



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ
ФАКУЛТЕТ
ДЕПАРТМАН ЗА МАТЕМАТИКУ И
ИНФОРМАТИКУ



Милана Павић

БОЛЦМАНОВА ЈЕДНАЧИНА И ЧЕПМЕН-ЕНСКОГОВ МЕТОД

- мастер рад -

Нови Сад, 2010

Садржај

Предговор	5
1 Болцманова једначина	9
1.1 Појам функције расподеле	9
1.2 Болцманова једначина	11
1.2.1 Временска еволуција функције расподеле	11
1.2.2 Колизионни интеграл	12
1.3 Дефинисање макроскопских величина помоћу функције расподеле	13
1.4 Услов равнотеже и колизионе инваријанте	15
1.5 Густине и протоци макроскопских величина	18
1.6 Закони одржања	19
1.7 Појам притиска	19
1.8 Колизионни модели	22
2 Чепмен-Енскогов метод	27
2.1 Бездимензионисање Болцманове једначине и ES-BGK модела	27
2.2 Чепмен-Енскогов развој	30
2.2.1 Услови компатибилности	31
2.3 Развој закона одржања	36
2.4 Чепмен-Енскогов развој за ES-BGK модел	37
2.5 Апроксимација нултог реда	41
2.6 Апроксимација првог реда	42
3 Поређење Хилбертовог и Чепмен-Енскоговог метода	51
3.1 Основне дефиниције	51
3.2 Хилбертов метод	52
3.3 Чепмен-Енскогов метод	59

Закључак	61
-----------------	-----------

Литература	63
-------------------	-----------

Предговор

Овај рад је посвећен анализи Болцманове једначине помоћу Чепмен-Енско-говог метода. У питању је формални асимптотски метод којим се, полазећи од Болцманове једначине могу извести једначине класичне хидродинамике - Навије-Стоксове једначине и Фуријеов закон провођења топлоте.

Мотивисани смо динамичким описивањем стања гаса запремине Z , при чему је гас једноатомски, а судари између молекула гаса бинарни и идеално еластични. Физички, стање гаса би се могло описати уколико бисмо знали стање кретања сваког атома који тај гас чини, односно уколико би нам били познати вектори положаја и брзине сваког од њих у било ком тренутку времена t . Практично, то би значило решавање система диференцијалних једначина кретања сваког од атома. Како је број молекула гаса у само једном кубном центиметру при нормалним условима (температура $t = 0^\circ\text{C}$ и притисак $p = 101\,325\text{ Pa}$) око $2.7 \cdot 10^{19}$, решавање система постаје немогуће, и то из два разлога: с једне стране, број једначина постаје огроман и решавање је са становишта нумеричке математике веома скупо, а са друге стране почетни услови система су нам у општем случају непознати јер је немогуће да за сваки атом одредимо тачне положаје и брзине у неком тренутку времена. Стога је развијен статистички приступ проблему.

Прва глава *Болцманова једначина* састоји се од осам одељака. У *првом одељку* се дефинише основни алат статистичког приступа, функција расподеле. Како нас занима стање гаса у сваком тренутку времена t и које је описано функцијом расподеле, управо њена временска еволуција представља основну једначину, која је добила име по аустријском физичару Л. Е. Болцману¹, Болцманова једначина. Наведена једначина, као и нека њена основна својства су објашњена у *другом одељку*. Макроскопске величине, густина, средња брзина гаса и енергија, се добијају као моменти нормализоване функције расподеле. Такође, може се повући паралела са теори-

¹ Ludwig Eduard Boltzmann (1844-1906), аустријски физичар

јом вероватноће. Ово је детаљно извођено у *шрећем одељку*. Потом, у *четвртом одељку* дефинишемо услов равнотеже, као и његову слабу формулацију. Долазимо до тест функција, колизионих инваријанти, које омогућавају испуњавање овог услова. Из општег облика колизионих инваријанти изводимо функцију расподеле која одговара стању равнотеже, Максвелову расподелу, као и локалну Максвелову расподелу. Такође, колизионе инваријанте нам омогућавају да формулишемо изразе за густине и протоке макроскопских величина. С тим у вези је следећи, *петти одељак*. Као природан наставак, следи *шести одељак* где изводимо законе одражања масе, количине кретања и енергије. *Седми одељак* је увертира за начин размишљања који ће се провлачити кроз цео рад. Тачније, објашњавамо идеју описивања неравнотежних процеса тако што изразе за одређене величине раздвајамо на неравнотежне и равнотежне делове. У овом поглављу је идеја демонстрирана при дефинисању појма притиска. *Осми одељак* је посвећен моделима колизионог интеграла, колизионим моделима, који су уведени у кинетичку теорију 60-тих година ради поједностављења Болцманове једначине. Наводимо BGK модел, један од најпопуларнијих, и његову модификацију, ES-BGK модел. Показало се да колизионни модели дају коректне резултате при описивању стања гаса које не одступа много од равнотеже.

Друга глава Чепмен-Енскогов метод има шест одељака. Закони одржања масе, количине кретања и енергије представљају систем пет једначина са тринаест непознатих. Један од метода затварања тог система је Чепмен-Енскогов метод. Идеја је следећа: развити решење Болцманове једначине у ред по малом параметру, а истовремено извршити и формални развој закона одржања, који ће нам дати развој карактеристика неравнотежних процеса-показаће се да су то тензор притиска и вектор топлотног протока. У *првом одељку* се изводи бездимензионисање Болцманове једначине, са оригиналним колизионим интегралом и ES-BGK моделом, које омогућава детектовање малог параметра у једначини. Показује се да је мали параметар у ствари тзв. Кнудсенов број и да се његова реципрочна вредност појављује уз колициони интеграл, односно колициони модел. Такође, врши се класификација разређености гаса на основу Кнудсеновог броја. Чепмен-Енскогов метод се примењује на гасове са малом вредношћу Кнудсеновог броја. У *другом одељку* детаљно изводимо развој у ред решења Болцманове једначине Чепмен-Енскоговим методом, као и услове решивости или услове компатибилности. Потом, у *шрећем одељку* вршимо формални развој у ред закона одржања. Чепмен-Енскогов метод за ES-BGK модел је тема

наредног, *четвртог одељка*. У овом поглављу добијамо конкретан облик анизотропне Гаусове расподеле у нултој и првој апроксимацији. То нам омогућава добијање апроксимације до првог реда било које функције расподеле. Апроксимација нултог реда нас води до Ојлерових једначина, што је разматрано у *петом одељку*. У *шестом одељку* се изводи апроксимација првог реда решења Болцманове једначине, као и елемената тензора притиска и вектора топлотног протока који се доводе у везу са конститутивним једначинама у макроскопским Навије-Стоксовим једначинама и Фуријеовим законом. Овим је показано да су две теорије које се односе на моделирање понашања гаса на микро и макро нивоу дубоко повезане.

Трећа глава *Поређење Хилбертовог и Чепмен-Енсковог метода* има три одељка. Циљ овог поглавља је да се укаже на могућност представљања у операторској форми свих резултата добијених у другој глави. Најпре треба увести основне дефиниције, што је и урађено у *првом одељку*. *Други одељак* је посвећен Хилбертовом методу. Без детаљног извођења наводимо систем једначина којима се одређују итерације у развоју функције расподеле. Потом, дефинишемо оператор чија ће нам псеудо-инверзија дати експлицитно изразе за све итерације. Затим изводимо базу нула простора овог оператора, као и простор слика. Показаћемо такође да је простор слика заправо ортогонални комплемент нула простора, што ће нам омогућити да дефинишемо пројектор функције расподеле на нула простор. Помоћу пројектора и псеудо-инверзија свака једначина полазног система се раздваја на две. У *трећем одељку* се бавимо једном верзијом Чепмен-Енсковог метода која се односи на побољшање Хилбертовог метода.

Списак литературе је дат на крају рада.

Глава 1

Болцманова једначина

1.1 Појам функције расподеле

Посматрамо гас запремине Z . За фиксирани елемент запремине $d\mathbf{x} = (\mathbf{x}, \mathbf{x} + d\mathbf{x})$ у простору Z брзина атома се мења са временом t . Фактори који утичу на промену брзине атома су судари са другим атомима и флукс (проток кроз дати елемент запремине $d\mathbf{x}$), и они су случајног карактера. Дакле, брзина атома је случајна функција времена, односно стохастички процес, у ознаци $\{\mathbf{V}(t), t \geq 0\}$.

Ако фиксирамо и временски тренутак t добијамо случајну променљиву $\mathbf{V}$ која представља брзину атома у елементу запремине $d\mathbf{x}$.

Дефиниција 1.1.1. Број атома у јединици запремине $d\mathbf{x}$ са брзином у интервалу $[\mathbf{v}, \mathbf{v} + d\mathbf{v}]$ је:

$$\int_{\mathbf{v}}^{\mathbf{v}+d\mathbf{v}} f d\mathbf{v}, \quad (1.1)$$

где се f назива функција расподеле ¹.

У општем случају, функција f је функција времена, положаја и брзине, $f = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$. Фиксирајући временски тренутак t и елементарну запремину $d\mathbf{x}$ простора Z , у елементарној запремини $d\mathbf{v}$ простора брзине се због малих промена функције f може сматрати да је она константна функција

¹Функција f се назива *функцијом расподеле* из традиционалних разлога и овај назив се не односи на појам функције расподеле у теорији вероватноће

$f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \approx \text{const.}$ Претходни израз (1.1) постаје:

$$\int_{\mathbf{v}}^{\mathbf{v}+d\mathbf{v}} f d\mathbf{v} \approx f \int_{\mathbf{v}}^{\mathbf{v}+d\mathbf{v}} d\mathbf{v} = f d\mathbf{v}.$$

Из претходне дефиниције следи да је број атома у јединици запремине $d\mathbf{x}$ са било којом брзином ² или бројна густина атома, у ознаци n :

$$n = \int_{\mathbb{R}^3} f d\mathbf{v}. \quad (1.2)$$

Вероватноћа да атом има брзину у интервалу $[\mathbf{v}, \mathbf{v}+d\mathbf{v}]$ се може одредити као „релативна учестаност“: количник броја атома у јединици запремине са брзином у интервалу $[\mathbf{v}, \mathbf{v}+d\mathbf{v}]$ и броја атома у јединици запремине са било којом брзином:

$$P\{\mathbf{V} \in [\mathbf{v}, \mathbf{v}+d\mathbf{v}]\} = \frac{\int_{\mathbf{v}}^{\mathbf{v}+d\mathbf{v}} f d\mathbf{v}}{\int_{\mathbb{R}^3} f d\mathbf{v}} = \int_{\mathbf{v}}^{\mathbf{v}+d\mathbf{v}} \frac{f}{n} d\mathbf{v}. \quad (1.3)$$

Видимо, густина расподеле случајне променљиве $\mathbf{V}$, која представља брзину атома који се налази у фиксираним елемент запремине $d\mathbf{x}$ у тренутка t , у ознаци $\varphi_{\mathbf{V}}$, је:

$$\varphi_{\mathbf{V}} = \frac{f}{n}. \quad (1.4)$$

Једна од особина густине расподеле случајне променљиве је [5]

$$\int_{\mathbb{R}^3} \varphi_{\mathbf{V}} d\mathbf{v} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f}{n} d\mathbf{v} = 1.$$

Физички, ово би значило да сваки атом мора да има неку брзину, односно вероватноћа да брзину атома захтевамо било где у простору брзина је једнака јединици.

Дефиниција 1.1.2. Укупан број атома у запремини Z , у ознаци N , је:

$$N = \int_Z \int_{\mathbb{R}^3} f d\mathbf{v} d\mathbf{x}.$$

На основу претходних разматрања, минимални „а priori“ услов за функцију расподеле јесте да за свако $t \geq 0$ важи

$$f(t, \cdot, \cdot) \in L_{loc}^1(Z; L^1(\mathbb{R}^3)).$$

²при томе занемарујемо релативистичке ефекте

1.2 Болцманова једначина

Током процеса судара долази до промене количине кретања и енергије атома, што проузрокује и промену функције расподеле у времену и простору. Једначина која описује слободно кретање атома, као и његову промену због судара са другим атомима током свог кретања је Болцманова једначина [2, 4].

1.2.1 Временска еволуција функције расподеле

Слободно кретање атома по његовој трајекторији подразумева одсуство судара са другим атомима што има за последицу инваријантност функције расподеле дуж трајекторије атома. Односно, f задовољава:

$$\frac{df}{dt} = 0.$$

Ако се у разматрања узму и судари, онда се функција расподеле мења током времена. Тада је неопходно увести величину, у ознаци $Q(f, f)$, која описује брзину те промене у елементарној запремини дуж трајекторије атома:

$$\frac{df}{dt} = Q(f, f). \quad (1.5)$$

Величина $Q(f, f)$ се назива колизионим оператором или колизионим интегралом, а једначина Болцмановом једначином, која ће добити свој коначан облик након детаљног разматрања обе стране једначине.

Како је у општем случају $f = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$, при чему су и положај $\mathbf{x}$ и брзина $\mathbf{v}$ функције времена, тотални диференцијал је:

$$\frac{d}{dt} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \frac{1}{m} \mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f, \quad (1.6)$$

где је $\mathbf{F}$ резултанта спољашњих сила које делују на гас запремине Z . Како нас занима само интеракција између молекула гаса, уводимо нову претпоставку да дејство спољашњих сила занемарујемо. Коначно, временска еволуција функције расподеле записана у векторској нотацији је:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f,$$

а у индексној:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Горњи израз представља леву страну Болцманове једначине, па је на основу (1.5) Болцманова једначина облика

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = Q(f, f). \quad (1.7)$$

Преостаје нам још да одредимо десну страну једначине, односно облик колизионог интеграла за посматрани проблем једноатомских гасова.

1.2.2 Колизиони интеграл

Колизиони интеграл $Q(f, f)$ као мера промене функције расподеле током времена и у простору састоји се од два члана: апсорпционог $Q^+(f, f)$ и емисионог $Q^-(f, f)$:

$$Q(f, f) = Q^+(f, f) - Q^-(f, f). \quad (1.8)$$

Апсорпциони члан описује раст функције f . Он је везан за случај тзв. инверзних судара, када атом било које брзине након судара има брзину у интервалу $[\mathbf{v}, \mathbf{v} + d\mathbf{v}]$, чиме се повећава постојећи број атома са датом брзином, те расте и функција f која описује тај број атома. Обрнуто, емисиони члан се односи на случај тзв. директних судара када атом са брзином из интервала $[\mathbf{v}, \mathbf{v} + d\mathbf{v}]$ након судара има неку другу брзину која не припада интервалу $[\mathbf{v}, \mathbf{v} + d\mathbf{v}]$ и тада функција f опада.

