UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Milijana Milovanović

Linearna uređenja i GO prostori

-Master rad-

Mentor: dr Aleksandar Pavlović

Novi Sad, 2015.

Sadržaj

Predgovor

Ideja o uređenju stara je koliko i sama ideja o brojevima i njom su se matematičari oduvijek bavili. Na toj ideji nastali su veliki rezultati. U ovom radu posebnu pažnju posvetićemo specijalnoj klasi uređenih prostora - *linearno uređenim topološkim prostorima*, skraćeno LOTS, od engleskih izraza *linear ordered topological spaces*, kao i *uopšteno uređenim prostorima.* Za njih ćemo koristiti skraćeni naziv *GO prostori*, nastao od engleskog izraza - *generalized ordered spaces.*

Posljednjih dvadesetak godina desio se bitan napredak u razumijevanju topologije linearno uređenih prostora, kao i njihovih potprostora, uopšteno uređenih prostora. U ovom radu, pored samih definicija tih prostora, biće prezentovani i neki od tih rezultata.

Rad je sastavljen iz pet poglavlja. Preduslov za njegovo čitanje su elementarna znanja iz teorije skupova, realne analize, osnovni pojmovi iz algebre, kao i iz opšte topologije, mada je dosta pojmova u njemu i navedeno.

U prvom dijelu su izloženi neki osnovni pojmovi iz teorije kardinala i ordinala, kao i aksioma izbora koja se u ovom radu podrazumijeva.

Drugi dio rada sadrži osnovne definicije vezane za topološke prostore, neke osnovne teoreme (bez dokaza), priču o neprekidnim preslikavanjima, kao i spisak nekih najvažnijih osobina topoloških prostora. Sve ono što ovdje nije navedeno, a eventualno bude korišteno u daljem tekstu, čitalac može pronaći u [16] ili [11].

Treći dio uvodi pojam uređenja u topološke prostore i zapravo predstavlja uvertiru u samu srž rada, a to je četvrto poglavlje, u kojem se uvode LOTS i GO prostori. Ono ima nekoliko dijelova. Najprije se te klase prostora uvode, a zatima se daje njihova osnovna (prvobitna) karakterizacija. U drugom dijelu ove glave date su još tri karakterizacije uopšteno uređenih prostora. Naravno, u zavisnosti od toga koje osobine prostora posmatramo, moguće su i neke druge karakterizacije koje nisu navedene u ovom radu. Na kraju ove glave posmatraju se neke klase GO prostora, tj. prostori sa određenim dodatnim osobinama. Daje se i spisak nekih otvorenih pitanja vezanih za njih.

U završnom dijelu rada, kao svojevrstan zaključak, dat je kratak istorijski pregled priče o uređenim i uopšteno uređenim prostorima.

Tema je svakako široka i trebalo je na neki način opredijeliti se za ona poglavlja koja sama po sebi predstavljaju dovoljan izvor informacija o GO i linearno uređenim prostorima. Svakako se nadam da sam u tome barem djelimično uspjela. Naravno, ostalo je jako puno toga što nije ni pomenuto u ovom radu, a što može biti dobra tema za neke buduće radove ovog tipa.

Pored sopstvenog truda da ovaj rad bude što kvalitetniji, svakako najveću zahvalnost dugujem mentoru, dr Aleksandru Pavloviću, koji je, uz puno strpljenja, svojim savjetima to omogućio. Takođe, hvala i članovima komisije, dr Ljiljani Gajić i dr Milošu Kuriliću što su se prihvatili tog posla i svakako svojim imenima cijelu ovu priču podigli na viši nivo.

1 Uvod

1.1 Kardinalni brojevi. Operacije

Za skupove X i Y kažemo da su *ekvipotentni* ako postoji 1 - 1 preslikavanje skupa X u skup Y. Svakom skupu X pridružujemo kardinalni broj i nazivamo ga *kardinalnost* skupa X, u oznaci $|X|$. Važi $|X| = |Y|$ ako i samo ako su X i Y ekvipotentni. Ako je skup konačan, njegova kardinalnost jednaka je zapravo broju njegovih elemenata. Kardinalni broj skupa prirodnih brojeva označava se sa $\aleph_0$, a kardinalni broj skupa realnih brojeva sa $\mathbf{c}$. Za skup kažemo da je *prebrojiv* ako je konačan ili mu je kardinalnost $\aleph_0$ (tad je skup *beskonačno prebrojiv*).

Za kardinalne brojeve definišu se operacije sabiranja i množenja. Naime, *suma* kardinalnih brojeva $\mathbf{m}$ i $\mathbf{n}$, u oznaci $\mathbf{m} + \mathbf{n}$, je kardinalnost skupa $X \cup Y$, pri čemu je $|X| = \mathbf{m}$, $|Y| = \mathbf{n}$ i $X \cap Y = \emptyset$. *Proizvod* kardinalnih brojeva $\mathbf{m}$ i $\mathbf{n}$, u oznaci $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}$ ili $\mathbf{mn}$, je kardinalnost skupa $X \times Y$, gdje je $|X| = \mathbf{m}$ i $|Y| = \mathbf{n}$. Za svaki kardinalni broj $\mathbf{m}$, $2^{\mathbf{m}}$ je kardinalnost familije svih podskupova od X, pri čemu je $|X| = \mathbf{m}$. Pokazuje se da je $2^{\aleph_0} = \mathbf{c}$. Uopšte, $\mathbf{n}^{\mathbf{m}}$ je kardinalnost skupa svih funkcija X u Y, gdje je $|X| = \mathbf{m}$ i $|Y| = \mathbf{n}$. Važi i

$$\mathbf{n}^{\mathbf{m}_1+\mathbf{m}_2} = \mathbf{n}^{\mathbf{m}_1}\mathbf{n}^{\mathbf{m}_2},\ (\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2)^{\mathbf{m}} = \mathbf{n}_1^{\mathbf{m}}\mathbf{n}_2^{\mathbf{m}},\ (\mathbf{n}^{\mathbf{m}_1})^{\mathbf{m}_2} = \mathbf{n}^{\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2}.$$

Naka su opet $\mathbf{m}$ i $\mathbf{n}$ kardinalni brojevi i neka je $|X| = \mathbf{m}$ i $|Y| = \mathbf{n}$. Kažemo da $\mathbf{m}$ *nije veće* od $\mathbf{n}$, ili da $\mathbf{n}$ *nije manje* od $\mathbf{m}$ i pišemo $\mathbf{m} \leq \mathbf{n}$ ili $\mathbf{n} \geq \mathbf{m}$, ako postoji 1-1 preslikavanje skupa X u skup Y. Fundamentalna nejednakost vezana za kardinalne brojeve je takozvana *Cantor-Bernsein* teorema: *Ako je $\mathbf{m} \leq \mathbf{n}$ i $\mathbf{n} \leq \mathbf{m}$, tada je $\mathbf{m} = \mathbf{n}$.*

Jasno je da za svako preslikavanje f definisano na skupu X važi $|f(X)| \leq |X|$. Ovo povlači da, specijalno, familija svih podskupova kardinalnosti $\leq \mathbf{m}$ u skupu kardinalnosti $\mathbf{n} \geq \mathbf{m}$, ima kardinalnost $\leq \mathbf{n}^{\mathbf{m}}$.

Suma dva kardinalna broja, od kojih je barem jedan beskonačan, jednaka je nemanjem od njih. Ovo važi i za proizvod dva kardinalna broja, pod uslovom da su različiti od nule. Specijalno, za $\mathbf{m} \geq \aleph_0$, važi:

$$\mathbf{m} + \mathbf{m} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{m}.$$

Ako je $\mathbf{m} \leq \mathbf{n}$ i $\mathbf{m} \neq \mathbf{n}$, kažemo da je $\mathbf{m}$ *manje* od $\mathbf{n}$, ili da je $\mathbf{n}$ *veće* od $\mathbf{m}$, što zapisujemo $\mathbf{m} < \mathbf{n}$ ili $\mathbf{n} > \mathbf{m}$. Za svaki kardinalan broj $\mathbf{m}$, važi:

$$\mathbf{m} < 2^{\mathbf{m}}.$$

Specijalno, $\aleph_0 < \mathbf{c}$.

Neka je $S = \{1, 2, \ldots k\}$. *Najmanje gornje ograničenje* skupa $\{\mathbf{m}_s\}_{s \in S}$ kardinalnih brojeva definiše se kao najmanji kardinalni broj $\mathbf{m}$, takav da je $\mathbf{m} \geq \mathbf{m}_s$, za sve $s \in S$ i označava sa $\sup_{s \in S} \mathbf{m}_s$. Može se pokazati da takav broj uvijek postoji.

1.2 Relacije poretka. Ordinalni brojevi

Definicija 1.1 *Neka je X skup i $<$ relacija na njemu. Kažemo da $<$ linearno uređuje X, ili da je $<$ linearno uređenje na X, ako ima sljedeće osobine:*

(1) Ako je $x < y$ i $y < z$, onda je $x < z$.
(2) Ako je $x < y$, onda nije $y < x$.
(3) Ako je $x \neq y$, onda je $x < y$ ili $y < x$.

Skup X zajedno sa relacijom $<$ nazivamo *linearno uređen skup.*

Primjer 1.1 Poznati skupovi brojeva $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ su linearno uređeni.

Definicija 1.2 *Neka je $(A, <)$ linearno uređen skup.*

- *A je gust ako za svaki par uporedivih različitih elemenata $a < b$ postoji element x, takav da je $a < x < b$.*
- *Skup A je bez krajnjih tačaka ako za sve njegove elemente a postoje elementi tog skupa x, y takvi da je $x < a < y$*
- *A je linija ako je gust linearno uređen skup bez krajnjih tačaka.*

Primjer 1.2 $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$ nisu linije, jer nisu gusti, dok su $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$ linije.

Neka je skup X linearno uređen relacijom $<$, a skup Y relacijom $<'$. Za preslikavanje f skupa X u skup Y kažemo da *čuva poredak* ako za svaki par x, y elemenata iz X za koji je $x < y$, važi $f(x) <' f(y)$. Jasno, f je 1 - 1. Ako postoji takvo preslikavanje, koje je i *na*, kažemo da su X i Y *slični.*

Za element x_0 linearno uređenog skupa X kažemo da je *najmanji element* u X, ako je $x_0 < x$ za sve $x \in X \setminus \{x_0\}$. *Najveći element* linearno uređenog skupa definiše se analogno. Kako je svaki podskup linearno uređenog skupa linearno uređen, najmanji i najveći elementi podskupa linearno uređenog skupa su dobro definisani. Jasno, najmanji i najveći elementi ne moraju postojati.

Par (D, E) podskupova linearno uređenog skupa X relacijom $<$, za koji je $D \cup E = X$, $D \neq \emptyset \neq E$ i ako $x \in D$ i $y \in E$, onda je $x < y$, nazivamo *rez*[1]. Skup D je donji dio, a skup E gornji dio tog reza. Jasno je da su ti dijelovi disjunktni. Za svaki rez linearno uređenog skupa važi tačno jedan od sljedećih uslova:
(1) Donji dio ima najveći element i gornji dio ima najmanji element.
(2) Donji dio ima najveći element, ali gornji dio nema najmanji element.
(3) Donji dio nema najveći element, ali gornji dio ima najmanji element.
(4) Donji dio nema najveći element i gornji dio nema najmanji element.

Ukoliko je ispunjen uslov (1), takav rez nazivamo *skok*[2], a ako rez ispunjava uslov (4), nazivamo ga *jaz*[3].

Linearno uređen skup X je *gusto uređen* ako ne postoji rez skupa X koji je skok, a ukoliko pored toga ne postoji ni rez koji je jaz, X je *neprekidno uređen.* X je gusto uređen ako i samo ako za svaki par $x, y \in X$ za koje je $x < y$, postoji $z \in X$ tako da je $x < z < y$. Drugim riječima, za X kažemo da je gusto uređen ako ne sadrži nijedan par

[1]engleski: *cut*
[2]engleski: *jump*
[3]engleski: *gap*

uzastopnih elemenata. X je neprekidno uređen ako i samo ako je, pored navedenog, za svaki neprazan podskup X_0 skupa X, skup

$$\{x \in X : a < x \text{ za sve } a \in X_0 \setminus \{x\}\}$$

prazan ili ima najmani element.

Svaki linearno uređen skup X je sličan podskupu skupa svih rezova u X koji ispunjavaju (1), (2) ili (4), koji je linearno uređen na sljedeći način:

$$(D_1, E_1) < (D_2, E_2) \text{ ako i samo ako } D_1 \subset D_2 \text{ i } D_1 \neq D_2.$$

Drugi skup nema jazova i neprekidno je uređen ako je X gusto uređen.

Za linearno uređenje $<$ na skupu X kažemo da je *dobro* (a za skup X da je *dobro uređen*), ako važi sljedeća osobina: *Svaki neprazan podskup skupa X ima najmanji element.*

Jasno je da je svaki skup kardinalnih brojeva dobro uređen relacijom $<$ definisanom u prethodnom poglavlju. Prema tome, za svaki kardinalni broj $\mathbf{m}$ postoji najmanji kardinalni broj veći od $\mathbf{m}$, koji označavamo sa $\mathbf{m}^+$. Kardinalne brojeve $\aleph_1$, $\aleph_2$, ... definišemo rekurzivno na sljedeći način: $\aleph_{i+1} = \aleph_i^+$, za $i = 0, 1, ...$ Jednakost $\mathbf{c} = \aleph_1$ naziva se *hipoteza kontinuuma* i nezavisna je od aksioma teorije skupova.

Svakom dobro uređenom skupu X dodjeljujemo ordinalni broj α koji nazivamo *tip poretka* tog skupa. Tipovi poretka dva dobro uređena skupa su jednaka ako i samo ako su ta dva skupa slična.

Neka su α i β tipovi poretka dobro uređenih skupova X i Y, redom. Kažemo da je α *manje* od β, ili da je β *veće* od α (što zapisujemo $\alpha < \beta$ ili $\beta > \alpha$) ako postoji $y_0 \in Y$ tako da su skupovi X i $\{y \in Y : y < y_0\}$ slični. Može se pokazati da je svaki skup ordinalnih brojeva dobro uređen ovom relacijom. Takođe, svaki dobro uređen skup čiji je tip poretka α, sličan je skupu svih ordinalnih brojeva manjih od α linearno uređenog relacijom $<$.

Ordinalni broj λ je *granični broj* ako ne postoji ordinalni broj koji mu neposredno prethodi, tj. za svako $\xi < \lambda$ postoji ordinalni broj α takav da je $\xi < \alpha < \lambda$. Ako ordinalni broj ξ neposredno prethodi broju α, kažemo da je ξ *prethodnik* ordinala α, a da je α *sljedbenik* ordinala ξ i pišemo $\alpha = \xi + 1$.

Svaki ordinalni broj ima sljedbenika: za ordinalni broj α i cio broj $n \geq 0$ definišemo induktivno $\alpha + n$ tako da je $\alpha + 0 = \alpha$ i $\alpha + n = [\alpha + (n-1)] + 1$ za $n \geq 1$. To znači da se proizvoljan ordinalan broj može na jedinstven način predstaviti kao $\lambda + n$, gdje je λ granični broj, a n nenegativan cio broj. Broj $\lambda + n$ je *paran (neparan)* ako je n paran (neparan).

Ako skup svih ordinalnih brojeva manjih od graničnog broja λ sadrži podskup A tipa α, tako da za svako $\xi < \alpha$ postoji $\xi' \in A$ za koje je $\xi < \xi' < \lambda$, tada kažemo da je ordinalan broj α *kofinal* sa λ.

Ako su X i Y slični skupovi, tada je $|X| = |Y|$, jer je funkcija uređenja 1-1. Stoga svakom ordinalnom broju α odgovara kardinalni broj koji zapravo predstavlja kardinalnost proizvoljnog dobro uređenog skupa tipa α. Taj kardinalni broj se naziva *kardinalnost* od α i označava se sa $|\alpha|$. Ako je $|\alpha| \leq \aleph_0$, kažemo da je ordinalan broj α *prebrojiv.*

Beskonačan ordinalan broj λ (tj. tip uređenja beskonačnog dobro uređenog skupa) je *inicijalni broj* ako je λ najmanji od svih ordinalnih brojeva α za koje je $|\alpha| = |\lambda|$, tj. ako je $|\xi| < |\lambda|$ za sve $\xi < \lambda$. Inicijalni ordinalni broj λ je *regularan* ako ne postoji $\alpha < \lambda$ koje je kofinal sa λ.

Za svaki kardinalni broj $\mathbf{m}$ postoji jedinstven inicijalni ordinalni broj λ takav da je $|\lambda| = \mathbf{m}$. Kardinalni broj $\mathbf{m}$ je *regularan* ako je inicijalni ordinalni broj λ, za koji je $|\lambda| = \mathbf{m}$, regularan. Takođe, za svaki kardinalan broj $\mathbf{m}$, kardinalan broj $\mathbf{m}^+$ je regularan. Inicijalan broj kardinalnosti $\aleph_0$ označavamo sa ω_0. Ovo je tip uređenja skupa svih pozitivnih cijelih brojeva sa uobičajenim poretkom. Analogno, inicijalni broj kardinalnosti $\aleph_i$, za $i = 1, 2, ...$, označavamo sa ω_i. Dakle, ω_1 je najmanji neprebrojiv ordinalni broj. Za svaki niz $\alpha_1, \alpha_2, ...$ ordinalnih brojeva manjih od ω_1, postoji ordinalan broj $\alpha < \omega_1$, takav da je $\alpha_i < \alpha$, za $i = 1, 2, ...$ Opštije, svakom ordinalnom broju α odgovara kardinalan broj $\aleph_\alpha$ i ordinalan broj ω_α koji je inicijalni broj kardinalnosti $\aleph_\alpha$. Može se pokazati da je svaki kardinalni broj jednak $\aleph_\alpha$, za neko α.

Ako je X dobro uređen skup relacijom $<$, tada je svaki podskup A skupa X koji za svako $x_0 \in X$ ispunjava uslov: ako je $\{x \in X : x < x_0\} \subset A$, onda $x_0 \in A$, jednak skupu X. Ova činjenica koristi se kao osnova u induktivnim dokazima (npr. ako je X skup svih ordinalnih brojeva manjih od datog ordinalnog broja α).

Neka je dat skup X i na njemu relacija $\leq$. Kažemo da $\leq$ uređuje X, ili da je $\leq$ uređenje na X, ako $\leq$ ima sljedeće osobine:
(1) Ako je $x \leq y$ i $y \leq z$, onda je $x \leq z$.
(2) Za sve $x \in X$, $x \leq x$.
(3) Ako je $x \leq y$ i $y \leq x$, onda je $x = y$.

Skup X zajedno sa relacijom $\leq$ nazivamo *uređen skup*[4]. Dva elementa x i y uređenog skupa X mogu biti *neuporediva*, tj. može se desiti da nije ni $x \leq y$ ni $y \leq x$.

Svaka familija skupova uređena je relacijom $\subset$.

Ako je X linearno uređen skup relacijom $<$, tada definišući za $x, y \in X$:

$$x \leq y \text{ ako i samo ako je } x < y \text{ ili } x = y$$

dobijamo uređenje na X. Dakle, svaki linearno uređen skup je uređen skup. Ako za svaki par x, y elemenata skupa A, koji je podskup uređenog skupa X, imamo $x \leq y$ ili $y \leq x$, tada definišući

$$x < y \text{ ako i samo ako je } x \leq y \text{ i } x \neq y$$

dobijamo linearno uređenje na A. Tada kažemo da je A *linearno uređen podskup* skupa X.

Element u uređenog skupa X je *najmanje gornje ograničenje* podskupa A skupa X (kažemo i *supremum* skupa A i koristimo oznaku $\sup A$), ako je $x \leq u$ za sve $x \in A$ i ako za proizvoljno $v \in X$ takvo da je $x \leq v$ za sve $x \in A$, važi $u \leq v$. *Najveće donje ograničenje* podskupa A skupa X (ili *infimum* skupa A, u oznaci $\inf A$) definiše se analogno. Primijetimo da je najmanje gornje ograničenje skupa X, ako postoji, zapravo najveći element skupa X, a da je najmanje gornje ograničenje praznog skupa (naravno ako postoji) najmanji element u X.

Neka je X skup i $\leq$ relacija na njemu. Kažemo da $\leq$ *usmjerava* (vodi)[5] X, ili da je X *usmjeren* relacijom $\leq$, ako $\leq$ ima sljedeće osobine:

---

[4]Koristi se još i izraz *parcijalno uređen skup - poset.*

[5]engleski: *directs*

(1) Ako je $x \leq y$ i $y \leq z$, onda je $x \leq z$.
(2) Za sve $x \in X$, $x \leq x$.
(3) Za proizvoljne $x, y \in X$ postoji $z \in X$ tako da je $x \leq z$ i $y \leq z$.

Podskup A skupa X, usmjerenog relacijom $\leq$, je *kofinal*[6] u X ako za sve $x \in X$ postoji $a \in A$ tako da je $x \leq a$. Kofinal podskupovi linearno uređenih skupova i uređenih skupova, definišu se na sličan način.

Neka su X i Y uređeni (usmjereni) relacijom $\leq$ i $\leq'$, redom. Za funkciju f skupa X u skup Y kažemo da je *neopadajuća* ako je $f(x) \leq' f(y)$, za sve $x, y \in X$ koji zadovoljavaju uslov $x \leq y$. *Nerastuće* funkcije definišu se analogno.

