazi skupovi A_f i B_f su jednaki, u oznaci $A_f = B_f$, ako i samo ako za svako $x \in U$, važi: $\mu_{A_f}(x) = \mu_{B_f}(x)$.

Definicija 1.8 [1] Fazi skup A_f je podskup fazi skupa B_f u oznaci $A_f \subseteq B_f$, ako za svako $x \in U$, važi: $\mu_{A_f}(x) \leq \mu_{B_f}(x)$.

Definicija 1.9 [1] Fazi skup A_f je strogi podskup fazi skupa B_f u oznaci $A_f \subset B_f$, kada je A_f podskup od B_f i $A_f \neq B_f$, odnosno:

$$\begin{cases} \mu_{A_f}(x) \leq \mu_{B_f}(x), & \text{za svako } x \in U \\ \mu_{A_f}(x) < \mu_{B_f}(x), & \text{za najmanje jedno } x \in U \end{cases}.$$

Definicija 1.10 [1] Fazi skupovi A_f i A_f^c su komplementni ako $\mu_{A_f^c}(x) = 1 - \mu_{A_f}(x)$ ili $\mu_{A_f^c}(x) + \mu_{A_f}(x) = 1$. Funkcija pripadanja $\mu_{A_f^c}(x)$ je simetrična sa $\mu_{A_f}(x)$ u odnosu na liniju $\mu=0,5$.

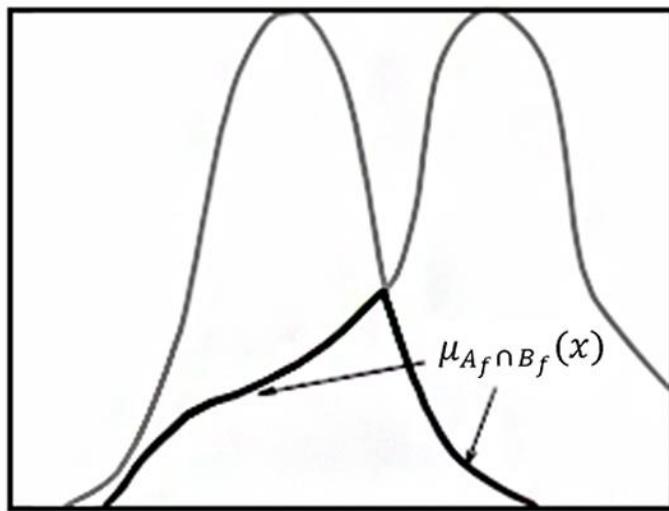


Slika 1.4 Funkcija pripadnosti fazi skupa A_f (a) i njegovog komplementa (b)

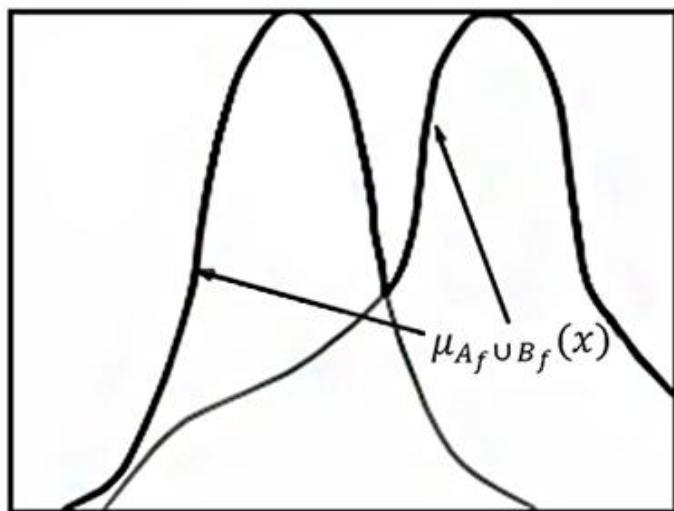
Na Slici 1.4 (b) je prikazano kako izgleda komplement fazi skupa koji je dat na Slici 1.4 (a) (videti [1]).

Definicija 1.11 [1] Presek fazi skupova A_f i B_f , u oznaci $A_f \cap B_f$ definišemo:
 $\mu_{A_f \cap B_f}(x) = \min(\mu_{A_f}(x), \mu_{B_f}(x)), x \in U.$

Definicija 1.12 [1] Unija fazi skupova A_f i B_f , u oznaci $A_f \cup B_f$ definišemo:
 $\mu_{A_f \cup B_f}(x) = \max(\mu_{A_f}(x), \mu_{B_f}(x)), x \in U.$



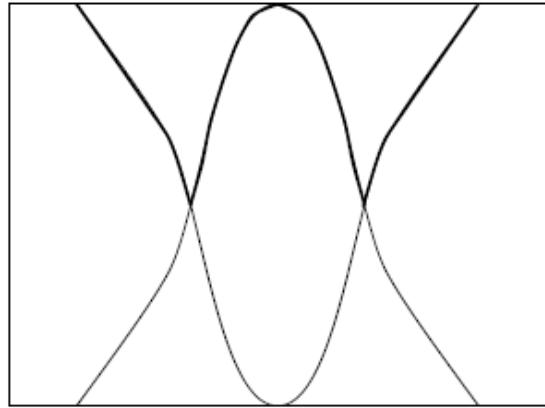
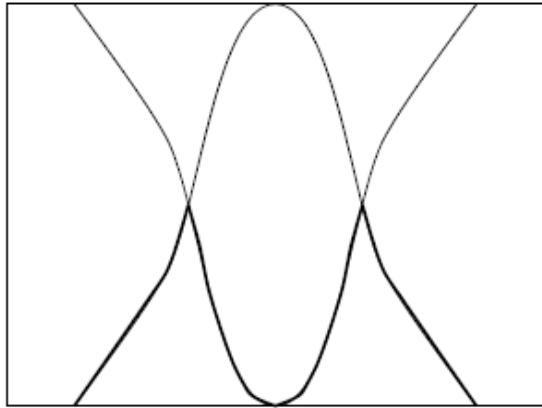
Slika 1.5 Funkcija pripadnosti preseka fazi skupova A_f i B_f



Slika 1.6 Funkcija pripadnosti unije fazi skupova A_f i B_f

Na Slikama 1.5 i 1.6 ([1]) prikazan je presek i unija fazi skupova A_f i B_f , respektivno.

Kao što je već naglašeno, za razliku od klasičnih skupova, čiji članovi ili poseduju ili ne poseduju određenu osobinu, kod fazi skupova elementi mogu delimično posedovati neku osobinu. Zbog toga treba naglasiti da kod fazi skupova *ne važi zakon isključenja trećeg* tj. $A_f \cap A_f^c \neq \emptyset$ i $A_f \cup A_f^c \neq U$. Šematski prikaz odsustva važenja zakona isključenja trećeg dat je na Slici 1.7 (videti [1]).



Slika 1.7 Zakon isključenja trećeg ne važi kod fazi skupova.

Odsustvo zakona isključenja trećeg je značajna osobina fazi skupova jer ih čini mnogo fleksibilnijim od klasičnih skupova i veoma pogodnim za opisivanje procesa sa nepotpunim, nejasnim i nepreciznim informacijama.

1.3 Trougaone norme

Trougaone norme, kao klasa realnih binarnih relacija, se prvi put javljaju u matematičkoj literaturi 1942. godine, zahvaljujući Karlu Mengeru (*Karl Menger*). Vremenom mnogi naučnici počinju da ih izučavaju, razvijaju i usavršavaju. Danas se najčešće koristi definicija koju su uveli Švajcer i Skalar 1960. godine (*Berthold Schweizer, Abe Skalar*) (videti [12]) i ove operacije su svoju upotrebu pronašle, između ostalog, u teoriji fazi skupova i fazi logike, te ovom prilikom dajemo kratak pregled osnovnih pojmoveva.

Rezultati prezentovani u ovom poglavlju su iz [8,9,11].

Definicija 1.13 [11] Trougaona norma T (*t-norma*) je funkcija $T : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ takva da za svako $x,y \in [0,1]$ važe sledeći uslovi:

(T1): komutativnost: $T(x,y) = T(y,x)$

(T2): asocijativnost: $T(x,T(y,z)) = T(T(x,y),z)$

(T3): monotonost: $y \leq z \Rightarrow T(x,y) \leq T(x,z)$

(T4): rubni tj. granični uslovi: $T(x,1) = x$ i $T(x,0) = 0$.

Navodimo četiri osnovne t-norme: minimum T_M , algebarski proizvod T_P , Lukašijevičeva (*Lukasiewich*) T_L i norma drastičnog preseka (eng. *drastic intersection*) T_D . Njihove definicije su:

1. $T_M(x,y) = \min(x,y)$,
2. $T_P(x,y) = xy$,
3. $T_L(x,y) = \max(0, x+y-1)$,
4. $T_D = \begin{cases} \min(x,y) & \text{ako } \max(x,y) = 1 \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$

Treba naglasiti da pored gore navedenih normi postoje i mnoge druge koje ovom prilikom nećemo navoditi (videti [9,11]).

Definicija 1.14 [11] Kažemo da je trougaona norma T_1 *slabija* od trougaone norme T_2 , u oznaci $T_1 \leq T_2$, ako je $T_1(x,y) \leq T_2(x,y)$ za svako $(x,y) \in [0,1]^2$.

Može se reći i obrnutno, tj. t-norma T_2 je *jača* od t-norme T_1 .

Trougaone norme T_M i T_D su, redom, najjača i najslabija *t-norma*, što je dato sledećim tvrđenjem.

Tvrđenje 1.1 [11] Za svaku *t-normu* T važi:

$$\forall x,y \in [0,1] \quad T_D(x,y) \leq T(x,y) \leq T_M(x,y).$$

Dokaz: Neka su dati $x, y \in [0,1]$ i neka je $T(x, y)$ proizvoljna t -norma. Koristeći činjenicu da je $y \leq 1$ i osobine (T3) i (T4) dobijamo $T(x, y) \leq T(x, 1) = x \leq x$. Ako sada iskoristimo da je i $x \leq 1$, kao i osobine (T1), (T3) i (T4), redom, dobija se $T(x, y) = T(y, x) \leq T(y, 1) = y \leq y$. Dakle, $T(x, y) \leq x$ i $T(x, y) \leq y$, a odatle sledi $T(x, y) \leq \min(x, y) = T_M$.

Dalje, za $x = 1$ se dobija $T(x, y) = T(1, y) = y = T_D(x, y)$, a za $y = 1$ imamo $T(x, y) = T(x, 1) = x = T_D(x, y)$. Odatle sledi da je $T(x, y)$ baš jednako sa $T_D(x, y)$, te tako važi $T(x, y) \geq T_D(x, y)$. Sa druge strane, ako $x, y \in (0,1)$ dobija se $T_D(x, y) = 0 \leq T(x, y)$. ■

Takođe, za elementarne trougaone norme važi: $T_D \leq T_L \leq T_P \leq T_M$.

Asocijativnost proizvoljne t -norme T omogućava njen proširenje na n -arnu operaciju $T_{i=1}^n : [0,1]^n \rightarrow [0,1]$ na sledeći način: $T_{i=1}^n x_i = T(T_{i=1}^{n-1} x_i, x_n) = T(x_1, \dots, x_n)$.

Proširivanjem trougaonih normi T_M, T_P, T_L i T_D dobijaju se sledeće n -arne operacije:

1. $T_M(x_1, \dots, x_n) = \min(x_1, \dots, x_n)$
2. $T_P(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdot \dots \cdot x_n$
3. $T_L(x_1, \dots, x_n) = \max(0, \sum_{i=1}^n x_i - (n-1))$
4. $T_D(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} x_i, & \text{ako } x_j = 1 \text{ za } j \neq i \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$

Sledi definicija trougaone konorme.

Definicija 1.15 [11] Trougaona konorma S (t -konorma) je funkcija $S : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ takva da za svako x, y i $z \in [0,1]$ važe sledeći uslovi:

- (S1): komutativnost: $S(x, y) = S(y, x)$,
- (S2): asocijativnost: $S(x, S(y, z)) = S(S(x, y), z)$,
- (S3): monotonost: $y \leq z \Rightarrow S(x, y) \leq S(x, z)$,
- (S4): rubni tj. granični uslovi: $S(x, 1) = 1$ i $S(x, 0) = x$.

Navodimo četiri elementarne t -konorme:

1. $S_M(x, y) = \max(x, y)$,
2. $S_P(x, y) = x + y - xy$,
3. $S_L(x, y) = \min(1, x + y)$,
4. $S_D = \begin{cases} \max(x, y) & \text{ako } \min(x, y) = 0 \\ 1 & \text{inače} \end{cases}$

Između trougaonih normi i konormi postoji jaka veza koja je opisana sledećim tvrđenjem.

Tvrđenje 1.2 [9] Funkcija $S : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ je t -konorma ako i samo ako postoji t -norma T takva da za svako x, y i $z \in [0,1]$ važi: $S(x, y) = 1 - T(1 - x, 1 - y)$.

Dokaz: (\Rightarrow) Neka je S t -konorma i neka je preslikavanje $T : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ definisano sa: $T(x, y) = 1 - S(1 - x, 1 - y)$. Treba pokazati da je ovako definisano preslikavanje t -norma, odnosno da zadovoljava uslove (T1)-(T4). Pokazaćemo redom:

$$(T1) T(x, y) = 1 - S(1 - x, 1 - y) = 1 - S(1 - y, 1 - x) = T(y, x)$$

$$\begin{aligned} (T2) T(x, T(y, z)) &= 1 - S(1 - x, 1 - T(y, z)) = 1 - S(1 - x, 1 - 1 + S(1 - y, 1 - z)) = \\ &= 1 - S(1 - x, S(1 - y, 1 - z)) \\ &= 1 - S(S(1 - x, 1 - y), 1 - z) \\ &= 1 - S(1 - 1 + S(1 - x, 1 - y), 1 - z) \\ &= 1 - S(1 - T(x, y), 1 - z) \\ &= T(T(x, y), z) \end{aligned}$$

$$(T3) \text{ Neka je } y \leq z. \text{ Dalje, } 1 - y \geq 1 - z \Rightarrow S(1 - x, 1 - y) \geq S(1 - x, 1 - z)$$

$$\Rightarrow 1 - S(1 - x, 1 - y) \leq 1 - S(1 - x, 1 - z)$$

$$T(x, y) = 1 - S(1 - x, 1 - y) \leq 1 - S(1 - x, 1 - z) = T(x, z)$$

$$(T4) T(x, 1) = 1 - S(1 - x, 1 - 1) = 1 - S(1 - x, 0) = 1 - 1 + x = x$$

$$T(x, 0) = 1 - S(1 - x, 1 - 0) = 1 - S(1 - x, 1) = 1 - 1 = 0.$$

(\Leftarrow) Polazeći od toga da postoji t -norma T takva da za svako $x, y \in [0,1]$ važi:

$S(x, y) = 1 - T(1 - x, 1 - y)$, na sličan način se pokazuje da je ovako definisano preslikavanje S t -konorma. ■

Trougaona konorma S definisana u prethodnom tvrđenju se naziva *dualna t-konorma* za t -normu T i obrnuto. Očigledno, elementarne t -konorme su dualne odgovarajućim elementarnim t -normama. S obzirom da dualnost menja poredak, za elementarne trougaone konorme važi:

$$S_M \leq S_P \leq S_L \leq S_D.$$

Analogno tome, dualnost utiče i na jačinu t – konormi, pa zato važi sledeće:

$$\forall x, y \in [0,1] \quad S_M(x, y) \leq S(x, y) \leq S_D(x, y).$$

Naredna tvrđenja su data za trougaone norme, a analogna tvrđenja za trougaone konorme se lako pokazuju pomoću teoreme o dualnosti.

Tvrđenje 1.3 [9] Trougaona norma T_M je jedina t -norma koja zadovoljava $T(x, x) = x$ za svako $x \in (0,1)$.

Dokaz: Neka za proizvoljnu t -normu T važi $T(x, x) = x$, za svako $x \in (0,1)$. Tada za $y \leq x < 1$ na osnovu monotonosti T imamo:

$$y = T(y, y) \leq T(x, y) \leq \min(x, y) = y$$

Odatle, na osnovu komutativnosti i rubnog uslova sledi da je $T = T_M$. ■

Tvrđenje 1.4 [9] Trougaona norma T_D je jedina t -norma koja zadovoljava $T(x, x) = 0$, za svako $x \in (0,1)$.

Dokaz: Neka za proizvoljnu t -normu T važi $T(x, x) = 0$, za svako $x \in (0,1)$. Tada za svako $y \in [0, x]$ važi:

$$0 \leq T(x, y) \leq T(x, x) = 0,$$

što daje $T = T_D$. ■

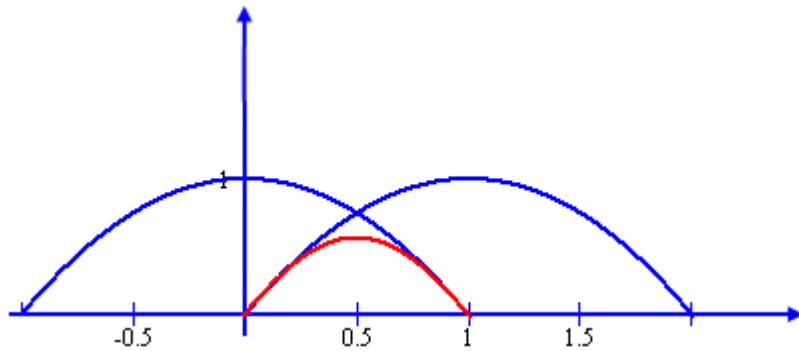
1.3.1 Operacije sa fazi skupovima bazirane na t -normama i t -konormama

U ovom delu ćemo formalno definisati operacije preseka i unije fazi skupova bazirane na t -normama i t -konormama.

Definicija 1.16 [9] Neka je T proizvoljna t - norma. T – **presek** $A \cap B$ fazi skupova A_f i B_f se definiše kao $\mu_{A \cap B}(x) = T(\mu_{A_f}(x), \mu_{B_f}(x))$, $\forall x \in U$.

Primer 1.3. Neka su dati fazi skupovi A_f i B_f čije su funkcije pripadnosti $\mu_{A_f}(x) = 1 - x^2$, definisana nad intervalom $x \in [-1,1]$ i $\mu_{B_f}(x) = 1 - (1 - x)^2$, definisana nad intervalom $x \in [0,2]$ i neka je data trougaona norma $T_P(x, y) = xy$. Tada dobijamo da je funkcija pripadnosti fazi preseka $A \cap B$: $\mu_{A \cap B}(x) = (1 - x^2) \cdot (1 - (1 - x)^2)$.

Prikaz fazi preseka skupova A_f i B_f dat je na Slici 1.8 i označen je crvenom bojom.



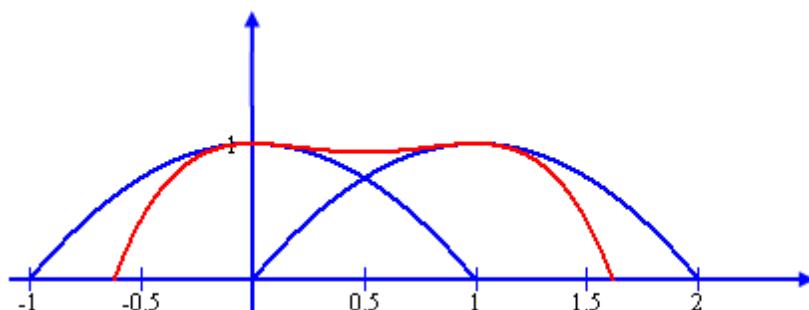
Slika 1.8 T -presek fazi skupova A_f i B_f

Definicija 1.17 [9] Neka je S proizvoljna t -konorma. S -unija $A \cup B$ fazi skupova A_f i B_f se definiše kao $\mu_{A \cup B}(x) = S(\mu_{A_f}(x), \mu_{B_f}(x))$, $\forall x \in U$.

Primer 1.4. Neka su dati fazi skupovi A_f i B_f kao u prethodnom primeru i neka je data trougaona konorma $S_P(x, y) = x + y - xy$. Tada dobijamo da je funkcija pripadnosti fazi unije $A \cup B$ data na sledeći način:

$$\begin{aligned}\mu_{A \cup B}(x) &= \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \\ &= 1 - x^2 + 1 - (1 - x)^2 - (1 - x^2) \cdot (1 - (1 - x)^2) \\ &= -x^4 + 2x^3 - x^2 + 1\end{aligned}$$

Prikaz fazi unije skupova A_f i B_f dat je na Slici 1.9 i označen je crvenom bojom.

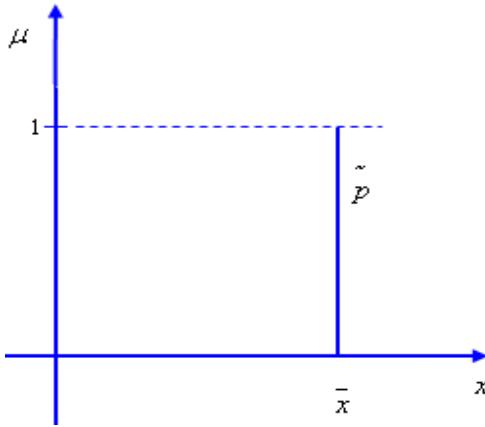


Slika 1.9 S -unija fazi skupova A_f i B_f

S obzirom da su fazi skupovi uopštenje klasičnih skupova na isti način se i klasični brojevi mogu predstaviti kao fazi brojevi. Neka je \bar{x} „običan” broj, tada se on može zapisati kao fazi broj $p \in P(R)$, preko funkcije pripadnosti koju definišemo na sledeći način:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x < \bar{x} \\ 1, & x = \bar{x} \\ 0, & x > \bar{x} \end{cases}$$

za svako realno x ; pri čemu je R skup realnih brojeva, a $P(R)$ označava partitivni skup skupa R . Kada posmatramo broj u klasičnom smislu kao fazi broj, tada fazi broj predstavlja jednočlani fazi skup koji drugačije nazivamo singleton.



Slika 1.10 Fazi singleton

Takođe i klasičan interval se može smatrati specijalnim slučajem fazi intervala sa funkcijom pripadnosti oblika:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x < l \\ 1, & x \in [l, r] \\ 0, & x > r \end{cases}$$

pri čemu x prolazi kroz ceo skup realnih brojeva.

1.4 Fazi brojevi

Od posebnog značaja za primenu su fazi skupovi specifičnog oblika poznati kao fazi brojevi. U ovom radu su razmatrani fazi brojevi u skladu sa definicijom iz [7]. Više o ovoj temi se može naći u [1,3,5,6,7,8,10,11,13].

Definicija 1.18 [7] Fazi skup $P_f \in P(R)$ se naziva *fazi broj* p ako zadovoljava sledeće uslove:

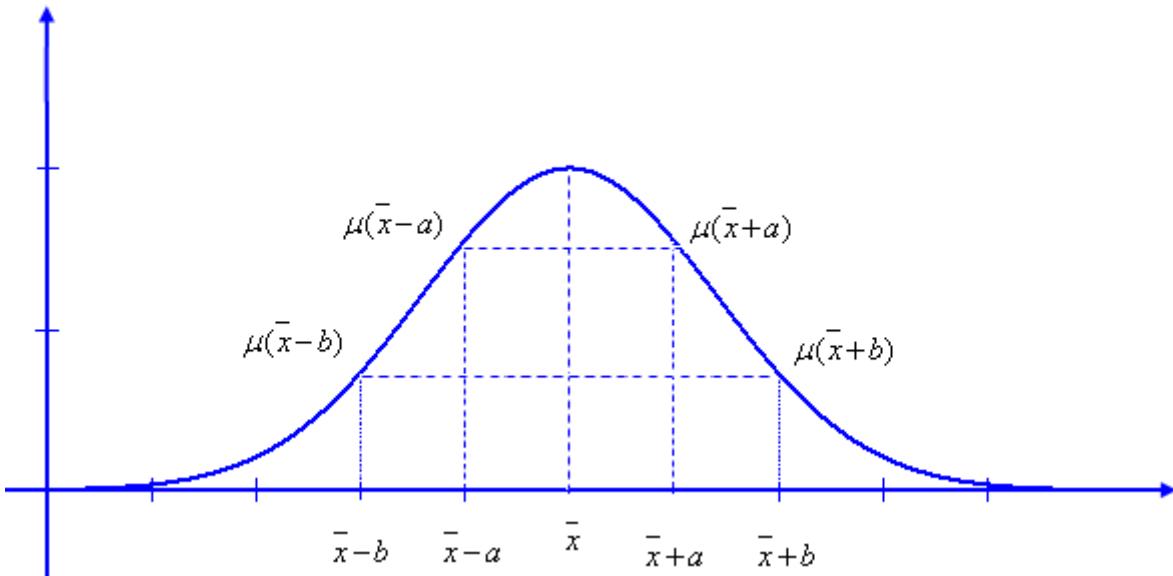
1. P_f je normalizovan fazi skup
2. P_f je konveksan

3. Postoji tačno jedno $\bar{x} \in R$ takvo da je $\mu_p(\bar{x}) = 1$
4. Funkcija pripadnosti $\mu_p(x)$ za $x \in R$ je, bar po delovima, neprekidna.

Vrednost \bar{x} kojoj odgovara maksimalni stepen pripadnosti, naziva se *modalna vrednost* fazi broja p .

Definicija 1.19 [7] Partitivni skup fazi brojeva, u oznaci $P'(R)$, je skup svih mogućih fazi brojeva p , ako $P'(R) \subset P(R)$.

Definicija 1.20 [2] Fazi broj $p \in P'(R)$ je simetričan ako njegova funkcija pripadnosti $\mu_p(x)$ zadovoljava: $\mu_p(\bar{x} + x) = \mu_p(\bar{x} - x), \forall x \in R$.

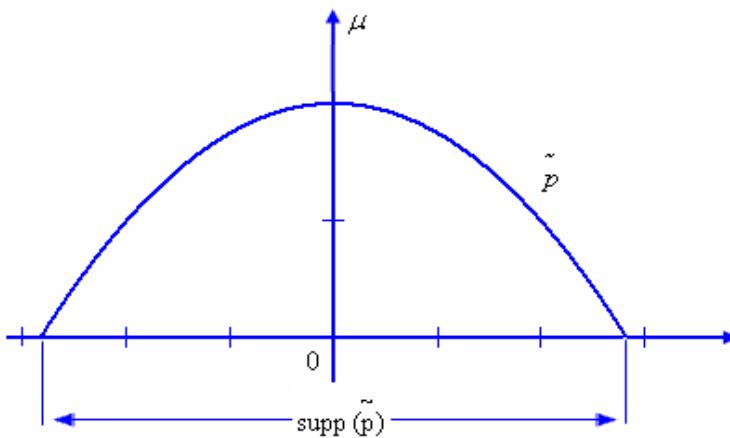


Slika 1.11 Funkcija pripadnosti simetričnog fazi broja

Definicija 1.20 [7] Kažemo da je fazi broj $p \in P'(R)$ strogo pozitivan, u oznaci $p > 0$, ako i samo ako nosač tog fazi broja $\text{supp}(p) \subseteq (0, \infty)$; ili je strogo negativan, u oznaci $p < 0$, ako i samo ako $\text{supp}(p) \subseteq (-\infty, 0)$.

Fazi broj prikazan na Slici 1.11 je primer strogo pozitivnog fazi broja.

Definicija 1.21 [7] Fazi broj $p \in P'(R)$ nazivamo *fazi-nula* broj, u oznaci $\text{sgn}(p)=0$, ako nije ni pozitivan ni negativan, tj. ako $0 \in \text{supp}(p)$.



Slika 1.12 Funkcija pripadnosti fazi-nula broja

Sledi pregled najčešće korišćenih oblika fazi brojeva. Rezultati prikazani u narednom delu su iz [1,7,11], a više o ovoj temi se može naći i u [3,4,5,8,13].

1.4.1 L-R fazi brojevi

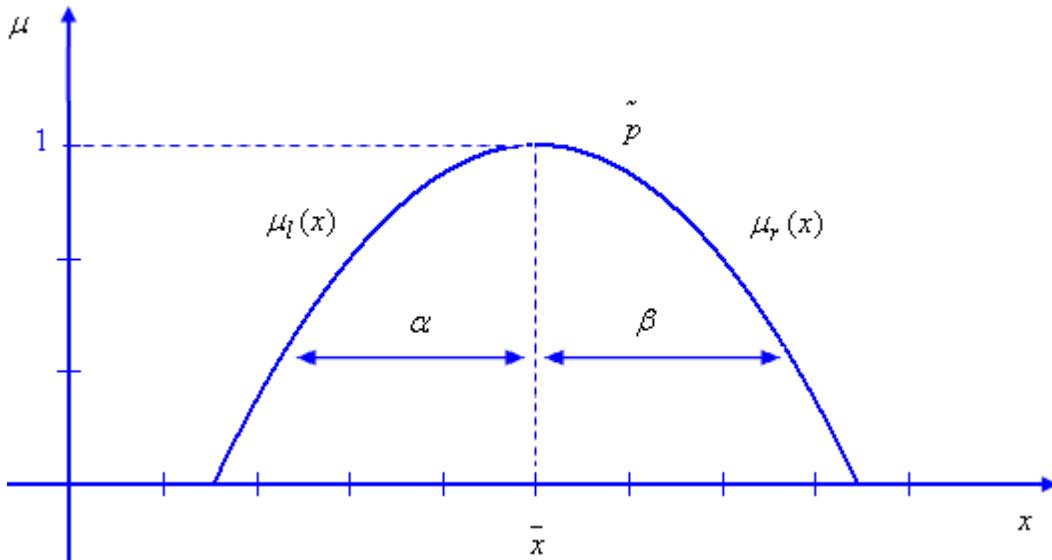
Osnovna ideja L-R fazi brojeva je razdvajanje funkcije pripadnosti $\mu_p(x)$ fazi broja p , na dva dela: jednog koji se nalazi levo od modalne vrednosti \bar{x} i drugog koji se nalazi desno od \bar{x} . Podelom funkcije pripadnosti $\mu_p(x)$ dobijamo funkcije $\mu_l(x)$ i $\mu_r(x)$, redom.

