UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Milena Radosavljević

ODREĐIVANJE RAVNOTEŽNE CENE

-završni rad-

Novi Sad, oktobar 2009.

Sadržaj:

0.1. PREDGOVOR

Tema ovog rada je određivanje ravnotežne cene na tržištu. Ovde se razmatra koji parametri i na koji način utiču na određivanje cene. Najpre je predstavljena matematička teorija koja je potrebna za razumevanje modela koji su u nastavku. Zatim su detaljno predstavljeni modeli za određivanje ravnotežne cene. Na kraju je praktičnim primerom proverno kako modeli „rade“. Praktičan deo zasnovan je na realnim podacima.

Ovom prilikom se zahvaljujem svim profesorima i asistentima na ukazanom znanju tokom studiranja. Posebno se zahvaljujem svom mentoru, *dr. Zorani Lužanin* za stručno i profesionalno usmeravanje pri izradi ovog rada i za znanje koje sam stekla radivši s njom.

Novi Sad, oktobar 2009. Milena Radosavljević

I UVOD

Određivanje cene određene robe (*pricing*) je jedan od četiri ključna elementa marketinga. Preostala tri elementa su proizvodnja (*production*), promocija (*promotion*) i distribucija (*placement ili distribution*). Cena je jedini element od ova četiri koji generiše prihod, ostali predstavljaju trošak. Prilikom određivanje cene potrebno je odgovoriti na neka pitanja: šta je cilj određivanja cene, da li se cene određuju sa ciljem da se maksimizira profit, da li će se cene menjati u različitim geografskim područjima, treba li da postoje posebni popusti, koje su cene konkurencije i drugo.

Dobro određene cene treba da zadovolje tri stvari:

- ✓ Postizanje finansijskog cilja kompanije (profitabilnost)
- ✓ Prilagođavanje realnosti na tržištu (cena je dobra jer na primer pokriva sve troškove, ali da li će potrošači kupovati po toj ceni?)
- ✓ Konzistentnost sa preostale tri promenljive marketinga

Sa stanovišta marketara, „dobra“ cena je cena koja je veoma blizu maksimalne cene koju su potrošači voljni da plate. Dobra strategija određivanje cena je ona koja može da balansira između „cenovnog dna“ (cena ispod koje bi kompanija završavala gubitkom) i „cenovnog vrhunca“ (cena iznad koje ne bi bilo tražnje za datom robom).

Određivanje cene (*pricing*) je proces određivanja šta će (koliko će) kompanija dobiti za svoje proizvode. Faktori koji utiču na ovaj proces su troškovi proizvodnje, konkurencija, položaj na tržištu, uslovi na tržištu, kvalitet proizvoda.

Teorija određivanja cena je u ranim godinama prošlog veka predstavljala jednu metodologiju koja je bila dostupna jedino ekonomistima. Ali, novu osnovu ove teorije i ekonomske analize uopšte dao je matematičar *John Nash. Nash* – ova teorija igara predstavlja matematički okvir ekonomske analize.

II MATEMATIČKI APARAT

1. ELEMENTI VEROVATNOĆE

1.1.SLUČAJAN DOGAĐAJ

Osnovni pojam od kojeg polazimo je eksperiment (opit) kod kojeg ishod nije jednoznačno određen. Skup svih (logički) mogućih ishoda nekog eksperimenta označavamo sa Ω, a njegove elemente nazivamo *elementarnim događajima* i označavaćemo ih sa $\omega_{1,}\ \omega_{2,}$ ...

Primer 1:

Eksperiment je bacanje pravilne kocke za igru

Skup mogućih ishoda: $\Omega = \{\ 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$\downarrow,\ \downarrow, \dots \dots ,\ \downarrow$$

$$\{\omega_{1,}\omega_{2,} \dots \dots, \omega_6\}$$ ■

Slučajan događaj (ili samo događaj), A, je podskup skupa Ω. On se sastoji od onih elementarnih događaja koji imaju svojstvo koje taj događaj definiše.

Primer 2:

Nadovezivanjem na prethodni primer, stavićemo $A - "pao\ je\ paran\ broj"$

Onda je: $\mathrm{A} = \{\ 2, 4, 6\} \subset \Omega$ ■

Skup svih mogućih ishoda, Ω je događaj koji se realizuje uvek, zato skup Ω nazivamo *sigurnim događajem*. Prazan skup je *nemoguć događaj* i on se nikada ne može desiti. Kako su događaji skupovi onda sve relacije i operacije vezane za skupove možemo tumačiti u terminima realizacije događaja.

Na primer, unija događaja A i B se označava sa

$$A \cup B$$

i realizuje se ako i samo ako se realizuje bar jedan od događaja A i B. Ukoliko važi

$$A \cap B = \emptyset$$

onda uniju događaja A i B označavamo sa

$$A + B$$

Definicija 1: Događaj $\bar{A}$ ili A^c zove se komplement događaja A i realizuje se akko se ne realizuje događaj A.

Događaj $\bar{A}$ nazivano još i događaj suprotan događaju A.

Označimo sa $\mathcal{F}$ klasu događaja koji se posmatraju kod nekog opita, tj $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Prirodno je zahtevati da ova klasa bude zatvorena u odnosu na operacije komplementiranja i prebrojeve unije i preseke, što ćemo formulisati u sledećem aksiomu.

Aksiom 1: Neka je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

1) $\Omega \in \mathcal{F}$
2) $\mathrm{A} \in \mathcal{F} \implies \bar{A} \in \mathcal{F}$ zatvorenost u odnosu na komplementiranje
3) $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{F} \implies \bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{F}$

onda se $\mathcal{F}$ naziva σ −polje ili σ −algebra događaja.

1.2. VEROVATNOĆA (pojam)

- ***Statistička definicija***

Pretpostavimo da n puta ponavljamo eksperiment. Zanima nas događaj A. Neka je m broj realizacija događaja A. Tada je broj

$$\frac{m}{n}$$

relativna učestanost događaja A. Kako se broj n povrćava tako se količnik $\frac{m}{n}$ „stabilizuje“. Na primer, ako bi kockicu bacali n, kada je n dovoljno veliko količnik $\frac{m}{n}$ približno je $\frac{1}{6}$, gde je m broj pojavljivanja bilo kojeg broja na kockici.

- ***Geometrijska definicija***

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Verovatnoća pojavljivanja događaja A će biti jednaka sledećem količniku

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$$

gde je sa m mera skupa.

- ***Laplasova (klasična) definicija***

Ovde podrazumevamo da je Ω konačan skup. Dakle, $\Omega = \{\omega_{1,}\omega_{2,} \dots\dots, \omega_n\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Neka je $\mathrm{A} = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2} \dots\dots, \omega_{i_k}\} \subseteq \Omega$ i neka je verovatnoća događaja ω_{i_m} označena sa

$$P\{\omega_{i_m}\} = p_m, p_1 = \cdots = p_k = \frac{1}{k}$$

Dalje, onda sledi da je:

$$P(A) = \frac{k}{n}.$$

Neka je $\mathrm{B} = \{\omega_{j_1}, \omega_{j_2} \dots\dots, \omega_{j_l}\} \subseteq \Omega$, tako da $AB = \emptyset$, onda je:

$$P(B) = \frac{l}{n}.$$

Postavlja se pitanje šta je onda $P(A \cup B)$?

Važi:

$$A \cup B = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2} \dots\dots, \omega_{i_k}, \omega_{j_1}, \omega_{j_2} \dots\dots, \omega_{j_l}\}$$

Te sledi da je

$$P(A \cup B) = \frac{k+l}{n} = \frac{k}{n} + \frac{l}{n} = P(A) + P(B)$$

Nedostatak ove definicije je što ona važi samo za specijalan slučaj i uslovima kao što je prikazano, ali se kroz istoriju varovatnoće pojavljuje, te je bilo vredno spomenuti je.

- ***Aksiomatska definicija***

Neka je $\Omega = \emptyset$ skup svih mogućih ishoda, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ σ −algebra događaja.

Aksiom 2: *(Aksiom verovatnoće)* Funkcija $P: \mathcal{F} \to [0,1]$ za koju važi:

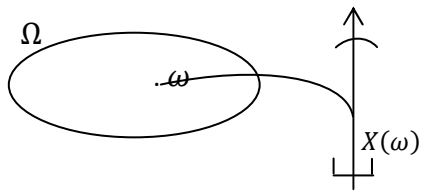
1) $\mathrm{P}(\Omega) = 1$
2) $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{F} \implies P(\sum_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i), \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i,j \;\; i \neq j$ (uslov $\sigma -$ aditivnosti)

zove se ***verovatnoća*** na $\mathcal{F}$.

Uređena trojka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ zove se ***prostor verovatnoće***. Neka je $A \in \mathcal{F}$, $P(A)$ je oznaka za verovatnoću događaja A. Ako je $A \neq \Omega$ i $P(A) = 1$, onda je A skoro *siguran događaj*. Ako je $A \neq \emptyset$ i $P(A) = 0$, onda je A *skoro nemoguć događaj*.

1.3. SLUČAJNA PROMENLJIVA

Jedan od osnovnih pojmova verovatnoće je pojam ***slučajne promenljive*** (*random variable*). Ovaj pojam nastao je iz težnje da svakom elementarnom događaju $\omega \in \Omega$, dodelimo numeričku karakteristiku (broj) $X(\omega)$, na određeni način.



Slika 2

Da bi X bila skučajna promenljiva zahtevaćemo izvesnu merljivost, odnosno tražićemo da $X^{-1}([a,b)) \in \mathcal{F}$, gde je

$$X^{-1}([a,b)) = \{a \leq X < b\} = \{\omega \in \Omega | a \leq X(\omega) < b\}$$

<u>*Definicija 2*</u>: Preslikavanje $X: \Omega \to \mathbb{R}$ zove se slučajna promenljiva nad $(\Omega, \mathcal{F})$ ako važi $\forall B \in \mathcal{B}$ (Borelova σ −algebra, koja se dobija izdvajanjem svih poluotvorenih intervala $[a,b)$) važi da $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.

Ako je $X(\Omega)$ konačan skup, X je prosta slučajna promenljiva.

Kako je u prostoru verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ verovatnoća definisana za svaki skup iz $\mathbb{R}$ i kako je $X^{-1}(S) \in \mathcal{F}$, $\forall S \in \mathcal{B}$, znamo da je za svako $S \in \mathcal{B}$ definisana funkcija

$$P_X(S) = P(X^{-1}(S)) = P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in S\})$$

Ova funkcija se naziva *raspodela verovatnoće* slučajne promenljive X.

Postoje dve velike klase slučajnih promenljivih. To su diskretne slučajne promenljive i neprekidne slučajne promenljive. Slučajna promenljiva je diskretnog tipa ako je skup njenih vrednosti prebrojiv. Svaku slučajnu promenljivu jedinstveno određuje njena funkcija raspodele.

<u>*Definicija 3*</u>: Funkcija raspodele slučajne promenljive X je preslikavanje $F_X: \mathbb{R} \to [0,1]$ definisano sa $F_X(x) = P\{X < x\}$.

Jedna od značajnih diskretnih slučajnih promenljivih je *Poisson* – ova slučajna promenljiva. Raspodela verovatnoća *Poisson* – ove slučajne promenljive data je na sledeći način

$$p_k = P\{X = k\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Sada ćemo definisati neke klase raspodela, jer nam nekad poznate raspodele neće biti adekvatne za opis nekog skupa podataka na koji ćemo naići u realnosti.

Definicija 4 : Neka je p_k funkcija raspodele neke diskretne slučajne promenljive. Ona pripada $(a, b, 0)$ *klasi raspodela* ako postoje konstante a i b tako da važi

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = a + \frac{b}{k} \qquad k = 1,2,3 \ldots$$

Definicija 5 : Neka je p_k funkcija raspodele neke diskretne slučajne promenljive. Ona pripada $(a, b, 1)$ *klasi raspodela* ako postoje konstante a i b tako da važi

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = a + \frac{b}{k} \qquad k = 2,3,4 \ldots$$

Vidimo da se ove dve klase razlikuju jedino u početku rekurzuje (klasa $(a, b, 0)$ počinje od $k = 1$; a klasa $(a, b, 1)$ počinje od $k = 2$). Kod klase $(a, b, 1)$ postavlja se pitanje šta ćemo sa verovatnoćom p_o? Potrebno je praviti razliku između slučajeva kada je $p_o = 0$ i slučaja kada je $p_o > 0$. Prvu potklasu ćemo nazivati ***zero – truncated*** („*raspodele odsečene u nuli*“), a drugu potklasu ćemo nazivati ***zero – modified*** (*raspodele modifikovane u nuli*), jer je modifikovana u odnosu na onu verovatnoću koja je kod klase $(a, b, 0)$. Funkciju raspodele ove potklase označavamo sa p_k^M. Raspodele koje pripadaju ovoj klase nazivamo *Poisson* – ova zero modified raspodela, Binomna modified raspodela, itd. Kod ove potklase p_o je proizvoljno. Tj. to je paramater unapred zadat, a ostale verovatnoće se određuju na osnovu rekurzivne formule:

$$p_k^M = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}^M$$

Za *Poisson* – ovu raspodelu važi da je $p_o = e^{-\lambda}, a = 0, b = \lambda, \lambda > 0$, za zero – truncated *Poisson* – ovu raspodelu važi $p_o = 0, a = 0, b = \lambda, \lambda > 0$, a za zero – modified *Poisson* – ovu raspodelu važi da je $p_o = proizvoljno, a = 0, b = \lambda, \lambda > 0$ (tabela 1). U radu će se javiti zero – modified *Poisson* – ova raspodela kod koje je $p_o = \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}, a = 0, b = \lambda, \lambda > 0$.

Distribution[a]	p_0	a	b	Parameter space
Poisson	$e^{-\lambda}$	0	λ	$\lambda > 0$
ZT Poisson	0	0	λ	$\lambda > 0$
ZM Poisson	Arbitrary	0	λ	$\lambda > 0$
Binomial	$(1-q)^m$	$-\frac{q}{1-q}$	$(m+1)\frac{q}{1-q}$	$0 < q < 1$
ZT binomial	0	$-\frac{q}{1-q}$	$(m+1)\frac{q}{1-q}$	$0 < q < 1$
ZM binomial	Arbitrary	$-\frac{q}{1-q}$	$(m+1)\frac{q}{1-q}$	$0 < q < 1$
Negative binomial	$(1+\beta)^{-r}$	$\frac{\beta}{1+\beta}$	$(r-1)\frac{\beta}{1+\beta}$	$r > 0,\ \beta > 0$
ETNB	0	$\frac{\beta}{1+\beta}$	$(r-1)\frac{\beta}{1+\beta}$	$r > -1,^b\ \beta > 0$
ZM ETNB	Arbitrary	$\frac{\beta}{1+\beta}$	$(r-1)\frac{\beta}{1+\beta}$	$r > -1,^b\ \beta > 0$
Geometric	$(1+\beta)^{-1}$	$\frac{\beta}{1+\beta}$	0	$\beta > 0$
ZT geometric	0	$\frac{\beta}{1+\beta}$	0	$\beta > 0$
ZM geometric	Arbitrary	$\frac{\beta}{1+\beta}$	0	$\beta > 0$
Logarithmic	0	$\frac{\beta}{1+\beta}$	$-\frac{\beta}{1+\beta}$	$\beta > 0$
ZM logarithmic	Arbitrary	$\frac{\beta}{1+\beta}$	$-\frac{\beta}{1+\beta}$	$\beta > 0$

[a]ZT = zero truncated, ZM = zero modified.

[b]Excluding $r = 0$, which is the logarithmic distribution.

Tabela 1

Primer 3:

Neka je

$$p_o = \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}, a = 0, b = \lambda, \lambda > 0$$

odrediti ostale verovatnoće *Poisson* – ove zero-modified raspodele.

$$p_o = \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}$$

Na osnovu rekurzivne formule

$$p_k^M = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}^M$$

sledi da je

$$p_1 = \left(0 + \frac{\lambda}{1}\right)\frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} = \lambda \cdot \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}$$

Dalje je

$$p_2 = \left(0 + \frac{\lambda}{2}\right) \cdot \lambda \cdot \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} = \frac{\lambda^2}{2} \cdot \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}$$

$$p_3 = \left(0 + \frac{\lambda}{3}\right) \cdot \frac{\lambda^2}{2} \cdot \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} = \frac{\lambda^3}{3!} \cdot \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}$$

Nastavljajući dalje dobijamo,

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} \qquad \blacksquare$$

2. KVAZIKONKAVNE FUNKCIJE

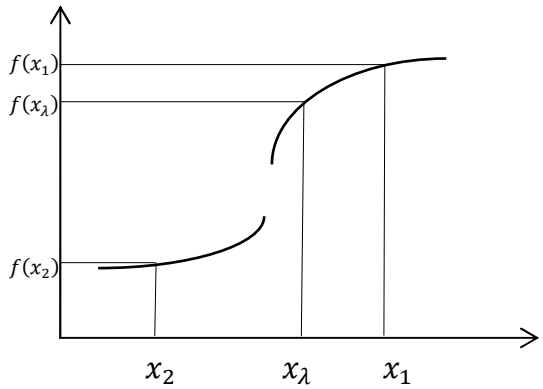
Definicija 6: Neka je $f: \mathbb{R}^n \supseteq X \to \mathbb{R}$ realna funkcija definisana na konveksnom skupu X. Funkcija f je kvazi konkavna ako za svako $x_1, x_2 \in X$ i svako $\lambda \in [0,1]$ važi:

$$f\big((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2\big) \geq \min\{f(x_1), f(x_2)\}$$

Kažemo da je funkcija strogo kvazi konkavna ako za svako $x_1, x_2 \in X$ i svako $\lambda \in [0,1]$ važi:

$$f\big((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2\big) > \min\{f(x_1), f(x_2)\}$$

Drugim rečima, neka su date tačke $x_1, x_2 \in X$ i pretpostavimo da je $f(x_1) \geq f(x_2)$. Kvazi konkavnost zahteva da dok god se krećemo po liniji od „niže tačke“ na grafiku x_2 ka „višoj tački“ x_1, vrednost funkcije f nijednog trenutka neće pasti ispod vrednosti $f(x_2)$ (slika 3).



Slika 3

Teorema 1: *Neka je f realna funkcija definisana na konveksnom skupu $X \subseteq \mathbb{R}^n$. f je kvazi konkavna ako i samo ako za bilo koje $\alpha \in \mathbb{R}$ važi da je skup*

$$U_\alpha = \{x \in X | f(x) \geq \alpha\}$$

konveksan.

Direktna posledica ove teorema je da iz konkavnosti sledi kvazi konkavnost, dok obrnuto ne mora da važi. Analogno, iz stroge konkavnosti sledi stroga kvazi konkavnost. Dakle, kvazi konkavnost je slabija osobina od konkavnosti i kvazi konkavne funkcije ne nasleđuju neke korisne osobine konkavnih funkcija. Na primer, kvazi konkavne funkcije dozvoljavaju prekidnost funkcije u unutrašnjim tačkama domena.

3. TEORIJA IGARA I *NASH* – OV EKVILIBRIJUM

3.1. TEORIJA IGARA (Game theory)

U životu je često potrebno doneti neke odluke. Nekada donošenje odluke zavisi samo od jedne strane, a nekada postupak donošenja odluke zavisi od interakcije sa odlukama koje donose neke druge strane, tako da ishod odluke zavisi i od odluke drugih strana. Dešava se i da su situacije donošenja odluke okarakterisane suprotnim interesima učesnika u odlučivanju, tj kažemo da su strane u konfliktu.

Ovakav slučaj neizvesnosti u odlučivanju zovemo ***igrom***, a oblast matematike koja se bavi analizom ovakvih problema i nalaženjem optimalnih rešenja se naziva ***teorijom igara***. Svaku igru definišu:

- Igrači koji predstavljaju strane u konfliktu;
- Dobitak (gubitak) koji predstavlja rezultat igre;
- Skup startegija (poteza, alternativa) koji predstavljaju ponašanje svakog igrača

Osnovna pitanja koja se postavljaju u teoriji igara su:

- Šta to znači izabrati racionalnu strategiju, kad ishod strategije zavisi od strategije koju bira protivnik i kada je informacija nepotpuna?
- Da li je racionalno u igrama koje dozvoljavaju i uzajamni dobitak (ili uzajmni gubitak) obe strane, uzajmno sarađivati da bi se obezbedio najveći uzajmani dobitak (ili ostvario najmanji gubitak), ili je racionalno delovati agresivno, bez obzira na mogućnost uzajamnog dobitka ili gubitka?
- Ako je ponekad racionalno igrati agresivno, koje su to situacije u kojima se isplati, a u kojim situacijama je racionalno sarađivati?

Teorija igara ima široku primenu u ekonomiji. Mnoge ekonomske osobine mogu biti posmatrane kao specijalan slučaj ove teorije i razumevanje teorije igara je potrebna komponenta za analizu mnogih ekonomskih pojava.