1.3 Aksioma izbora

U daljem tekstu biće korištena *aksioma izbora*, kao i neke važne teoreme teorije skupova koje su zapravo alternativni oblici te aksiome. Navešćemo one najvažnije. Prije toga, uvedimo još neke pojmove.

Za element x_0 uređenog skupa X kažemo da je *maksimalan element* skupa X ako iz $x_0 \leq x \in X$ slijedi da je $x_0 = x$. Neka je dat skup X i svojstvo $\mathcal{P}$ koje se odnosi na podskupove skupa X. Kažemo da je $\mathcal{P}$ osobina *konačnog karaktera* ako prazan skup ima svojstvo $\mathcal{P}$ i skup $A \subset X$ ima osobinu $\mathcal{P}$ ako i samo ako svi konačni podskupovi skupa A imaju tu osobinu.

AKSIOMA IZBORA (**AC**): *Za svaku familiju $\{X_s\}_{s \in S}$ nepraznih skupova postoji funkcija f koja preslikava skup S u skup $\bigcup_{s \in S} X_s$, tako da $f(s) \in X_s$ za sve $s \in S$.*

Važna teorema koja slijedi iz aksiome izbora je *Zermelova teorema o dobrom uređenju*: *Na svakom skupu X postoji relacija $<$ koja taj skup dobro uređuje.*

Važan je i sljedeći princip, poznat kao *Teichmüller-Tukey lema:*
Ako je $\mathcal{P}$ osobina konačnog karaktera koja se odnosi na podskupove skupa X, tada je svaki skup $A \subset X$ koji ima tu osobinu sadržan u skupu $B \subset X$, koji takođe ima to svojstvo i maksimalan je u familiji svih podskupova skupa X koji imaju osobinu $\mathcal{P}$ a uređeni su relacijom $\subset$.

Navedimo i poznatu *Kuratowski-Zorn lemu:*
Ako za svaki linearno uređen podskup A skupa X uređenog relacijom $\leq$ postoji $x_0 \in X$ tako da je $x \leq x_0$ za sve $x \in A$, tada X ima maksimalan element.

Sve četiri navedene tvrdnje su ekvivalentne. Dokaz je moguće naći u [11].

2 Topološki prostori

2.1 Osnovni pojmovi

U ovom poglavlju izložićemo neke pojmove iz topologije koji će nam biti potrebni za definisanje pojmova i navođenje teorema vezanih za GO prostore. Takođe, biće navedene i mnoge teoreme, bez dokaza, a isti se mogu pronaći npr. u [16].

Definicija 2.1 *Topološki prostor je par $(X, \mathcal{O})$, gdje je X skup, a $\mathcal{O}$ familija podskupova skupa X koja zadovoljava sljedeće uslove:*
(O1) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$

[6] Za kofinal ćemo koristiti oznaku cf.

(O2) Ako $U_1, U_2 \in \mathcal{O}$*, onda* $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}$
(O3) Ako $\{A_i : i \in I\} \subset \mathcal{O}$*, onda* $\cup_{i \in I} A_i \in \mathcal{O}$*.*

Familija $\mathcal{O}$ naziva se još i *topologija* na X. Jasno je da svojstvo (O2) možemo induktivno proširiti na konačno mnogo skupova. Drugim riječima, topologija je familija skupova zatvorena u odnosu na konačne presjeke i proizvoljne unije. X zovemo *prostor*, a njegove elemente nazivamo *tačke* prostora.

Definicija 2.2 *Za podskupove skupa* X *koji pripadaju familiji* $\mathcal{O}$ *kažemo da su otvoreni skupovi datog prostora.*

Definicija 2.3 *Podskup* C *skupa* X *je zatvoren skup prostora* $(X, \mathcal{O})$ *ako je njegov komplement* $X \setminus C = \{x \in X : x \notin C\}$ *otvoren.*

Trebalo bi da je čitaocu jasno da je topologiju moguće definisati i preko familije zatvorenih skupova, imajući u vidu (O1) - (O3) i de Morganove zakone. Na taj način možemo reći: cio prostor i prazan skup su zatvoreni, konačna unija zatvorenih skupova je zatvoren skup i presjek proizvoljne familije zatvorenih skupova je zatvoren skup.

Najjednostavniji primjeri topologija:

- Ako je X skup i definišemo $\mathcal{O} := \mathcal{P}(X)$, tada $\mathcal{O}$ nazivamo *diskretna topologija* na X.

- Za proizvoljno X, familiju $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$ nazivamo *antidiskretna (trivijalna)* topologija na X.

Definicija 2.4 *Podskup topološkog prostora je "clopen" ako je i otvoren i zatvoren skup tog prostora.*

Napomena 2.1 Ako je $(X, \mathcal{O})$ proizvoljan topološki prostor, onda su $\emptyset$ i X "clopen" skupovi u tom prostoru.

Napomena 2.2 U diskretnoj topologiji svi podskupovi skupa X su "clopen" skupovi.

Definicija 2.5 *Za prostor* X *kažemo da je povezan ukoliko su jedini "clopen" skupovi tog prostora prazan skup i sam skup* X*.*

Pored otvorenih i zatvorenih skupova, u radu ćemo pominjati i neke specijalne skupove:

- G_δ - skup (može da se predstavi kao prebrojiv presjek otvorenih skupova)

- F_σ - skup (može da se predstavi kao prebrojiva unija zatvorenih skupova).

Jasno je da je komplement F_σ - skupa G_δ - skup, i obrnuto.

Definicija 2.6 *Neka je* $(X, \mathcal{O})$ *topološki prostor i* $x \in X$*, proizvoljno. Tada je* $A \subset X$ *okolina tačke* x *ako postoji skup* $U \in \mathcal{O}$ *tako da* $x \in U \subset A$*.*

Na osnovu izloženog, lako se dokazuje da važi sljedeća tvrdnja.

Teorema 2.1 *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Podskup $U \subset X$ je otvoren ako i samo ako za sve $p \in U$ postoji otvoren skup V takav da $p \in V \subset U$.*

Definicija 2.7 *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Familija $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ je baza topologije $\mathcal{O}$ ako za sve $x \in X$ i sve $V \in \mathcal{O}$ gdje $x \in V$, postoji $U \in \mathcal{B}$ tako da je $x \in U \subset V$.*

Ovaj uslov je zapravo ekvivalentan činjenici da se svaki neprazan otvoren podskup skupa X može predstaviti kao unija elemenata iz $\mathcal{B}$. Jasno, topološki prostor može imati više baza.

Proizvoljna baza $\mathcal{B}$ topološkog prostora $(X, \mathcal{O})$ ima sljedeće osobine:
(B1) Za proizvoljne $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ i svaku tačku $x \in U_1 \cap U_2$ postoji $U \in \mathcal{B}$ tako da $x \in U \subset U_1 \cap U_2$.
(B2) Za svako $x \in X$ postoji $U \in \mathcal{B}$ tako da $x \in U$.

Ukoliko proizvoljna familija $\mathcal{B}$ ima navedene osobine, kažemo da $\mathcal{B}$ *generiše topologiju na X.*

Navedimo neke primjere:

- Neka je $\mathbb{R}$ skup realnih brojeva i $\mathcal{O}$ familija koju čine svi skupovi $U \subset \mathbb{R}$ sa osobinom da za svako $x \in U$ postoji $\epsilon > 0$ tako da je $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset U$. Tako definisana familija $\mathcal{O}$ ispunjava uslove (O1) - (O3). Familija svih otvorenih intervala sa racionalnim krajnjim tačkama je jedna baza prostora $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$. Topologija $\mathcal{O}$ naziva se *uobičajena topologija realne prave.*

- Neka je $\mathbb{R}$ skup realnih brojeva i $\mathcal{B}$ familija svih intervala $[x, r)$, gdje je $x, r \in \mathbb{R}$, $x < r$ i r racionalan broj. Ovako izabrana familija $\mathcal{B}$ ima osobine (B1) i (B2). Dobijeni prostor naziva se *prava Sorgenfrey - a.*

Kolekcija $\mathcal{B}$ je *baza neke topologije* na nepraznom skupu X ako i samo ako ima sljedeće osobine:
(B1') $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$,
(B2') Za sve $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ skup $B_1 \cap B_2$ može da se predstavi kao unija elemenata iz $\mathcal{B}$.

Definicija 2.8 *Familija $\mathcal{P} \subset \mathcal{O}$ je podbaza topološkog prostora $(X, \mathcal{O})$ ako familija svih konačnih presjeka elemenata iz $\mathcal{P}$ predstavlja bazu za $(X, \mathcal{O})$.*

Definicija 2.9 *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $x \in X$, proizvoljno. Familija $\mathcal{B}(x)$ podskupova skupa X je baza okolina tačke x, ako važe sljedeći uslovi:*
(1) Elementi kolekcije $\mathcal{B}(x)$ su okoline tačke x.
(2) Za svaku okolinu U tačke x, postoji $V \in \mathcal{B}(x)$, tako da je $x \in V \subset U$.

Lako se pokazuje da, ukoliko je za svako $x \in X$ data familija $\mathcal{B}(x)$, tada je $\mathcal{B} = \cup_{x \in X} \mathcal{B}(x)$ baza topološkog prostora.

Za topološki prostor $(X, \mathcal{O})$, definisaćemo sljedeće kardinalne funkcije:

$$\chi(x, (X, \mathcal{O})) = min\{|\mathcal{B}(x)| : \mathcal{B}(x) \text{ je baza okolina tačke } x\}$$

$$\chi((X, \mathcal{O})) = sup\{\chi(x, (X, \mathcal{O})) : x \in X\}$$

$$\omega((X, \mathcal{O})) = min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ je baza topologije } \mathcal{O}\}$$

One se nazivaju, redom, *karakter tačke x*, *karakter topološkog prostora* $(X, \mathcal{O})$ i *težina* navedenog topološkog prostora. Ukoliko to ne dovodi do zabune, u radu ćemo umjesto $\chi((X, \mathcal{O}))$ i $\omega((X, \mathcal{O}))$ koristiti kraće oznake $\chi(X)$ i $\omega(X)$.

Ako je $\chi(X) \leq \aleph_0$, kažemo da topološki prostor X zadovoljava *prvu aksiomu prebrojivosti*, a ukoliko je $\omega(X) \leq \aleph_0$, reći ćemo da prostor zadovoljava *drugu aksiomu prebrojivosti*. Drugim riječima, prostor zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti ako svaka tačka tog prostora ima prebrojivu bazu, a drugu aksiomu prebrojivosti ako prostor ima prebrojivu bazu.

Familija $\{A_s\}_{s \in S}$ podskupova topološkog prostora X je *lokalno konačna* ako za svaku tačku $x \in X$ postoji okolina U takva da je skup $\{s \in S : U \cap A_s \neq \emptyset\}$ konačan. Ako svaka tačka prostora X ima okolinu koja siječe najmanje jedan skup date familije, tada kažemo da je familija *diskretna*.

Definicija 2.10 *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i skup A njegov podskup. Tačka $x \in X$ je tačka nagomilavanja skupa A ako svaki otvoren skup koji sadrži x, sadrži barem jednu tačku skupa A različitu od x.*

Na osnovu ovog pojma moguće je determinisati kad je neki skup zatvoren, kad ne. Naime, važi tvrdnja:

Teorema 2.2 *Podskup topološkog prostora je zatvoren ako i samo ako sadrži sve svoje tačke nagomilavanja.*

Skup svih tačaka nagomilavanja skupa A najčešće označavamo sa A'.

Definicija 2.11 *Tačka x topološkog prostora $(X, \mathcal{O})$ je izolovana ako $x \in X \setminus X'$.*

Definicija 2.12 *Za topološki prostor kažemo da je savršen ako nema izolovanih tačaka.*

Definicija 2.13 *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $A \subset X$. Unutrašnjost skupa A u X, u oznaci int$A$, je unija svih otvorenih podskupova skupa X sadržanih u A. Zatvorenje skupa A u X, u oznaci $\overline{A}$ [7], je presjek svih zatvorenih podskupova skupa X koji sadrže skup A.*

Jasno je da je unutrašnjost nekog skupa A najveći otvoren skup sadržan u A, a zatvorenje najmanji zatvoren skup koji sadrži skup A.

Na osnovu prethodno izloženog, može se pokazati da je

$$A \cup A' = \overline{A}.$$

Definicija 2.14 *Podskup A topološkog prostora $(X, \mathcal{O})$ je gust u X ako i samo ako je $\overline{A} = X$.*

Sad možemo definisati još neke familije skupova u topološkom prostoru.

Skup $A \subset X$ je *ko-gust* u X ako je $X \setminus A$ gust.

Skup $A \subset X$ je *nigdje gust* u X ako je $\overline{A}$ ko-gust.

Skup $A \subset X$ je *gust u sebi* ako je $A \subset A'$.

Definicija 2.15 *Za topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ kažemo da je separabilan ako skup X sadrži prebrojiv gust podskup.*

---

[7] Koristi se i oznaka $cl_X(A)$.

2.2 Neprekidna preslikavanja. Homeomorfizmi

Definicija 2.16 *Neka su $(X, \mathcal{O}_1)$ i $(Y, \mathcal{O}_2)$ topološki prostori. Za preslikavanje $f : X \to Y$ kažemo da je neprekidno ako je inverzna slika proizvoljnog otvorenog skupa u Y, otvoren skup u X, tj. za sve $V \in \mathcal{O}_2$, $f^{-1}(V) = \{x \in X : f(x) \in V\} \in \mathcal{O}_1$.*

Može se pokazati da je kompozicija neprekidnih preslikavanja ponovo neprekidno preslikavanje. Pomenućemo dvije važne klase neprekidnih preslikavanja: zatvorena preslikavanja i otvorena preslikavanja.

Definicija 2.17 *Neprekidno preslikavanje $f : X \to Y$ je zatvoreno (otvoreno) ako je slika svakog zatvorenog (otvorenog) podskupa skupa X, zatvoren (otvoren) podskup skupa Y.*

Naravno da postoji nekoliko potrebnih i dovoljnih uslova da se pokaže da je neprekidno preslikavanje zatvoreno (otvoreno). Prema jednom od njih, da bi neprekidno preslikavanje bilo otvoreno potrebno je i dovoljno da postoji baza domena tako da je slika svakog skupa te baze otvoren skup u kodomenu.

Definicija 2.18 *Neprekidno preslikavanje $f : X \to Y$ je homeomorfizam ako je f bijekcija i ako je preslikavanje $f^{-1} : Y \to X$ neprekidno. U tom slučaju kažemo da su topološki prostori $(X, \mathcal{O}_1)$ i $(Y, \mathcal{O}_2)$ homeomorfni i pišemo $(X, \mathcal{O}_1) \cong (Y, \mathcal{O}_2)$.*

Homeomorfizam topoloških prostora je relacija ekvivalencije. Lako se dokazuje i da ako je $f : X \to Y$ homeomorfizam, tada je i $f^{-1} : Y \to X$ takođe homeomorfizam. Takođe, kompozicija dva homeomorfizma je homeomorfizam. Jasno je i da prostori $(X, \mathcal{O}_1)$ i $(Y, \mathcal{O}_2)$ ne mogu biti homeomorfni ako su X i Y različite kardinalnosti ili ako $\mathcal{O}_1$ i $\mathcal{O}_2$ imaju različitu kardinalnost.

Ukoliko za neku osobinu $\mathcal{P}$ utvrdimo sljedeće: ako su topološki prostori $(X, \mathcal{O}_1)$ i $(Y, \mathcal{O}_2)$ homeomorfni i prostor $(X, \mathcal{O}_1)$ ima tu osobinu, onda i prostor $(Y, \mathcal{O}_2)$ takođe ima osobinu $\mathcal{P}$, tada kažemo da je $\mathcal{P}$ *invarijanta* tog homeomorfizma.

Invarijante homeomorfizama su veoma važne i još se nazivaju i *topološke osobine*.

Definicija 2.19 *Preslikavanje $f : X \to Y$ je topološko potapanje ako je f 1-1 i $f|_X : X \to f(X)$ homeomorfizam, gdje je $f(X)$ potprostor prostora Y, tj. sadrži topologiju naslijeđenu od Y.*

2.3 Neke klase topoloških prostora

Kako je definicija topoloških prostora dosta uopštena, nije moguće dokazati veliki broj teorema koje bi se odnosile na sve topološke prostore. Stoga se posmatraju različite klase prostora, tj. prostori sa nekim osobinama.

Definicija 2.20 *Za topološki prostor X kažemo da je T_0 prostor, ako za svaki par različitih tačaka iz X postoji otvoren skup koji sadrži tačno jednu od te dvije tačke.*

Definicija 2.21 *Topološki prostor X je T_1 prostor ako za svaki par različitih tačaka $x_1, x_2 \in X$ postoji otvoren skup $U \subset X$ takav da $x_1 \in U$ i $x_2 \notin U$.*

Jasno, svaki T_1 prostor mora biti i T_0 prostor.

Definicija 2.22 *Topološki prostor X je T_2 prostor ili Hausdorff-ov prostor ako za svaki par različitih tačaka $x_1, x_2 \in X$ postoje disjunktni otvoreni skupovi $U_1, U_2 \subset X$ takvi da $x_1 \in U_1$ i $x_2 \in U_2$.*

Svaki T_2 prostor mora biti i T_1 prostor.

Definicija 2.23 *Za topološki prostor X kažemo da je T_3 prostor ili regularan prostor ako je X T_1 prostor i za svako $x \in X$ i svaki zatvoren skup $F \subset X$, koji ne sadrži x, postoje disjunktni otvoreni skupovi $U_1, U_2 \subset X$ takvi da $x \in U_1$ i $F \subset U_2$.*

Očigledno je da je svaki regularan prostor i Hausdorff-ov prostor.

Definicija 2.24 *Topološki prostor X je kompletno regularan ako za svako $x \in X$ i svaki ovoren skup U koji sadrži x, postoji neprekidna funkcija $f : X \to [0,1]$, tako da je $f(x) = 0$ i $f(y) = 1$, za sve $y \in X \setminus U$. Ako je X i Hausdorff-ov, tada kažemo da je X prostor Tychonoff-a ili $T_{3\frac{1}{2}}$ prostor.*

Definicija 2.25 *Topološki prostor X je T_4 prostor ili normalan prostor ako je X T_1 prostor i za svaki par disjunktnih zatvorenih skupova $A, B \subset X$ postoje disjunktni otvoreni skupovi U, V takvi da je $A \subset U$ i $B \subset V$.*

Jasno, svaki normalan prostor mora biti i regularan.

Definicija 2.26 *Za topološki prostor X kažemo da je savršeno normalan prostor ako je normalan i ako je svaki zatvoren podskup skupa X G_δ - skup.*

Da bi normalan prostor bio savršeno normalan, potrebno je i dovoljno da svaki otvoren podskup tog prostora bude F_σ - skup.

Jedna od najvažnijih klasa topoloških prostora su *kompaktni prostori.* Prije no što definišemo sam pojam kompaktnosti, moramo uvesti neke odrednice.

Definicija 2.27 *Pokrivač skupa X je familija $\{A_s\}_{s\in S}$ podskupova skupa X tako da je $\bigcup_{s\in S} A_s = X$. Ako je X topološki prostor i svi skupovi A_s otvoreni, tada je $\{A_s\}_{s\in S}$ otvoren pokrivač skupa X.*

Definicija 2.28 *Pokrivač $\{A_s^{'}\}_{s\in S^{'}}$ skupa X je potpokrivač pokrivača $\{A_s\}_{s\in S}$ skupa X ako je $S^{'} \subset S$ i $A_s^{'} = A_s$, za sve $s \in S^{'}$.*

Definicija 2.29 *Za topološki prostor X kažemo da je kompaktan prostor ako je X Hausdorff - ov prostor i svaki otvoren pokrivač skupa X sadrži konačan potpokrivač.*

Navešćemo još neke osobine topoloških prostora koje su u tijesnoj vezi sa kompaktnošću.

Topološki prostor X je *lokalno kompaktan* ako za svako $x \in X$ postoji okolina U tačke x, tako da je zatvorenje skupa U kompaktan potprostor prostora X.

Topološki prostor X je *pseudokompaktan* ako je prostor Tychonoff-a i ako je svaka neprekidna funkcija na X sa realnim vrijednostima, ograničena.

Prostor je *prebrojivo kompaktan* ako je Hausdorff-ov i ako svaki njegov prebrojiv otvoren pokrivač sadrži konačan potpokrivač.

Još jedan pojam koji je u vezi sa kompaktnošću, a koristićemo ga u nastavku teksta, jeste *kompaktifikacija.*

Definicija 2.30 *Ako je Y kompaktan prostor i $c : X \to Y$ homeomorfno potapanje X u Y takvo da je $\overline{c(X)} = Y$, tada par (Y, c) nazivamo kompaktifikacija prostora X.*

Sa $\mathcal{C}(X)$ označavamo familiju svih kompaktifikacija na X. U jednom od poglavlja koji slijedi biće riječi o jednoj specijalnoj kompaktifikaciji, ali kako nam je za njenu definiciju potrebno i uređenje, njom ćemo se kasnije baviti.

3 Uređeni topološki prostori

Definicija 3.1 *Za topološki prostor X kažemo da je uređen ako data relacija $<$ ima sljedeće osobine:*
(1) za sve $x, y \in X$ važi tačno jedna od relacija: $x < y$, $x = y$, $y < x$,
(2) ako za $x, y, z \in X$ važi $x < y$ i $y < z$, onda je $x < z$,
(3) ako $x, y \in X$ i $x < y$ tada postoje okoline $U(x)$ od x i $U(y)$ od y takve da je $x < y'$ i $x' < y$, za $x' \in U(x)$ i $y' \in U(y)$.