Уводећи претпоставку о молекуларном хаосу, можемо одредити број директних и инверзних судара у јединици запремине и у јединици времена тј. бројну густину директних, односно инверзних судара у јединици времена, што нам даље омогућава добијање израза за емисиони, односно апсорпциони члан.

Означимо са $f = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ и $f_1 = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_1)$ функције расподеле атома са брзинама пре судара у интервалу $[\mathbf{v}, \mathbf{v} + d\mathbf{v}]$ и $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + d\mathbf{v}_1]$, односно са $f' = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}')$ и $f'_1 = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}'_1)$ функције расподеле атома са одговарајућим брзинама после судара. При томе су брзине пре и после судара повезане колизионом трансформацијом [6]

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= \frac{\mathbf{v} + \mathbf{v}_1}{2} + \frac{|\mathbf{v} - \mathbf{v}_1|}{2} \boldsymbol{\Omega} \\ \mathbf{v}'_1 &= \frac{\mathbf{v} + \mathbf{v}_1}{2} - \frac{|\mathbf{v} - \mathbf{v}_1|}{2} \boldsymbol{\Omega}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

1.3. Дефинисање макроскопских величина помоћу функције расподеле 13

где је Ω вектор јединичне сфере $\Omega \in \mathbb{S}^2$. Једначине (1.9) следе из закона одржања количине кретања и енергије који важе за идеално еластичне сударе.

Емисиони и апсорпциони чланови су редом:

$$Q^-(f, f) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} f f_1 \mathcal{B} d\Omega d\mathbf{v}_1,$$

$$Q^+(f, f) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} f' f'_1 \mathcal{B} d\Omega d\mathbf{v}_1,$$

где је са $\mathcal{B}$ означено језгро које описује механизам интеракције молекула гаса и у случају модела еластичних куглица (модела са уведеном претпоставком о еластичним сударима између атома гаса, за које се претпоставља да су идеално глатке површине и које обично називамо куглицама) зависи од релативне брзине $\mathbf{v} - \mathbf{v}_1$, пречника куглице и вектора јединичне сфере Ω .

На основу (1.8) колизиони интеграл у случају модела еластичних куглица је:

$$Q(f, f) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} (f' f'_1 - f f_1) \mathcal{B} d\Omega d\mathbf{v}_1. \quad (1.10)$$

Горњи израз је истовремено и десна страна Болцманове једначине, а имајући у виду (1.7) добијамо коначни облик Болцманове једначине у случају модела еластичних куглица:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} (f' f'_1 - f f_1) \mathcal{B} d\Omega d\mathbf{v}_1. \quad (1.11)$$

1.3 Дефинисање макроскопских величина помоћу функције расподеле

У одељку 1.1 једначином (1.2) смо дефинисали бројну густину атома

$$n = \int_{\mathbb{R}^3} f d\mathbf{v}.$$

Множећи горњи израз масом атома добијамо густину масе или само густину

$$\rho = m n = m \int_{\mathbb{R}^3} f d\mathbf{v}. \quad (1.12)$$

Након утврђивања формалне везе између кинетичке теорије и теорије вероватноће, исказане дефиницијом (1.3), можемо извести неке закључке на основу познатих особина случајних променљивих апсолутно-непрекидног типа.

Посматрамо брзину атома у фиксираном временском тренутку t и фиксираној запремини dx као случајну променљиву $\mathbf{V}$ са густином расподеле (1.4). Математичко очекивање (моменат реда један) [5] ове случајне променљиве има физички смисао средње - макроскопске брзине гаса

$$\mathbf{u} = E(\mathbf{V}) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v} \frac{f}{n} d\mathbf{v}, \quad (1.13)$$

док се половина момента реда два физички интерпретира као енергија

$$W = \frac{1}{2} E(\mathbf{V}^2) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \frac{f}{n} d\mathbf{v}. \quad (1.14)$$

Уводимо појам релативне брзине $\mathbf{c}$ атома са брзином $\mathbf{v}$ у односу на средњу-макроскопску брзину $\mathbf{u}$ следећим изразом:

$$\mathbf{c} = \mathbf{v} - \mathbf{u}. \quad (1.15)$$

Ако посматрамо релативну брзину атома са брзином $\mathbf{V}$ у односу на средњу-макроскопску брзину $\mathbf{u}$ као случајну променљиву, у ознаци $\mathbf{C}$, њена очекивана вредност је једнака нули:

$$E(\mathbf{C}) = E(\mathbf{V} - \mathbf{u}) = E(\mathbf{V}) - \mathbf{u} = \mathbf{0},$$

имајући у виду да је $\mathbf{u} = \text{const}$ и особину математичког очекивања $E(c) = c$, за $c = \text{const}$. Значајан је моменат реда два ове случајне променљиве који има физички смисао унутрашње енергије

$$e = \frac{1}{2} E(\mathbf{C}^2) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} \mathbf{c}^2 \frac{f}{n} d\mathbf{v}. \quad (1.16)$$

Унутрашња енергија се доводи у везу са температуром T посредством калоричке једначине стања идеалног гаса

$$e = \frac{3}{2} \frac{k}{m} T, \quad (1.17)$$

где је са k означена Болцманова константа која износи $k = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$. Ради растерећења израза уводимо ознаку

$$\theta = \frac{k}{m} T, \quad (1.18)$$

а величину θ ћемо такође називати температуром, иако има димензије енергије.

Сада је унутрашња енергија дата са

$$e = \frac{3}{2} \theta.$$

Након увођења појма релативне брзине молекула у односу на средњу брзину гаса, можемо израз за енергију (1.14) раздвојити на два дела, кинетичку и унутрашњу енергију

$$W = \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + e.$$

1.4 Услов равнотеже и колизионе инваријанте

Кажемо да се гас налази у (строгој, глобалној) равнотежи ако су макроскопске величине густина ρ , средња брзина гаса $\mathbf{u}$ и температура T константе. Гледано микроскопски, услов равнотеже у строгом смислу можемо да формулишемо као [2]

$$Q(f, f) = 0, \quad (1.19)$$

односно с обзиром на Болцманову једначину (1.7) као константност функције расподеле f током времена и кроз целу запремину гаса Z (просторна хомогеност).

На основу израза за колизиони интеграл (1.10) видимо да је услов равнотеже у строгом смислу задовољен ако и само ако

$$f_E f_{1_E} = f'_E f'_{1_E}. \quad (1.20)$$

Логаритмовањем добијамо услов:

$$\ln f_E + \ln f_{1_E} = \ln f'_E + \ln f'_{1_E}. \quad (1.21)$$

Једина функција расподеле која задовољава овај услов је равнотежна или тзв. Максвелова расподела⁴, која је облика

$$f_E(\mathbf{v}) = \frac{\rho}{m (2\pi\theta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(\mathbf{v}-\mathbf{u})^2}{2\theta}}. \quad (1.22)$$

³ индекс E указује на „equilibrium“

⁴ James Clerk Maxwell (1831-1879), шкотски теоретски физичар и математичар

Ако задржимо исти функционални облик Максвелове расподеле, али допустимо локалну зависност макроскопских величина од времена и положаја (што нам је дозвољено јер колизиони интеграл не зависи експлицитно од t и $\mathbf{x}$), услов равнотеже у строгом смислу ће бити задовољен и у том смислу је ослабљена импликација Максвелове расподеле као једине функције расподеле која задовољава овај услов. Дакле, уводимо нову функцију расподеле тзв. локалну Максвелову расподелу

$$f_M(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \frac{\rho(t, \mathbf{x})}{m (2\pi\theta(t, \mathbf{x}))^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(\mathbf{v}-\mathbf{u}(t, \mathbf{x}))^2}{2\theta(t, \mathbf{x})}}. \quad (1.23)$$

Следеће питање које се намеће јесте да ли се може дефинисати и неки други услов равнотеже осим услова строге (глобалне) равнотеже, дефинисаног једначином (1.19) који задовољава искључиво Максвелова расподела (1.22), односно локална Максвелова расподела (1.23)? Пошто би тај услов допустио да функција расподеле буде различита од Максвелове, мора се обратити пажња на његову физичку интерпретацију. Одговор је позитиван уколико претходно формулишемо услов равнотеже у слабом смислу. Тиме мотивисани уводимо тест функцију ψ , која је функција брзине $\psi = \psi(\mathbf{v})$, и колизиони интергал (1.10) у слабој формулацији

$$\tilde{Q}(f, f) = \int_{\mathbb{R}^3} \psi(\mathbf{v}) Q(f, f) d\mathbf{v}. \quad (1.24)$$

Сада можемо да формулишемо услов равнотеже у слабом смислу:

$$\tilde{Q}(f, f) = 0. \quad (1.25)$$

Наш следећи задатак јесте да нађемо тест функције које задовољавају претходни услов за било коју функцију расподеле f . Уводимо билинеарни оператор који у извесном смислу представља уопштење колизионог интеграла (1.10):

$$Q(f, \bar{f}) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\Omega} (f' \bar{f}'_1 + \bar{f}' f'_1 - f \bar{f}_1 - \bar{f} f_1) \mathcal{B} d\Omega d\mathbf{v}_1. \quad (1.26)$$

Очигледно, за $f = \bar{f}$ (1.26) се своди на (1.10). Аналогно дефиницији слабе формулације колизионог интеграла (1.24), можемо да дефинишемо билинеарни оператор у слабој формулацији:

$$\tilde{Q}(f, \bar{f}) = \int_{\mathbb{R}^3} \psi(\mathbf{v}) Q(f, \bar{f}) d\mathbf{v}. \quad (1.27)$$

Може се показати да из закона одражања масе, количине кретања и енергије која важе током процеса еластичних судара добијамо израз

$$\tilde{Q}(f, \bar{f}) = \frac{1}{8} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\Omega} (f' \bar{f}'_1 + \bar{f}' f'_1 - f \bar{f}_1 - \bar{f} f_1) (\psi + \psi_1 - \psi' - \psi'_1) \mathcal{B} d\Omega dv_1 dv,$$

при чему су уведене ознаке

$$\begin{aligned} \psi &= \psi(\mathbf{v}) & \psi' &= \psi(\mathbf{v}') \\ \psi_1 &= \psi(\mathbf{v}_1) & \psi'_1 &= \psi(\mathbf{v}'_1). \end{aligned}$$

За $f = \bar{f}$ добијамо

$$\tilde{Q}(f, f) = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\Omega} (f' f'_1 - f f_1) (\psi + \psi_1 - \psi' - \psi'_1) \mathcal{B} d\Omega dv_1 dv,$$

односно

$$\tilde{Q}(f, f) = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} Q(f, f) (\psi + \psi_1 - \psi' - \psi'_1) d\mathbf{v}.$$

Можемо закључити да је услов равнотеже у слабом смислу задовољен ако и само ако је [2]

$$\psi(\mathbf{v}) + \psi(\mathbf{v}_1) - (\psi(\mathbf{v}') + \psi(\mathbf{v}'_1)) = 0.$$

Дефиниција 1.4.1. Колизионе инваријанте су тест функције које задовољавају једначину:

$$\psi(\mathbf{v}) + \psi(\mathbf{v}_1) = \psi(\mathbf{v}') + \psi(\mathbf{v}'_1) \quad (1.28)$$

за свако $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}', \mathbf{v}'_1$ из простора брзина које су повезане колизионом трансформацијом (1.9).

Колизионе инваријанте су следеће функције:

$$(1) \quad \psi_0 = 1$$

$$(2) \quad \psi_i = v_i \quad i = 1, 2, 3$$

$$(3) \quad \psi_4 = \mathbf{v}^2.$$

Општи облик колизионих инваријанти добијамо линеарном комбинацијом претходних пет:

$$\psi(\mathbf{v}) = a + \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + c \mathbf{v}^2, \quad (1.29)$$

где су a и c константе, а $\mathbf{b}$ константни вектор.

Напомена 1.4.1. Формулација Максвелове расподеле је могућа тек након извођења колизионих инваријанти. Наиме, из услова (1.21) видимо да равнотежна расподела f_E одређује колизиону инваријанту $\psi = \ln f_E$. С обзиром на (1.29), општи облик Максвелове расподеле је:

$$f_E = e^{a + \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + c \mathbf{v}^2},$$

где су a , $\mathbf{b}$, c константе. Коначан облик Максвелове расподеле се добија након одређивања ових константи.

1.5 Густине и протоци макроскопских величина

Колизионе инваријанте су се показале веома значајним при дефинисању густина макроскопских величина и њихових протока. Ако брзину атома у тренутку t и у фиксираној запремини $d\mathbf{x}$ посматрамо као случајну променљиву $\mathbf{V}$, онда колизионе инваријанте схватамо као функције случајне променљиве $\mathbf{V}$, те можемо одредити математичка очекивања:

$$m E(\psi(\mathbf{V})) = \int_{\mathbb{R}^3} m \psi(\mathbf{v}) \frac{f}{n} d\mathbf{v}. \quad (1.30)$$

Оне имају физички смисао густине макроскопских величина и то густине масе, количине кретања и енергије [6].

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{u} \\ 2\rho W \end{pmatrix} = \int_{\mathbb{R}^3} m \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{v}^2 \end{pmatrix} f d\mathbf{v}. \quad (1.31)$$

Проток макроскопске величине кроз површ нормалну на x_i осу у јединици времена је дат са:

$$\int_{\mathbb{R}^3} m v_i \psi_j f d\mathbf{v}, \quad (1.32)$$

где је са v_i означена пројекција брзине на x_i осу, за $i = 1, 2, 3$, а са ψ_j колизионе инваријанте, за $j = 0, 1, 2, 3, 4$.

Заменујући све колизионе инваријанте добијамо проток масе, количине кретања и енергије.

$$\int_{\mathbb{R}^3} m v_i \begin{pmatrix} 1 \\ v_j \\ \mathbf{v}^2 \end{pmatrix} f d\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \rho u_i \\ P_{ij} \\ 2Q_i \end{pmatrix}, \quad (1.33)$$

за $i, j = 1, 2, 3$.