Sada funkcija pripadnosti može biti prikazana na sledeći način:

$$\mu_p(x) = \begin{cases} \mu_l(x) = L\left(\frac{\bar{x}-x}{\alpha}\right) & \text{za } x < \bar{x} \\ \mu_r(x) = R\left(\frac{x-\bar{x}}{\beta}\right) & \text{za } x \geq \bar{x} \end{cases} .$$

Vrednosti α i β predstavljaju odstupanja u levu, odnosno, desnu stranu od modalne vrednosti \bar{x} , dok su L i R referentne funkcije, odnosno, funkcije oblika. Ove funkcije određuju oblik fazi broja i u zavisnosti od izbora tih funkcija razlikujemo nekoliko vrsta fazi brojeva kao što su trougaoni, eksponencijalni, kvadratni....

Na Slici 1.13 prikazan je fazi broj p čija je funkcija pripadnosti $\mu_p(x)$ (videti [7]).



Slika 1.13 Funkcija pripadnosti L-R fazi broja

Da bi L i R bile referentne funkcije L-R fazi broja, one moraju zadovoljavati sledeće uslove:

1. $L(u) \in [0,1] \forall u; R(u) \in [0,1] \forall u.$

Vrednosti funkcija L i R moraju pripadati intervalu $[0,1]$, s obzirom da su pomoću njih definisane funkcije pripadnosti, čije vrednosti pripadaju upravo tom intervalu.

2. $L(0)=R(0)=1.$

Znamo da je \bar{x} modalna vrednost fazi broja p , te ona mora biti modalna vrednost levog i desnog fazi broja, odnosno, vrednosti funkcija pripadnosti $\mu_l(x)$ i $\mu_r(x)$ u tački \bar{x} moraju biti jednake jedinici.

$$1 = \mu_l(\bar{x}) = L\left(\frac{(\bar{x} - \bar{x})}{\alpha}\right) = L(0)$$

$$1 = \mu_r(\bar{x}) = R\left(\frac{\bar{x} - \bar{x}}{\beta}\right) = R(0).$$

3. $L(u)$ i $R(u)$ su opadajuće funkcije na intervalu $[0, \infty)$.

Funkcija $\mu_l(x)$ je rastuća u intervalu $[0, \infty)$, što znači da je funkcija L opadajuća na tom intervalu. Pokazaćemo:

$$x_1 > x_2 \Rightarrow \mu_l(x_1) > \mu_l(x_2) \Leftrightarrow L\left(\frac{(\bar{x}-x_1)}{\alpha}\right) > L\left(\frac{(\bar{x}-x_2)}{\alpha}\right), \text{ pri čemu važi: } x_1 < \bar{x} \text{ i } x_2 < \bar{x}.$$

Označimo sa $u_1 = \frac{\bar{x}-x_1}{\alpha}$ i $u_2 = \frac{\bar{x}-x_2}{\alpha}$, tada vidimo da iz gore navedenog izraza sledi $L(u_1) > L(u_2)$

Dalje, $x_1 = \bar{x} - \alpha u_1$ i $x_2 = \bar{x} - \alpha u_2$. Pošto je $x_1 > x_2$, dobija se $\bar{x} - \alpha u_1 > \bar{x} - \alpha u_2 \Rightarrow u_1 < u_2$.

Dakle, za $u_1 < u_2$ važi $L(u_1) > L(u_2)$, što znači da je L opadajuća funkcija. Slično se može pokazati da je i R opadajuća funkcija na intervalu $[0, \infty)$, polazeći od toga da je $\mu_r(x)$ opadajuća na tom intervalu.

4. $L(1)=0$, ako je $\min_u L(u) = 0$

$R(1)=0$, ako je $\min_u R(u) = 0$

$\min_u L(u) = 0 \Leftrightarrow \min_u \mu_l(u) = 0$, a funkcija μ_l ima minimum u tački $u^* = \bar{x} - \alpha$, pa je zato:

$$0 = \mu_l(u^*) = \mu_l(\bar{x} - \alpha) = L\left(\frac{\bar{x} - (\bar{x} - \alpha)}{\alpha}\right) = L(1).$$

5. Ako je $L(u) > 0 \forall u$, onda je $\lim_{u \rightarrow \infty} L(u) = 0$, jer je L opadajuća funkcija na $[0, \infty)$.

Analogno se pokazuje i za funkciju R .

Za zapis L-R fazi broja p se koristi oznaka $p = \langle \bar{x}, \alpha, \beta \rangle_{L,R}$, gde je \bar{x} modalna vrednost, a α i β odstupanja od te modalne vrednosti.

Definicija 1.22 [7] L-R fazi broj je *semi-simetričan*, ako su funkcije L i R identične tj.

$$L(u) = R(u), \forall u \in R_0^+$$

Ako su vrednosti α i β jednake, onda se L-R fazi broj naziva *simetričan*.

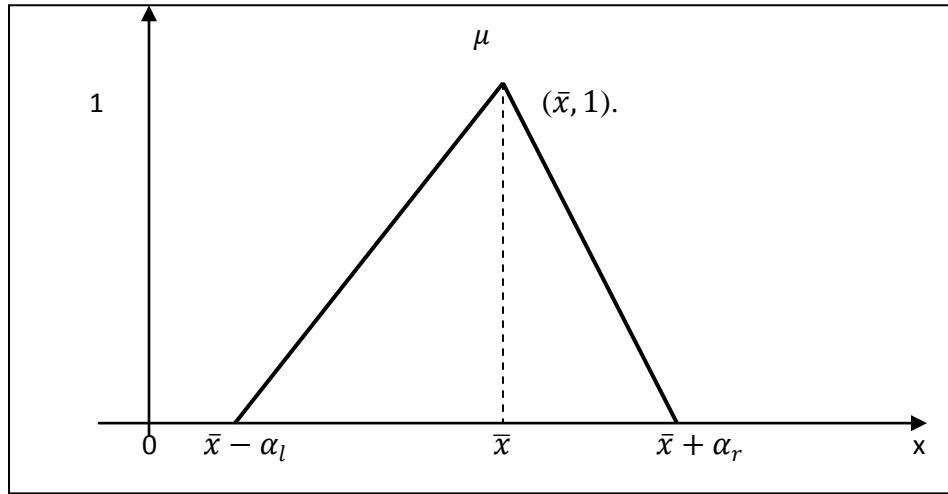
1.4.2 Trougaoni fazi brojevi

Mada trougaoni fazi brojevi predstavljaju specijalan slučaj L-R fazi brojeva, zbog njihove velike uloge u različitim oblastima sledi detaljan prikaz (videti [1,4,7,10]).

Trougaoni fazi brojevi imaju linearnu funkciju pripadnosti, odnosno, funkcije oblika su linearne, te se zato još nazivaju i *linearni fazi brojevi*. Njihova funkcija pripadnosti je definisana na sledeći način:

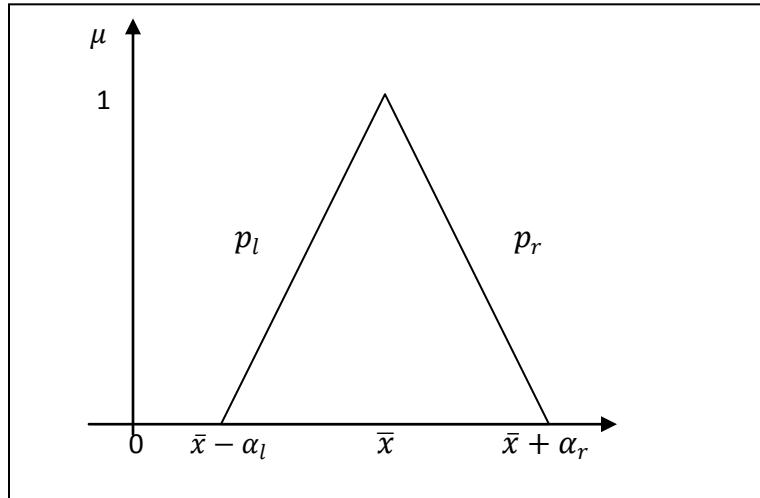
$$\mu(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x - \bar{x}}{\alpha_l}, & x - \alpha_l < x < \bar{x} \\ 1 - \frac{x - \bar{x}}{\alpha_r}, & \bar{x} \leq x < \bar{x} + \alpha_r \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Trougaoni fazi broj se označava sa $p = tfn(\bar{x}, \alpha_l, \alpha_r)$ ili $p = (\bar{x} - \alpha_l, \bar{x}, \bar{x} + \alpha_r)$, gde je \bar{x} modalna vrednost fazi broja, a α_l i α_r predstavljaju odstupanje sa leve, odnosno desne strane od modalne vrednosti.



Slika 1.14 Trougaoni fazi broj

Interval $[\bar{x} - \alpha_l, \bar{x} + \alpha_r]$ se naziva *nosač fazi broja*. Često se u praksi tačka \bar{x} nalazi u sredini nosećeg intervala, $\bar{x} = \frac{(\bar{x} - \alpha_l) + (\bar{x} + \alpha_r)}{2}$, te zamenjujući tu vrednost u funkciji pripadnosti dobijamo simetričan (centralni) trougaoni fazi broj.



Slika 1.15 Centralni trougaoni fazi broj

Funkcija pripadnosti trougaonih fazi brojeva se sastoji iz dva linearne dela, koja se spajaju u tački $(\bar{x}, 1)$. Deo p_l se naziva levi, a p_r desni trougaoni fazi broj i oni se mogu zapisati na sledeći način: $p_l = (\bar{x} - \alpha_l, \bar{x}, \bar{x})$ i $p_r = (\bar{x}, \bar{x}, \bar{x} + \alpha_r)$. Levi trougaoni fazi broj je pogodan za

reprezentovanje pojma sa značenjem: „veoma pozitivno-veoma veliko”, odnosno, u praksi da označi pojmove poput „veoma star”, „veliki profit”, „veliki rizik” i sl., gde god je \bar{x} veliko. S druge strane, desni trougaoni fazi broj se koristi da opiše pojmove sa značenjem: „veoma malo”, odnosno u praksi da označi pojmove poput „mlad”, „mali profit”, „mali rizik”,...

Bitna osobina trougaonih fazi brojeva je to što mogu lako da se konstruišu na osnovu malog broja podataka kojim raspolažemo. Prepostavimo da možemo da odredimo najmanju i najveću moguću vrednost neke neprecizne vrednosti kojom se bavimo. Na taj način se dobija noseći interval $[\bar{x} - \alpha_l, \bar{x} + \alpha_r]$. Dalje, ako se odredi \bar{x} kao najpogodniji da predstavi tu posmatranu vrednost, onda će vrh trougaonog fazi broja biti u $(\bar{x}, 1)$. Na taj način se dobijaju tri vrednosti pomoću kojih se jednostavno može konstruisati trougaoni fazi broj i zapisati njegova funkcija pripadnosti u skladu sa gore navedenim zapisom.

1.4.3 Fazi interval

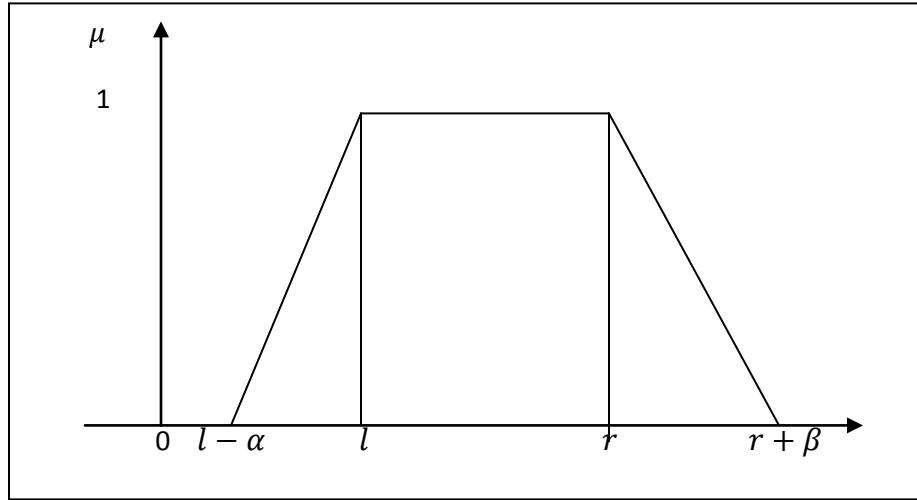
Ako fazi skup $P_f \in P(R)$ ne zadovoljava neki od četiri uslova iz definicije fazi broja, on se samim tim ne može smatrati fazi brojem. Međutim, ako je narušen treći uslov, odnosno ako postoji više od jedne modalne vrednosti, onda se takvi fazi skupovi nazivaju *fazi intervali* ([1,5,7,11]).

Definicija 1.24 [11] Neka su L i R referentne funkcije. *Fazi L-R interval*, u oznaci $A = \langle l, r, \alpha, \beta \rangle_{L,R}$ definišemo preko funkcije pripadnosti date sa:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & r + \beta \leq x \leq l - \alpha \\ L\left(\frac{l-x}{\alpha}\right), & l - \alpha \leq x \leq l \\ 1, & l \leq x \leq r \\ R\left(\frac{x-r}{\beta}\right), & r \leq x \leq r + \beta \end{cases}$$

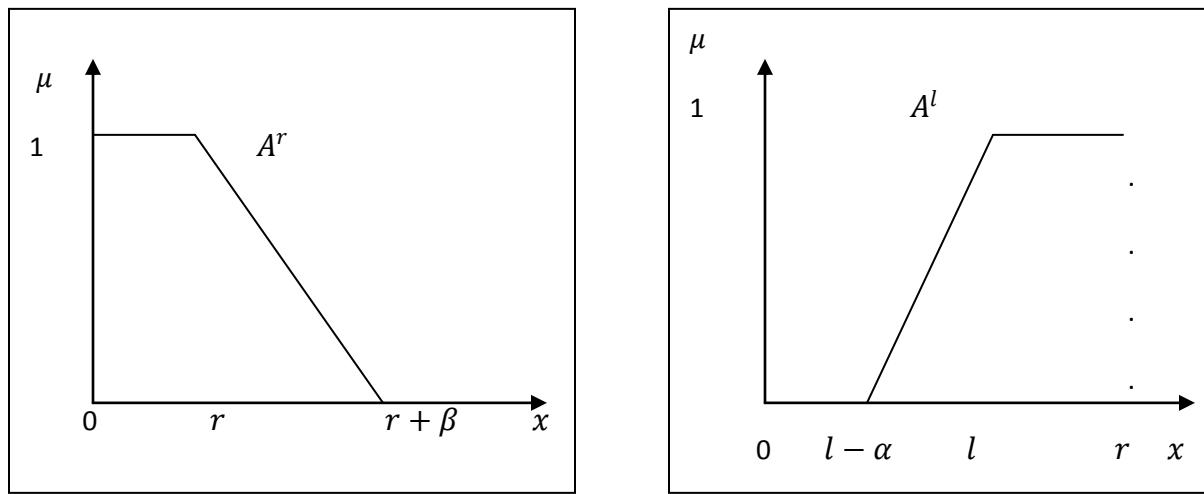
Trapezoidni fazi intervali predstavljaju jedan tip L-R fazi intervala, koji se u literaturi često mogu naći i u sledećoj notaciji: $A = (l - \alpha, l, r, r + \beta)$. Iako po definiciji trapezoidni fazi intervali nisu fazi brojevi, u literaturi ih je moguće naći i pod nazivom *trapezoidni fazi brojevi*. Takođe, oni predstavljaju uopštenje trougaonih fazi brojeva, za $l = r = \bar{x}$.

Definicija 1.25 [1] Ako je $[l - \alpha, l] = [r, r + \beta]$, onda kažemo da je trapezoidni fazi interval *simetričan* u odnosu na liniju $x = \frac{l+r}{2}$.



Slika 1.16 Trapeziodni fazi interval

Analogno levom i desnom trougaonom fazi broju, definisani su levi i desni trapezoidni fazi interval, u oznaci $A^l = (l - \alpha, l, r, r)$ sa nosećim intervalom $[l - \alpha, r]$ i $A^r = (0, 0, r, r + \beta)$ sa nosećim intervalom $[0, r + \beta]$, redom. Pogodni su za opisivanje sledećih pojmova: *malo* $\triangleq A^r = (0, 0, r, r + \beta)$ i *veliko* $\triangleq A^l = (l - \alpha, l, r, r)$, gde je l veliki broj.



Slika 1.17 Desni i levi trapezoidni fazi interval

1.5 Operacije sa fazi brojevima

Elementarne operacije na skupu fazi brojeva zasnivaju se na primeni uopštene verzije Zadehovog principa proširenja. Njegova formulacija data je na sledeći način:

Definicija 1.26 [7] Neka su A_1, \dots, A_n fazi podskupovi klasičnih skupova X_1, \dots, X_n , redom, i neka je dato preslikavanje $f: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$ takvo da za svaku n-torku $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ važi: $f(x_1, \dots, x_n) = y \in Y$. Kao rezultat *Zadehovog principa proširenja* dobija se $B = f(A_1, \dots, A_n)$, fazi podskup od Y , čija je funkcija pripadnosti:

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \sup_y \min\{\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_n}(x_n)\}, & \text{ako } \exists y = f(x_1, \dots, x_n) \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Drugim rečima, princip proširenja tvrdi da je slika nekog fazi skupa opet fazi skup čija je funkcija pripadnosti data na gore navedeni način.

Sledi primer koji pokazuje kako pomoću Zadehovog principa proširenja možemo definisati sabiranje fazi brojeva.

Primer 1.5 Neka su data dva fazi skupa $A_1 = \{(-1,0.1), (0,0.2), (1,0.7)\}$ i $A_2 = \{(1,0.3), (0,0.5)\}$ i preslikavanje $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. Koristeći princip proširenja potrebno je naći skup $B = f(A_1, A_2)$. Kako bi zapis bio što pregleđniji koristi se tabelarni prikaz. U prvoj koloni tabele se navode elementi prvog fazi skupa $x_{1i}^{<\mu_{A_1}(x_i)>}$, a u prvom redu elementi drugog fazi skupa $x_{2j}^{<\mu_{A_2}(x_j)>}$. U preseku i -te vrste i j -te kolone nalazi se element $y_{i,j}$ koji se dobija primenom funkcije f na elemente $x_{1i}^{<\mu_{A_1}(x_i)>}$ i $x_{2j}^{<\mu_{A_2}(x_j)>}$. Stepen pripadnosti za element $y_{i,j}$ se dobija kao $\min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)\}$.

	(1,0.3)	(0,0.5)
(-1,0.1)	(0,0.1)	(-1,0.1)
(0,0.2)	(1,0.2)	(0,0.2)
(1,0.7)	(2,0.3)	(1,0.5)

Nakon što smo formirali tabelu, vidimo da za neke vrednosti $y_{i,j}$ postoji više različitih stepena pripadnosti, te se za konačan stepen uzima supremum svih stepena pripadnosti. Na taj način dobija se traženi skup $B = f(A_1, A_2)$ i on u ovom primeru iznosi: $B = \{(-1,0.1), (0,0.2), (1,0.5), (2,0.3)\}$.

Na sličan način se mogu definisati i ostale osnovne aritmetičke operacije. Međutim, prilikom ovakve direktnе primene principa proširenja nastaje problem, jer za beskonačno mnogo različitih

vrednosti x_1 i x_2 dobijamo istu vrednost $y = f(x_1, x_2)$. Svaka od tih kombinacija x -eva daje istu vrednost za y , ali sa različitim stepenima pripadnosti, te je potrebno pronaći supremum svih prethodno dobijenih stepeni pripadnosti za y . Problem je upravo u tome što takvih vrednosti ima beskonačno mnogo. Iz tih razloga razvijeno je nekoliko različitih pristupa ovom problemu, od kojih je za nas najznačajniji princip proširenja uopšten korišćenjem t -normi.

Definicija 1.27 [7] Neka su A_1, \dots, A_n fazi podskupovi klasičnih skupova X_1, \dots, X_n , redom, i neka je preslikavanje $f: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$ takvo da za svaku n-torku $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ važi $f(x_1, \dots, x_n) = y \in Y$. Za proizvoljnu t -normu T , kao rezultat *uopštenog principa proširenja* se dobija $B = f(A_1, \dots, A_n)$, fazi podskup od Y , čija je funkcija pripadnosti:

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \sup_y T\{\mu_{A1}(x_1), \dots, \mu_{An}(x_n)\}, & \text{ako } \exists y = f(x_1, \dots, x_n) \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Ovaj princip se drugačije zove *Zadehov sup – T princip proširenja*.

Bitno je primetiti da ako je za t -normu uzmeta t -normu T_M , dobija se orginalni Zadehov princip proširenja.

Primenom uopštenog principa proširenja moguće je dobiti formule za izračunavanje zbir fazi brojeva pomoću određenih t -normi. Zbir fazi brojeva A_1, \dots, A_n se označava sa $\bigoplus \diamond \sum_{i=1}^n A_i$, gde je $\diamond \in \{T_M, T_P, T_L, T_D, \dots\}$. Ukoliko se posmatra najjača trougaona norma T_M , onda se fazi brojevi mogu sabirati prema pravilu koje daje sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 1.5 [5] Neka su dati L - R fazi brojevi $A_i = \langle \bar{x}_i, \alpha_i, \beta_i \rangle_{L,R}$, $i = 1, \dots, n$. Zbir tih brojeva, u oznaci $\bigoplus_{T_M} \sum_{i=1}^n A_i$ je novi fazi broj dat sa: $\bigoplus_{T_M} \sum_{i=1}^n A_i = \langle \sum_{i=1}^n \bar{x}_i, \sum_{i=1}^n \alpha_i, \sum_{i=1}^n \beta_i \rangle_{L,R}$.

Ako se uzme norma T_D , onda sabiranje vršimo u skladu sa narednim tvrđenjem.

Tvrđenje 1.6 [5] Neka su dati L - R fazi brojevi $A_i = \langle \bar{x}_i, \alpha_i, \beta_i \rangle_{L,R}$, $i = 1, \dots, n$. T_D – zbir brojeva, u oznaci $\bigoplus_{T_D} \sum_{i=1}^n A_i$, je novi fazi broj dat sa: $\bigoplus_{T_D} \sum_{i=1}^n A_i = \langle \sum_{i=1}^n \bar{x}_i, \max \alpha_i, \max \beta_i \rangle_{L,R}$.

Primer 1.6 Neka su dati fazi brojevi $A_1 = \langle 0, 1, 1 \rangle_{L,R}$ i $A_2 = \langle -1, 1, 2 \rangle_{L,R}$. Koristeći formula iz Tvrđenja 1.6 dobija se fazi broj $B = \langle -1, 1, 2 \rangle_{L,R}$ i u ovom slučaju on se poklapa sa A_2 .

Množenje L - R fazi broja skalarom dato je na sledeći način.

Definicija 1.26 [1] Neka je dat L - R fazi broj $A = \langle \bar{x}, \alpha, \beta \rangle_{L,R}$ i broj $r \in R$. Fazi broj A pomnožen skalarom r daje novi fazi broj sledećeg oblika:

$$A \cdot r = \langle r \cdot \bar{x}, r \cdot \alpha, r \cdot \beta \rangle_{L,R}$$

Napominjemo da fazi brojevi dobijeni primenom prethodna dva tvrđenja i definicije, zadržavaju oblik polaznih fazi brojeva, odnosno referentne funkcije L i R ostaju nepromenjene.

2 Fazi logika

Klasična logika ili drugačije, dvo-vrednosna logika se bavi tvrdnjama koje su ili tačne ili netačne. Viševrednosna logika je uopštenje klasične logike, u kojoj tvrdnje mogu imati više od dve istinitosne vrednosti.

Uvođenjem fazi skupova i fazi relacija u sistem viševrednosne logike, Lofti Zadeh (1973.) je izumeo novu naučnu oblast poznatu kao *fazi logika*. S obzirom da je reč o relativno mladoj nauci, neka njena područja su nedovoljno istražena, međutim nesporna je primena koju ima u stvaranju tehnika i metoda za suočavanje sa jezičkim promenljivama i olakšava opisivanje modifikatora kao što su: „veoma”, „malo”, „skoro”, itd. Literatura korišćena u izradi ovog dela rada je: [1,2,3,4,6,7,10,11].

2.1 Viševrednosna logika

Oduvek se princip klasične logike da je svaka tvrdnja ili tačna ili netačna, dovodio u pitanje. Razlog za to je utvrđivanje istinitosnih vrednosti za iskaze koji opisuju buduće događaje, kao što je recimo iskaz: „Sutra će porasti vrednost dinara”. Budući događaji ne mogu biti procenjeni ni kao tačni, ni kao netačni. Njihova istinitosna vrednost je nepoznata sve dok se taj događaj ne desi. Jasno je da za opisivanje takvih tipova događaja klasična logika više nije dovoljna, pa se prirodno javila potreba za uvođenjem treće istinitosne vrednosti koja nije ni potpuno tačna, ni potpuno netačna.

Navodimo Lukaševičevu tro-vrednosnu logiku koja je nastala dvadesetih godina prošlog veka (videti [1,7]).

Prepostavimo da neki iskaz može da ima tri istinitosne vrednosti: „tačan” sa oznakom 1, „netačan” sa oznakom 0 i „neutralan” sa oznakom $\frac{1}{2}$. Oni formiraju skup istinitosnih vrednosti $T_3 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$. Ako su p i q iskazi čije istinitosne vrednosti pripadaju skupu T_3 , onda se logički veznici definišu na sledeći način.

Negacija: $\bar{p} = 1 - p$

Iskaz \bar{p} (čita se *ne p*) je tačan kad je p netačan i obrnuto.

Konjukcija: $p \wedge q = \min(p, q)$

Iskaz $p \wedge q$ (čita se *p i q*) je tačan samo kada su i p i q tačni.

Disjunkcija: $p \vee q = \max(p, q)$

Iskaz $p \vee q$ (čita se p ili q) je tačan kada su oba iskaza i p i q tačni ili kada je bar jedan od njih tačan.

Implikacija: $p \Rightarrow q = \min(1, 1 - p + q)$

Iskaz $p \Rightarrow q$ je tačan u svim slučajevima, osim kada je p tačno, a q netačno.

Istinitosne vrednosti navedenih iskaza date su u narednoj tabeli.

p	q	\bar{p}	\bar{q}	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$
1	1	0	0	1	1	1
1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	0	0	1	0	1	0
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	1	0	0	1	1
0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	1	1	0	0	1

Tabela 2.1 Tabela istinitosnih vrednosti iskaza p i q

Dalje uopštavanje dozvoljava iskazima da imaju više od tri istinitosne vrednosti. Ako su za bilo koji prirodan broj $n \geq 3$, istinitosne vrednosti nekog iskaza prikazane u vidu racionalnih brojeva iz intervala $[0,1]$ tako da dele taj interval na jednake delove, onda one formiraju skup istinitosnih vrednosti $T_n = \{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\}$ i na taj način se dobija viševrednosna logika.

2.2 Osnovni pojmovi fazi logike

Lingvističke promenljive i lingvistički modifikatori čine bitan aspekt fazi logike.

Definicija 2.1 [1] Promenljive čije su vrednosti reči, nazivaju se lingvističke (jezičke) promenljive.

Lingvističke odnosno, jezičke promenljive imaju važnu ulogu u određenim oblastima finansija i menadžerskih sistema. One pomažu da se opišu pojmovi poput: „inflacija”, „profit”, „rizik”, „investicija” i sl.

Jedna od najvažnijih lingvističkih promenljivih je *istina* (eng. truth). Opisana je pomoću fazi skupa sa funkcijom pripadanja $\mu_{tačno}(x), \mu \in [0,1]$, pri čemu koristimo pojam *tačno – istinito* (eng. true) umesto *istina* (truth). *Netačno* (eng. false) je jezička promenljiva koju tretiramo kao negaciju promenljive *tačno*.