Ukoliko za $x \in X$ uvedemo oznake

$$A_x = \{y \in X : y < x\} \quad \text{i} \quad B_x = \{y \in X : x < y\},$$

uslove (1) i (3) iz prethodne definicije možemo zamijeniti sljedećim:
$(1')$ $X \setminus \{x\} = A_x \cup B_x$, $\;A_x \cap B_x = \emptyset$
$(3')$ A_x i B_x su otvoreni skupovi.

Takođe važi i sljedeća tvrdnja.

Teorema 3.1 [10, 1.4] *Svaki uređen prostor X je Hausdorff - ov prostor.*

Dokaz. Neka je za $x, y \in X$, $x < y$. Ukoliko postoji element $z \in X$ takav da je $x < z < y$, tada $x \in A_z$ i $y \in B_z$, pa su skupovi A_z i B_z otvoreni i disjunktni (prema $(1')$ i $(3')$). Ako pak takvo z ne postoji, tada je $A_y \cap B_x = \emptyset$, $x \in A_y$, $y \in B_x$ i A_y i B_x su otvoreni (zbog $(3')$).

Dakle, u oba slučaja, prostor X je Hausdorff - ov. $\square$

Ukoliko je X povezan prostor, stvari postaju jednostavnije. O tome govore naredne dvije teoreme.

Teorema 3.2 [10, 2.1] *Ako je X povezan, tada je (2) posljedica (1) i (3) iz definicije 3.1.*

Dokaz. Neka je za $x, y, z \in X$, $x < y$ i $y < z$. Dakle, $z \in B_y$, pa je $X \setminus B_y \subset X \setminus \{z\}$. Sada je, prema $(1')$, $A_y \cup \{y\} \subset A_z \cup B_z$. X je povezan, pa prema $(1')$ i $(3')$, i $A_y \cup \{y\}$ je povezan. Opet prema $(1')$ i $(3')$, A_z i B_z su otvoreni i disjunktni i kako je $y \in A_z$, imamo $A_y \cup \{y\} \subset A_z$. Kako $x \in A_y$, onda $x \in A_z$, pa je $x < z$. $\square$

Teorema 3.3 [10, 2.2] *Ako je prostor X uređen i povezan, tada je tip uređenja tog prostora neprekidan.*

Dokaz. Neka je $X = P \cup Q$, $P \neq \emptyset \neq Q$ dekompozicija takva da je $x < y$ za $x \in P$ i $y \in Q$.

Pretpostavimo da P nema posljednji i da Q nema prvi element. Kako $x \in P$, postoji $x_1 \in P$ tako da je $x < x_1$. Prema (3) iz definicije 3.1, postoji okolina $U(x)$ od x tako da je $x' < x_1$, za $x' \in U(x)$. Kako je $U(x) \subset P$, P je otvoren. Slično pokazujemo i da je Q otvoren. Ovo je u suprotnosti sa povezanošću skupa X, pošto je $P \cap Q = \emptyset$.

Pretpostavimo sada da je x posljednji element skupa P, a y prvi element skupa Q. Tada je $P = A_y$ i $Q = B_x$. Prema $(3')$, P i Q su otvoreni, što ponovo vodi u kontradikciju. $\square$

Neka je $X \times X$ prostor sačinjen od svih parova (x, y), gdje $x, y \in X$. Neka je dalje $\overline{\Delta(X)}$ podskup skupa $X \times X$ determinisan uslovom $x \neq y$ ($\overline{\Delta(X)}$ je u stvari komplement dijagonale skupa $X \times X$).

Teorema 3.4 [10, Teorema I] *Povezan topološki prostor X može da se uredi ako i samo ako $\overline{\Delta(X)}$ nije povezan.*

Dokaz. Neka je X uređen. Neka je $A(X)$ podskup skupa $\overline{\Delta(X)}$ koji sadrži sve parove (x, y) takve da je $x < y$. Slično, definišemo $B(X)$ uz uslov $y < x$. Iz $(1')$ definicije 3.1 slijedi

$$\overline{\Delta(X)} = A(X) \cup B(X), \quad A(X) \cap B(X) = \emptyset.$$

Prema $(3')$ iste definicije, $A(X)$ i $B(X)$ su otvoreni. Zbog toga $\overline{\Delta(X)}$ nije povezan.

Pokažimo sad drugi smjer ekvivalencije. Za $(x, y) \in \overline{\Delta(X)}$ definišimo

$$\Lambda(x, y) = (y, x).$$

Jasno, Λ je homeomorfizam prostora $\overline{\Delta(X)}$ na samog sebe. Pretpostavimo prvo da je dekompozicija na dva otvorena disjunktna skupa $\overline{\Delta(X)} = A \cup B$ data tako da je $\Lambda(A) = B$. Definišimo relaciju $<$ na sljedeći način:

$$x < y \quad \text{ako i samo ako} \quad (x, y) \in A.$$

Jasno, uslovi (1) i (3) definicije 3.1 su ispunjeni. Kako je X povezan, po teoremi 3.2, imamo da je ispunjen i uslov (2) iste definicije, pa je X uređen relacijom $<$. $\square$

Prilikom dokaza prethodne teoreme, došli smo do činjenice koju je moguće iskazati narednom teoremom.

Teorema 3.5 [10, 3.1] *Ako je X povezan, a $\overline{\Delta(X)}$ nije povezan, tada se $\overline{\Delta(X)}$ sastoji od dvije komponente A i B takve da je $\Lambda(A) = B$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da je

$$\overline{\Delta(X)} = C_1 \cup C_2, \;\; C_1 \neq \emptyset \neq C_2, \;\; C_1 \cap \overline{C_2} = \emptyset = C_2 \cap \overline{C_1}, \;\; C_1 \cap \Lambda(C_1) \neq \emptyset.$$

Neka je $D_1 = C_1 \cap \Lambda(C_1)$ i $D_2 = C_2 \cup \Lambda(C_2)$. Tada imamo

$$\overline{\Delta(X)} = D_1 \cup D_2, \quad D_1 \neq \emptyset \neq D_2, \quad D_1 \cap \overline{D_2} = \emptyset = D_2 \cap \overline{D_1}, \tag{1}$$

$$\Lambda(D_1) = D_1, \quad \Lambda(D_2) = D_2. \tag{2}$$

Neka je za $x \in X$, M_x skup tačaka y takvih da $(x,y) \in D_1$ i N_x skup tačaka y takvih da $(x,y) \in D_2$. Iz (1) imamo

$$X \setminus \{x\} = M_x \cup N_x, \quad M_x \cap \overline{N_x} = \emptyset = \overline{M_x} \cap N_x.$$

Kako je X povezan, slijedi da su to i skupovi $\overline{M_x} = M_x \cup \{x\}$ i $\overline{N_x} = N_x \cup \{x\}$.

Neka $y \in M_x$ i $z \in N_x$. Slijedi da $(x,y) \in D_1$ i $y \notin N_x$. Zbog toga je $\overline{N_x} \times \{y\} \subset \overline{\Delta(X)} = D_1 \cup D_2$. Kako je $N_x \times \{y\}$ povezan i $(x,y) \in N_x \times \{y\}$, onda je $\overline{N_x} \times \{y\} \subset D_1$ i specijalno $(z,y) \in D_1$. Slično dobijamo $\overline{M_x} \times \{z\} \subset D_2$, pa $(y,z) \in D_2$. Ovo je međutim u suprotnosti sa (2), pa jedan od skupova M_x ili N_x mora biti prazan.

Neka $(x,y) \in D_1$. Onda je $M_x \neq \emptyset$ pa je $M_x = X \setminus \{x\}$ i $(x,y') \in D_1$ za sve $y' \in X \setminus \{x\}$. Zbog (2) imamo takođe $(y',x) \in D_1$. Slijedi da je $M_{y'} \neq \emptyset$ pa je zbog toga $M_{y'} = X \setminus y'$ za sve $y' \in X \setminus \{x\}$. Tako smo dokazali da je $M_x = X \setminus \{x\}$ za sve $x \in X$, pa je $D_1 = \overline{\Delta(X)}$ i $D_2 = \emptyset$, što je u suprotnosti sa (1). $\square$

Imajući u vidu teoremu 3.5 i prvi dio dokaza teoreme 3.4, možemo izvesti sljedeći stav:

Teorema 3.6 [10, 3.2] *Ako je X uređen i povezan, tada su $A(X)$ i $B(X)$ komponente skupa $\overline{\Delta(X)}$.*

Posmatrajmo sad šta se dešava sa jedinstvenošću uređenja u povezanom prostoru.

Teorema 3.7 [10, 4.1] *Neka su X i Y dva uređena povezana prostora. Svako 1-1 neprekidno preslikavanje X na Y ili čuva uređenje ili mu mijenja smjer.*

Dokaz. Neka je ϕ preslikavanje X na Y. Za $(x,y) \in \overline{\Delta(X)}$ definišimo

$$\psi(x,y) = (\phi(x), \phi(y)).$$

Jasno, ψ je 1-1 neprekidno preslikavanje $\overline{\Delta(X)}$ na $\overline{\Delta(Y)}$. Po teoremi 3.6 ili je $\psi(A(X)) = A(Y)$ ili $\psi(A(X)) = B(Y)$. U prvom slučaju ϕ čuva uređenje, u drugom mu mijenja smjer. $\square$

Teorema 3.8 [10, Teorema II] *Dva uređenja na povezanom topološkom prostoru su ili identična ili inverzna jedno drugom.*

Dokaz. Ovo slijedi direktno iz teoreme 3.7 uzimajući da je $X = Y$ i posmatrajući identičku transformaciju skupa X. $\square$

Nameće se pitanje da li i pod kojim uslovima važi obrat teoreme 3.7. Odgovor na to pitanje daje sljedeća teorema.

Teorema 3.9 [10, 5.1] *Neka je X uređen prostor, Y uređen povezan prostor i A otvoren povezan podskup skupa Y. Za svako 1-1 preslikavanje ϕ X u Y, koje čuva (ili obrće) poredak, skup $\phi^{-1}(A)$ je otvoren.*

Dokaz. Po teoremi 3.3 tip uređenja prostora Y je neprekidan. Kako je A povezan, onda je $Y = P \cup A \cup Q$, gdje za $y' \in P,\ y \in A$ i $y'' \in Q$ važi $y' < y < y''$. Pošto je A i otvoren, jasno je da ako je $P \neq \emptyset$ onda postoji posljednji element y_1 skupa P. Slično, ako je $Q \neq \emptyset$ postoji prvi element y_2 skupa Q. To znači da je ili $A = Y$ ili $A = A_{y_2}$ ili $A = B_{y_1}$ ili $A = A_{y_2} \cap B_{y_1}$.

Neka je $x_1 = \phi^{-1}(y_1)$ i $x_2 = \phi^{-1}(y_2)$. Kako ϕ čuva poredak, imamo da je $\phi^{-1}(A_{y_2}) = A_{x_2}$ i $\phi^{-1}(B_{y_1}) = B_{x_1}$. To znači da je ili $\phi^{-1}(A) = X$ ili $\phi^{-1}(A) = A_{x_2}$ ili $\phi^{-1}(A) = B_{x_1}$ ili $\phi^{-1}(A) = A_{x_2} \cap B_{x_1}$. U svakom slučaju je $\phi^{-1}(A)$ otvoren, po $(3')$ definicije s početka poglavlja. $\square$

Teorema 3.10 [10, 5.2] *Neka je X uređen prostor i Y uređen povezan i lokalno povezan prostor. Svako 1-1 neprekidno preslikavanje X u Y koje čuva (ili obrće) poredak je neprekidno.*

Dokaz. Neka je ϕ preslikavanje koje ispunjava uslove teoreme. Po teoremi 3.9, $\phi^{-1}(A)$ je otvoren za sve otvorene povezane skupove $A \subset Y$. Kako je Y lokalno povezan, onda je $\phi^{-1}(U)$ otvoren za sve otvorene skupove $U \subset Y$. Zbog toga je ϕ neprekidno. $\square$

Teorema 3.11 [10, 6.1] *Povezan separabilan topološki prostor X može da se preslika 1-1 i neprekidno na podskup linearnog kontinuuma*[8] *ako i samo ako $\overline{\Delta(X)}$ nije povezan.*

Dokaz. Neka je ϕ 1-1 neprekidno preslikavanje skupa X na linearan skup Y. Jasno, $\overline{\Delta(Y)}$ je 1-1 neprekidna slika od $\overline{\Delta(X)}$ i, kako $\overline{\Delta(Y)}$ nije povezan, onda ni $\overline{\Delta(X)}$ nije povezan.

Obrnuto, pretpostavimo da $\overline{\Delta(X)}$ nije povezan. Po teoremi 3.4, X može da se uredi, a po teoremi 3.3 tip tog uređenja je neprekidan. Neka je $A \subset X$, takav da je $\overline{A} = X$. Ako je $x < y$, i kako je uređenje na X neprekidno, postoji z tako da je $x < z < y$. Zbog toga je $A_y \cap B_x \neq \emptyset$ i kako je $A_y \cap B_x$ otvoren (po $(3')$ definicije s početka poglavlja), to je $A \cap A_y \cap B_x \neq \emptyset$. To opet znači da postoji $z' \in A$ tako da je $x < z' < y$, pa je skup A gust u X u smislu uređenja.

Kako je tip uređenja na X neprekidan i postoji podskup skupa X gust u X u smislu uređenja, onda postoji 1-1 preslikavanje ϕ (koje čuva poredak) skupa X na otvoren, poluotvoren ili zatvoren interval Y prave linije. Pošto je Y lokalno povezan, po teoremi 3.10, ϕ je neprekidno. $\square$

ϕ^{-1}, gdje je ϕ preslikavanje iz dokaza prethodne teorema, je takođe 1-1 preslikavanje koje čuva poredak. Stoga, ako je X lokalno povezan, ϕ^{-1} je neprekidno (po teoremi 3.10) i ϕ je homeomorfizam. Sada možemo formulisati sljedeći rezultat:

Teorema 3.12 [10, Teorema III] *Povezan lokalno povezan separabilan topološki prostor X homeomorfan je podskupu linearnog kontinuuma ako i samo ako $\overline{\Delta(X)}$ nije povezan.*

Ako je X skup, uvešćemo klasu $[X]$ koja predstavlja sve topologizacije na X koje vode ka nekom uređenom prostoru (u skladu sa datim poretkom). Jasno je da su sve topologije u toj klasi Hausrorff-ove (teorema 3.1). Sa X_1 označićemo najjaču topologiju na X u klasi $[X]$, koju dobijamo na sljedeći način:

[8] *Kontinuum* je kompaktan povezan Hausdorff-ov prostor.

Neka $x, y \in X$ i neka je $x < y$. Posmatrajmo svaki od skupova $A_x,\ A_y \cap B_x,\ B_y$ kao okolinu svake od svojih tačaka. Neka je X_1 topološki prostor dobijen na ovaj način. Jasno je da je ispunjen uslov $(3^{'})$, pa X_1 pripada klasi $[X]$.

Opisaćemo sad strukturu prostora X_1 u slučaju kad je skup X uređen neprekidno.

Teorema 3.13 [10, 8.1] *Za svaki uređen skup X sljedeći uslovi su ekvivalentni:*
a) Tip uređenja na X je neprekidan.
b) X_1 je povezan i lokalno povezan.
c) X može da se topologizuje tako da postane uređen povezan topološki prostor.

Dokaz. a) $\Rightarrow$ b). Neka je $x < y$ i Y jedan od skupova $X,\ A_x,\ A_y \cap B_x$ ili B_y. Želimo da pokažemo da je Y povezan podskup skupa X_1. Pretpostavimo suprotno, tj. da je:

$$Y = D_1 \cup D_2, \quad D_1 \cap \overline{D_2} = \emptyset = \overline{D_1} \cap D_2, \quad D_1 \neq \emptyset \neq D_2. \tag{3}$$

Neka $x_1 \in D_1,\ x_2 \in D_2,\ x_1 < x_2$ i

$$P = (D_1 \cap A_{x_2}) \cup A_z \text{ gdje } z \in D_1 \cap A_{x_2}, \quad Q = X \setminus P.$$

Jasno $x_1 \in P$ i $x_2 \in Q$. Takođe, ako $x^{'} \in P$ i $x^{''} < x^{'}$, onda $x^{''} \in P$. Na osnovu toga slijedi:

$$X = P \cup Q, \quad P \neq \emptyset \neq Q, \quad P \cap Q = \emptyset,$$

i da je $x < y$, za $x \in P,\ y \in Q$. Kako je uređenje na X neprekidno, to znači da ili P ima posljednji element ili Q ima prvi element.

Pretpostavimo prvo da P ima posljednji element x_0. Slijedi da $x_0 \in D_1 \cap A_{x_2}$ i da $z \in D_2$ za sve $z \in Y$ takve da je $x_0 < z < x_2$. Drugim riječima, $Y \cap A_{x_2} \cap B_{x_0} \subset D_2$. Na osnovu definicije skupa Y imamo da je $A_{x_2} \cap B_{x_0} \subset Y$ pošto $x_0,\ x_2 \in Y$. To znači da je $A_{x_2} \cap B_{x_0} \subset D_2$. Kako je uređenje na X neprekidno, jasno je da skup $A_{x_2} \cap B_{x_0}$ ima zajedničke tačke sa svakom okolinom od x_0, pa $x_0 \in \overline{D_2}$. Slijedi da $x_0 \in D_1 \cap \overline{D_2}$, što je u suprotnosti sa (3).

Neka sada Q ima prvi element y_0. Kako $x_2 \in D_2 \cap Q$ onda je ili $y_0 = x_2$ ili $y_0 < x_2$. U oba slučaja iz definicije skupa P slijedi da $y_0 \in D_2$.

Za $y < y_0$ imamo $A_{y_0} \cap B_y \subset P$, pa je $D_1 \cap A_{y_0} \cap B_y \neq \emptyset$. Kako je uređenje na X neprekidno, svaka okolina U od y_0 mora sadržati skup $A_{y_0} \cap B_y$, za neke $y < y_0$. Iz toga slijedi da je $D_1 \cap U \neq \emptyset$, pa $y_0 \in \overline{D_1}$. Konačno, $y_0 \in \overline{D_1} \cap D_2$ što je u suprotnosti sa (3).
b) $\Rightarrow$ c). Trivijalno.
c) $\Rightarrow$ a). Slijedi direktno iz teoreme 3.3. $\square$

4 Linearno uređeni i uopšteno uređeni topološki prostori

4.1 Osnovni pojmovi i karakterizacija

Sam naslov ovog poglavlja ukazuje na činjenicu da je u njemu sadržana osnovna tema ovog rada. Prije no što na nju pređemo, navešćemo nekoliko stavki vezanih za terminologiju. Naime, za podskup C skupa X reći ćemo da je *konveksan u X* ako kad

$a, b \in C$ i $a < b$, gdje je $<$ linearno uređenje skupa X, onda je skup $\{x \in X : a < x < b\}$ podskup skupa C. Dalje, *interval* je konveksan podskup skupa X koji ima dvije krajnje tačke u X. Intervale označavamo sa (a, b), $(a, b]$, itd. Ako $a \in X$, skup $\{x \in X : x < a\}$ nazivamo *otvorena poluprava* i označavamo sa $(\leftarrow, a)$. Skupovi $(\leftarrow, a]$, $[a, \rightarrow)$ i $(a, \rightarrow)$ definišu se analogno.

U radu ćemo pod uređenjem podrazumijevati linearno uređenje[9]. Ranije u tekstu definisali smo (linearno) uređen skup. Sam koncept linearno uređenog skupa koristi se za definisanje klase topoloških prostora, tzv. *uređenih prostora.* Ova klasa prostora ima dosta interesantnih topoloških osobina.

Neka je dat skup X i na njemu relacija $<$ koja ga linearno uređuje. Tada kažemo da je $(X, <)$ linearno uređen skup. Neka je, dalje, $\tau(<)$ uobičajena topologija na X, tj. topologija generisana familijom svih otvorenih intervala (u skladu sa uređenjem). Za trojku $(X, \tau(<), <)$ kažemo da je *linearno uređen topološki prostor.* Ponekad ćemo koristiti kraći zapis LOTS (eng. *Linear ordered topological space*).

Drugim riječima, $\tau(<)$ je topologija genarisana podbazom: $\{(a, \rightarrow) : a \in X\} \cup \{(\leftarrow, a) : a \in X\}$, gdje je $(a, \rightarrow) = \{x \in X : a < x\}$ i $(\leftarrow, a) = \{x \in X : a > x\}$, kako smo i naveli na početku poglavlja. Dakle, topološki prostor je *(linearno) uređen* ako se topologija na X podudara sa topologijom otvorenih intervala datog linearnog uređenja. Svaki linearno uređen topološki prostor je najmanje T_1 prostor.

Da bismo uveli pojam uopšteno uređeni prostor, navedimo sljedeću definiciju.

Definicija 4.1 *Neka su τ_1 i τ_2 dvije topologije na X. Ako je $\tau_1 \supset \tau_2$, kažemo da je τ_1 finija topologija od τ_2 (τ_2 je grublja od τ_1).*

Jasno je da je diskretna topologija najfinija, a antidiskretna najgrublja na datom skupu.