1.6 Закони одржања

Ако Болцманову једначину

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = Q(f, f)$$

са леве стране помножимо масом атома m , а са десне колизионом инваријантом ψ_j , а затим поинтегралимо у простору брзина добијамо законе одржања масе, количине кретања и енергије

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^3} m \left(\frac{1}{v_j} \right) f d\mathbf{v} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\mathbb{R}^3} m v_i \left(\frac{1}{v_j} \right) f d\mathbf{v} = 0. \quad (1.34)$$

Сређивањем израза долазимо до коначног облика:

(1) закона одржања масе

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0, \quad (1.35)$$

(2) закона одржања количине кретања

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_j) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} P_{ij} = 0, \quad j = 1, 2, 3 \quad (1.36)$$

(3) закона одржања енергије

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho W) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} Q_i = 0. \quad (1.37)$$

1.7 Појам притиска

Притисак представља средњу вредност силе по јединици површине која делује на зид, а настаје као последица промене количине кретања у процесу судара атома гаса са зидом суда у којем се гас налази [10].

Познато је да је количина кретања једног молекула у правцу x_i осе

$$m v_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Како је број молекула у елементарној запремини $d\mathbf{x}$ једнак $f d\mathbf{v}$, количина кретања те елементарне запремине у правцу x_i је

$$m v_i f d\mathbf{v}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Вршећи интеграцију по брзини добијамо густину количине кретања за x_i осу:

$$\rho u_i = \int_{\mathbb{R}^3} m v_i f d\mathbf{v}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Проток количине кретања за x_i осу у правцу x_j осе је:

$$\int_{\mathbb{R}^3} (m v_i) v_j f d\mathbf{v} = P_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Уводећи релативну брзину (1.15), проток количине кретања се може раздвојити на два дела:

$$P_{ij} = \int_{\mathbb{R}^3} m u_i u_j f d\mathbf{v} + \int_{\mathbb{R}^3} m c_i c_j f d\mathbf{v} = \underbrace{\rho u_i u_j}_{\text{макроскопски}} + \underbrace{p_{ij}}_{\text{микроскопски}}. \quad (1.38)$$

Први део израза, макроскопски (конвективни) део, представља проток количине кретања који настаје због кретања целокупне запремине гаса. Други део, микроскопски (неконвективни), је релативни проток количине кретања који настаје због хаотичног кретања молекула гаса унутар запремине. Њега зовемо тензором притиска. Тензор притиска се представља матрично, у ознаци $\mathbf{p}$, и сада ћемо детаљно разматрати облик те матрице. За сада знамо да је она формата 3×3 .

Посматрајмо локалну Максвелову расподелу (1.23)

$$f_M = \frac{\rho}{m (2\pi\theta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\mathbf{c}^2}{2\theta}}.$$

Није тешко показати да је тензор притиска у случају ове функције расподеле облика

$$p_{ij}^E = \begin{cases} p^E, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Дакле, дијагонални елементи су сви једнаки, што је последица изотропије гаса, и важи:

$$p^E = \frac{1}{3} \text{tr} \underline{p}.$$

На основу једначине стања идеалног гаса, важи следеће:

$$p^E = \rho \theta. \quad (1.39)$$

Дефинишимо сада појам тензора притиска у општем случају тј. за било коју функцију расподеле у неравнотежном процесу. Идеја је да тензор притиска „раздвојимо“ на два дела и то на равнотежни и неравнотежни део. Вођени претходним разматрањима за Максвелову расподелу, дефинишемо

$$p = \frac{1}{3}(p_{11} + p_{22} + p_{33}). \quad (1.40)$$

Равнотежни део тензора притиска неравнотежног процеса ће бити дијагонална матрица $[p\delta_{ij}]_{i,j=1}^3$, док ће неравнотежни део бити матрица $\sigma = [\sigma_{ij}]_{i,j=1}^3$. Дакле, тензор притиска у општем случају је облика

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}.$$

Приметимо да је у равнотежи матрица σ нула матрица.

Особине матрице $\mathbf{p}$ су:

- (1) на основу дефиниције тензора притиска (1.38), матрица $\mathbf{p}$ је симетрична, одакле следи да и матрица σ мора бити симетрична,

- (2)

$$tr \sigma = 0, \quad (1.41)$$

јер важи

$$tr \mathbf{p} = p + \sigma_{11} + p + \sigma_{22} + p + \sigma_{33},$$

па на основу дефиниције (1.40)

$$tr \mathbf{p} = 3p$$

следи

$$\sum_{k=1}^3 \sigma_{kk} = 0.$$

1.8 Колизионни модели

Колициони интеграл због своје сложене структуре представља главну пре-преку решавању Болцманове једначине. Једна од идеја разрешења овог проблема је конструкција модела колиционог интеграла, који би поједноставио Болцманову једначину, а истовремено поседовао главне особине оригиналног колиционог интеграла.

Најважније особине колиционог интеграла су [10]:

- (1) обезбеђује одржање масе, количине кретања и енергије

$$m \int_{\mathbb{R}^3} Q(f, f) d\mathbf{v} = 0, \quad m \int_{\mathbb{R}^3} v_i Q(f, f) d\mathbf{v} = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$m \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{v}^2}{2} Q(f, f) d\mathbf{v} = 0,$$

- (2) продукција ентропије је увек непозитивна

$$\Sigma = \int_{\mathbb{R}^3} Q(f, f) (\ln f + 1) d\mathbf{v} \leq 0,$$

- (3) равнотежном стању одговара (локална) Максвелова расподела

$$Q(f, f) = 0 \iff f = f_M.$$

Моделе који задовољавају ове услове називамо колизионим моделима. У овом поглављу ћемо се бавити најпознатијим колизионим моделом, BGK⁵ моделом, као и једном његовом модификацијом ES-BGK⁶ моделом [8].

Колициони интеграл је у општем случају различит од нуле за $f \neq f_M$. У том смислу он је мера одступања функције расподеле односно стања гаса од локалне равнотеже. Основна идеја је да се ово својство колиционог интеграла опише једноставнијим моделом. Најједноставнији колициони модел „мери“ одступање функције расподеле f од неке референтне расподеле f_r

$$Q_r = -\nu(f - f_r), \tag{1.42}$$

⁵ Bhatnagar-Gross-Krook

⁶ ellipsoidal statistical BGK model

где је са $\nu = \nu(\rho, T)$ означена колизиона фреквенција, односно бројна густина судара

$$\nu = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} f_1 \mathcal{B} d\Omega d\mathbf{v}_1.$$

Као први модел који је урађен по овом концепту јавља се BGK модел. Врло природно с обзиром да желимо да опишемо понашање гаса у стању блиском равнотежи, за референтну функцију расподеле бира се Максвелова расподела. У том случају колизиони модел (1.42) је облика

$$Q_{BGK} = -\nu(f - f_M), \quad (1.43)$$

и њега називамо BGK моделом.

Иако један од најпопуларнијих кинетичких модела, показало се да не даје коректну вредност Прантловог броја Pr , који представља меру односа транспортних коефицијената-коефицијента вискозности и коефицијента топлотне проводљивости [10]. За једноатомске гасове мерена вредност Прантловог броја је

$$Pr \simeq \frac{2}{3},$$

док се коришћењем BGK модела добија $Pr = 1$. Детаљна рачуница следи у одељку 2.6.

Мотивисана добијањем тачне вредности Прантловог броја, уводи се модификација BGK модела тзв. ES-BGK модел. Основна идеја самог облика колизионог модела (1.42) остаје иста, док се модификација односи на замену Максвелове расподеле тзв. анизотропном Гаусовом расподелом f_{ES} .

Максвелова расподела (1.23)

$$f_M = \frac{\rho}{m (2\pi\theta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\mathbf{c}^2}{2\theta}}$$

се може записати у облику

$$f_M = \frac{\rho}{m} \frac{1}{\sqrt{\det[2\pi\Lambda_E]}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 c_i \lambda_{E_{ij}}^{-1} c_j},$$

где је

$$\Lambda_E = \begin{bmatrix} \theta & 0 & 0 \\ 0 & \theta & 0 \\ 0 & 0 & \theta \end{bmatrix}.$$

Детерминанта ове матрице и елементи инверзне су:

$$\det[\Lambda_E] = \theta^3 \quad \text{и} \quad \lambda_{Eij}^{-1} = \frac{1}{\theta},$$

па сада постаје очигледна једнакост записа. На основу једначине стања идеалног гаса (1.39) елементе матрице Λ_E можемо записати у облику

$$\lambda_{Eij} = \frac{1}{\rho} p \delta_{ij}.$$

При конструкцији анизотропне Гаусове функције расподеле користимо разматрања из претходног поглавља где смо дефинисали тензор притиска у општем случају, а на основу његове анализе у стању равнотеже. Аналогно тој идеји формулишемо елементе матрице Λ у општем случају као

$$\lambda_{ij} = \frac{1}{\rho} (p \delta_{ij} + b \sigma_{ij}), \quad (1.44)$$

где $b \in \mathbb{R}$. Уколико вратимо овај резултат у израз за Максвелову расподелу добијамо функцију расподеле

$$f_{ES} = \frac{\rho}{m} \frac{1}{\sqrt{\det[2\pi\Lambda]}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 c_i \lambda_{ij}^{-1} c_j}, \quad (1.45)$$

коју зовемо анизотропна Гаусова расподела.

Напомена 1.8.1. Да би формулација f_{ES} имала смисла захтева се да инверзна матрица Λ^{-1} буде позитивно дефинитна, што значајно редукује интервал вредности за параметар b и он се своди на

$$b \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right].$$

Можемо закључити да смо на изврстан начин одсупили од равнотеже тако што смо увели неравнотежне елементе тензора притиска у израз за равнотежну расподелу. Дакле, бирајући f_{ES} за референту функцију расподеле добијамо да је колизиони модел (1.42) облика

$$Q_{ES} = -\nu(f - f_{ES}), \quad (1.46)$$

који се назива ES-BGK модел. Касније ћемо показати да овај модел обезбеђује добијање тачне вредности Прантловог броја, што доприноси његовој популарности.

Напомена 1.8.2. Префикс „елипосидно статистички“ је мотивисан геометријском интерпретацијом квадратне форме

$$q(c_1, c_2, c_3) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_i \lambda_{ij}^{-1} c_j.$$

За матрицу Λ_E^{-1} квадратна форма је облика

$$q_E(c_1, c_2, c_3) = \frac{1}{\theta} (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2).$$

Како је у равнотежи температура, одређена чланом θ , константна по брзини следи да је ниво скуп квадратне форме q_E

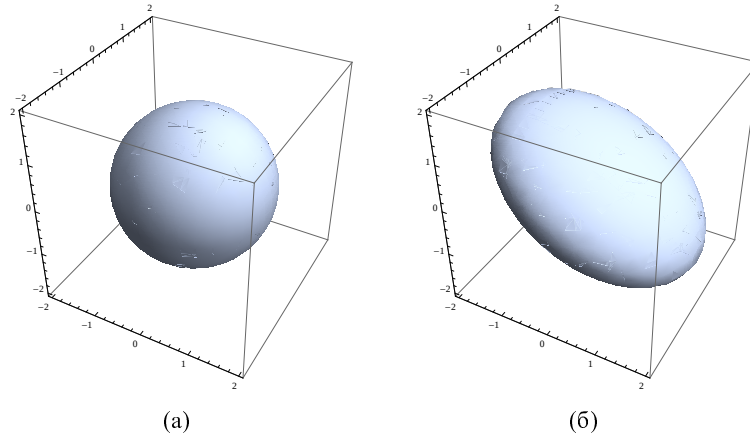
$$\{(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3 : q_E(c_1, c_2, c_3) = c\}$$

сфера са центром у $(0, 0, 0)$ и радијусом $\sqrt{c}$.

У општем случају, како је матрица Λ по дефиницији позитивно дефинитна, следи да је ниво скуп квадратне форме q

$$\{(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3 : q(c_1, c_2, c_3) = c\}$$

елипсоид, одакле и потиче назив за ES-BGK модел.



Слика 1.1: Ниво скуп квадратне форме која одговара: Максвеловој расподели (а) и анизотропној Гаусовој расподели (б)

Глава 2

Чепмен-Енскогов метод

2.1 Бездимензионисање Болцманове једначине и ES-BGK модела

Димензиона анализа се заснива на једном једноставном принципу: ако једначина моделира физичку појаву, онда сви чланови у једначини одвојени знаковима $+$, $-$ или $=$ морају имати исте физичке димензије. За означавање димензије неке величине користимо стандардну нотацију - угласте заграде. Све јединице се изводе из димензионе анализе.

Међутим, у анализи конкретних проблема показало се корисним да се једначине посматрају у бездимензијском облику. Он се постиже скалирањем - поређењем стварних вредности физичких величина са изабраним референтним вредностима. На тај начин се добијају једначине у којима су физички параметри обједињени једном или више бездимензијских група. То омогућује идентификацију чланова у посматраном моделу чији је утицај занемарљив (или пак значајан), а у математичком смислу отвара врата за примену асимптотских метода решавања проблема.

Са циљем да извршимо бездимензионисање Болцманове једначине, посматрамо општи случај (1.6)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{m} F_i \frac{\partial f}{\partial v_i} = \int \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} (f' f'_1 - f f_1) \mathcal{B} \, d\Omega \, dv_1.$$

Први корак је бездимензионисање променљивих. Независно променљиве скалирамо у односу на њихове референтне вредности, док зависно променљиве скалирамо преко референтних вредности независно променљивих, а према одговарајућој формули која одређује њихов однос. Па тако, уводећи

следеће ознаке

L – референтна дужина,
 V – референтна брзина,
 T – референтно време,
 n_0 – референтни број молекула у јединици запремине,

као и ознаку „ $\widehat{}$ “ за бездимензијску променљиву, можемо да бездимензионишемо:

$$\mathbf{x} = L \widehat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{v} = V \widehat{\mathbf{v}}, \quad t = \frac{L}{V} \widehat{t}, \quad n = n_0 \widehat{n}, \quad f = \frac{n_0}{V^3} \widehat{f},$$

$$\frac{1}{m} \mathbf{F} = \frac{V^2}{L} \frac{1}{m} \widehat{\mathbf{F}}, \quad \mathcal{B} = (V\sqrt{2\pi}d^2) \widehat{\mathcal{B}},$$

где је d пречник молекула.