Promenljiva *truth (istina)* je opisana u fazi logici na mnoštvo različitih načina. Dalje je prikazana Baldvinova (Baldwin) definicija koja je uvedena 1979.godine:

$$tačno \triangleq \{(x, \mu_{tačno}(x)) | x \in [0,1], \mu_{tačno}(x) = x, \mu \in [0,1]\}.$$

Neka $x \in U$ i neka je A fazi skup sa funkcijom pripadanja $\mu_A(x)$ i neka je m lingvistički modifikator koji opisuje pojmove kao što su: negacija (eng. not), veoma (eng. very), skoro (eng. fairly) i sl. Sa mA označavamo modifikovani fazi skup sa funkcijom pripadanja $\mu_{mA}(x)$ i pomoću njega definišemo sledeće:

$$negacija: \mu_{neA}(x) = 1 - \mu_A(x),$$

$$veoma: \mu_{veomaA}(x) = [\mu_A(x)]^2,$$

$$skoro: \mu_{skoroA}(x) = [\mu_A(x)]^{\frac{1}{2}}.$$

Gore navedeni modifikatori primenjeni na funkciju $\mu_{tačno}(x) = x, \mu \in [0,1]$ daju sledeće:

$$\mu_{neistinito}(x) = \mu_{netačno}(x) = 1 - x,$$

$$\mu_{veoma tačno}(x) = [\mu_{tačno}(x)]^2 = x^2,$$

$$\mu_{skoro tačno}(x) = [\mu_{tačno}(x)]^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}.$$

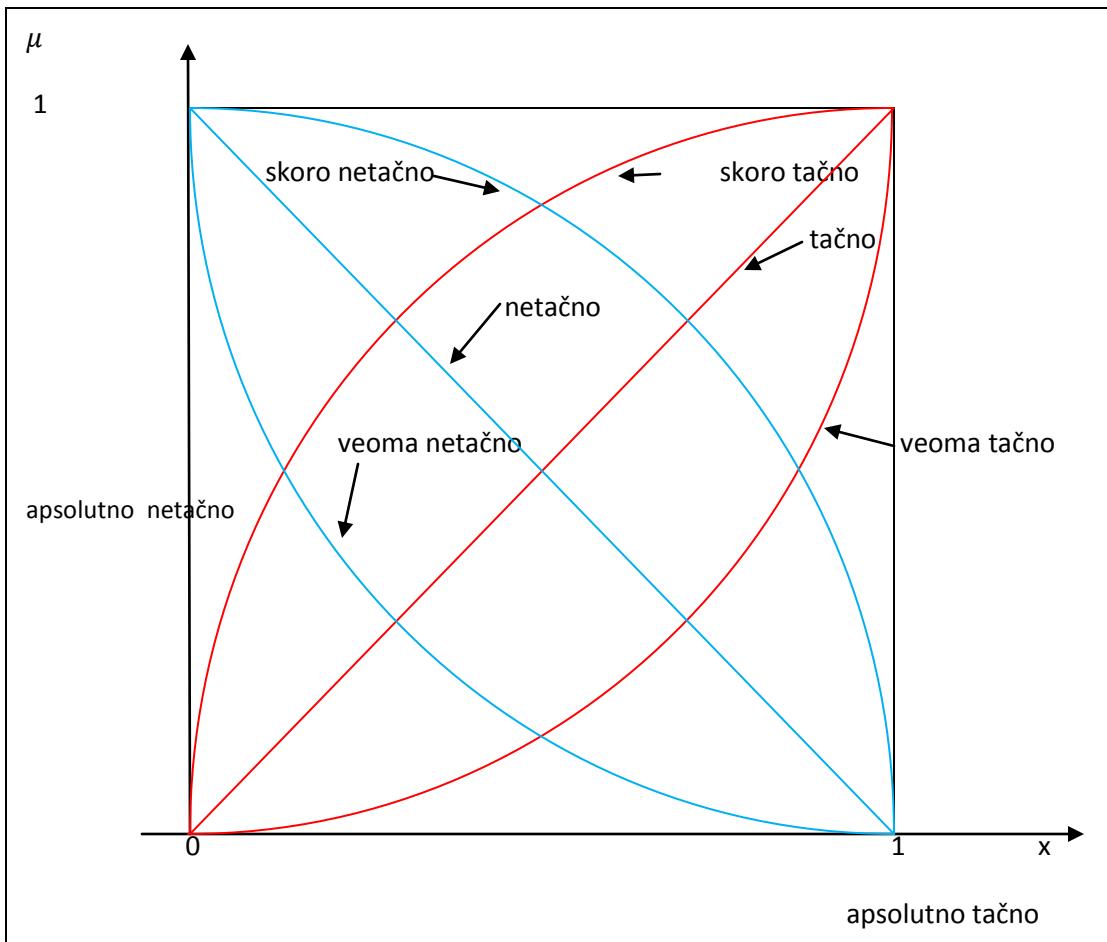
Analogno tome možemo definisati:

$$\mu_{veoma netačno}(x) = (1 - x)^2,$$

$$\mu_{skoro netačno}(x) = (1 - x)^{\frac{1}{2}}.$$

U specijalnom slučaju za $x = 1$ u $\mu_{tačno}(x) = x$ dobijamo singlton sa funkcijom pripadanja $\mu_{apsolutno tačno}(1) = 1$, a prema tome je $\mu_{apsolutno netačno}(0) = 1$.

Na Slici 2.1 su prikazane lingvističke promenljive *tačno* i *netačno*, kao i njihovi modifikatori.



Slika 2.1 ([1]) Lingvističke promenljive *tačno* i *netačno*, kao i njihovi modifikatori

Pored Baldwinove (Baldwin) definicije jezičke promenljive *tačno*, navodimo i Zadehovu definiciju iz 1975.godine:

$$\mu_{tačno}(x) = \begin{cases} 0, & \text{za } 0 \leq x \leq a \\ 2 \cdot \left(\frac{x-a}{1-a}\right)^2, & \text{za } a \leq x \leq \frac{a+1}{2} \\ 1 - \left(\frac{x-1}{1-a}\right)^2, & \text{za } \frac{a+1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

2.3 Osnovne operacije u fazi logici bazirane na t -normama i t -konormama

U ovom delu je pokazano kako se mogu izraziti osnovne operacije fazi logike proširivanjem operatora pomoću t -normi i t -konormi.

Definicija 2.2 [11] Neka je T proizvoljna t -norma i S njena dualna t -konorma, onda važi:

Konjukcija: $x \wedge_T y = T(x, y)$,

Disjunkcija: $x \vee_T y = S(x, y)$.

Kao i u klasičnoj logici, moguće je uvesti implikaciju pomoću negacije, konjukcije i disjunkcije. Ako uzmemo u obzir da u dvo-vrednosnoj logici važi: $(\neg p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$, jedna od mogućnosti za definiciju impikacije u fazi logici je pomoću funkcije $I_T: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ date kao:

$$I_T(x, y) = S(1 - x, y) = 1 - T(x, 1 - y).$$

Za dve osnovne t -norme T_M i T_L imamo:

$$I_{T_M}(x, y) = \begin{cases} y, & \text{za } x + y \geq 1 \\ 1 - x, & \text{za ostale} \end{cases},$$

$$I_{T_L}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{za } x \leq y \\ 1 - x + y, & \text{za ostale} \end{cases}.$$

Druga mogućnost za uopštenje klasične implikacije bazira se na operatoru

$$R_T(x, y) = \sup\{z \in [0,1] \mid T(x, z) \leq y\}.$$

Tako za dve prethodne osnovne t -norme T_M i T_L dobijamo:

$$R_{T_M}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{za } x \leq y \\ y, & \text{za ostale} \end{cases},$$

$$R_{T_L}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{za } x \leq y \\ 1 - x + y, & \text{za ostale} \end{cases}.$$

U opštem slučaju I_T i R_T se razlikuju, ali važi: $I_{T_L} = R_{T_L}$.

3 FLC (Fuzzy logic control) procesi i njihova primena

FLC procesi predstavljaju tehniku primene fazi skupova i fazi logike na kontrolne probleme. Ova tehnika je nastala sedamdesetih godina prošlog veka u cilju rešavanja različitih problema industrijskog inženjeringu, ali vremenom izlazi iz početnih okvira. Danas je njena primena prisutna i u mnogim drugim oblastima, poput teorije odlučivanja sa posebnim akcentom na finansije i menadžment.

FLC procesi se zasnivaju na fazi logici, prvenstveno na if-then pravilu, koja uz pomoć fazi skupova opisuje složene i nedovoljno precizne probleme sistema i upotrebom logičkih operatora dovodi do zaključka.

Cilj ove tehnike je da nas dovede do optimalne akcije. Ukoliko se modelira neki problem iz oblasti finansija, poslovanja ili menadžerstva, pod pojmom „akcija” može se smatrati određeni savet, sugestija, procena, instrukcija i sl.

U narednom delu rada biće prikazan opis FLC procesa sa dve ulazne i jednom izlaznom promenljivom, kao i njegova primena na model tolerancije rizika donosioca odluke. Opis je dat postupno, korak po korak, a korišćena je literatura ([1,2,10]).

3.1 Modeliranje tolerancije rizika donosioca odluke pomoću FLC procesa

Procena tolerancije rizika predstavlja težak, ali značajan zadatak kojim se bave finansijske službe, jer rizik ima važnu ulogu prilikom dizajniranja klijentovog investicionog portfolia. Opisani model u ovom poglavlju se bazira na [1].

Korak 1: Modeliranje promenljivih

Svaki FLC proces ima svoje ulazne (eng. input) i izlazne (eng.output) vrednosti koje su date u vidu lingvističkih promenljivih. Svaka od tih promenljivih je modelirana pomoću skupova \mathcal{A} , \mathcal{B} i \mathcal{C} čiji su elementi fazi brojevi A_i, B_j, C_k definisani na sledeći način:

$$A_i = \{(x_i, \mu_{A_i}(x)) | x \in A_i \subset U_1\}, i = 1, \dots, n$$

$$B_j = \{(y_j, \mu_{B_j}(y)) | y \in B_j \subset U_2\}, j = 1, \dots, m$$

$$C_k = \{(z_k, \mu_{C_k}(z)) | z \in C_k \subset U_3\}, k = 1, \dots, l .$$

Najčešći je slučaj da lingvističke promenljive prime od dve do sedam vrednosti.

Primena prvog koraka: U primeru modeliranja tolerancije rizika donosioca odluke posmatrane su dve ulazne vrednosti: *godišnji prihod* (eng. annual income), u označi AI i *ukupna neto vrednost* (eng. total networth), u označi TNW.

Cilj modela je da za bilo koji par ulaznih vrednosti pronađe odgovarajuću izlaznu vrednost, koja je u ovom slučaju *nivo tolerancije rizika* (eng. risk tolerance), u označi RT.

Pretpostavimo da su jezičke promenljive date na sledeći način:

$$AI = \{A_1, A_2, A_3\} = \{L, M, H\},$$

$$TNW = \{B_1, B_2, B_3\} = \{L, M, H\},$$

$$RT = \{C_1, C_2, C_3\} = \{L, MO, H\},$$

pri čemu vidimo da je $n = m = l = 3$.

Iskazne vrednosti posmatranih lingvističkih promenljivih date su u obliku trougaonih fazi brojeva i fazi intervala i imaju značenje: $L \triangleq \text{mali}$ (eng. low), $M \triangleq \text{srednji}$ (eng. medium), $H \triangleq \text{visok}$ (eng. high) i $MO \triangleq \text{umeren}$ (eng. moderate). Njihovi noseći intervali pripadaju sledećim univerzalnim skupovima:

$$U_1 = \{x \times 10^3 | 0 \leq x \leq 100\},$$

$$U_2 = \{y \times 10^4 | 0 \leq y \leq 100\},$$

$$U_3 = \{z | 0 \leq z \leq 100\}.$$

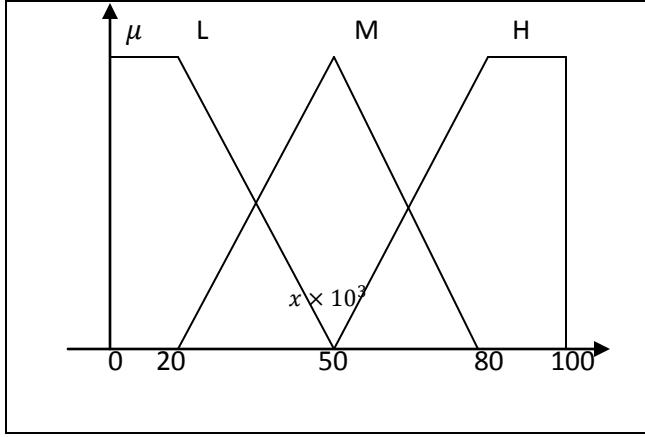
Realni broevi x i y predstavljaju vrednosti u hiljadama i desetinama hiljada dolara, dok z uzima vrednosti između 0 i 100 i predstavlja skalu merenja tolerancije rizika.

Vrednosti AI , TNW i RT kao fazi brojevi imaju svoje funkcije pripadanja opisane na dole navedeni način:

$$\mu_L(v) = \begin{cases} 1, & \text{za } 0 \leq v \leq 20 \\ \frac{50-v}{30}, & \text{za } 20 \leq v \leq 50 \end{cases},$$

$$\mu_M(v) = \begin{cases} \frac{v-20}{30}, & \text{za } 20 \leq v \leq 50 \\ \frac{80-v}{30}, & \text{za } 50 \leq v \leq 80 \end{cases},$$

$$\mu_H(v) = \begin{cases} \frac{v-50}{30}, & \text{za } 50 \leq v \leq 80 \\ 1, & \text{za } 80 \leq v \leq 100 \end{cases}.$$



Slika 3.1 Grafički prikaz ulazne vrednosti AI

Korak 2: If..and...then pravila

Kada smo uveli ulazne vrednosti, u sledećem koraku primenjujemo if-then pravila na lingvističke promenljive. Uкупно treba primeniti nm pravila, što predstavlja proizvod brojeva koji označavaju koliko vrednosti ulazi \mathcal{A} i \mathcal{B} mogu da prime. Posmatrana if-then pravila definisana su tako da dobijemo l različitih izlaznih vrednosti, pri čemu je $l < nm$.

U ovom delu rada korišćena je Mamdanijeva definicija implikacije (1975.) koja se bazira na operatoru minimuma ([2]). Ako uvedemo oznake: $p_i \triangleq x_i \text{ je } A_i$, $q_j \triangleq y_j \text{ je } B_j$ i $r_k \triangleq z_k \text{ je } C_k$, onda primena Mamdanijevog pravila zaključivanja na if-then pravila izgleda:

$$p_i \wedge q_j \wedge r_k = \min(\mu_{A_i}(x), \mu_{B_j}(y), \mu_{C_k}(z)),$$

pri čemu je $r_k = r_{ij}$; $i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m; k = 1, \dots, l$ i $(x, y, z) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B} \times \mathcal{C} \subseteq U_1 \times U_2 \times U_3$.

Pravila sa mogućim fazi izlaznim vrednostima prikazana su u narednoj tabeli.

	B_1	...	B_j	B_{j+1}	...	B_m
A_1	C_{11}	...	C_{1j}	C_{1j+1}	...	C_{1m}
:	:		:	:		:
A_i	C_{i1}	...	C_{ij}	$C_{i,j+1}$...	C_{im}
A_{i+1}	$C_{i+1,1}$...	$C_{i+1,j}$	$C_{i+1,j+1}$...	$C_{i+1,m}$
:	:		:	:		:
A_n	C_{n1}	...	C_{nj}	$C_{n,j+1}$...	C_{nm}

Tabela 3.1 Tabela odlučivanja pomoći if-then pravila

Primena drugog koraka: U primeru je dato $n = m = l = 3$ iskaznih vrednosti jezičkih promenljivih, te ćemo stoga imati 9 if-then pravila i 3 različite izlazne vrednosti. Primenom tih pravila na model tolerancije rizika dobijamo sledeću Tabelu odlučivanja:

	L	M	H
L	L	L	MO
M	L	MO	H
H	MO	H	H

Tabela 3.2 Tabela odlučivanja za model tolerancije rizika donosioca odluke

Pravila primenjena u Tabeli 3.2 čitamo na sledeći način:

Pravilo 1: Ako je klijentov godišnji prihod (AI) mali (L) i klijent ostvaruje malu (L) ukupnu neto vrednost (TNW), onda je njegov nivo tolerancije rizika (RT) mali (L).

Pravilo 2: Ako je klijentov AI mali i klijent ostvaruje srednju TNW, onda je njegov RT mali.

Pravilo 3: Ako je klijentov AI mali i klijent ostvaruje visoku TNW, onda je njegov RT umeren.

Pravilo 4: Ako je klijentov AI srednje visine i klijent ostvaruje malu TNW, onda je njegov RT mali.

Pravilo 5: Ako je klijentov AI srednje visine i klijent ostvaruje srednju TNW, onda je njegov RT umeren.

Pravilo 6: Ako je klijentov AI srednje visine i klijent ostvaruje visoku TNW, onda je njegov RT visok.

Pravilo 7: Ako je klijentov AI visok i klijent ostvaruje malu TNW, onda je njegov RT umeren.

Pravilo 8: Ako je klijentov AI visok i klijent ostvaruje srednju TNW, onda je njegov RT visok.

Pravilo 9: Ako je klijentov AI visok i klijent ostvaruje visoku TNW, onda je njegov RT visok.

Koristeći Mamdanijevu definiciju if-then pravila i tumačeći veznik \wedge trougaonom T_M normom, dobijamo:

Pravilo 1: $p_1 \wedge q_1 \wedge r_{11} = \min(\mu_L(x), \mu_L(y), \mu_L(z)),$

Pravilo 2: $p_1 \wedge q_2 \wedge r_{12} = \min(\mu_L(x), \mu_M(y), \mu_L(z)),$

Pravilo 3: $p_1 \wedge q_3 \wedge r_{13} = \min(\mu_L(x), \mu_H(y), \mu_{MO}(z)),$

Pravilo 4: $p_2 \wedge q_1 \wedge r_{21} = \min(\mu_M(x), \mu_L(y), \mu_L(z)),$

Pravilo 5: $p_2 \wedge q_2 \wedge r_{22} = \min(\mu_M(x), \mu_M(y), \mu_{MO}(z)),$

Pravilo 6: $p_2 \wedge q_3 \wedge r_{23} = \min(\mu_M(x), \mu_H(y), \mu_H(z))$,

Pravilo 7: $p_3 \wedge q_1 \wedge r_{31} = \min(\mu_H(x), \mu_L(y), \mu_{MO}(z))$,

Pravilo 8: $p_3 \wedge q_2 \wedge r_{32} = \min(\mu_H(x), \mu_M(y), \mu_H(z))$,

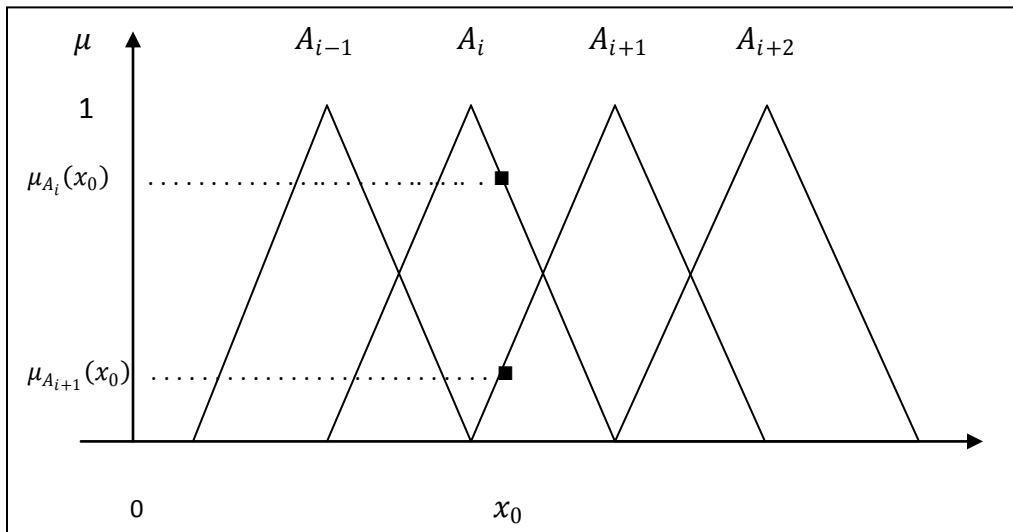
Pravilo 9: $p_3 \wedge q_3 \wedge r_{33} = \min(\mu_H(x), \mu_H(y), \mu_H(z))$.

Navedena pravila su proistakla iz svakodnevnog života. Prirodno je da osoba koja ostvaruje mali godišnji prihod i malu ukupnu neto vrednost preuzme i nizak nivo tolerancije na rizik, dok osoba koja ostvaruje visok godišnji prihod i veliku ukupnu neto vrednost može sebi da priušti i prihvatanje visokog nivoa tolerancije na rizik. Međutim, iz različitih razloga može se desiti da klijent ne želi da prihvati visok nivo rizika ili nasuprot tome, možda je spreman da prihvati visok nivo rizika, uprkos malom godišnjem prihodu i neto vrednosti koju ima. U tom slučaju, finansijski stručnjaci bi trebalo da redizajniraju pravila.

Korak 3: Procena pravila

Neka su nam date konkretnе vrednosti za ulazne promenljive FLC procesa $x = x_0$ i $y = y_0$. Naš zadatak je da nađemo odgovarajuću vrednost za izlaznu promenljivu z . Realni brojevi x_0 i y_0 su početne vrednosti koje možemo dobiti merenjem, posmatranjem, procenama i sl. Za početak, moramo te ulazne vrednosti da transformišemo u odgovarajuće vrednosti lingvističkih promenljivih. Taj postupak se naziva *kodiranje ulaznih vrednosti* i ilustrovan je na Slici 3.2.

Prava $x = x_0 \in U_1$ preseca faze brojeve A_i i A_{i+1} i na taj način dobijamo singltone $\mu_{A_i}(x_0)$ i $\mu_{A_{i+1}}(x_0)$ koje zovemo fazi izmerene ulazne vrednosti. Presek ostalih faza brojeva i prave $x = x_0$ je \emptyset sa funkcijom pripadanja koja je jednaka nuli.



Slika 3.2 Fazi izmerene ulazne vrednosti za $x_0 \in U_1$

Analogno se mogu pronaći fazi izmerene ulazne vrednosti za $y_0 \in U_2$, odnosno singloni $\mu_{B_j}(y_0)$ i $\mu_{B_{j+1}}(y_0)$.

Nakon što smo dobili fazi izmerene ulazne vrednosti za $x = x_0$ i $y = y_0$, potrebno je redukovati tabelu odlučivanja i na taj način dobijamo novu tabelu koju zovemo *Uzrokovana tabela odlučivanja*.

	0	...	$\mu_{B_j}(y_0)$	$\mu_{B_{j+1}}(y_0)$...	0
0	0	...	0	0	...	0
:	:		:	:		:
$\mu_{A_i}(x_0)$	0	...	$\mu_{C_{ij}}(z)$	$\mu_{C_{ij+1}}(z)$...	0
$\mu_{A_{i+1}}(x_0)$	0	...	$\mu_{C_{i+1,j}}(z)$	$\mu_{C_{i+1,j+1}}(z)$...	0
:	:		:	:		:
0	0	...	0	0	...	0

Tabela 3.3 Uzrokovana tabela odlučivanja i aktivne ćelije

Svega četiri ćelije sadrže ne-nula vrednosti i njih nazivamo aktivnim.

U skladu sa pravilom $p_i \wedge q_j = \min(\mu_{A_i}(x), \mu_{B_j}(y))$, $(x, y) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B} \subseteq U_1 \times U_2$, ako je bar jedna vrednost funkcije pripadanja jednaka nuli, operator minimum kao rezultat daje nulu.

Korak 4: Agregacija

Postupak primene kontrolnih pravila, koji je primenjivan u ovom delu rada, je u literaturi poznat pod engleskim nazivom *firing* i ilustrovan je pomoću sledeća četiri pravila:

Pravilo 1: Ako je $x A_i^{(0)}$ i $y B_j^{(0)}$, onda je $z C_{ij}$,

Pravilo 2: Ako je $x A_i^{(0)}$ i $y B_{j+1}^{(0)}$, onda je $z C_{ij+1}$,

Pravilo 3: Ako je $x A_{i+1}^{(0)}$ i $y B_j^{(0)}$, onda je $z C_{i+1,j}$,

Pravilo 4: Ako je $x A_{i+1}^{(0)}$ i $y B_{j+1}^{(0)}$, onda je $z C_{i+1,j+1}$.

Veznik "i" u ovim pravilima je tzv. preduslov i označava jačinu pravila. Za svako od navedenih pravila, njegovu jačinu definišemo na sledeći način:

$$\alpha_{ij} = \mu_{A_i}(x_o) \wedge \mu_{B_j}(y_0) = \min(\mu_{A_i}(x_o), \mu_{B_j}(y_0)),$$

$$\alpha_{ij+1} = \mu_{A_i}(x_o) \wedge \mu_{B_{j+1}}(y_0) = \min(\mu_{A_i}(x_o), \mu_{B_{j+1}}(y_0)),$$

$$\alpha_{i+1j} = \mu_{A_{i+1}}(x_o) \wedge \mu_{B_j}(y_0) = \min\left(\mu_{A_{i+1}}(x_o), \mu_{B_j}(y_0)\right),$$

$$\alpha_{i+1j+1} = \mu_{A_{i+1}}(x_o) \wedge \mu_{B_{j+1}}(y_0) = \min\left(\mu_{A_{i+1}}(x_o), \mu_{B_{j+1}}(y_0)\right).$$

Uvođenjem dobijenih realnih vrednosti α_{ij} , α_{ij+1} , α_{i+1j} i α_{i+1j+1} u Tabelu 3.3 dobijamo Tabelu jačine pravila koja je prikazana ispod.

	0	...	$\mu_{B_j}(y_0)$	$\mu_{B_{j+1}}(y_0)$...	0
0	0	...	0	0	...	0
:	:		:	:		:
$\mu_{A_i}(x_0)$	0	...	α_{ij}	α_{ij+1}	...	0
$\mu_{A_{i+1}}(x_0)$	0	...	α_{i+1j}	α_{i+1j+1}	...	0
:	:		:	:		:
0	0	...	0	0	...	0

Tabela 3.4 Tabela jačine pravila

Tabela 3.3 i Tabela 3.4 su veoma slične, ali je njihova razlika u tome što aktivne ćelije u Tabeli 3.4 sadrže realne brojeve koji prikazuju jačinu pravila, dok aktivne ćelije u Tabeli 3.3 sadrže fazi skupove kao vrednosti izlaznih promenljivih. Da bismo dobili *kontrolne izlazne promenljive*, potrebno je iskoristiti ćelije iz obe tabele.

Za svako pravilo imaćemo po jednu kontrolnu izlaznu promenljivu (eng. control output; skraćeno CO), koju dobijamo na osnovu tzv. kontrolnih pravila koja se baziraju na konjukciji.

CO prvog pravila: $\alpha_{ij} \wedge \mu_{C_{ij}}(z) = \min(\alpha_{ij}, \mu_{C_{ij}}(z))$,

CO drugog pravila: $\alpha_{ij+1} \wedge \mu_{C_{ij+1}}(z) = \min(\alpha_{ij+1}, \mu_{C_{ij+1}}(z))$,

CO trećeg pravila: $\alpha_{i+1j} \wedge \mu_{C_{i+1j}}(z) = \min(\alpha_{i+1j}, \mu_{C_{i+1j}}(z))$,

CO četvrтog pravila: $\alpha_{i+1j+1} \wedge \mu_{C_{i+1j+1}}(z) = \min(\alpha_{i+1j+1}, \mu_{C_{i+1j+1}}(z))$.

Dobijene kontrolne izlazne promenljive možemo prikazati u tabeli, pri čemu neaktivne ćelije imaju vrednost 0 i ne prikazuju se.

...
...	$\alpha_{ij} \wedge \mu_{C_{ij}}(z)$	$\alpha_{ij+1} \wedge \mu_{C_{ij+1}}(z)$...
...	$\alpha_{i+1j} \wedge \mu_{C_{i+1j}}(z)$	$\alpha_{i+1j+1} \wedge \mu_{C_{i+1j+1}}(z)$...
...

Tabela 3.5 Tabela kontrolnih izlaznih promenljivih

Cilj nam je da dobijemo jednu kontrolnu izlaznu promenljivu, te stoga na dobijene kontrolne izlazne promenljive, prikazane u Tabeli 3.5, moramo primeniti postupak agregacije. Agregacija je tehniku koja se koristi prilikom donošenja odluke koja kontrolna akcija treba da se primeni na rezultate dobijene upotrebom firinga. U ovom delu rada korišćena je agregacija bazirana na operatoru maksimuma (\vee). Na taj način se dobija jedna kontrolna izlazna promenljiva sa funkcijom pripadanja:

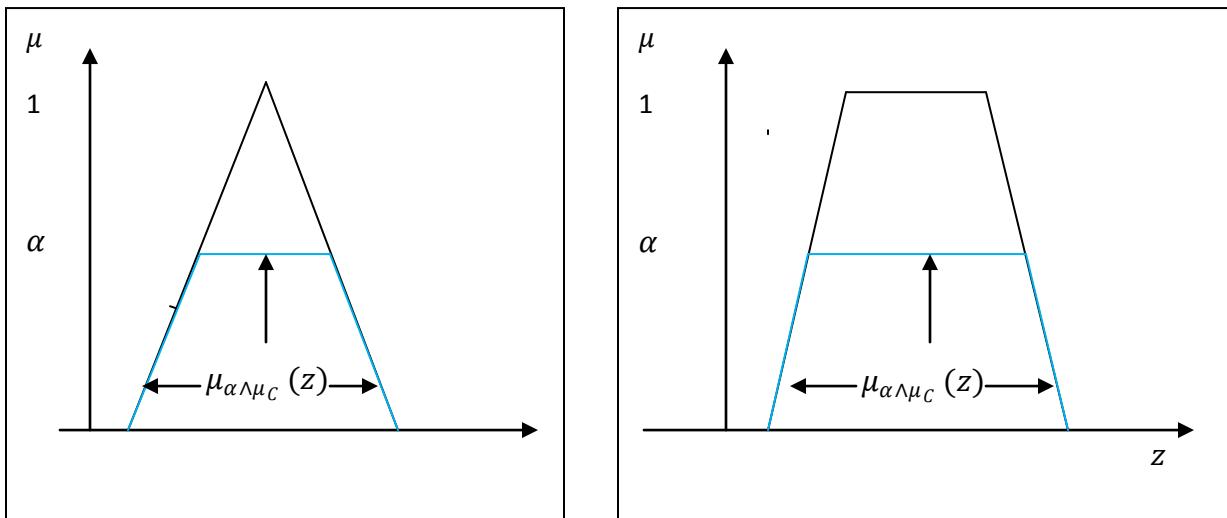
$$\begin{aligned}\mu_{agg}(z) &= (\alpha_{ij} \wedge \mu_{C_{ij}}(z)) \vee (\alpha_{ij+1} \wedge \mu_{C_{ij+1}}(z)) \vee (\alpha_{i+1j} \wedge \mu_{C_{i+1j}}(z)) \\ &\quad \vee (\alpha_{i+1j+1} \wedge \mu_{C_{i+1j+1}}(z)) \\ &= \max \{(\alpha_{ij} \wedge \mu_{C_{ij}}(z)), (\alpha_{ij+1} \wedge \mu_{C_{ij+1}}(z)), (\alpha_{i+1j} \wedge \mu_{C_{i+1j}}(z)), (\alpha_{i+1j+1} \wedge \mu_{C_{i+1j+1}}(z))\}\end{aligned}$$

Važno je uočiti da je operator minimuma, iskazan kroz veznik \wedge , u tom slučaju primenjen na broj i funkciju pripadanja fazi broja. Pošto se s time do sada nismo susretali, uvodimo definiciju.