Definicija 4.2 *Uopšteno uređen topološki prostor (skraćeno GO prostor od eng. Generalized ordered space) je trojka $(X, \tau, <)$, gdje je $<$ linearno uređenje na X, a τ topologija finija od uređajne topologije (tj. $\tau(<) \subset \tau$) i njenu bazu čine otvoreni, konveksni skupovi.*

Ukoliko je $(X, <)$ linearno uređen skup i τ topologija na X takva da je $(X, \tau, <)$ uopšteno uređen prostor, tada τ nazivamo *GO topologija na X.* Jasno je da se najčešće umjesto navođenja ove klase prostora kao trojke $(X, \tau, <)$, pomene samo da je X GO prostor, i to naravno ne dovodi do zabune čitaoca.

Primjer 4.1 U ovom primjeru pokazaćemo uopštenu konstrukciju koja uvijek daje GO prostor, tj. da se svaki GO prostor može dobiti na ovakav način. Neka je $(X, <)$ linearno uređen skup i L, R i I disjunktni podskupovi skupa X. Neka je, dalje, τ topologija na X sa sljedećom podbazom:

$$\{\{x\} : x \in I\} \cup \{(\leftarrow, x] : x \in L\} \cup \{[x, \rightarrow) : x \in R\} \cup \tau(<).$$

Na osnovu navedene jednostavne konstrukcije, jasno je da su sljedeći prostori GO prostori:

[9] Jasno je da, pored linearnog, postoje i druge vrste uređenja.

1. proizvoljan linearno uređen topološki prostor (LOTS);

2. prava Sorgenfrey - a (uzeti da je $X = R = \mathbb{R}$ i $L = I = \emptyset$);

3. prostor $(\mathbb{R}, \mu, <)$, tj. skup realnih brojeva sa uobičajenom topologijom i uređenjem tako da su iracionalni brojevi diskretni (uzeti da je $X = \mathbb{R}$, I - skup iracionalnih brojeva i $L = R = \emptyset$);

4. prostor $(X, \delta, <)$, gdje je $(X, <)$ proizvoljan linearno uređen skup, a δ diskretna topologija na X.

Klasu uopšteno uređenih topoloških prostora uveo je Čech[10]. Naime, potprostor linearno uređenog topološkog prostora ne mora biti linearno uređen u svojoj naslijeđenoj topologiji. Međutim, Čech je dokazao da se klasa GO prostora poklapa sa klasom potprostora linearno uređenih topoloških prostora.

Teorema 4.1 (Čech) *Proizvoljan potprostor linearno uređenog topološkog prostora je GO prostor.*

Važi i obrat teoreme, ali taj postupak zahtijeva nešto više posla. Primijetimo prvo da svaka tačka GO prostora ima lokalnu bazu sačinjenu od intervala istog oblika, u smislu sljedeće leme, koju je dokazao Čech.

Lema 4.1 (Čech) *Neka je X GO prostor i $p \in X$. Pretpostavimo da p nije izolovana tačka skupa X i da je $[p, \rightarrow)$ otvoren u X. Tada važi sljedeće:*

1. *p nema neposrednog sljedbenika u X,*

2. *p nije desna krajnja tačka skupa X i*

3. *kolekcija $\{[p, b) : b \in X \text{ i } b > p\}$ je lokalna baza u tački p.*

Uvedimo sada jedan novi prostor. Naime, neka je $(X, \tau, <)$ GO prostor i $\lambda = \lambda(<)$ uobičajena uređajna topologija na X. Za takav prostor konsrtuišemo linearno uređen topološki prostor X^* koji sadrži X kao zatvoren potprostor. Definišimo prvo skupove:

$$R = \{x \in X : [x, \rightarrow) \in \tau \setminus \lambda\}$$

i

$$L = \{x \in X : (\leftarrow, x] \in \tau \setminus \lambda\}$$

i neka je tada X^* leksikografski uređen skup

$$\{\{x, 0\} : x \in X\} \cup \{(x, n) : x \in R, n \leq 0\} \cup \{(x, m) : x \in L, m \geq 0\}.$$

$X^* = (X, \tau, <)^*$ je dakle podskup skupa $X \times \mathbb{Z}$ i čuvaće uobičajenu topologiju otvorenih intervala datog leksikografskog uređenja.

Navešćemo još jedan važan stav koji je takođe dao Čech.

[10]Eduard Čech, 1893 - 1960, češki matematičar

Teorema 4.2 (Čech) *Neka je X GO prostor. Funkcija $e : X \to X^*$ data sa $e(x) = (x, 0)$ je homeomorfizam X na potprostor $X \times \{0\}$ prostora X^* koji čuva poredak.*

Naredna teorema daje možda i najjasniju vezi između GO prostora i linearno uređenih topoloških prostora.

Teorema 4.3 [17, Teorema 2.9] *Sljedeće osobine topološkog prostora (X, τ) su ekvivalentne:*
a) postoji linearno uređenje $<$ na X tako da je $(X, \tau, <)$ GO prostor;
b) (X, τ) je zatvoren potprostor linearno uređenog topološkog prostora;
c) (X, τ) je potprostor linearno uređenog topološkog prostora;
d) (X, τ) je gust potprostor kompaktnog linearno uređenog topološkog prostora.

Dokaz. a) $\Rightarrow$ b). Primijetimo da svaka tačka skupa $X^* \setminus X$ ima i neposrednog prethodnika i neposrednog sljedbenika u X^*. Stoga svaka tačka u $X^* \setminus X$ je izolovana tačka prostora X^*, pa je X zatvoren u X^*.
b) $\Rightarrow$ c). Trivijalno.
c) $\Rightarrow$ d). Pretpostavimo da je (X, τ) potprostor linearno uređenog topološkog prostora $(Y, \lambda, <)$. Neka je $(Y^+, \tau^+, <^+)$ uređajna kompatifikacija prostora Y i Z zatvorenje skupa X u Y^+. Uzimajući na Z topologiju takvu da dobijamo potprostor prostora Y^+, nastaje kompaktan GO prostor koji sadrži X kao gust potprostor. Kako je Z kompaktan, onda je Z zapravo i linearno uređen topološki prostor.
d) $\Rightarrow$ a). Ova implikacija slijedi iz teoreme 4.1. $\square$

Iako ćemo mi uglavnom posmatrati X kao potprostor prostora X^*, ekvivalencija prve i posljednje osobine u prethodnoj teoremi takođe je veoma korisna u izučavanju GO prostora. Sljedeća tvrdnja to ilustruje.

Teorema 4.4 [17, Teorema 2.10] *Neka je X GO prostor. Tada važi:*
a) X je separabilan ako i samo ako je X nasljedno separabilan;
b) svaka disjunktna kolekcija otvorenih skupova u X je prebrojiva ako i samo ako je X nasljedno prostor Lindelöf - a [11].

Ukoliko je GO prostor X separabilan (analogno, svaka disjunktna kolekcija otvorenih skupova u X prebrojiva), tada je to i svaka kompatifikacija od X.

Vratimo se ponovo na prostor X^*. Primijetimo prvo da ako se topologija na X poklapa sa uobičajenom topologijom otvorenih intervala datog uređenja na X, tada je $X = X^*$. Ovo je jasno zbog same definicije prostora X^*. Zatim, X^* je, u nekom smislu, najmanji linearno uređen topološki prostor koji sadrži X kao zatvoren potprostor. Ova činjenica je preciznije navedena u sljedećoj teoremi.

Teorema 4.5 [17, Teorema 2.11] *Neka je X GO prostor i h homeomorfizam skupa X na zatvoren potprostor linearno uređenog topološkog prostora Y, koji čuva poredak. Neka je $e : X \to X^*$ potapanje definisano u teoremi 4.2. Tada postoji homeomorfizam H skupa X^* u skup Y, koji čuva poredak, tako da sljedeći dijagram komutira:*

[11] Topološki prostor X je prostor *Lindelöf - a* ako je X regularan i svaki njegov otvoren pokrivač ima prebrojiv potpokrivač.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "e"'] & Y \\
X^* \arrow[ur, "H"'] &
\end{tikzcd}
$$

Za GO prostor kažemo i da je *poduređen*, a to znači da je homeomorfan potprostoru nekog linearno uređenog topološkog prostora, tj. može u njega da se ugradi. Imajući u vidu navedenu terminologiju, možemo reći i da se klase poduređenih i GO prostora poklapaju.

4.2 Još neke karakterizacije GO prostora

4.2.1 Gnijezda i uređeni prostori

Da bismo formulisali najranije teoreme o uređenju topoloških prostora, uvedimo prvo sljedeći pojam.

Definicija 4.3 *Kolekciju skupova $\mathcal{L}$ sa osobinom da za svaka dva elementa L_1 i L_2 te kolekcije važi ili $L_1 \subset L_2$ ili $L_2 \subset L_1$, naziva se gnijezdo*[12].

Drugim riječima, kolekcija skupova je *gnijezdo* ako i samo ako je ta kolekcija linearno uređena inkluzijom.

Pojam gnijezda uveli su J. de Groot i P. S. Schnare 1972. godine. Oni su dali karakterizaciju kompaktnih uređenih prostora. Teoremu navodimo bez dokaza koji je tehnički dosta obiman i sadržajan, a može se naći u [15].

Teorema 4.6 [15, Teorema 2.10] *Kompaktan T_1 prostor može da se uredi ako i samo ako postoji otvorena podbaza $\mathcal{S}$ tog prostora koja je unija dva gnijezda tako da svaki pokrivač prostora elementima iz $\mathcal{S}$, ima dvoelementan potpokrivač.*

U istom radu dali su i karakterizaciju proizvoda kompaktnih uređenih prostora, koju ovdje nećemo navoditi.

Na bazi njihovog rezultata, J. van Dalen i E. Watel daju kompletnu topološku karakterizaciju uređenih i poduređenih prostora, i zapravo pokazuju da gnijezda igraju glavnu ulogu i u rješenju uopštenog problema o uređenju (pogledati [9]). Oni su prvo dokazali da je T_1 prostor poduređen ako i samo ako ima podbazu koja se sastoji od dva gnijezda. Kasnije su dokazali i više, što ćemo i navesti u nastavku. Formulisali su nekoliko teorema.

Definicija 4.4 *Za kolekciju skupova $\mathcal{S}$ kažemo da je blokirajuća ako ispunjava sljedeći uslov: svaki skup S_0 iz $\mathcal{S}$ koji je presjek strogo većih članova iz $\mathcal{S}$ može da se predstavi kao unija strogo manjih članova iz $\mathcal{S}$, tj.*

$$S_0 = \bigcap\{S : S_0 \subset S,\ S \in \mathcal{S} \setminus S_0\} \Rightarrow S_0 = \bigcup\{S : S \subset S_0,\ S \in \mathcal{S} \setminus S_0\}.$$

Možemo primijetiti da je ovu definiciju moguće i drugačije interpretirati. Naime, kolekcija $\mathcal{S}$ je blokirajuća ako i samo ako za sve $S_0 \in \mathcal{S}$, ili je $S_0 = \bigcup\{S : S \subset S_0,\ S \in \mathcal{S} \setminus S_0\}$ ili $S_0 \neq \bigcap\{S : S_0 \subset S,\ S \in \mathcal{S} \setminus S_0\}$.

[12] engleski: *nest*

Teorema 4.7 [9, Teorema 2.6] *T_1 prostor može da se uredi ako i samo ako sadrži otvorenu podbazu koja je unija dva blokirajuća gnijezda.*

Prije no što ovu teoremu dokažemo, potrebno nam je još nekoliko definicija i rezultata.

Definicija 4.5 *Topološki prostor je široko urediv ako postoji linearno uređenje njegovih elemenata tako da je originalna topologija na njemu finija od topologije otvorenih intervala.*

Teorema 4.8 [9, Teorema 2.8] *Topološki prostor je široko urediv ako i samo ako postoje dva gnijezda otvorenih skupova koja zajedno generišu T_1 topologiju.*

Dokaz ove teoreme daćemo u okviru dokaza leme 4.2.

Posljedica 4.1 [9, Posljedica 2.9] *Kompaktan prostor može da se uredi ako i samo ako postoje dva gnijezda otvorenih skupova koja zajedno generišu T_1 topologiju.*

Definicija 4.6 *Kolekcija skupova T_1 razdvaja tačke ako i samo ako je svaka tačka zatvorena u topologiji za koju je ta kolekcija otvorena podbaza.*

Lema 4.2 [9, Lema 3.1] *Ako je X topološki prostor i $\mathcal{L}$ i $\mathcal{R}$ dva gnijezda otvorenih podskupova skupa X takva da njihova unija T_1 razdvaja tačke, tada postoji linearno uređenje $<$ na X tako da:*
1) svaki "order - open" skup je otvoren u X, tj. X može široko da se uredi;
2) svaki član od $\mathcal{L} \cup \mathcal{R}$ je poluprostor, tj.

$$(x \in L \subset \mathcal{L};\ y < x) \Rightarrow (y \in L), \quad (x \in R \subset \mathcal{R};\ y > x) \Rightarrow (y \in R).$$

Dokaz. Kako je topologija generisana sa $\mathcal{L} \cup \mathcal{R}$ T_1, postoji element $S_{x,-y} \in \mathcal{L} \cup \mathcal{R}$ koji sadrži x i ne sadrži y. Analogno, nalazimo element $S_{y,-x} \in \mathcal{L} \cup \mathcal{R}$ takav da $x \notin S_{y,-x}$ i $y \in S_{y,-x}$. Jasno, niti je $S_{x,-y} \subset S_{y,-x}$, niti $S_{y,-x} \subset S_{x,-y}$, pa ako $S_{x,-y} \in \mathcal{L}$ onda $S_{y,-x} \in \mathcal{R}$, i obrnuto. Šta više, kad god $S_{x,-y} \in \mathcal{L}$, tada svaki element iz $\mathcal{L} \cup \mathcal{R}$ koji sadrži y a ne sadrži x, pripada kolekciji $\mathcal{R}$. Definišemo:

$$x < y \text{ ako i samo ako } S_{x,-y} \in \mathcal{L}.$$

Prije svega treba pokazati da je tako definisana relacija $<$ linearni poredak na X.

Primijetimo da definicija relacije ne zavisi od izbora $S_{x,-y}$. Šta više, za proizvoljne dvije različite tačke x i y, skupovi $S_{x,-y}$ i $S_{y,-x}$ pripadaju različitim gnijezdima, pa ili je $x < y$ ili $y < x$. Pokažimo još da je data relacija tranzitivna. Neka $x, y, z \in X$, $x < y$ i $y < z$. Po definiciju relacije je $S_{x,-y} \in \mathcal{L}$ i $S_{y,-z} \in \mathcal{L}$. Kako $S_{y,-z}$ sadrži y, a y nije element $S_{x,-y}$, i kako su oba ova skupa elementi istog gnijezda, onda je $S_{x,-y} \subset S_{y,-z}$, pa je i $x \in S_{y,-z} \in \mathcal{L}$. Otuda je $x < z$. Dakle, $<$ je linearno uređenje skupa X.

Prelazimo sad na dokaz tvrdnje 1). Neka $x \in X$. Tada je $\{y : y < x\} = \bigcup\{S_{y,-x} : y < x\}$. Ovaj skup je očigledno otvoren. Analogno, $\{y : x < y\} = \bigcup\{S_{y,-x} : x < y\}$. I ovaj skup je otvoren jer je unija elemenata iz $\mathcal{R}$. dakle, X je široko urediv. Ovo dokazuje i teoremu 4.8.

Konačno, pokažimo i tvrdnju 2). Neka $x \in L \in \mathcal{L}$ i $y < x$. Onda je $S_{y,-x} \in \mathcal{L}$ i $S_{y,-x} \subset L$, pa $y \in L$. Na sličan način pokazujemo da je svaki član od $\mathcal{R}$ poluprostor, što zapravo predstavlja posljednji dio leme. $\square$

Teorema 4.9 [9, Teorema 2.2] *T_1 prostor je homeomorfan potprostoru uređenog prostora ako i samo ako taj prostor ima otvorenu podbazu sačinjenu od dva gnijezda.*

Dokaz. Dokaz ove teoreme slijedi direktno iz prethodne leme. □

Posljedica 4.2 [9, Posljedica 2.3] *Povezan T_1 prostor može da se uredi ako i samo ako taj prostor ima otvorenu podbazu sačinjenu od dva gnijezda.*

Posljedica 4.3 [9, Posljedica 2.4] *Kompaktan T_1 prostor može da se uredi ako i samo ako taj prostor ima otvorenu podbazu sačinjenu od dva gnijezda.*

Dokaz teoreme 4.7. Neka je X prostor i $\mathcal{L}$ i $\mathcal{R}$ dva blokirajuća gnijezda koja grade podbazu tog prostora. Neka je $<$ linearno uređenje na X definisano u lemi 4.2. Tada je topologija indukovana tim uređenjem grublja od date topologije tog prostora i treba da dokažemo da je svaki element iz $\mathcal{L} \cup \mathcal{R}$ "order - open" skup. Neka je $\mathcal{S} = \mathcal{L} \cup \mathcal{R}$. Za svako $x \in X$ definišemo $G_x = \{y : y < x\}$. Neka $L \in \mathcal{L}$. Sada je ili $L = \bigcup\{G_x : x \in L\}$ ili nije. U prvom slučaju L je očigledno "order - open". Ako je pak $L \neq \bigcup\{G_x : x \in L\}$, tada L ima najveći element, neko x_0, i L ne može biti unija svih članova iz $\mathcal{S}$ koji su sadržani u L, pošto, po drugom dijelu leme 4.2, svi članovi $\mathcal{S}$ su poluprostori. Familija $\mathcal{L}$ je blokirajića, pa L nije presjek svih članova kolekcije $\mathcal{S}$ koji sadrže L.

Ako $X \setminus L$ ima najmanji element y_0, tada je $L = G_{y_0}$, pa je L "order - open". Ako $X \setminus L$ nema najmanji element, tada za svako $y > x_0$ postoji tačka z takva da je $x_0 < z < y$, pa je $L \subset S_{z,-y}$. Sada imamo da je

$$L = \bigcap\{S_{z,-y} : x_0 < z < y\} = \bigcap\{S : L \subset S \in \mathcal{S} \setminus \{L\}\},$$

što je u suprotnosti sa malopređašnjim rezultatom. U svakom slučaju, nalazimo da je L "order - open" i na sličan način možemo pokazati i da je svaki član familije $\mathcal{R}$ takođe "order - open". Dakle, svaki T_1 prostor koji ima otvorenu podbazu koju čine dva blokirajuća gnijeza može da se uredi. Obrnuto, kolekcija "order - open" poluprostora u uređenom prostoru je podbaza prostora i jednaka je uniji dva blokirajuća gnijezda. □

Teorema 4.10 [9, Teorema 2.7] *Prostor koji je T_1 homeomorfan je uređenom povezanom prostoru ako i samo ako sadrži podbazu sačinjenu od dva gnijezda $\mathcal{L}$ i $\mathcal{R}$ takva da u svakom pokrivaču prostora nepraznim članovima iz $\mathcal{L}$ i $\mathcal{R}$, postoje $L \in \mathcal{L}$ i $R \in \mathcal{R}$ koji se sijeku.*

Dokaz. Neka je X prostor i $\mathcal{L}$ i $\mathcal{R}$ dva gnijezda sačinjena od otvorenih skupova. Pretpostavimo da je $\mathcal{L} \cup \mathcal{R}$ podbaza prostora X i da svaki pokrivač skupa X sa članovima iz $\mathcal{L}$ i $\mathcal{R}$ sadrži dva skupa $L \in \mathcal{L}$ i $R \in \mathcal{R}$ koja se sijeku. Neka je $<$ uređenje na X definisano u lemi 4.2. Pokazaćemo da su familije $\mathcal{L}$ i $\mathcal{R}$ blokirajuće i da X ne sadrži ni uzastopne tačke ni unutrašnje jazove u skladu sa uređenjem $<$.

1) Da bi dokazali da je $\mathcal{L}$ blokirajuća, pretpostavimo da $L_0 \in \mathcal{L}$ i da je $L_0 \neq \bigcup\{L : L \subset L_0; L \in \mathcal{L} \setminus \{L_0\}\}$. Tada L_0 ima maksimum x_0. Ako je $y > x_0$, onda $S_{y,-x_0} \in \mathcal{R}$ (koristimo notaciju iz leme 4.2) i $S_{y,-x_0} \cap L_0 = \emptyset$. Ako je $y < x_0$ onda $y \in L_0$ (po drugom dijelu tvrdnje u lemi 4.2), pa je $\bigcup\{S_{y,-x_0} : y > x_0\} \cup L_0 = X$. Dakle, imamo

pokrivač prostora X sa članom L_0 iz $\mathcal{L}$ i članovima iz $\mathcal{R}$, tako da L_0 ne siječe ni jedan drugi element tog pokrivača. Ovo je naravno u suprotnosti sa našom pretpostavkom.

Kako je sad svaki $L \in \mathcal{L}$ unija drugih elemenata iz $\mathcal{L}$, familija $\mathcal{L}$ je blokirajuća. Slično se pokazuje i da je $\mathcal{R}$ blokirajuća.

2) Neka je x_0, y_0 par uzastopnih tačaka u X, tj. $x_0 < y_0$ i $\{x : x_0 < x < y_0\} = \emptyset$. Tada je $S_{x_0,-y_0} = \{x : x < y_0\} \in \mathcal{L}$ i ima maksimum. Sad možemo primijeniti argumentaciju iz 1).

3) Neka X ima unutrašnji jaz, tj. postoje dva neprazna podskupa A i B od X takva da je $A \cup B = X$ i za sve $a \in A$ i $b \in B$ je $a < b$ i A nema maksimum a B nema minimum. Sada je $\{S_{x,-y} : x \in A, y \in A, x < y\}$ pokrivač skupa A sa članovima iz $\mathcal{L}$ i $\{S_{x,-y} : x \in B, y \in B, x > y\}$ pokrivač skupa B sa članovima iz $\mathcal{R}$, ali njihova unija je pokrivač skupa X takav da nijedan član prve kolekcije ne siječe nijednog člana druge kolekcije. Ovo je kontradikcija, pa ne postoje unutrašnji jazovi.

