



UNIVERZITET U NOVOM SADU  
PRIRODNO MATEMATIČKI FAKULTET  
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I  
INFORMATIKU



# Primena linearog programiranja u rešavanju igara nulte sume

-master rad-

Mentor:

prof. dr Sanja Rapajić

Autor:

Milan Šovljanski

Novi Sad, jun 2011

## Sadržaj

1 Uvod.....	2
1.1 Osnovne oznake i definicije.....	2
2 Linearno programiranje.....	4
2.1 Opis problema.....	4
2.2 Grafička metoda za rešavanje problema linearнog programiranja.....	11
2.3 Simpleks metod.....	14
2.3.1 Sekundarni simpleks metod.....	14
2.3.2 Primarni simpleks metod.....	23
2.4 Dualnost u linearном programiranju.....	29
3 Teorija igara.....	38
3.1 Vrste igara.....	39
3.2 Predstavljanje igara.....	41
3.3 Rešavanje igara.....	44
3.3.1 Eliminacija dominiranih strategija.....	44
3.3.2 Fon Nojmanovo rešenje.....	48
3.3.3 Nesimalne matrične igre.....	54
3.3.4 Grafičko rešavanje mešovitih matričnih igara.....	59
3.4 Nešov ekvilibrijum.....	61
4 Linearno programiranje i igre nulte sume.....	64
5 Programske pakete.....	75
6 Zaključak.....	79
7 Dodatak.....	80
8 Literatura.....	85

# 1 Uvod

Svako od nas voli da se igra. Kao mali igrajući žmurke birali smo mesto gde ćemo se sakriti, u kartanju biramo najbolju kartu koju da izbacimo u datom momentu, a u šahu najbolji potez... Znamo da ishod igre zavisi od izbora, odluke, strategije. Zapravo, mi se igramo svaki dan donoseći razne odluke sa željom da ostvarimo što bolji krajnji rezultat. Ovaj problem postao je interesantan u mnogo ozbiljnijim igramama od kartanja, žmurki, šaha i podstakao je razvoj čitave naučne discipline poznatije kao teorija igara, koja svoj procvat doživljava za vreme Drugog svetskog rata. Kasnije, teorija igara pronalazi značajno mesto u ekonomskoj nauci, potkrepljena radovima velikih matematičara.

U ovom radu predstavljene su matrične igre sa akcentom na igramu nulte sume, kao i neke od metoda za njihovo rešavanje. Eliminacija dominiranih strategija, grafička metoda, primena minmaks teoreme, Snou-Šeplijeve teoreme i Nešovog ekvilibrijuma su samo neki načini rešavanja igara. Primena linearnog programiranja u rešavanju igara nulte sume je od posebnog značaja. Ekvivalencija minmaks teoreme u teoriji igara i teoreme jake dualnosti u linearnom programiranju predstavlja veoma bitan korak u rešavanju igara nulte sume. Iako je to bilo skoro očigledno, dugo se tragalo za kompletним dokazom ekvivalencije ove dve teoreme. Konačna verzija potpunog dokaza izvedena je tek nedavno i praktično je omogućila primenu svog stičenog znanja vezanog za linearno programiranje u rešavanju igara nulte sume. To je omogućilo i uvođenje raznih računarskih programa u proces rešavanja matričnih igara, a samim tim i njihov razvoj.

U prvom delu rada navedene su osnovne definicije i označke. Problem linearnog programiranja i neke metode njegovog rešavanja opisani su u drugom delu. U trećem delu predstavljena je teorija igara. Veza između linearnog programiranja i igara nulte sume i primena linearnog programiranja u njihovom rešavanju prikazana je u četvrtom i petom poglavlju, dok je na samom kraju rada izведен zaključak.