Definicija 3.1 [1] Neka je α realan broj i C fazi broj sa funkcijom pripadanja $\mu_C(z)$, onda važi: $\mu_{\alpha \wedge \mu_C}(z) = \alpha \wedge \mu_C(z) = \min(\mu_\alpha(z), \mu_C(z))$.

Fazi vrednost čija je funkcija pripadanja $\mu_{\alpha \wedge \mu_C}(z)$ zovemo *odsečeni fazi broj* (eng. clipped fuzzy number), iako odstupa od definicije fazi broja.

Za najčešće korišćene faze brojeve, trougaone i trapezoidne, prikaz definicije dat je na narednoj slici.



Slika 3.3 Odsečeni trougaoni i trapezoidni fazi brojevi

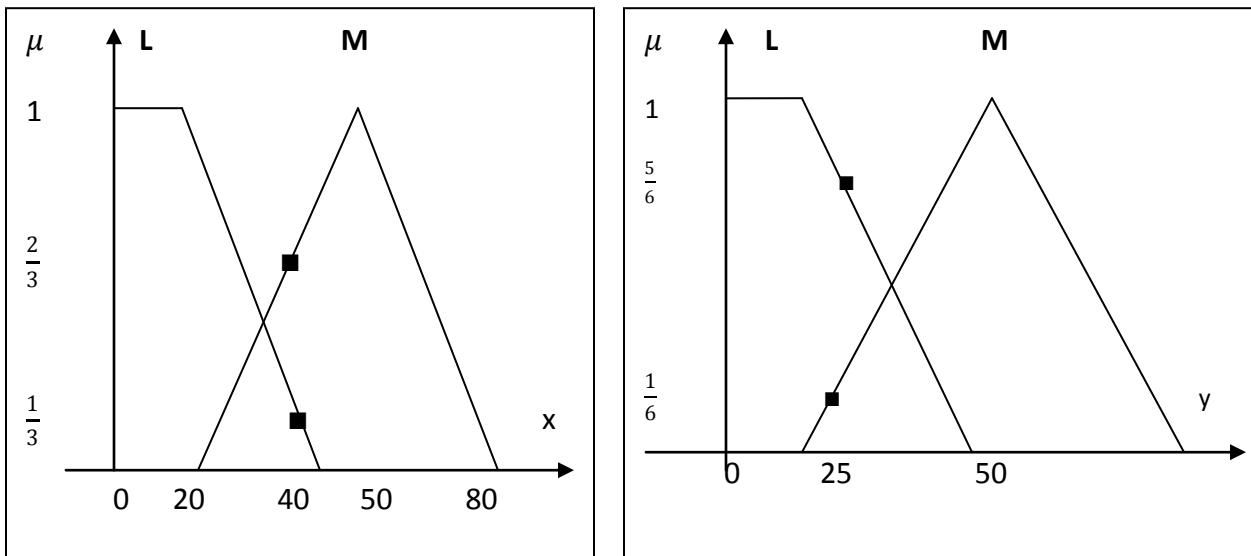
U nastojanju da dobijemo jedinstvenu izlaznu promenljivu, u vidu akcije, odluke ili saveta, potrebno je izvršiti *defazifikaciju* tj. dekodirati funkciju $\mu_{agg}(z)$. Taj postupak je opisan u narednom koraku.

Primena trećeg i četvrtog koraka: Prepostavimo da klijent raspolaze sledećim ulaznim vrednostima: godišnji prihod (AI u hiljadama \$) $x_0 = 40$ i ukupna neto vrednost (TNW u desetinama hiljada \$) $y_0 = 25$.

Fazi oblik ulaznih vrednosti dobijamo zamenom x i y sa v u odgovarajućim funkcijama pripadanja, pa imamo:

$$\mu_L(40) = \frac{1}{3}, \quad \mu_M(40) = \frac{2}{3},$$

$$\mu_L(25) = \frac{5}{6}, \quad \mu_M(25) = \frac{1}{6}.$$



Slika 3.4 Fazi ulazne vrednosti za model tolerancije rizika kada su ulazi $x_0 = 40$, $y_0 = 25$.

Nakon toga, formiramo Uzrokovanoj tabelu odlučivanja za model tolerancije rizika donosioca odluke. Prikaz tabele je dat ispod, pri čemu vidimo da raspolazemo sa četiri aktivne celije.

	$\mu_L(25) = \frac{5}{6}$	$\mu_M(25) = \frac{1}{6}$	0
$\mu_L(40) = \frac{1}{3}$	$\mu_L(z)$	$\mu_L(z)$	0
$\mu_M(40) = \frac{2}{3}$	$\mu_L(z)$	$\mu_{MO}(z)$	0
0	0	0	0

Tabela 3.6 Uzrokovana tabela odlučivanja

Kada smo to uradili, računamo jačinu primenjenih pravila.

$$\alpha_{11} = \mu_L(40) \wedge \mu_L(25) = \min\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{6}\right) = \frac{1}{3},$$

$$\alpha_{12} = \mu_L(40) \wedge \mu_M(25) = \min\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6},$$

$$\alpha_{21} = \mu_M(40) \wedge \mu_L(25) = \min\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right) = \frac{2}{3},$$

$$\alpha_{22} = \mu_M(40) \wedge \mu_M(25) = \min\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}.$$

Dobijeni rezultati prikazani su u narednoj tabeli.

	$\mu_L(25) = \frac{5}{6}$	$\mu_M(25) = \frac{1}{6}$	0
$\mu_L(40) = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0
$\mu_M(40) = \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0
0	0	0	0

Tabela 3.7 Tabela jačine pravila

Zatim, pomoću aktivnih celija u obe tabele (Tabela 3.6 i Tabela 3.7), dobijamo kontrolne izlazne promenljive (eng. CO) za svako pojedinačno pravilo:

CO prvog pravila: $\alpha_{11} \wedge \mu_L(z) = \min\left(\frac{1}{3}, \mu_L(z)\right),$

CO drugog pravila: $\alpha_{12} \wedge \mu_L(z) = \min\left(\frac{1}{6}, \mu_L(z)\right),$

CO trećeg pravila: $\alpha_{21} \wedge \mu_L(z) = \min\left(\frac{2}{3}, \mu_L(z)\right),$

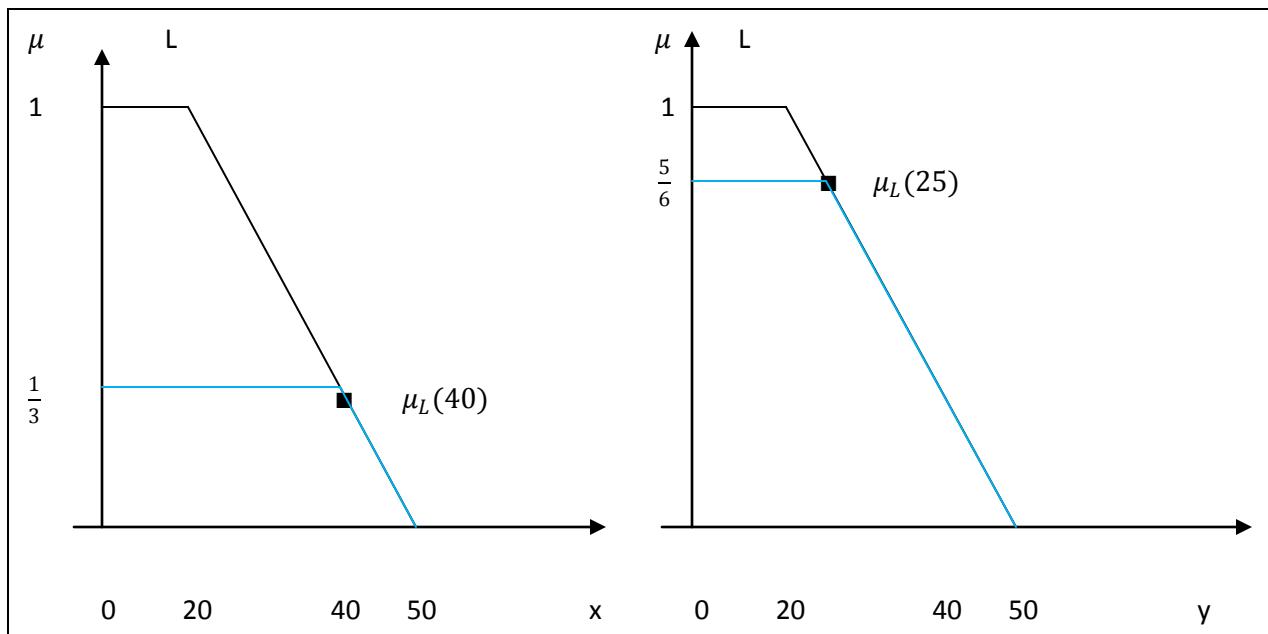
CO četvrtog pravila: $\alpha_{22} \wedge \mu_{MO}(z) = \min\left(\frac{1}{6}, \mu_{MO}(z)\right).$

Dobijene vrednosti možemo tabelarno prikazati, pri čemu zanemarujuemo neaktivne celije.

...
...	$\frac{1}{3} \wedge \mu_L(z)$	$\frac{1}{6} \wedge \mu_L(z)$...
...	$\frac{2}{3} \wedge \mu_L(z)$	$\frac{1}{6} \wedge \mu_{MO}(z)$...
...

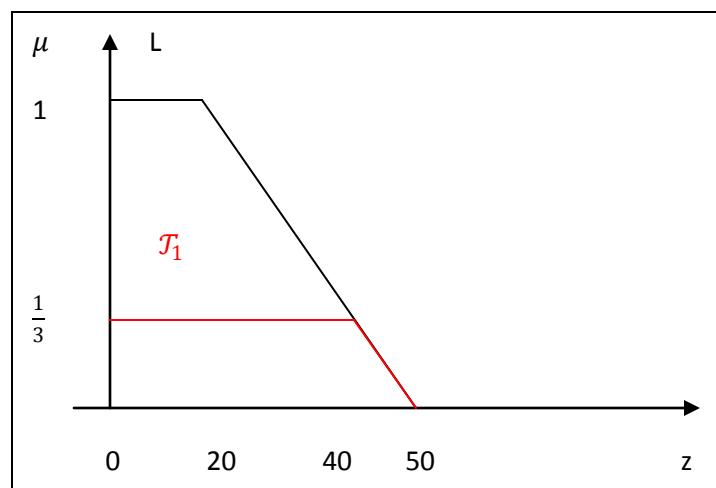
Tabela 3.8 Tabela kontrolnih izlaznih promenljivih posmatranog modela

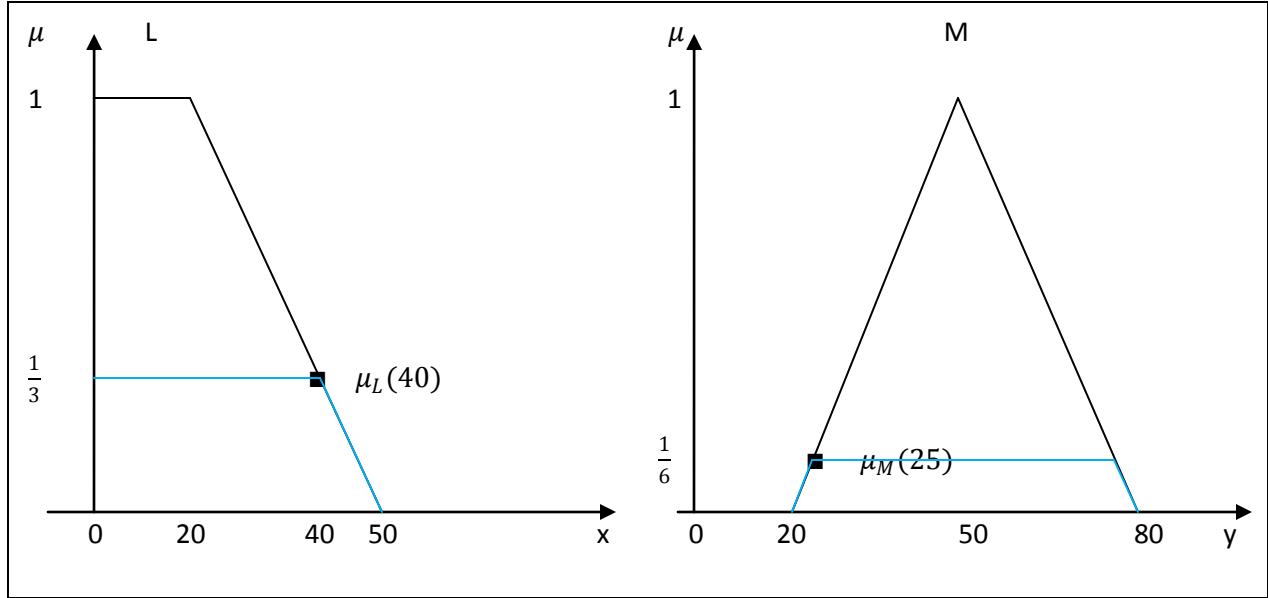
Aktivne celije iz Tabele 3.8 je potrebno grafički prikazati kako bismo lakše primenili postupak agregacije.



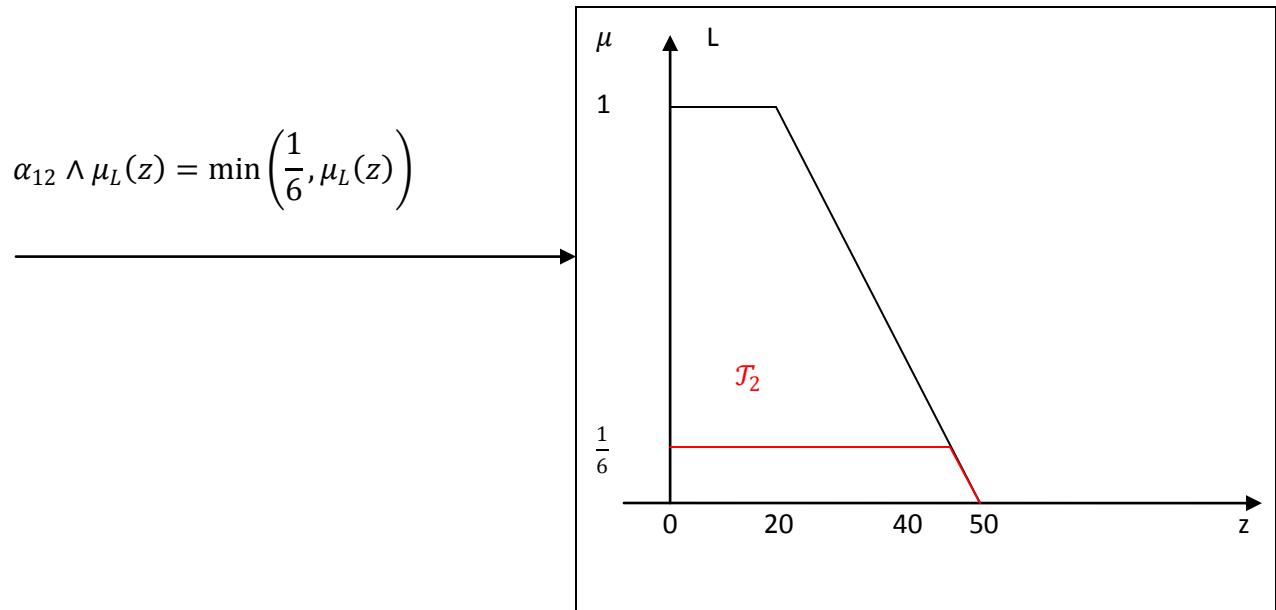
$$\alpha_{11} = \mu_L(40) \wedge \mu_L(25) = \min\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{6}\right) = \frac{1}{3}$$

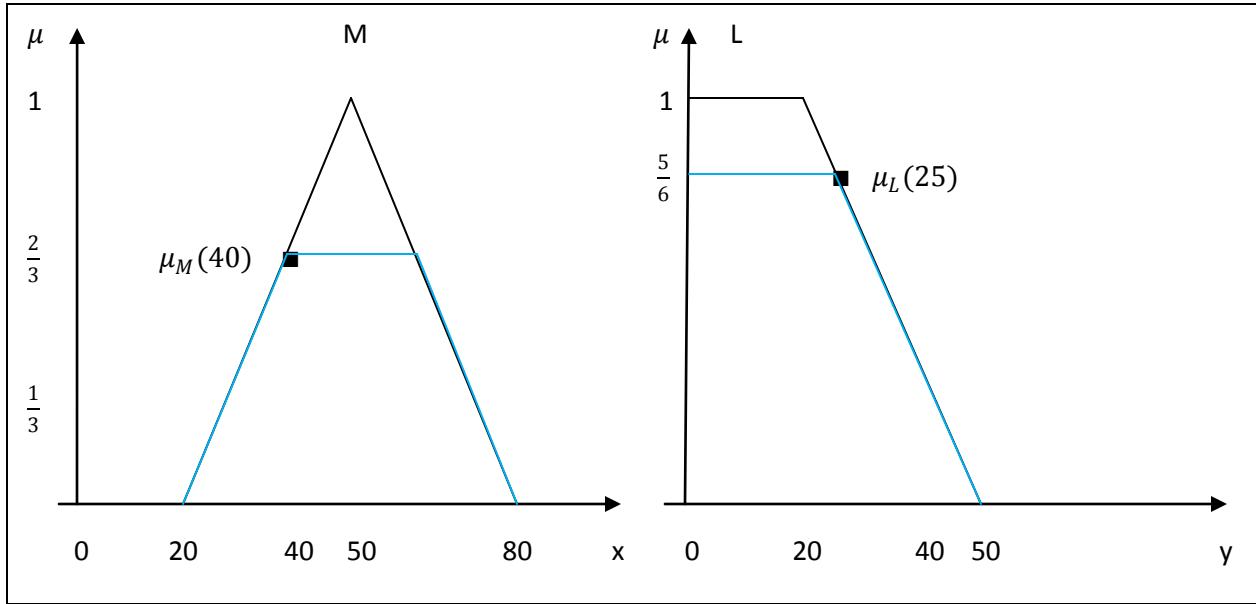
$$\alpha_{11} \wedge \mu_L(z) = \min\left(\frac{1}{3}, \mu_L(z)\right)$$



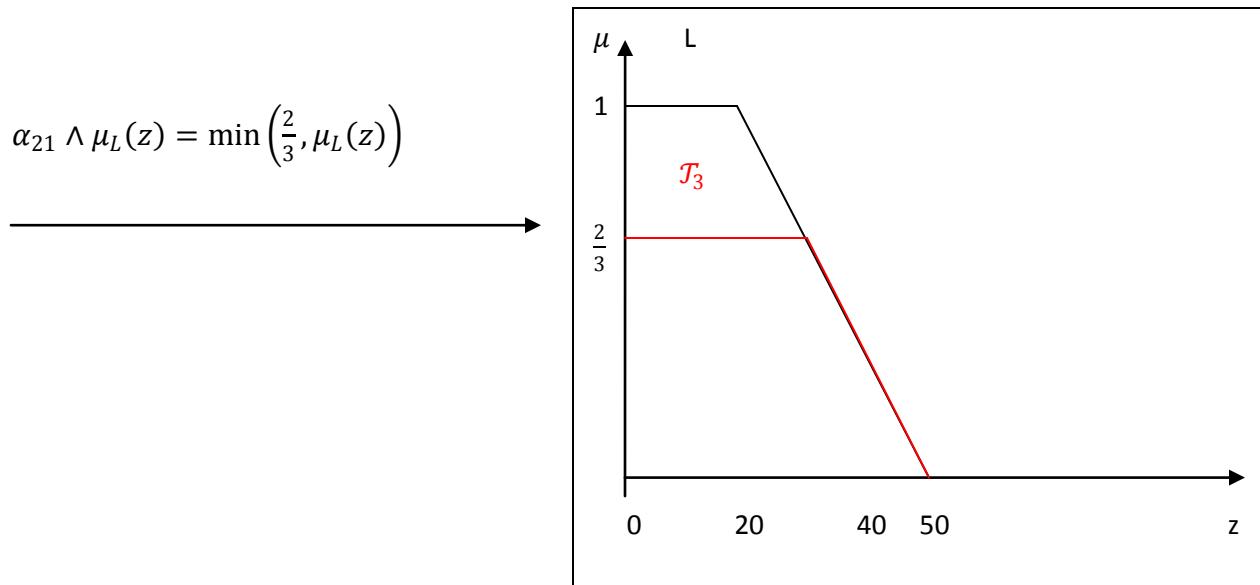


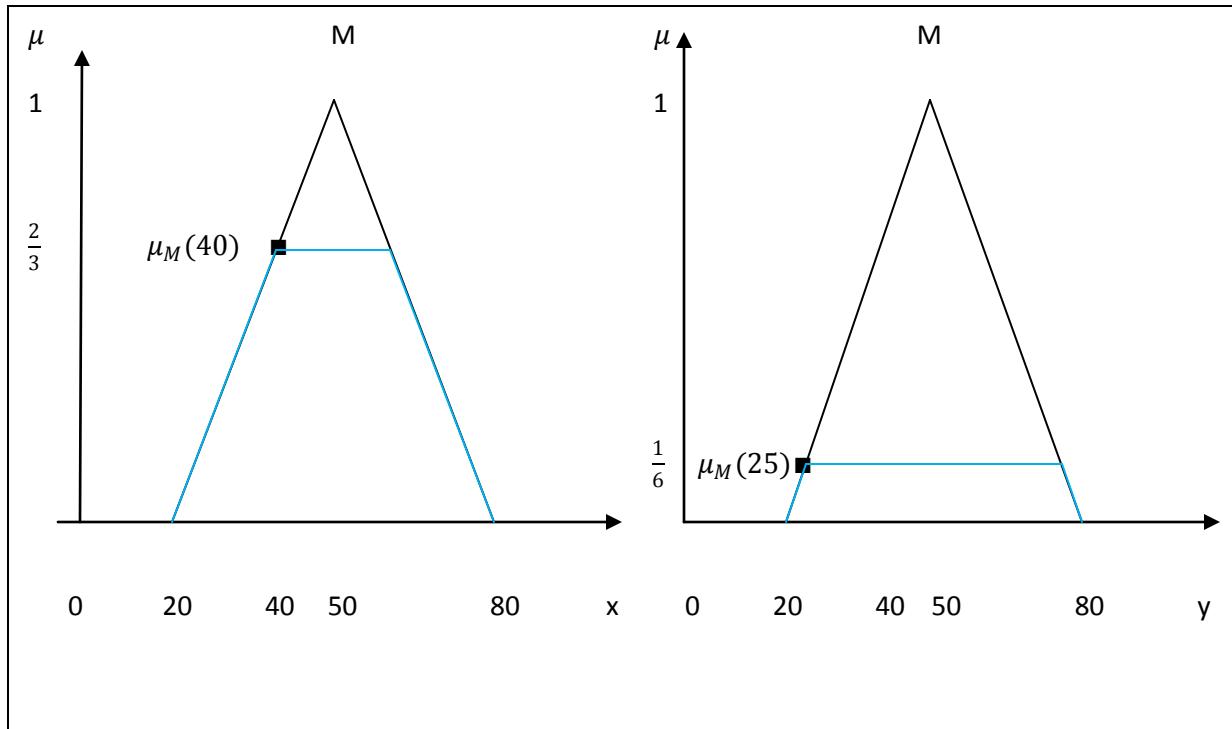
$$\alpha_{12} = \mu_L(40) \wedge \mu_M(25) = \min\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}$$



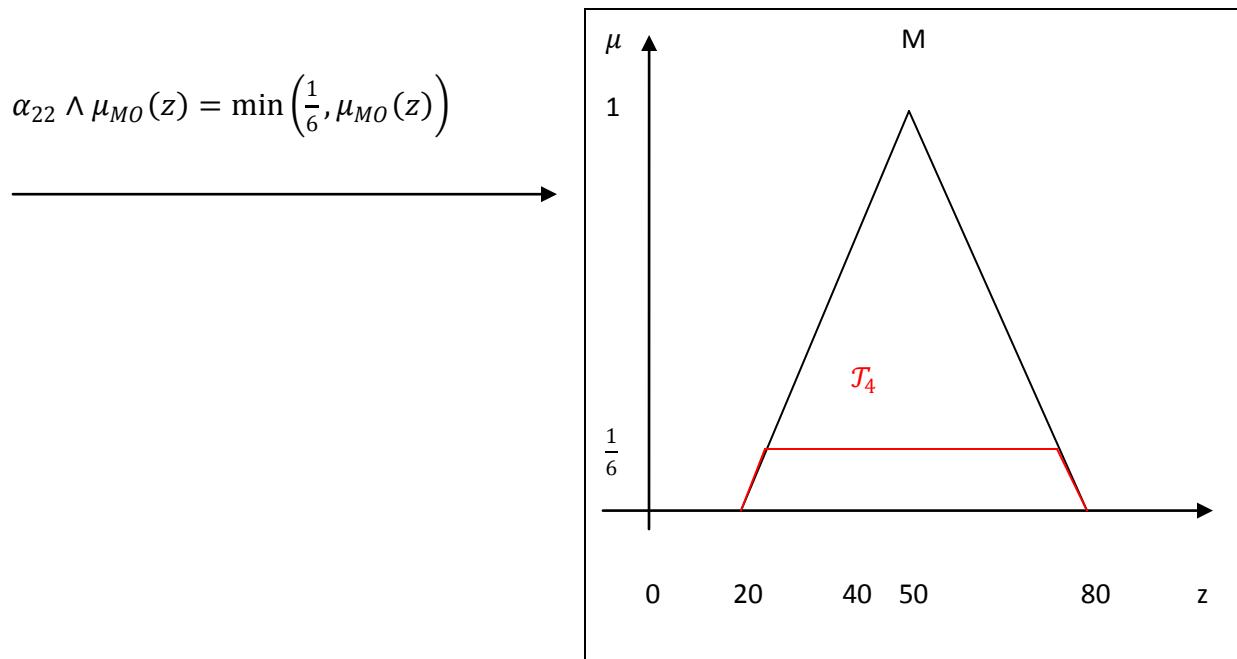


$$\alpha_{21} = \mu_M(40) \wedge \mu_L(25) = \min\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right) = \frac{2}{3}$$





$$\alpha_{22} = \mu_M(40) \wedge \mu_M(25) = \min\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}$$



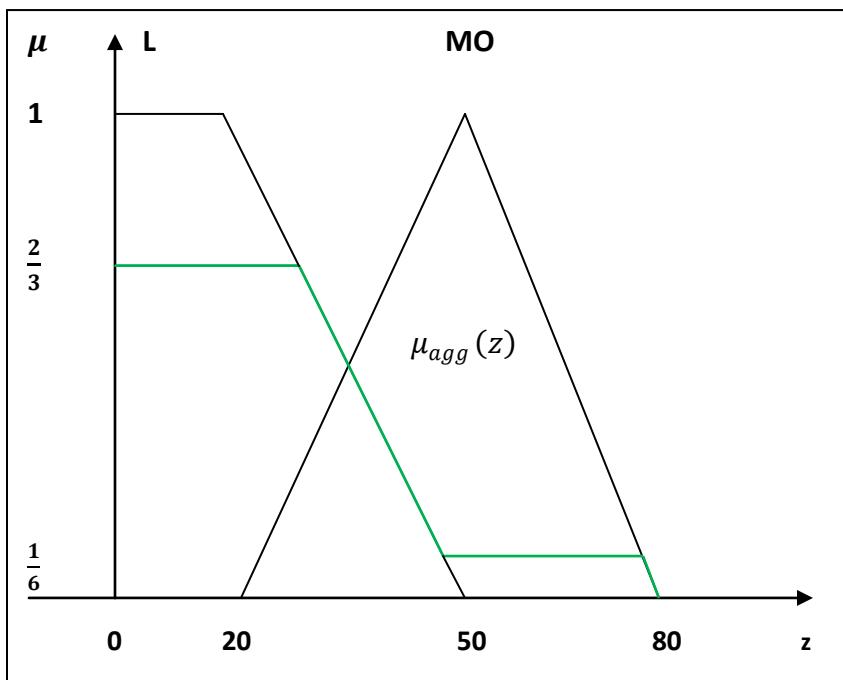
Slika 3.5 Primena *firing* tehnike i dobijanje CO svakog pojedinačnog pravila

Kao rezultat smo dobili trapezoidne fazi brojeve: $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3$ i \mathcal{T}_4 .