Dijelovi 1), 2) i 3) kompletiraju dokaz ove teoreme. $\square$

Definicija 4.7 *Neka je $\mathcal{S}$ kolekcija podskupova skupa X. Za dva skupa S_1 i S_2 te kolekcije kažemo da su uporediva, pišemo $S_1 \sim S_2$, ako je ili $S_1 \subset S_2$ ili $S_2 \subset S_1$.*

Teorema 4.11 [9, Teorema 3.4] *Neka je $\mathcal{S}$ podbaza prostora X koja ispunjava sljedeće uslove:*
1) ako je $S_0 \cup S_1 = X = S_0 \cup S_2$, gdje $S_i \in \mathcal{S}$, za $i \in \{0, 1, 2\}$, tada je $S_1 \sim S_2$;
2) za sve $S \in \mathcal{S}$ postoji $S' \in \mathcal{S}$, tako da je $S \cup S' = X$;
3) za sve S_1 i S_2 iz $\mathcal{S}$ ili je $S_1 \sim S_2$ ili $(X \setminus S_1) \sim S_2$.
Tada je X homeomorfan potprostoru uređenog prostora. Ako je $\mathcal{S}$ blokirajuća, prostor X može da se uredi.

Dokaz. Kako podbaza ne sadrži X, postoje najmanje dvije klase ekvivalencije relacije $\sim$, pa je prema tome, po teoremama 4.9 i 4.7, dovoljno pokazati da postoje najviše dvije klase ekvivalencije te relacije. Neke S_0 i S_1 pripadaju različitim gnijezdima. Ako je $S_0 \cap S_1 \neq \emptyset$, tada je zbog uslova 3), $S_0 \cup S_1 = X$, pa su S_0 i S_1 u komplementarnim klasama. Ako je $S_0 \cap S_1 = \emptyset$, možemo naći S_0' tako da je $S_0 \cup S_0' = X$. Slijedi da je $S_1 \subset S_0'$ i sada je S_1 takođe u komplementarnoj klasi klase koja sadrži S_0. Dakle, postoje samo dva (komplementarna) gnijezda. $\square$

Sljedeća teorema pokazuje vezu između teoreme 4.7 i drugih teorema o uređenju povezanih prostora.

Teorema 4.12 [9, Teorema 4.2] *Neka je X povezan T_1 prostor u kom postoje dva gnijezda otvorenih skupova $\mathcal{L}$ i $\mathcal{R}$, takva da $\mathcal{L} \cup \mathcal{R}$ generiše T_1 topologiju na X. Tada je X lokalno povezan ako i samo ako je $\mathcal{L} \cup \mathcal{R}$ podbaza topologije na X.*

Dokaz. ($\Leftarrow$) Po teoremi 4.9, X je potprostor uređenog prostora. Kako je i povezan, X može da se uredi, pa je i lokalno povezan.
($\Rightarrow$) Neka je $<$ linearno uređenje na X definisano u dokazu leme 4.2. Tada je topologija indukovana tim uređenjem grublja od topologija na X i članovi familija $\mathcal{L}$ i $\mathcal{R}$ su lijevi i desni poluprostori, redom. Neka je $x_0 \in X$ i V proizvoljna otvorena povezana okolina od x_0. Za sve $x \in X$ definišemo

$$A_x = \{y : y < x\} \text{ i } B_x = \{y : y > x\}.$$

Pretpostavimo da je $A_{x_0} \neq \emptyset \neq B_{x_0}$. A_{x_0} i B_{x_0} su "order-open", pa su dakle otvoreni. Ako je $V \cap A_{x_0} = \emptyset$, onda je $V \cup B_{x_0} = B_{x_0} \cup \{x_0\}$ otvoren i zatvoren, što je nemoguće, jer je X povezan. Zato je

$$V \cap A_{x_0} \neq \emptyset \neq V \cap B_{x_0}.$$

Biramo $p \in V \cap A_{x_0}$ i $q \in V \cap B_{x_0}$. Tada $x_0 \in A_q \cap B_p$. Ukoliko $A_q \cap B_p$ ne bi bilo sadržano u V, postojala bi tačka $r \in (A_q \cap B_p) \setminus V$. Tada bi bilo $p \in A_r$ i $q \in B_r$, što bi značilo da V nije povezan. Dakle, $A_q \cap B_p \subset V$. Sada postoji $L \in \mathcal{L}$ i $R \in \mathcal{R}$ tako da

$$x_0 \in L,\ q \notin L \quad \text{i} \quad x_0 \in R,\ p \notin R.$$

Sada je, kako su L i R poluprostori, $L \subset A_q$ i $R \subset B_p$, pa

$$x_0 \in L \cap R \subset A_q \cap B_p \subset V.$$

Ovo dokazuje da je $\mathcal{L} \cup \mathcal{R}$ podbaza prostora X. $\square$

Napomena 4.1 Može se dokazati i sljedeća činjenica: *"Povezan slabo uređen T_1 prostor X može da se uredi ako i samo ako je X lokalno povezan."* U dokazu treba koristiti posljedicu 4.2.

Na bazi tvrdnji van Dalen-a i Wattel-a prezentovanih u ovom poglavlju, nastalo je još nekoliko interesantnih rezultata. Navešćemo neke do kojih su došli Chris Good i Kyriakos Papadopoulos (vidjeti [14]).

Teorema 4.13 [14, Teorema 11] *Neka je X prostor i $\mathcal{L}$ i $\mathcal{R}$ dva gnijezda otvorenih skupova čija unija gradi T_1 podbazu za X. Pretpostavimo da $\mathcal{L}$ ima osobinu da za sve $L \in \mathcal{L}$ postoji kompaktan skup C takav da je $L \subset C$. Tada važi:*
1) $\mathcal{L}$ je blokirajuća familija,
2) ako $\mathcal{R}$ nije blokirajuća, to je samo zbog toga što postoji singlton $R_0 \in \mathcal{R}$ takav da je $R_0 = \bigcap\{R : R_0 \subset R,\ R \in \mathcal{R} \setminus R_0\}$.

Dokaz. Pretpostavimo da $\mathcal{L}$ nije blokirajuća. To znači da postoji $L \in \mathcal{L}$ koje ima maksimalan element x_L, ali je $L = \bigcap\{M \in \mathcal{L} : L \subset M\}$, $L \neq M$. Biramo $N \in \mathcal{L}$ i kompaktan skup C tako da je $L \subset N \subset C$, $L \neq N$. Postoji beskonačan opadajući podskup $\mathcal{M}$ skupa $\{M \in \mathcal{L} : L \subset M \subset N \subset C\}$ tako da je $\bigcap \mathcal{M} = L$. Kako je familija $\mathcal{L} \cup \mathcal{R}$ T_1, za sve M i M' iz $\mathcal{M}$ takve da je $M \subset M'$, $M \neq M'$, postoje $x_M \in M$, $y_M \in M'$ i $R \in \mathcal{R}$ tako da $x_M \notin R \cap M$ i $y_M \in R \cap M'$. Sada postoji beskonačan rastući podskup $\mathcal{S}$ skupa $\mathcal{R}$ koji pokriva $X \setminus L$. To znači da je $\{L\} \cup \mathcal{S}$ otvoren pokrivač od C koji ne sadrži konačan potpokrivač, što je kontradikcija. Dakle, važi 1).

Pretpostavimo da $\mathcal{R}$ nije blokirajuća, tj. da neko $R \in \mathcal{R}$ ima minimalan element x_R, ali je $R = \bigcap\{S \in \mathcal{R} : R \subset S\}$, $R \neq S$. Ako R nije singlton (pa onda ni najmanji element u $\mathcal{R}$), tada postoji $y \in R$ za koje je $x_R < y$, gdje je relacija $<$ definisana kao u lemi 4.2. Neka je $M \in \mathcal{L}$ takav da $x_R \in M$, $y \notin M$ i C kompaktan skup takav da je $M \subset C$. Prema 1) je $\{R\} \cup \{L \in \mathcal{L} : L \cap R = \emptyset\}$ pokrivač od C (otvorenih skupova u X) koji ne sadrži konačan potpokrivač. $\square$

Posljedica 4.4 [14, Posljedica 12] *Ako je X kompaktan GO prostor, tada je X LOTS.*

Ova tvrdnja je posljedica teorema o karakterizaciji GO prostora i linearno uređenih prostora van Dalen-a i Wattel-a i posljednje teoreme.

Primjer 4.2 Neka je $<$ uobičajen poredak skupa $\mathbb{R}$. Pominjali smo pravu Sorgenfrey-a, tj. skup $\mathbb{R}$ zajedno sa topologijom generisanom bazom poluotvorenih intervala $\{(a,b] : a < b\}$. Gnijezda $\mathcal{L} = \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$ i $\mathcal{R} = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$ čine T_1 podbazu prave Sorgenfrey-a. $\mathcal{R}$ je blokirajuća familija, a $\mathcal{L}$ to nije.

Primjer 4.3 Prava Michael-a je uobičajen prostor realne prave u kojem je svaki iracionalan broj izolovan. Gnijezda koja čine T_1 podbazu prave Michael-a su

$$\mathcal{L} = \{(-\infty, q) : q \in \mathbb{Q}\} \cup \{(-\infty, r] : r \notin \mathbb{Q}\}$$

i

$$\mathcal{R} = \{(q, \infty) : q \in \mathbb{Q}\} \cup \{[r, \infty) : r \notin \mathbb{Q}\}.$$

4.2.2 Neprekidni izbori i GO prostori

Definišimo sada kolekciju 2^X koju čine svi neprazni zatvoreni podskupovi skupa X, i na njoj Vietoris-ovu topologiju, čiju bazu čine skupovi oblika:

$$\langle V_0, V_1, ..., V_n \rangle = \{S \in 2^X : S \subset \bigcup_{i \leq n} V_i \text{ i } S \cap V_i \neq \emptyset \text{ za sve } i \leq n\},$$

gdje je n proizvoljan prirodan broj , a $V_0, V_1, ..., V_n$ proizvoljni otvoreni podskupovi skupa X.

Izbor za X je preslikavanje $f : 2^X \to X$, tako da $f(S) \in S$ za sve $S \in 2^X$.

Neka je, dalje, $X(2) = \{T \in 2^X : |T| = 2\}$, tj. $X(2)$ je sačinjen od podskupova sa tačno dva elementa.

Slab izbor na X je funkcija $g : X(2) \to X$, tako da $g(T) \in T$ za sve $T \in X(2)$, tj. $g(\{x, y\}) \in \{x, y\}$, za sve parove x, y.

Ukoliko su navedene funkcije neprekidne, zovemo ih *neprekidni izbor* i *neprekidni slabi izbor.*

Teorema 4.14 *Za kompaktan povezan Hausdorff-ov prostor X, sljedeći uslovi su ekvivalentni:*
a) X ima izbor;
b) X ima slab izbor;
c) X može da se uredi.

Ovu teoremu dokazao je Michael ([18]). Međutim, sljedeća teorema pokazuje da su navedeni uslovi ekvivalentni i za kompaktne Hausdorff-ove prostore. Dokazali su je Jan van Mill i Evert Wattel.

Teorema 4.15 [20, Teorema 1.1] *Za kompaktan Hausdorff-ov prostor X, sljedeći uslovi su ekvivalentni:*
a) X može da se uredi;
b) X ima slab izbor;
c) X ima izbor.

Dokaz. a) $\Rightarrow$ c). Jednostavno definišemo $f : 2^X \to X$ na sljedeći način:

$$f(A) = min(A).$$

Jasno, ovako definisano f je izbor, jer $min(A) \in A$.
c) $\Rightarrow$ b). Trivijalno.
b) $\Rightarrow$ a). Neka je X kompaktan Hausdorff-ov prostor i $g : X(2) \to X$ slab izbor na X. Za sve $x \in X$ definišimo:

$$B_x = \{y \in X : g(y,x) = y\} \text{ i } A_x = \{y \in X : g(y,x) = x\}.$$

Primijetimo da su tako konstruisani skupovi A_x i B_x zatvoreni i da važi $A_x \cup B_x = X$ i $A_x \cap B_x = \{x\}$. Neka je dalje $\prec$ dobro uređenje na X. Za sve $x \in X$ konstruisaćemo zatvorene skupove $L_x, U_x \subset X$ takve da je:
(1) $L_x \cup U_x = X$ i $L_x \cap U_x = \{x\}$,
(2) ako je $y \prec x$ i ako $x \in L_y$, onda je $L_x \subset L_y \setminus \{y\}$,
(3) ako je $y \prec x$ i ako $x \in U_y$, onda je $U_x \subset U_y \setminus \{y\}$,
(4) ako $z \in L_x$ i ako $z \notin \bigcup\{L_y : y \prec x \text{ i } x \in U_y\}$, tada $z \in B_x$,
(5) ako $z \in U_x$ i ako $z \notin \bigcup\{U_y : y \prec x \text{ i } x \in L_y\}$, tada $z \in A_x$.

U totalnom uređenju skupa X koje ćemo konstruisati u ovom dokazu, L_x će biti skup svih tačaka manjih ili jednakih od x, a U_x skup svih tačaka većih ili jednakih od x.

Neka je x_0 prvi element skupa X i definišimo $L_{x_0} = B_{x_0}$ i $U_{x_0} = A_{x_0}$. Pretpostavimo da smo definisali L_y i U_y za sve $y \prec x$ tako da važe uslovi (1)-(5). Uzmimo da je $E = \{y \prec x : x \notin L_y\}$ i $F = \{y \prec x : x \notin U_y\}$ i

$$Z = X \setminus (\bigcup_{y \in E} L_y \cup \bigcup_{y \in F} U_y).$$

Neka je $\kappa = |E|$ i za sve $\xi \leq \kappa$ definišimo tačke $y_\xi \in E$ na sljedeći način:
(6) $y_0 \in \min(E)$,
(7) $y_\zeta = \min[\{x\} \cup \{y \in E : (y_\mu \prec y \text{ za sve } \mu < \zeta) \text{ i } (y \notin \bigcup_{\mu<\zeta} L_{y_\mu})\}]$. Neka je $\xi \leq \kappa$ prvi ordinal za koji je $y_\xi = x$.

Nastavak dokaza sadrži nekoliko pomoćnih tvrdnji.

Lema 1: Ako je $\xi_0 \leq \xi$ tada je $\bigcup\{L_y : y \in E \text{ i } y \prec y_{\xi_0}\} = \bigcup_{\mu<\xi_0} L_{y_\mu}$.

Dokaz. Neka $y \in \{z \in E : z \prec y_{\xi_0}\} \setminus \{y_\mu : \mu < \xi_0\}$ i uzmimo da je $\mu \leq \xi_0$ prvi ordinal za koji je $y \prec y_\mu$. Kako je $y_\rho \prec y$ za sve $\rho < \mu$ i kako je $y \neq y_\mu$, prema (7) imamo $y \in \bigcup_{\rho<\mu} L_{y_\rho}$. Biramo $\rho < \mu$ tako da $y \in L_{y_\rho}$. Pošto je $y_\rho \prec y$, prema (2) je

$$L_y \subset L_{y_\rho} \subset \bigcup_{\delta<\xi_0} L_{y_\delta}.$$

Lema 2: Ako je $\mu_0 < \mu_1 < \xi$ tada je $L_{y_{\mu_0}} \subset L_{y_{\mu_1}} \setminus \{y_{\mu_1}\}$.

Dokaz. Prema (7), $y_{\mu_1} \notin L_{y_{\mu_0}}$, pa $y_{\mu_1} \in U_{y_{\mu_0}}$, a sad je prema (3), $U_{y_{\mu_1}} \subset U_{y_{\mu_0}} \setminus \{y_{\mu_0}\}$. Konačno, prema (1) je $L_{y_{\mu_0}} \subset L_{y_{\mu_1}} \setminus \{y_{\mu_1}\}$.

Lema 3: Ako je $\mu_0 < \mu_1 < \xi$ tada je $L_{y_{\mu_1}} \setminus L_{y_{\mu_0}} \subset A_{y_{\mu_0}}$.

Dokaz. Neka $t \in L_{y_{\mu_1}} \setminus L_{y_{\mu_0}}$. Kako $t \in U_{y_{\mu_0}}$ i, prema (5),

$$U_{y_{\mu_0}} \subset \bigcup\{U_y : y \prec y_{\mu_0} \text{ i } y_{\mu_0} \in L_y\} \cup A_{y_{\mu_0}},$$

možemo pretpostaviti, bez umanjenja opštosti, da $t \in U_z$, za $z \prec y_{\mu_0}$ za koje $y_{\mu_0} \in L_z$. Na ovaj način dolazimo do kontradikcije. Pretpostavimo da $y_{\mu_1} \in L_z$. Kako je $y_{\mu_0} \prec y_{\mu_1}$ i $z \prec y_{\mu_0}$, prema (2) je $L_{y_{\mu_1}} \subset L_z \setminus \{z\}$. Prema tome, $t \in L_z \setminus \{z\}$ i $t \in U_z$, što je u suprotnosti sa (1). To znači da $y_{\mu_1} \notin L_z$, pa $y_{\mu_1} \in U_z$. Kako je $z \prec y_{\mu_1}$, prema (3) je $U_{y_{\mu_1}} \subset U_z$, pa $x \in U_z$. Ako bi bilo i $x \in L_z$, imali bismo $x = z$, što nije tačno zbog $z \prec x$. Zaključujemo da $x \notin L_z$, što znači da $x \in E$. Neka je $\varepsilon \leq \mu_0$ najmanji ordinal takav da je $z \preceq y_\varepsilon$. Kako je $y_\delta \prec z$ za sve $\delta < \varepsilon$, prema (7), ili je $z = y_\varepsilon$ ili $z \in L_{y_\delta}$ za $\delta < \varepsilon$. Ako je $z = y_\varepsilon$, tada $y_{\mu_0} \in L_{y_\varepsilon}$ što je u suprotnosti sa $z \prec y_{\mu_0}$ (lema 2). Zbog toga $z \in L_{y_\delta}$, za $\delta < \varepsilon$. Onda $z \in L_{y_\delta} \subset L_{y_{\mu_0}} \setminus \{y_{\mu_0}\}$. Kako je $z \prec y_{\mu_0}$ i kako $y_{\mu_0} \in L_z$, prema (2) dobijamo da

$$L_{y_{\mu_0}} \subset L_z \setminus \{z\},$$

što implicira da $z \in L_{y_{\mu_0}} \subset L_z \setminus \{z\}$, a to je nemoguće.

Lema 4: Ako $t \in Cl_X(\bigcup_{y \in E} L_y) \setminus \bigcup_{y \in E} L_y$ tada je t klaster tačka mreže $\{y_\mu : \mu < \xi\}$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno i posmatrajmo zatvorenu okolinu C tačke t koja ne sadrži $Cl_X\{y_\mu : \mu < \xi\}$. Prema lemi (1) jasno je da postoji kofinal podskup $G \subset \xi$ sa osobinom da za sve $\mu \in G$ postoji tačka $c_\mu \in C \cap L_{y_\mu}$ takva da je

$$\mu = \min\{\delta < \xi : c_\mu \in L_{y_\delta}\}.$$

Neka $\mu \in G$. Tvrdimo da $c_\mu \in B_{y_\mu}$. Ako to nije tako, prema (4), postoji $y \prec y_\mu$ tako da $c_\mu \in L_y$ i $y_\mu \in U_y$. Sada, kako je $y \prec y_\mu$ i $y_\mu \in U_y$, prema (3), $U_{y_\mu} \subset U_y \setminus \{y\}$, što znači da je $L_y \subset L_{y_\mu}$. Zbog toga $x \notin L_y$, pa $x \notin L_{y_\mu}$. Dakle, $y \in E$. Prema lemi 1, možemo pronaći $\delta < \mu$ tako da $c_\mu \in L_{y_\delta}$, što je kontradikcija, s obzirom na izbor μ. To znači da za sve $\mu \in G$ važi $g(c_\mu, y_\mu) = c_\mu$.

Neka je (c, y) klaster tačka skupa $\{(c_\mu, y_\mu)\}_{\mu \in G}$. Tada $c \in C$ i $y \notin C$, pa kako $g(c_\mu, y_\mu) = c_\mu \in C$ za sve $\mu \in G$, jasno je da je $g(c, y) = c$. Uzmimo $\mu \in G$ proizvoljno. Za sve $\delta > \mu$, prema lemi 3 je $g(y_\mu, c_\delta) = y_\mu$, pa je $g(c, y_\mu) = g(y_\mu, c) = y_\mu$. Na ovaj način je $g(c, y) = y$, a kako je $y \neq c$, to je kontradikcija.

Lema 5: Ako su t i u klaster tačke skupa $\{y_\mu : \mu < \xi\}$, tada je $t = u$.