## 1.1 Osnovne označke i definicije

- $N$ -skup prirodnih brojeva,
- $R$ -skup realnih brojeva,
- $R^n$ -  $n$ -dimenzionalan realan vektorski prostor, gde  $n \in N$ ,
- $R^{m,n}$ - prostor matrica formata  $m \times n$ ,
- $\langle x, y \rangle$  – skalarni proizvod vektora  $x, y \in R^n$ ,
- $z = (x, y) \in R^{n+m}$ , blok vektor  $x \in R^n$ ,  $y \in R^m$ ,
- $x_{ij}$ - elemenat matrice  $A$  koji se nalazi u  $i$ -toj vrsti i  $j$ -toj koloni,
- $\text{rang}(A)$ - rang matrice  $A$ ,

- $(A, B) \in R^{m,n+s}$ - blok matrica,  $A \in R^{m,n}, B \in R^{m,s}$
- $E$ - jedinična matrica
- $B = (A_1, \dots, A_n)$ - matrica čije su kolone vektori  $A_1, \dots, A_n$

**Definicija 1.1:** Skup  $U \in R^n$  je konveksan skup ako za svako  $x, y \in U$  i  $0 \leq \alpha \leq 1$  važi

$$\alpha x + (1 - \alpha)y \in U.$$

**Definicija 1.2:** Izraz oblika

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \quad (1.1)$$

gde su  $\alpha_i$  realni brojevi, a  $x_i \in U$ , naziva se linearna kombinacija elemenata  $x_i, i = 1(1)n$ .

Ako je osim toga zadovoljeno i

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0, i = 1(1)n,$$

onda je (1.1) konveksna kombinacija elemenata  $x_i, i = 1(1)n$ .

## 2 Linearno programiranje

Savremeno društvo, a pogotovo privreda svakodnevno se suočava sa raznim složenim zadacima, koji mogu imati više rešenja. Logično pitanje koje se nameće je kako doći do najboljeg, tj. optimalnog rešenja. Kod rešavanja ovakvih zadataka primenjuje se kriterijum minimuma ili maksimuma, koji podrazumeva maksimizaciju dobiti uz minimalna ulaganja. Prvi korak u rešavanju problema je formiranje matematičkog modela. Njega čine funkcija cilja i ograničenja. Dakle, zadatak je odrediti minimum ili maksimum zadate funkcije cilja na nekom skupu ograničenja. U zavisnosti od vrste funkcija kojima su opisani, problemi mogu biti linearni ili nelinearni. Linearni problem je problem u kome je funkcija cilja linearna i u kome su sva ograničenja predstavljena linearnim funkcijama. Linearan problem je specijalan slučaj nelinearnog problema. Ukoliko je funkcija cilja nelinearna, ili ako je bar jedno od ograničenja predstavljeno nelinearnom funkcijom, reč je o nelinearnom problemu. U cilju rešavanja ovih problema, razvile su se mnogobrojne metode.

U današnje vreme zahvaljujući razvoju tehnologije znatno je olakšano rešavanje problema linearog programiranja bez obzira na složenost. Postoje standardni programi koji se koriste u tu svrhu kao gotove rutine. Osnovni zadatak je prepoznavanje i dobro formulisanje problema i naravno određivanje njegovog rešenja.

### 2.1 Opis problema

Neka je dat skup  $U \subseteq R^n$  i funkcija  $J: U \rightarrow R$ . Posmatra se problem

$$J(x) \rightarrow \min(\max), x \in U. \quad (2.1.1)$$

$J(x)$  se naziva *funkcija cilja*, a  $U$  predstavlja skup ograničenja (*dopustiv skup*).

**Definicija 2.1.1:** Svaki vektor  $x \in U$  se naziva dopustivo rešenje problema (2.1.1). Vektor  $x^* \in U$  za koji funkcija cilja dostiže minimum (maksimum) naziva se optimalno rešenje problema (2.1.1).

Vektor  $x^* \in U$  je *optimalno rešenje* problema  $J(x) \rightarrow \min, x \in U$  ako važi

$$J(x^*) \leq J(x), \forall x \in U.$$

Vektor  $x^* \in U$  je *optimalno rešenje* problema  $J(x) \rightarrow \max, x \in U$  ako važi

$$J(x^*) \geq J(x), \forall x \in U.$$

Ako je  $J(x)$  linearna funkcija i ako je dopustiv skup zadan svim linearnim ograničenjima onda se ovakav problem naziva problem *linearnog programiranja*.

**Opšti oblik (LPG)** problema linearnog programiranja (LP) prikazan u matrično-vektorskoj formi ima sledeću strukturu

$$J(x) = \langle c, x \rangle = \sum_{i=1}^n c_i x_i \rightarrow \min$$

$$x \in U_g = \left\{ x \in R^n, Ax \leq b, \bar{A}x = \bar{b}, x_i \geq 0, i \in I \subseteq \{1, 2, \dots, n\} \right\},$$

gde je

$$A \in R^{m,n}, \bar{A} \in R^{s,n}, b \in R^m, \bar{b} \in R^s, c, x \in R^n.$$

Ograničenja tipa  $x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$  nazivaju se ograničenja nenegativnosti.