Po broju igrača razlikujemo *igre dva igrača* i *igre više igrača*. U odnosu na broj raspoloživih strategija razlikujemo *konačne* i *beskonačne* igre. Ukoliko je rezultat igre takav da je dobitak jednog igrača jedank gubitku drugog igrača, onda takvu igru nazivamo igrom *nulte sume*. U suprotnom je to igra *nenulte sume*. Cilj teorije igara je nalaženje optimalne strategije za odabranog igrača, koja obezbeđuje njegov maksimalni dobitak (ili minimalni gubitak).

Postoje nekoliko načina da se opiše teorija igara. Dva osnovna načina predstavljanja ove teorije su ***forma strategije ili strateška forma*** (*strategic form*) i ***opširna forma*** (*extensive form*).

Startegijska forma igre definisana je skupom igrača, skupom strategija, izborima koje svaki igrač može odabrati i skupom isplata (*payoffs*) koje ukazuju na korisnost (*utility*) koju svaki igrač prima prilikom odabira određene kombinacije strategija. U nekim radovima se strategijska forma još naziva strategijska igra (*strategic game*), koja je definisana kao i ovde navedena strategijska forma, a za pojam izbora koji igrači čine koristi se i termin akcija (*action*)[5].

Pretpostavljamo da je opis igre zajedničko znanje – isplate i strategije su dostupne igračima. Tj, svaki igrač zna sopstvenu isplatu i strategiju kao i isplate i strategije ostalih igrača. Šta više, svaki igrač zna da i ostali igrači znaju to što i on. Dalje pretpostavljamo da, svaki igrač može odabrati određenu „akciju“ tako da maksimizira svoju korisnost pod uticajem sopstvenog ubeđenja i da je to ubeđenje modifikovano kada pristignu nove informacije na osnovu *Bayes* – vog zakona.

Postavlja se pitanje kako neko ko hoće da maksimizira svoju korisnost treba da se ponaša, kada njegove isplate zavise od izbora drugih igrača koji takođe žele da maksimiziraju svoju korisnost?

Najjednostavniji tip strateških igara je igra dva igrača sa nultom sumom.Prvi igrač bira jednu od svojih raspoloživih strategija a_i , $i = 1, 2, \dots, m$. Istovremeno drugi igrač bira svoju strategiju b_j , $j = 1, 2, \dots, n$. Kao ishod igre za prvog igrača se pojavljuje dobitak $c_I(a_i, b_j)$, odnosno za drugog igrača gubitak $c_{II}(a_i, b_j)$. Na osnovu uslova nulte sume sledi:

$$c_I(a_i, b_j) + c_{II}(a_i, b_j) = 0$$

Označimo

$$c_I(a_i, b_j) = C(a_i, b_j)$$

Dalje sledi,

$$c_{II}(a_i, b_j) = -C(a_i, b_j)$$

Cilj prvog igrača je makcimizacija funkcije C, a drugog igrača je minimizacija iste te funkcije. Pri čemu treba primetiti, da svako od igrača bira po jednu od promenljivih koje određuju vrednost funkcije $C(a_i, b_j)$. Drugim rečima rezultat igre je neizvestan ukoliko se poznaje samo jedna od strategija. Rezultat igre je definisan tek kada su poznate strategije oba igrača.

Primer 4:

Posmatrajmo igru u kojoj imamo dva igrača, Red i Kolonu. Svaki igrač ima novčić, te bacanjem novčića može pasti „pismo“ ili „glava“. Za jednom odabranu strategiju postoji isplata svakom igraču, koja će zavisiti od izbora koji su odabrali igrači.

Ovi izbori su nezavisni i nijedan igrač ne zna izbor ovog drugog kada napravi sopstveni izbor. Pretpostavimo da ako oba igrača odaberu „glavu“ ili oba odaberu „pismo“, onda Red dobija dinar, a kolona gubi dinar. Na drugoj strani, ako jedan igrač odabere „pismo“, drugi „glavu“ Kolona dobija dinar, a Red gubi dinar.

Sve što smo spomenuli, možemo predstaviti u *matrici igre* (*game matrix*), kao što je prikazano u tabeli 2:

		Kolona	
		Glava	Pismo
Red	Glava	1 , -1	-1 , 1
	Pismo	-1 , 1	1 , -1

Tabela 2

Primetimo da koje god polje tabele pogledali (koju god strategiju izabrali), plaćanje jednom igraču je negativno plaćanje drugog igrača. Drugim rečima, ovo je igra nulte sume (*zero – sum game*), koja je objašnjena iznad. Ali, u ekonomiji najčešće nije takva situacija.

Sada smo predstavili igru dve strane sa nultom sumom. Sada ćemo uopštiti ovu vrstu igre na slučaj kada suma nije jednaka nuli (*variable – sum game*). Tj. kada dobitak jednog igrača nije jednak gubitku drugog igrača. Ovakve igre se koriste za modeliranje fenomena u ekonomiji kao što su konkurencija na tržištu, aukcije, pregovori između kupaca i prodavaca i drugo.

Stratešku formu nenulte sume definišu dva konačna skupa strategija: $x \in X$ za prvog igrača i $y \in Y$ za drugog igrača, i dve funkcije sa realnim vrednostima $y_1(x,y)$ i $y_2(x,y)$ koje predstavljaju rezultate igre prvog i drugog igrača, respektivno. Ovakva igra se modelira bimatricom plaćanja C ciji su elementi uređeni parovi $\big(y_1(x,y), y_2(x,y)\big)$:

$$C = \begin{bmatrix} \big(u_1(x_1,y_1), u_2(x_1,y_1)\big) & \big(u_1(x_1,y_2), u_2(x_1,y_2)\big) & \dots & \big(u_1(x_1,y_n), u_2(x_1,y_n)\big) \\ \big(u_1(x_2,y_1), u_2(x_2,y_1)\big) & \big(u_1(x_2,y_2), u_2(x_2,y_2)\big) & \dots & \big(u_1(x_2,y_n), u_2(x_2,y_n)\big) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \big(u_1(x_m,y_1), u_2(x_m,y_1)\big) & \big(u_1(x_m,y_2), u_2(x_m,y_2)\big) & \dots & \big(u_1(x_m,y_n), u_2(x_m,y_n)\big) \end{bmatrix}$$

Primer 5: *Dilema zatvorenika (The prisoner's dilemma)*

Jedna od najpoznatijih bimatričnih igara je takozvana „dilema zatvorenika". Posmatramo igru gde imamo dva igrača, ali sada su njihovi interesi delimično u konfliktu. Postoje dve strategije: da sarađuju ili da ne sarađuju.

U originalnoj priči, ova dva igrača su dva zatvorenika koja su zajedno počinila zločin. Tužilac nema dovoljno dokaza da ih optuži te im predlaže da priznaju delo i svedoče jedan protiv drugog, ili će obojica biti osuđena.

Donošenje odluka mora biti nezavisno. Strategije saradnje znači da će raspisati $3.000din$ na poklon drugom igraču, dok ne saradnjom mogu uzeti $1.000din$ (i bežati!). Pri čemu primetimo da ova plaćanja dolaze od nekog trećeg lica, ne od samih igrača. Ova igra je igra promenljivih suma (*variable – sum game*). Problem (ili dilema) je u tome što svaka strana ima podsticaj da ne sarađuje, bez obzira šta on veruje da će druga strana uraditi. Ako jedan igrač veruje da će ovaj drugi sarađivati onda će mu to doneti $3.000din$ na poklon i još njegovom ne saradnjom dobiće još $1.000din$, što je ukupno $4.000din$. Sa druge strane, ako prvi igrač veruje da ovaj drugi neće sarađivati, to onda znači da će ovaj drugi dobiti $1.000din$ i neće „misliti" na prvog igrača, onda je prvom najbolje da i on ne sarađuje i dobije bar $1.000din$ (tabela 3).

		II igrač	
		Saradnja	Ne saradnja
I igrač	Saradnja	3 , 3	0 , 4
	Ne saradnja	4 , 0	1 , 1

Tabela 3

Međutim, ovu priču možemo posmatrati i sa drugačijeg stanovišta. Naime, neka imamo duopol. Sarađivanje podrazumeva da te dve firme na tržištu drže cenu visoko i ostvaruju profit, a ne saradnja podrazumeva da jedna firma spusti cenu i na taj način poveća tržišno učešće na štetu druge firme.

3.2. NASH – OV EKVILIBRIJUM

U mnogim igrama priroda svake strategije nalaže da igrač želi da odabere akciju koju drugi igrač nije u stanju unapred da predvidi. U primeru 4) jasno je da nijedan igrač ne želi da drugi igrač tačno predvidi njegov izbor. Prirodno je razmatrati slučajnu strategiju padanja „glave“ sa verovatnoćom p_h i verovatnoćom padanja „pisma“ p_t. Takva strategija naziva se *miksovana strategija* (*mixed strategy*). Strategija kod koje se izbor određene akcije dešava sa verovatnoćom 1 naziva se *potpuna strategija* (*pure startegy*).

Postavlja se pitanja koji izbor tj koju akciju treba odabrati u igri? Naravno, želimo da pretpostavimo da će svaki igrač izabrati najbolju moguću akciju. U igri, najbolja akcija svakog igrača zavisi od izbora drugih igrača. Stoga kada igrač donosi odluku treba da ima na umu koju će akciju drugi igrači odabrati , tj igrač mora „formirati“ verovanje o akcijama drugih igrača.

Na kojoj osnovi može biti formirano to verovanje? Osnovna pretpostavka je da je verovanje svakog igrača zasnovano na prošlom iskustvu i ono je dovoljno da igrač zna kako će se njegovi konkurenti ponašati. Takođe treba da pretpostavimo da je svaki igrač već igrao igru, i pretpostavljamo da na igru igrač gleda kao iz izolacije, tj on nema ništa zajedničko sa ponašanjem ostalih igrača, niti njegova tekuća akcija ima neku posledicu na buduće akcije ostalih igrača. Na primer, interakcija između kupaca i prodavaca. Kupci i prodavci neprekidno međusobno delaju, ali svaki par kupac – prodavac može biti modeliran slučajno, jer jedan prodavac u jednom periodu može prodavati robu jednom kupcu, a onda i dalje nastavlja da prodaje ali u sledećem periodu nekom drugom kupcu, itd.

Da rezimiramo, imamo dve bitne komponente:

I Svaki igrač bira svoju akciju na osnovu modela racionalnog izbora koji je zasnovan na njegovom verovanju o akcijama drugih igrača.

II Svako igračevo verovanje o akcijima drugih igrača je tačno.

Nash – ov ekvilibrijum je akcija a^* sa osobinom da nijedan igrač i ne može postići bolji rezultat odabirom akcije različite od a_i^*, dok svaki drugi igrač j i dalje ostaju pri akciji a_j^*.

Nash – ov ekvilibrijum odgovara postojanom stanju (*steady state*). Druga komponenta *Nash* – ovog ekvilibrijuma – da je verovanje svakog igrača o akciji drugih igrača tačno – implicira da verovanja dva igrača o trećem su ista. Zbog ovog uslova se nekad kaže da su očekivanja igrača u koordinaciji.

Navedimo sada formalnu definiciju *Nash* – ovog ekvilibrijuma „jezikom“ dva igrača, Reda i Kolone, što je bilo predstavljeno u poglavlju 3.1. Neka je ponašanje Reda predstavljeno verovatnoćom p_r, a neka je verovanje Kolone o delovanju reda predstavljeno verovatnoćom π_r.

Definicija 7: *Nash* – ov ekvilibrijum se sastoji od verovatnoća verovanja da će se odabrati neka strategija (π_r, π_c) i verovatnoće odabira akcije (p_r, p_c) tako da:

1) Verovanja su tačna: $p_r = \pi_r$ i $p_c = \pi_c$, $\forall\, r, c$

2) Svaki igrač bira p_r i p_c tako da maksimizira svoju očekivanu korisnost, za data verovanja o odabiru akcija drugih igrača

Po ovoj definiciji *Nash* – ov ekvilibrijum je ravnoteža akcije i verovanja. U ravnoteži svaki igrač tačno predvidi koji će izbor napraviti ostali igrači i verovanja dva igrača o trećem su konzistentna.

Specijalan slučaj *Nash* – ovog ekvilibrijuma je *Nash* – ov ekvlibrijum za potpune strategije. To je ekvilibrijum u kojem je verovatnoća odabira određene strategije jednaka 1 za svakog igrača, tj:

Definicija 8: *Nash* – ov ekvilibrijum potpune strategije je par (r^*, c^*) tako da je

$$u_r(r^*, c^*) \geq u_r(r, c^*), \text{ za svaku strategiju } r$$

i

$$u_c(r^*, c^*) \geq u_c(r^*, c), \text{ za svaku strategiju } c.$$

Kada se govori o bilo kom ekvilibrijumu postavlja se pitanje njegove egzistencije i jedinstvenosti. Nash je dokazao da za konačan broj agenata (igrača) i konačan broj potpunih strategija ekvilibrijum uvek postoji. Ali, jedinstvenost nije obezbeđena u opštem slučaju. Naučnici su uložili dodatne napore da dođu do kriterijuma na osnovu kojih će izdvojiti najadekvatniji ekvilibrijum. Ti koncepti su poznati pod nazivom prečišćavanje koncepta *Nash* – ovog ekvilibrijuma.

4. RAVNOTEŽA NA TRŽIŠTU (*Market equilibrium*)

Funkcija ponude meri ukupni output na tržištu ponuđen po bilo kojoj ceni. ***Ravnotežna cena*** *(equilibrium price)* je cena po kojoj je ponuda jednaka potražnji.

Postavlja se pitanje zašto takva cena zaslužuje da se zove ravnotežna? Odgovor na to pitanje možemo naći ako posmatramo cenu po kojoj ponuda nije jednaka potražnji. U tom slučaju neki agenti koji delaju na tržištu mogu promenom samo svog ponašanja, bez promene ponašanja ostalih agenata ostvariti neki interes. Na primer, razmatrajmo cenu po kojoj količina ponude nadmašuje potražnju. U ovom slučaju neke firme neće moći da prodaju svu količinu koju su proizvele. Smanjenjem proizvodnje te firme će uštedeti troškove proizvodnje i neće gubiti na prihodu, ali će povećavati profit. Te takva cena ne može biti ravnotežna

Ako sa $x_i(p)$ označimo funkciju tražnje po ceni p neke individue i, $i = 1, 2, \dots, n$, a sa $y_j(p)$ označimo funkciju ponude po ceni p firme j, $j = 1, 2, \dots, m$, onda je ravnotežna cena rešenje jednačine:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(p) = \sum_{j=1}^{m} y_j(p)$$

Prilikom analize tržišta treba voditi računa i o broju firmi na tržištu, jer dugoročno posmatrano, broj firmi na tržištu je promenljiv. Ako firma očekuje da poizvodnjom određenog dobra može generisati profit, onda ostali učesnici na tržištu očekuju ostanak te firme na tržištu. Ali, ako neka firma konstantno posluje sa gubitkom, za očekivati je da će takva firma napustiti tržište.

III MODELI

Mnogi naučnici su uložili napor kako bi razvili i definisali modele za analizu tržišta sa nekompletnim informacijama. Pri rešavanju ovog problema javljaju se različita pitanja. Prvo, koji je najodgovarajući koncept ekvilibrijuma na takvom tržištu? Zatim, pod kojim uslovima bi ekvilibrijum opstao? Koji parametri bi određivali nivo cena i stepen disperzije cena? Poteškoća u razvoju analiza tržišta je problem informacija, jer smo suočeni sa različitim tipovima tržišta, različitim varijacijama usled strukture toka informacija, stepenom centralizacije, homogenošću dobara kojima se trguje, tipovima servisa koji nas povezuju sa robom, brojem stvarnih ili potencijalnih kupaca i prodavaca, volatilnošću[1] parametara koji utiču na ponudu i potražnju, vremenskim razmakom na tržištu kao i geografskim položajem tržišta. Međusbna interakcija svih ovih parametara kao i mnogih drugih je uključena u određivanju disperzije cena i nije očigledno koji od ovih faktora treba izdvojiti u cilju izgradnje modela. Na početku, najbolje je krenuti od tržišta čija je struktura unapred data i za njega izvesti ekvilibrijum, a onda takav model nadograđivati.

Ovaj rad se zasniva na činjenici da je struktura tržišta unapred data, bez upuštanja u samu strukturu tržišta. Pretpostavlja se da na tržištu postoje mnogo kupaca i prodavaca jedinstvenog dobra, i da kupci određuju svoje cene na konkurentnom maloprodajnom tržištu. Na početku se baziramo na model u kojem prodavci imaju prosečnu krivu troškova, kupci su promenljivi i kupuju jednu jedinicu robe u jednoj kupovini. Informacije mogu da se doznaju jedino kroz propagandu (***advertising,*** u realnosti se često koristi samo termin „*komunikacija sa kupcima*“, umesto reklama ili advertajzing). U modelu će se razmatrati i mogućnost potražnje potrošača. Na kraju ćemo razmatrati i šta se dešava pri određivanju ravnotežne cene, ako uključimo i inflaciju. Razmatraćemo model u kojem potrošačeva tehnologija tražnje može uticati na formiranje cena pojedinih firmi, disperziju cena i strukturu tržišta. Na kraju ćemo i na praktičnom primeru (zasnovanom na relnim podacima) videti šta se dešava.

Pri razmatranju ovog problema mogu se uključiti različite pretpostavke. Može se pretpostaviti, na primer, da neki prodavci ne znaju raspodelu cene: na primer mogu verovati da porastom cene mogu izgubiti kupce. Dalje, može se pretpostaviti da potrošači ne znaju raspodelu cene; ako potrošači, kupujući po najnižoj ceni veruju da je čak i niža cena dostupna na tržištu, najmanje povećanje će ih naterati da traže dalje na tržištu. Možemo pretpostaviti i da potrošači imaju troškove jednake nuli, ili da je neki drugi izvor informacija besplatan.

Prvi model u ovom radu pretpostavlja da se prodavci mogu reklamirati. Zatim, postoji najmanje jedan *Nash* – ov ekvilibrijum, tj situacija u kojoj nijedan agent ne može poboljšati svoj prihod promenom svog ponašanja, dok je ponašanje ostalih agenata nepromenjeno. Komunikacione poruke su slučajno povezane sa potrošačima, koji jednostavno biraju one koji im nude najnižu cenu. Prodavci čije su cene visoke moraju više komunicirati od prodavaca koji nude nižu cenu, zbog toga što boljom komunikacijom moraju privući više kupaca, a i zbog toga što im veće cene garantuju veći prihod, te stoga mogu platiti dodatne komunikacije i reklamiranja.

[1] ***Volatilnost*** – predstavljanepredvidivu promenu određene promenljive u nekom vremenskom intervalu.

1. RAVNOTEŽNA RASPODELA PRODAJNE I OBJAVLJENE CENE (*Equilibrium distributions of sales and advertajzing prices*)

1.1. POSTAVKA MODELA

Osnovne pretpostavke:

1. Jedinstveno homogeno dobro se prodaje za novac.

2. Na tržištu je mnogo kupaca i prodavaca.

3. Prodavci mogu poslati komunikacione poruke, informišući kupce o svojoj ceni i lokaciji. Prodavci nisu ograničeni da ponude istu cenu svim kupcima (prodavci mogu koristiti različite popuste, bonuse, specijalne akcije kao indirektan način kojim različitim kupcima nude različite cene). Primer: današnje kompanije pri prodaji svojih proizvoda nude različite rabat, zatim dodatne kvalitativne rabate kao bonus za ostvarenje određene količine koju je kupac kupio u određenom periodu, kao i dodatne rabate za različite akcije.

4. Vreme je podeljeno na diskretne periode. Na početku svakog perioda, novi skup kupaca ulazi na tržište. Tokom trajanje perioda oni mogu primati poruke, a na kraju perioda oni moraju kupiti tačno jednu jedinicu robe ili će izgubiti svoju priliku za kupovinu.

5. Svi potrošači imaju istu graničnu cenu, m, to je maksimalna cena koju su oni spremni da plate.

6. Parametar b predstavlja očekivani trošak svakog prodavca koji se ostvaruje tokom dospevanja do određenog kupca. Možemo pretpostaviti da je jedan trošak reklame b, kojom se dostiže jedan kupac. Ili, još uopštenije, možemo pretpostaviti da trošak reklame b, uzrokuje slučajan broj kupaca, gde se očekuje da jedan kupac reaguje na poruku. Ova pretpostavka se može pojednostaviti bez uticaja na rezultat modela, tako da, broj poruka poslatih kupcima je strogo ograničen troškom reklame

7. Reklame su slučajno raspoređene među kupcima, svaki kupac ima jednake šanse da primi reklamnu poruku. Šta više, dodeljivanje jedne reklame kupcu je nezavisno od dodeljivanja svih ostalih reklama, uključujući i one koje su poslate od istog prodavca (razmatrajući trošak sređivanja mailing liste ili reklamiranja putem novina i televizije, ova preptostavka je realna). Mogućnost da jedan prodavac pošalje tačno jednu reklamu svakom kupcu je isključena.