Dokaz. Neka su C i D zatvorene disjunktne okoline tačaka t i u, redom. Tada postoji kofinal podskup $G \subset \xi$ i za svako $\mu \in G$ tačke

$$c_\mu \in C \cap \{y_\lambda : \lambda < \xi\} \quad \text{i} \quad d_\mu \in D \cap \{y_\lambda : \lambda < \xi\}$$

takve da ako $\mu, \delta \in G$ i $\mu < \delta$, tada je

$$c_\mu \prec d_\mu \prec c_\delta.$$

Neka je (t', u') klaster tačka skupa $\{(c_\mu, d_\mu)\}_{\mu \in G}$. Tada $t' \in C$ i $u' \in D$. Po lemi 3 je $g(c_\mu, d_\mu) = c_\mu$, pa je $g(u', t') = t'$. Fiksirajmo $\mu \in G$. Za sve $\delta > \mu$ je $g(d_\mu, c_\delta) = d_\mu$ (lema 3). Kako $t' \in Cl_X\{c_\delta : \delta > \mu\}$, to znači da je

$$g(d_\mu, t') = d_\mu.$$

Kako $(u', t') \in Cl_{X^2}\{(d_\mu, t') : \mu \in G\}$, onda je $g(u', t') = u'$. Kako je $u' \neq t'$, ovo je kontradikcija.

Lema 6: $\bigcup_{y \in E} L_y$ ima najviše jednu graničnu tačku.

Dokaz. Ovo slijedi direktno iz lema 4 i 5.

Lema 7: Ako $t \in Z$ i $\mu < \xi$, tada $t \in A_{y_\mu}$.

Dokaz. Kako $t \notin L_{y_\mu}$, onda $t \in U_{y_\mu}$. Prema (5), ako $t \notin A_{y_\mu}$ tada $t \in U_y$, za neko $y \prec y_\mu$ takvo da $y_\mu \in L_y$. Ako $x \in L_y$, tada $x \notin U_y$, pošto je $x \neq y$, pa u tom slučaju je $Z \cap U_y = \emptyset$ u suprotnosti sa $t \in Z \cap U_y$. Stoga $y \in E$. Prema lemi 1 je

$$\bigcup\{L_y : y \in E \ \text{ i } \ y \prec y_\mu\} = \bigcup_{\delta<\mu} L_{y_\delta}.$$

Zbog toga $y_\mu \in L_{y_\delta}$ za neko $\delta < \mu$, što je kontradikcija sa (7).

Formalno, treba da razmotrimo dva slučaja: kad je ξ sljedbenik i kad je ξ granični ordinal. U suštini, oba slučaja moguće je analogno posmatrati, a kako je drugi nešto komplikovaniji, mi ćemo i uzeti da je ξ granični ordinal.

Kako je $L_{y_\mu} \setminus \{y_\mu\}$ otvoren za sve $\mu < \xi$, po lemama 1 i 2, $\bigcup_{y\in E} L_y$ mora imati tačku nagomilavanja, neka to bude a, a po lemi 6, a je jedinstveno. Primjenjujući ponovo isti postupak i posmatrajući granični slučaj, možemo naći granični ordinal η i za svako $\mu < \eta$ tačku $z_\mu \in F$ tako da važi:

(8) ako je $\mu < \delta$ onda je $U_{z_\mu} \subset U_{z_\delta}$,

(9) $\bigcup_{\mu<\eta} U_{z_\mu} = \bigcup_{y\in F} U_y$,

(10) ako $t \in Z$ i $\mu < \eta$, onda $t \in B_{z_\mu}$.

Ponovo nalazimo da $\bigcup_{y\in F} U_y$ ima jedinstvenu graničnu tačku, neko b, i da je ta tačka klaster tačka skupa $\{z_\mu : \mu < \eta\}$.

Slučaj 1. $a = b$. Možemo uzeti da je $Z = \{x\} = \{a\} = \{b\}$. Pretpostavimo da $t \in Z$. Po lemi 7 je $g(y_\mu, t) = y_\mu$ za sve $\mu < \xi$ pa je $g(a, t) = a$, pošto je a tačka nagomilavanja skupa $\{y_\mu\}_{\mu<\xi}$. S druge strane, zbog (10) je $g(t, z_\mu) = t$ za sve $\mu < \eta$. Iz istog razloga je $g(t, a) = g(t, b) = t$, pa je $t = a$.

Zaključujemo da je $a = b = x$ i da je $Z = \{x\}$. Definišimo

$$L_x = \bigcup_{y\in E} L_y \cup \{x\} \quad \text{i} \quad U_x = \bigcup_{y\in F} U_y \cup \{x\}.$$

Tako definisani skupovi L_x i U_x ispunjavaju uslove koje smo istakli na početku dokaza ove teoreme.

Slučaj 2. $a \neq b$ i $x \notin \{a, b\}$. Definišimo

$$L_x = \bigcup_{y\in E} L_y \cup (Z \cap B_x) \quad \text{i} \quad U_x = \bigcup_{y\in F} U_y \cup (Z \cap A_x).$$

Primijetimo da su skupovi L_x i U_x zatvoreni, pošto $a \in Z \cap B_x$ i $b \in Z \cap A_x$. Ponovo, oni ispunjavaju uslove s početka.

Slučaj 3. $x = a$ i $a \neq b$. Definišemo

$$L_x = \bigcup_{y\in E} L_y \cup \{x\} \quad \text{i} \quad U_x = \bigcap_{\mu<\xi} U_{y_\mu}.$$

Slučaj 4. $x = b$ i $a \neq b$. Analogno kao u slučaju 3.

Sada definišemo

$$x \leq y \quad \text{ako i samo ako} \quad x \in L_y.$$

Tada je $\leq$ linearno uređenje koje generiše topologiju na X, pošto je X kompaktan i pošto su za sve $x \in X$ skupovi $\{y \in X : y \leq x\}$ i $\{y \in X : x \leq y\}$ zatvoreni. $\square$

Nakon toga, uslijedili su još neki rezultati.

Teorema 4.16 [13, Teorema 1] *Kompaktan Hausdorff-ov prostor je homeomorfan kompaktnom prostoru ordinala ako i samo ako postoji neprekidan izbor $f : 2^X \to X$ tako da je $f(C)$ izolovana tačka u C, za svako $C \in 2^X$.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je $X = \delta + 1$ prostor ordinala. Definišimo preslikavanje $f : 2^X \to X$ tako da je $f(C)$ minimalan element skupa C (u odnosu na uobičajen poredak $<$ na X), za sve $C \in 2^X$. Očigledno, ovako definisano preslikavanje je neprekidan izbor koji ispunjava uslov teoreme.

($\Leftarrow$) Neka je $\kappa = |X|$ i κ^+ najmanji kardinal veći od κ. Induktivno, definisaćemo niz $\{x_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ tačaka u X takav da za svako $\alpha < \kappa^+$ važi:
(i) $X_\alpha = \{x_\beta : \beta < \alpha\}$ je otvoren u X,
(ii) ako je $Y_\alpha = X \setminus X_\alpha \neq \emptyset$, onda je $x_\alpha = f(Y_\alpha)$.
Ovo možemo uraditi jer je $f(C)$ izolovana tačka u C za sve $C \in 2^X$. Neka je $\delta_0 = \min\{\alpha < \kappa^+ : Y_\alpha = \emptyset\}$. Kako je X kompaktan i zbog (i), δ_0 mora biti ordinal sljedbenik. Neka je $\delta_0 = \delta + 1$. Tada je $X = \{x_\alpha : \alpha < \delta + 1\} = X_{\delta+1}$.

Indukcijom na $\alpha < \delta + 1$, pokazaćemo da je:
(iii) $\overline{X_\alpha} \subset X_{\alpha+1}$ za sve $\alpha < \delta + 1$.

Pretpostavimo da (iii) važi za sve $\beta < \alpha$, tj. da je $\overline{X_\beta} \subset X_{\beta+1}$, za sve $\beta < \alpha$.

Ako je $\alpha = \beta + 1$ sljedbenik ordinal, po indukcijskoj hipotezi je $\overline{X_\beta} \subset X_{\beta+1} = X_\alpha$, pa je

$$\overline{X_\alpha} = \overline{X_\beta \cup \{x_\beta\}} = \overline{X_\beta} \cup \overline{\{x_\beta\}} \subset X_\alpha \cup \{x_\beta\} = X_\alpha \subset X_{\alpha+1}.$$

Pretpostavimo da je α granični ordinal i da nije $\overline{X_\alpha} \subset X_{\alpha+1}$. Tada je $C = \overline{X_\alpha} \setminus X_{\alpha+1}$ neprazan zatvoren kompaktan podskup skupa X.

Sad ćemo dokazati dva pomoćna tvrđenja.

Lema 1: Za svaki otvoren skup V u X takav da je $C \subset V$, skup $\{\beta < \alpha : x_\beta \in V\}$ je kofinal u α.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da skup $\{\beta : \beta < \alpha,\ x_\beta \in V\}$ nije kofinal u α. Tada postoji $\alpha_0 < \alpha$ tako da je $\{x_\beta : \alpha_0 < \beta < \alpha\} \cap V = \emptyset$. Sada imamo

$$\emptyset \neq C = C \cap V = ((\overline{\{x_\beta : \beta < \alpha_0\}} \cup \overline{\{x_\beta : \alpha_0 < \beta < \alpha\}}) \setminus X_{\alpha+1}) \cap V = \emptyset,$$

što je jasno kontradikcija.

Lema 2: Ako je W otvoren skup u X takav da je $\{x_\alpha\} \cup C \subset W$, tada je skup $\{\beta < \alpha : x_\beta \in W\}$ u α, pa postoji $\beta_0 < \alpha$ tako da $x_\beta \in W$, kad god je $\beta_0 < \beta < \alpha$.

Dokaz. Ponovo pretpostavimo suprotno. Tada postoji otvoren skup W u X takav da je $\{x_\alpha\} \cup C \subset W$ i $A = \{\beta < \alpha : x_\beta \notin W\}$ je kofinal u α. Neka je $X_A = \{x_\beta : \beta \in A\}$. Onda je $X_A \subset X_A \setminus W$, pa je $\overline{X_A} \subset \overline{X_\alpha} \setminus W \subset \overline{X_\alpha} \setminus (C \cup \{x_\alpha\}) = X_{\alpha+1} \setminus \{x_\alpha\} = X_\alpha$. Zbog toga $\overline{X_A}$ ima otvoren pokrivač $\{\overline{X_A} \cap X_\beta : \beta < \alpha\}$ koji ne sadrži konačan potpokrivač. Ovo je u suprotnosti sa činjenicom da je $\overline{X_A}$ kompaktan.

Primijetimo da $x_\alpha \notin C$. Neka su U_0 i U_1 dva disjunktna otvorena skupa u X, takva da $x_\alpha \in U_0$ i $C \subset U_1$. Kako je $f(Y_\alpha) = x_\alpha$ i kako je f neprekidno, postoji okolina $\langle V_0, V_1, ..., V_n \rangle$ od Y_α u 2^X tako da je:
(iv) $f(\langle V_0, V_1, ..., V_n \rangle) \subset U_0$,
(v) ako je $V_i \cap C \neq \emptyset$, onda je $V_i \subset U_1$, za $i = 0, 1, ..., n$.

Definišimo:

$$U = \bigcup\{V_i : x_\alpha \in V_i\},\quad V = \bigcup\{V_i : V_i \cap C \neq \emptyset\} \quad \text{i} \quad W = U \cup V.$$

W je otvoren i sadrži $\{x_\alpha\} \cup C$, a prema (v) je $V \subset U_1$. Po lemama 1 i 2 skup $\{\beta < \alpha : x_\beta \in V\}$ je kofinal u α, pa je i skup $\{\beta < \alpha : x_\beta \in W\}$ kofinal u α. To znači da možemo naći $\beta < \alpha$ tako da je $x_\beta \in V$ i $Y_\beta = \{x_\gamma : \beta \leq \gamma < \alpha\} \cup Y_\alpha \subset W$. Pošto je $\emptyset \neq Y_\alpha \cap V_i \subset Y_\beta \cap V_i$ za $0 \leq i \leq n$, onda $Y_\beta \in \langle V_0, V_1, ..., V_n \rangle$. Sada prema (ii) i (iv) imamo da je $x_\beta \in V \subset U_1$ i $x_\beta = f(Y_\beta) \in U_0$. Onda U_0 i U_1 nisu disjunktni, što je kontradikcija. Ovim je kompletiran dokaz stava (iii).

Definišimo preslikavanje $\varphi : X \to \delta_0 = \delta + 1$ na sljedeći način: $\varphi(x_\alpha) = \alpha$ za sve $\alpha < \delta + 1$. Očigledno, φ je bijekcija X na δ_0. Treba još pokazati da je φ homeomorfizam. Kako je X kompaktan, dovoljno je pokazati da je φ neprekidno.

Neka je $\alpha < \delta + 1$. Imamo dva moguća slučaja.

Slučaj 1. $\alpha = \beta + 1$ je sljedbenik ordinal. Prema (iii) je $\overline{X_\beta} \subset X_{\beta+1} = X_\alpha$, pa je

$$\overline{X_\alpha} = \overline{X_\beta \cup \{x_\beta\}} = \overline{X_\beta} \cup \overline{\{x_\beta\}} = \overline{X_\beta} \cup \{x_\beta\} \subset X_{\beta+1} \cup \{x_\beta\} = X_{\beta+1} = X_\alpha.$$

Dakle, X_α je zatvoren u X, pa je skup $\{x_\alpha\} = X_{\alpha+1} \setminus X_\alpha$ otvoren u X. Stoga je x_α izolovana tačka u X, pa je φ neprekidno u x_α.

Slučaj 2. α je granični ordinal. Za sve $\beta < \alpha$, $X_{\alpha+1} \setminus \overline{X_\beta}$ je otvorena okolina od x_α koja je prema (iii) sadržana u skupu $\{x_\gamma : \beta \leq \gamma \leq \alpha\}$. Slijedi da je φ neprekidno u x_α. $\square$

Teorema 4.17 [1] *Neka je X prostor sa neprekidnim slabim izborom. Ako je X^2 pseudokompaktan, tada je X prebrojivo kompaktan i GO prostor. Specijalno, ako je X pseudokompaktan k-prostor*[13] *sa neprekidnim slabim izborom, tada je X prebrojivo kompaktan GO prostor, i ako je X prebrojivo kompaktan prostor Tychonoff-a sa neprekidnim izborom, tada je X GO prostor.*

Dokaz ove tvrdnje izvodi se na osnovu nekoliko prethodnih rezultata.

Definicija 4.8 *Za neprekidan slab izbor g na X kažemo da je lokalno uniforman ako za svako $x \in X$ i svaku okolinu U od x, postoji okolina V od x koja je sadržana u U, takva da za sve $p \in X \setminus U$ i $y \in V$,*

$$g(p, y) = p \quad akko \quad g(p, x) = p.$$

Teorema 4.18 [1, Teorema 1.2] *Za svaki kompletno regularan prostor X sljedeći uslovi su ekvivalentni:*
a) X ima lokalno uniforman slab izbor;
b) X je GO prostor.

Navedena teorema pokazuje koliki je značaj neprekidnih slabih izbora kada govorimo o GO prostorima.

Teorema 4.19 [1, Lema 1.3] *Neka je X prostor takav da je X^2 pseudokompaktan i g neprekidan slab izbor na X. Tada je g lokalno uniformna.*

[13] O *k-prostorima* vidjeti [11, Poglavlje 3.3].

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da neprekidan slab izbor g na X nije lokalno uniforman. U tom slučaju možemo naći $x \in X$ i okolinu U od x, tako da za svaku okolinu V od x, sadržanu u U, postoje $p_V \in X \setminus U$ i $y_V \in V$, takvi da

$$g(p_V, y_V) = p_V \ \wedge \ g(p_V, x) = x$$
$$ili \tag{4}$$
$$g(p_V, y_V) = y_V \ \wedge \ g(p_V, x) = p_V.$$

Dužinu ω ćemo konstruisati na sljedeći način. Za sve $n \in \omega$, nalazimo okolinu V_n od x, tačke p_{V_n}, y_{V_n} i otvoren skup $\tilde{G}_n$ u X koji zadovoljavaju sljedeće uslove:
1) $y_{V_n} \in V_n, p_{V_n} \in X \setminus U, p_{V_n} \in \tilde{G}_n$;
2) (4) važi za tačke x, y_{V_n}, p_{V_n};
3) $\overline{V}_0 \subset U$ i $\overline{V}_{n+1} \subset V_n$;
4) V_{n+1} i $\tilde{G}_n$ svjedoče o neprekidnosti g u (x, p_{V_n}), tj. $g(w, z) = w$ ako i samo ako je $g(p_{V_n}, x) = p_{V_n}$, za sve $w \in \tilde{G}_n$ i sve $z \in V_{n+1}$.

Bez umanjenja opštosti, pretpostavićemo da je skup $\{p_{V_n} : n \in \omega\}$ diskretan u sebi i da važi

$$g(p_{V_n}, x) = x, \ \text{ odakle je } \ g(p_{V_n}, y_{V_n}) = p_{V_n} \tag{5}$$

za sve $n \in \omega$. Za svako $n \in \omega$ biramo otvorene skupove $G_n \ni p_{V_n}$ i $H_n \ni y_{V_n}$ koji zadovoljavaju sljedeće:
i) $\{G_n : n \in \omega\} \cup \{H_n : n \in \omega\}$ je po parovima disjunktna familija;
ii) $\overline{H}_n \subset V_n, G_n \subset \tilde{G}_n$ i $\overline{G}_n \subset X \setminus \overline{V}_0$;
iii) G_n i H_n svjedoče o neprekidnosti g u (p_{V_n}, y_{V_n}), tj. za svaki uređen par $(a, b) \in G_n \times H_n, g(a, b) = a$ (slijedi iz (5)).

Posmatrajmo familiju $\mathcal{U} = \{G_n \times H_n : n \in \omega\}$ otvorenih skupova u $X \times X$. Kako je $X \times X$ pseudokompaktan, postoji tačka $(u, v) \in X \times X$ tako da proizvoljna okolina od (u, v) sijače beskonačno mnogo elemenata od $\mathcal{U}$. Tada je $u \neq v$, zbog izbora skupova G_n i H_n. Kako je g neprekidno, iii) implicira da je $g(u, v) = u$. Takođe, zbog neprekidnosti g, postoji okolina W od u, tako da $v \notin W$ i $g(w, v) = w$, za sve $w \in W$. S druge strane, $v \in \bigcap\{V_n : n \in \omega\}$. S obzirom na izbor V_{n+1} i $\tilde{G}_n$, imamo da je $g(v, w) = v$, za sve $w \in G_n$ i sve $n \in \omega$. Biramo $w \in G_m \cap W$, za neko $m \in \omega$. Kako $v \notin G_m \cap W$, priroda funkcije g dovodi do kontradikcije. □

Dokaz teoreme 4.17. Pokažimo najprije njen prvi dio. Teoreme 4.18 i 4.19, zajedno, impliciraju da je X GO prostor. Kako je svaki poduređen prostor normalan, zaključujemo da je pseudokompaktan prostor X prebrojivo kompaktan. Time je prvi dio teoreme 4.17 dokazan. Drugi dio te teoreme slijedi na osnovu prvog dijela i činjenice da je kvadrat pseudokompaktnog k-prostora pseudokompaktan (dokaz se može naći u [11, Teorema 3.10.26]). Što se tiče trećeg dijela, kako je X prebrojivo kompaktan, onda je $X \times X$ pseudokompaktan, pa je X GO prostor. □

4.2.3 Čech-Stone kompaktifikacija i uređeni prostori

U jednom od prethodnih poglavlja uveden je pojam kompaktifikacije. Naime, ako prostor X može da se potopi u kompaktan prostor Y, tj. ako postoji homeomorfizam $f : X \to M$ na potprostor $M = f(X)$ prostora Y, tada je par $(\overline{f(X)}, if)$, gdje je i

potapanje M u $\overline{M}$, kompaktifikacija prostora X. Kompaktifikaciju prostora X najčešće označavamo sa cX, gdje je c oznaka homeomorfizma prostora X u odgovarajuću kompaktifikaciju. Kako svaki prostor koji može da se potopi u kompaktan prostor ima kompaktifikaciju, mogu se pokazati neka tvrđenja koja navodimo.

Teorema 4.20 [11, Teorema 3.5.1] *Topološki prostor X ima kompaktifikaciju ako i samo ako je Tychonoff.*

Teorema 4.21 [11, Teorema 3.5.2] *Svaki Tychonoff prostor X ima kompaktifikaciju (Y, c) tako da je $\omega(Y) = \omega(X)$.*

Ranije smo naveli da se skup svih kompaktifikacija prostora X onačava sa $\mathcal{C}(X)$. Definisaćemo uređenje na toj familiji. Kažemo da je $c_2X \le c_1X$ ako postoji neprekidno preslikavanje $f : c_1X \to c_2X$ tako da je $f \circ c_1 = c_2$. Drugim riječima, $c_2X \le c_1X$ ako c_1X može da se preslika na c_2X tako da se svaka tačka u X, koja je potprostor i od c_1X i od c_2X, slika na samu sebe.

Sljedeća teorema pokazuje važnu osobinu familije $\mathcal{C}(X)$.

Teorema 4.22 [11, Teorema 3.5.9] *Svaka neprazna potfamilija $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}(X)$ ima najmanje gornje ograničenje (u skladu sa uređenjem definisanim na familiji $\mathcal{C}(X)$).*

Posljedica 4.5 [11, Posljedica 3.5.10] *Za svaki Tychonoff prostor X postoji u $\mathcal{C}(X)$ najveći element.*

Definicija 4.9 *Najveći element u $\mathcal{C}(X)$ naziva se Čech-Stone kompaktifikacija od X i označava sa βX.*

Drugim riječima, Čeh-Stone kompaktifikacija je tehnika za konstruisanje preslikavanja topološkog prostora X u kompaktan Hausdorff-ov prostor βX. Kao takav, βX je najveći kompaktan Hausdorff-ov prostor generisan sa X.