Primenu postupka agregacije na dobijene kontrolne izlazne promenljive vršimo pomoću funkcije pripadanja μ_{agg} . U geometrijskom smislu to znači da treba da nađemo supremume dobijenih trapezoida u koordinatnom sistemu (z, μ) . Međutim, sa Slike 3.5 vidimo da je izlazna vrednost dobijena prvim i drugim pravilom sadržana u izlaznoj vrednosti iz trećeg pravila. Iz tih razloga je postupak agregacije primenjen samo na treće i četvrto pravilo i dobijena je sledeća vrednost:

$$\mu_{agg}(z) = \max\{\min\left(\frac{2}{3}, \mu_L(z)\right), \min\left(\frac{1}{6}, \mu_{MO}(z)\right)\}$$

i njen prikaz je dat na sledećoj slici.



Slika 3.6 Izlazna vrednost za model tolerancije rizika donosioca odluke nakon primene postupka agregacije

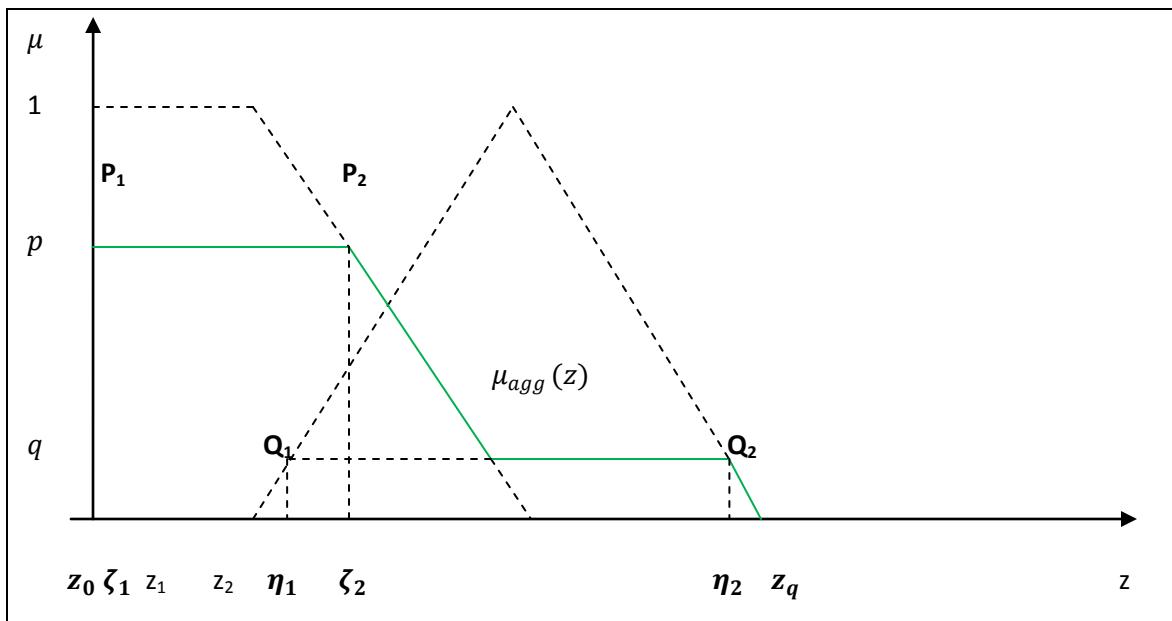
Korak 5: Defazifikacija

Pokazano je da se kao ishod agregacije dobija fazi izlazna promenljiva koju je neophodno dekodirati tj. prevesti u realnu vrednost. Taj postupak se naziva *defazifikacija*.

Do sada je poznato više različitih metoda defazifikacije od kojih su dalje u radu prikazana tri najčešće korišćena (videti [1]).

1. CAM metod (eng. Center of area method)

Prepostavimo da se kao rezultat agregacije dobija funkcija pripadnosti $\mu_{agg}(z)$, $z \in [z_0, z_q]$. Ilustracija CAM metoda data je na sledećoj slici.



Slika 3.7 Postupak defazifikacije pomoću CAM modela

Interval $[z_0, z_q]$ podeljen je na q jednakih podintervala pomoću tačaka z_1, \dots, z_{q-1} . Tražena vrednost je tačka \hat{z}_C i ona prema ovoj metodi predstavlja težinski prosek brojeva z_k i $\mu_{agg}(z_k)$:

$$\hat{z}_C = \frac{\sum_{k=1}^{q-1} z_k \mu_{agg}(z_k)}{\sum_{k=1}^{q-1} \mu_{agg}(z_k)}.$$

Ovaj metod defazifikacije je najčešće korišćen, ali je njegov nedostatak u tome što su zahtevana izračunavanja ponekad veoma složena.

2. MMM metod (eng. Mean of maximum method)

Neka je data ista funkcija pripadanja $\mu_{agg}(z)$, $z \in [z_0, z_q]$, kao na prethodnoj slici. Funkcija ima dva ravna segmenta. Projekcija na z -osu najvišeg ravnog segmenta P_1P_2 je interval $[\zeta_1, \zeta_2]$. Tražena vrednost je tačka \hat{z}_m koja predstavlja središnju vrednost intervala $[\zeta_1, \zeta_2]$:

$$\hat{z}_m = \frac{\zeta_1 + \zeta_2}{2}.$$

Ovaj metod je veoma jednostavan, ali često nedovoljno precisan.

3. HDM metod (eng. Height defuzzification method)

HDM metod predstavlja uopštenje MMM metoda i koristi sve ravne segmente koje funkcija $\mu_{agg}(z)$ poseduje. U ovom slučaju, kao što se može videti na Slici 3.7, pored segmenta P_1P_2 visine p , imamo i drugi segment Q_1Q_2 , sa nižom visinom q . Projekcija drugog segmenta na z -osu je interval $[\eta_1, \eta_2]$, čija se srednja vrednost računa: $\frac{\eta_1 + \eta_2}{2}$.

Tražena vrednost je tačka \hat{z}_h koju dobijamo pomoću sledeće formule:

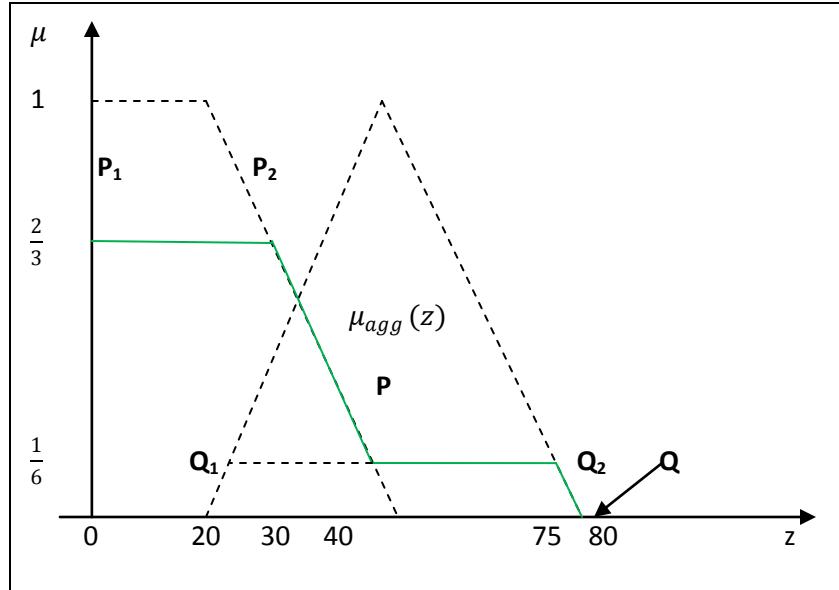
$$\hat{z}_h = \frac{p \cdot \left(\frac{\zeta_1 + \zeta_2}{2}\right) + q \cdot \left(\frac{\eta_1 + \eta_2}{2}\right)}{p + q} = w_1 \left(\frac{\zeta_1 + \zeta_2}{2}\right) + w_2 \left(\frac{\eta_1 + \eta_2}{2}\right)$$

i ona predstavlja težinski prosek sredina intervala $[\zeta_1, \zeta_2]$ i $[\eta_1, \eta_2]$ i težinskih koeficijenata w_1 i w_2 .

Ukoliko funkcija pripadanja ima još ravnih segmenata, formula se može proširiti u skladu sa gore navedenim pravilom.

Primena petog pravila: U narednom delu je izvršena defazifikacija izlazne vrednosti za model tolerancije na rizik pomoću tri najčešće korišćena načina.

Za početak je potrebno analitički izraziti izlaznu vrednost čija je funkcija pripadanja $\mu_{agg}(z)$ prikazana na sledećoj slici:



Slika 3.8 Izlazna vrednost dobijena postupkom agregacije

Funkcija $\mu_{agg}(z)$ se sastoji iz četiri segmenta P_1P_2, P_2P, PQ_2 i Q_2Q koji se nalaze na pravama $\mu = \frac{2}{3}$, $\mu = \frac{50-z}{30}$, $\mu = \frac{1}{6}$ i $\mu = \frac{80-z}{30}$, redom. Rešavajući odgovarajuće jednačine dobijaju se projekcije od Q_1 , P i Q_2 na z -osi i to su 25, 45 i 75. Prema tome, funkcija $\mu_{agg}(z)$ ima sledeći oblik:

$$\mu_{agg}(z) = \begin{cases} \frac{2}{3}, & \text{za } 0 \leq z \leq 30 \\ \frac{50-z}{30}, & \text{za } 30 \leq z < 45 \\ \frac{1}{6}, & \text{za } 45 \leq z < 75 \\ \frac{80-z}{30}, & \text{za } 75 \leq z < 80. \end{cases}$$

1) CAM metod

Interval $[0,80]$ je pogodno podeliti na osam jednakih delova dužine 10. Zamenom vrednosti $z_k = 10, 20, \dots, 70$ u funkciju pripadanja $\mu_{agg}(z)$ dobija se:

z_k	10	20	30	40	50	60	70
$\mu_{agg}(z)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Tražena vrednost je tačka \hat{z}_C koju računamo:

$$\begin{aligned}\hat{z}_C &= \frac{10 \cdot \frac{2}{3} + 20 \cdot \frac{2}{3} + 30 \cdot \frac{2}{3} + 40 \cdot \frac{1}{3} + 50 \cdot \frac{1}{6} + 60 \cdot \frac{1}{6} + 70 \cdot \frac{1}{6}}{\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}} \\ &= 29,4 \approx 29.\end{aligned}$$

2) MMM metod

Tačke P_1 i P_2 čine najviši ravni segment koji se projektuje u interval $[\zeta_1, \zeta_2] = [0, 30]$. Tražena vrednost je tačka \hat{z}_m koju dobijamo:

$$\hat{z}_m = \frac{0 + 30}{2} = 15.$$

3) HDM metod

Projekciju tačke Q_2 na z-osu dobijamo zamenom vrednosti $\mu = \frac{1}{6}$ u $\mu = \frac{80-z}{30}$ i dobija se broj 75, dok projekciju tačke Q_1 dobijamo zamenom vrednosti $\mu = \frac{1}{6}$ u $\mu = \frac{z-20}{30}$ i dobija se 25. Prema tome, ravni segmenti P_1P_2 i Q_1Q_2 sa visinama $\frac{2}{3}$ i $\frac{1}{6}$, redom, imaju projekcije na z-osi u intervalu $[0, 30]$ i $[25, 75]$, pa tako imamo vrednosti: $\zeta_1 = 0, \zeta_2 = 30, \eta_1 = 25, \eta_2 = 75, p = \frac{2}{3}$ i $q = \frac{1}{6}$. Pomoću dobijenih vrednosti računamo traženu tačku \hat{z}_h i imamo:

$$\hat{z}_h = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{0+30}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{25+75}{2}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{6}} = 22.$$

Na osnovu tri metoda defazifikacije dobijeni su rezultati $\hat{z}_C = 29,4 \approx 29$, $\hat{z}_m = 15$ i $\hat{z}_h = 22$. Zaključujemo da je MMM metod veoma jednostavan za primenu, međutim daje potcenjene vrednosti kao rezultat iz razloga što zanemaruje uslov četvrtog pravila koji pokazuje da nivo $\frac{1}{6}$ preseca izlaznu vrednost M . CAM metod zahteva nešto više računanja, ali uzima u obzir uslove i

trećeg i četvrtog pravila. Stoga, vrednost \hat{z}_h deluje realnije od \hat{z}_m . HDM metod je sličan metodu CAM jer i on razmatra uslove trećeg i četvrtog pravila.

Finansijski stručnjaci na osnovu dobijenih rezultata treba da procene klijentovu toleranciju rizika pretpostavljajući da je njegov godišnji prihod 40000\$, a ukupna neto vrednost kojom raspolaže 250000\$. Ukoliko koriste HDM metod, nivo tolerancije rizika na skali od 0 do 100 će iznositi 22 (29 ukoliko bi koristili CAM metod) i trebalo bi klijentu da predlože blago rizičnu investicionu strategiju.

3.2 Specijalan slučaj modela

Naredni deo rada je originalan. Koristeći prethodno opisani model baziran na [1], razmotren je slučaj kada je klijent „optimističan”, odnosno kada je spremjan da prihvati viši nivo rizika uprkos malom godišnjem prihodu i neto vrednosti koju ima. U takvoj situaciji finansijski stručnjaci moraju da redizajniraju if-then pravila.

Razlika novog i prethodnog modela nastaje već u drugom koraku. Finansijski eksperti nakon razgovora sa klijentom koriguju pravila i na osnovu toga se dobija nova Tabela odlučivanja.

	L	M	H
L	L	MO	MO
M	MO	MO	H
H	MO	H	H

Tabela 3.9 Tabela odlučivanja za model tolerancije rizika „optimističnog” klijenta

Ako se dalje pretpostavi, kao i u prethodnom modelu, da klijent raspolaže sa ulaznim vrednostima: godišnji prihod (AI u hiljadama \$) $x_0 = 40$ i ukupna neto vrednost (TNW u desetinama hiljada \$) $y_0 = 25$, onda dobijamo sledeći oblik fazi ulaznih vrednosti:

$$\mu_L(40) = \frac{1}{3}, \quad \mu_M(40) = \frac{2}{3},$$

$$\mu_L(25) = \frac{5}{6}, \quad \mu_M(25) = \frac{1}{6}.$$

Nakon toga, formira se Uzrokovana tabela odlučivanja novog modela, na kojoj vidimo četiri aktivne celije.

	$\mu_L(25) = \frac{5}{6}$	$\mu_M(25) = \frac{1}{6}$	0
$\mu_L(40) = \frac{1}{3}$	$\mu_L(z)$	$\mu_{MO}(z)$	0
$\mu_M(40) = \frac{2}{3}$	$\mu_{MO}(z)$	$\mu_{MO}(z)$	0
0	0	0	0

Tabela 3.10 Uzrokovana tabela odlučivanja

Nakon što je to urađeno, računa se jačina primenjenih pravila.

$$\alpha_{11} = \mu_L(40) \wedge \mu_L(25) = \min\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{6}\right) = \frac{1}{3},$$

$$\alpha_{12} = \mu_L(40) \wedge \mu_M(25) = \min\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6},$$

$$\alpha_{21} = \mu_M(40) \wedge \mu_L(25) = \min\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right) = \frac{2}{3},$$

$$\alpha_{22} = \mu_M(40) \wedge \mu_M(25) = \min\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}.$$

Dobijeni rezultati su prikazani u narednoj tabeli.

	$\mu_L(25) = \frac{5}{6}$	$\mu_M(25) = \frac{1}{6}$	0
$\mu_L(40) = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0
$\mu_M(40) = \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0
0	0	0	0

Tabela 3.11 Tabela jačine pravila

Uz pomoć aktivnih celija iz obe tabele dobijene su kontrolne izlazne promenljive za svako pojedinačno pravilo:

CO prvog pravila: $\alpha_{11} \wedge \mu_L(z) = \min\left(\frac{1}{3}, \mu_L(z)\right),$

CO drugog pravila: $\alpha_{12} \wedge \mu_{MO}(z) = \min\left(\frac{1}{6}, \mu_{MO}(z)\right),$

CO trećeg pravila: $\alpha_{21} \wedge \mu_{MO}(z) = \min\left(\frac{2}{3}, \mu_{MO}(z)\right),$

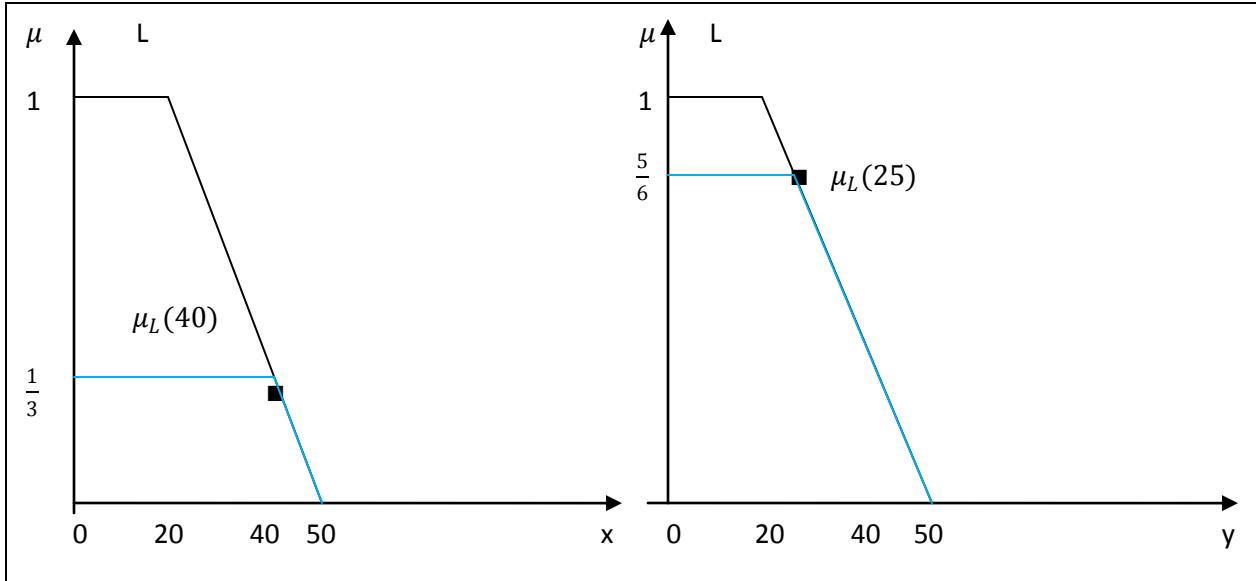
CO četvrtog pravila: $\alpha_{22} \wedge \mu_{MO}(z) = \min\left(\frac{1}{6}, \mu_{MO}(z)\right).$

Tražene vrednosti su tabelarno prikazane uz zanemarivanje neaktivnih celija.

...
...	$\frac{1}{3} \wedge \mu_L(z)$	$\frac{1}{6} \wedge \mu_{MO}(z)$...
...	$\frac{2}{3} \wedge \mu_{MO}(z)$	$\frac{1}{6} \wedge \mu_{MO}(z)$...
...

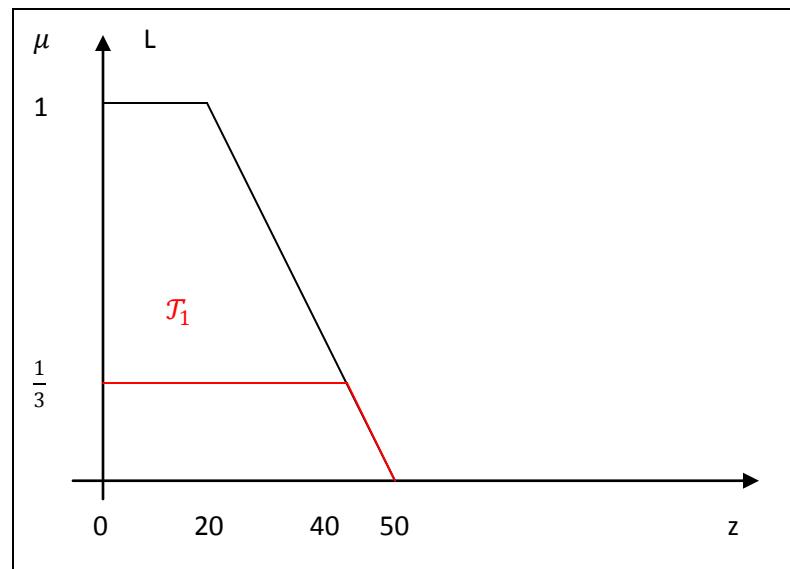
Tabela 3.12 Tabela kontrolnih izlaznih promenljivih novog modela

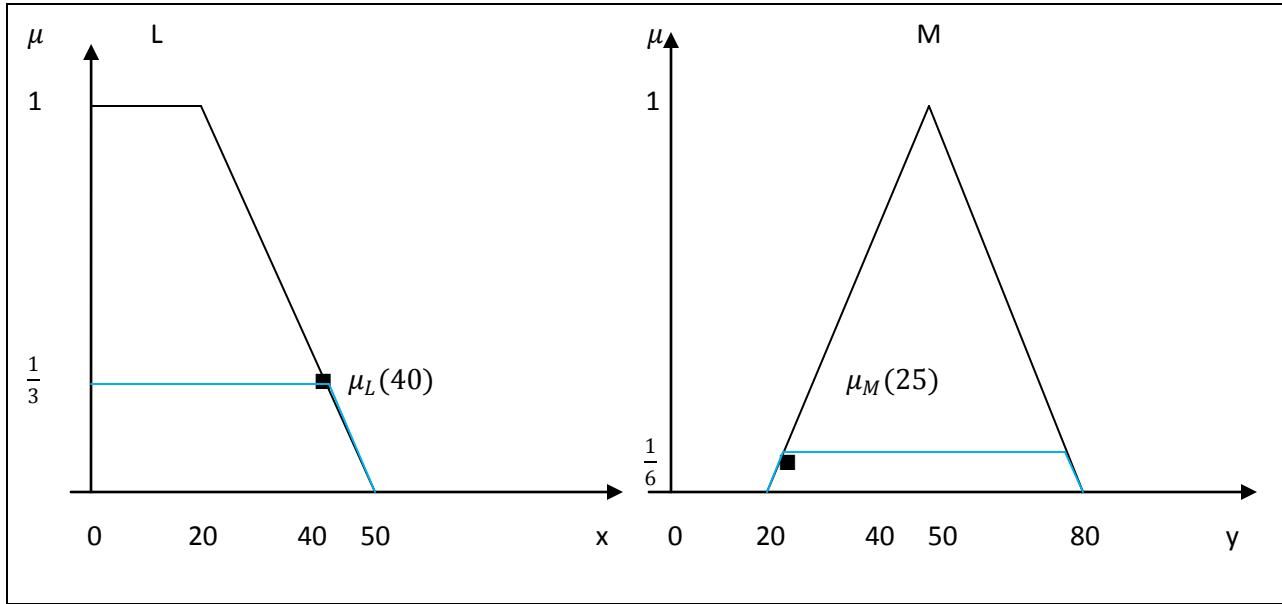
Za lakšu primenu postupka agregacije potrebno je aktivne celije iz Tabele 3.12 grafički prikazati.



$$\alpha_{11} = \mu_L(40) \wedge \mu_L(25) = \min\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{6}\right) = \frac{1}{3}$$

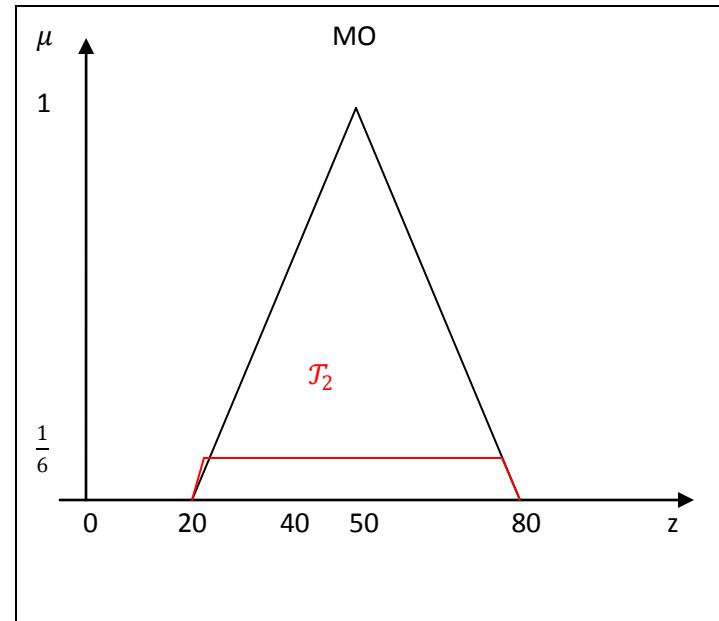
$$\alpha_{11} \wedge \mu_L(z) = \min\left(\frac{1}{3}, \mu_L(z)\right)$$

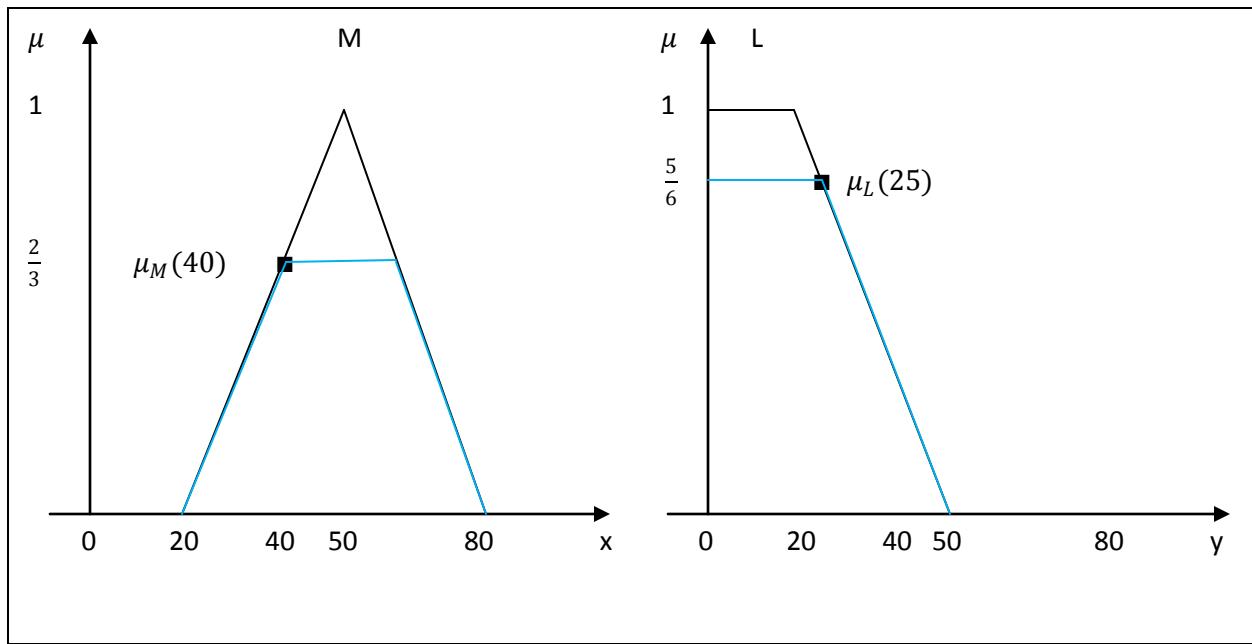




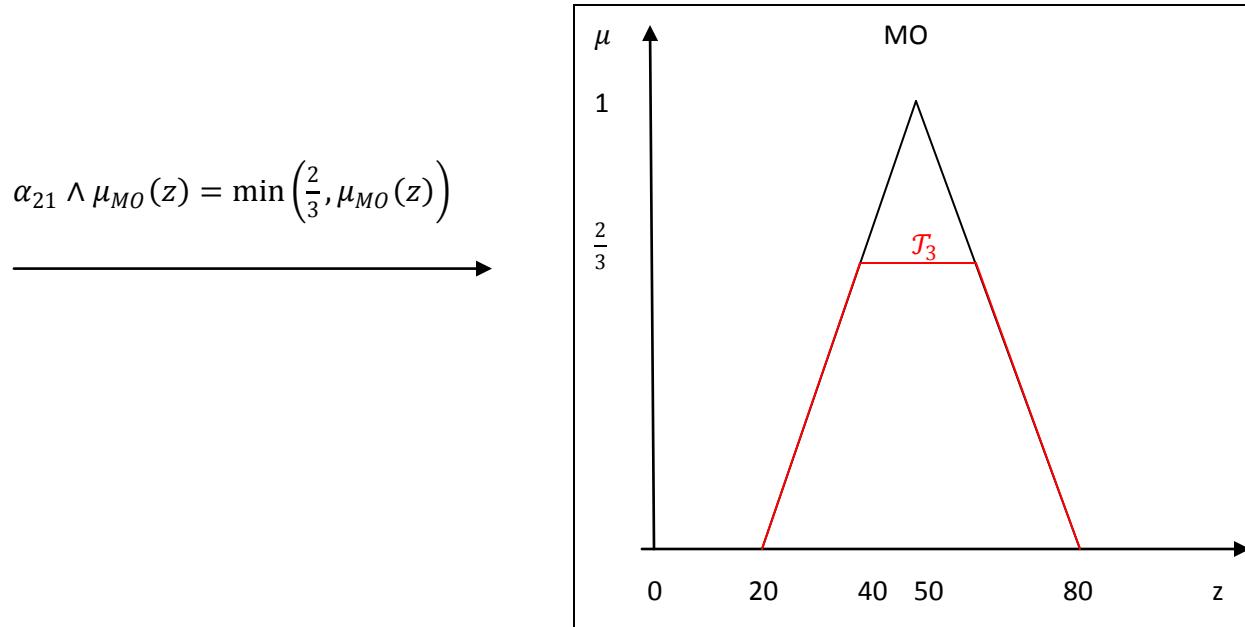
$$\alpha_{12} = \mu_L(40) \wedge \mu_M(25) = \min\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}$$