8. Kupci primaju reklamne poruke besplatno, i to ne utiče na njihovu verovatnoću primanja poruke. Oni nemaju drugu mogućnost dobijanja informacije o prodavcima (tj. ne mogu oni tražiti kupce, kao što i ne mogu dobijati informacije o prodavcima od drugih kupaca). Prema tome, ako kupac ne primi reklamnu poruku, on ne može

kupiti proizvod. Sve one koji su voljni da kupe proizvode, ali ne mogu jer nisu primili reklamnu poruku nazivaćemo *potencijalnim kupcima*. Sve one koji su primili poruku i kupuju proizvode nazivamo *aktualnim kupcima*. (Kada u tekstu kažemo samo kupci misli se i na jedne i na druge).

9. Na kraju svakog perioda stvarni kupci šalju porudžbine prodavcima koji im nude najnižu cenu. Ukoliko postoji više takvih prodavaca, kupac bira bilo kog od njih sa jednakom verovatnoćom. Cena porudžbine je 0.

10. Po primanju porudžbine prodavac je izvršava po ceni koju je ponudio određenom kupcu. Svi prodavci imaju isti konstantan trošak proizvodnje, p_0 po jedinici.

11. Svi prodavci znaju potrošačevu graničnu cenu i raspodelu cena koje su putem reklamiranja ponudjene od strane ostalih prodavaca.

12. Svaki prodavac bira svoje pravilo reklamiranja (*advertajzing policy*) tako da maksimizira svoj očekivani profit, uzimajući kao dato ponašanje ostalih prodavaca.

Da rezimiramo, tržište se ponaša na sledeći način: na tržište ulazi skup kupaca; drugo, prodavci šalju svoje reklamne poruke; treće, svi kupci koji su primili poruke, prave porudžbine; i četvrto, ove porudžbine izvršavaju prodavci. Ponašanje kupaca je pasivno; oni jednostavno samo prave porudžbinu na osnovu najniže cene za koju znaju. Dok je ponašanje prodavaca, na drugoj strani, aktivno jer prave izbor svog pravila komuniciranja koje sadrži koju će cenu (ili cene) ponuditi, i koliko će reklama ponuditi po toj ceni (pretpostavka 3) kaže da prodavci nisu ograničeni da svim kupcima ponude isu cenu). Naime, pravilo komunikacije je funkcija $\alpha: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{Z}^+$. Na primer, $\alpha(p) = 2$ znači da su 2 reklame poslate po ceni p. Uopštenije, prodavci mogu usvojiti slučajnu strategiju komuniciranja; tj. mogu izabrati strategiju na osnovu neke slučajne procedure. Odnosno, kombinovana komunikaciona strategija je mera μ na skupu svih funkcija $\alpha: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{Z}^+$. Na osnovu datog skupa strategija komuniciranja (*advertajzing strategies*) određuje se tržišna raspodela cene (*market advertajzing price distribution*), tj. funkcija koja daje ukupan broj poruka poslatih po svakoj ceni. U kombinaciji sa slučajnim procesima koji određuju vezu reklama sa potencijalnim kupcima, određuje se ***raspodela prodajne cene*** (*sales price distribution*), odnosno funkcija koja specificira očekivani broj prodaja po svakoj ceni. (U nastavku će biti zgodnije definisati raspodelu prodajne i reklamne cene (*sales and advertajzing price distribution*)). Na kraju, dati skup komunikacionih strategija određuje očekivani profit svakog prodavca. Skup komunikacionih strategija je *Nash* – ov ekvilibrijum, ako prodavac ne može povećati svoj očekivani profit menjanjem svoje i samo svoje strategije. Postoji ravnotežna raspodela reklamne (objavljene) cene (*equilibriun distribution advertajzing prices*) i postoji ravnotežna raspodela prodajne cene (*equilibrium distribution sales prices*).

Za svaki različiti izbor broja kupaca i prodavaca na tržištu, M i N respektivno, postojaće različiti skup *Nash* – ovog ekvilibijuma. Postoje najmanje dva različita načina da se reši ovaj problem:

- Kao što je već spomenuto, može se dozvoliti da prodavci koriste miksovane strategije. Onda, može biti pokazano da za bilo koje brojeve M i N, postoji najmanje jedan *Nash* – ov ekvilibrijum.

- Ako želimo da održimo fiksirane strategije, onda možemo uključiti koncept *Nash – ovog ε-ekvilibrijuma*. Ovo može biti definisano kao skup strategija tako da nijedan prodavac ne može povećati svoj očekivani profit po poslatoj reklamnoj poruci za više od ε. Ovo može biti pokazano tako da za svako $\varepsilon > 0$, postoji N' tako da za svako $N \geq N'$ i svako M, *ε-ekvilibrijum* postoji.

Moguće je dokazati da ako su M i N beskonačni, ravnotežna raspodela cena konvergira u verovatnoći ka granici koja se može jednostavno opisati.

Počećemo detaljnim razmatranjem slučajnih procesa kojima su povezane reklame. Korisno je uočiti da ovaj proces može biti opisan pomoću ***modela kutije teorije verovatnoće*** (*urn model of probabillity theory*): meilovi kupaca predstavljaju n kutija, i objave odgovaraju r loptica u kutiji koje su nezavisne i sa jednakom verovatnoćom nalaženja u svakoj kutiji. Dok n i r teže beskonačnosti $\frac{r}{n}$ ostaje fiksirano, verovatnoća raspodele broja loptica u bilo kojoj kutiji odgovara *Poisson* – ovoj raspodeli sa očekivanjem $\frac{r}{n}$. Verovatnoća da bilo koja kutija sadrži x loptica je

$$\frac{e^{-\frac{r}{n}} \cdot \left(\frac{r}{n}\right)^x}{x!}$$

Na primer, ako imamo 2000 loptica i 1000 kutija, verovatnoća da se u jednoj kutiji nađe 0,1,2,3,4 ili 5 loptica je data na sledeći način:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\ 0.135335 & 0.27 & 0.27 & 0.18 & 0.09 & 0.036 & \cdots \end{pmatrix}$$

Primena ove činjenice u modelu je sledeća, verovatnoća da kupac ne primi nijednu reklamu (advertajzing) je $e^{-\frac{broj\,reklama}{M}}$.

Sada se postavlja pitanje: Šta može biti jedinstvena ravnotežna cena na tržištu sa nesavršenim informacijama? Uključujući trošak advertajzinga (komunikacije), minimalna razumna cena prodavca mora pokriti trošak $p_0 + b$. Međutim, kako neće sve reklame rezultovati prodajom, mora se generisati i prodaja po ceni koja je veća od $p_0 + b$, inače bi profit bio negativan.

Neka je $A(p)$ ***broj reklama poslatih po kupcu*** tj. očekivani broj reklama poslatih po ceni koja je manja ili jednaka od p podeljeno sa brojem kupaca, M. Uprkos činjenici da je funkcija normalizovana na način, da za graničnu cenu kupaca m, $A(m)$ je jednako odnosu ukupnog broja reklama prema kupcima, i nije jednako 1, ova funkcija se naziva ***funkcija raspodele advertajzing cene*** (*advertajzing price distribution function*). $A(p)$ meri i „količinu takmičenja“ na tržištu za reklame po ceni p.

Neka je p_{min} minimalna cena koja je ikad poslata putem reklama.

Neka je p_{max} maximalna cena koja je ikad poslata putem reklama.

Neka je $a(p) = A'(p)$ ***funkcija gustine reklamne cene*** (*advertajzing price density function*), tj.

$$a(p)\Delta p = \frac{očekivani\ broj\ reklama\ po\ ceni\ p^* \in (p, p + \Delta p)}{M}$$

Dalje, neka je $S(p)$ ***očekivani broj prodaja po kupu***, tj. očekivani broj prodaja po ceni manjoj ili jednakoj od p podeljenoj sa brojem M. Takođe je $S(m) < 1$. Ovu funkciju nazivamo ***funkcija raspodele prodajne cene*** (*sales price distribution function*).

Slično je i $s(p) = S'(p)$ ***funkcija gustine prodajne cene*** (*sales price density function*), tj.

$$s(p)\Delta p = \frac{očekivani\ broj\ prodaja\ po\ ceni\ p^* \in (p, p + \Delta p)}{M}$$

Neka je $\pi(p)$ verovatnoća da data reklama po ceni p rezultuje prodajom. Dalje je onda

$$s(p) = \pi(p)a(p)$$

Neka

$$P(p) = (p - p_0) \cdot \pi(p) - b$$

interpretirano kao očekivani profit. Reklama po ceni p, rezultuje prodajom $\pi(p)$, koja generiše profit $(p - p_0) \cdot \pi(p)$, ali od toga još dodatno mora biti oduzet trošak reklame.

Definicije funkcija A, S, π, P i p_{min} (p_{min} u smisli minimalne prihvatljive cene) imaju smisla za bilo koje M i N i bilo koji dati skup reklamnih strategija prodavaca. Može se pokazati da kada M i N teže beskonačnosti, bilo koji niz funkcija A, S, π, P i p_{min} za određeni skup strategija konvergira uniformno. Granične vrednosti ovih funkcija označavaćemo sa A^*, S^*, π^*, P^* i $p^*{}_{min}$. Sada ćemo dokazati glavno tvrđenje ovog poglavlja.

Teorema 1: $P^*(p) = 0$ *za svaku cenu* p *koja je objavljena; prema tome je*

$$\pi^*(p) = \frac{b}{p - p_0}$$

<u>Dokaz:</u> Ako je za neko $\varepsilon > 0$, $P(p) \geq \varepsilon$, onda neki prodavac može poboljšati svoj očekivani profit slanjem jedne dodatne poruke, te je onda $P(p) \leq \varepsilon$. Ako je, sa druge strane, $P(p) \leq -\varepsilon$ onda je za prodavca bolje da se uopšte ne reklamira po toj ceni. Prema tome, važi u ravnoteži $-\varepsilon \leq P(p) \leq \varepsilon$, tj $|P(p)| < \varepsilon$, a u graničnom slučaju $P^*(p) = 0$. Drugo tvrđenje sledi jer

$$|P(p)| = |(p - p_0) \cdot \pi(p) - b| < \varepsilon \ \Rightarrow \ \left|\pi(p) - \frac{b}{p - p_0}\right| < \frac{\varepsilon}{(m - p_0)} \ \blacksquare$$

Teorema 2: *U ravnoteži, sve cene* $p \in (p^*_{min}, m)$ *su objavljene*. *Šta više,*

$$p^*_{min} = p_0 + b$$

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, da postoji neki interval cena, (p_1, p_2) unutar intervala (p^*_{min}, m), koje nisu objavljene. Izaberemo najveći takav interval. Onda prodavac sa objavljenom cenom p_1 može povaćavati svoj prihod po prodaji za $p_{2-}p_1$ bez gubitka u prodaji i bez povećanja troškova, povećavanjem objavljene cene do p_2. Ovo je u kontradikciji sa pretpostvakom o ravnoteži. Što se drugog dela tvrđenja tiče, reklama koja šalje najnižu cenu generiše prodaju sa sigornošću, tj $\pi(p_{min}) = 1$, te stoga možemo primeniti teoremu 1, tj

$$|P(p_{min})| = |(p_{min} - p_0) \cdot \pi(p_{min}) - b| = |p_{min} - (p_0 + b)| < \varepsilon$$

za dovoljno velike M i N. Prema tome, $p^*_{min} = p_0 + b$ ■.

Teorema 3: $\pi^*(p) = e^{-A^*(p)}$

Dokaz: Za M dovoljno veliko, $\pi(p)$ može biti aproksimirano kao verovatnoća da dodatna reklama po ceni p generiše prodaju. Ovo je verovatnoća da reklama dospe do „osetljivog kupca“, tj do kupca koji do tada nema ponudu po ceni koja je jednaka ili niža od p. Ako se prisetimo modela verovatnoće o kutijama i lopticama s početka rada, neka nam kutije predstavljaju kupce, a neka nam loptice predstavljaju reklame po ceni manjoj ili jednakoj od p. Govoreći jezikom ovog modela verovatnoće, $\pi(p)$ je verovatnoća da je data kutija prazna. Ova verovatnoća može biti aproksimirana izrazom $e^{-\frac{loptice}{kutije}}$, što je u ovom slučaju $\pi(p) = e^{-A(p)}$. U granici je to $\pi^*(p) = e^{-A^*(p)}$ ■.

Teorema 4: *Ravnotežna raspodela prodajne i objavljene cene može biti okarakterisana na sledeći način:*

$$A^*(p) = \begin{cases} 0, & p \le p_0 + b \\ ln\left(\frac{p - p_0}{b}\right), & p_0 + b \le p \le m \\ ln\left(\frac{m - p_0}{b}\right), & p \ge m \end{cases}$$

$$a^*(p) = \begin{cases} 0, & p \le p_0 + b \\ \dfrac{1}{p - p_0}, & p_0 + b \le p \le m \\ 0, & p \ge m \end{cases}$$

$$S^*(p) = \begin{cases} 0, & p \le p_0 + b \\ 1 - \dfrac{b}{p - p_0}, & p_0 + b \le p \le m \\ 1 - \dfrac{b}{m - p_0}, & p \ge m \end{cases}$$

$$s^*(p) = \begin{cases} 0, & p \le p_0 + b \\ \dfrac{b}{(p - p_0)^2}, & p_0 + b \le p \le m \\ 0, & p \ge m \end{cases}$$

<u>Dokaz:</u> Kombinovanjem teoreme 1 i 3 dobijamo sledeće

$$\frac{b}{p - p_0} = e^{-A^*(p)}$$

Logartimovanjem ovog izraza dobija se

$$Ln\left(\frac{b}{p - p_0}\right) = -A^*(p)$$

sređivanjem ovog izraza dobijamo prvi izraz u ovoj teoremi. Diferenciranjem izraza za $A^*(p)$ dobijamo $a^*(p)$:

$$a^*(p) = \left(A^*(p)\right)' = \begin{cases} 0, & p \le p_0 + b \\ \left(ln\left(\dfrac{p - p_0}{b}\right)\right)', & p_0 + b \le p \le m \\ \left(ln\left(\dfrac{m - p_0}{b}\right)\right)', & p \ge m \end{cases} = \begin{cases} 0, & p \le p_0 + b \\ \dfrac{1}{\dfrac{p - p_0}{b}} \cdot \dfrac{1}{b}, & p_0 + b \le p \le m \\ 0, & p \ge m \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & p \le p_0 + b \\ \dfrac{1}{p - p_0}, & p_0 + b \le p \le m \\ 0, & p \ge m \end{cases}$$

Korišćenjem činjenice $s^*(p) = \pi^*(p)a^*(p)$, teoreme 1 i prethodno dokazanog izraza za $a^*(p)$, dobijamo četvrtu jednačinu ove teoreme:

$$s^*(p) = \pi^*(p)a^*(p) = \frac{b}{p - p_0} \cdot \begin{cases} 0, & p \leq p_0 + b \\ \dfrac{1}{p - p_0}, & p_0 + b \leq p \leq m \\ 0, & p \geq m \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & p \leq p_0 + b \\ \dfrac{b}{(p - p_0)^2}, & p_0 + b \leq p \leq m \\ 0, & p \geq m \end{cases}$$

Integraljenjem izraza za $s^*(p)$, dobija se se treća jednačina ove teoreme za $S^*(p)$ ■.

Sve teoreme su jedino razmatrale ponašanje tržišta. Ali šta se dešava sa komunikacionim strategijama pojedinačnih prodavaca? U graničnom slučaju ove strategije su kompletno neodređene, stoga komunikacija po bilo kojoj ceni ili bilo kojoj kombinaciji cena vodi do profita koji je nula. Ova neodređenost je pogodna jer nam dopušta ograničavanje prodavčeve prihvatljive strategije bez uticaja na validnost teorema. Uopšteno govoreći, ravnotežne raspodele cena su iste bez obzira da li su prodavci ograničeni na reklamiranje samo po jednoj ceni. Ovo nije u potpunosti tačno u slučaju kada imamo konačan broj prodavaca.

Preostalo je još da sračunamo statistike za ravnotežne raspodele.

Neka je $d = p_{max} - p_0$

Neka je $\bar{p}$ očekivanje rapodele prodajne cene

Neka je $var(p)$ varijansa raspodele prodajne cene.

Na osnovu prethodnih teorema i svega što je istaknuto, sledi:

$$S^*(m) = 1 - \frac{b}{\underbrace{m - p_0}_{d}} = 1 - \frac{b}{d} = \boxed{\frac{d - b}{d}}$$

$$A^*(m) = ln\left(\frac{\overbrace{m - p_0}^{d}}{b}\right) = \boxed{ln\left(\frac{d}{b}\right)}$$

Očekivana cena sledi iz činjenice da ona treba bar da pokrije sve troškove. Za početak imamo cenu koštanja p_0 i trošak komunikaconih poruka b, ali kako neće sve komunikacione poruke rezultovati prodajom, to onda znači da cena prilikom jedne prodaje mora da prekrije trošak više komunikacionih poruka Na primer: poslali smo šest komunikacionih poruka, od kojih je prodajom rezultovalo tri, to dalje znači da cena prilikom tri ostvarene prodaje mora pokriti trošak šest poslatih komunikacionih poruka, tj:

$$\bar{p} = p_0 + \frac{A^*(m)}{S^*(m)} = p_0 + \frac{bd}{d-b} \cdot ln\left(\frac{d}{b}\right)$$

$$var(p) = b(d-b) + \frac{b^2d^2}{(d-b)^2} \cdot ln^2\left(\frac{d}{b}\right)$$

Da bismo videli kako se ponašaju ove promenljive naći ćemo njihove prve izvode:

$$\frac{\partial S^*(m)}{\partial b} = -\frac{1}{d} < 0$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial b} = \frac{d^2}{(d-b)^2} \cdot ln\left(\frac{d}{b}\right) - \frac{d}{d-b} \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$$

$$\frac{\partial var(p)}{\partial b} = d - 2b - \frac{2bd^2}{(d-b)^2} \cdot ln\left(\frac{d}{b}\right) \cdot \left(1 + \frac{d}{d-b} ln\left(\frac{d}{b}\right)\right)$$

$$\frac{\partial A^*(m)}{\partial b} = -\frac{1}{b} < 0$$

Iz datih jednačina vidimo da:

- ✓ Jeftiniji advretising, dovodi do nižeg očekivanja prodajne cene i veće prodaje.
- ✓ Veća granična cena, veće je očekivanje i varijansa prodajne cene i veća je prodaja.
- ✓ Kako se b približava nuli, $S^*(m)$ se približava jedinici; a dok se b približava d, $S^*(m)$ se približava nuli.
- ✓ Kako d teži beskonačnosti, $S^*(m)$ se približava jedinici, očekivanje i varijansa cena postaju veliki, broj primljenih reklama po svakom kupcu teži beskonačnosti.

1.2.POTRAŽNJA KUPACA

Dalje se postavlja pitanje kako potražnja kupaca može uticati na model koji je predstavljen. Naravno, ovaj uticaj na model će zavisiti i od toga kako je ta tražnja modelirana. Najuopštenija pretpostavka je da $n-$ta tražnja ima cenu koštanja $c(n)$, koja je konstantna ili rastuća funkcija po n i postoje jednake verovatnoće tražnje ka bilo kom prodavcu. Priča koja se krije iza ove pretpostavke je da kupac slučajno traži prodavca među svim prodavcima koji se javljaju na tržištu. Ako bismo ovu pretpostvaku uključili u model to bi dovelo do velikih nepotrebnih komplikacija. Stoga koristimo modifikovanu pretpostavku koja kaže da je verovatnoća da se nađe prodavac proporcionalna njegovoj prodaji.

Sada ćemo model dat u prethodnom delu modifikovati menjanjem pretpostavke 8. Nova pretpostvaka 8 kaže:

8a. Svi kupci imaju identičnu funkciju koja predstavlja troškove tražnje $c(n)$ koja je konstantna ili rastuća po n. Trajanje tražnje je malo u poređenju sa dužinom vremenskog perioda koji se spominje u pretpostavci 4. Verovatnoća da kupac usled tražnje dobije ponudu nekog prodavca jednaka je njegovom udelu u ukupnoj prodaji. Verovatnoća da ova ponuda bude po ceni iz intervala (p_1, p_2) je proporcionalna prodaji određenog prodavca po ceni iz tog intervala. Ali se, realno, može desiti da prodavac ponudi veću cenu kupcima koji su njega tražili nego onim kupcima do kojih je došao putem advertajzinga, jer prodavac zna da kupac koji je došao kod njega nema prihvatljive alternative. Da bismo izbegli ovu mogućnost pretpostavićemo da je prodavac ograničen da prodaje po jedinstvenoj ceni u bilo kojem vremenskom trenutku.