Следећи корак је да бездимензијске променљиве путем смене убацимо у Болцманову једначину. Тако добијамо:

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \widehat{t}} + \sum_{i=1}^3 \widehat{v}_i \frac{\partial \widehat{f}}{\partial \widehat{x}_i} + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{m} \widehat{F}_i \frac{\partial \widehat{f}}{\partial \widehat{v}_i} = L\sqrt{2\pi}d^2n_0 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} (\widehat{f}' \widehat{f}'_1 - \widehat{f} \widehat{f}_1) \widehat{\mathcal{B}} d\Omega d\widehat{\mathbf{v}}_1. \quad (2.1)$$

Сада смо стигли до кључне тачке у процесу бездимензионисања. Све променљиве које се јављају у претходној једначини су без димензија, а сви параметри су обједињени у једну бездимензијску групу

$$\text{Kn} = \frac{1}{L\sqrt{2\pi}d^2n_0} = \frac{\lambda}{L}, \quad (2.2)$$

познатој под називом Кнудсенов број. Са λ је означена средња вредност дужине слободног пута молекула. Дакле, Кнудсенов број нам говори о односу средње вредности дужине пута коју молекул пређе између два судара и карактеристичне дужине у посматраном процесу, и на тај начин нам даје информацију о разређености гаса. Наиме, уколико је $\text{Kn} \ll 1$ говоримо о густом (неразређеном) гасу, јер су присутни бројни судари, и у том случају Навије-Стоксове једначине и Фуријеов закон добро описују понашање гаса. Уколико је пак дужина слободног пута упоредива са референтом вредношћу L у питању је јако разређен гас када поменути модели не дају добре резултате. Прецизније, важи следећа класификација режима струјања гаса на основу Кнудсеновог броја [10]:

- $\text{Kn} \lesssim 0.01$ хидродинамички режим, добро описан Навије-Стоксовим једначинама и Фуријеовим законом
- $0.01 \lesssim \text{Kn} \lesssim 0.1$ режим струјања са „клизањем“ (slip-flow), када Навије-Стоксове једначине и Фуријеов закон још увек добро моделирају понашање гаса, али морају бити допуњени граничним условима који описују брзине и температуре на граници (velocity slip, temperature jump)
- $0.1 \lesssim \text{Kn} \lesssim 10$ транзициони режим, када Навије-Стоксове једначине и Фуријеов закон нису више употребљиви као модели, и када се захтева суптилнија анализа, која се постиже Болцмановом једначином или спољашњим макроскопским моделима
- $\text{Kn} \gtrsim 10$ слободно струјање, када судари између молекула не играју више важну улогу, и када су једино значајни судари молекула са зидом.

Тема овог рада је метод који се заснива на развоју функције расподеле и карактеристика неравнотежних процеса по Кнудсеновом броју. Уобичајено је да се након бездимензионисања ознака „ $\wedge$ “ уклони, те можемо записати Болцманову једначину (2.1)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{1}{\text{Kn}} Q(f, f),$$

при чему је враћена претпоставка о занемаривању спољашњих сила. Видимо да се на природан начин појавио параметар у једначини. Математички, вредност овог параметра нам говори о регуларности, односно сингуларности пертурбованог проблема. За мале вредности Кнудсеновог броја реч је о сингуларно пертурбованом проблему, односно хидродинамичком режиму струјања, којим ћемо се овде бавити. За јако разређене гасове Кнудсенов број је велик, па је десна страна једначине занемарљиво мала, што значи да је утицај моћумолекуларних судара, односно колизионог интеграла, на промену функције расподеле веома мали.

У даљем раду, бавимо се густим гасовима и улогу Кнудсеновог броја ће играти мали параметар ε . Болцманова једначина је сада:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{1}{\varepsilon} Q(f, f), \quad (2.3)$$

где је $|\varepsilon| \ll 1$.

Такође, можемо бездимензионисати и ES-BGK модел Болцманове једначине. Полазимо од ES-BGK модела колизионог интеграла (1.46)

$$Q_{\text{ES}} = -\nu(f - f_{\text{ES}}).$$

Ако за референтну вредност колизионе фреквенције изаберемо $\bar{\nu}$, можемо бездимензионисати

$$\hat{\nu} = \frac{1}{\bar{\nu}} \nu.$$

Сада је Болцманова једначина

$$\frac{n_0}{\bar{\nu}^2 L} \left(\frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{t}} + \sum_{i=1}^3 \hat{v}_i \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{x}_i} + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{m} \widehat{F_i} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{v}_i} \right) = -\bar{\nu} \frac{n_0}{\bar{\nu}^3} \hat{\nu} (\hat{f} - \hat{f}_{\text{ES}}),$$

односно

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{t}} + \sum_{i=1}^3 \hat{v}_i \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{x}_i} + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{m} \widehat{F_i} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{v}_i} = \bar{\nu} \frac{L}{\bar{\nu}} \hat{Q}_{\text{ES}}.$$

Како је

$$\text{Kn} = \frac{\bar{\nu}}{\bar{\nu} L} = \frac{\lambda}{L},$$

то је

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{1}{\text{Kn}} Q_{\text{ES}}, \quad (2.4)$$

након уклањања ознаке за бездимензијске величине и враћања претпоставке о занемаривању дејства спољашњих сила. Видимо, бездимензионисањем ES-BGK модела Болцманове једначине смо добили исти параметар уз исти члан као и код оригиналне Болцманове једначине. Дакле, ове две једначине припадају истој класи проблема, те се могу решавати на исти начин.

2.2 Чепмен-Енскогов развој

Идеја Чепмен¹-Енскоговог² метода јесте да се функција расподеле развије у ред по малом параметру ε [3, 4, 10]

$$f_{|CE} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k f^{(k)} = f^{(0)} + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + \varepsilon^3 f^{(3)} + \dots \quad (2.5)$$

¹ Sydney Chapman (1888-1970), енглески математичар и геофизичар

² David Enskog (1884-1947), шведски математички физичар

Из Болцманове једначине (2.3) следи

$$\varepsilon \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = Q(f, f).$$

Уколико функцију расподеле развијемо у ред (2.5) добијамо

$$\varepsilon \left(\frac{\partial f_{|CE}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial f_{|CE}}{\partial x_i} \right) = Q(f_{|CE}, f_{|CE})$$

или ако распишемо

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k+1} \left(\frac{\partial f^{(k)}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial f^{(k)}}{\partial x_i} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \left(f'^{(k)} f_1'^{(k)} - f^{(k)} f_1^{(k)} \right) \mathcal{B} d\Omega d\mathbf{v}_1.$$

Групишемо по једнаким степенима ε , и за нулти степен добијамо

$$\varepsilon^0 : \quad 0 = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \left(f'^{(0)} f_1'^{(0)} - f^{(0)} f_1^{(0)} \right) \mathcal{B} d\Omega d\mathbf{v}_1 = Q(f^{(0)}, f^{(0)}),$$

одакле следи

$$f^{(0)} = f_M.$$

Дакле, функцију расподеле развијамо у околини локално равнотежне расподеле. Такав развој се назива Чепмен-Енскогов развој:

$$f_{|CE} = f_M + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + \varepsilon^3 f^{(3)} + \dots \quad (2.6)$$

2.2.1 Услови компатибилности

Помоћу локалне Максвелове расподеле f_M можемо да дефинишемо локално зависне од времена и положаја макроскопске величине густину, густину количине кретања и густину енергије:

$$\begin{pmatrix} \rho(t, \mathbf{x}) \\ \rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \\ 2\rho(t, \mathbf{x}) W(t, \mathbf{x}) = \rho \mathbf{u}^2 + 2\rho e \end{pmatrix} = \int_{\mathbb{R}^3} m \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{v}^2 \end{pmatrix} f_M d\mathbf{v}. \quad (2.7)$$

Са друге стране, за произвољну функцију расподеле f важи (1.31)

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{u} \\ 2\rho W \end{pmatrix} = \int_{\mathbb{R}^3} m \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{v}^2 \end{pmatrix} f d\mathbf{v}.$$

Уколико извршимо Чепмен-Енскогов развој (2.6) функције расподеле f добијамо

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{u} \\ 2\rho W = \rho \mathbf{u}^2 + 2\rho e \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \int m \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{u}^2 + \mathbf{c}^2 \end{pmatrix} f^{(k)} d\mathbf{v},$$

при чему $\rho = \rho(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ и $W = W(t, \mathbf{x})$. Расписујући последњи израз и имајући у виду (2.7) добијамо да је

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{u} \\ 2\rho e \end{pmatrix} &= \int_{\mathbb{R}^3} m \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{c}^2 \end{pmatrix} f^{(0)} d\mathbf{v} + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \int m \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{c}^2 \end{pmatrix} f^{(k)} d\mathbf{v} \\ &= \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{u} \\ 2\rho e \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \int m \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{c}^2 \end{pmatrix} f^{(k)} d\mathbf{v}, \end{aligned}$$

одакле следи да је

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \int m \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{c}^2 \end{pmatrix} f^{(k)} d\mathbf{v} = 0.$$

Како је ε мали параметар различит од нуле следи да је:

$$\int m \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{c}^2 \end{pmatrix} f^{(k)} d\mathbf{v} = 0, \quad \forall k \geq 1. \quad (2.8)$$

Услови (2.8) су познати као услови компатибилности. Они представљају основу идеје раздвајања одређених физичких величина на „равнотежни“ и „неравнотежни“ део, што ће бити објашњено у даљем тексту.

Проток количине кретања је дат са

$$P_{ij} = \int m v_i v_j f d\mathbf{v} = u_i u_j \int m f d\mathbf{v} + \int m c_i c_j f d\mathbf{v}.$$

Применујући Чепмен-Енскогов развој и разматрајући сваки члан засебно, као последицу услова компатибилности добијамо следеће:

$$\begin{aligned} u_i u_j \int m f_{|CE} d\mathbf{v} &= u_i u_j \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \int m f^{(k)} d\mathbf{v} \\ &= u_i u_j \int m f^{(0)} d\mathbf{v} + u_i u_j \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \int m f^{(k)} d\mathbf{v} \\ &= \rho u_i u_j, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{ij} &= \int m c_i c_j f_{|CE} d\mathbf{v} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \int m c_i c_j f^{(k)} d\mathbf{v} \\
&= \int m c_i c_j f^{(0)} d\mathbf{v} + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \int m c_i c_j f^{(k)} d\mathbf{v} \\
&= p \delta_{ij} + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \sigma_{ij}^{(k)}.
\end{aligned}$$

Одатле следи да је проток количине кретања у равнотежи

$$P_{ij} = \rho u_i u_j + p \delta_{ij},$$

што нас мотивише да ненула чланове уз степене ε веће од 1 идентификујемо као неравнотежне. Дакле, неравнотежни процеси описани члановима вишег реда $f^{(k)}$, $k \geq 1$, природно се одражавају на структуру тензора притиска и вектора топлотног протока одређујући њихов неравнотежни део.

Такође, вектор протока енергије разлажемо на основу разлагања брзине атома $\mathbf{v}$ на средњу брзину гаса $\mathbf{u}$ и релативну брзину $\mathbf{c}$ у односу на ту средњу брзину

$$\begin{aligned}
Q_i &= \int \frac{1}{2} m v_i \mathbf{v}^2 f d\mathbf{v} \\
&= \int \frac{1}{2} m u_i \mathbf{u}^2 f d\mathbf{v} + \int \frac{1}{2} m u_i \mathbf{c}^2 f d\mathbf{v} \\
&\quad + \int m c_i \mathbf{u} \cdot \mathbf{c} f d\mathbf{v} + \int \frac{1}{2} m c_i \mathbf{c}^2 f d\mathbf{v},
\end{aligned}$$

а потом развијемо функцију расподеле f у ред и анализирамо сваки члан засебно.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{2} m u_i \mathbf{u}^2 f_{|CE} d\mathbf{v} &= \frac{1}{2} m u_i \mathbf{u}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \int f^{(k)} d\mathbf{v} \\
&= \frac{1}{2} m u_i \mathbf{u}^2 \int f^{(0)} d\mathbf{v} + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \int f^{(k)} d\mathbf{v} \\
&= \frac{1}{2} m u_i \mathbf{u}^2 \rho,
\end{aligned}$$

при чему су анулирани чланови последица услова комаптибилности. Даље

ИМАМО:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{2} m u_i \mathbf{c}^2 f_{|CE} d\mathbf{v} &= \frac{1}{2} m u_i \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \int \mathbf{c}^2 f^{(k)} d\mathbf{v} \\
 &= \frac{1}{2} m u_i \int \mathbf{c}^2 f^{(0)} d\mathbf{v} + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \int \mathbf{c}^2 f^{(k)} d\mathbf{v} \\
 &= \rho e u_i,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int m c_i \mathbf{u} \cdot \mathbf{c} f_{|CE} d\mathbf{v} &= \int m c_i \left(\sum_{j=1}^3 u_j c_j \right) f_{|CE} d\mathbf{v} \\
 &= \sum_{j=1}^3 u_j \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \int m c_i c_j f^{(k)} d\mathbf{v} \\
 &= \sum_{j=1}^3 u_j \left(p \delta_{ij} + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \sigma_{ij}^{(k)} \right) \\
 &= p u_i + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \left(\sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}^{(k)} u_j \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{2} m c_i \mathbf{c}^2 f_{|CE} d\mathbf{v} &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \int \frac{1}{2} m c_i \mathbf{c}^2 f^{(k)} d\mathbf{v} \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k q_i^{(k)},
 \end{aligned}$$

јер је за $f = f_M$

$$\int \frac{1}{2} m c_i \mathbf{c}^2 f_M d\mathbf{v} = 0.$$

Видимо, код вектора протока енергије поред елемената тензора притиска σ_{ij} , као неравнотежни чланови се јављају и елементи вектора протока q_i . Заједничка особина им је да су једнаки нули у стању локалне равнотеже и представљају карактеристику неравнотежних процеса. Другим речима,

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^{(0)} : \quad P_{ij}^{(0)} &= \rho u_i u_j + p \delta_{ij} & Q_i^{(0)} &= \left(\frac{1}{2} m \mathbf{u}^2 \rho + \rho e + p \right) u_i \\
 \varepsilon^{(k)} : \quad P_{ij}^{(k)} &= \sigma_{ij}^{(k)} & Q_i^{(k)} &= \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}^{(k)} u_j + q_i^{(k)} \quad (2.9)
 \end{aligned}$$

где се елементи тензора притиска и вектора топлотног протока одређују као

$$\sigma_{ij}^{(k)} = \int m c_i c_j f^{(k)} d\mathbf{v} \quad q_i^{(k)} = \int \frac{1}{2} m c_i c^2 f^{(k)} d\mathbf{v}, \quad (2.10)$$

при чему је уведена нова ознака

$$[c_i c_j] = [c_i c_j] - \frac{1}{3} \text{tr} [c_i c_j] \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2.11)$$

мотивисана дефиницијом тензора притиска из које се може изразити тензор притиска

$$\sigma_{ij} = p_{ij} - p \delta_{ij} = m \int c_i c_j f d\mathbf{v} - \frac{1}{3} m \int (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) f d\mathbf{v}.$$

Закључујемо, идеја Чепмен-Енскоговог метода јесте да се решење Болцманове једначине развије у ред у околини равнотежне расподеле по малом параметру ε којим је означен Кнудсенов број добијен бездимензионисањем Болцманове једначине

$$f_{|CE} = f_M + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + \varepsilon^3 f^{(3)} + \dots$$

Као последица развијања у ред у околини локалне Максвелове расподеле јављају се услови компатибилности. Они раздвајају равнотежне и неравнотежне чланове у изразима за проток масе, количине кретања и енергије и самим тим дају идеју о могућем начину посматрања неравнотежних процеса са становишта кинетичке теорије. Идентификујући тензор притиска и вектор топлотног протока као неравнотежне следећи корак је да и њих развијемо у ред што ће нам омогућити њихово израчунавање

$$\sigma_{ij|CE} = \varepsilon \sigma_{ij}^{(1)} + \varepsilon^2 \sigma_{ij}^{(2)} + \varepsilon^3 \sigma_{ij}^{(3)} + \dots \quad (2.12)$$

$$q_{i|CE} = \varepsilon q_i^{(1)} + \varepsilon^2 q_i^{(2)} + \varepsilon^3 q_i^{(3)} + \dots \quad (2.13)$$

Апроксимација $f_{|CE}$ нултог реда нам даје Ојлерове једначине, првог реда Навије-Стоксове, као и Фуријеов закон провођења топлоте, што ће у овом раду детаљно бити извођено. Оно чиме се нећемо бавити су апроксимације вишег реда. Међутим, можемо споменути да нас апроксимација другог, односно трећег реда води до Барнетових, односно супер-Барнетових једначина.