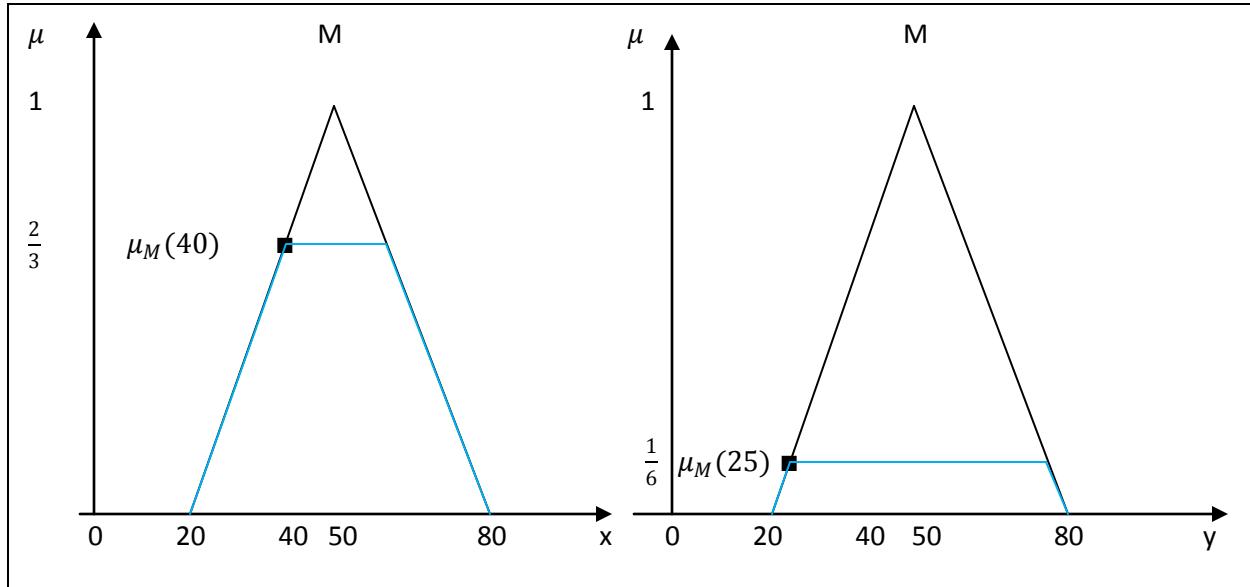
$$\alpha_{12} \wedge \mu_L(z) = \min\left(\frac{1}{6}, \mu_L(z)\right)$$





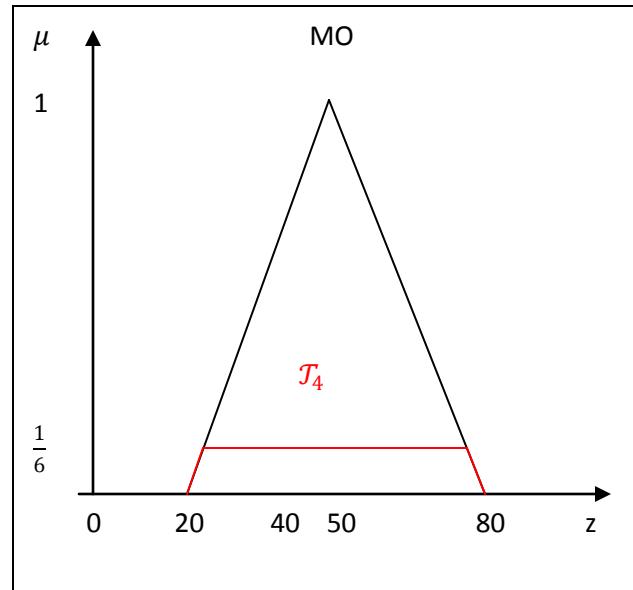
$$\alpha_{21} = \mu_M(40) \wedge \mu_L(25) = \min\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right) = \frac{2}{3}$$





$$\alpha_{22} = \mu_M(40) \wedge \mu_M(25) = \min\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}$$

$$\alpha_{22} \wedge \mu_{MO}(z) = \min\left(\frac{1}{6}, \mu_{MO}(z)\right)$$

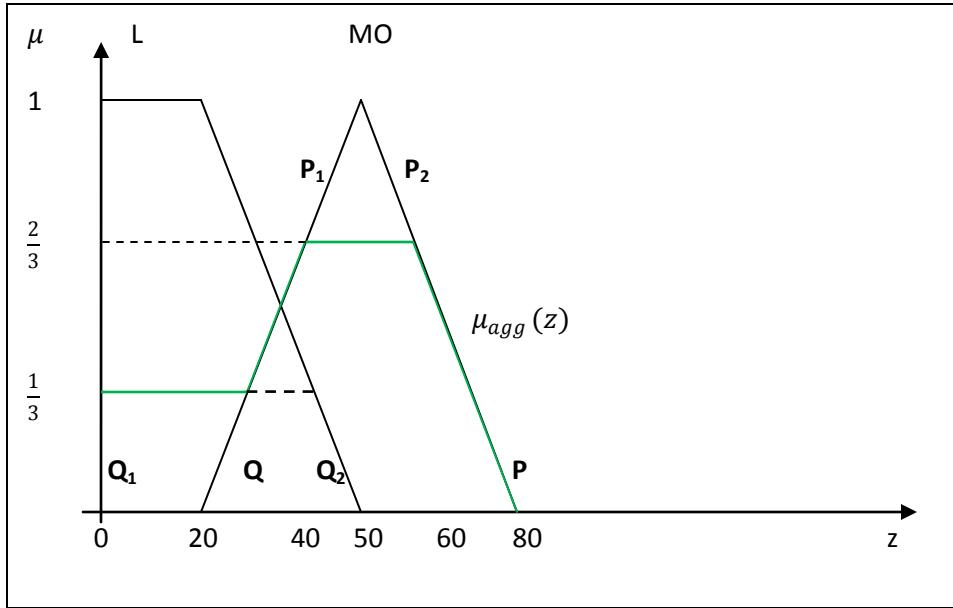


Slika 3.9 Primena firing tehnike na specijalni slučaj modela i dobijanje CO svakog pojedinačnog pravila

Kao rezultat dobijeni su trapezoidni fazi intervali: $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3$ i \mathcal{T}_4 .

Sada je potrebno primeniti postupak agregacije na dobijene kontrolne faze izlazne promenljive pomoću funkcije pripadanja μ_{agg} . Sa Slike 3.9 vidi se da su izlazne vrednosti drugog i četvrtog pravila sadržane u izlaznoj vrednosti trećeg, pa zato u koordinatnom sistemu (z, μ) tražimo supremum samo prvog i trećeg trapezoida.

Rezultat agregacije je sledeća vrednost : $\mu_{agg}(z) = \max\left(\min\left(\frac{1}{3}, \mu_L(z)\right), \min\left(\frac{2}{3}, \mu_{MO}(z)\right)\right)$ i prikazana je na narednoj slici.



Slika 3.10 Izlazna vrednost specijalnog slučaja modela nakon primene postupka agregacije

Dobijenu fazi izlaznu promenljivu je potrebno dekodirati tj. prevesti u realnu vrednost postupkom defazifikacije. Da bi to izveli, potrebno je naći analitički oblik izlazne vrednosti.

Funkcija $\mu_{agg}(z)$ se sastoji iz četiri segmenta Q_1Q , QP_1 , P_1P_2 i P_2P koji se nalaze na pravama $\mu = \frac{1}{3}$, $\mu = \frac{z-20}{30}$, $\mu = \frac{2}{3}$ i $\mu = \frac{80-z}{30}$. Rešavajući odgovarajuće jednačine dobijaju se projekcije od Q , P_1 i P_2 na z -osi i to su redom vrednosti: 30, 40 i 60. Stoga zaključujemo da funkcija $\mu_{agg}(z)$ ima sledeći oblik:

$$\mu_{agg}(z) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{za } 0 \leq z \leq 30 \\ \frac{z-20}{30}, & \text{za } 30 \leq z < 40 \\ \frac{2}{3}, & \text{za } 40 \leq z < 60 \\ \frac{80-z}{30}, & \text{za } 60 \leq z < 80. \end{cases}$$

1) CAM metod

Interval $[0,80]$ je moguće podeliti na osam jednakih delova dužine 10 kako bi jednostavno primenili CAM metod defazifikacije.

z_k	10	20	30	40	50	60	70
$\mu_{agg}(z)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

Tražena vrednost je tačka tačka \hat{z}_C koja se računa na sledeći način:

$$\hat{z}_C = \frac{10 \cdot \frac{1}{3} + 20 \cdot \frac{1}{3} + 30 \cdot \frac{1}{3} + 40 \cdot \frac{2}{3} + 50 \cdot \frac{2}{3} + 60 \cdot \frac{2}{3} + 70 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}}$$

$$= 43.$$

2) MMM metod

Tačke P_1 i P_2 označavaju najviši ravni segment koji se projektuje u interval $[\zeta_1, \zeta_2] = [40, 60]$. Tražena vrednost defazifikacije je tačka \hat{z}_m koju dobijamo:

$$\hat{z}_m = \frac{40 + 60}{2} = 50.$$

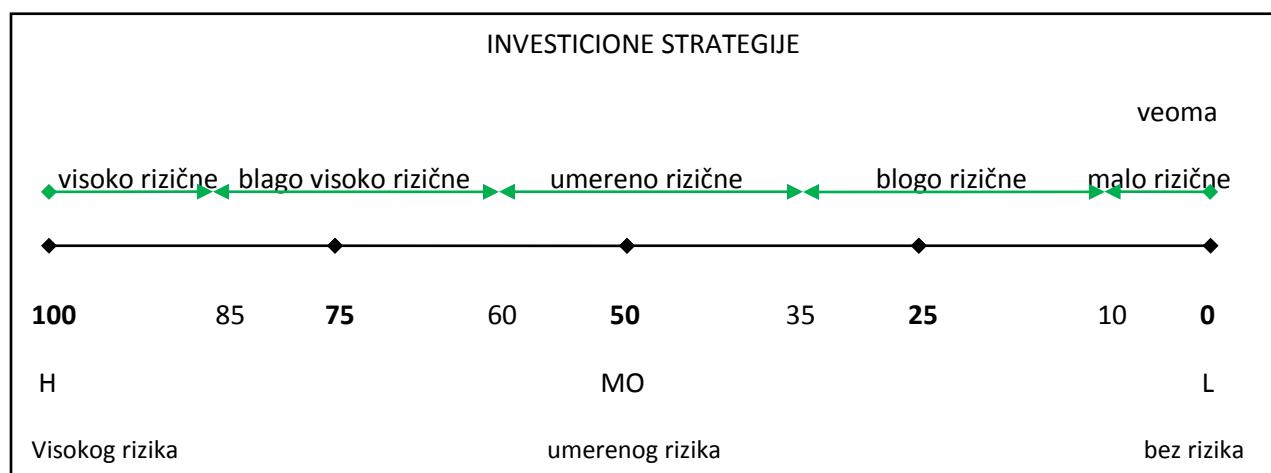
3) HDM metod

Ravni segmenti P_1P_2 i Q_1Q_2 sa visinama $\frac{2}{3}$ i $\frac{1}{3}$, redom, projektuju se na z-osu u intervalu $[40, 60]$ i $[0, 45]$, pa tako raspolažemo sledećim vrednostima: $\zeta_1 = 40, \zeta_2 = 60, \eta_1 = 0, \eta_2 = 45, p = \frac{2}{3}$ i $q = \frac{1}{3}$ koje nam omogućavaju izračunavanje tačke \hat{z}_h .

$$\hat{z}_h = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{40+60}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{0+45}{2}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{1}} = 40,83 \approx 41.$$

Na osnovu tri metoda defazifikacije dobijeni su rezultati $\hat{z}_C = 43$, $\hat{z}_m = 50$ i $\hat{z}_h = 41$ koji se značajno razlikuju od rezultata iz prethodnog modela. Vidimo da u ovom slučaju MMM metod daje precenjene vrednosti jer zanemaruje uslov trećeg pravila koji pokazuje da nivo $\frac{1}{3}$ preseca izlaznu vrednost L, dok su vrednosti CAM i HDM metoda približne. Zaključujemo da bi finansijski stručnjaci klijentu koji je spreman da prihvati viši nivo rizika trebali da predlože umereno rizičnu investicionu strategiju.

Na sledećoj slici je data predložena skala na osnovu koje finansijski stručnjaci u zavisnosti od dobijenih rezultata defazifikacije mogu da odrede investiconu strategiju za svakog klijenta.



Slika 3.11 Skala rizičnosti investicionih strategija

4 Modifikovani FLC procesi i njihova primena

U prethodnom poglavlju opisani su FLC procesi bazirani na T_M normi i njenoj dualnoj S_M konormi, kao i njihova primena na modeliranje tolerancije rizika donosioca odluke. Naredni deo rada je u potpunosti originalan i bavi se novim FLC procesima zasnovanim na drugačijem obliku trougaonih normi i konormi sa primenom na model. Modifikacija se ogleda u tumačenju veznika \wedge u Mamdanijevoj definiciji if-then pravila pomoću trougaone T_L norme, na sledeći način:

Za $p_i \triangleq x_i \text{ je } A_i$, $q_j \triangleq y_j \text{ je } B_j$ i $r_k \triangleq z_k \text{ je } C_k$, imamo:

$$\begin{aligned} p_i \wedge q_j \wedge r_k &= T_L(\mu_{A_i}(x), \mu_{B_j}(y), \mu_{C_k}(z)) \\ &= \max[0, \mu_{A_i}(x) + \mu_{B_j}(y) + \mu_{C_k}(z) - 2] \end{aligned}$$

pri čemu je $r_k = r_{ij}$; $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$; $k = 1, \dots, l$

Rezultati dobijeni na ovaj način biće upoređeni sa rezultatima prethodno opisanog modela.

4.1 Modeliranje tolerancije rizika donosioca odluke pomoću modifikovanih FLC procesa

Radi lakšeg upoređivanja dva modela, ostali smo dosledni primeru iz prethodnog poglavlja. Iako se njihova razlika uočava tek u primeni trougaonih normi i konormi kroz if-then pravila, radi lakšeg praćenja navećemo ponovo osnovne podatke.

Korak 1: Modeliranje promenljivih

Jezičke promenljive posmatranog FLC procesa date su na sledeći način:

$$AI = \{A_1, A_2, A_3\} = \{L, M, H\},$$

$$TNW = \{B_1, B_2, B_3\} = \{L, M, H\},$$

$$RT = \{C_1, C_2, C_3\} = \{L, MO, H\},$$

pri čemu su AI (godišnji prihod) i TNW (ukupna neto vrednost) ulazne promenljive, a RT (nivo tolerancije rizika) izlazna promenljiva procesa.

Iskazne vrednosti posmatranih lingvističkih promenljivih date su u obliku trougaonih fazi brojeva sa funkcijama pripadanja:

$$\mu_L(v) = \begin{cases} 1, & \text{za } 0 \leq v \leq 20 \\ \frac{50-v}{30}, & \text{za } 20 \leq v \leq 50 \end{cases}$$

$$\mu_M(v) = \begin{cases} \frac{v-20}{30}, & \text{za } 20 \leq v \leq 50 \\ \frac{80-v}{30}, & \text{za } 50 \leq v \leq 80 \end{cases},$$

$$\mu_H(v) = \begin{cases} \frac{v-50}{30}, & \text{za } 50 \leq v \leq 80 \\ 1, & \text{za } 80 \leq v \leq 100 \end{cases}.$$

Njihovi noseći intervali pripadaju sledećim univerzalnim skupovima:

$$U_1 = \{x \times 10^3 | 0 \leq x \leq 100\},$$

$$U_2 = \{y \times 10^4 | 0 \leq y \leq 100\},$$

$$U_3 = \{z | 0 \leq z \leq 100\},$$

gde su x i y vrednosti u hiljadama i desetinama hiljada dolara, dok z uzima vrednost između 0 i 100 i predstavlja skalu merenja tolerancije rizika.

Korak 2: If...and...then pravila

S obzirom da jezičke promenljive posmatranog modela primaju po tri iskazne vrednosti, $n = m = l = 3$, imaćemo 9 if-then pravila na osnovu kojih se dobijaju 3 različite izlazne vrednosti.

Umesto upotrebe operatora minimuma na if-then pravila, sada se koristi Lukašijevičeva T_L norma za tumačenje veznika \wedge u okviru ovih pravila i na taj način se dobija sledeća Tabela odlučivanja:

	L	M	H
L	L	L	MO
M	L	MO	H
H	MO	H	H

Tabela 4.1 Tabela odlučivanja modifikovanog modela tolerancije rizika

Primenjena pravila iz tabele čitamo:

Pravilo 1: Ako je klijentov godišnji prihod (AI) mali (L) i klijent ostvaruje malu (L) ukupnu neto vrednost (TNW), onda je njegov nivo tolerancije rizika (RT) mali (L).

Pravilo 2: Ako je klijentov AI mali i klijent ostvaruje srednju TNW, onda je njegov RT mali.

Pravilo 3: Ako je klijentov AI mali i klijent ostvaruje visoku TNW, onda je njegov RT umeren.

Pravilo 4: Ako je klijentov AI srednje visine i klijent ostvaruje malu TNW, onda je njegov RT mali.

Pravilo 5: Ako je klijentov AI srednje visine i klijent ostvaruje srednju TNW, onda je njegov RT umeren.

Pravilo 6: Ako je klijentov AI srednje visine i klijent ostvaruje visoku TNW, onda je njegov RT visok.

Pravilo 7: Ako je klijentov AI visok i klijent ostvaruje malu TNW, onda je njegov RT umeren.

Pravilo 8: Ako je klijentov AI visok i klijent ostvaruje srednju TNW, onda je njegov RT visok.

Pravilo 9: Ako je klijentov AI visok i klijent ostvaruje visoku TNW, onda je njegov RT visok.

Matematički, pomoću T_L norme, navedena pravila možemo zapisati u sledećoj notaciji:

Pravilo 1: $p_1 \wedge q_1 \wedge r_{11} = T_L(\mu_L(x), \mu_L(y), \mu_L(z)) = \max(0, \mu_L(x) + \mu_L(y) + \mu_L(z) - 2)$,

Pravilo 2: $p_1 \wedge q_2 \wedge r_{12} = T_L(\mu_L(x), \mu_M(y), \mu_L(z)) = \max(0, \mu_L(x) + \mu_M(y) + \mu_L(z) - 2)$,

Pravilo 3: $p_1 \wedge q_3 \wedge r_{13} = T_L(\mu_L(x), \mu_H(y), \mu_{MO}(z)) = \max(0, \mu_L(x) + \mu_H(y) + \mu_{MO}(z) - 2)$,

Pravilo 4: $p_2 \wedge q_1 \wedge r_{21} = T_L(\mu_M(x), \mu_L(y), \mu_L(z)) = \max(0, \mu_M(x) + \mu_L(y) + \mu_L(z) - 2)$,

Pravilo 5: $p_2 \wedge q_2 \wedge r_{22} = T_L(\mu_M(x), \mu_M(y), \mu_{MO}(z)) = \max(0, \mu_M(x) + \mu_M(y) + \mu_{MO}(z) - 2)$,

Pravilo 6: $p_2 \wedge q_3 \wedge r_{23} = T_L(\mu_M(x), \mu_H(y), \mu_H(z)) = \max(0, \mu_M(x) + \mu_H(y) + \mu_H(z) - 2)$,

Pravilo 7: $p_3 \wedge q_1 \wedge r_{31} = T_L(\mu_H(x), \mu_L(y), \mu_{MO}(z)) = \max(0, \mu_H(x) + \mu_L(y) + \mu_{MO}(z) - 2)$,

Pravilo 8: $p_3 \wedge q_2 \wedge r_{32} = T_L(\mu_H(x), \mu_M(y), \mu_H(z)) = \max(0, \mu_H(x) + \mu_M(y) + \mu_H(z) - 2)$,

Pravilo 9: $p_3 \wedge q_3 \wedge r_{33} = T_L(\mu_H(x), \mu_H(y), \mu_H(z)) = \max(0, \mu_H(x) + \mu_H(y) + \mu_H(z) - 2)$.

Pravila odgovaraju prirodnom razmišljanju, ali analogno modelu iz prethodnog poglavlja, moguće ih je redizajnirati ukoliko je klijent spremjan da prihvati viši nivo rizika uprkos malom godišnjem prihodu i neto vrednosti koju ima i obrnuto.

Korak 3: Procena pravila

Neka su nam date konkretnе vrednosti za ulazne promenljive modifikovanog FLC procesa: godišnji prohod (AI u hiljadama dolara), $x_0 = 40$ i ukupna neto vrednost (TNW u desetinama hiljada dolara), $y_0 = 25$. Cilj nam je da pronađemo odgovarajuću vrednost za izlaznu promenljivu z (RT).

Za početak, potrebno je izvršiti *kodiranje ulaznih vrednosti* zamenom x_0 i y_0 sa v u odgovarajućim funkcijama pripadnosti, pa se dobija:

$$\mu_L(40) = \frac{1}{3}, \mu_M(40) = \frac{2}{3},$$

$$\mu_L(25) = \frac{5}{6}, \mu_M(25) = \frac{1}{6}.$$

Nakon što smo dobili fazi izmerene ulazne promenljive za $x_0 = 40$ i $y_0 = 25$, kreiramo Uzrokovani tabelu odlučivanja za modifikovani model.

	$\mu_L(25) = \frac{5}{6}$	$\mu_M(25) = \frac{1}{6}$	0
$\mu_L(40) = \frac{1}{3}$	$\mu_L(z)$	$\mu_L(z)$	0
$\mu_M(40) = \frac{2}{3}$	$\mu_L(z)$	$\mu_{MO}(z)$	0
0	0	0	0

Tabela 4.2 Uzrokovana tabela odlučivanja

Uočavamo da raspoložemo sa četiri aktivne celije.

Korak 4: Agregacija

U ovom koraku se jasno uočava novina u radu, jer se prvi put prilikom postupka primene kontrolnih pravila umesto operatora minimum koristi Lukašijevičeva T_L norma. Na taj način, za sledeća četiri pravila:

Pravilo 1: Ako je $x A_i^{(0)}$ i $y B_j^{(0)}$, onda je $z C_{ij}$,

Pravilo 2: Ako je $x A_i^{(0)}$ i $y B_{j+1}^{(0)}$, onda je $z C_{ij+1}$,

Pravilo 3: Ako je $x A_{i+1}^{(0)}$ i $y B_j^{(0)}$, onda je $z C_{i+1j}$,

Pravilo 4: Ako je $x A_{i+1}^{(0)}$ i $y B_{j+1}^{(0)}$, onda je $z C_{i+1j+1}$.

Jačinu računamo na sledeći način:

$$\alpha_{ij} = \mu_{A_i}(x_o) \wedge \mu_{B_j}(y_0) = \max(0, \mu_{A_i}(x_o) + \mu_{B_j}(y_0) - 1),$$

$$\alpha_{ij+1} = \mu_{A_i}(x_o) \wedge \mu_{B_{j+1}}(y_0) = \max(0, \mu_{A_i}(x_o) + \mu_{B_{j+1}}(y_0) - 1),$$

$$\alpha_{i+1j} = \mu_{A_{i+1}}(x_o) \wedge \mu_{B_j}(y_0) = \max(0, \mu_{A_{i+1}}(x_o) + \mu_{B_j}(y_0) - 1),$$

$$\alpha_{i+1j+1} = \mu_{A_{i+1}}(x_o) \wedge \mu_{B_{j+1}}(y_0) = \max(0, \mu_{A_{i+1}}(x_o) + \mu_{B_{j+1}}(y_0) - 1).$$

Za konkretan slučaj, kada je uzeto da su $x_0 = 40$ i $y_0 = 25$, imamo:

$$\alpha_{11} = \mu_L(40) \wedge \mu_L(25) = \max\left(0, \frac{1}{3} + \frac{5}{6} - 1\right) = \frac{1}{6},$$

$$\alpha_{12} = \mu_L(40) \wedge \mu_M(25) = \max\left(0, \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - 1\right) = 0,$$

$$\alpha_{21} = \mu_M(40) \wedge \mu_L(25) = \max\left(0, \frac{2}{3} + \frac{5}{6} - 1\right) = \frac{1}{2},$$

$$\alpha_{22} = \mu_M(40) \wedge \mu_M(25) = \max\left(0, \frac{2}{3} + \frac{1}{6} - 1\right) = 0.$$

Dobijeni rezultati su prikazani u narednoj tabeli:

	$\mu_L(25) = \frac{5}{6}$	$\mu_M(25) = \frac{1}{6}$	0
$\mu_L(40) = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	0
$\mu_M(40) = \frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	0
0	0	0	0

Tabela 4.3 Tabela jačine pravila

Pomoću aktivnih celija u obe tabele (Tabela 4.2 i Tabela 4.3) potrebno je dobiti kontrolne izlazne promenljive (eng. Control Output) u oznaci CO, za svako pojedinačno pravilo.

CO prvog pravila: $\alpha_{11} \wedge \mu_L(z) = \max\left(0, \frac{1}{6} + \mu_L(z) - 1\right)$,

CO drugog pravila: $\alpha_{12} \wedge \mu_L(z) = \max(0, 0 + \mu_L(z) - 1)$,

CO trećeg pravila: $\alpha_{21} \wedge \mu_L(z) = \max\left(0, \frac{1}{2} + \mu_L(z) - 1\right)$,

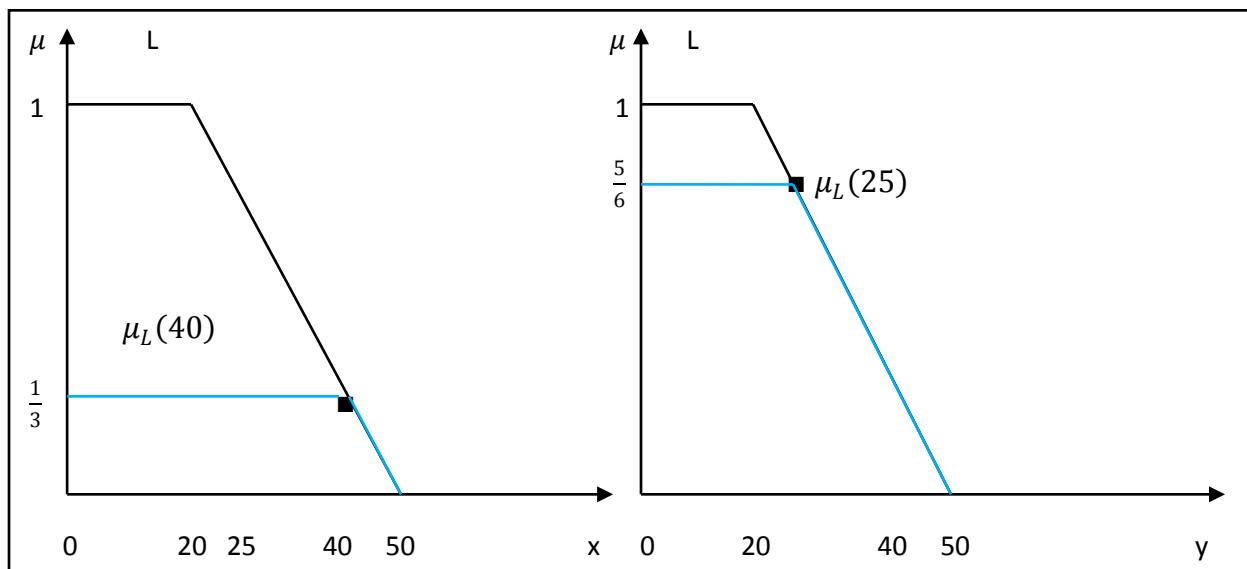
CO četvrtog pravila: $\alpha_{22} \wedge \mu_{M0}(z) = \max(0, 0 + \mu_{M0}(z) - 1)$.

Tabelarni prikaz dobijenih vrednosti:

...
...	$\max\left(0, \frac{1}{6} + \mu_L(z) - 1\right)$	$\max(0, 0 + \mu_L(z) - 1)$...
...	$\max\left(0, \frac{1}{2} + \mu_L(z) - 1\right)$	$\max(0, 0 + \mu_{MO}(z) - 1)$...
...