Razmatrajmo sada odluku svakog potrošača na kraju perioda. On može prihvatiti najnižu cenu koju je primio putem advertajzinga ili može dalje tražiti ponude. Ako imamo ravnotežu u kojoj neki potrošači traže ponude, onda će tu postojati specifična isključna cena (*cut off price*), p_c, iznad koje kupci neće prihvatati nijednu cenu zbog velikih troškova. Kako su svi kupci identični, neće biti prodaje iznad cene p_c, tj važi

$$p_{max} \leq p_c$$

šta više u ekvilibrijumu p_c ne može biti strogo veće od p_{max}, jer tada prodavci mogu prodavati po ceni koja je između p_{max} i p_c, pri čemu advertajzing ostaje isti kao pri ceni p_{max}. Ti prodavci će onda imati iste troškove istu prodaju, ali veći prihod usled veće cene nego drugi prodavci. Prema tome je $p_{max} = p_c$. To dalje znači da će potrošači tražiti prodavce ako i samo ako ne prime nijednu reklamu, i u tom slučaju oni će prihvatiti prvu cenu na koju naiđu.

Sada ćemo videti kakav uticaj nova pretpostavka ima na vezu prodaje i advertajzinga. Neka je ϕ udeo potrošača koji su primili najmanje jednu reklamu. Onda je $1-\phi$ udeo onih potrošača koji će tražiti ponude prodavaca. Po pretpostavci 8a onda je $1-\phi$ prodaja koja se ostvari usled tražnje, a ϕ prodaja koje se ostvare direktno usled advertajzinga. Neka je i dalje $\pi(p) = \frac{s(p)}{a(p)}$. Neka je $\hat{\pi}(p)$ verovatnoća prodaja ostvarenih direktno preko advertisnga, tj

$$\hat{\pi}(p) = \frac{broj\ prodaja\ ostvarenih\ usled\ advertisinga\ po\ ceni\ p}{a(p)}$$

Odnosno, $\hat{\pi}(p)$ je verovatnoća da reklama ode do prijemčivog kupca. Stoga je

$$\hat{\pi}(p) = \phi\, \pi(p)$$

za razliku od prethodnoh poglavlja gde je $\hat{\pi}(p) = \pi(p)$

U nastavku dolazimo blizu osnovnog modela. Navešćemo modifikovane teoreme iz poglavlja 1.1.

Teorema 1*: $P(p) = (p - p_0) \cdot \pi(p) - b = 0$ i $\pi(p) = \frac{b}{p-p_0}$.

Kako je

$$\hat{\pi}(p_{min}) = 1$$

$$\hat{\pi}(p_{min}) = \phi\, \pi(p_{min}) \Rightarrow \pi(p_{min}) = \frac{1}{\phi}$$

$$P(p_{min}) = (p_{min} - p_0) \cdot \pi(p_{min}) - b = 0$$

teorema 2 postaje:

Teorema 2*: $p_{min} = p_0 + b\phi$.

Teorema 3 ostaje nepromenjena ali po $\hat{\pi}(p)$ tj.

Teorema 3*: $\hat{\pi}(p) = e^{-A(p)}$.

Logaritmovanjem i korišćenjem teorema 1*, 2* i 3* dobijamo

$$A(p) = -ln(\hat{\pi}(p)) = -ln(\phi\pi(p)) = -ln\left(\frac{b\phi}{p - p_0}\right) = ln\left(\frac{p - p_0}{b\phi}\right)$$

Diferenciranjem dobijamo:

$$a(p) = \begin{cases} 0, & p \leq p_0 + b\phi \\ \dfrac{1}{p - p_0}, & p_0 + b\phi \leq p \leq p_{max} \\ 0, & p \geq p_{max} \end{cases}$$

Veza $s(p) = \pi(p) \cdot a(p)$ i dalje važi, pa je

$$s(p) = \begin{cases} 0 & p \leq p_0 + b\phi \\ \dfrac{b}{(p-p_0)^2} \quad za & p_0 + b\phi \leq p \leq p_{max} \\ 0 & p \geq p_{max} \end{cases}$$

Sublimiranjem dobijamo modifikovanu teoremu 4:

Teorema 4*: $$A(p) = \begin{cases} 0, & p \leq p_0 + b\phi \\ ln\left(\frac{p-p_0}{b\phi}\right), & p_0 + b\phi \leq p \leq p_{max} \\ ln\left(\frac{m-p_0}{b\phi}\right), & p \geq p_{max} \end{cases}$$

$$a(p) = \begin{cases} 0, & p \leq p_0 + b\phi \\ \dfrac{1}{p-p_0}, & p_0 + b\phi \leq p \leq p_{max} \\ 0, & p \geq p_{max} \end{cases}$$

$$S(p) = \begin{cases} 0, & p \leq p_0 + b\phi \\ 1 - \dfrac{b}{p-p_0}, & p_0 + b\phi \leq p \leq p_{max} \\ 1 - \dfrac{b}{m-p_0}, & p \geq p_{max} \end{cases}$$

$$s(p) = \begin{cases} 0 & p \leq p_0 + b\phi \\ \dfrac{b}{(p-p_0)^2} \quad za & p_0 + b\phi \leq p \leq p_{max} \\ 0 & p \geq p_{max} \end{cases}$$

Ostaje nam još jedino da sračunamo ϕ, p_{min}, p_{max} i c. Već imamo dve jednačine $p_{min} = p_0 + b\phi$ i $d = p_{max} - p_0$ i dve nam nedostaju. Jedna je obezbeđena iz činjenice da svi kupci zaista kupuju, tj

$$\int_{p_{min}}^{p_{max}} s(p)dp = 1$$

Integraljenjem dobijamo:

$$\int_{p_{min}}^{p_{max}} \frac{b}{(p-p_0)^2} dp = -\left(\frac{b}{p_{max}-p_0} - \frac{b}{p_{min}-p_0}\right) = \frac{1}{\phi} - \frac{b}{d} = 1$$

Sledi da je

$$\phi = \frac{d}{b+d}$$

Poslednju jednačinu dobićemo iz činjenice da očekivani dobitak iz tražnje po cut-off ceni, p_{max}, mora biti jednak trošku tražnje, očekivani dobitak iz tražnje je:

$$c = \int_{p_{min}}^{p_{max}} (p_{max} - p) \frac{b}{(p-p_0)^2} dp$$

Integraljenjem dobijamo da je $c = d - b \cdot ln\left(\frac{d}{b\phi}\right)$, a ubacujući jednačinu za ϕ dobićemi i četvrtu potrebnu jednačinu, tj:

$$c = d - b \cdot ln\left(1 + \frac{d}{b}\right) = b\left(\frac{\phi}{1-\phi} - ln\left(\frac{1}{1-\phi}\right)\right) \qquad (*)$$

$$\phi = \frac{d}{b+d}$$

$$p_{min} = p_0 + b\phi = \frac{bd}{b+d} + p_0$$

$$p_{max} = p_0 + d$$

Sada je potrebno sračunati $\bar{p}$ - očekivanje raspodele prodajne cene, $var(p)$ - varijansa raspodele prodajne cene, $R(p) = p_{max} - p_{min}$ - opseg cena i $A(p_{max})$ - prosečan broj advertajzinga po kupcu. Sve ove promenljive su izražene preko d, koji opet zavisi od parametara b i c. Sublimiranjem svih prethodnih jednačina dobijamo:

$$\bar{p} = p_{max} - c = p_0 + d - c = p_0 + b \cdot ln\left(\frac{1}{1-\phi}\right)$$

$$var(p) = \frac{bd^2}{b+d} - (d-c)^2 = b^2\left(\frac{\phi^2}{1-\phi} - 2ln\left(\frac{1}{1-\phi}\right)\right)$$

$$R(p) = \frac{d^2}{b+d} = \frac{b\phi^2}{1-\phi}$$

$$A(p_{max}) = ln\left(1+\frac{d}{b}\right) = ln\left(\frac{1}{1-\phi}\right) = \frac{d-c}{b}$$

Ponašanje ovih parametara možemo videti traženjem izvoda po b i c svih osam prethodnih jednačina. Diferenciranjem izraza za $d, \phi, p_{min}, p_{max}, \bar{p}, var(p), R(p), A(p_{max})$ po b (trošak advertajzinga) i c (trošak tražnje) dobijamo:

$$\frac{\partial d}{\partial c} = \frac{b+d}{d} = \frac{1}{\phi} > 0 \qquad 1.1$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial c} = \frac{b}{d(b+d)} = \frac{(1-\phi)^2}{b\phi} > 0 \qquad 1.2$$

$$\frac{\partial p_{min}}{\partial c} = \frac{b^2}{d(b+d)} = \frac{(1-\phi)^2}{\phi} > 0 \qquad 1.3$$

$$\frac{\partial p_{max}}{\partial c} = \frac{b+d}{d} = \frac{1}{\phi} > 0 \qquad 1.4$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial c} = \frac{b}{d} = \frac{1-\phi}{\phi} > 0 \qquad 1.5$$

$$\frac{\partial var(p)}{\partial c} = \frac{b}{(b+d)d}(2c(b+d) - d^2);\ \ 0 < \frac{\partial var(p)}{\partial c} < \frac{bc}{b+d} \qquad 1.6$$

$$\frac{\partial R(p)}{\partial c} = \frac{2b+d}{b+d} = 2 - \phi > 0 \qquad 1.7$$

$$\frac{\partial A(p_{max})}{\partial c} = \frac{1}{d} = \frac{1-\phi}{b\phi} > 0 \qquad 1.8$$

$$\frac{\partial d}{\partial b} = \frac{d^2-(b+d)c}{bd} = -\left(\frac{\phi + ln(1-\phi)}{\phi}\right) > 0 \qquad 1.1a$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial b} = -\frac{c}{d(b+d)} = -\frac{c(1-\phi)^2}{b^2\phi} < 0 \qquad 1.2a$$

$$\frac{\partial p_{min}}{\partial b} = \frac{d^2-bc}{d(b+d)} = \phi - \frac{c(1-\phi)^2}{b\phi} > 0 \qquad 1.3a$$

$$\frac{\partial p_{max}}{\partial b} = \frac{\partial d}{\partial b} > 0 \qquad 1.4a$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial b} = \frac{\partial p}{\partial b} > 0 \qquad 1.5a$$

$$\frac{\partial var(p)}{\partial b} = \frac{bcd^2 - 2(d^2-(b+d)c)^2}{bd(b+d)} = c\left(\phi - 2(1-\phi)\left(\frac{\phi + ln(1-\phi)}{\phi}\right)^2\right) > 0 \qquad 1.6a$$

$$\frac{\partial R(p)}{\partial b} = \frac{d^2-2bc-cd}{b(b+d)} = (\phi-2)ln(1-\phi) - 2\phi > 0 \qquad 1.7a$$

$$\frac{\partial A(p_{max})}{\partial b} = -\frac{c}{bd} = -\frac{c(1-\phi)}{b^2\phi} < 0 \qquad 1.8a$$

Rezultat je onakav kako se i očekivalo: kako tražnja i advertajzing postaju skuplji tako su i cene veće: minimalna, maksimalna cene kao i očekivanje (1.3, 1.4, 1.5, 1.3a, 1.4a, 1.5a). Veći troškovi tražnje i advertajzinga takođe dovode do veće disperzije i opsega (1.6, 1.7, 1.6a, 1.7a). Ako troškovi tražnje rastu, onda je tražnja kupaca manja, a prodaja putem advertisnga veća (1.8), a ako trošak advertajzinga raste onda je prodavci manje reklamiraju, a kupci više traže prodavce samostalno (1.8a).

Granični slučajevi modela se svode na rezultate prethodnog modela. Ako c postane beskonačno, održavajući b konstantnim, onda jednačina (*) implicira da i d postaje beskonačno. Odatle sledi da ϕ aproksimiramo 1, p_{min} sa $p_0 + b$, a ostale promenljive idu u beskonačno. Ovo je precizno rešenje osnovnog modela za slučaj kada ne postoji granična cena. Sa druge strane ako

dozvolimo da b teži ka beskonačnosti, zadržavajući c konstantnim, onda ϕ aproksimiramo 0, $A(p_{max})$ teži nuli, dok sve ostale promenljive uključujući i p_{min}, teže ka beskonačnosti. Ako advertajzing preterano poskupi, ne postoji ta količina tražnje koja može rešiti tj sniziti cenu.

1.3.EFIKASNOST

Šta se može reći o efikasnosti tržišta opisanih u prethodnim poglavljima? Razmatrajmo prvo osnovni model. Možemo definisati meru dobitka kao vrednost kupljenih roba minus suma troškova proizvodnje i advertajzinga. Uobičajeno je podeliti taj broj sa brojem kupaca pri čemu dobijamo meru, W, koja predstavlja prosečan višak po kupcu. Ovo može biti interpretirano kao višak po kupcu, jer je očekivani profit prodavca jednak nuli. Na slobodnom tržištu, prosečni prihod (*gain*) je ξm, gde je ξ jednako udelu kupaca koji su dobili reklamnu poruku, a prosečni troškovi su

$$\xi p_0 + bA(m)$$

Konačna vrednost za W je onda

$$\xi(m - p_0) - bA(m) = d - b - b \cdot ln\left(\frac{d}{b}\right)$$

Sledeće pitanje koje se postavlja je može li različita organizacija tržišta dovesti do većeg dobitka? Pretpostavimo, da je vlada preuzela industriju tako da ukupan advertisnig može biti razmatran kao kontrolna promenljiva za pojedinačnog donosioca odluke. Može li različit izbor ukupnog advertajzinga po kupcu, $A \neq A(m)$, povećati W? Ako je udeo advertajzinga po kupcu A, udeo kupaca koji bi kupovali, ξ, bi bio $1 - e^{-A}$ i onda sledi:

$$W = \xi(m - p_0) - bA = (1 - e^{-A})d - bA$$

Optimalna količina advertajzinga, A^*, može biti sračunata diferenciranjem poslednje jednačine po A i izjednačavanjem izraza sa nulom, i tako dobijamo:

$$\frac{dW}{dA} = d \cdot e^{-A} - b = 0$$

i onda je

$$A^* = ln\frac{d}{b} = A(m).$$

Slobodno tržište u ovom slučaju generiše optimalnu količinu advertajzinga i maksimalno moguće blagostanje.

Kako veza između advertajzinga i takmičenja na tržištu utiče na model u poglavlju 3? Kako b postaje dovoljno veliko, cena raste do granične cene m, pa možemo reći da je postojanje advertajzinga glavna stvar kod konkurencije, bez advertisnga tržište ne bi opstalo.

Tržište je efikasnije kada je samo advertajzing uključen, bez uplitanja tražnje kupaca pojedinačno. Usled postojanja tražnje kupaca prodavci mogu cene povećavati do granične cene m, pa i više, jer prodavac zna da kupac nema alternativni izbor. Tj. kupac nije primio nijednu reklamnu poruku, a želi da kupi robu. Postojanjem advertisniga kontroliše se formiranje cene na tržištu, te stoga prodavci ne mogu samoinicijativno formirati cenu kao u slučaju kada bi kupac došao kod njega.

1.4. RAVNOTEŽNA RASPODELA CENA ZA KONAČNE VREDNOSTI M i N

Cilj je precizno dokazati da ravnotežna raspodela cena, za konačan broj kupaca i prodavaca, M i N, konvergira u raspodeli ka formi koji je data u teoremi 4.

Pretpostavljamo da prodavci mogu koristiti slučajne strategije, tako da *Nash* – ov ekvilibrijum postoji za svako konačno M i N. Pretpostavljamo i da je $m > p_0 + b$. ***Fiksirana strategija*** je funkcija $\alpha: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{Z}^+$. Na primer, $\alpha(p) = 2$ znači da su 2 reklame poslate po ceni p. ***Slučajna strategija*** je mera μ na skupu $\{\alpha: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{Z}^+\}$. Svaka od sledećih definicaja koju ćemo uvesti je u odnosu na M i N i u odnosu na dati skup ravnotežnih strategija $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_N$:

Neka je $A_i(p)$ očekivani broj reklamnih poruka poslatih od i-tog prodavca po ceni manjoj ili jednakoj p po kupcu, tj. ukupan broj poruka i-tog prodavca podeljeno sa brojem kupaca.

Neka je $A(p) = \sum_{i=1}^{N} A_i(p)$.

Neka je π_i verovatnoća da reklamna poruka i-tog prodavca rezultira prodajom, naravno uz uslov da je prodavac posao najmanje jednu poruku.

Neka je $P_i(p) = (p - p_0) \cdot \pi_i(p) - b$.

Neka je $p_{max} = inf\{p | A(p) = A(m)\}$.

Neka je $p_{min} = sup\{p | A(p) = 0\}$.

Dalje ćemo pretpostaviti da koliko god reklamnih poruka poslali na osnovu ravnotežne reklamne strategije, još jedna dodata reklamna poruka će biti poslata od strane nekog i-tog prodavca po ceni p. Formalno, za bilo koju fiksiranu strategiju α, definišemo strategiju α^* na sledeći način $\alpha^*(p) = \alpha(p) + 1$ i $\alpha^*(p') = \alpha(p')$ za svako $p' \neq p$. Za svaki skup S fiksiranih strategija α, definišemo $S^* = \{\beta: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{Z}^+ | \beta = \alpha^* \; za \; neko \; \alpha \epsilon S\}$. Konačno, ako je μ strategija i-tog prodavca, onda je μ_p^*, definisano kao $\mu_p^*(S^*) = \mu(S)$, je njegova nova strategija slanja jedne dodatne poruke po ceni p.

Neka je $\pi(p)$ verovatnoća da ova dodatna reklamna poruka rezultuje prodajom.

Neka je $P(p) = (p - p_0) \cdot \pi(p) - b$.

Teorema 1: Za *svako* $\varepsilon > 0$, *postoji* N^* *takvo da je* $N \geq N^*$, *tako da za svako* M, *u ravnoteži važi da je* $P(p) < \varepsilon$ *za svako* p.

Dokaz: Pretpostavimo da postoji cena p^* tako da je $P(p^*) \geq \varepsilon$ u ravnoteži na tržištu sa N prodavaca. Postoji najmanje jedan prodavac čije je učešće u prodaji po cenama $p \geq p^*$ manje ili jednako od $\frac{1}{N}$. Neka ovaj prodavac promeni svoju advertisig strategiju slanjem dodatne reklame po ceni p^*. Direktan efekat ove dodatne reklame je porast očekivanog profita za $P(p^*) \geq \varepsilon$. Sporedan efekat je niža očekivana prodaja svih prodavaca po cenama $p \geq p^*$ za najviše jednu jedinicu, i niža očekivana prodaja datog prodavca za najviše $\frac{1}{N}$. Ovo sporedno smanjenje prihoda je ograničeno od gore sa $\frac{m-p_0}{N}$. Za dovoljno veliko N^* takvo da je $N \geq N^*$ sledi $\varepsilon > \frac{m-p_0}{N^*}$ i prodavac će imati dobitak slanjem još jedne poruke. Ovo je kontradikcija sa pretpostavkom ravnoteže, što znači da za svako $N \geq N^*$ i svako p $P(p)$ mora biti manje od ε.■

Posledica 2: *Za svako* $\varepsilon \geq 0$, *postoji* N^* *takvo da je* $N \geq N^*$, *tako da za svako* M, *u ravnoteži važi* $p_0 + b \leq p_{min} \leq p_0 + b + \varepsilon$.