2.3 Развој закона одржања

Једначине закона одржања масе (1.35), количине кретања (1.36) и енергије (1.37) након увођења смене

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

постају:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \sum_{i=1}^3 \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.14)$$

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (2.15)$$

$$\frac{3}{2} \rho \frac{D\theta}{Dt} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial q_i}{\partial x_i} = - \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 (p\delta_{ij} + \sigma_{ij}) \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \quad (2.16)$$

Напомена 2.3.1. Мотивација Чепмен-Енскоговог метода је заправо затварање горњег система једначина закона одржања. Наиме, систем чине пет једначина, док су непознате: густина ρ , три компоненте вектора средње брзине $\mathbf{u}$ и вектора топлотног протока $\mathbf{q}$, температура θ (која се доводи у везу са равнотежним притиском p посредством $p = \rho \theta$) и пет независних елемената тензора притиска (због (1.41) и симетричности), дакле укупно тринаест.

За даљи рад ће нам бити потребно увођење исте смене у Болцманову једначину (1.7)

$$\frac{Df}{Dt} + \sum_{i=1}^3 c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = Q(f, f). \quad (2.17)$$

Ако развоје (2.12) и (2.13) заменимо у законе одржања (2.14), (2.15) и (2.16) добијамо

$$\begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} &= -\rho \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \\ \frac{Du_i}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^k \frac{\partial \sigma_{ij}^{(k)}}{\partial x_j} \\ \frac{D\theta}{Dt} &= -\frac{2}{3} \theta \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^k \frac{\sigma_{ij}^{(k)}}{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^k \frac{\partial q_i^{(k)}}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Овакав запис нас мотивише да формално извршимо развој извода $\frac{D}{Dt}$ по малом параметру ε :

$$\frac{D}{Dt} = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \frac{D_k}{Dt} = \frac{D_0}{Dt} + \varepsilon \frac{D_1}{Dt} + \varepsilon^2 \frac{D_2}{Dt} + \dots, \quad (2.18)$$

Овај формални развој нам омогућава да „раздвојимо“ изразе закона одржања и то на следећи начин

$$\begin{aligned} \frac{D_0 \rho}{Dt} &= -\rho \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, & \frac{D_k \rho}{Dt} &= 0, \\ \frac{D_0 u_i}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}, & \frac{D_k u_i}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}^{(k)}}{\partial x_j}, \\ \frac{D_0 \theta}{Dt} &= -\frac{2}{3} \theta \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, & \frac{D_k \theta}{Dt} &= \frac{2}{3} \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}^{(k)} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial q_i^{(k)}}{\partial x_i}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

за $k \geq 1$.

Такође, извод локалне Максвелове расподеле можемо записати преко развоја (2.18)

$$\frac{D f_M}{Dt} = \frac{D_0 f_M}{Dt} + \varepsilon \frac{D_1 f_M}{Dt} + \dots$$

Како локална Максвелова расподела зависи од променљивих

$$U_A = \{\rho, \mathbf{u}, \theta\}, \quad (2.20)$$

на основу правила о изводу сложене функције следи да је

$$\frac{D_k f_M}{Dt} = \frac{\partial f_M}{\partial U_A} \frac{D_k U_A}{Dt},$$

где члан $\frac{D_k U_A}{Dt}$ рачунамо по горе објашњеној формули.

2.4 Чепмен-Енскогов развој за ES-BGK модел

Полазимо од Болцманове једначине (2.17) моделирајући колизиони интеграл ES-BGK моделом (1.46)

$$\frac{Df}{Dt} + \sum_{i=1}^3 c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = -\nu(f - f_{ES}).$$

Бездимензионисањем (2.4) смо утврдили место параметра у једначини

$$\frac{Df}{Dt} + \sum_{i=1}^3 c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{1}{\varepsilon} \nu(f - f_{ES}), \quad (2.21)$$

где мали параметар ε игра улогу Кнудсеновог броја.

Како за произвољну функцију расподеле важи Чепмен-Енскогов развој (2.6), тако важи и за елипсоидно-статистичку функцију расподеле

$$f_{ES|CE} = f_M + \varepsilon f_{ES}^{(1)} + \varepsilon^2 f_{ES}^{(2)} + \varepsilon^3 f_{ES}^{(3)} + \dots \quad (2.22)$$

Ако развоје функција расподеле (2.6) и (2.22) и (2.18) заменимо у једначину (2.21) добијамо

$$\frac{Df_{|CE}}{Dt} + \sum_{i=1}^3 c_i \frac{\partial f_{|CE}}{\partial x_i} = -\frac{1}{\varepsilon} \nu(f_{|CE} - f_{ES|CE}).$$

односно ако распишемо до првог реда

$$\begin{aligned} & \frac{D}{Dt} (f_M + \varepsilon f^{(1)}) + \sum_{i=1}^3 c_i \frac{\partial}{\partial x_i} (f_M + \varepsilon f^{(1)}) + \\ & + \nu \frac{1}{\varepsilon} (f_M + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} - (f_M + \varepsilon f_{ES}^{(1)} + \varepsilon^2 f_{ES}^{(2)})) = \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Скраћивањем добијамо

$$\begin{aligned} & \frac{D}{Dt} (f_M + \varepsilon f^{(1)}) + \sum_{i=1}^3 c_i \frac{\partial}{\partial x_i} (f_M + \varepsilon f^{(1)}) + \\ & + \nu (f^{(1)} - f_{ES}^{(1)} + \varepsilon(f^{(2)} - f_{ES}^{(2)})) = \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Можемо такође расписати и развој (2.18) до првог реда

$$\begin{aligned} & \left(\frac{D_0}{Dt} + \varepsilon \frac{D_1}{Dt} \right) (f_M + \varepsilon f^{(1)}) + \sum_{i=1}^3 c_i \frac{\partial}{\partial x_i} (f_M + \varepsilon f^{(1)}) + \\ & + \nu (f^{(1)} - f_{ES}^{(1)} + \varepsilon(f^{(2)} - f_{ES}^{(2)})) = \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Сређивањем коначно добијамо

$$\begin{aligned} & \frac{D_0 f_M}{Dt} + \sum_{i=1}^3 c_i \frac{\partial f_M}{\partial x_i} + \nu (f^{(1)} - f_{ES}^{(1)}) \\ & + \varepsilon \left[\frac{D_1 f_M}{Dt} + \frac{D_0 f^{(1)}}{Dt} + \sum_{i=1}^3 c_i \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_i} + \nu (f^{(2)} - f_{ES}^{(2)}) \right] = \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Видимо, ова једначина нам даје могућност да израчунамо чланове $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$. Како се у овом раду бавимо само апроксимацијом до првог реда, члан $f^{(2)}$ нам није потребан и овде је наведен ради илустрације. За добијање чланова $f^{(3)}$, за $k \geq 3$ потребно је у претходним извођењима разматрати и чланове развоја вишег реда.

Закључујемо, претходна једначина (2.23) представља први видљиви резултат у нашем настојању да добијемо апроксимацију првог реда решења Болцманове једначине. За то израчунавање нам је потребан члан $f_{ES}^{(1)}$ и због тога је наредна тема којом се бавимо одређивање коефицијената у Чепмен-Енскоговом развоју (2.22) за елипсоидно-статистичку функцију расподеле.

Полазимо од дефиниције елипсоидно-статистичке функције расподеле (1.45)

$$f_{ES} = \frac{\rho}{m} \frac{1}{\sqrt{\det[2\pi\Lambda]}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 c_i \lambda_{ij}^{-1} c_j},$$

где је Λ матрица формата 3×3 чији су елементи

$$\lambda_{ij} = \theta \delta_{ij} + \frac{b}{\rho} \sigma_{ij}, \quad (2.24)$$

за $i, j = 1, 2, 3$.

Идеја је следећа: користећи развој елемената тензора притиска σ_{ij} израчунати елементе λ_{ij} , расписати, а потом посматрати добијени израз као функцију од ε , коју развијамо у Тејлоров ред у околини нуле. Добијамо полином по ε чији су коефицијенти управо тражени чланови $f^{(k)}$.

Дакле, најпре елементе тензора притиска σ_{ij} развијемо у ред (2.12) и уврстимо у израз (2.24)

$$\lambda_{ij|CE} = \theta \delta_{ij} + \frac{b}{\rho} (\varepsilon \sigma_{ij}^{(1)} + \varepsilon^2 \sigma_{ij}^{(2)} + \dots).$$

Сада када знамо елементе матрице $\Lambda_{|CE}$ можемо израчунати њену детерминанту и елементе њој инверзне матрице:

$$\det[\Lambda_{|CE}] = \theta^3 \left[1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\frac{b}{p} \right)^2 \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \sigma_{mn}^{(1)} \sigma_{mn}^{(1)} \right] \quad (2.25)$$

$$\lambda_{ij|CE}^{-1} = \frac{1}{\theta} \delta_{ij} - \varepsilon \frac{b}{p\theta} \sigma_{ij}^{(1)} + \varepsilon^2 \frac{b}{p\theta} \left[\frac{b}{p} \sum_{m=1}^3 \sigma_{im}^{(1)} \sigma_{mj}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(2)} \right]. \quad (2.26)$$

Уколико овај резултат вратимо у једначину (1.45) добијамо да је десна страна једнака

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho}{m} \left[(2\pi\theta)^3 \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\frac{b}{p} \right)^2 \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \sigma_{mn}^{(1)} \sigma_{mn}^{(1)} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \\
& e^{-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 c_i \left[\frac{1}{\theta} \delta_{ij} - \varepsilon \frac{b}{p\theta} \sigma_{ij}^{(1)} + \varepsilon^2 \frac{b}{p\theta} \left[\frac{b}{p} \sum_{m=1}^3 \sigma_{im}^{(1)} \sigma_{mj}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(2)} \right] \right]} c_j \\
& = \frac{\rho}{m} \left[(2\pi\theta)^3 \left(1 - \varepsilon^2 \frac{1}{2} \left(\frac{b}{p} \right)^2 \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \sigma_{mn}^{(1)} \sigma_{mn}^{(1)} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \\
& e^{-\frac{\mathbf{c}^2}{2\theta} + \varepsilon \frac{b}{2p\theta} \sum_{i,j=1}^3 c_i \sigma_{ij}^{(1)} c_j - \varepsilon^2 \frac{b}{2p\theta} \sum_{i,j=1}^3 c_i \left[\frac{b}{p} \sum_{m=1}^3 \sigma_{im}^{(1)} \sigma_{mj}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(2)} \right] c_j}
\end{aligned}$$

Овај израз можемо да посматрамо као функцију од ε и то, ради једноставности као производ две функције:

$$F(\varepsilon) = \frac{\rho}{m} g(\varepsilon) \cdot h(\varepsilon),$$

где је

$$g(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{a + b\varepsilon^2}},$$

и

$$h(\varepsilon) = e^{p+q\varepsilon+r\varepsilon^2},$$

при чему су коефицијенти

$$\begin{aligned}
a &= (2\pi\theta)^3, \\
b &= \frac{1}{2} \left(\frac{b}{p} \right)^2 \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \sigma_{mn}^{(1)} \sigma_{mn}^{(1)}, \\
p &= -\frac{\mathbf{c}^2}{2\theta}, \\
q &= \frac{b}{2p\theta} \sum_{i,j=1}^3 c_i \sigma_{ij}^{(1)} c_j, \\
r &= \frac{b}{2p\theta} \sum_{i,j=1}^3 c_i \left[\frac{b}{p} \sum_{m=1}^3 \sigma_{im}^{(1)} \sigma_{mj}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(2)} \right] c_j.
\end{aligned}$$

Како у овом раду разматрамо само апроксимације функција расподеле највише првог реда, развијамо функцију $F(\varepsilon)$ у Тејлоров полином првог реда

у околини нуле:

$$\begin{aligned} F(\varepsilon) &\approx F(0) + F'(0)\varepsilon \\ &= \frac{\rho}{m} g(0) h(0) + \frac{\rho}{m} \left(g'(0) h(0) + g(0) h'(0) \right) \varepsilon \\ &= \frac{\rho}{m} \frac{1}{\sqrt{a}} e^p + \frac{\rho}{m} \frac{1}{\sqrt{a}} e^p q \varepsilon. \end{aligned}$$

Добили смо апроксимацију првог реда елипсоидно-статистичке функције расподеле:

$$f_{ES|CE} = \frac{\rho}{m} \frac{1}{\sqrt{a}} e^p + \frac{\rho}{m} q e^p \varepsilon.$$

Дакле, израчунали смо чланове

$$\begin{aligned} f_{ES}^{(0)} &= \frac{\rho}{m} \frac{1}{\sqrt{a}} e^p = \frac{\rho}{m} \frac{1}{\sqrt{(2\pi\theta)^3}} e^{-\frac{\mathbf{c}^2}{2\theta}} = f_M \\ f_{ES}^{(1)} &= f_M q \\ &= f_M \frac{b}{2p\theta} \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij}^{(1)} c_{\langle i} c_{j \rangle}, \end{aligned} \tag{2.27}$$

јер је на основу (2.11)

$$\sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij}^{(1)} c_i c_j = \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij}^{(1)} c_{\langle i} c_{j \rangle} + p^* \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij}^{(1)} \delta_{ij},$$

где је $p^* = \frac{1}{3} \mathbf{c}^2$. Како је на основу (1.41)

$$p^* \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij}^{(1)} \delta_{ij} = p^* \sum_i \sigma_{ii}^{(1)} = 0,$$

слиди тражени резултат.