Tabela 4.4 Tabela kontrolnih izlaznih promenljivih modela

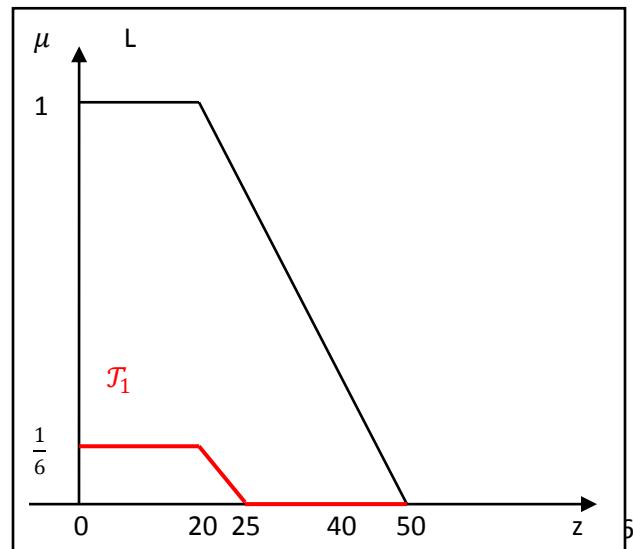
Pristupamo grafičkom prikazu kontrolnih izlaznih promenljivih kako bismo lakše primenili dalje postupke.

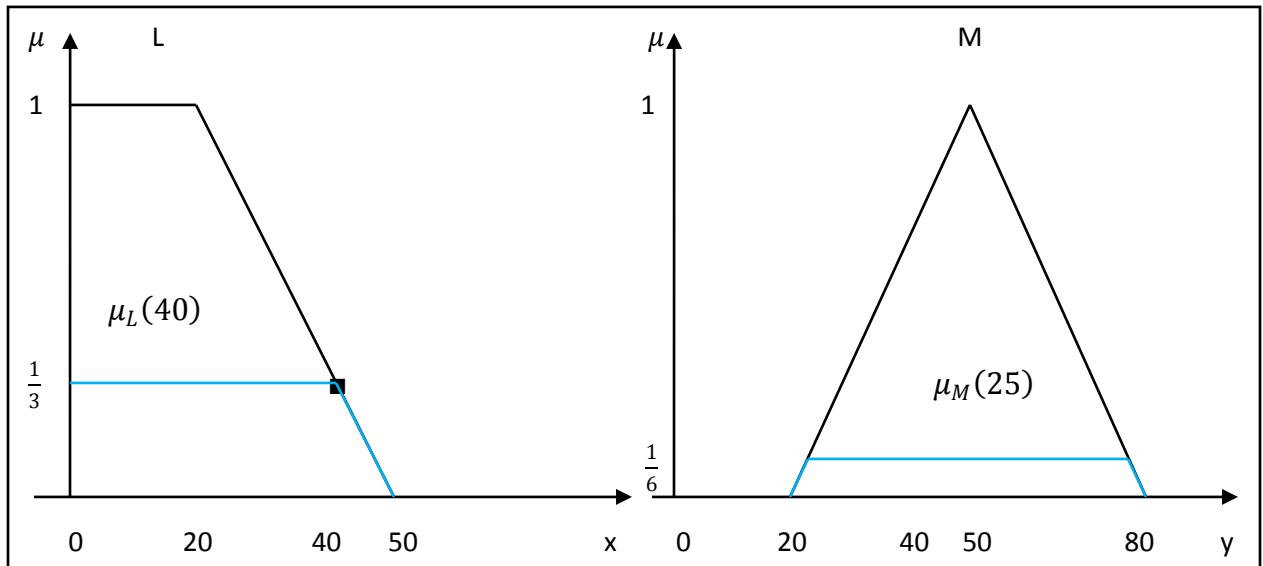


$$\alpha_{11} = \mu_L(40) \wedge \mu_L(25) = \max\left(0, \frac{1}{3} + \frac{5}{6} - 1\right) = \frac{1}{6}$$

$$\alpha_{11} \wedge \mu_L(z) = \max\left(0, \frac{1}{6} + \mu_L(z) - 1\right)$$

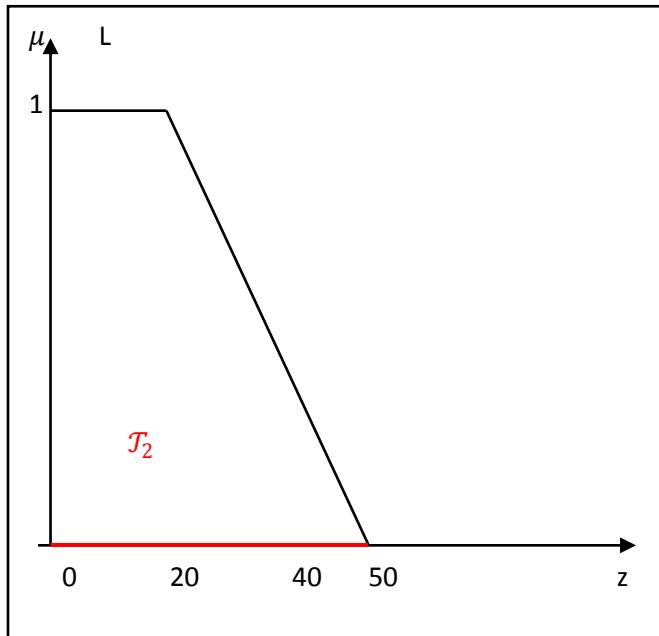
—————>

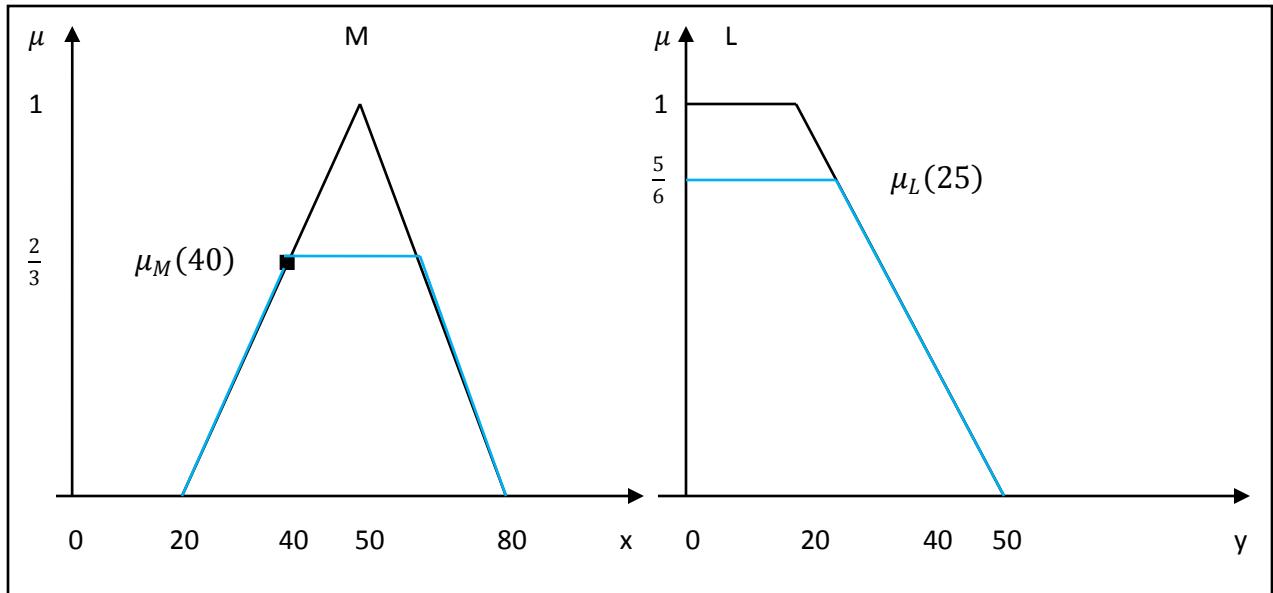




$$\mu_L(40) \wedge \mu_M(25) = \max\left(0, \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - 1\right) = 0$$

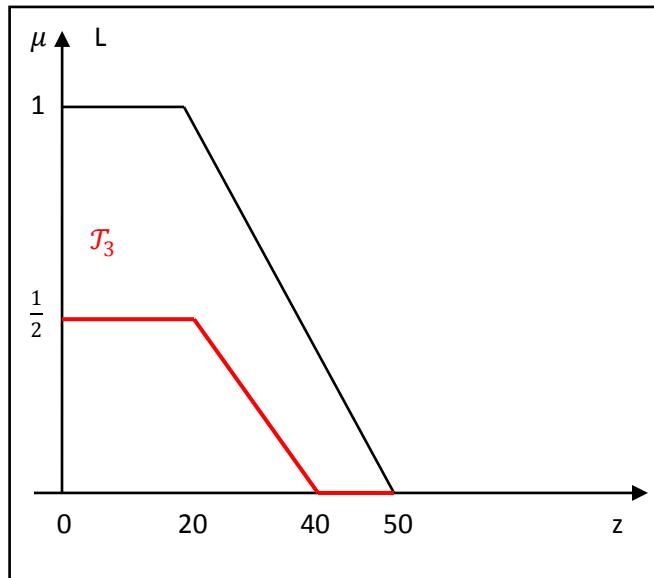
$$\alpha_{12} \wedge \mu_L(z) = \max(0, 0 + \mu_L(z) - 1)$$

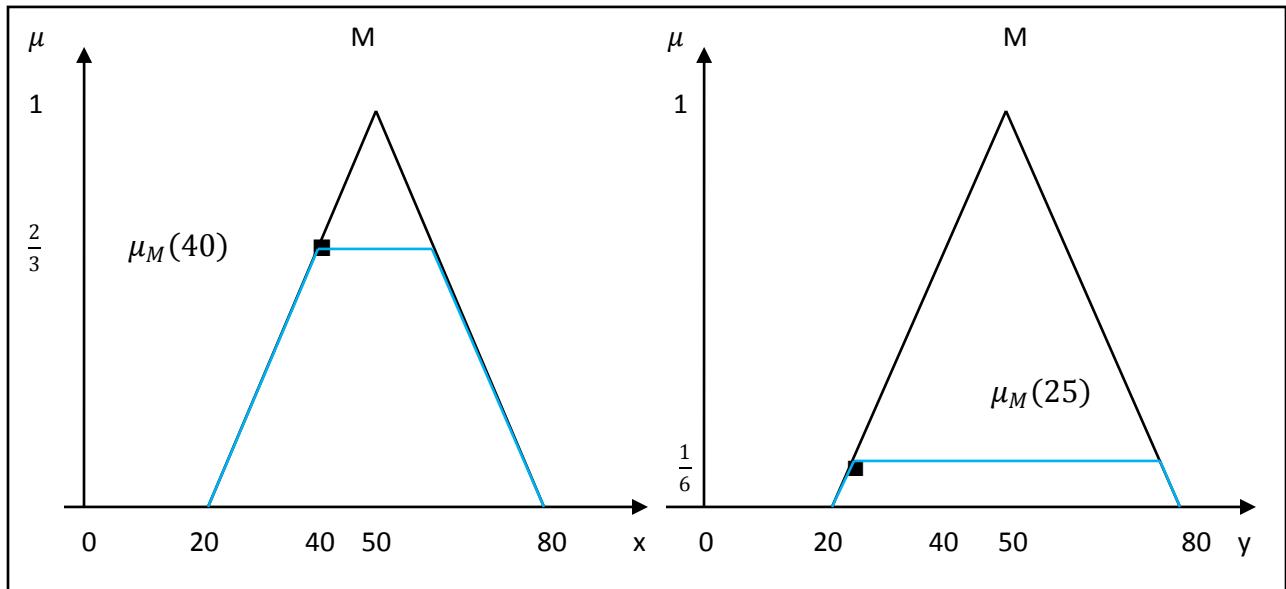




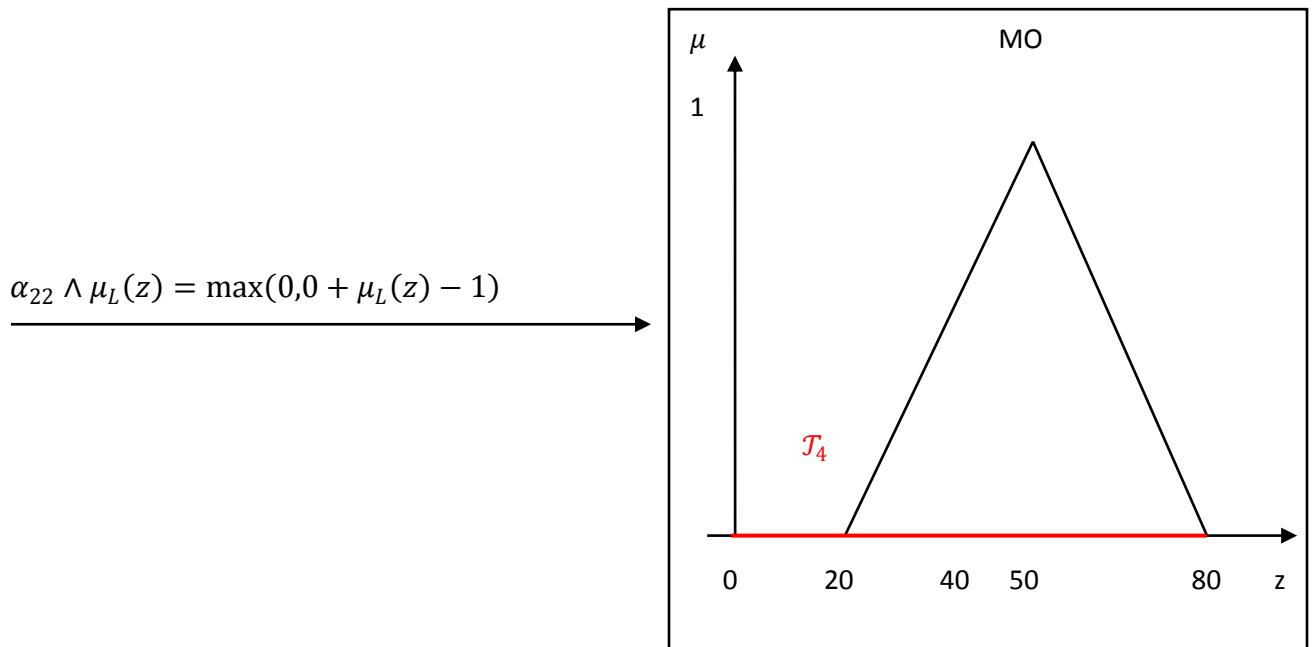
$$\alpha_{21} = \mu_M(40) \wedge \mu_L(25) = \max\left(0, \frac{2}{3} + \frac{5}{6} - 1\right) = \frac{1}{2}$$

$$\alpha_{21} \wedge \mu_L(z) = \max\left(0, \frac{1}{2} + \mu_L(z) - 1\right)$$





$$\alpha_{22} = \mu_M(40) \wedge \mu_M(25) = \max\left(0, \frac{2}{3} + \frac{1}{6} - 1\right) = 0$$



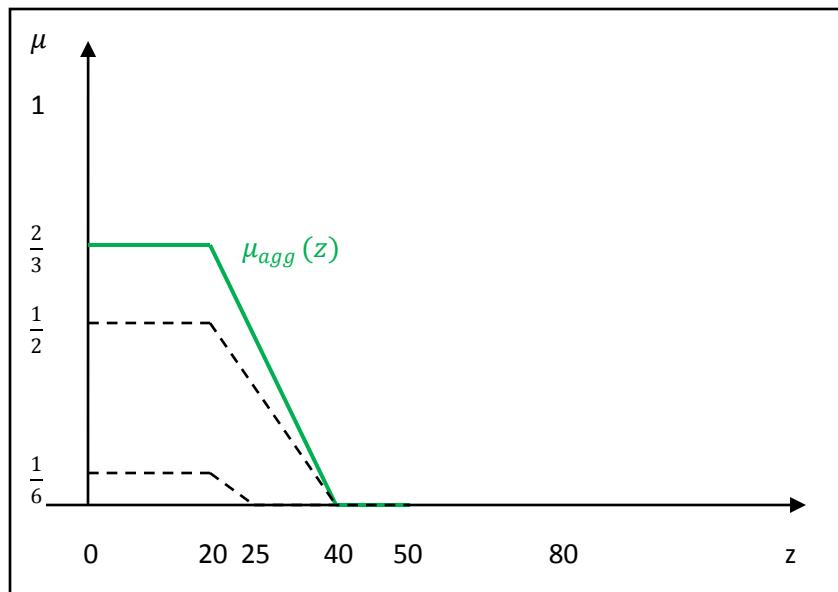
Slika 4.1 Grafički prikaz CO svakog pojedinačnog pravila

Kada su dobijene kontrolne fazi izlazne promenljive, potrebno je primeniti postupak *agregacije* pomoću funkcije pripadanja μ_{agg} . Ta funkcija je sada promenjena u odnosu na μ_{agg} iz trećeg poglavља, jer se bazira na S_L konormi. U geometrijskom smislu to znači da je potrebno naći infimum između jedinice i zbiru dobijenih vrednosti, u koordinatnom sistemu (z, μ) .

Sa Slike 4.1 vidi se da su izlazne promenljive drugog i četvrtog pravila nula funkcije, pa se zanemaruju. Postupak agregacije biće primenjen samo na prvo i treće pravilo:

$$\mu_{agg}(z) = \min \left\{ 1, \max \left(0, \frac{1}{6} + \mu_L(z) - 1 \right) + \max \left(0, \frac{1}{2} + \mu_L(z) - 1 \right) \right\}.$$

Prikaz nove, modifikovane funkcije pripadanja $\mu_{agg}(z)$, dat je na narednoj slici.



Slika 4.2 Izlazna vrednost za modifikovani model tolerancije rizika donosioca odluke, nakon primene postupka agregacije

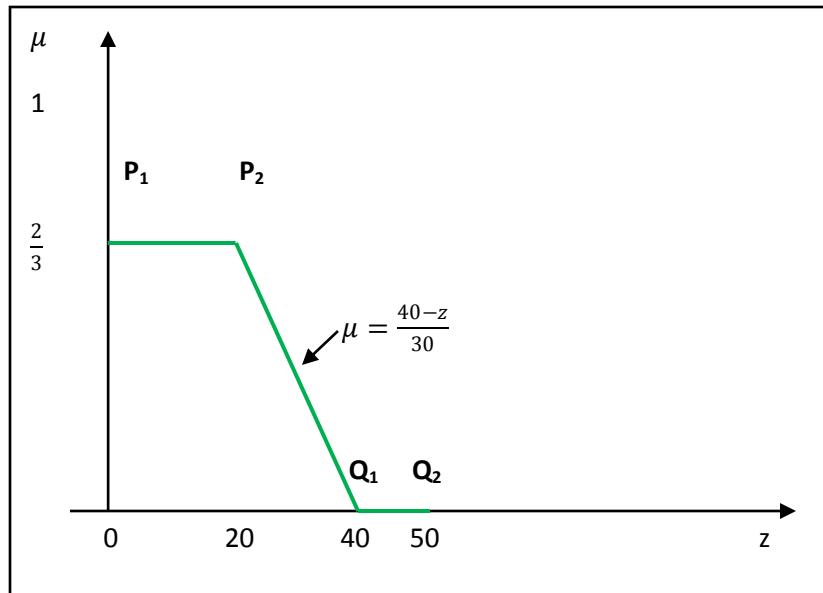
Njen analitički oblik je:

$$\mu_{agg}(z) = \begin{cases} \frac{2}{3}, & \text{za } 0 \leq z \leq 20 \\ \frac{40-z}{30}, & \text{za } 20 \leq z \leq 40 \\ 0, & \text{za } 40 \leq z \leq 50. \end{cases}$$

Korak 5: Defazifikacija

Nakon što je dobijena fazi izlazna promenljiva, potrebno ju je dekodirati, odnosno primeniti postupak *defazifikacije*. To će i ovog puta biti učinjeno na tri najčešće korišćena načina.

Može se videti sa Slike 4.3 da se funkcija pripadanja $\mu_{agg}(z)$ sastoji iz tri segmenta: P_1P_2 , P_2Q_1 i Q_1Q_2 koji se nalaze na pravama: $\mu = \frac{2}{3}$, $\mu = \frac{40-z}{30}$ i $\mu = 0$, redom.



Slika 4.3 Izlazna vrednost dobijena postupkom agregacije

1) CAM metod

Interval $[0,50]$ je najjednostavnije podeliti na pet jednakih delova dužine 10 i zameniti vrednosti $z_k = 10, 20, \dots, 40$ u funkciju pripadanja $\mu_{agg}(z)$:

z_k	10	20	30	40
$\mu_{agg}(z)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0

Tačka \hat{z}_C je tražena vrednost i dobijamo je na sledeći način:

$$\begin{aligned} \hat{z}_C &= \frac{10 \cdot \frac{2}{3} + 20 \cdot \frac{2}{3} + 30 \cdot \frac{1}{3} + 40 \cdot 0}{\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}} \\ &= 18. \end{aligned}$$

2) MMM metod

Najviši segment ravni čine tačke P_1 i P_2 sa visinom $\frac{2}{3}$, koje se projektuju u interval $[\zeta_1, \zeta_2]=[0,20]$ na z-osi. Tačka \hat{z}_m je tražena vrednost koju dobijamo:

$$\hat{z}_m = \frac{0 + 20}{2} = 10.$$

3) HDM metod

Za razliku od MMM metoda, HDM uzima u obzir uslove i prvog i trećeg pravila. Iz tog razloga pored segmenta P_1P_2 , razmatra se i drugi ravni segment Q_1Q_2 , koji se „projektuje” u interval $[\eta_1, \eta_2]=[40,50]$. Međutim, s obzirom da se on nalazi na visini 0, rezultati MMM i HDM metoda će se poklopiti, ali čemo ipak radi kompletnosti ispisati postupak.

Vrednosti koje su nam od značaja za računanje tražene tačke \hat{z}_h su: $\zeta_1 = 0$, $\zeta_2 = 20$, $\eta_1 = 40$,

$\eta_2 = 50$, $p = \frac{2}{3}$ i $q = 0$, pa imamo:

$$\begin{aligned}\hat{z}_h &= \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{20+0}{2} + 0 \cdot \frac{40+50}{2}}{\frac{2}{3} + 0} \\ &= 10.\end{aligned}$$

Može se uočiti da je CAM metod dao značajno drugačiju vrednost od druga dva metoda. Prema tome, ukoliko finansijski stručnjaci treba da procene klijentovu toleranciju rizika, uzimajući u obzir da je njegov godišnji prihod 40000\$, a ukupna neto vrednost kojom raspolaže 250000\$, primenom HDM metoda nivo tolerancije rizika na skali od 0 do 100 će iznositi 10. U tom slučaju, klijentu je potrebno predložiti *veoma malo rizičnu* investicionu strategiju.

S druge strane, upotrebom CAM metoda, nivo tolerancije rizika je procenjen na 18, pa će finansijski stručnjaci klijentu predložiti *blago rizičnu* investicionu strategiju.

4.2 Specijalan slučaj modifikovanog modela

Analogno prethodnom poglavlju, biće razmotreno redizajniranje if-then pravila u slučaju kada je klijent „optimističan”, odnosno kada je spreman da prihvati viši nivo rizika.

Finansijski stručnjaci moraju da obave razgovor sa klijentom i izanaliziraju njegove investicione preference, nakon čega kreiraju novu, korigovanu Tabelu odlučivanja.

	L	M	H
L	L	MO	MO
M	MO	MO	H
H	MO	H	H

Tabela 4.5 Tabela odlučivanja za modifikovani model tolerancije rizika „optimističnog” klijenta

Radi kasnije lakšeg poređenja dobijenih rezultata, ostajemo dosledni primeru, te će i ovog puta ulazne vrednosti biti: godišnji prihod (AI u hiljadama \$) $x_0 = 40$ i ukupna neto vrednost (TNW u desetinama hiljada \$) $y_0 = 250$. Uvođenjem konkretnih vrednosti dobijen je sledeći oblik fazi ulaznih promenljivih:

$$\mu_L(40) = \frac{1}{3}, \quad \mu_M(40) = \frac{2}{3},$$

$$\mu_L(25) = \frac{5}{6}, \quad \mu_M(25) = \frac{1}{6}.$$

Uzrokovana tabela sada izgleda:

	$\mu_L(25) = \frac{5}{6}$	$\mu_M(25) = \frac{1}{6}$	0
$\mu_L(40) = \frac{1}{3}$	$\mu_L(z)$	$\mu_{MO}(z)$	0
$\mu_M(40) = \frac{2}{3}$	$\mu_{MO}(z)$	$\mu_{MO}(z)$	0
0	0	0	0

Tabela 4.6 Uzrokovana tabela odlučivanja modifikovanog modela

Jačina primenjenih pravila se računa na sledeći način:

$$\alpha_{11} = \mu_L(40) \wedge \mu_L(25) = \max\left(0, \frac{1}{3} + \frac{5}{6} - 1\right) = \frac{1}{6},$$

$$\alpha_{12} = \mu_L(40) \wedge \mu_M(25) = \max\left(0, \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - 1\right) = 0,$$

$$\alpha_{21} = \mu_M(40) \wedge \mu_L(25) = \max\left(0, \frac{2}{3} + \frac{5}{6} - 1\right) = \frac{1}{2},$$

$$\alpha_{22} = \mu_M(40) \wedge \mu_M(25) = \max\left(0, \frac{2}{3} + \frac{1}{6} - 1\right) = 0.$$

i može se tabelarno prikazati:

	$\mu_L(25) = \frac{5}{6}$	$\mu_M(25) = \frac{1}{6}$	0
$\mu_L(40) = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	0
$\mu_M(40) = \frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	0
0	0	0	0

Tabela 4.7 Tabela jačine pravila modifikovanog modela

Za svako pojedinačno pravilo je potrebno naći kontrolnu izlaznu promenljivu, u oznaci CO. To se vrši pomoću aktivnih celija obe tabele (Tabela 4.6 i Tabela 4.7) na sledeći način:

CO prvog pravila: $\alpha_{11} \wedge \mu_L(z) = \max\left(0, \frac{1}{6} + \mu_L(z) - 1\right)$,

CO drugog pravila: $\alpha_{12} \wedge \mu_{MO}(z) = \max(0,0 + \mu_{MO}(z) - 1)$,

CO trećeg pravila: $\alpha_{21} \wedge \mu_{MO}(z) = \max\left(0, \frac{1}{2} + \mu_{MO}(z) - 1\right)$,

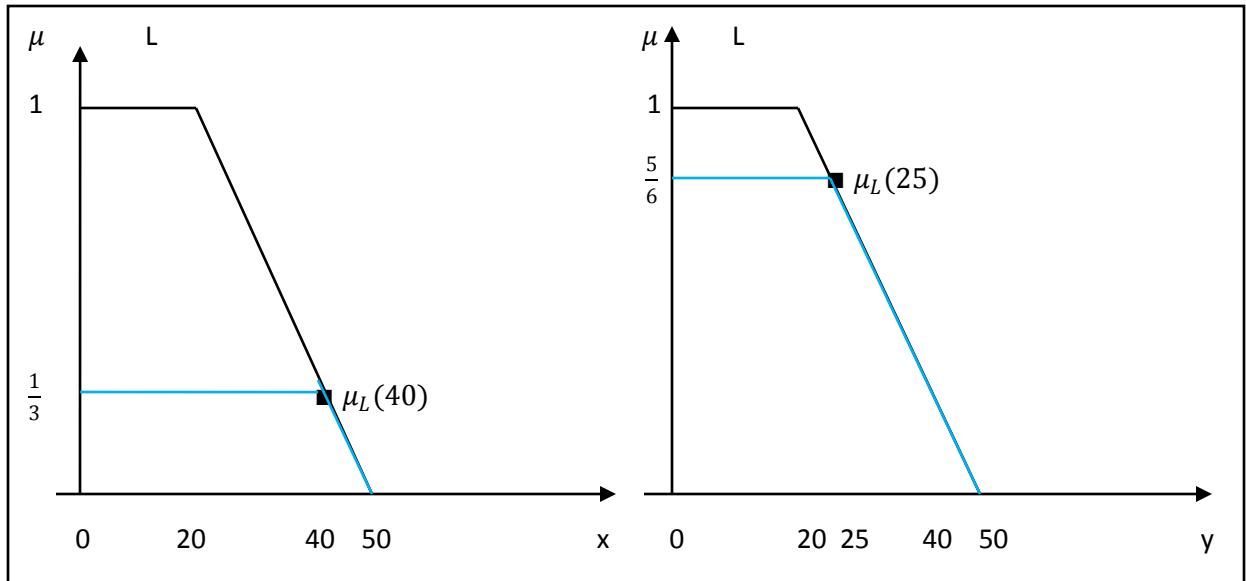
CO četvrtog pravila: $\alpha_{22} \wedge \mu_{MO}(z) = \max(0,0 + \mu_{MO}(z) - 1)$.

Dobijene vrednosti se mogu i tabelarno prikazati:

...
...	$\max\left(0, \frac{1}{6} + \mu_L(z) - 1\right)$	$\max(0,0 + \mu_{MO}(z) - 1)$...
...	$\max\left(0, \frac{1}{2} + \mu_{MO}(z) - 1\right)$	$\max(0,0 + \mu_{MO}(z) - 1)$...
...