Dokaz: Izaberemo N^* tako da bude zadovoljena teorema 1. Ako je $p_{min} > p_0 + b + \varepsilon$, onda je $\pi(p_0 + b + \varepsilon) = 1$, pa je $P(p_0 + b + \varepsilon) = \varepsilon$, što je kontradikcija sa teoremom 1. ■

Teorema 3: *Za svako* $N \geq 2$, *funkcija raspodele advertajzinga svakog prodavca,* A_i, *mora biti neprekidna u ekvilibrijumu.*

Dokaz: Pretpostavimo da za neko i i neko $p = p^*$, funkcija A_i je prekidna u p^*. To znači da slučajna strategija i-tog prodavca uzima u obzir pozitivnu verovatnoću advertajzinga po ceni p^*. Pokazaćemo da prodavac ne može maksimizirati svoj profit, ako A_i nije povezano sa skupom ravnotežnih strategija. Primetimo prvo da mora važiti, da za svako $\varepsilon > 0$ advertajzing strategija nekog podavca, recimo j-tog, mora dodeliti njemu pozitivnu verovatnoću advertajzinga, recimo $\delta(\varepsilon)$, po nekoj ceni u okolini $[p^*, p^* + \varepsilon]$. Da nije tako, onda bi za $\varepsilon > 0$ svi prodavci osim i-tog imali verovatnoću advertajzinga po ceni iz okoline $[p^*, p^* + \varepsilon]$ jednaku nuli, i onda bi i-ti prodavac povećao svoj ukupni prihod povećanjem cena od p^* do $p^* + \varepsilon$. Pokazaćemo da prodavac j može poboljšati svoj očekivani profit pomeranjem cena svoje advertajzing strategije od cena iz okoline $[p^*, p^* + \varepsilon]$ do cene $p^* - \varepsilon$. Intiuitivno i u praksi, ovo je tačno jer malim smanjem cene izbegava se konkurencija i povećava prodata količina i mnogo većom količinom po nižoj ceni se nadoknađuje popust u ceni, i čak ostvaruje veći profit. (Primer 1)

Da bismo ovo precizno dokazali, primetimo da postoji pozitivna verovatnoća, η, nezavisno od ε, tako da ako prodavac j pošalje dodatnu reklamu po ceni $p \in [p^*, p^* + \varepsilon]$, onda će se sledeći događaji desiti: prodavac i šalje dodatnu reklamu po ceni p^*, koja će otići do istog kupca kao i reklama prodavca j, a kupac neće primati više ni jednu reklamnu poruku. Neka prodavac j primeni novu strategiju koja se od prvobitne jedino razlikuje u tome što kad god treba da pošalje dodatnu reklmnu poruku po ceni iz okoline

$[p^*, p^* + \varepsilon]$, on će poslati po ceni $p^* - \varepsilon$. Njegova očekivana prodaja će se povećati za najmanje $\delta\frac{\eta}{2}$, što će dovesti do povećanja prihoda za najmanje $\delta\frac{\eta}{2}(p - p_0 - \varepsilon)$. Zarada će biti neutralizovana gubitkom u prihodu usled smanjenje cene, koja će biti $\delta \cdot 2\varepsilon$. Prema tome zarada je veća od $\delta\left(\frac{\eta}{2}(p - p_0 - \varepsilon) - 2\varepsilon\right)$, što je veće od nule za $\varepsilon < \frac{\eta(p-p_0)}{4+\eta}$ ■

Primer 6: *Akcija u redovnoj prodavnici*

Neka se u određenoj prodavnici proda $1.532{,}4kg$ proizvoda po ceni $1.004{,}99din$. A cena koštanja tog proizvoda je $500{,}49din$. Ako pretpostavimo da je jedini trošak koji prodavac ima cena koštanja proizvoda, onda je profit koji prodavac ostvari:

$$1.532{,}4 \cdot 1.004{,}99 - 1.532{,}4 \cdot 500{,}49 = 773.095{,}8din$$

Spuštanjem cene (u našem slučaju za neko ε) na $854{,}24$, prodavac je prodao količinu od $2.658{,}3kg$. Kako je cena koštanja i dalje ista, profit koji sada ostvari prodavac je

$$2.658{,}3 \cdot 854{,}24 - 2.658{,}3 \cdot 500{,}49 = 940.377{,}61din$$

Primetimo da je prodavac spuštanjem cene ostvario mnogostruko veću zaradu nego sa cenom koja je bila veća. Što potvrđuje prethodnu teoremu. Ova činjenica se vrlo često koristi u praksi u cilju povećanja profita, a i ovaj primer je realan i ostvaren tokom mesečne akcije u jednoj kompaniji.■

Da bismo koristili sledeće leme i teoreme potrebno je da uvedemo još neke pojmove. Neka je za bilo koju fiksiranu strategiju α, $|\alpha| = \sum_p \alpha(p)$ ukupan broj upućenih reklamnih poruka koje slede datu fiksiranu strategiju α. Za bilo koje cene $p_1 < p_2$, neka je $C(p_1, p_2)$ klasa svih strategija α, takvih da je $\alpha(p) = 0$ za svako $p \in (p_1, p_2)$. Za bilo koju strategiju $\alpha \in C(p_1, p_2)$ i bilo koji pozitivan ceo broj k takav da je $-\alpha(p_2) \leq k \leq \alpha(p_1)$, neka $T^k_{p_1,p_2}(\alpha)$ ili skraćeno $T^k(\alpha)$ bude strategija β definisana na sledeći način:

$$\beta(p) = \begin{cases} \alpha(p) & p \neq p_1, p_2 \\ \alpha(p_1) - k & p = p_1 \\ \alpha(p_2) + k & p = p_2 \end{cases}$$

Drugim rečima, za $k > 0$, β je izvedeno iz α prenošenjem k reklamnih poruka od cene p_1 po ceni p_2. Dalje, ako nam je data strategija $N - 1$ prodavca, onda je $V(\alpha)$ očekivani profit preostalog N-tog prodavca koji sledi strategiju α. Za bilo koje $\alpha \in C(p_1, p_2)$ i pozitivan ceo broj $k \leq \alpha(p_1)$, definišemo

$$\Delta_k V(\alpha) = V\left(T^k(\alpha)\right) - V(\alpha)$$

Lema 4: *Ako važi da je $\Delta_k V(\alpha) > 0$ za neko $\alpha \in C(p_1, p_2)$ i za neko $k \leq \alpha(p_1)$, onda to važi za svako takvo α i k. Slično, ako važi da je $\Delta_k V(\alpha) < 0$ za neko $\alpha \in C(p_1, p_2)$ i za neko $k \leq \alpha(p_1)$, onda to važi za svako takvo α i k.*

Dokaz: Krenimo izvođenjem izraza za $\Delta_1 V(\alpha)$. Ovo je ukupna zarada ostvarena promenom jedne reklamne poruke od cene p_1 do cene p_2. Promena reklamnih poruka je slučajno povezana sa kupcima. Promena cene rezultuje zaradom $p_2 - p_1$ N-tog prodavca ako i samo ako generiše prodaju po ceni p_2. Ovo će se desiti ako i samo ako se dese sledeći nezavisni događaji E_1 i E_2, gde je E_1 događaj da ni jedna reklamna poruka N-tog prodavca po ceni $p \leq p_1$ nije dospela do nijednog kupca, a E_2 događaj da ni jedna reklamna poruka ostalih $N - 1$ prodavaca po ceni $p < p_2$ nije dospela do nijednog kupca. Na drugoj strani, promena u ceni rezultuje gubitkom od $p_1 - p_0$ ako i samo ako se dese nezavisni događaji E_1 i E_3, gde je E_3 događaj da nijedna kokurentska reklamna poruka po ceni $p < p_1$ nije dospela ni do jednog kupca i najmanje jedna kokurentska reklamna poruka po ceni $p \in (p_1, p_2)$ je dospela do kupca. Prema tome je, očekivana zarada usled promene cene, $\Delta_1 V(\alpha)$, jednaka:

$$\begin{aligned}(p_2 - p_1) \cdot Pr(E_1 \cap E_2) - (p_1 - p_0) \cdot Pr(E_1 \cap E_3) \\ = Pr(E_1) \cdot \big((p_2 - p_1) \cdot Pr(E_2) - (p_1 - p_0) \cdot Pr(E_3)\big)\end{aligned}$$

Izraz je pozitivan, jednak nuli ili negativan u zavisnosti od izraza u zagradi. Kako izraz ne zavisi od izbora strategije α, stoga ni $\Delta_1 V(\alpha)$ ne zavisi od izbora strategije α.

Primetimo dalje da je

$$\Delta_k V(\alpha) = \sum_{i=1}^{k} \left(V\left(T^i(\alpha)\right) - V\left(T^{i-1}(\alpha)\right) \right) = \sum_{i=0}^{k-1} \Delta_1 V\left(T^i(\alpha)\right)$$

i da za $\alpha \in C(p_1, p_2)$, sledi da $T^i(\alpha) \in C(p_1, p_2)$. Odatle sledi da, ako $\Delta_1 V(\alpha) > 0$ za bilo koje $\alpha \in C(p_1, p_2)$ onda je $\Delta_1 V\left(T^i(\alpha)\right) > 0$ za svako i i svako $\alpha \in C(p_1, p_2)$; isto važi i za slučaj obrnutog znaka nejednakosti. Ovo dalje znači da znak $\Delta_k V(\alpha)$ ne zavisi ni od k ni od α. ■

Lema 5*: Neka $\alpha \in C(p_1, p_2)$. Neka je $\beta = T(\alpha)$ i pretpostavimo da je $\beta(p_1) > 0$ i $\beta(p_2) > 0$. $T(\alpha)$ je* ***optimalna strategija*** *ako i samo ako su i α i $T^2(\alpha)$ optimalni. Šta više, ako je β optimalno, onda je $T^k(\beta)$ optimalno za svaki prirodan broj $k \in [-\beta(p_2), \beta(p_1)]$.*

Dokaz: Ako su α *i* $T^2(\alpha)$ optimalni, onda je

$$\Delta_1 V\big(T(\alpha)\big) = V\big(T^2(\alpha)\big) - V\big(T(\alpha)\big) \geq 0 \text{ i } \Delta_1 V(\alpha) = V\big(T(\alpha)\big) - V(\alpha) \leq 0$$

Na osnovu leme 5.5 $\Delta_1 V\big(T(\alpha)\big)$ i $\Delta_2 V(\alpha)$ moraju biti nula. Prema tome je

$$V(\alpha) = V\big(T(\alpha)\big) = V\big(T^2(\alpha)\big)$$

i $T(\alpha)$ je optimalno takođe. Obrnuto, ako je $\beta = T(\alpha)$ optimalno, onda je

$$\Delta_1 V\big(T(\alpha)\big) = V\big(T^2(\alpha)\big) - V\big(T(\alpha)\big) \leq 0 \text{ i } \Delta_1 V(\alpha) = V\big(T(\alpha)\big) - V(\alpha) \geq 0$$

Primenjujući lemu 5.5 dobijamo

$$\Delta_1 V(\alpha) = \Delta_2 V(\alpha) = 0, V(\alpha) = V\big(T(\alpha)\big) = V\big(T^2(\alpha)\big)$$

i sledi da su α *i* $T^2(\alpha)$ optimalne strategije. Poslednje tvrđenje leme može se pokazati indukcijom. ■

Lema 6: *Neka su α i β strategije takve da je $|\alpha| = |\beta|$ i $\{p|\beta(p) > 0\} \subset \{p|\alpha(p) > 0\}$. Ako je α optimalno, onda je i β optimalno.*

Dokaz: Intuitivno, kako α i β imaju isti broj reklama, α može biti transformisano u β korak po kaorak pomeranjem reklama između susednih cena; a po lemi 5 transformacijom se ne narušava optimalnost. Neka je

$$\{p|\alpha(p) > 0\} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$$

Neka je $d_1 = \alpha(p_1) - \beta(p_1)$. Označimo α kao α_1 i β kao β_1. Definišemo α_i, β_i i d_i za $i = 2,3, \dots, n$ rekurzivno na sledeći način: ako je $d_{i-1} \geq 0$ onda je $\alpha_i = T_{p_{i-1},p_i}^{d_{i-1}}(\alpha_{i-1})$ i $\beta_i = \beta_{i-1}$; a ako je $d_{i-1} \leq 0$ onda je $\alpha_i = \alpha_{i-1}$ i $\beta_i = T_{p_{i-1},p_i}^{-d_{i-1}}(\beta_{i-1})$; i neka je $d_i = \alpha(p_i) - \beta(p_i)$. Indukcijom sledi da je $\alpha_i(p) = \beta_i(p), \forall\, p \leq p_{i-1}$. Šta više važi, $\alpha_n(p) = \beta_n(p), \forall\, p$. To znači da su ove dve strategije jednake za $p = p_1 = p_2 = \cdots = p_{n-1}$ i u nastavku imamo:

$$\alpha_n(p_n) = |\alpha| - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_n(p_i) = |\beta| - \sum_{i=1}^{n-1} \beta_n(p_i) = \beta_n(p_n)$$

jer smo pretpostavili da je $|\alpha| = |\beta|$. Kako su α i β povezane $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n = \beta_n, \dots, \beta_2, \beta_1 = \beta$ i po lemi 5 sledi da ako je α optimalni, optimalno je i β. ■

Lema 7: *Neka je α_n strategija slanja n reklama po ceni p. Onda $V(\alpha_n)$, posmatrano kao funkcija od n, ima ili jedan maksimum koji je pozitivan ceo broj, ili ima dva maksimuma koja su dva uzastopna cela broja.*

Dokaz: Promena strategije od α do α_n rezultuje prihodom (gain) od $p - p_0$ ako i samo ako dodatna reklamna poruka odlazi do kupca koji nije dobio nijednu reklamnu poruku od N-tog prodavca i nije primio nijednu reklamnu poruku po ceni manjoj od p od ostalih

prodavaca.Verovatnoća da se desi ovako nešto, ako su ostali prodavci poslali i reklamnih poruka po ceni manjoj od p je:

$$\left(1-\frac{1}{M}\right)^{i+n}$$

U svakom slučaju, promena strategije rezultuje dodatnim troškom reklamiranja b. Ukupni očekivani prihod $V(\alpha_{n+1})-V(\alpha_n)$ je onda jednak

$$(p-p_0)\cdot\sum_{i=0}^{\infty} t_i\left(1-\frac{1}{M}\right)^{i+n}-b$$

gde je t_i da ostali prodavci pošalju tačno jednu reklamnu poruku po ceni manjoj od p. Kako je funkcija $\left(1-\frac{1}{M}\right)^{i+n}$ strogo opadajuća po n, onda je i $V(\alpha_{n+1})-V(\alpha_n)$ strogo opadajuće takođe. Onda sledi da $V(\alpha_n)$ dostiže svoj maksimum u najviše dva susedna prirodna broja. ■

Teorema 8: *Neka su β i γ optimalne strategije. Neka je $|\beta|=n_1$ i $|\gamma|=n_2$. Onda ili je $n_1=n_2$ ili je $|n_1-n_2|=1$.*

<u>Dokaz:</u> Neka je p_1 cena takva da je $\beta(p_1)>0$ i neka je p_2 cena takva da je $\gamma(p_2)>0$, možemo pretpostaviti da je $p_1<p_2$. Za $i=1{,}2$ i $j=1{,}2$ neka je α_{ij} strategija slanja n_i reklamnih poruka po ceni p_j. Po lemi 6, kako je β optimalno, onda je i α_{11} optimalno, slično kako je γ optimalno, onda je i α_{22} optimalno. Prema tome je $V(\alpha_{11})\geq V(\alpha_{12})$ i $V(\alpha_{22})\geq V(\alpha_{21})$. Primetimo takođe da je $\alpha_{12}=T^{n_1}(\alpha_{11})$ i $\alpha_{22}=T^{n_2}(\alpha_{21})$. Po lemi 5.4, $V(\alpha_{12})-V(\alpha_{12})$ i $V(\alpha_{22})-V(\alpha_{21})$ moraju biti ili oba pozitivna, ili oba negativna ili oba jednaka nuli. Na osnovu prethodnih nejednakosti sledi da je $V(\alpha_{12})-V(\alpha_{12})\leq 0$ i $V(\alpha_{22})-V(\alpha_{21})\geq 0$, te stoga sledi da oba moraju biti jednaka nuli, i da su sve vrednosti $V(\alpha_{ij})$ međusobno jednake. Prema tome, sve četiri strategije α_{ij} su optimalne. A kako su α_{11} i α_{21} optimalne po lemi 4 ili je $n_1=n_2$ ili je $|n_1-n_2|=1$. ■

Teorema 9: *Za svako M i N, u ravnoteži važi da svi prodavci imaju isti očekivani dobitak V. Šta više, postoji prirodan broj n takav da za svakog prodavca, svaka fiksirana strategija koja zadovoljava $V(\alpha)=V$ sastoji se od n ili $n+1$ reklamnih poruka.*

Posledica 10: *Za svako $\varepsilon>0$, postoje M^* i N^* takvi da u ravnoteži, iz $M>M^*$ i $N>N^*$ sledi da za svako i je $A_i(m)<\varepsilon$.*

Teorema 11: *Za svako M i N je $p_{max} = m$.*

Dokaz: Postoji prodavac čija ravnotežna strategija njemu omogućava pozitivnu verovatnoću advertajzinga po cene koja je blizu p_{max}. Po lemi 6 strategija po kojoj se šalje n reklamnih poruka po ovoj ceni je optimalna za tog prodavca. Da je $p_{max} < m$, prodavac bi mogao povećati svoj prihod po prodaji za $m - p_{max}$ sa malim gubitkom u prodaji usled povećanja cene od $p_{max} - \varepsilon$ do $m - \varepsilon$. Ovo je kontradiktorno pretpostavci o ravnoteži te je stoga $p_{max} = m$. ■

Teorema 12: *Za svako $\varepsilon > 0$, postoje M^* i N^* takvi da u ravnoteži, iz $M \geq M^*$ i $N \geq N^*$ sledi da za svako i i svako $p \in [p_{min}, m]$ je*

$$\left|\pi(p) - \frac{b}{p - p_0}\right| < \varepsilon.$$

Dokaz: Iz posledice 10 znamo da je $A_i(m) < \varepsilon$, Prema tome, verovatnoća da slučajno odabran potrošač primi reklamnu poruku od prodavca i je manja od ε i $|\pi(p) - \pi_i(p)| < \varepsilon$ za svako p. Iz definicije $P(p)$ i $P_i(p)$, možemo zaključiti da je $|P(p) - P_i(p)| < \varepsilon$. Već imamo da je $P_i(p) > 0$ (jer bi u suprotnom i-ti prodavac trebalo da smanji advertajzing po ceni p) i $P(p) < \varepsilon$ iz teoreme 1. Prema tome je,

$$P(p) < \varepsilon, P_i(p) < \varepsilon, \left|\pi(p) - \frac{b}{p - p_0}\right| < \varepsilon \text{ i } \left|\pi_i(p) - \frac{b}{p - p_0}\right| < \varepsilon \text{ za svako } p \in [p_{min}, m] \blacksquare$$

Teorema 13: *Za svako $\varepsilon > 0$, postoje M^* i N^* takvi da u ravnoteži, iz $M \geq M^*$ i $N \geq N^*$ sledi da za svako i i za svako $p \in [p_0 + b, m]$ važi*

$$\left|\pi(p) - e^{-A(p)}\right| < \varepsilon.$$

2. MODEL NALAŽENJA RAVNOTEŽNE CENE SA RAZMATRANJEM INFLACIJE

Razmatramo konkurentno tržište sa potražnjom potrošača. Imamo tri bitne osnove. Prvo ekonomija koju posmatramo okarakterisana je konstantnom inflacijom. Firme su izložene realnim troškovima prilikom prilagođavanja cene. Strategija modifikovanja optimalne cene prati (S, s) pravilo: firme čekaju dok god njihova realna cena ne dostigne neki niži nivo, s, usled čega one odmah modifikuju svoju cenu koja se vraća na višu granicu $S > s$. Ove individualne cene određuju raspodelu cena na celom tržištu. Drugo, suočeni sa tržišnom raspodelom cena, potrošači su izloženi realnim troškovima (tražnje), dok se informišu o individualnim cenama. Optimalna strategija potrošača je: prihvataju bilo koju cenu koja nije veća od njihove rezervisane cene (*reservation price*) r, tj. maksimalne cene koju su voljni da plate. Treće, ulazak ili izlazak firmi sa tržišta se dešava dok ukupni profit firmi koje već delaju nije doveden do nule. Besplatan ulazak firmi na tržište određuje broj firmi po potrošaču.

2.1. MODEL

2.1.1. Postavka modela

Vreme je neprekidno, označeno sa t. Tržište se sastoji od više firmi i potrošača. Sa $\mu \in (0,\infty)$ ćemo označiti udeo potrošača po firmi. Firme su dugoročne i proizvode homogeno dobro koje zahteva fiksne troškove $h > 0$ i konstantne marginalne troškove $c > 0$. Ovo su realni troškovi mereni po jedinici radne snage. Firme određuju svoje nominalne cene za dobra koja proizvode. Nominalnu cenu robe „*jede*“ konstantna stopa inflacije $g > 0$. Svako modifikovanje cene iziskuje fiksne troškove $\beta > 0$. Ne postoji ograničenje kapaciteta, te stoga firme mogu zadovoljiti svu potražnju robe koju imaju po datoj ceni.

U svakom trenutku, novi skup kratkoročnih potrošača može ući na tržište i kupiti jednu jedinicu robe. Potrošači traže najbolju cenu. Potražnja za robom košta i zahteva realne troškove $\gamma > 0$.