2.5 Апроксимација нултог реда

Апроксимација решења Болцманове једначине нултог реда је локално равнотежна расподела

$$f^{(0)} = f_M.$$

Како се Чепмен-Енскоговим методом истовремено врши и формални развој закона одржања, нулта апроксимација овог развоја су, на основу (2.19), једначине

$$\begin{aligned}\frac{D\rho}{Dt} + \rho \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= 0 \\ \rho \frac{Du_i}{Dt} + \frac{\partial \rho \theta}{\partial x_i} &= 0 \\ \frac{3}{2} \rho \frac{D\theta}{Dt} + \rho \theta \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= 0.\end{aligned}$$

Ове једначине су познате Ојлерове једначине гасне динамике.

2.6 Апроксимација првог реда

Да бисмо одредили апроксимацију првог реда $f^{(1)}$ решења Болцманове једначине полазимо од формалног развоја Болцманове једначине са ES-BGK моделом (2.23). Изједначавамо са нулом коефицијент уз члан ε^0 и добијамо

$$f^{(1)} = f_{ES}^{(1)} - \frac{1}{\nu} \left[\frac{D_0 f_M}{Dt} + \sum_{i=1}^3 c_i \frac{\partial f_M}{\partial x_i} \right]. \quad (2.28)$$

Да бисмо лакше израчунали дате изводе Максвелове расподеле, користимо чињеницу да је диференцијал Максвелове расподеле, на основу правила о изводу сложене функције, дат са

$$df_M = f_M d(\ln f_M).$$

Сада (2.28) постаје

$$f^{(1)} = f_{ES}^{(1)} - \frac{1}{\nu} f_M \left[\frac{D_0 (\ln f_M)}{Dt} + \sum_{i=1}^3 c_i \frac{\partial (\ln f_M)}{\partial x_i} \right]. \quad (2.29)$$

Преостаје нам још да израчунамо одговарајуће изводе. На основу дефиниције Максвелове расподеле (1.22) је

$$\begin{aligned}\ln f_M &= \ln \left(\frac{\rho}{m} (2\pi\theta)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{(\mathbf{v}-\mathbf{u})^2}{2\theta}} \right) \\ &= \ln \left(\frac{\rho}{m} \right) - \frac{3}{2} \ln(2\pi\theta) - \frac{(\mathbf{v}-\mathbf{u})^2}{2\theta}.\end{aligned}$$

На основу (2.20) је $f_M = f_M(\rho, \theta, \mathbf{u})$, одакле је диференцијал

$$\begin{aligned} d(\ln f_M) &= \frac{1}{\rho} d\rho - \frac{3}{2} \frac{1}{\theta} d\theta + \frac{\mathbf{c}^2}{2\theta^2} d\theta + \sum_{j=1}^3 \frac{c_j}{\theta} du_j \\ &= \frac{1}{\rho} d\rho + \left(\frac{\mathbf{c}^2}{2\theta} - \frac{3}{2} \right) \frac{1}{\theta} d\theta + \sum_{j=1}^3 \frac{c_j}{\theta} du_j, \end{aligned}$$

при чему смо искористили дефиницију релативне брзине

$$\mathbf{c} = \mathbf{v} - \mathbf{u}.$$

Сада су изводи

$$\begin{aligned} \frac{D_0(\ln f_M)}{Dt} &= \frac{1}{\rho} \frac{D_0\rho}{Dt} + \left(\frac{\mathbf{c}^2}{2\theta} - \frac{3}{2} \right) \frac{1}{\theta} \frac{D_0\theta}{Dt} + \sum_{j=1}^3 \frac{c_j}{\theta} \frac{D_0u_j}{Dt}, \\ \frac{\partial(\ln f_M)}{\partial x_i} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial x_i} + \left(\frac{\mathbf{c}^2}{2\theta} - \frac{3}{2} \right) \frac{1}{\theta} \frac{\partial\theta}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^3 \frac{c_j}{\theta} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Ако их уврстимо у једначину (2.29) добијамо

$$\begin{aligned} f^{(1)} &= f_{ES}^{(1)} - \frac{1}{\nu} f_M \left[\frac{1}{\rho} \frac{D_0\rho}{Dt} + \left(\frac{\mathbf{c}^2}{2\theta} - \frac{3}{2} \right) \frac{1}{\theta} \frac{D_0\theta}{Dt} + \sum_{j=1}^3 \frac{c_j}{\theta} \frac{D_0u_j}{Dt} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^3 c_i \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial x_i} + \left(\frac{\mathbf{c}^2}{2\theta} - \frac{3}{2} \right) \frac{1}{\theta} \frac{\partial\theta}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^3 \frac{c_j}{\theta} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.30)$$

Кратком рачуницом можемо поједноставити овај израз користећи законе одржања (2.19). Знамо да је

$$p = \rho \theta,$$

и на основу тога и правила о изводу производа важи

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial \rho \theta}{\partial x_i} = \rho \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \theta \frac{\partial \rho}{\partial x_i}. \quad (2.31)$$

Такође знамо да је

$$c_i c_j = c_{\langle i} c_{j \rangle} + \frac{\mathbf{c}^2}{3} \delta_{ij}, \quad i, j \in \{1, 2, 3\},$$

одакле множењем парцијалним изводом средње брзине гаса по просторним координатама и увођењем аналогне ознаке добијамо

$$c_i c_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = c_{\langle i} c_{j \rangle} \frac{\partial u_{\langle i}}{\partial x_{j \rangle}} + \frac{\mathbf{c}^2}{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i},$$

што нам омогућава да раздвојимо суму

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_i c_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{\langle i} c_{j \rangle} \frac{\partial u_{\langle i}}{\partial x_{j \rangle}} + \sum_{i=1}^3 \frac{\mathbf{c}^2}{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}. \quad (2.32)$$

Уколико резултате (2.31) и (2.32) вратимо у једначину (2.30) и још додамо и одузмемо чланове

$$\sum_{i=1}^3 \frac{c_i}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

добијамо

$$\begin{aligned} f^{(1)} &= f_{ES}^{(1)} - \frac{1}{\nu} f_M \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{D_0 \rho}{Dt} + \rho \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) + \left(\frac{\mathbf{c}^2}{2\theta} - \frac{3}{2} \right) \frac{1}{\theta} \frac{D_0 \theta}{Dt} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right. \\ &\quad + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{3} \frac{\mathbf{c}^2}{\theta} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{c_{\langle i} c_{j \rangle}}{\theta} \frac{\partial u_{\langle i}}{\partial x_{j \rangle}} + \sum_{j=1}^3 \frac{c_j}{\theta} \frac{D_0 u_j}{Dt} \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^3 \frac{c_i}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^3 \frac{c_i}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^3 c_i \left(\frac{\mathbf{c}^2}{2\theta} - \frac{5}{2} \right) \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right] \\ &= f_{ES}^{(1)} - \frac{1}{\nu} f_M \left[\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{c_{\langle i} c_{j \rangle}}{\theta} \frac{\partial u_{\langle i}}{\partial x_{j \rangle}} + \sum_{i=1}^3 c_i \left(\frac{\mathbf{c}^2}{2\theta} - \frac{5}{2} \right) \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right. \\ &\quad + \frac{1}{\rho} \left(\frac{D_0 \rho}{Dt} + \rho \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) + \left(\frac{\mathbf{c}^2}{2\theta} - \frac{3}{2} \right) \left(\frac{1}{\theta} \frac{D_0 \theta}{Dt} + \frac{2}{3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^3 \frac{c_i}{\theta} \left(\frac{D_0 u_i}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho \theta}{\partial x_i} \right) \right]. \end{aligned}$$

На основу закона одржања (2.19) последња два реда се анулирају.

Коначно, ако погледамо дефиницију (2.27), можемо да напишемо облик

апроксимације првог реда решења Болцманове једначине

$$f^{(1)} = f_M \frac{b}{2p\theta} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}^{(1)} c_{\langle i} c_{j \rangle} - f_M \frac{1}{\nu} \left[\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{c_{\langle i} c_{j \rangle}}{\theta} \frac{\partial u_{\langle i}}{\partial x_{j \rangle}} + \sum_{i=1}^3 c_i \left(\frac{c^2}{2\theta} - \frac{5}{2} \right) \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right]. \quad (2.33)$$

У овом тренутку можемо да видимо узрок разлике BGK и ES-BGK модела у вредности Прантловог броја. Наиме, ES-BGK модел смо увели као модификацију BGK модела у смислу корекције тензора притиска у изразу за Максвелову расподелу, коју смо увели коефицијентом b . Како се коефицијент b појављује у првом члану горњег изрази, тај први члан можемо сматрати корекцијом у односу на BGK модел захваљујући којој добијамо мерену вредност Прантловог броја, и у том смислу коректан модел.

Како $f^{(1)}$ у Чепмен-Енскоговом развоју

$$f|_{CE} = f_M + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + \varepsilon^3 f^{(3)} + \dots$$

стоји уз члан ε , она мора да задовољава услове компатибилности (2.8). Проверимо да то заиста јесте тако. Рачунамо интеграле

$$\int m \left(\frac{1}{\mathbf{v}} \right) f^{(1)} d\mathbf{v}.$$

Како је $f^{(1)}$ дата изразом (2.33) који се састоји од три сабирка, можемо раздвојити интеграле. Рачунајући сваки од њих добијамо да су једнаки нули

$$\begin{aligned} \int m \left(\frac{1}{\mathbf{v}} \right) f_M \frac{b}{2p\theta} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}^{(1)} c_{\langle i} c_{j \rangle} d\mathbf{v} &= 0, \\ \int m \left(\frac{1}{\mathbf{v}} \right) f_M \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{c_{\langle i} c_{j \rangle}}{\theta} \frac{\partial u_{\langle i}}{\partial x_{j \rangle}} d\mathbf{v} &= 0, \\ \int m \left(\frac{1}{\mathbf{v}} \right) f_M \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^3 c_i \left(\frac{c^2}{2\theta} - \frac{5}{2} \right) \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} d\mathbf{v} &= 0. \end{aligned}$$

Закључујемо, $f^{(1)}$ задовољава услове компатибилности.

Оно што је још карактеристично за неравнотежне расподеле јесу ненула елементи тензора притиска и вектора топлотног протока. На основу формуле за њихово израчунавање (2.10), специјално за $f^{(1)}$ добијамо

$$\sigma_{ij}^{(1)} = \int m c_{\langle i} c_{j \rangle} f^{(1)} d\mathbf{v}, \quad q_i^{(1)} = \int \frac{m}{2} c_i \mathbf{c}^2 f^{(1)} d\mathbf{v}.$$

Наш следећи задатак је да покушамо да добијемо конкретан облик ових елемената. Полазимо од рачунања елемената тензора притиска. С обзиром на ознаку

$$c_{\langle i} c_{j \rangle} = c_i c_j - \frac{1}{3} \mathbf{c}^2 \delta_{ij},$$

разматраћемо засебно елементе на дијагонали и ван ње. Почнимо од вандијагоналних елемената.

За $i \neq j$ је

$$c_{\langle i} c_{j \rangle} = c_i c_j,$$

па је

$$\sigma_{ij}^{(1)} = \int m c_i c_j f^{(1)} d\mathbf{v},$$

односно

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(1)} &= \int m c_i c_j f_M \frac{b}{2p\theta} \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}^{(1)} c_{\langle i} c_{j \rangle} \right) d\mathbf{v} \\ &\quad - \int m c_i c_j f_M \frac{1}{\nu} \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{c_{\langle i} c_{j \rangle}}{\theta} \frac{\partial u_{\langle i}}{\partial x_{j \rangle}} \right) d\mathbf{v} \\ &\quad - \int m c_i c_j f_M \frac{1}{\nu} \left(\sum_{i=1}^3 c_i \left(\frac{\mathbf{c}^2}{2\theta} - \frac{5}{2} \right) \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) d\mathbf{v} \\ &= b \sigma_{ij}^{(1)} - 0 - \frac{2p}{\nu} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Овде већ можемо да осетимо компликованост методе. Дакле, чак ни у првој апроксимацији не добијамо експлицитно вредност $\sigma_{ij}^{(1)}$, већ морамо да решавамо једначину. То само може да наговести сложеност проблема која се јавља код апроксимација вишег реда.

Решавајући једначину (2.34) по $\sigma_{ij}^{(1)}$ добијамо вредност вандијагоналних елемената тензора притиска

$$\sigma_{ij}^{(1)} = -\frac{2}{1-b} \frac{p}{\nu} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad \text{за } i \neq j. \quad (2.35)$$

Изведимо сада изразе за елементе тензора притиска на дијагонали. За $i = j$ је

$$c_{\langle i} c_{i \rangle} = c_i c_i - \frac{1}{3} \mathbf{c}^2,$$

па је стога

$$\sigma_{ii}^{(1)} = \int m(c_i c_i - \frac{1}{3} \mathbf{c}^2) f^{(1)} d\mathbf{v}.$$

Уколико уврстимо израз за $f^{(1)}$, а потом као и код вандијагоналних елемената раздвојимо на три интеграла, након рачунања добијамо

$$\sigma_{ii}^{(1)} = b \sigma_{ii}^{(1)} - \frac{1}{3} b (\sigma_{11}^{(1)} + \sigma_{22}^{(1)} + \sigma_{33}^{(1)}) - \frac{2p}{\nu} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \right).$$

На основу особине (1.41) матрице $\underline{\sigma}$ и након решавања једначине по $\sigma_{ii}^{(1)}$ следи

$$\sigma_{ii}^{(1)} = -\frac{2}{1-b} \frac{p}{\nu} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \right). \quad (2.36)$$

Коначно, обједињујући (2.35) и (2.36) добијамо да су елементи тензора притиска у првој апроксимацији дати са

$$\sigma_{ij}^{(1)} = -\frac{2}{1-b} \frac{p}{\nu} \frac{\partial u_{\langle i}}{\partial x_{j \rangle}}. \quad (2.37)$$

Коефицијент вискозности је

$$\mu = \frac{1}{1-b} \frac{p}{\nu}. \quad (2.38)$$

Прилазећи овом проблему на други начин-макроскопски формулишу се Навије-Стоксове једначине

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial \varsigma_{ij}}{\partial x_i} \quad \text{за } i = 1, 2, 3,$$

или записано векторски

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \nabla \cdot \boldsymbol{\varsigma},$$

где је $\boldsymbol{\varsigma}$ тензор напона. Зависно од проблема који се посматра формулишу се конститутивне једначине, које се односе на одређивање тачног облика тензора напона $\boldsymbol{\varsigma}$. За флуиде који нису у стању равнотеже, тензор притиска је

пропорционалан градијенту брзине и коефицијенту вискозности, који представља меру унутрашњег трења. Неопходно је нагласити да се, гледано макроскопски, конститутивне једначине одређују феноменолошким путем. Насупрот томе, микроанализом смо добили конститутивну једначину која се односи на тензор притиска за гасове са малим Кнудсеновим бројем и у том случају је

$$\boldsymbol{\varsigma} = -\boldsymbol{\sigma},$$

при чему су елементи матрице $\boldsymbol{\sigma}$ дати са (2.37), док је тачан облик коефицијента вискозности одређен са (2.38).