Teorema 4.23 [11, Teorema 3.6.11] *Za sve $\boldsymbol{m} \ge \aleph_0$ Čech-Stone kompaktifikacija prostora $D(\boldsymbol{m})$*[14] *ima kardinalnost $2^{2^{\boldsymbol{m}}}$.*

Posljedica 4.6 [11, Posljedica 3.6.12] *Kardinalnost prostora $\beta\mathbb{N}$ je 2^c.*

Lema 4.3 [28, Posljedica 1.9] *Separabilan i uređen topološki prostor zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti i $|X| \le c$.*

Teorema 4.24 [28, Teorema 3.1] *$\beta\mathbb{N}$ ne može da se uredi.*

Dokaz. $\beta\mathbb{N}$ je separabilan i $|\beta\mathbb{N}| = 2^c$, pa na osnovu prethodne leme, $\beta\mathbb{N}$ ne može da se uredi. □

Teorema 4.25 [28, Teorema 3.2] *Neka je X kompletno regularan Hausdorff-ov prostor. Ako βX može da se uredi, onda X mora biti normalan i pseudokompaktan, dakle i prebrojivo kompaktan.*

---
[14] Oznaku $D(\mathbf{m})$ koristimo za proizvoljan diskretan prostor kardinalnosti $\mathbf{m}$.

Dokaz. Neka βX može da se uredi. Svaki prostor koji može da se uredi je kompletno normalan, pa je X normalan. Pretpostavimo da X nije pseudokompaktan. Tada postoji neprekidna funkcija f na X, sa realnim vrijednostima, koja je neograničena. Kako uvijek možemo posmatrati $|f|$, uzećemo da je f nenegativna. f je neograničena, pa postoji niz $x_1, x_2, ...$ u X, takav da je $f(x_n) - f(x_{n-1}) > 1$. Podskup $A = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ skupa X je zatvoren i diskretan kao potprostor, pa je homeomorfan skupu $\mathbb{N}$. Posmatrajmo clA u βX. Svaka ograničena neprekidna funkcija f na A, sa realnim vrijednostima, može da se produži na neprekidnu ograničenu funkciju f_1 na X (sa realnim vrijednostima), a ona opet na neprekidnu ograničenu funkciju f_2 na βX, takođe sa realnim vrijednostima. Onda je f_2 ograničeno neprekidno produženje funkcije f sa A na clA. Stoga je clA u βX, βA. Kako je A homeomorfan sa $\mathbb{N}$, onda je clA homeomorfno sa $\beta\mathbb{N}$. βX se može urediti, pa i proizvoljan njegov kompaktan podskup može da se uredi. Ovo je kontradikcija sa teoremom 4.24. X je dakle pseudokompaktan. Kako je i normalan, onda je i prebrojivo kompaktan. □

Teorema 4.26 [1, Teorema 1.16] *Za kompletno regularan prostor X, sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*
a) βX može da se uredi;
b) X je pseudokompaktan GO prostor;
c) X je prebrojivo kompaktan i ima neprekidan slab izbor;
d) X^2 je pseudokompaktan i X ima neprekidan slab izbor.

Dokaz. a)⇒ b). Pseudokompaktnost prostora X slijedi po teoremi 4.25.
b)⇒ c). Svaki podurеđen prostor je normalan i ima neprekidan slab izbor.
c)⇒ d). Slijedi na osnovu trećeg dijela teoreme 4.17.
d)⇒ a). Neprekidan slab izbor $g : X^2 \to X$ možemo proširiti preko $\beta(X \times X) = \beta(X) \times \beta(X)$. Kako je $X \times X$ gust u $\beta(X) \times \beta(X)$, proširenje je i dalje neprekidan slab izbor, pa se zbog toga βX može urediti (o detaljima pogledati [20] i [21]). □

4.3 Neke klase GO prostora

4.3.1 Savršeni prostori

Definicija 4.10 *Za topološki prostor X kažemo da je savršen ako je svaki njegov zatvoren podskup, G_δ skup u X.*

Mnogi problemi u teoriji uređenih prostora svode se na prepoznavanje kada je dati uređeni prostor savršen, pa je ova osobina izvor velikog broja rezultata. U literaturi postoji mnogo generalizacija ove osobine. Prije no što navedemo neke, definisaćemo dva pojma koja se odnose na savršene prostore.

Definicija 4.11 *Prostor X je jako gusto normalan ako za svaki otvoren skup $U \subset X$ postoje otvoreni skupovi V_n, takvi da je $cl(V_n) \subset U$ i $\bigcup\{V_n : n \geq 1\}$ je gust skup u U.*

Definicija 4.12 *Za prostor X kažemo da je skoro savršen ako svaki otvoren podskup U tog prostora sadrži gust podskup S koji je F_σ-podskup skupa X.*

Lema 4.4 [6, Lema 2.1] *Ako je X normalan, onda je X jako gusto normalan ako i samo ako je skoro savršen.*

Teorema 4.27 [6, Teorema 2.3] *Sljedeće osobine GO prostora X su ekvivalentne:*
a) X je savršen;
b) X je jako gusto normalan;
c) X je skoro savršen;
d) ako je E relativno diskretan potprostor[15] *prostora X, onda je E F_σ-podskup skupa X;*
e) svaki zatvoren nigdje gust podskup S skupa X je G_δ-podskup skupa X;
f) svaki regularan zatvoren podskup T skupa X (tj. $T = cl(Int(T))$) je G_δ-podskup skupa X.

Dokaz. Ekvivalencija tvrdnji a) i e) važi za proizvoljan prostor. Dokaz ekvivalencije a) i f) za GO prostore može se pronaći u [2]. Jasno je da a) implicira b), a po lemi 4.4, b) je ekvivalentno c). Ostaje da pokažemo niz implikacija c) $\Rightarrow$ d) $\Rightarrow$ a).

Dokažimo prvo da c) implicira d). Neka je X skoro savršen i neka je E relativno diskretan potprostor prostora X. Kako je X normalan, postoji kolekcija $\{U(e) : e \in E\}$ otvorenih konveksnih podskupova skupa X tako da je $U(e) \cap E = \{e\}$ i $U(e) \cap U(e') = \emptyset$, za sve $e, e' \in E$, $e \neq e'$. Neka je $U = \bigcup\{U(e) : e \in E\}$ i biramo zatvoren podskup $D(n) \subset X$ takav da je $\bigcup\{D(n) : n \geq 1\}$ gust podskup skupa U. Dakle, za sve $e \in E$ postoji $n \geq 1$ tako da je $D(n) \cap U(e) \neq \emptyset$. Neka je $E(n) = \{e \in E : D(n) \cap U(e) \neq \emptyset\}$. Kako je $E = \bigcup\{E(n) : n \geq 1\}$, dovoljno je pokazati da je svaki $E(n)$ zatvoren u X.

Pretpostavimo suprotno, tj. da $p \in cl(E(n)) \setminus E(n)$ i neka je W konveksna otvorena okolina od p. Tada je skup $E(n) \cap W$ beskonačan. Pošto je $\{U(e) : e \in E\}$ po parovima disjunktna kolekcija konveksnih skupova, slijedi da je $U(e) \subset W$ za neko $e \in E(n)$. Kako $e \in E(n)$, $\emptyset \neq D(n) \cap U(e) \subset W$, pa je $W \cap D(n) \neq \emptyset$. To znači da svaka okolina od p siječe $D(n)$, pa $p \in cl(D(n)) = D(n) \subset U$. Neka je $e \in E$ tako da je $p = U(e)$. Ali, $U(e)$ je okolina od p koja sadrži najviše jednu tačku iz $E(n)$, što je kontradikcija sa $p \in cl(E(n)) \setminus E(n)$. Dakle, $E(n)$ je zatvoren u X.

Pokažimo da d) $\Rightarrow$ a). Neka je X GO prostor da osobinom d) i $p \in X$. Pokažimo prvo da je $H = (\leftarrow, p)$ F_σ-podskup skupa X. Ako p nije tačka nagomilavanja skupa H, dokaz je završen. Stoga, pretpostavimo da svaka okolina od p siječe H. Neka je $\kappa = cf((\leftarrow, p))$ i biramo strogo rastuću mrežu $\{x(\alpha) : \alpha < \kappa\}$ čiji je supremum p. Neka je $E = \{x(\alpha) : \alpha < \kappa \text{ nije granični ordinal}\}$. E je relativno diskretan podskup skupa X, pa je prema d) unija niza zatvorenih skupova $E(n)$. Neka je $C(n) = \{x \in X : x \leq e, \text{ za neko } e \in E(n)\}$. $C(n)$ je zatvoren u X i $H = \bigcup\{C(n) : n \geq 1\}$. Analogno pokazujemo da je $(p, \rightarrow)$ takođe F_σ u X. Slijedi da je svaki konveksan podskup u X F_σ-podskup skupa X.

Pretpostavimo sada da je U otvoren podskup skupa X. Neka je $\{U(\alpha) : \alpha \in A\}$ familija svih konveksnih komponenti skupa U i za sve α biramo tačku $p(\alpha) \in U(\alpha)$. Neka je dalje $E(\alpha) = \{p(\alpha) : \alpha \in A\}$. E je relativno diskretan podskup skupa X, pa je $E = \bigcup\{E(n) : n \geq 1\}$, gdje je svaki $E(n)$ zatvoren u X. Neka je $A(n) = \{\alpha \in A : p(\alpha) \in E(n)\}$. Za sve $\alpha \in A(n)$ definišimo familiju $C(\alpha, n, 1) \subset C(\alpha, n, 2) \subset ...$ konveksnih podskupova skupa X tako da $p(\alpha) \in C(\alpha, n, 1)$ i $\bigcup\{C(\alpha, n, m) : m \geq 1\} = U(\alpha)$. Uzmimo da je $F(n, m) = \bigcup\{C(\alpha, n, m) : \alpha \in A(n)\}$. Tada je svaki $F(n, m)$ zatvoren u X i $U = \bigcup\{F(n, m) : n, m \geq 1\}$, što je i trebalo pokazati. □

Pomenimo još jednu generalizaciju savršenih prostora.

[15]Podskup nekog prostora je *relativno diskretan* ako je diskretan u svojoj potprostor topologiji.

Definicija 4.13 *Topološki prostor je slabo savršen ako svaki zatvoren podskup F skupa X sadrži skup S koji je gust u F i G_δ podskup skupa X.*

Teorema 4.28 [7, Lema 2.1] *Ako je X slabo savršen GO prostor, tada X zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti.*

Dokaz. Neka je X slabo savršen GO prostor i $x \in X$. Tada zatvoren skup $C = \{x\}$ mora sadržati gust podskup D koji je G_δ podskup skupa X. To znači da je $C = D$, pa je svaka tačka G_δ podskup skupa X. Dakle, prostor X zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti. □

Jasno, nisu svi GO prostori slabo savršeni (posmatrajmo leksikografski uređen skup $X = \mathbb{R} \times [0,1]$ sa uobičajenom topologijom otvorenih intervala). Takođe, postoje GO prostori koji su slabo savršeni, a nisu savršeni (prostor prebrojivih ordinala). Navešćemo još neke primjere. Leksikografski uređen kvadrat $X = [0,1] \times [0,1]$ je kompaktan linearno uređen topološki prostor koji nije slabo savršen.

Navedeni primjeri upućuju na pitanja:

- Da li svaki savršen GO prostor može topološki da se potopi u slabo savršen LOTS?
- Da li svaki slabo savršen GO prostor može topološki da se potopi u slabo savršen LOTS?

Ova pitanja su i dalje otvorena.

Ranije u tekstu je navedeno da su GO prostori potprostori linearno uređenih topoloških prostora, tj. mogu da se ugrade u neki takav prostor. Šta više, postoji konstrukcija koja za proizvoljan GO prostor X, pravi LOTS X^* koji sadrži X kao zatvoren potprostor, i kao takav, najmanji je (detalji o tome u [17]). Neka je za dati GO prostor $(X, <, \tau)$, λ uobičajena uređajna topologija generisana sa $<$. Jasno je da je $\lambda \subseteq \tau$. Uzmimo da je $R = \{p \in X : [p, \rightarrow) \in \tau \backslash \lambda\}$ i $L = \{q \in X : (\leftarrow, q] \in \tau \backslash \lambda\}$. Definišimo X^* kao sljedeći leksikografsko uređen podskup od $X \times \mathbb{Z}$:

$$X^* = (X \times \{0\}) \cup \{(p, n) : p \in R \text{ } i \text{ } n \leq 0\} \cup \{(q, n) : q \in L \text{ } i \text{ } n \geq 0\}.$$

Jasno je da je X homeomorfan potprostoru $X \times \{0\}$ od X^*. X^* je linearno proširenje prostora X. Posmatrajmo još jednu konstrukciju, zapravo još jedno linearno proširenje prostora X:

$$L(X) = (X \times \{0\}) \cup (R \times \{-1\}) \cup (L \times \{1\}).$$

X je homeomorfan gustom potprostoru linearno uređenog prostora $L(X)$ i zatvorenom potprostoru linearno uređenog prostora X^*. Treba napomenuti i da je $L(X)$ podskup, ali ne obavezno i potprostor od X^*.

Teorema 4.29 [6, Teorema 3.1] *Neka je X GO prostor. X^* je savršen ako i samo ako je X savršen a skup $R \cup L$ σ-zatvoren diskretan [16] u X.*

[16] Skup je *σ-zatvoren diskretan* ako sadrži potprostor koji je unija prebrojivo mnogo zatvorenih potprostora.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Pretpostavimo da je X^* savršen. Zbog toga je i njegov potprostor X savršen. Neka je τ data topologija na X, a skupovi R i L definisani ranije. Posmatrajmo skup $S = \{(x, -1) : x \in \mathbb{R}\}$. S je relativno diskretan otvoren podskup skupa X^*, pa zbog toga postoje zatvoreni podskupovi $S(n)$ skupa X^*, takvi da je $S = \bigcup\{S(n) : n \geq 1\}$. Svaki $S(n)$ je zatvoren diskretan potprostor prostora X^*. Neka je $R(n) = \{x \in R : (x, -1) \in S(n)\}$. Kako je $R = \bigcup\{R(n) : n \geq 1\}$, dovoljno je pokazati da je svaki $R(n)$ zatvoren diskretan podskup skupa X.

Fiksirajmo n i proizvoljnu tačku $p \in X$. Treba pronaći okolinu V tačke p koja sadrži najviše jednu tačku skupa $R(n)$. Uzmimo da $(p, 0) \in X^*$. Kako je $S(n)$ zatvoren i diskretan, postoje tačke $(u, i) < (p, 0) < (v, j)$ skupa X^* takve da je $((u, i),(v, j)) \cap S(n) = \emptyset$.

Ako je p izolovana tačka skupa X, $V = \{p\}$ je odgovarajuća okolina tačke p. Stoga, pretpostavimo da p nije izolovana tačka. Tada najmanje jedan od skupova $[p, \rightarrow)$ i $(\leftarrow, p]$ nije otvoren u prostoru (X, τ). Bez umanjenja opštosti, uzmimo da $[p, \rightarrow)$ nije otvoren. Tada $(p, -1)$ ne može biti tačka skupa X^*, pa ako $(p, n) \in X^*$, onda je $n \geq 0$. Kako je $(u, i) < (p, 0)$, onda je $u < p$. Tvrdimo da je $(u, p) \cap R(n) = \emptyset$. Ako ne bi bilo tako, za $x \in (u, p) \cap R(n)$ imamo $(x, -1) \in S(n)$. Kako je $u < x < p$ u X, onda je $(u, i) < (x, -1) < (p, 0) < (v, j)$ u X^*. Ali u tom slučaju $(x, -1) \in ((u, i),(v, j)) \cap S(n) = \emptyset$. Dakle, $(u, p) \cap R(n) = \emptyset$.

Ako je skup $V = (u, p]$ otvoren u X, tada je V odgovarajuća okolina tačke p takva da je $|V \cap R(n)| \leq 1$, pa pretpostavimo da $(u, p]$ nije otvoren u X. U tom slučaju $(p, +1) \notin X^*$, pa $(p, n) \in X^*$ povlači da je $n \leq 0$. Ali onda iz $(p, n) \in X^*$ slijedi $n = 0$, pa ako je $(p, 0) < (v, j)$, onda je $p < v$ u X. Kao i u slučaju intervala (u, p), dobijamo da je $(p, v) \cap R(n) = \emptyset$. Ali tada je $V = (u, v)$ okolina tačke p u X takva da je $|V \cap R(n)| \leq 1$, pa je $R(n)$ zatvoren diskretan podskup skupa X. Stoga je R σ-zatvoren diskretan u X. Analogno se pokazuje da je i L σ-zatvoren diskretan u X.
($\Leftarrow$) Pretpostavimo da je $R \cup L$ σ-zatvoren diskretan u X. Pokažimo prvo da je skup $X^* \setminus X$ F_σ u X^*. Uzmimo da je $R = \bigcup\{R(n) : n \geq 1\}$, gdje je svaki $R(n)$ zatvoren diskretan podskup skupa X. Za sve $k \leq 0$ definišemo $R(n, k) = \{(x, k) : x \in R(n)\}$. Kako je $R(n, 0) = R(n)$, skup $R(n, 0)$ je zatvoren i diskretan u X^*. Pretpostavimo da je $k < 0$ i neka $(p, j) \in X^*$. Treba pronaći okolinu W tačke (p, j) u X^* koja sadrži najviše jednu tačku skupa $R(n, k)$. Ako je $j \neq 0$, tada je $\{(p, j)\}$ odgovarajuća okolina. Uzmimo da je $j = 0$. Kako je $R(n)$ zatvoren i diskretan u X, postoji okolina U tačke p u X koja je konveksna u X i za koju je $|U \cap R(n)| \leq 1$. U zavisnosti od oblika skupa U, postoje četiri slučaja:

Slučaj 1. Pretpostavimo da je $U = \{p\}$. Tada je $W = \{(p, 0)\}$ otvoren u X^* i važi $|W \cap R(n)| \leq 1$, kako je i traženo.

Slučaj 2. Pretpostavimo da je $U = [p, q)$, gdje je $q > p$ i da $\{p\}$ nije otvoren u X. Tada je $(p, q) \neq \emptyset$, pa biramo $r \in (p, q)$. Kako je $[p, q)$ otvoren u X, ili p ima neposrednog prethodnika (u skladu sa uređenjem skupa X) ili $(p, -1) \in X^*$. U oba slučaja skup $W = [(p, 0),(r, 0))$ je otvoren u X^*. Ako $(x, k) \in W \cap R(n, k)$, tada $x \in R(n)$ i $(p, 0) \leq (x, k) < (r, 0)$, pa je u X $p \leq x \leq r$. Stoga, $x \in R(n) \cap [p, r] \subset R(n) \cap [p, q)$. Zbog oblika skupa U, postoji najviše jedna tačka $x \in R(n) \cap [p, q)$, pa kako je k fiksirano, postoji najviše jedna tačka u $R(n, k) \cap W$.

Slučaj 3. Pretpostavimo da je $U = (q, p]$, gdje je $q < p$ i $\{p\}$ nije otvoren u X. Ovaj slučaj razmatramo kao i prethodni.

Slučaj 4. Pretpostavimo da je $U = (q, r)$ i da ni $[p, \rightarrow)$ ni $(\leftarrow, p]$ nisu otvoreni u X. Tada možemo izabrati $q' \in (q, p)$ i $r' \in (p, r)$. Ako $(x, k) \in R(n, k) \cap ((q', 0), (r', 0))$, tada $x \in R(n)$ i $q' \leq x \leq r'$, pa $x \in R(n) \cap [q', r'] \subset R(n) \cap (q, r)$. Kako postoji najviše jedna takva tačka x, ako uzmemo da je $W = ((q', 0), (r', 0))$ onda $(p, 0) \in W$ i kako je k fiksirano, postoji najviše jedna tačka u $W \cap R(n, k)$.

Analogno je skup $\{(x, k) : x \in L \text{ i } k \geq 0\}$ σ-zatvoren diskretan podskup skupa X^*. Kako $x \in R \cup L$ kad $(x, k) \in X^*$, za $k \neq 0$, imamo da je $X^* \setminus X$ σ-zatvoren diskretan podskup skupa X^*.

Da bismo pokazali da je X^* savršen, pretpostavimo da je U proizvoljan otvoren podskup skupa X^*. Tada je $U \cap X$ relativno otvoren u X , pa kako je X savršen i zatvoren u X^*, $U \cap X$ je F_σ-podskup skupa X^*. Pošto je $U \setminus X \subset X^* \setminus X$, onda je i $U \setminus X$ F_σ-podskup skupa X^*. Takav je i U, što je i trebalo pokazati. □

Primjer 4.4 Neka je X prava Sorgenfrey-a. Kako je u tom slučaju $L(X)$ separabilan, onda je $L(X)$ savršen. Međutim X^* nije slabo savršen. Da bismo to pokazali, pretpostavimo da zatvoren podskup $X \times \{0\}$ sadrži gust podskup S koji je G_δ skup u X^*. Neka je to $S = \bigcap\{G(n) : n \geq 1\}$. Tada S mora biti podskup skupa krajnjih tačaka konveksnih komponenti skupova $G(n)$, pa S mora biti prebrojiv. Ali to nije moguće jer je $X \times \{0\}$ topološka slika prave Sorgenfrey-a, koja je prostor Baire-a[17], a gust u sebi Baire-ov prostor ne može sadržati gust, prebrojiv G_δ skup.