U ovom delu skoncentrisaćemo se na stacionaran i simetričan ekvilibrijum koji ima sledeće osobine: sve firme prate identično (S, s) pravilo za određivanje cene, tj. drže nominalnu cenu fiksiranom na nekom vremenskom intervalu $T > 0$, dok cena ne dostigne nizak nivo $s > 0$, usled čega firme odmah menjaju svoju cenu, vraćajući je na ciljanu cenu $S > s$, koja je optimalna cena potrošača. Udeo potrošača po firmi $\mu > 0$ je određen besplatnim ulaskom firmi na tržište. U stacionarno simetričnom ekvilibrijumu raspodela tržišne cene $F(p)$ mora da zadovoljava

$$dF(p) = \frac{d\,ln(p)}{ln\left(\frac{S}{s}\right)} \text{ za svako } p \in (s, S] \qquad 2.1$$

2.1.2. Potražnja potršača

Datu raspodelu tržišne cene $F(p)$ potrošači znaju, ali treba da se informišu koja firma nudi datu cenu. Prilikom jedne potražnje (dok traži po kojoj ceni će kupiti neku robu) potrošači mogu posmatrati više cena. Taj broj posmatranih cena po jednoj tražnji označen sa n je slučajna promenljiva. Uzorak na kome potrošači posmtraju cene mora sadržati najmanje jednu cenu. Pretpostavićemo da n prati *Poasson* – ovu raspodelu. Za dato $n \geq 1$, broj posmatranih cena sledi iz funkcije raspodele *Poasson* – ove raspodele

$$P\{n = k\} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \frac{1}{1 - e^{-\lambda}}, \qquad k = 1,2, \dots, \infty$$

Potrošači ne znaju koliko će cena posmatrati unapred ali znaju da će u proseku posmatrati $\frac{\lambda}{1-e^{-\lambda}}$. Veća vrednost λ dovodi do većeg broja posmatranih cena u proseku, stoga veća vrednost λ predstavlja efikasniju tehnologiju potražnje potrošača.

Cilj svakog potrošača je da minimizira očekivani trošak kupovine jedne jedinice robe. Kako se uzorak sastoji od više od jedne posmatrane cene, potrošač će kupiti robu po najnižoj ceni koju razmatra. Dakle, odluka koju donosi potrošač je zasnovana na ***raspodeli najniže cene*** koju razmatra u jednoj tražnji. Neka $J(p)$ označava raspodelu te cene.

Lema 1: *Neka potrošači posmatraju $n \geq 1$ cena prilikom jedne tražnje, gde je n slučajna promenljiva sa Poason – ovom raspodelom i očekivanjem $\frac{\lambda}{1-e^{-\lambda}}$. Za datu raspodelu tržišne cene F(p), raspodela najniže cene koju potrošač posmatra je data sledećim izrazom*

$$J(p) = \frac{1 - e^{-\lambda F(p)}}{1 - e^{-\lambda}}$$

J(p) je neopadajuća funkcija i zadovoljava $\lim_{p \to s} J(p) = 0$ *i* $J(S) = 1$ *gde je S(ili s) gornja (ili donja) granica raspodele tržišne cene* $F(p)$.

<u>Dokaz:</u> Verovatnoća da je najniža cena manja od p data je sa

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(n\ cena\ je\ posmatrano) \cdot P(najniža\ cena\ među\ posmatranim\ je\ manja\ od\ p)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} \left(1 - \left(1 - F(p)\right)^n\right)$$

$$= \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda(1-F(p))} \cdot \left(\lambda\left(1 - F(p)\right)\right)^n}{n!} e^{-\lambda F(p)}\right) \frac{1}{1 - e^{-\lambda}}$$

$$= \frac{1 - e^{-\lambda F(p)}}{1 - e^{-\lambda}} \qquad \blacksquare$$

Primetimo $J(p)$ je konstantna po t i poznata potrošačima. Za dato $J(p)$, optimalna strategija potrošača je određena cenom r; potrošač nastavlja potražnju dok god ne nađe cenu koja nije veća od r. Ako r označava najnižu cenu posmatranu do tada, potrošač je indiferentan između prihvatanja cene r i traženja novog uzorka. Formalno, r zadovoljava:

$$\gamma = \int_{s}^{\min\{S,r\}} (r-p)dJ(p) \qquad 2.2$$

γ predstavlja marginalni trošak tražnje, dok desna strana jednakosti predstavlja marginalnu očekivanu dobit. Stoga je odluka o kupovini potrošača okarakterisana rezervisanom cenom r. γ je zajedničko za sve potrošače, dakle imaju istu rezervisanu cenu r.

2.1.3. Profit

Dalje je potrebno izvesti očekivani profit firme. Sa stanovišta firme, slučajan uzorak potrošača implicira da slučajan broj potrošača posmatra cenu njene robe. Svaka firma prima $\frac{\mu\lambda}{1-e^{-\lambda}}$ potrošača u proseku u svakom momentu. Ako firma ima realnu cenu p u nekom vremenskom trenutku, onda ćemo definisati $D(p)$ kao očekivani broj prodaja koje firma ostvari u tom trenutku. Primetimo da je $D(p)$ nezavisna od vremena. Firma ne ostvari ni jednu prodaju kada je cena njene robe veća od $r, D(p) = 0,\ p > r$. Za $p \leq r$, firma može prodati robu potrošaču samo kada je njena cena najniža među svim cenama koje je potrošač posmatrao. Sledeća lema će nam dati $D(p)$.

Lema 2*: Neka je dato $F(p)$ i rezervisana cena potrošača r. Trenutni očekivani broj prodaja sa kojim je firma suočena po ceni p je dat na sledeći način:*

$$D(p) = \begin{cases} 0 & za\ p > r \\ \dfrac{\mu\lambda e^{-\lambda F(p)}}{1-e^{-\lambda}} & za\ p \leq r \end{cases}$$

Šta više, elastičnost cene tog očekivanog broja prodaja data je sa

$$\alpha = -\frac{\frac{dD(p)}{dp}}{\frac{D(p)}{p}} = \frac{\lambda}{\ln\left(\frac{1}{\sigma}\right)}$$

Očekivani broj prodaja je opadajući po p. Elastičnost cene α je rastuća po λ i opadajuća po $\frac{1}{\sigma}$. Kada potrošači posmatraju veliki broj cena u proseku, tj kada λ teži beskonačnosti oni su voljni da upoređuju cene među firmama. Obrnuto, dato je $F(p)$ koje zadovoljava (2.1), kada postoji velika disperzija cene, verovatnoća (koja je data sa $\left(1-F(p)\right)^{n-1}$) da je firmina cena, $p \leq r$, najmanja među ponuđenim cenama opada sa malim povećanjem p. Za dati broj prodaja $D(p)$ očekivani profit firme po ceni p je dat na sledeći način:

$$\Pi(p) = (p-c)\, D(p)$$

Lema 3: *Funkcija ocekivanog profita* $\Pi(p)$ *je strogo kvazi konkavna za* $p \leq r$.

<u>Dokaz:</u> Ako je $p > r$, onda je $\Pi(p) = 0$. Ako je $p \leq r$ onda primenjujemo izraz 2.1:

$$dF(p) = \frac{d\, ln(p)}{ln\left(\frac{1}{\sigma}\right)} \text{ za svako } p \in (s, S]$$

Dalje imamo

$$\frac{d\Pi(p)}{dp} = \frac{\mu\lambda e^{-\lambda F(p)}}{1-e^{-\lambda}}\left(1 - \frac{\lambda}{ln\left(\frac{1}{\sigma}\right)}\,\frac{p-c}{p}\right)$$

Kako je izraz u zagradi strogo opadajući po p i jednak nuli kada je $p = \hat{p} = \frac{\lambda\, c}{\lambda - ln\left(\frac{1}{\sigma}\right)}$. Te dalje važi:

$$\frac{d\Pi(p)}{dp} > 0 \; za \; p < \hat{p}$$

$$\frac{d\Pi(p)}{dp} < 0 \; za \; p > \hat{p}$$

Pošto je $\Pi(p)$ funkcija jedne promenljive, kako je strogo konkavna biće i strogo kvazi – konkavna.■

2.1.4. (S, s) pravilo formiranja cene

Cilj svake firme je da maksimizura očekivani diskontovani profit odabirom odgovarajuće cene svoje robe. Za dati broj firmi na tržištu, individualna cena jedne firme nema uticaj na celokupnu raspodelu cene na tržištu. Sa konstantnom stopom inflacije, $g > 0$, i pozitivnim troškovima prilagođavanja cene, $\beta > 0$, individualne firme su suočene sa razmenom (*tradeoff*), između troškova prilagođavanja cene i troškova puštanja inflacije da „*pojede*“ cene. Optimalna strategija firmi koje su suočene sa takvom razmenom je pravilo $(S\,, s)$ tipa: firme održavaju cenu nepromenjenu dok god njihova cena p ne smanji vrednost do vrednosti s posle čega raste vrednost, dok god p ne dostigne ciljanu vrednost $S > s$.

Ukupni diskontovani očekivani profit, sprovodeći pravilo $(S\,, s)$, usled prve promene cene dat je sa:

$$V(S, s) = -\beta + \int_0^T \Pi(S\, e^{-gt}) e^{-\rho t} dt + V(S, s) e^{-\rho T}$$

gde je $T = \frac{\ln\left(\frac{S}{s}\right)}{g}$ označava vremenski interval u kojem cena ostaje nepromenjena, a ρ označava diskontnu stopu. Problem svakog prodavca je da odredi nivo cena S i s tako da se maksimizira $V(S, s)$. U nastavku ćemo navesti lemu koja nam obezbeđuje da je optimalno rešenje jedinstveno i da zadovoljava sledeće uslove:

Lema 4: *Neka je dato $F(p)$ i pravilo potražnje potrošača. Prodavčevo $(S\,, s)$ pravilo zadovoljava sledeće uslove:*

$$S \leq r \qquad 2.3$$

$$\Pi(S) - \Pi(s) - \rho\beta \geq 0 \qquad 2.4$$

$$\Pi(s) - \rho V(S, s) = 0 \qquad 2.5$$

gde uslov 2.4 važi sa znakom jednakosti sem za $S = r$. Rešenje uslova prvog reda 2.4 i 2.5 je jedinstveno.

Prodavci ne očekuju da će ostvariti prodaju u trenutku kada je njihova cena veća od maksimalne cene koju su potrošači voljni da plate, $p > r$. Dakle, optimalnost $(S\,, s)$ pravila zahteva uslov $S \leq r$. Kada je $S < r$ uslov prvog reda 2.4 važi sa znakom jednakošću, a u slučaju $S = r$ važi sa znakom nejednakosti. U prvom slučaju gde je S unutrašnje rešenje 2.4 i 2.5 su standardni uslovi optimalnosti. Očekivani dobici koji proističu iz odlaganja promene cene su očekivani profiti do trenutka prilagođavanja, $\Pi(s)$ i plus kamata na troškove prilagođavanja, $\rho\beta$. Očekivani gubitak iz takvog odlaganja je očekivani profit koji se ostvari nakon prilagođavanja cena $\Pi(S)$. Ovi očekivani dobici i gubici su jednaki u optimumu, kao i što je rečeno u uslovu 2.4. U kasnijem slučaju kada gubici nadmaše dobitak, optimalno S je je jednako graničnoj ceni r.

Sledeća lema nam obezbeđuje vezu između ciljane vrednosti S $(> s)$ pojedinačnih prodavaca i elastičnosti cene, uzimajući broj prodavaca na tržištu kao unapred datim.

Lema 5*: Neka je dat broj firmi* $\frac{1}{\mu}$ *i pravilo formiranja cene drugih prodavaca. Ako je maksimalna cena koju je potrošač voljan da plati,* r *nepoznata, onda je ciljana cena pojedinačne firme strogo opadajuća po parametru efikasnosti tražnje,* λ *i po donjoj granici tržišne cene, i strogo rastuća po gornjoj granici tržišne cene, za dovoljno malo* β.

Kada potrošači razmatraju dovoljno veliki broj ponuđenih cena, elastičnost cena $\alpha = \frac{\lambda}{\ln\frac{1}{\sigma}}$ je velika i povećanje cene prodavca vodi do velikog smanjenja očekivanog broja prodaja. U tom slučaju, prodavci postavljaju svoju ciljanu cenu na niži nivo. Kada je donja (gornja) granica tržišne cene relativno niska (visoka), postoji velika disperzije cene. U ovom slučaju je elastičnost cene je niska i povećanje cene firme dovodi do veoma malog smanjenja prodaje, što prodavcu daje motiv da svoju ciljanu cenu postavi na visokom nivou. Ova lema potvrđuje ove osobine, kada pojedinačni prodavci teže pravilu $(S\,, s)$, imaju $V(S, s) > 0$ sa dovoljno malim troškovima $\beta > 0$. Pozitivan profit prodavaca biće zagarantovan, besplatnim ulaskom na tržište (*free-entry*), što će dalje biti predstavljeno.

2.1.5 Ulazak na tržište

Funkcija gustine prodavca po potrošaču $\frac{1}{\mu}$, biće određena po ulasku. Firme ulaze na tržište i ne izlaze dok god je njihov ukupni profit jednak nuli, tj dok god pokrivaju fiksne troškove u ravnoteži:

$$\rho V(S, s) = h \qquad 2.6$$

Kako firme pokrivaju sve troškove one su voljne da delaju na tržištu i zadovoljavaju tražnju (*demand*). Razmatrajmo situaciju u kojoj fiksni troškovi h postaju veći. Onda, neke firme napuštaju tržište i prosečno tržišno učešće (*average market share*) $\frac{\mu\lambda}{1-e^{-\lambda}}$ preostalih firmi povećava dato λ. Ovo dalje implicira da za bilo koju datu cenu p, očekivani profit $\Pi(p)$ raste kao rekacija na izlazak firimi sa tržišta. Ovaj proces se nastavlja dok odgovarajuća vrednost $\rho V(S, s)$ pokriva fiksne troškove h, kao što je izraženo u 2.6.

2.2. EKVILIBRIJUM

2.2.1. Ravnoteža na tržištu (Market eqilubrium)

Definicija 1: Simetrično postojano stanje ravnoteže (*symmetric steady-state equlibrium*) u ekonomiji je potrošačeva cena $r > 0$, par realnih cena $S, s > 0$, funkcija raspodele tržišnih realnih cena $\mathrm{F}(p)$, gustina sa kojom firme delaju na tržištu $\frac{1}{\mu} > 0$ tako da:

- Za dato $\mathrm{F}(p)$ i (S, s) pravilo cene, r zadovoljava 2.2
- Za dato $\mathrm{F}(p)$ i r, firmino pravilo cene (S, s), je pravilo koje zadovoljava 2.3 i uslove prvog reda 2.4 i 2.5
- Raspodela tržišne realne cene je stacionarna i konzistentna sa individualnim firminim (S, s) pravilom, tj $\mathrm{F}(p)$ zadovoljava 2.1
- $\frac{1}{\mu}$ je određeno uslovom slobodnog ulaska na tržište 2.6.

Primetimo da za $S \leq r$, ravnotežna rešenja μ, r, S, s mogu biti opisana pomoću sledećeg sistema jednačina:

$$r = \gamma + E_J(p) \tag{2.7}$$

$$S = \min\left\{\frac{1 - e^{-\lambda}}{\sigma - e^{-\lambda}}\left(c - \frac{\rho\beta}{\mu\lambda}\right), r\right\} \tag{2.8}$$

$$s = c + \frac{\left(1 - e^{-\lambda}\right)h}{\mu\lambda} \tag{2.9}$$

i uslovom slobodnog ulaska na tržište 2.6. Jednačina 2.7 je dobijena primenjivajući $S \leq r$ u 2.2, gde

$$E_J(p) = S\frac{\lambda\left(\sigma - e^{-\lambda}\right)}{\left(1 - e^{-\lambda}\right)\left(\lambda - \ln\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right)} \in (s,S]$$

predstavlja najnižu cenu koju potrošač očekuje tokom tražnje. Jednačina 2.8 je dobijena primenom $S \leq r$ u 2.4, i 2.9 je dobijena primenom 2.6 u 2.5.

Važno je uočiti da S može biti određeno u zavisnosti od r ili ne. U nastavku biće prikazana egzistencija i osobine ekvilibrijama u oba slučaja. Jedan ili drugi ekvilibrijum se mogu desiti. Na kraju, 2.9 pokazuje da je donja granica realne cene s rastuća sa brojem firmi $\frac{1}{\mu}$. Ovo znači da, individualne firme nadoknađuju manji očekivani profit, koji se dešava usled povećanja broja firmi na tržištu, postavljanjem svoje cene s na viši nivo.

2.2.2. Ravnoteža bez zavisnosti od cene r

Razmatramo prvo slučaj $S < r$. U ovom slučaju ciljana vrednost S, postavljena od strane individualnih firmi, je unutrašnje rešenje i otuda su realne cene (S, s) određene bez obzira na cenu r.

Definicija 2 ***(F-tip ekvilibrijuma)***: Definišemo:

$$\Omega_F \equiv \{(\gamma, \beta, h, c, \lambda, g, \rho) \in (0, \infty)^7 | S < r\}$$

Ako $\{\gamma, \beta, h, c, \lambda, g, \rho\} \in \Omega_F$, onda F-tip ekvilibrijuma definišemo kao postojano stanje ekvilibrijuma dato u definiciji 1.

Ravnotežne vrednosti μ, s, S F-tipa ekvilibrijuma su određene na osnovu (2.6), (2.8) i (2.9) tako da zadovoljava $S < r$. Uočavajući rešenje F-tipa ekvilibrijuma prolem se svodi na problem nepokretne tačke, u oznaci $\gamma_V = \gamma_V(\beta, h, c, \lambda, g, \rho)$.

Teorema 6 (Egzistencija F-tipa ekvilibrijuma)*:Za $\gamma > \gamma_V \in (0, \infty)$, postoji F-tip ekvilibrijum koji zadovoljava $\mu \in (0, \infty)$ i $r > S > s > c$.*

Prethodna teorema tvrdi egzistenciju F-tipa ekvilibrijuma za dovoljno visoke troškove tražnje. Ovaj tip ekvilibrijuma ima sledeću osobinu: presređivanjem jednačine 2.8 korišćenjem jednačine 2.6 dobijamo:

$$S = c + \frac{(e^{\lambda} - 1)(h + \rho\beta)}{\mu\lambda}$$

ovaj izraz pokazuje da S rastuće po $\frac{1}{\mu}$. Kao što je pokazano u lemi 5, ponašanje gornje granice $S < r$ tržišne cene može biti dobijeno pomoću elatičnosti cene α. Kako je $\frac{1}{\sigma}$ rastuće po $\frac{1}{\mu}$, individualne firme su suočene sa manje elastičnom potražnje i postavljaju S na viši nivo kada postoji veliki broj firmi. Kako je s takođe rastuće po $\frac{1}{\mu}$, ulazak firmi implicira da je par (S, s) na višem nivou.

2.2.3. Ravnoteža u zavisnosti od cene r

Razmatrajamo sada sledeći slučaj $S = r$. U ovom slučaju, rezervisana cena tražnje je povezana sa vrednošću cene S individualne firme.

Definicija 3 (***B-tip ekvilibrijuma***): Definišemo:

$$\Omega_B \equiv \{(\gamma, \beta, h, c, \lambda, g, \rho) \in (0, \infty)^7 | S = r\}$$

Ako $\{\gamma, \beta, h, c, \lambda, g, \rho\} \in \Omega_B$, onda B-tip ekvilibrijuma definišemo kao postojano stanje ekvilibrijuma dato u definiciji 1.

Kako 2.8 važi za $S = r$, ravnotežne vrednosti S, s, μ u B-tipu ekvilibrijuma su određene jednačinama 2.6, 2.7 i 2.9

Teorema 7 (Egzistencija B-tipa ekvilibrijuma)*:Za $\gamma < \gamma_V \in (0, \infty)$, postoji B-tip ekvilibrijuma koji zadovoljava $\mu \in (0, \infty)$ i $r = S > s > c$.*

Prethodna teorema pokazuje postojanje B-tipa ekvilibrijuma za dovoljno male troškove tražnje. U ovom ekvilibrijumu, ciljana vrednost S, koja je postavljena od strane individualnih firmi je krajnje rešenje $S = r$ i njeno ponašanje je diktirano cenom r. Primenjivajući $S = r$ u jednačinu 2.7 dobija se:

$$S = \frac{\gamma}{1 - L\left(\frac{1}{\sigma}\right)}$$

gde je

$$L\left(\frac{1}{\sigma}\right) \equiv \frac{E_j(p)}{S} = \frac{\lambda\left(\sigma - e^{-\lambda}\right)}{(1 - e^{-\lambda})\left(\lambda - \ln\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right)}$$

opadajuće po $\frac{1}{\sigma}$. Kako disperzija cene postaje veća, potrošači očekuju nižu cenu koju će razmatrati tokom tražnje. Za dato $S = r$, ovo implicira da individualne firme moraju postaviti ciljanu vrednost S na niži nivo kako $\frac{1}{\sigma}$ raste. Dalje, primenjujući $S = r$ u 2.7 i 2.9 dobija se

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{\gamma\mu\lambda}{\left(c\mu\lambda + h(1 - e^{-\gamma})\right)\left(1 - L\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right)}$$

desna strana jednačine je strogo opadajuća i po $\frac{1}{\sigma}$ i po $\frac{1}{\mu}$.

2.2.4. F – tip ili B – tip?

Prethodne dve teoreme pokazuju postojanje određenih tipova ekvilibrijuma u zavisnosti od pretpostavki i sada ćemo ukrstiti ove dve teoreme.