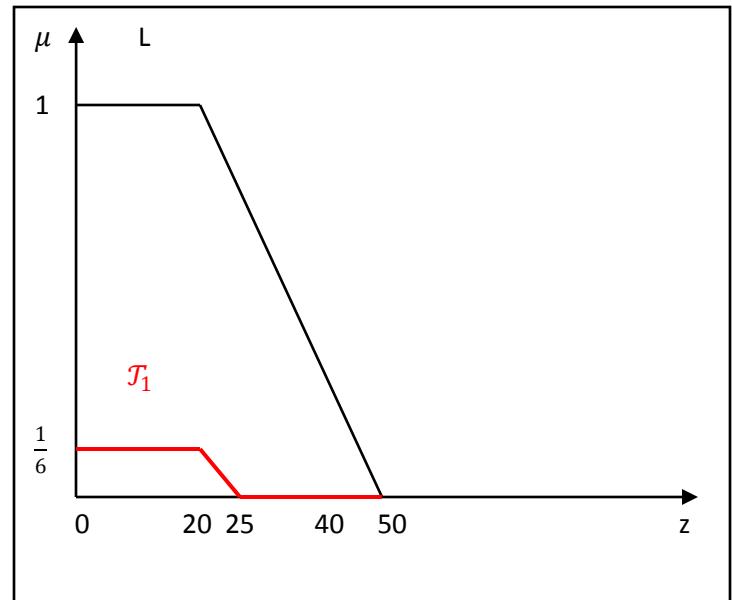
Tabela 4.8 Tabela kontrolnih izlaznih promenljivih za specijalan slučaj modifikovanog modela

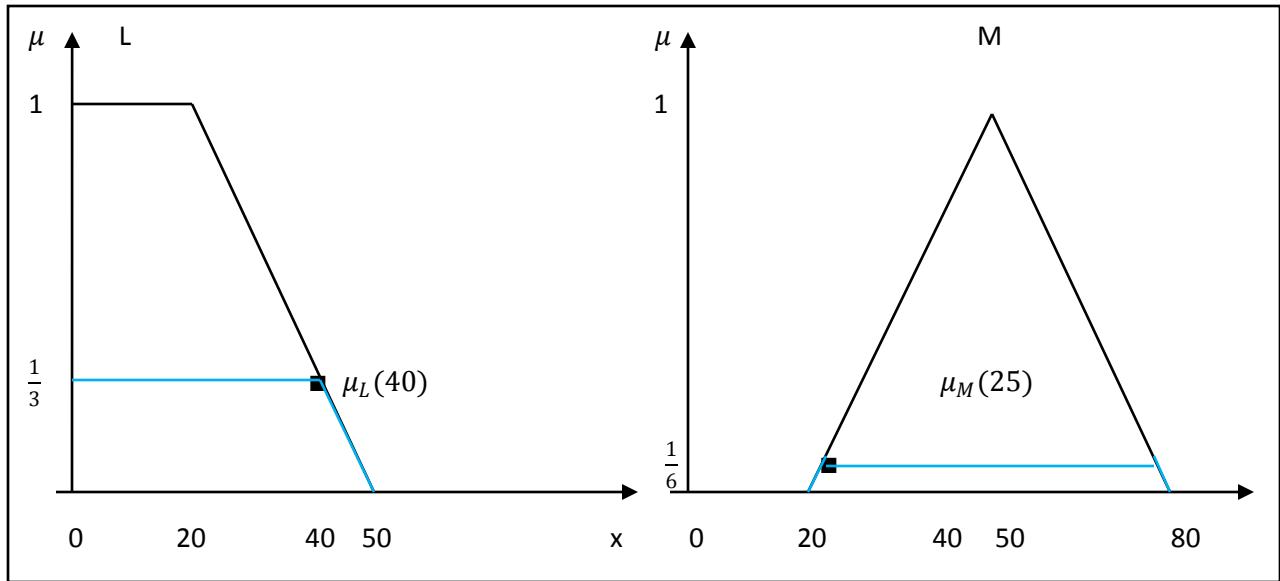
Međutim, radi lakše primene daljih postupaka, značajnije je dobijene kontrolne izlazne promenljive grafički prikazati.



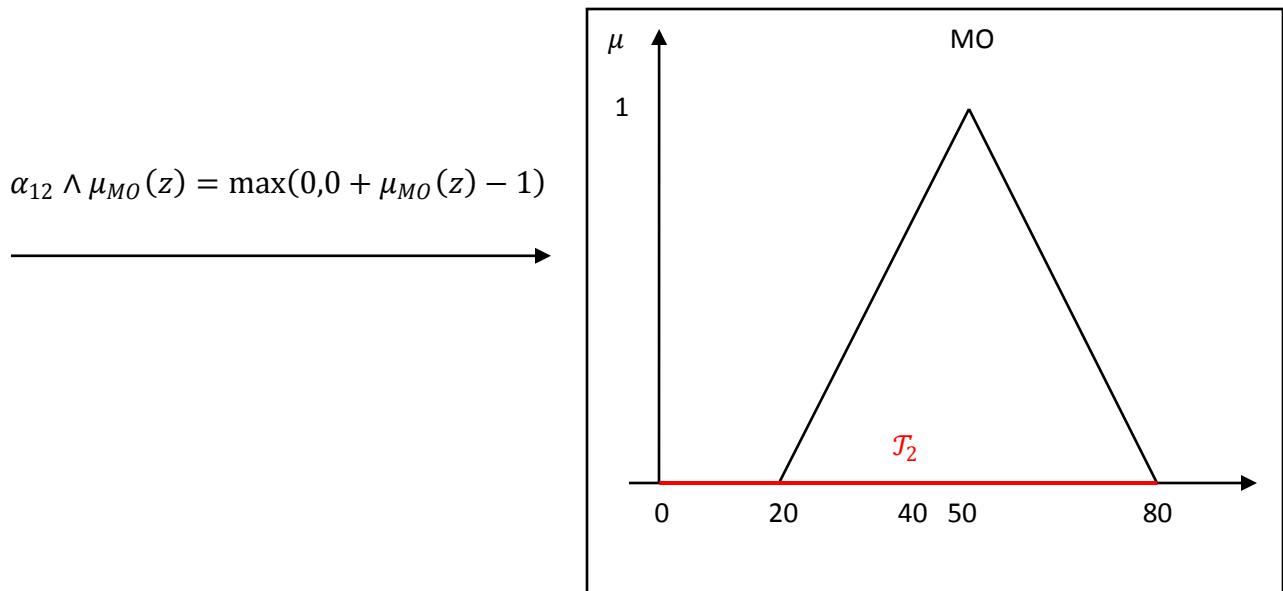
$$\alpha_{11} = \mu_L(40) \wedge \mu_L(25) = \max\left(0, \frac{1}{3} + \frac{5}{6} - 1\right) = \frac{1}{6}$$

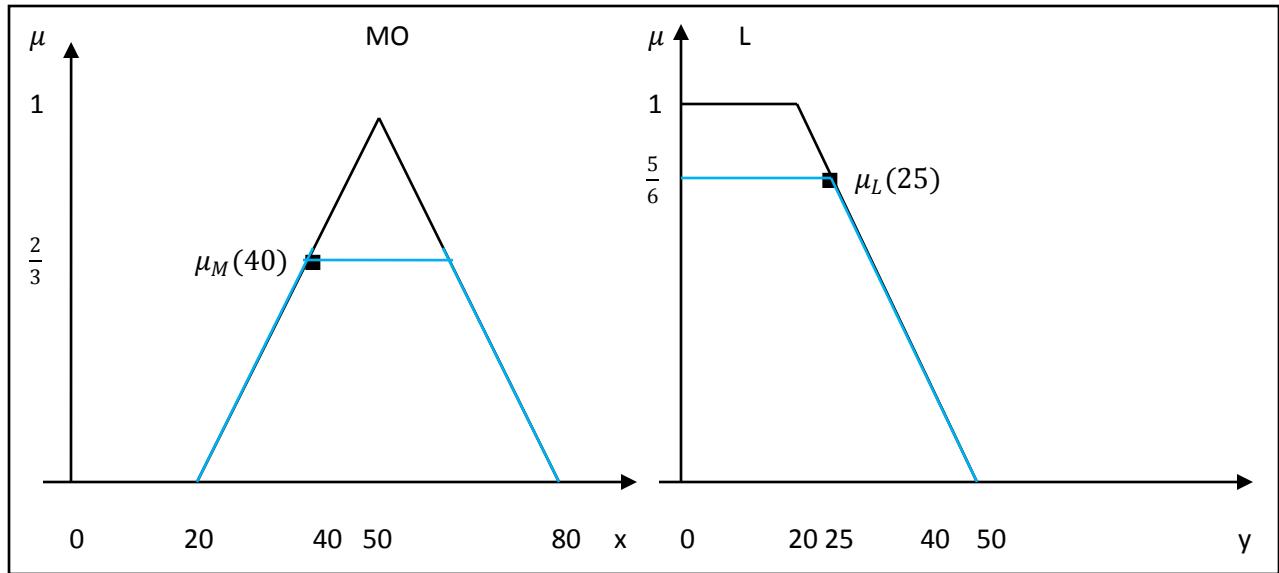
$$\alpha_{12} \wedge \mu_L(z) = \max(0, 0 + \mu_L(z) - 1)$$



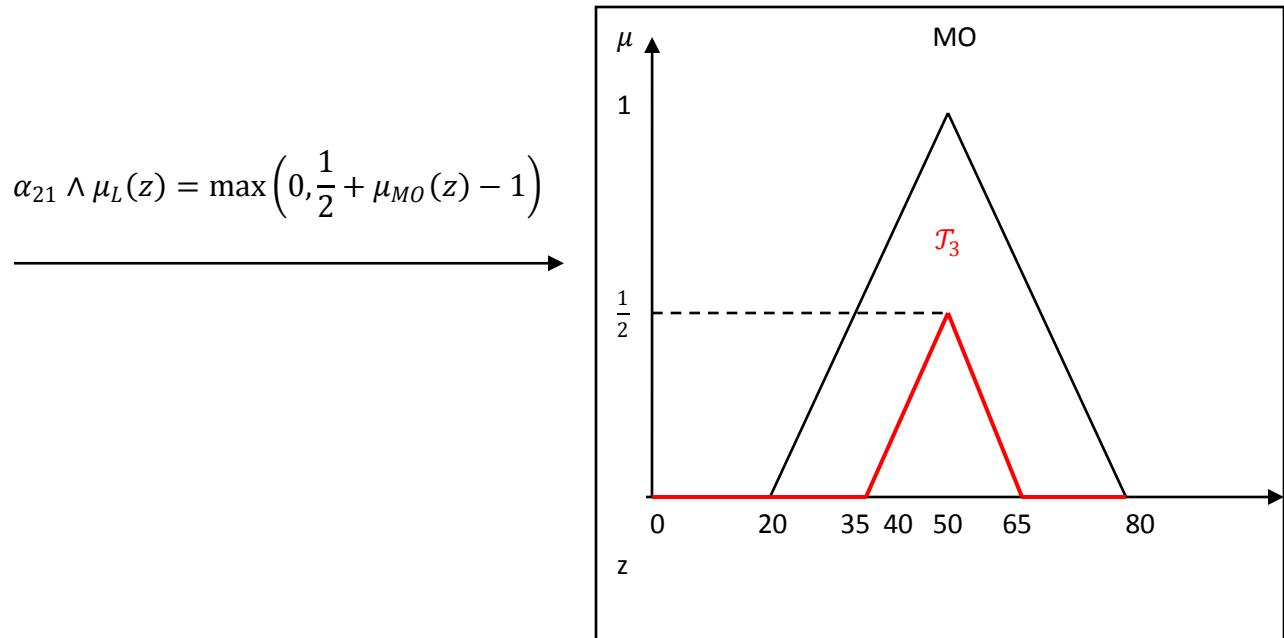


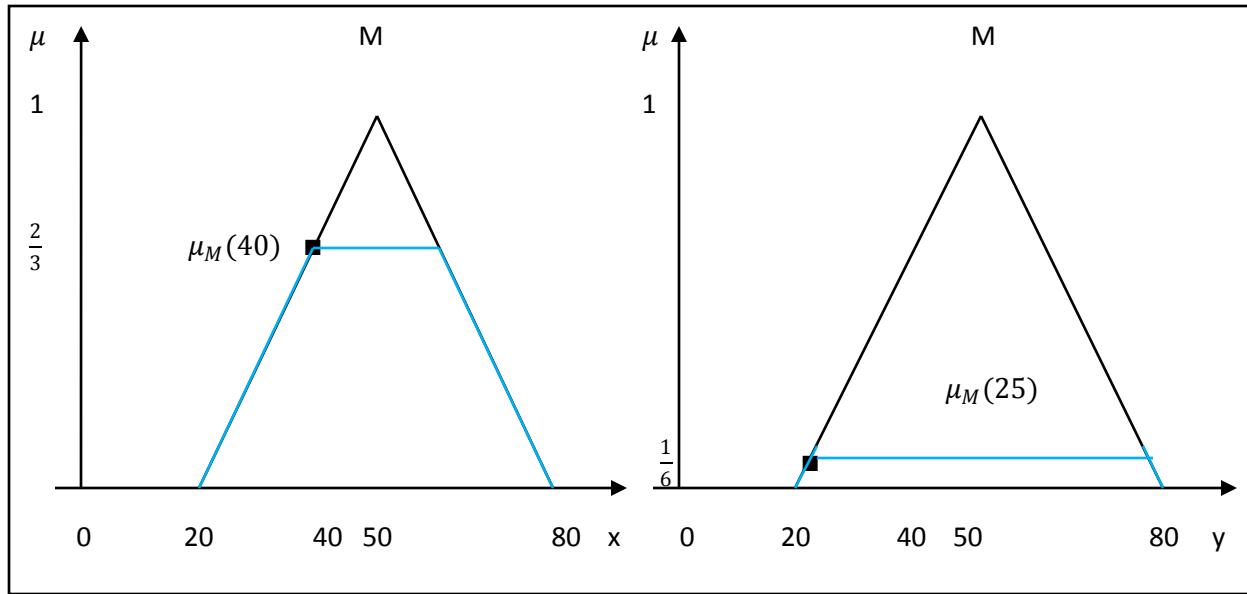
$$\alpha_{12} = \mu_L(40) \wedge \mu_M(25) = \max\left(0, \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - 1\right) = 0$$



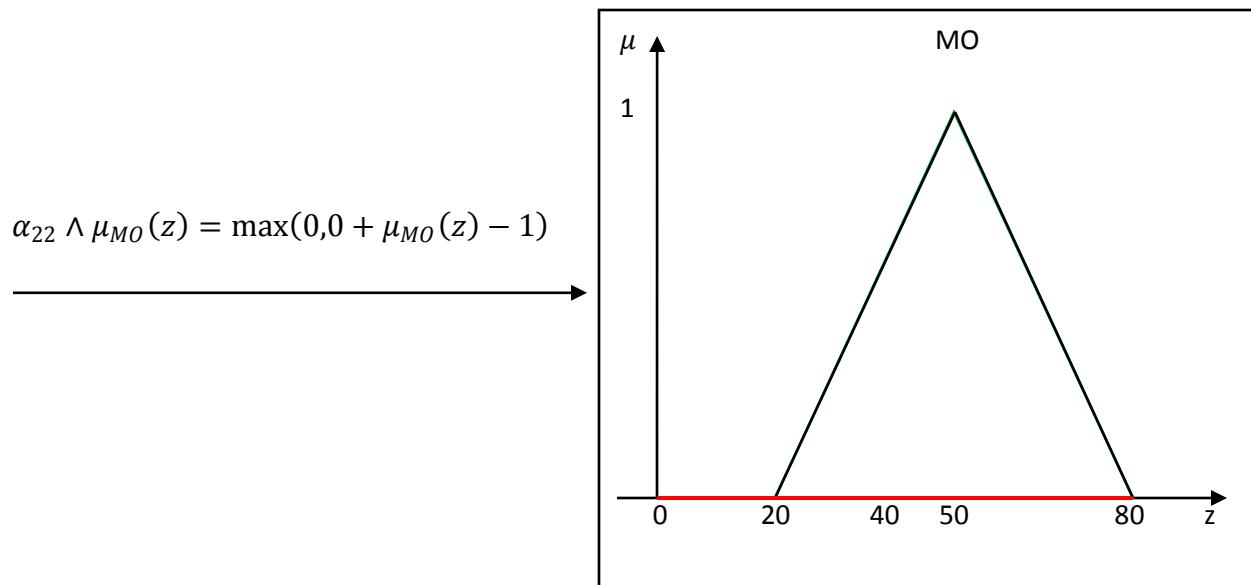


$$\alpha_{21} = \mu_M(40) \wedge \mu_L(25) = \max\left(0, \frac{2}{3} + \frac{5}{6} - 1\right) = \frac{1}{2}$$





$$\alpha_{22} = \mu_M(40) \wedge \mu_M(25) = \max\left(0, \frac{2}{3} + \frac{1}{6} - 1\right) = 0$$



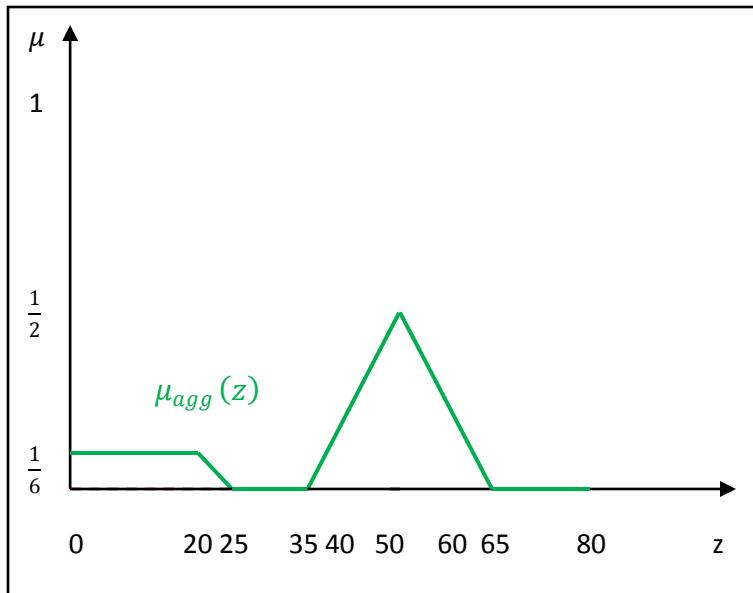
Slika 4.4 Grafički prikaz CO svakog pojedinačnog pravila za specijalan slučaj modifikovanog modela

Na dobijene kontrolne fazi izlazne promenljive \mathcal{T}_1 , \mathcal{T}_2 , \mathcal{T}_3 i \mathcal{T}_4 je potrebno primeniti postupak agregacije pomoću funkcije μ_{agg} . Sa Slike 4.4 se može videti da su izlazne promenljive drugog i četvrtog pravila nula funkcije, pa se zanemaruju, a postupak agregacije se primenjuje na prvo i treće pravilo. U geometrijskom smislu to znači da je potrebno naći infimum između jedinice i zbiru \mathcal{T}_1 i \mathcal{T}_3 u koordinatnom sistemu (z, μ) .

Prema tome imamo:

$$\mu_{agg}(z) = \min \left\{ 1, \max \left(0, \frac{1}{6} + \mu_L(z) - 1 \right) + \max \left(0, \frac{1}{2} + \mu_{MO}(z) - 1 \right) \right\},$$

i njen grafik je:



Slika 4.5 Kontrolna fazi izlazna vrednost za specijalan slučaj modifikovanog modela

Analitički oblik funkcije $\mu_{agg}(z)$ je:

$$\mu_{agg}(z) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & \text{za } 0 \leq z \leq 20 \\ \frac{25-z}{30}, & \text{za } 20 \leq z \leq 25 \\ 0, & \text{za } 25 \leq z \leq 35 \text{ i } 65 \leq z \leq 80 \\ \frac{z-35}{30}, & \text{za } 35 \leq z \leq 50 \\ \frac{65-z}{30}, & \text{za } 50 \leq z \leq 65 \end{cases}$$

Dobijena kontrolna fazi izlazna promenljiva će biti dekodirana pomoću CAM metoda defazifikacije.

1) CAM metod

Funkcija $\mu_{agg}(z)$ obuhvata interval $[0,80]$ koji ćemo podeliti na osam jednakih delova dužine 10.

z_k	10	20	30	40	50	60	70
$\mu_{agg}(z)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0

Tražena vrednost je tačka \hat{z}_C :

$$\begin{aligned} \hat{z}_C &= \frac{10 \cdot \frac{1}{6} + 20 \cdot \frac{1}{6} + 30 \cdot 0 + 40 \cdot \frac{1}{6} + 50 \cdot \frac{1}{2} + 60 \cdot \frac{1}{6} + 70 \cdot 0}{\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + 0} \\ &= 40. \end{aligned}$$

Vrednost dobijena CAM metodom defazifikacije iznosi 40, što znači da je klijentu, čiji je godišnji prihod 40 000\$ i ukupna neto vrednost 250000\$, potrebno predložiti *umereno rizičnu* investicionu strategiju.

Zaključak

U ovom radu su objašnjeni FLC procesi sa dve ulazne i jednom izlaznom promenljivom, kao i osnovni pojmovi iz teorije fazi skupova i fazi logike neophodni za njihovo razumevanje. Posebna pažnja je posvećena primeni ovih FLC procesa na modeliranje tolerancije rizika donosioca odluke.

Kroz rad je dat detaljan i postupan opis modela, koji se u mnogome baziraju na klijentovom shvatanju i spremnosti da prihvati rizik.

Finansijski stručnjaci se trude prilikom kreiranja modela da opišu klijentov odnos prema riziku i to čine formirajući Tabelu odlučivanja. S druge strane, upotreborazličitih operatora tokom FLC procesa, moguće je te klijentove preferencije ublažiti ili pojačati.

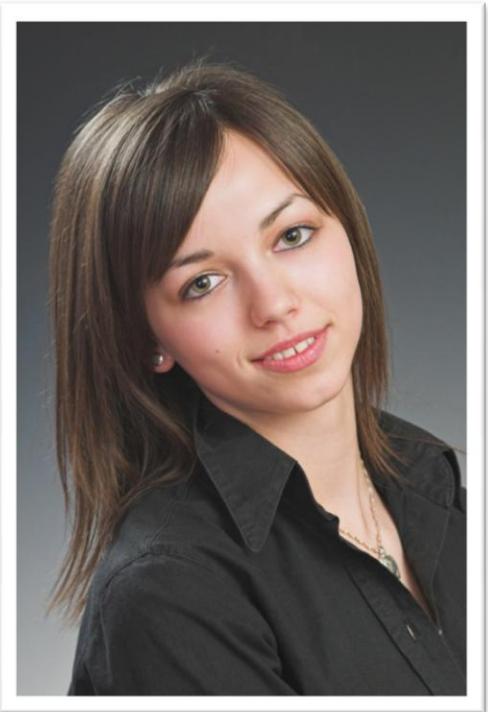
Modeli predstavljeni u radu se radi lakšeg poređenja zasnivaju na istim ulaznim promenljivama. Jedino što se menjalo su operatori i klijentovo ponašanje. Pomoću CAM metoda defazifikacije možemo zaključiti da do značajnih promena tolerancije rizika donosioca odluke dovodi njegovo ponašanje i rezonovanje bez obzira na primenjeni operator u FLC procesu. Prema tome ako primenimo T_M ili T_L trougaonu normu, u modelu kada klijent prirodno rezonuje, potrebno mu je ponuditi *blago rizičnu* investicionu strategiju, a ako je klijent „optimističan“ – *umereno rizičnu*. Međutim, odnos između prikazanih modela se može tumačiti na još neke načine. Ako modele razmatramo sa aspekta MMM ili HDM metoda defazifikacije, uočavamo da je operator baziran na T_L normi „pesimističan“. To znači da on ublažava klijentovu spremnost da prihvati rizik, te kod prirodnog rezonovanja *blago rizične* investicione strategije „spušta“ na nivo *malo rizičnih*.

Sama tema rada je savremena i primenljiva u praksi, te mi je stoga bila inspirativna i zanimljiva. Nadam se da će prezentovani materijal pružiti dobru osnovu čitaocu za upoznavanje sa osnovnim pojmovima o FLC procesima i njihovoj primeni i da će uspeti da pruži smernice za dalje istraživanje.

Literatura

- [1] Bojadziev G., Bojadziev M.; *Fuzzy logic for business, finance and management*, World Scientific 1999.
- [2] Bojadziev G., Bojadziev M.; *Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, Applications*, World Scientific 1995.
- [3] Buckley J.J., Eslami E., Feuring T.; *Fuzzy mathematics in economics and engineering*, Springer, 2002.
- [4] Campos L.M., Gonzales A.; *A subjective approach for ranking fuzzy numbers*, Fuzzy sets and systems, Vol. 29, pp. 145-153, 1989.
- [5] De Baets Bernard, Marková - Stupňanová Andrea; *Analytical expressions for the addition of fuzzy intervals* Fuzzy sets and systems, Vol. 91, pp 203-213, 1997.
- [6] Fullér R.; *Fuzzy reasoning and fuzzy optimization*, Turku Centre for Computer Science, Abo, 1998.
- [7] Haans M.; *Applied fuzzy Arithmetic- an introduction with engineering applications*, Springer, 2005.
- [8] Keresztfalvi T.; *t-norm based product of LR fuzzy numbers*, Department of Mathematics and statistics, J.W. Goethe University, Frankfurt
- [9] Klement E.P., Mesiar R., Pap E.; *Triangular norms*, Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [10] Lootsma F.A.; *Fuzzy logic for planning and decision making*, Springer, 1997.
- [11] Pap E.; *Fazi mere i njihova primena*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno matematički fakultet Novi Sad, 1999.
- [12] Schweizer B., Skalar A.; *Associative functions and abstract semigroups*, Publ. Math. Debrecen, pp. 69-81, 1983.
- [13] Stefanini L., Sorini L.; *Fuzzy arithmetic with parametric LR fuzzy numbers*, Department of Economics and quantitative methods, University of Urbino "Carlo Bo", Italy

Biografija



Miljana Karanović je rođena 30. avgusta 1988. godine u Novom Sadu. Osnovnu školu „Danilo Zelenović“ u Sirigu završila je 2003. godine kao nosilac Vukove diplome. Zatim upisuje Gimnaziju „Jovan Jovanović Zmaj“ u Novom Sadu, društveno-jezički smer, koju završava 2007. godine, takođe kao vukovac. Shvativši da su prirodne nauke njen izbor, iste godine upisuje Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, smer matematika finansija. Zaključno sa junskim ispitnim rokom 2011. godine, položila je sve predviđene ispite sa prosekom 9,77. Nakon toga, na istom fakultetu upisuje master studije, smer primenjena matematika. Položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom zaključno sa junskim ispitnim rokom 2012. godine sa prosečnom ocenom 10,00 i time stekla uslov za odbranu master rada.

Ključna dokumentacija

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Master rad

VR

Autor: Miljana Karanović

AU

Mentor: dr Ivana Štajner-Papuga

ME

Naslov rada: Modeliranje tolerancije rizika donosioca odluke primenom FLC procesa

NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: s/en

JI

Zamlja publikovanja: Republika Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2012.

GO

Izdavač: autorski reprint

Mesto i adresa: Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4

MA

Fizički opis rada: (4/81/13/21/34/0/0)

FOR (broj poglavlja/strana/lit.citata/tabela/slika/grafika/priloga)

Naučna oblast: matematika

NO

Naučna disciplina: primenjena matematika

ND

Predmetne odrednice: Fazi skup, fazi broj, FLC (Fuzzy logic control) proces
ključne reči: **(PO, UDK)**

Čuva se: u biblioteci Departmana za matematiku i informatiku
ČS

Važna napomena: nema

VN

Izvod (**IZ**): U ovom radu je dat detaljan opis FLC (Fuzzy logic control) procesa sa dve ulazne i jednom izlaznom promenljivom. Objasnjeni su i osnovni pojmovi iz teorije fazi skupova i fazi logike, sa akcentom na tumačenje logičkih operatora pomoću trougaonih normi. Kroz četiri različita modela je prikazana primena FLC procesa na modeliranje klijentove spremnosti za prihvatanje rizika prilikom investiranja sredstava u određene projekte.

Datum prihvatanja teme
od strane NN veća: 10.05.2012.

DP

Datum odbrane: decembar 2012.
DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: prof. dr Zagorka Lozanov-Crvenković, redovni profesor prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Član: dr Tatjana Grbić, docent Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu

Mentor: dr Ivana Štajner-Papuga, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Textual printed material
TR

Contents code: Master's thesis
CC

Author: Miljana Karanović
AU

Mentor: Dr Ivana Štajner-Papuga
ME

Title: The FLC process on a client financial risk tolerance model
TI

Language of text: Serbian (Latin)
LT

Language of abstract: s /en
LT

Country of publication: Republic of Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2012.
PY

Publisher: author's reprint
PU

Publ. place: Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: (4/81/13/21/34/0/0)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Applied mathematics
SD

Subject Key words: Fuzzy sets, fuzzy numbers, FLC process
SKW

Holding data: In the library of Department of Mathematics and Informatics
HD

Note:
N

Abstract (AB): This paper presents a detailed description of the FLC (Fuzzy logic control) process with two inputs and one output variable. Basic concepts of the theory of fuzzy sets and fuzzy logic are explained, with emphasis on the interpretation of logical operators with triangular norms. Application of the FLC process modeling customer willingness to take risks when investing funds in certain projects is shown through four different models.

Accepted on Scientific board on: 5/10/2012
AS

Defended: December 2012
DE

Thesis Defend board:
DB

President: Dr Zagorka Lozanov-Crvenković, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Member: Dr Tatjana Grbić, assistant professor, faculty of Technical Sciences, University of Novi Sad

Mentor: Dr Ivana Štajner-Papuga, associate professor, Faculty of Sciences,
University of Novi Sad