Primjer 4.5 Neka je $Z = \mathbb{R} \times [0, 1)$ i modifikujmo leksikografski uređajnu topologiju tako da $[(x, 0), \rightarrow)$ bude otvoren u Z, za sve $x \in \mathbb{R}$. Z je zapravo topološka suma slika uobičajenog prostora $[0, 1)$, pa je metrizabilan. Dakle i Z^* je metrizabilan. Prostor $L(Z)$ je leksikografski uređen skup $Z \cup \{(x, -1) : x \in \mathbb{R}\}$ sa uobičajenom topologijom otvorenih intervala. Kako bi pokazali da $L(Z)$ nije slabo savršen, posmatrajmo zatvoren podskup $C = \{(x, -1) : x \in \mathbb{R}\}$ skupa $L(Z)$. Ovaj potprostor je homeomorfan pravoj Sorgenfrey-a, pa je prostor Baire-a. Ako bi $L(Z)$ bio slabo savršen, postojao bi G_δ podskup S skupa $L(Z)$ koji je gust podskup skupa C. Tada bi S bio prebrojiv, a to je nemoguće jer prava Sorgenfrey-a nema gust, prebrojiv G_δ podskup.

Primjer 4.6 Neka je W topološka suma prostora X i Z iz prethodna dva primjera i na tom prostoru posmatramo uređenje definisano tako da X prethodi Z. W je savršen, a ni W^* ni $L(W)$ nisu slabo savršeni. Dakle, savršen GO prostor W ne može da se potopi kao zatvoren ili gust podskup bilo kog slabo savršenog LOTS-a čije uređenje proširuje dato uređenje na W.

Definicija 4.14 *Za topološki prostor kažemo da je savršeno normalan ako je normalan i svaki zatvoren skup tog prostora je G_δ skup.*

4.3.2 GO prostori sa σ-zatvorenim, diskretnim, gustim podskupom

Postoji interesantna osobina GO prostora koja je bolja od toga da je prostor savršen, a to je postojanje *σ-zatvorenog, diskretnog, gustog skupa.* Svaki GO prostor sa σ-zatvorenim, diskretnim, gustim podskupom mora biti savršen.

[17]Topološki prostor X je prostor *Baire-a* ako je presjek proizvoljne prebrojive kolekcije otvorenih gustih skupova u X, takođe gust skup.

U ovom poglavlju biće navedeno nekoliko teorema bez dokaza, jednim dijelom zbog toga što one predstavljaju sublimaciju nekoliko radova raznih autora, a i zbog činjenice da se pominje određen broj novih pojmova kojima se nećemo detaljnije baviti.

Poznata su tri velika otvorena pitanja vezana za GO prostora:

1. Da li u ZFC postoji primjer savršenog GO prostora koji nema σ-zatvoren, diskretan, gust podskup?
2. Da li u ZFC postoji primjer savršenog GO prostora koji ima tačkasto prebrojivu bazu, a nije metrizabilan[18]?
3. Da li u ZFC postoji primjer savršenog ne Arhimedovog prostora[19] koji nije metrizabilan?

Naredna teorema povezuje ova pitanja.

Teorema 4.30 *Sljedeća tvrđenja su ekvivalentna:*
a) postoji savršen LOTS koji nema σ-zatvoren, diskretan, gust podskup;
b) postoji savršeno normalan, ne-Arhimedov prostor koji nije metrizabilan;
c) postoji LOTS X u kome je svaka disjunktna kolekcija konveksnih otvorenih skupova σ-diskretna, i X nema σ-zatvoren, diskretan, gust podskup;
d) postoji gust u sebi LOTS Y koji nema σ-zatvoren, diskretan, gust podskup, i svaki nigdje gust potprostor prostora Y ima σ-zatvoren, diskretan, gust podskup (u svojoj naslijeđenoj topologiji).

U dokazu ove tvrdnje, ključnu ulogu ima sljedeća lema.

Lema 4.5 *Svaki GO prostor sa prvom aksiomom prebrojivosti sadrži gust ne-Arhimedov potprostor.*

Važi i više:

Teorema 4.31 *Sljedeći stavovi su ekvivalentni:*
a) postoji savršeno normalan, ne-metrizabilan, ne-Arhimedov prostor koji ima tačkasto prebrojivu bazu;
b) postoji savršen LOTS sa tačkasto prebrojivom bazom, koji nema σ-zatvoren, diskretan, gust podskup;
c) postoji LOTS X sa tačkasto prebrojivom bazom i osobinom da je svaka po parovima disjunktna kolekcija konveksnih otvorenih skupova σ-disketna, a X nema σ-zatvoren, diskretan, gust podskup;
d) postoji gust u sebi LOTS Y sa tačkasto prebrojivom bazom koji nema σ-zatvoren, diskretan, gust podskup, a svaki nigdje gust potprostor od Y ima σ-zatvoren, diskretan, gust podskup u svojoj naslijeđenoj topologiji.

Kasniji rezultati nastali u vezi sa pitanjem prepoznavanja kada GO prostor ima σ-zatvoren, diskretan, gust skup, odnose se na neke poznate klase prostora, i mogu se naći u [8] i [5]. Njihova sublimacija bi se mogla predstaviti narednom teoremom.

[18] O metrici i metrizabilnosti topoloških prostora čitaoca upućujemo na [11, Poglavlje 4], a o teoriji metrizacije GO prostora vidjeti [12].

[19] Prostor je *ne - Arhimedov* ako je T_1 i ima bazu takvu da su svaka dva njena člana ili disjunktna ili uporediva inkluzijom.

Teorema 4.32 *Sljedeće osobine savršenog GO prostora X su ekvivalentne:*
a) X ima σ-zatvoren, diskretan, gust podskup;
b) X ima gust metrizabilan potprostor;
c) postoji niz $\mathcal{G}_n$ otvorenih pokrivača skupa X takav da za svako $p \in X$, skup $\bigcap\{St(p, \mathcal{G}_n) : n \geq 1\}$ ima najmanje dvije tačke;
d) postoji niz $\mathcal{G}_n$ otvorenih pokrivača skupa X takav da je za svako $p \in X$, skup $\bigcap\{St(p, \mathcal{G}_n) : n \geq 1\}$ separabilan potprostor prostora X;
e) X je unija dva potprostora, od kojih svaki ima G_δ dijagonalu u svojoj naslijeđenoj topologiji;
f) X je unija prebrojivo mnogo potprostora, od kojih svaki ima G_δ dijagonalu u svojoj naslijeđenoj topologiji;
g) postoji metrizabilan GO prostor Y i neprekidno preslikavanje $f : X \to Y$, tako da je $|f^{-1}[y]| \leq 2$, za sve $y \in Y$;
h) postoji topološki prostor Z sa G_δ dijagonalom i neprekidno preslikavanje $g : X \to Z$, tako da je $g^{-1}[z]$ separabilan potprostor prostora X, za sve $z \in Z$;
i) X ima gust potprostor $E = \bigcup\{E_n : n \geq 1\}$, gdje je E_n metrizabilan potprostor prostora X, za svako n.

U prethodnoj teoremi pojavio se skup $St(p, \mathcal{G}_n)$. Naime, ukoliko je familija $\mathcal{A} = \{A_s\}_{s \in S}$ pokrivač skupa X, *zvijezda*[20] *skupa $M \subset X$ u skladu sa $\mathcal{A}$* je skup $St(M, \mathcal{A}) = \bigcup\{A_s : M \cap A_s \neq \emptyset\}$. Zvijezda jednoelementnog skupa $\{x\}$ naziva se *zvijezda tačke x u skladu sa $\mathcal{A}$* i označava sa $St(x, \mathcal{A})$.

Često se dešava da GO prostor X ima neku topološku osobinu ako i samo ako LOTS X^* ima tu osobinu. Tako je recimo Lutzer, u svojoj već pomenutoj disertaciji, iskazao stav:

Teorema 4.33 *Neka je P jedna od sljedećih osobina: parakompaktnost*[21]*, metrizabilnost, osobina Lindelöf-a, kvazi-razvijenost*[22] *ili imanje tačkasto prebrojive baze. Tada GO prostor X ima osobinu P ako i samo ako LOTS proširenje X^* ima osobinu P.*

Primjećujemo da u spisku osobina u prethodnoj teoremi nema svojstva biti savršen. Primjer prostora koji je savršen je *prava Sorgenfey-a S*, ali prostor S^* nije savršen. Naravno, postoji savršen LOTS koji sadrži S kao potprostor i zove se leksikografski proizvod prostor $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$. Podsjećamo da je prava Sorgenfrey-a prostor (S, τ), gdje je τ topologija generisana bazom $\{[a, b) : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$. Primjeri tog tipa nameću sljedeće pitanje:

Da li svaki savršen GO prostor može topološki da se ugradi u neki savršen LOTS?

Riješena su mnoga pitanja koja se odnosa na prethodno. Recimo, postoji savršen GO prostor $(X, <, \tau)$ koji ne može da se ugradi kao:

a) zatvoren podskup, ili kao G_δ podskup nekog savršenog LOTS-a ([17]);

---

[20]engleski: *star*

[21]O *parakompaktnim topološkim prostorima* vidjet npr. [11, Poglavlje 5].

[22]Prostor X je *kvazi-razvijen* ako postoji niz kolekcija $\mathcal{G}_n$ otvorenih podskupova od X takav da za sve $x \in X$, kolekcija $\{St(x, \mathcal{G}_n) : n \geq 1\}$ sadrži bazu okolina tačke x.

b) gust potprostor savršenog LOTS-a čije uređenje proširuje dato uređenje $<$ na X ([25], [21]);

c) gust potprostor savršenog LOTS-a (bez restrikcije na uređenje proširenja) ([26]).

Međutim, u opštem slučaju, navedeno pitanje je i danas otvoreno. Sljedeća teorema pak pokazuje de je to pitanje u bliskoj vezi sa ranije navedenim velikim pitanjima vezanim za GO prostore ([24]).

Teorema 4.34 *Ako je X savršen GO prostor sa σ-zatvorenim diskretnim gustim skupom, tada postoji savršen LOTS Y koji sadrži X i takođe ima σ-zatvoren diskretan gust skup.*

Ova teorema zapravo govori da, ukoliko bi postojao model teorije skupova u kojem bi svaki savršen GO prostor imao σ-zatvoren diskretan gust skup, onda bi se u tom modelu i svaki savršen GO prostor mogao ugraditi u neki savršen LOTS.

5 Istorijske napomene

Kad se govori o samoj ideji uređenih skupova, svakako se, istorijski gledano, prvo misli na Cantor-a[23] i njegovu teoriju skupova. Između ostalog, on je uveo *kardinale*, kao primjer klase uređenih skupova. 1883. godine je utvrdio postojanje ω_0, razvio *ordinale* i definisao aritmetiku na njima. Već tad je iznio ideju da svaki skup može biti dobro uređen i njoj se vratio nešto kasnije. Takođe, konstruisao je čuveni *Cantor-ov skup*. U radovima koji su kasnije uslijedili, intenzivno je radio na utvrđivanju osobina kardinalnih i ordinalnih brojeva. Uveo je opštu definiciju ordinalnih tipova i definisao aritmetiku na njima.

Najraniji radovi na temu uređenih skupova bavili su se topološkom karakterizacijom određenih podskupova realne prave. Smatra se da je prva teorema o uređenju objavljena 1905. godine od strane Veblen-a ([27]). On je dokazao da je svaki metrički kontinuum sa tačno dvije nerazdvojene tačke homeomorfan jediničnom intervalu. Nakon toga, uslijedili su brojni rezultati. Do kraja dvadesetih godina prošlog vijeka, najviše radova vezuje se za imana kao što su: Baire, Hausdorff, Frechet, Mazurkiewicz, Sierpinski, Alexandroff, Uryson, Cohen, Souslin i drugi. 1941. Eilenberg[24] se bavio *široko uređenim prostorima* i njihovim osobinama. Još jedna klasa uređenih prostora su takozvani *ne - Arhimedovi* prostori kojima su se, između ostalih, bavili Kurepa, Papić, Groot, Herrlich, Lynn i drugi.

Kako je već ranije pomenuto, Čech je uveo klasu uopšteno uređenih prostora. Dokaz da se ta klasa poklapa sa klasom poduređenih prostora, Čech je objavio 1959. godine. Uopšteno uređenim prostorima kasnije su se bavili Lutzer, Kowalsky, Kok, Wattel, Banaschewski i drugi. Doktorska disertacija Herrlich-a, nastala 1962. godine, sadrži nekoliko važnih teorema o uređenju. Uređeni podskupovi realne prave okarakterisani su 1965. godine od strane Rudin[25]. Lutzer je 1969. pokazao da je uređen prostor metrizabilan ako i samo ako ima G_δ dijagonalu. 1973. van Dalen i Wattel su dali

[23]Georg Cantor, 1845 - 1918, njemački matematičar

[24]Samuel Eilenberg, 1913 - 1998, poljsko - američki matematičar

[25]Mary Ellen Rudin, 1924 - 2013, američka matematičarka

kompletnu topološku karakterizaciju uređenih prostora i poduređenih prostora ([9]). Uređenje i poduređenje metričkih prostora (kojima se mi ovdje nismo bavili) opisao je Purisch u svojoj disertaciji 1973. i time se nastavio baviti i kasnije, te je 1977. godine dao potrebne i dovoljne uslove za uređenje proizvoljnog metričkog prostora.

Oblast uređenih topoloških prostora (a samim tim i linearno uređenih i uopšteno uređenih prostora) je svakako jako interasantna istraživačima i u njoj se trenutno može naći dosta otvorenih pitanja koja predstavljaju sferu njihovog interesovanja.

Literatura

[1] G. Artico, U. Marconi, J. Pelant, L. Rotter, M. Tkachenko: *Selections and suborderability*, Fundamenta Mathematicae 175 (2002), 1-33

[2] H. Bennett, D. Lutzer: *A note on perfect normality in generalized ordered spaces*, in Topology and order structure (H. Bennett and D. Lutzer, eds.), Math. Centre Tracs 169, Mathematical Centre, Amsterdam (1980), 19-22

[3] H. Bennett, D. Lutzer: *Lineary Ordered and Generalized Ordered Spaces* (2002)

[4] H. Bennett, D. Lutzer: *Recent Developments in the Topology of Ordered Spaces*, in Recent Progress in General Topology ed. by M.Hušek and J. van Mill (2002)

[5] H. Bennett, R. Heath, D. Lutzer: *GO-spaces with σ-closed-discrete dense subspaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 129 (2000), 931 - 939

[6] H. Bennett, M. Hosobuchi, D. Lutzer: *A note on perfect ordered spaces*, Rocky Mountain Journal of Mathematics Vol. 29, No. 4 (1999), 1195-1207

[7] H. Bennett, M. Hosobuchi, D. Lutzer: *Weakly perfect generalized ordered spaces*, Houston Journal of Mathematics 26 (2000), 609-627

[8] H. Bennett, D. Lutzer, S. Purish: *On dense subspaces of generalized ordered spaces*, Topology Appl. 93 (1999), 191-205

[9] J. van Dalen, E. Watel: *A topological characterization of ordered spaces*, General Topology and its Applications 3 (1973), 347-354

[10] S. Eilenberg: *Ordered Topological Spaces*, American Journal of Mathematics, Vol. 63, No. 1 (1941), 39-45

[11] R. Engelking: *General Topology*, Heldermann Verlag, Berlin (1989)

[12] M. J. Faber: *Metrizability in generalized ordered spaces*, Math. Centre Tracts, no. 53, Amsterdam (1974)

[13] S. Fujii, T. Nogura: *Characterizations of compact ordinal spaces via continuous selections*, Topology and its Applications 91 (1999), 65-69

[14] C. Good, K. Papadopoulos: *A topological characterization of ordinals: van Dalen and Wattel revisited*, Topology and its Applications (2010)

[15] J. de Groot, P. Schnare: *A topological characterization of products of compact totally orderable spaces*, Gen. Topology Appl. 2 (1972), 67-73

[16] M. Kurilić: *Osnovi opšte topologije*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno - matematički fakultet, Novi Sad (1998)

[17] D. Lutzer: *On generalized ordered spaces*, Dissertationes Math. 89 (1971)

[18] E. Michael: *Topologies on spaces of subsets*, Trans. Amer. Math. Soc. 71 (1951), 152-182

[19] J. van Mill, E. Wattel, *Orderability from selections: Another solution of the orderability problem*, Fundamenta Math. 121, 219 - 229

[20] J. van Mill, E. Wattel: *Selections and orderability*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 83, No. 3 (1981), 601-605

[21] T. Miwa, N. Kemoto: *Linearly ordered extensions of GO spaces*, Topology Appl. 54 (1993), 133-140

[22] S. Purish: *A history of Results on Orderability and Soborderability*, Topology Atlas Invited Contibutions, http://at.yorku.ca/t/a/i/c/18.dir/

[23] S. Purish: *On the orderability of Stone-Čech compatifications*, Proc. Amer. Math. Soc.41 (1973), 55-56

[24] W. Shi: *Extensions of perfect GO-spaces with σ-discrete dense sets*, Proc. Amer. Math. Soc. 127 (1999), 615-618

[25] W. Shi: *Perfect GO-spaces which have a perfect linearly ordered extension*, Topology Appl. 81 (1997), 23-33

[26] W. Shi, T. Miwa, Y. Gao: *A perfect GO-spaces which cannot dansely embed in any perfect orderable space*, Topology Appl. 66 (1995), 241-249

[27] O. Veblen: *Theory of plane curves in nonmetrical analysis situs*, Trans. Amer. Math. Soc. 6 (1905), 83 - 98

[28] M. Venkataraman, M. Rajagopalan, T. Soundararajan, *Orderable topological spaces*, General Topology and its Applications 2 (1972), 1-10

Biografija

Milijana Milovanović rođena je 30. aprila 1982. godine u Bijeljini (Bosna i Hercegovina). Osnovnu školu završava 1997. u istom gradu, kao nosilac Vukove diplome. Iste godine upisuje opšti smjer bijeljinske gimnazije. Tokom osnovnoškolskog i srednjoškolskog obrazovanja redovno učestvuje na regionalnim i republičkim takmičenjima iz matematike i osvaja zapažena mjesta.

Nakon završetka gimnazije, sa odličnim uspjehom sve četiri godine, 2001. godine upisuje Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, i na Departmanu za matematiku i informatiku smjer: diplomirani matematičar (B smjer). Osnovne studije završava u julu 2006. sa prosječnom ocjenom 9,28. Dobitnik je nagrade PMF-a za pokazani uspjeh u toku studija. Master rad brani u postupku zamjene diplome, na studijskom programu primijenjena matematika, modul: tehnomatematika.

Od septembra 2006. do avgusta 2011. godine radi kao profesor matematike i informatike u bijeljinskoj gimnaziji, a od septembra 2011. zaposlena je na Univerzitetu u Istočnom Sarajevu, u zvanju asistenta.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Milijana Milovanović
AU

Mentor: dr Aleksandar Pavlović
MN

Naslov rada: Linearna uređenja i GO prostori
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: srpski/engleski
JI

Zemlja publikovanja: Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2015.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mjesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (broj poglavlja, broj strana, broj citata, broj tabela, broj slika, broj grafika, broj priloga): (5,45,28,0,1,0,0)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Topologija
ND

Predmetna odrednica/ključne riječi: topološki prostori, homeomorfizam, linearno uređenje, GO prostori, gnijezda, izbori, Čech-Stone kompaktifikacija, savršeni prostori
PO

UDK:

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
ČU

Važna napomena: Nema
VN

Izvod: U ovom radu uvedeni su linearno uređeni i uopšteno uređeni topološki prostori, kraće LOTS i GO prostori, redom. Da bi se došlo do tih pojmova, dato je kratko podsjećanje na sam pojam relacije poretka, uređenog skupa, kao i osnovne definicije i operacije sa kardinalnim brojevima. Takođe, uvedeni su osnovni pojmovi vezani za topološke prostore i neke njihove osobine. Nakon prvobitne karakterizacije LOTS i GO prostora, prezentovano je i nekoliko drugih karakterizacija tih klasa prostora: uz pomoć gnijezda, neprekidnih izbora i Čech-Stone kompaktifikacije. U završnom dijelu rada posmatraju se GO prostori sa nekim dodatnim osobinama.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN vijeća: 18.12.2014.
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:

- dr Ljiljana Gajić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, predsjednik
- dr Aleksandar Pavlović, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, član
- dr Miloš Kurilić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, član

KO

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Milijana Milovanović
AU

Mentor: Aleksandar Pavlović, Ph.D.
MN

Title: Linear orderings and GO spaces
TI

Language of text: Serbian (Latin)
LT

Language of abstract: Serbian/English
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2015
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publication place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: (chapters, pages, references, tables, pictures, charts, supplements): (5,45,28,0,1,0,0)
DP

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Topology
SD

Subject/Key words: topological spaces, homeomorphism, linear ordering, GO spaces, nests, selections, Čech-Stone compactification, perfect spaces
SKW

UC:

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD

Note: None
N

Abstract: In this thesis the linear odreded and generalized ordered topological spaces, shortly LOTS and GO spaces, are introduced. In order to reach that aim, we mention some basic definitions and results about partially ordered and totally ordered spaces and kardinal numbers. We also give definitions and some properties about topological spaces. After the main characterization of GO spaces, it was presented some other characterizations of that class of spaces: using nests, selections and Čech-Stone compactification. In the last part of the thesis, it is stated several additional properties of the class of GO spaces.
AB

Accepted by the Scientific Board on: December 18th 2014
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:

- Ljiljana Gajić, Ph.D, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, president
- Aleksandar Pavlović, Ph.D, assistant professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, member
- Miloš Kurilić, Ph.D, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, member

DB