Teorema 8 (Egzistencija postojanog stanja ekvilibrijuma)*: Za svako* $(\gamma, \beta, h, c, \lambda, g, \rho) \in (0, \infty)^7$*, postoji postojano stanje ekvilibrijuma dato u definiciji 1, gde se F – tip ekvilibrijuma dešava za* $\gamma > \gamma_{\mathrm{V}}$*, a B – tip ekvilibrijuma se dešava za* $\gamma \leq \gamma_{\mathrm{V}}$*.*

Teorema pokazuje egzistenciju ekvilibrijuma, ali ne i jednistvenost. Teorema još pokazuje da se ekvilibrium F-tipa dešava za $\gamma > \gamma_{\mathrm{V}}$, u kojem slučaju rezervisana cena r je visoka u odnosu na gornju granice, tj $r > S$; dok u ekvilibrijumu B-tipa ekvilibrijum se dešava za $\gamma < \gamma_{\mathrm{V}}$ u kojem je gornja granica dovoljno visoka da zadovolji $\Pi(S) > \Pi(s) + \rho\beta$.

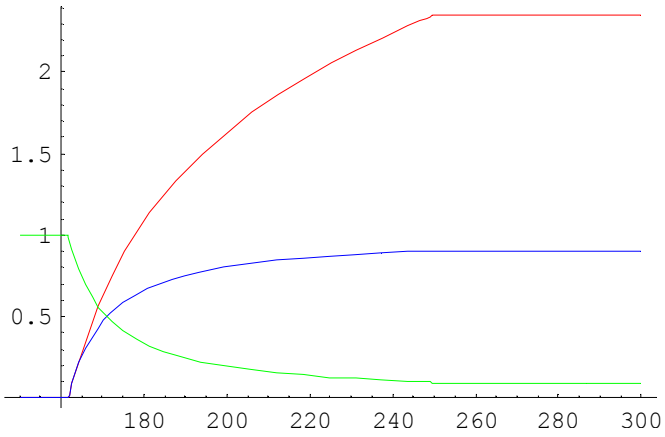
IV PRAKTIČAN DEO

Sada ćemo na primeru iz mesne industrije proveriti predstavljene modele. Proverićemo kako pojedini parametri utiču jedni na druge, šta se dešava sa ostalim veličinama kada se menja jedan od parametra.

Da bismo proverili kako se ponašaju parametri, za početak, ćemo sve posmatrati na jednom artiklu. Cena koštanja posmatranog proizvoda je $p_0 = 152.5356$. Minimalna cena na tržištu je $p_{min} = 185$, a maksimalna cena je $p_{max} = 203.67$. Maksimalna cena koju su kupci voljni da plate je $m = 250$, trošak dospevanja do određenog kupca (advertajzing, komunikacija...) se u praksi ocenjuje da je oko 5% cene, stoga ćemo mi uzeti da je $b = 0.05 \cdot 152.5356 = 7.6268$.

1. PROJEKCIJA MODELA PRIKAZANOG U POGLAVLJU 1.1

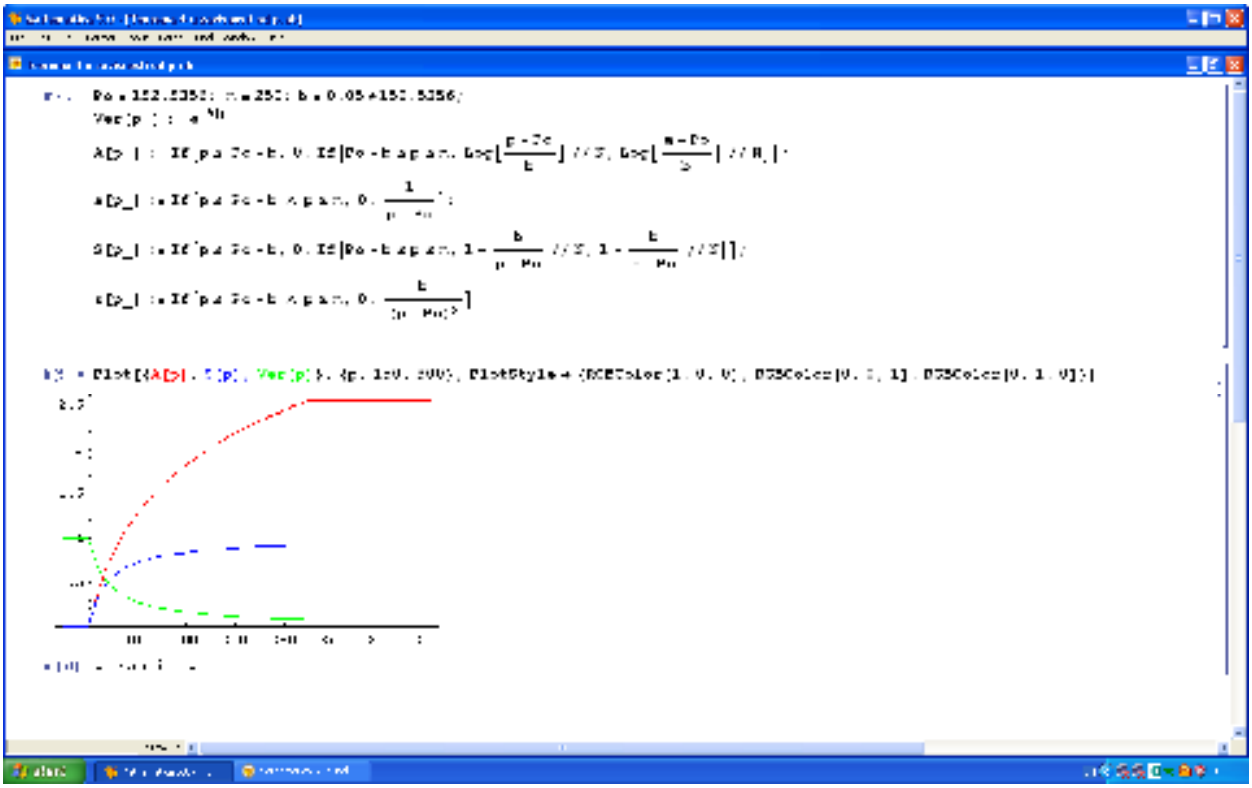
Prvo ćemo razmatrati šta se dešava sa veličinama $A(p), a(p), S(p), s(p)$ koji su definisani u poglavlju 1.1. Za date parametre, verovatnoća da poslata reklamna poruka po ceni $p = 185.5$ rezultuje prodajom je $\pi(p) = 0.231364$. Ovakav rezultat je opravdan jer minimalna prihvatljiva cena je $p_{min} = p_0 + b = 152.5356 + 7.6268 = 160.162$, što je manje od ponuđene cene na tržištu koja iznosi $p = 185.5$. Povećavanjem cene na tržištu, zadržavanjem troškova na istom nivou verovatnoća prodaje po toj novoj ceni bi opadala, jer bi to značilo da kupac može očekivati i nižu cenu od te na tržištu. Smanjenjem cene, verovatnoća prodaje bi rasla. U nastvaku vidimo simulaciju u *Matehmatica* – i i grafik koji nam dokazuju prethodnu priču:



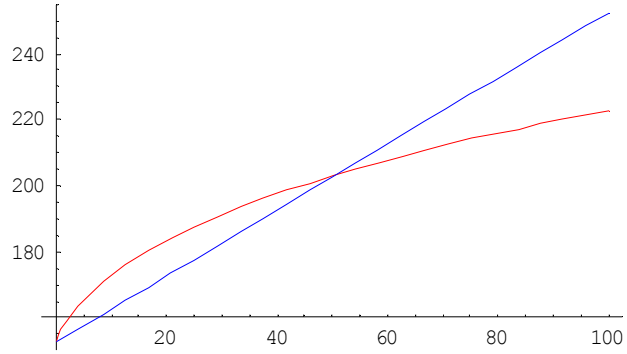
Grafik 1

Legenda: Verovatnoća da poslata reklama rezultuje prodajom
Broj poslatih reklama po kupcu po datoj ceni
Broj reklama koje su rezultovale prodajom po kupcu

Sa grafika uočavamo da dok god je cena na tržištu manja od $p_0 + b$ verovatnoća da se ostvari prodaja po toj ceni je 1, a broj reklamnih poruka po kupcu je nula. Povećavanjem cene i prevazilaženjem vrednosti $p_0 + b$ verovatnoća prodaje počinje da opada, ali se broj poslatih reklamnih poruka povećava, jer povećanjem cene i nadmašivanjem minimalne prodavac se mora više reklamirati i više komunicirati ka kupcima kako bi realizovao prodaju. Onog trenutka kada cena nadmaši maksimalnu cenu koju je prodavac voljan da plati sve tri posmatrane veličine postaju konstantne. Za kupca nije bitno kolika je ta cena (da li je 251 ili 300), ali dok god je veća od m, prodavac mora uložiti podjednak trud da bi došao do određenog kupca.



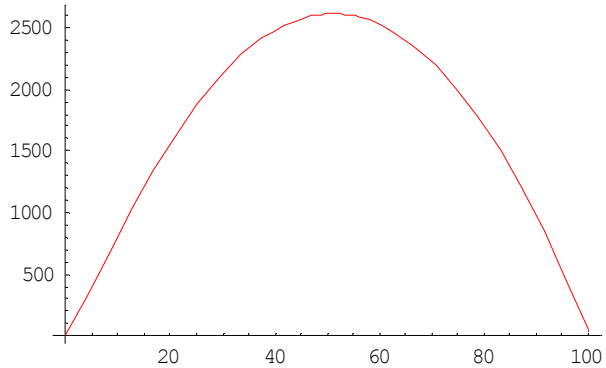
Posmatrajmo sada šta se dešava sa očekivanom prodajnom cenom, koja zavisi od maksimalne, minimalne cene, cene koštanja i troškova dospevanja do kupca na tržištu (trošak advertajzinga). Primer potvrđuje ono što je prikazano modelom: niži troškovi advertajzinga, niža je očekivana prodajna cena. Rastom troškova advertajzinga raste i cena na tržištu.



Grafik 2

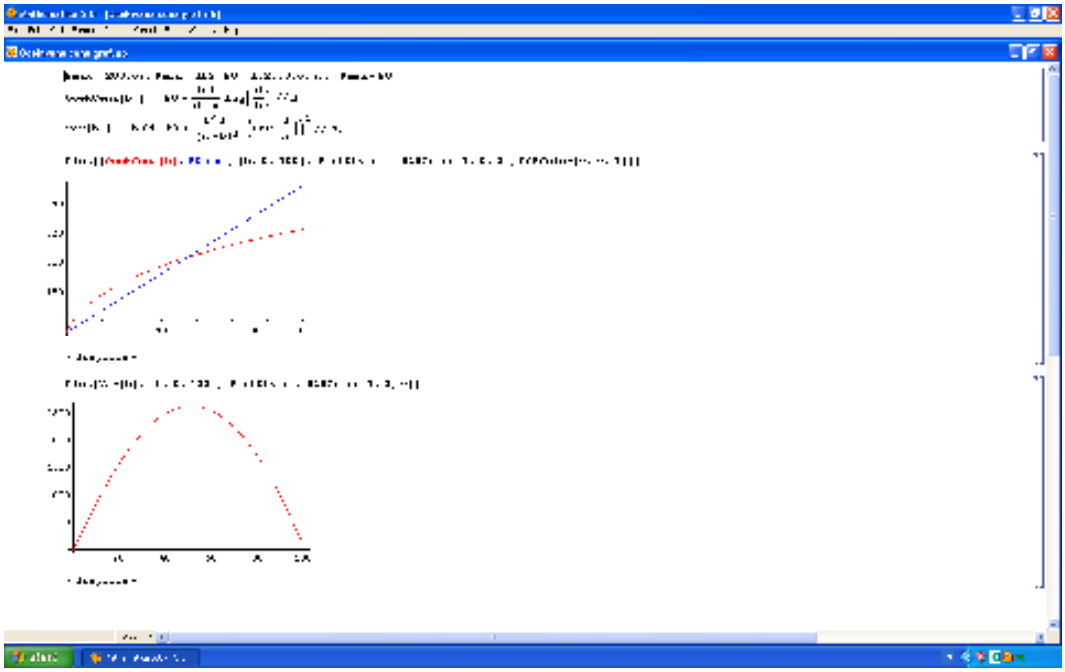
Legenda: Očekivana cena
$p_0 + b$

Što se tiče varijanse, ona takođe raste kako rastu i troškovi advertajzinga:

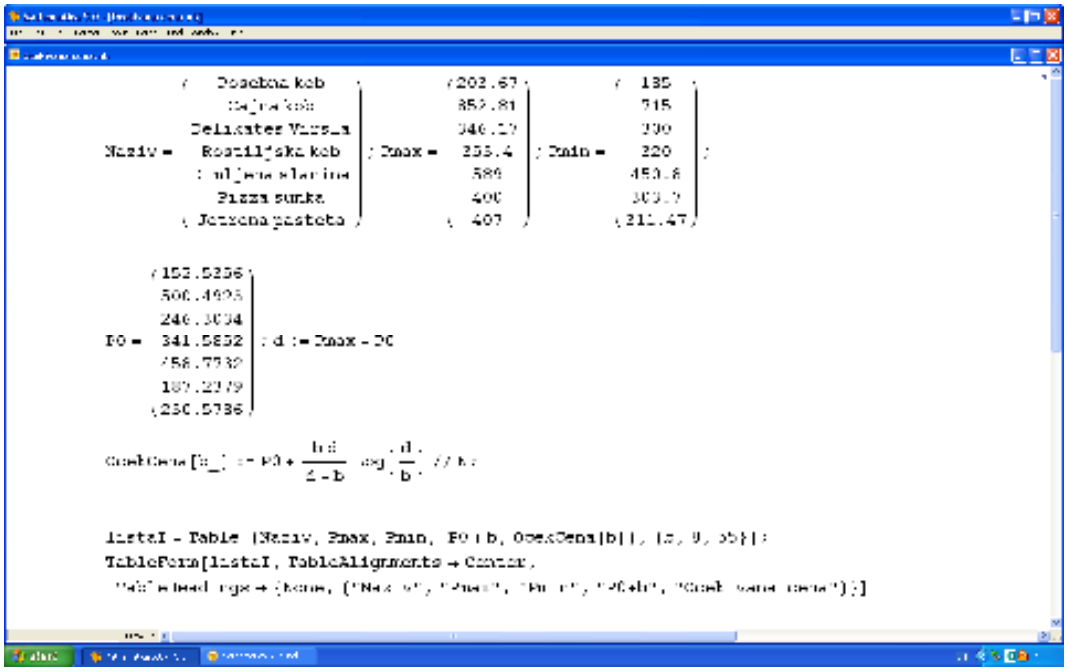


Grafik 3

Na grafiku 2 primećujemo da je očekivana cena iznad $p_0 + b$ (cena treba da prekrije sve troškove), ali onog trenutka kada troškovi postanu toliko veliki, da je maksimalna cena manja od $p_0 + b$, onda je očekivana cena niža od $p_0 + b$, jer nižom cenom će se mnogo većim količinama nadomestiti ta razlika u ceni, a varijansa počinje da opada.



Za sledeće proizvode sa tržišta mesne industirije ćemo odrediti ravnotežne cene, na osnovu parametara koji figurišu na tržištu, koji su prilogu:

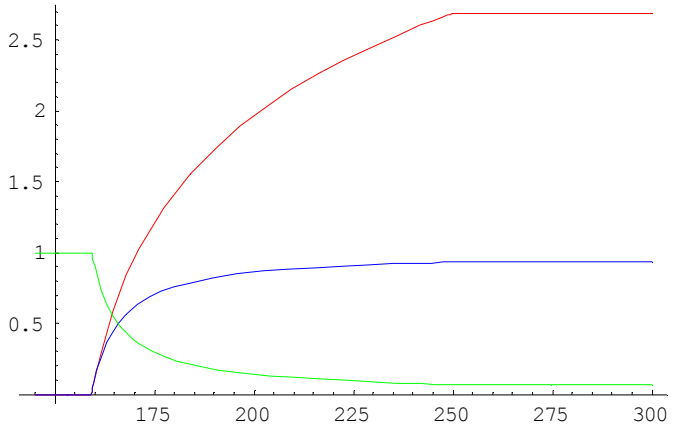


b	Naziv	Pmax	Pmin	P0 + b	Ocekivana cena
	kob Posebna	203.67	185	160.5356	170.128
	Cajna kob	852.81	715	508.4923	531.476
	Delikates Virsla	346.17	300	254.3034	268.257
8	kob Rostiljska	353.4	320	349.5852	351.246
	Dimljena slanina	589	450.8	466.7732	482.553
	Pizza sunka	400	303.7	195.2379	214.509
	Jetrena pasteta	407	311.47	238.5786	256.502
	kob Posebna	203.67`	185	163.5356`	174.070
	Cajna kob	852.81`	715	511.4923`	539.854
	Delikates Virsla	346.17`	300	257.3034`	273.572`
11	kob Rostiljska	353.4`	320	352.5852`	352.983
	Dimljena slanina	589	450.8`	469.7732`	488.466
	Pizza sunka	400	303.7`	198.2379`	221.599
	Jetrena pasteta	407	311.47`	241.5786`	263.133
	kob Posebna	203.67`	185	164.5356`	175.264
	Cajna kob	852.81`	715	512.4923`	542.478
	Delikates Virsla	346.17`	300	258.3034`	275.203
12	kob Rostiljska	353.4`	320	353.5852`	353.492
	Dimljena slanina	589	450.8`	470.7732`	490.290
	Pizza sunka	400	303.7`	199.2379`	223.803
	Jetrena pasteta	407	311.47`	242.5786`	265.188`
	kob Posebna	203.67`	185	203.5356`	203.603
	Cajna kob	852.81`	715	551.4923`	615.744
	Delikates Virsla	346.17`	300	297.3034`	316.345`
51	kob Rostiljska	353.4`	320	392.5852`	364.074
	Dimljena slanina	589	450.8`	509.7732`	537.360
	Pizza sunka	400	303.7`	238.2379`	283.050
	Jetrena pasteta	407	311.47`	281.5786`	319.609
	kob Posebna	203.67`	185	207.5356`	205.556
	Cajna kob	852.81`	715	555.4923`	621.534
	Delikates Virsla	346.17`	300	301.3034`	319.328
55	kob Rostiljska	353.4`	320	396.5852`	364.727
	Dimljena slanina	589	450.8`	513.7732`	540.840
	Pizza sunka	400	303.7`	242.2379`	287.584
	Jetrena pasteta	407	311.47`	285.5786`	323.721

Ovde smo prikazali koja je očekivana cena za datu cenu koštanja i cena na tržištu. Primetimo da kada troškovi advertajzinga, b, postanu dovoljno veliki po jedinici (u ovom slučaju kg), očekivana cena biva manja od minimalne ravnotežne cene koja $p_0 + b$. Na ovom primeru se to desilo za dva artikla. U praksi je takav slučaj čest: da je cena nekog proizvoda niža od $p_0 + b$, ali dovoljna količina tog proizvoda i prodaja određene količine proizvoda kod kojeg je cena mnogo veća od $p_0 + b$ ta razlika se nadomesti.