Преостаје нам још да одредимо тачан облик вектора топлотног протока и коефицијента топлотне проводљивости и повежемо их са Фуријеовим законом.

На основу (2.10) можемо да израчунамо

$$\begin{aligned} q_i^{(1)} &= \int \frac{m}{2} \mathbf{c}^2 c_i f_M \frac{b}{2p\theta} \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}^{(1)} c_{\langle i} c_{j \rangle} \right) d\mathbf{v} \\ &\quad - \int \frac{m}{2} \mathbf{c}^2 c_i f_M \frac{1}{\nu} \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{c_{\langle i} c_{j \rangle}}{\theta} \frac{\partial u_{\langle i}}{\partial x_{j \rangle}} \right) d\mathbf{v} \\ &\quad - \int \frac{m}{2} \mathbf{c}^2 c_i f_M \frac{1}{\nu} \left(\sum_{i=1}^3 c_i \left(\frac{\mathbf{c}^2}{2\theta} - \frac{5}{2} \right) \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) d\mathbf{v} \\ &= 0 - \frac{5}{2} \frac{p}{\nu} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - 0. \end{aligned}$$

Закључујемо, елементи вектора топлотног протока у апроксимацији првог реда су дати са

$$q_i^{(1)} = -\frac{5}{2} \frac{p}{\nu} \frac{\partial \theta}{\partial x_i}, \quad \text{за } i = 1, 2, 3. \quad (2.39)$$

Коефицијент топлотне проводљивости је

$$\kappa = \frac{5}{2} \frac{p}{\nu}. \quad (2.40)$$

Фуријеов закон представља конститутивну једначину у изразу за промену унутрашње енергије и односи се на повезивање топлотног протока и градијента температуре. У општем случају он гласи:

$$\mathbf{q} = -\eta \nabla T,$$

где је η коефицијент топлотне проводљивости. Израз (2.40) нам одређује овај коефицијент за гасове са малом вредношћу Кнудсеновог броја

$$\eta = \frac{k}{m} \kappa = \frac{5}{2} \frac{k}{m} \frac{p}{\nu},$$

где је k Болцманова константа.

Глава 3

Поређење Хилбертовог и Чепмен-Енсковог метода

3.1 Основне дефиниције

Скаларни производ функција $f_1 = f_1(\mathbf{v})$ и $f_2 = f_2(\mathbf{v})$ дефинишемо као

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} f_1(\mathbf{v}) f_2(\mathbf{v}) d\mathbf{v}. \quad (3.1)$$

Већ је дискутовано у поглављу 1.4 да колизиони оператор (1.10), односно његово уопштење-билинеарни оператор (1.26) анулирамо тако што дефинишемо њихову слабу формулацију, а за тест функције бирамо колизионе инваријанте. Колизионе инваријанте

$$\psi_0 = 1, \quad \psi_i = v_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad \psi_4 = \mathbf{v}^2$$

се изводе користећи инваријантна својства билинеарног оператора која потичу од закона одржања количине кретања и енергије током процеса судара за који се претпоставља да је идеално еластичан. Дакле, колизионе инваријанте можемо да схватимо као последицу закона одржања и ово можемо записати помоћу горе дефинисаног скаларног производа као [1]:

$$\langle \psi_j, Q(f_1, f_2) \rangle = 0, \quad \text{за } j = 0, 1, 2, 3, 4. \quad (3.2)$$

Очигледно, ово је запис релације (1.27).

Такође, дефиниција (3.1) нам омогућава да формулишемо изразе за макроскопске величине: густину ρ , средњу макроскопску брзину $\mathbf{u}$ и темпера-

туру $\theta = \frac{k}{m} T$ на следећи начин:

$$\rho = \langle \psi_0, f \rangle \quad (3.3)$$

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\rho} (\langle \psi_1, f \rangle, \langle \psi_2, f \rangle, \langle \psi_3, f \rangle) \quad (3.4)$$

$$\theta = \frac{1}{3\rho} \langle \psi_4 - \mathbf{u}^2 \psi_0, f \rangle. \quad (3.5)$$

3.2 Хилбертов метод

У овом одељку разматрамо, историјски гледано, први метод који се заснива на идеји тражења приближног решења Болцманове једначине путем развоја у ред решења по малом параметру који има физички смисао реципрочне вредности густине гаса. Метод је добио назив по математичару Д. Хилберту¹ који га је предложио 1912. године, а базира се искључиво на добијању итерација решења Болцманове једначине. Само пар година касније, Чепмен и Енског, независно један од другог, се баве истом темом и добијају идентичне резултате. Међутим, сами методи су се суштински разликовали. Чепмен је 1916. године користећи Максвелове једначине, које описују транспортне појаве, дошао до општих формула за транспортне коефицијенте. У својој докторској дисертацији, 1917. године, Енског је дао приближно решење Болцманове једначине, што је употребио да израчуна транспортне коефицијенте, који су се у потпуности слагали са оним што је добио и Чепмен. Енскогов метод је био прихваћен од стране Чепмена и Каулинга² у њиховој књизи *The Mathematical Theory of Non-uniform Gases*, референци која се годинама појављивала у литератури о кинетичкој теорији гасова, и добио је назив Чепмен-Енскогов метод.

Најпре разматрамо Хилбертов метод, а потом Чепмен-Енскогов у следећем одељку.

Полазимо од бездимензионисане Болцманове једначине (2.3)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \right) f = \frac{1}{\varepsilon} Q(f, f).$$

Решење Болцманове једначине развијамо у ред по малом параметру ε

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k f_k. \quad (3.6)$$

¹ David Hilbert (1862-1943), немачки математичар

² Thomas George Cowling (1906-1990), енглески астроном

Заменом у Болцманову једначину добијамо

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \right) f_k = \frac{1}{\varepsilon} Q \left(\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k f_k, \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k f_k \right).$$

Изједначавањем израза уз одговарајуће степене ε добијамо систем једначина:

$$0 = Q(f_0, f_0), \quad (3.7)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \right) f_0 = 2Q(f_0, f_1), \quad (3.8)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \right) f_1 = 2Q(f_0, f_2) + Q(f_1, f_1), \quad (3.9)$$

...

Из једначине (3.7) следи да је $f_0 = f_M$ тј. да развој функције расподеле у ред по малом параметру вршимо у околини равнотежне расподеле.

Горњи систем једначина можемо записати у општем случају као

$$\begin{aligned} 0 &= Q(f_0, f_0), \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \right) f_0 &= 2Q(f_0, f_1) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \right) f_{n-1} &= 2Q(f_0, f_n) + \sum_{i=1}^{n-1} Q(f_i, f_{n-i}), \quad n \geq 2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Дефинишемо оператор [1]

$$\mathcal{L} : g \longmapsto 2Q(f_0, g), \quad (3.11)$$

где је g произвољна функција расподеле, а оператор Q дефинисан са (1.26). Из билинеарности оператора Q следи линеарност оператора $\mathcal{L}$.

Нула простор оператора $\mathcal{L}$ чине функције расподеле које су линеарна комбинација функција $\psi_j f_0$ тј.

$$\mathcal{N} = \left\{ \Psi : \Psi = \sum_{j=0}^4 \alpha_j \psi_j f_0, \alpha_j = \alpha_j(t, \mathbf{x}), \psi_j \text{ колизионе инваријанте} \right\}. \quad (3.12)$$

Докажимо на основу дефиниције билинеарног оператора (1.26), чињенице да Максвелова расподела задовољава услов равнотеже у строгом смислу

(1.20) и анулирању које постижу колизионе инваријанте (1.28).

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\psi_j f_0) &= 2Q(f_0, \psi_j f_0) \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \left(f'_0 \psi'_{j1} f'_{01} + f'_{01} \psi'_j f'_0 - f_0 \psi_{j1} f_{01} - f_{01} \psi_j f_0 \right) \mathcal{B} d\Omega d\mathbf{v}_1 \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \left(f'_0 f'_{01} (\psi'_{j1} + \psi'_j) - f_0 f_{01} (\psi_{j1} + \psi_j) \right) \mathcal{B} d\Omega d\mathbf{v}_1 \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} f_0 f_{01} (\psi'_{j1} + \psi'_j - \psi_{j1} - \psi_j) \mathcal{B} d\Omega d\mathbf{v}_1 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

На основу дефиниције нула простора

$$\mathcal{N} = \{\Psi : \mathcal{L}\Psi = 0\},$$

закључујемо да базу чине функције $\psi_j f_0$, што је и требало доказати.

Нека је g функција расподеле из домена оператора $\mathcal{L}$. Означимо са Φ њену слику тј. нека је

$$\Phi = \mathcal{L}g.$$

Из дефиниције (3.11) оператора $\mathcal{L}$, функција Φ је заправо билинеарни оператор

$$\Phi = 2Q(f_0, g).$$

На основу особине билинеарних оператора (3.2)

$$\langle \psi_j, Q(f_1, f_2) \rangle = 0,$$

где су ψ_j за $j = 0, 1, 2, 3, 4$ колизионе инваријанте, ми можемо да окарактерисемо скуп слика оператора $\mathcal{L}$ као функције брзине које су ортогоналне на колизионе инваријанте. Дакле, дефинишемо простор слика оператора $\mathcal{L}$ на следећи начин:

$$\mathcal{R} = \{\Phi(\mathbf{v}) : \langle \psi_j, \Phi \rangle = 0, \psi_j \text{ колизионе инваријанте}\}. \quad (3.13)$$

Разложимо домен оператора $\mathcal{L}$ на два међусобно ортогонална компонента

$$D(\mathcal{L}) = \mathcal{N} \oplus \mathcal{N}^\perp,$$

где је $\mathcal{N}$ нула простор оператора $\mathcal{L}$, а $\mathcal{N}^\perp$ његов ортогонални комплемент. Сада се свака функција расподеле из домена $D(\mathcal{L})$ може јединствено приказати као збир

$$g = \Psi + \Psi^\perp, \quad (3.14)$$

при чему $\Psi \in \mathcal{N}$, $\Psi^\perp \in \mathcal{N}^\perp$. Показаћемо да је $\Psi^\perp = \Phi$, односно $\mathcal{N}^\perp = \mathcal{R}$. Како је функција $\Psi \in \mathcal{N}$, она се може приказати као линеарна комбинација вектора базе нула простора

$$\Psi = \sum_{j=0}^4 \alpha_j \psi_j f_0.$$

Ради поједностављења израза, разматраћемо сваки елемент базе засебно, односно приказиваћемо функцију Ψ као

$$\Psi = \psi_j f_0, \quad \text{за } j = 1, 2, 3, 4.$$

На основу разлагања (3.14) функције g следи да је

$$\begin{aligned} \langle \psi_i, g \rangle &= \langle \psi_i, \Psi \rangle + \langle \psi_i, \Psi^\perp \rangle \\ &= \langle \psi_i, \psi_j f_0 \rangle + \langle \psi_i, \Psi^\perp \rangle, \end{aligned} \quad (3.15)$$

за $i, j = 0, 1, 2, 3, 4$. На основу дефиниције скаларног производа (3.1) је

$$\langle \psi_i, \psi_j f_0 \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \psi_i \psi_j f_0 d\mathbf{v}.$$

Фиксирајмо $j = 0$. Тада је $\psi_j = 1$ и важи

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{c}^2 \end{pmatrix}, f_0 \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{c}^2 \end{pmatrix} f_0 d\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \rho \\ \mathbf{u} \\ 2e \end{pmatrix}.$$

Са друге стране, за функцију расподеле g такође важи

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{c}^2 \end{pmatrix}, g \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{c}^2 \end{pmatrix} g d\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \rho \\ \mathbf{u} \\ 2e \end{pmatrix}.$$

Можемо закључити да због физичке интерпретације скаларног производа $\langle \psi_i, f_0 \rangle$ и $\langle \psi_i, g \rangle$, односно чињенице да су то макроскопске величине важи једнакост два израза. Враћајући овај резултат у (3.15) следи да је

$$\langle \psi_i, \Psi^\perp \rangle = 0. \quad (3.16)$$

Сада из (3.15) добијамо једнакост скаларног производа

$$\langle \psi_i, g \rangle = \langle \psi_i, \psi_j f_0 \rangle,$$

и за $j = 1, 2, 3, 4$.

Можемо издвојити две последице једначине (3.16). Прво, уколико $\Psi \in \mathcal{N}$ желимо да опишемо као пројекцију функције g [9]

$$\Psi = Pg,$$

онда важи да је

$$P(\Psi^\perp) = 0,$$

с обзиром да $\Psi^\perp \in \mathcal{N}^\perp$ и ортогоналност простора $\mathcal{N}$ и $\mathcal{N}^\perp$. С друге стране, ако се осврнемо на једначину (3.16)

$$\langle \psi_i, \Psi^\perp \rangle = 0,$$

можемо дефинисати пројектор P на нула простор оператора $\mathcal{L}$ на следећи начин:

$$P(\cdot) = \langle \psi_j, \cdot \rangle. \quad (3.17)$$

Друго, директно из дефиниције (3.13) простора слика оператора $\mathcal{L}$ и једначине (3.16) следи да

$$\Psi^\perp \in \mathcal{R},$$

односно да је ортогонални комплемент нула простора $\mathcal{N}$ заправо простор слика оператора $\mathcal{L}$

$$\mathcal{N}^\perp = \mathcal{R},$$

што нам је и био циљ да покажемо.