Sada će biti navedeni specijani oblici problema linearnog programiranja.

**Osnovni oblik problema linearnog programiranja (LPO)**

$$J(x) = \langle c, x \rangle = \sum_{i=1}^n c_i x_i \rightarrow \min$$

$$U_o = \{x; Ax \leq b,$$

$$x \geq 0,$$

$$A \in R^{m,n}, x, c \in R^n, b \in R^m\}.$$

**Standardni oblik problema linearnog programiranja (LPS)**

$$J(x) = \langle c, x \rangle = \sum_{i=1}^n c_i x_i \rightarrow \min$$

$$U_s = \{x; Ax = b, \\ x \geq 0, \\ A \in R^{m,n}, x, c \in R^n, b \in R^m\}.$$

**Kanonički oblik problema linear nog programiranja (LPK)**

$$J(x) = \langle c, x \rangle = \sum_{i=1}^{n+m} c_i x_i \rightarrow \min \\ U_k = \{x; Cx = b, \\ x \geq 0, \\ C = (A, E), A \in R^{m,n}, x, c \in R^{n+m}, b \in R^m\}$$

ili  $C = (E, A)$ ,  $E$  je jedinična matrica,  $E \in R^{m,m}$ .

**Definicija 2.1.2:** Vektor  $v$  je vrh konveksnog poliedra, tj. skupa  $U = \{x \in R^n; Ax \leq b, A \in R^{m,n}\}$  ako se nalazi u preseku bar  $n$  ograničenja dopustivog skupa.

**Teorema 2.1.1:** Ako je  $K$  konveksan poliedar sa vrhovima  $v_1, v_2, \dots, v_k$ , a  $x \in K$ , tada je

$$x = \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i,$$

gde je

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, i = 1(1)k,$$

tj. konveksni poliedar je konveksna kombinacija svojih vrhova.

**Teorema 2.1.2:** Ako funkcija cilja LPS problema dostiže minimum u tački  $x^*$  tada postoji vrh  $v$  takav da je  $J(v) = J(x^*)$ .

**Dokaz:**

Neka su  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  vrhovi skupa  $U_s$ . Na osnovu teoreme 2.1.1 sledi

$$x^* = \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i, \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, k.$$

Dalje je

$$J(x^*) = \langle c, x^* \rangle = \langle c, \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i \rangle = \sum_{i=1}^k \alpha_i \langle c, v_i \rangle \geq \langle c, v \rangle \sum_{i=1}^k \alpha_i = J(v),$$

gde je  $\langle c, v \rangle = \min_{1 \leq i \leq k} \langle c, v_i \rangle$ . Kako je  $J(x^*)$  minimalna vrednost funkcije cilja na  $U_s$ , tada je

$$J(x^*) = J(v).$$

Zaključak je da funkcija cilja dostiže minimalnu vrednost u vrhu  $v$ .

■

**Teorema 2.1.3:** Linearna funkcija cilja nad ograničenim konveksnim dopustivim skupom dostiže svoj minimum (maksimum) u nekom vrhu. Ako ga dostiže u dva ili više vrhova onda ga dostiže i u svakoj konveksnoj kombinaciji tih vrhova.

**Dokaz:**

Neka su  $v_i, i = 1, \dots, k$  vrhovi u kojima funkcija cilja dostiže svoj minimum (maksimum) i neka je  $J(v_i) = m, i = 1, \dots, k$ . Neka je  $x$  konveksna kombinacija vrhova  $v_i$  tj.

$$x = \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i, \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, k.$$

Tada je

$$J(x) = \langle c, x \rangle = \langle c, \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i \rangle = \sum_{i=1}^k \alpha_i \langle c, v_i \rangle = m \sum_{i=1}^k \alpha_i = m.$$

■

Ukoliko pak konveksni skup nije ograničen, linearna funkcija može i da ne dostigne svoj minimum (maksimum).

**Teorema 2.1.4:** Problem linearne programiranja nema rešenje ako je dopustiv skup prazan ili ako funkcija cilja nije ograničena sa donje strane u slučaju minimuma (ili sa gornje strane u slučaju maksimuma). U suprotnom problem linearne programiranja ima rešenje i ono je ili jedinstveno ili postoji beskonačno mnogo rešenja.