2. PROJEKCIJA MODELA PRIKAZANOG U POGLAVLJU 1.2

Za iste parametre kao i u prethodnom poglavlju, verovatnoća da poslata reklamna poruka po ceni $p = 185.5$ rezultuje prodajom je $\pi(p) = 0.201335$. Ovakav rezultat je opravdan jer je cena od 185.5 veća od minimalne cene u ravnoteži koja je jednaka $p_{min} = p_0 + \phi b = 152.5356 + 0.870207 \cdot 7.6268 = 159.172$. Povećavanjem cene na tržištu, zadržavanjem troškova na istom nivou verovatnoća prodaje po toj novoj ceni bi opadala, jer bi to značilo da kupac može očekivati i nižu cenu od te na tržištu. U ovom slučaju, za razliku od prvog modela, je nešto veći opseg (p_{min}, m), te je pri većim cenama potrebno poslati i više od jedne poruke ka kupcu. U nastavku vidimo simulaciju u *Matehmatica* – i grafik koji nam dokazuju prethodnu priču:

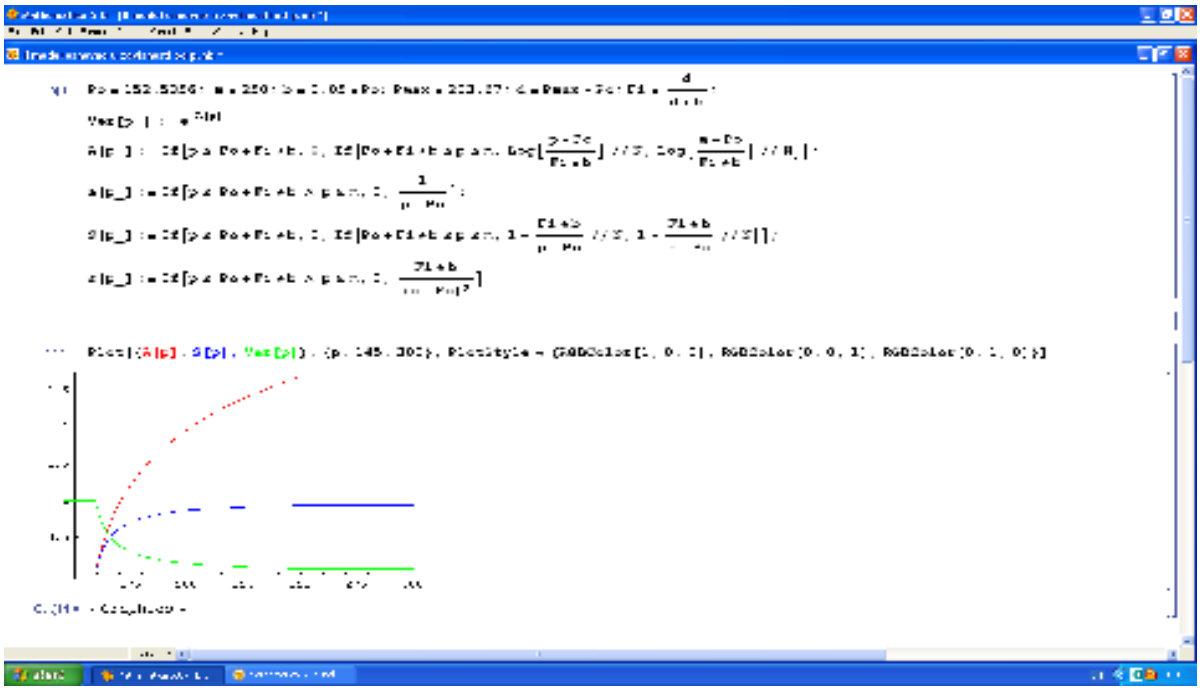


Grafik 4

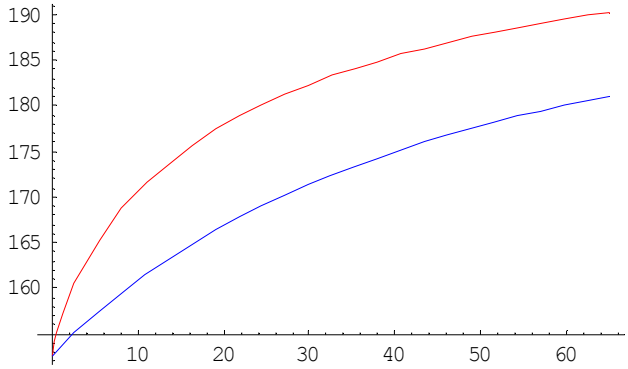
Legenda: Verovatnoća da poslata reklama rezultuje prodajom
Broj poslatih reklama po kupcu po datoj ceni
Broj reklama koje su rezultovale prodajom po kupcu

Sa grafika uočavamo da dok god je cena na tržištu manja od $p_0 + \phi b$ verovatnoća da se ostvari prodaja po toj ceni je 1, a broj reklamnih poruka po kupcu je nula. Povećavanjem cene i prevazilaženjem vrednosti $p_0 + \phi b$ verovatnoća prodaje počinje da opada, ali se broj poslatih reklamnih poruka povećava, jer povećanjem cene i nadmašivanjem minimalne prodavac se mora mnogo više reklamirati i više komunicirati ka kupcima kako bi realizovao prodaju, jer sada

kupac „ne čeka“ njegovu poruku da bi nešto kupio, već i on sam traga ka što nižoj ceni. Onog trenutka kada cena nadmaši maksimalnu cenu koju je prodavac voljan da plati sve tri posmatrane veličine postaju konstantne.



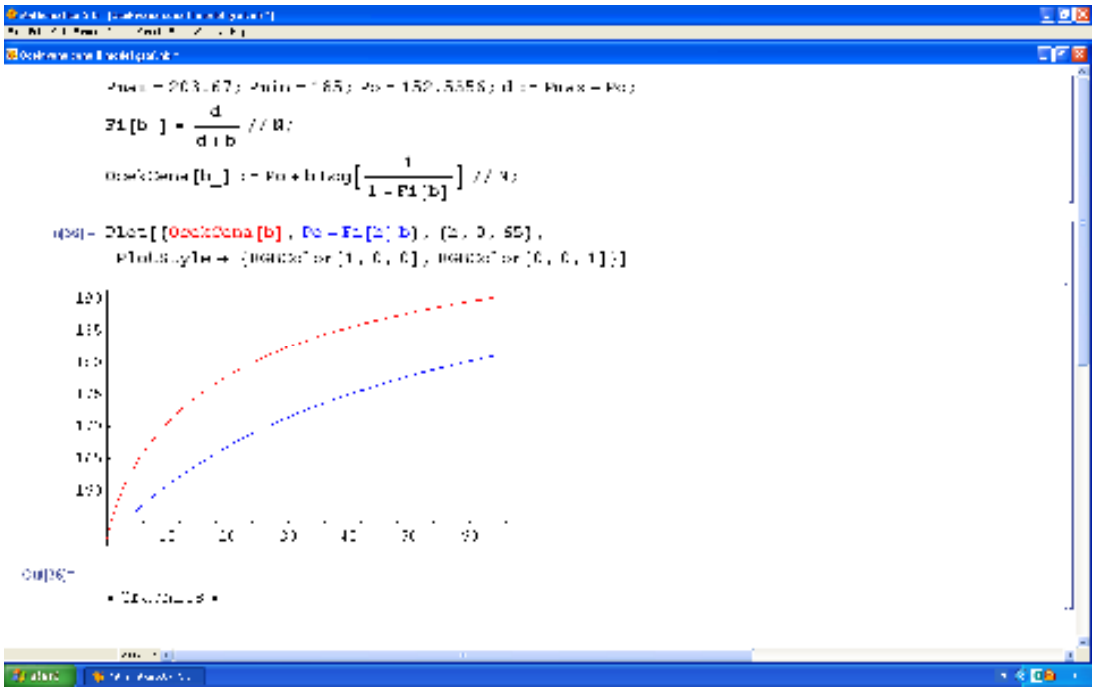
Šta se u ovom slučaju dešava sa očekivanom prodajnom cenom? Očekivana cena je uvek veća od $p_0 + \phi b$. Kako se troškovi advertajzinga povećavaju, tako se i povećava očekivana prodajna cena. Ali, prodajna cena nikada neće biti manja od vrednosti $p_0 + \phi b$, kao što je to bio slučaj u prvom modelu. Intuitivno, ovo se dešava jer prodavac neće spuštati cenu ispod $p_0 + \phi b$, jer je ovde uključena i tražnja kupca, te on može tražiti drugu cenu ako nije zadovoljan ponuđenom.



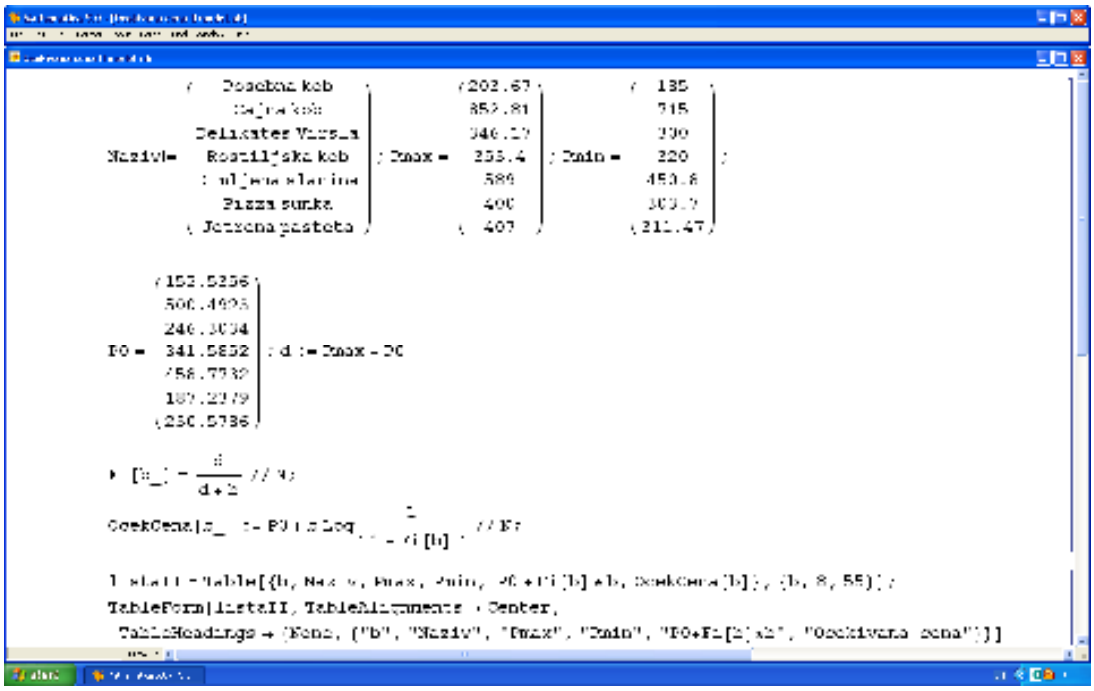
Grafik 5

Legenda: Očekivana cena
$p_0 + \phi b$

Koliko god povećavali troškove, očekivana cena će se samo približavati vrenosti $p_0 + \phi b$, ali se neće izjednačiti sa njom.

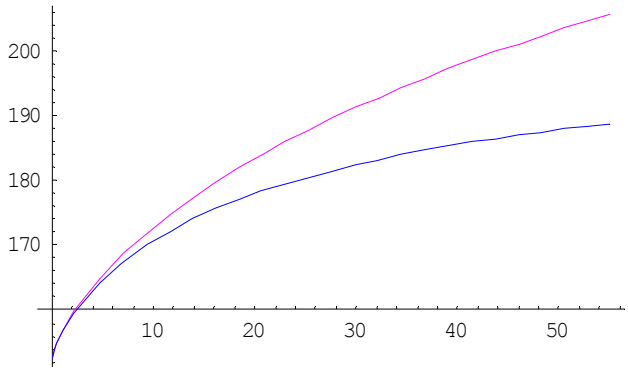


Sada ćemo za iste proizvode kao u prvom modelu, odrediti očekivane cene primenom ovog drugog modela.



b	Naziv	Pmax	Pmin	P0 + Fi[b] * b	Ocekivana cena
	kob Posebna	203.67`	185	159.453	168.538
	Cajna kob	852.81`	715	508.315	530.953
	Delikates Virsla	346.17`	300	253.710	267.115
8	kob Rostiljska	353.4`	320	346.355	348.841
	Dimljena slanina	589	450.8`	466.310	481.569
	Pizza sunka	400	303.7`	194.948	213.779
	Jetrena pasteta	407	311.47`	238.231	255.681
	kob Posebna	203.67`	185	161.588	171.581
	Cajna kob	852.81`	715	511.159	538.964
	Delikates Virsla	346.17`	300	256.212	271.718
11	kob Rostiljska	353.4`	320	347.282	349.610
	Dimljena slanina	589	450.8`	468.916	486.850
	Pizza sunka	400	303.7`	197.697	220.377
	Jetrena pasteta	407	311.47`	240.933	261.769
	kob Posebna	203.67`	185	162.255	172.460
	Cajna kob	852.81`	715	512.097	541.450
	Delikates Virsla	346.17`	300	257.016	273.092
12	kob Rostiljska	353.4`	320	347.538	349.810
	Dimljena slanina	589	450.8`	469.761	488.443
	Pizza sunka	400	303.7`	198.597	222.399
	Jetrena pasteta	407	311.47`	241.814	263.624
	kob Posebna	203.67`	185	178.069	187.953
	Cajna kob	852.81`	715	545.043	605.955
	Delikates Virsla	346.17`	300	280.063	301.616
51	kob Rostiljska	353.4`	320	351.178	352.212
	Dimljena slanina	589	450.8`	495.421	523.437
	Pizza sunka	400	303.7`	228.377	271.042
	Jetrena pasteta	407	311.47`	270.142	306.822
	kob Posebna	203.67`	185	179.034	188.691
	Cajna kob	852.81`	715	548.066	610.617
	Delikates Virsla	346.17`	300	281.770	303.241
55	kob Rostiljska	353.4`	320	351.311	352.288
	Dimljena slanina	589	450.8`	497.442	525.557
	Pizza sunka	400	303.7`	230.941	274.290
	Jetrena pasteta	407	311.47`	272.507	309.608

U ovom modelu, primetimo sada i na primeru, koliko god troškovi bili veliki očekivana cena će uvek biti veća od $p_0 + \phi b$. Kako se troškovi advertajzinga povećavaju i u jednom i u drugom modelu očekivana cena raste. Ali u prvom modelu cena mnogo brže raste nego u drugom kada je uključena i tražnja kupca (*grafik 6*). Razlog ovoj situaciji je što u drugom modelu dodatno figuriše parameter ϕ (broj kupaca do kojih je stigla poruka), a u prvom modelu je pretpostavka da poruke stižu do svih kupaca.



Grafik 6

Legenda: Očekivana cena modela 1 $\bar{p} = p_0 + \frac{bd}{d-b} \cdot ln\left(\frac{d}{b}\right)$

Očekivana cena modela 2 $\bar{p} = p_0 + b \cdot ln\left(\frac{1}{1-\phi}\right)$

V ZAKLJUČAK

Ja bih navela nekoliko nedostataka ovog modela, sa stanovišta „opipiljivosti“ i realne primene. Najpre parametre b trošak reklamiranja (advertajzinga), c trošak tražnje kupca za robom i m maksimalna cena koju su kupci voljni da plate je teško precizno oceniti. Termin advertajzing može uključiti različite troškove kao što su troškovi izlaganja robe kod prodavaca, troškove reklamiranja, promocija, pakovanja u kojoj je proizvod upakovan i drugo, pri čemu sve to treba objediniti. U praksi je to teže odraditi, ono što sam ja uspela je da ako posmatram samo troškove promocija i akcija to je oko 5% cene.

Nerealna pretpostavka je trošak proizvodnje određenog dobra. U realnosti različite firme imaju različit trošak proizvodnje, jer je kvalitet određenog dobra različit. Na primer, posmatramo mlečnu čokoladu na tržištu. „Milka“ mlečna čokolada se ne može porediti sa nekim lokalnim proizvođačem mlečne čokolade, koji bez obzira na kvalitet deluje na tržištu i ima određeno tržišno učešće.

Ako zanemarimo ove nedostatke možemo zaključiti sledeće: što je naša cena veća potrebnije je veće reklamiranje. Sve je to povezano sa činjenicom da po većoj ceni, se očekuje veći prihod pa i veći iznos koji se može izdvojiti za reklamiranje. U slučaju kada posmatramo samo advertajzing bez uplitanja videli smo da određenog trenutka očekivana ravnotežna cena može biti ispod nivoa koji bi pokrio sve troškove. To na prvi pogled možda deluje iznenađujuće, ali dovoljno velikom količinom se može nadoknaditi taj „minus“ i tako se dozvoljava da firma ostane konkurenta. Sa druge strane, u modelu kada je uključena tražnja kupca videli smo da je očekivana ravnotežna cena uvek veća od svih troškova, što na prvi pogled deluje dobro za firmu. Ali ako bi se troškovi toliko povećali, onda bi i njihova cena rasla i došlo do nivoa kada više ne bi bilo tražnje za tom robom.

Sve ovo potvrđuje da je bolje razmatrati model kada je samo advertajzing uključen, jer su ispoštovane sve činjenice koje treba uzeti u obzir pri određivanju cene na osnovu teorije određivanja cene koju sam spomenula na početku.

V LITERATURA

[1] Angel de la Fuente; *Mathematical Methods and Models for Economists*; 1st edition; Cambridge University Press; 2000,

[2] Hal R.Varian; *Microeconomic Analysis*; 3rd edition; New York; 1992

[3] Stuart A. Klugman,Harry H. Panjer, Gordon E. Willmot; *Loss Models from data to decision*; 2nd edition; New Jersey; 2004,

[4] Gerard R. Butters; *Equlibrium distibutions of Sales and Advertajzing prices*; Review of Economic studies; Jstor; 2009,

[5] Martin J Osborne; *An introduction to game theory*; 3rd edition; Oxford University; 2002,

[6] Macato Watanabe; *Infaltion, price competition and consumer search technology*; Journal of Economic dynamics and control; Science Direct; 2008,

[7] Danijela Rajter - Ćirić; *Verovatnoća*; Prvo izdanje; Novi Sad; 2008,

[8] S. Krčevinac, M. Čangalović, V. Kovačević-Vujčić, M. Martić, M.Vujošević; *Operaciona istraživanja 2*; Drugo izdanje; Beograd; 2006;

[9] http://en.wikipedia.org

[9] Praktičan deo zasnovan na realnim podacima iz oblasti mesne industrije

Kratka biografija

Rođena sam 2. septembra 1985. godine u Aleksincu. Osnovnu školu „Ljupče Nikolić“ završila sam u Aleksincu kao nosilac „*Vukove diplome*“. Nakon toga sam upisala Aleksinačku gimnaziju, prirodno-matematički smer, koju sam završila 2004. godine kao nosilac „*Vukove diplome*“ i učenik generacije. Godine 2004. upisala sam se na Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, smer diplomirani inženjer matematike. Ispite sam položila sa prosečnom ocenom 9.61 (devet 61/100). Diplomirala sam 2009. godine sa ocenom 10 na temu „Monetarna politika i Tejlorovo pravilo“. Iste godine sam upisala master studije smer Matematika finansija. Na masteru prosečna ocena je 9.93 (devet 93/100). Bavim se folklorom.

Novi Sad, 07. oktobar 2009. Milena Radosavljević

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO – MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj: RBR	
Identifikacioni broj: IBR	
Tip dokumentacije: TD	*Monografska dokumentacija*
Tip zapisa: TZ	*Tekstualni štampani materijal*
Vrsta rada: VR	*Završni rad*
Autor: AU	*Milena Radosavljević*
Mentor: MN	*Dr Zorana Lužanin*
Naslov rada: NR	*Određivanje ravnotežne cene*
Jezik publikacije: JP	*Srpski (latinica)*
Jezik izvoda: JI	*s/e*
Zemlja publikovanja: ZP	*Republika Srbija*
Uže geografsko područje: UGP	*Vojvodina*
Godina:	*2009*

GO

Izdavač: *Autorski reprint*

IZ

Mesto i adresa: *Trg Dositeja Obradovića 4, 21000 Novi Sad*

MA

Fizički opis: *5 poglavlja/ 58 strana / 8 lit. citata/ 3 tabela/ 17 slika*

FO

Naučna oblast: *Matematika*

NO

Naučna disciplina: *Primenjena matematika*

ND

Ključne reči: *Ravnotežne cene, teorija određivanja cena, teorija igara, Nash – ov ekvilibrijum*

PO UDK

Čuva se: *u biblioteci Departmana za matematiku i informatiku Prirodno – matematičkog fakulteta u NovomSadu*

ČU

Izvod: *Tema ovog rada je određivanje ravnotežne cene na tržištu Najpre je predstavljena matematička teorija koja je potrebna za razumevanje modela koji su u nastavku. Zatim su detaljno predstavljeni modeli za određivanje ravnotežne cene. Na kraju je praktičnim primerom proverno kako modeli „rade“.*

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: *Jul 2009.*

DP

Datum odbrane: *Oktobar 2009.*

DO

Članovi komisije:

Predsednik: *Dr Nenad Teofanov, vanredni profesor*
Član: *Dr Zorana Lužanin, redovni profesor*
Član: *Dr Danijela Rajter - Ćirić, vanredni profesor*

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number: ANO	
Identification number: INO	
Document type: DT	*Monograph type*
Type of record: TR	*Printed text*
Contents code: CC	*Final exam*
Author: AU	*Milena Radosavljević*
Mentor: MN	*Dr Zorana Lužanin*
Title: XI	*Eqilibrium sales prices*
Language of text: LT	*Serbian (latin)*
Language of abstract: LA	*s/e*
Country of publication: CP	*Republic of Serbia*
Locality of publication: UGP	*Vojvodina*
Publication year:	*2009*

PU

Publisher: *Auhtor's reprint*

PU

Publ. place: *Trg Dositeja Obradovića 4, 21000 Novi Sad*

PP

Physical description: 5 *chapters/ 58 pages/8 references /3 tables/ 17 pictures*

PD

Scientific field: *Mathematics*

SF

Scientific discipline: *Applied Mathematics*

SD

Key words: *eqilibrium prices, pricing theory, advertajzing prices,market eqilibrium, Nash eqilibrium,*

UC

Holding data: *Department of Mathematics and Informatics' Library, Faculty of Science, Novi Sad*

HD

Abstract: *Framework of this paper is eqilibrium sales prices. It considers targeting inflation, exchange rate pass-through into import goods.*

AB

Accepted by the Scientific Board on: *July 2009.*

Defended: *Oktobar 2009.*

Thesis defend board: *Dr Nenad Teofanov, associate professor*

Member: *Dr Zorana Lužanin, full professor*

Member: *Dr Danijela Rajter - Ćirić, associate professor*