Дефинишемо псеудо-инверзију оператора $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}^{-1} : \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}.$$

Да бисмо систем једначина (3.7), (3.8), (3.9) итд. Хилбертовог метода записали у операторској форми, полазимо од развоја

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k f_k$$

и сваки члан приказујемо као збир

$$f_k = \Psi_k + \Phi_k, \quad (3.18)$$

при чему $\Psi_k \in \mathcal{N}$ и $\Phi_k \in \mathcal{R}$.

Једначину (3.8) можемо записати у операторској форми

$$Df_0 = \mathcal{L}f_1. \quad (3.19)$$

На основу (3.18) функцију расподеле f_1 можемо записати као збир

$$f_1 = \Psi_1 + \Phi_1,$$

где $\Psi_1 \in \mathcal{N}$ и $\Phi_1 \in \mathcal{R}$. Сада је

$$\mathcal{L}f_1 = \mathcal{L}(\Psi_1 + \Phi_1) = \mathcal{L}\Psi_1 + \mathcal{L}\Phi_1 = \mathcal{L}\Phi_1,$$

јер је $\mathcal{L}$ линеарни оператор и $\Psi_1 \in \mathcal{N}$ па је $\mathcal{L}\Psi_1 = 0$. Коначно, операторска једначина (3.19) постаје

$$Df_0 = \mathcal{L}\Phi_1. \quad (3.20)$$

Пројектујући на нула простор пројектором P добијамо

$$PDf_0 = 0, \quad (3.21)$$

с обзиром на ортогоналност простора слика и нула простора и чињенице да $\mathcal{L}\Phi_1 \in \mathcal{R}$. Вршећи псеудо-инверзију једначине (3.20) добијамо

$$\Phi_1 = \mathcal{L}^{-1}Df_0. \quad (3.22)$$

Дакле, полазећи од једначине (3.8) дефинишући оператор $\mathcal{L}$ и пројектор P извели смо две једначине (3.21) и (3.22).

Исто ћемо покушати и са једначином (3.9). Записана у операторској форми она гласи:

$$Df_1 = \mathcal{L}f_2 + Q(f_1, f_1).$$

Како функцију f_2 на основу (3.18) можемо записати у облику збира

$$f_2 = \Psi_2 + \Phi_2,$$

и како важи

$$\mathcal{L}f_2 = \mathcal{L}\Phi_2,$$

следи да је

$$Df_1 = \mathcal{L}\Phi_2 + Q(f_1, f_1). \quad (3.23)$$

Вршећи пројекцију пројектором P добијамо

$$PDf_1 = P(\mathcal{L}\Phi_2) + PQ(f_1, f_1).$$

Пошто $\mathcal{L}\Phi_2 \in \mathcal{R}$ важи $P(\mathcal{L}\Phi_2) = 0$, али и такође $PQ(f_1, f_1) = 0$, јер на основу дефиниције пројектора (3.17)

$$PQ(f_1, f_1) = \langle \psi_j, Q(f_1, f_1) \rangle,$$

а на основу особине билинеарног оператора (3.2) следи тражени резултат. Дакле,

$$PDf_1 = 0. \quad (3.24)$$

Ако извршимо псеудо-инверзију једначине (3.23) добијамо

$$\Phi_2 = \mathcal{L}^{-1}(Df_1 - Q(f_1, f_1)). \quad (3.25)$$

Дакле, свака једначина (3.8), (3.9) итд. може бити раздвојена на две:

$$PDf_0 = 0, \quad (3.26)$$

$$\Phi_1 = \mathcal{L}^{-1}Df_0, \quad (3.27)$$

$$PD\Psi_1 = -PD\Phi_1, \quad (3.28)$$

$$\Phi_2 = \mathcal{L}^{-1}(Df_1 - Q(f_1, f_1)) \quad (3.29)$$

...

Расписујући једначину (3.26) заправо добијамо Ојлерове једначине.

Полазећи од уопштења (3.10)

$$Df_0 = \mathcal{L}f_1$$

$$Df_{n-1} = \mathcal{L}f_n + \sum_{i=1}^{n-1} Q(f_i, f_{n-i}), \quad n \geq 2.$$

једном пројектујући, а други пут вршећи псеудо-инверзију добијамо уопштење система једначина (3.26), (3.27), (3.28), (3.29) итд.

$$PDf_0 = 0, \quad (3.30)$$

$$\Phi_1 = \mathcal{L}^{-1}Df_0, \quad (3.31)$$

$$PD\Psi_{n-1} = -PD\Phi_{n-1}, \quad (3.32)$$

$$\Phi_n = \mathcal{L}^{-1}(Df_{n-1} - \sum_{i=1}^{n-1} Q(f_i, f_{n-i})), \quad n \geq 2. \quad (3.33)$$

Напомена 3.2.1. Систем једначина (3.10), добијен асимптотским развојем решења Болцманове једначине по малом параметру, пружа наду да се рекурзијом може доћи до приближног решења, под претпоставком да ред по ε конвергира. Ова идеја је у операторској форми и реализована, а свака од једначина (осим прве) је раздвојена на две (видети (3.30)-(3.33)). Питање је како се овај рекурзивни поступак спроводи у пракси. Може се показати да се систем (3.10), изузимајући прву једначину, може записати као систем нехомогених Фредхолмових интегралних једначина друге врсте [7]. Испоставља се да придружене хомогене једначине, које се свode на $\mathcal{L}f_n = 0, n \geq 1$, имају нетривијално решење $f_n = \psi_j f_0$, што је показано у анализи нула простора оператора $\mathcal{L}$. Тада се може искористити резултат из теорије Фредхолмових једначина који гласи: ако хомогена интегрална једначина има нетривијално решење, онда нехомогена једначина има решење ако и само ако је задовољен услов који се у операторској форми свodi на $PDf_{n-1} = 0, n \geq 1$, а из ког следе једначине (3.30), односно (3.32). Овај услов се у анализи Фредхолмових једначина зове услов решивости.

3.3 Чепмен-Енскогов метод

У овом поглављу наводимо једну верзију Чепмен-Енскоговог метода која се односи на побољшање Хилбертовог метода. Развијамо функцију расподеле f у ред (3.6)

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k f_k,$$

и задржавамо се на првој апроксимацији

$$f \approx f_0 + \varepsilon f_1.$$

Знамо да је

$$PDF_k = 0, \quad \text{за } \forall k \geq 0,$$

па је

$$PD(f_0 + \varepsilon f_1) = PDf_0 + \varepsilon PDf_1 = 0. \quad (3.34)$$

Из једначине (3.19) следи да f_1 можемо записати у облику

$$f_1 = \mathcal{L}^{-1} Df_0.$$

Ако вратимо овај резултат у (3.34) добијамо

$$PDf_0 + \varepsilon PD\mathcal{L}^{-1} Df_0 = 0,$$

а како је из (3.26)

$$PDf_0 = 0,$$

можемо записати

$$PDf_0 + \varepsilon PD\mathcal{L}^{-1}Df_0 = \varepsilon PD\mathcal{L}^{-1}PDf_0.$$

Сређивањем добијамо једначину прве апроксимације Чепмен-Енсковог метода

$$PDf_0 = -\varepsilon PD\mathcal{L}^{-1}(I - P)Df_0, \quad (3.35)$$

док је једначина истог реда која одређује инверзију

$$\Phi_1 = \mathcal{L}^{-1}(I - P)Df_0.$$

Десна страна (3.35) одговара једначинама (2.19) за $k = 1$ и представља корекцију првог реда Ојлерових једначина гасне динамике.

Закључак

У раду је приказан Чепмен-Енскогов метод анализе Болцманове једначине. Његова примена је била омогућена претпоставком да у једначини фигурише мали параметар, Кнудсенов број, што одговара хидродинамичкој апроксимацији. У математичком смислу ради се о сингуларно пертурбованом проблему.

У првој глави је дат кратак осврт на Болцманову једначину, извођење макроскопских једначина и колизионе моделе. Друга глава је у целости била посвећена Чепмен-Енскоговом методу који представља истовремени формални асимптотски развој решења Болцманове једначине и макроскопских једначина. Показано је да се неравнотежни протоци макроскопских величина, тензор притиска и топлотни проток, могу у првој апроксимацији изразити као функције градијената равнотежних величина. На овај начин су репродуковане Навије-Стоксове једначине и Фуријеов закон провођења топлоте. Трећа глава садржи компаративну анализу Хилбертовог и Чепмен-Енскоговог метода извршену уз помоћ теорије оператора.

Показано је да Чепмен-Енскогов метод представља ефикасан метод асимптотске анализе Болцманове једначине који потврђује валидност конститутивних једначина класичне хидродинамике у првој апроксимацији. Интересантно би било у даљем раду анализирати примену овог метода у случају гасних мешавина, као и у физици плазме.

Литература

- [1] R.E. Caflisch, *Fluid Dynamics and the Boltzmann equation*, North-Holland, Amsterdam (1983)
- [2] C. Cercignani, *Rarefied gas dynamics*, Cambridge University Press (2000)
- [3] S. Chapman, *On the law of Distribution of Molecular Velocities, and on the Theory of Viscosity and Thermal Conduction, in a Non-uniform Simple Monatomic Gas*. Phil. Trans. R. Soc. A, **216**, 279-348 (1916)
- [4] S. Chapman, T.G. Cowling, *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*, Cambridge University Press (1970)
- [5] D. Rajter-Ćirić, *Verovatnoća*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet (2008)
- [6] P. Degond, L. Pareschi, G. Russo, *Modeling and Computational Methods for Kinetic Equations*, Birkhäuser (2004)
- [7] J.H. Ferziger, H.G. Kaper, *Mathematical theory of transport processes in gases*. North-Holland, Amsterdam (1972)
- [8] L.H. Holway, *New Statistical Models for Kinetic Theory: Methods of Construction*, Physics of Fluids **9**, 1658-1673 (1966)
- [9] V. Hutson, J.S. Pym, M.J. Cloud *Applications of Functional Analysis and Operator Theory*, Elsevier (2005)
- [10] H. Struchtrup, *Macroscopic transport equations for rarefied gas flows*, Springer (2005)

Кратка биографија

Милана Павић рођена је у Зрењанину 21. марта 1986. године. У Новом Саду је завршила Основну школу „Душан Радовић“ 2001. године. Затим, 2005. године је завршила новосадску Гимназију „Лаза Костић“. Исте године уписује Природно-математички факултет у Новом Саду. На Департману за математику и информатику опредељује се за смер примењене математике са нагласком примене у техници. Октобра 2009. године дипломирала је са просечном оценом 9.37 и стекла стручни назив *дипломирани инжењер математике*. На мастер студије, смер *примењена математика*, модул *техноматематика* се уписује исте, 2009. године. Успешно полаже све предвиђене испите закључно са јунским испитним роком 2010. године са просечном оценом 9.87.



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број:
РБР

Идентификациони број:
ИБР

Тип документације: монографска документација
ТД

Тип записа: текстуални штампани материјал
ТЗ

Врста рада: мастер рад
ВР

Аутор: Милана Павић
АУ

Ментор: др Марко Недељков
МН

Наслов рада: Болцманова једначина и Чепмен-Енскогов метод
НР

Језик публикације: српски (ћирилица)
ЈП

Језик извода: с/ен
ЈИ

Земља публикавања: Република Србија
ЗП

Уже географско подручје: Војводина
УГП

Година: 2010

ГО

Издавач: ауторски репринт

ИЗ

Место и адреса: Нови Сад, Трг Д. Обрадовића 4

МА

Физички опис рада: (5/61/10/0/1/0/0)

(број поглавља/страна/лит. цитата/табела/слика/графка/прилога)

ФО

Научна област: математика

НО

Научна дисциплина: примењена математика

НД

Предметне одреднице, кључне речи:

Болцманова једначина, кинетичка теорија гасова, Чепмен-Енскогов метод, Навије-Стоксове једначине, Фуријеов закон

ПО

УДК

Чува се:

ЧУ

Важна напомена:

ВН

Извод:

Овај рад је посвећен хидродинамичкој апроксимацији Болцманове једначине помоћу Чепмен-Енсковог метода. Примењујући формални асимптотски развој на решење Болцманове једначине, као и на макроскопске једначине, добијени су неравнотежни протоци макроскопских величина у првој апроксимацији. Они одговарају добро познатим Навије-Стоксовим једначинама и Фуријеовом закону провођења топлоте. Посебно место заузима компарација Хилбертовог и Чепмен-Енсковог метода у операторској

форми.

ИЗ

Датум прихватања теме од стране НН већа: 02.06.2010.

ДП

Датум одбране: 08.07.2010.

ДО

Чланови комисије:

КО

Председник: др Данијела Рајтер-Ћирић, ванредни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду

Члан: др Србољуб Симић, редовни професор Факултета техничких наука у Новом Саду

Ментор: др Марко Недељков, редовни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Acession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: monograph type

DT

Type of record: printed text

TR

Contents code: master thesis

CC

Author: Milana Pavić

AU

Mentor: Marko Nedeljkov, PhD, full professor

MN

Title: The Boltzmann equation and the Chapman-Enskog method

TI

Language of text: Serbian (Cyrillic)

LT

Language of abstract: s/en

LA

Country of publication: Republic of Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2010

PY

Publisher: author's reprint

PU

Publication place: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4

PP

Physical description: (5/61/10/0/1/0/0)

(chapters/pages/literature/tables/pictures/graphs/additional lists)

PD

Scientific field: mathematics

SF

Scientific discipline: applied mathematics

SD

Subject, key words:

The Boltzmann equation, kinetic theory of gases, Chapman-Enskog method, Navier-Stokes equations, Fourier law

SKW

UC

Holding data:

HD

Note:

N

Abstract:

This thesis is devoted to the study of hydrodynamic approximation of the Boltzmann equation using Chapman-Enskog method. Applying formal asymptotic expansion on the solution of Boltzmann equation, as well as corresponding macroscopic equations, non-equilibrium fluxes of macroscopic quantities are derived in first approximation. They reproduce well-known relations of Navier-Stokes and Fourier. A comparison between Hilbert and Chapman-Enskog expansion is performed using the methods of operator

theory.

AB

Accepted on Scientific board on: 02.06.2010.

AS

Defended: 08.07.2010.

DE

Thesis Defend board:

DB

President: Danijela Rajter-Ćirić, PhD, associate professor, Faculty of Science, Novi Sad

Member: Srboľjub Simić, PhD, full professor, Faculty of Technical Science, Novi Sad

Mentor: Marko Nedeljkov, PhD, full professor, Faculty of Science, Novi Sad