**Definicija 2.1.3:** Neka je u LPS problemu  $\text{rang}(A) = r = m$ . Tačka  $x \in U_s$  je *bazično rešenje* problema LPS ako postoji  $r$  linearne nezavisnih vektora  $A_{ij}, j = 1, \dots, r$  među vektor kolonama matrice  $A$ , tako da važi

$$x_{i1}A_{i1} + x_{i2}A_{i2} + \cdots + x_{ir}A_{ir} = b,$$

gde je

$$A_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{rk} \end{bmatrix},$$

a  $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ir}$  su bazične komponente vrha  $x$ . Ostale komponente vrha  $v$  su nebazične i one su jednake nuli.

**Definicija 2.1.4:** Vektori  $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{ir}$  su vektori baze bazičnog rešenja  $x$ .

**Definicija 2.1.5:** Matrica  $B = (A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{ir})$  je baza bazičnog rešenja  $x$ .

**Definicija 2.1.6:** Bazično rešenje je nedegenerisano ako su sve bazične komponente pozitivne. U suprotnom bazično rešenje je degenerisano.

**Teorema 2.1.5:** Bazično rešenje LPS problema je vrh skupa  $U_s$ .

**Dokaz:**

Neka je  $\text{rang}(A)=r$ . Prepostavlja se da je  $v$  bazično rešenje, a da nije vrh skupa  $U_s$ . To znači da može biti zapisano kao

$$v = \alpha x + (1 - \alpha)y,$$

gde je  $0 < \alpha < 1, x, y \in U_s; x \neq y$ . Pošto je  $n - r$  komponenti tačke  $v$  jednako nuli (nebazične komponente), te iste komponente biće jednake nuli i za tačke  $x$  i  $y$ . Bez umanjenja opštosti može se uzeti da su poslednjih  $n - r$  komponenti za sve tri tačke jednake nuli. Dakle, važi

$$\begin{aligned} A_1x_1 + \cdots + A_rx_r &= b; \\ A_1y_1 + \cdots + A_ry_r &= b; \end{aligned}$$

gde su  $A_i, i = 1 \dots r$ , linearne nezavisni vektori ( $A_i$  – vektor kolone matrice  $A$ ). Ako se oduzmu prethodne dve jednačine dobija se

$$A_1(x_1 - y_1) + A_2(x_2 - y_2) + \cdots + A_r(x_r - y_r) = 0.$$

Zbog linearne nezavisnosti vektora sledi da je  $x_i = y_i, i = 1, \dots, r$ , što protivureči pretpostavci. Dakle  $v$  je vrh skupa  $U_s$ . ■

**Teorema 2.1.6:** Vrh skupa  $U_s$  je bazično rešenje problema LPS.

**Dokaz:**

Neka je  $\text{rang}(A)=r$ . Biće pokazano da pozitivnim komponentama vrha  $v$  odgovaraju linearne nezavisni vektori. Bez umanjenja opštosti može se pretpostaviti da su prvih  $k$  komponenti vrha  $v$  pozitivne (prenumeracija promenljivih)  $v_i > 0, i = 1 \dots k, v_i = 0, i = k + 1(1)n$ . Tada je

$$\sum_{i=1}^k A_i v_i = b. \quad (2.1.2)$$

Prepostavlja se suprotno da su vektori  $A_i, i = 1(1)k$ , linearne zavisni. Dakle postoje brojevi  $\beta_i, i = 1(1)k$ , takvi da je

$$\sum_{i=1}^k \beta_i A_i = 0, \quad (2.1.3)$$

a da pri tome svi  $\beta_i$  nisu jednaki nuli. Množenjem (2.1.3) sa  $\varepsilon > 0$  i sabiranjem sa (2.1.2), a zatim množenjem (2.1.3) sa  $(-\varepsilon)$  i sabiranjem sa (2.1.2) dobija se

$$\begin{aligned} (v_1 + \varepsilon\beta_1)A_1 + (v_2 + \varepsilon\beta_2)A_2 + \dots + (v_k + \varepsilon\beta_k)A_k &= b, \\ (v_1 - \varepsilon\beta_1)A_1 + (v_2 - \varepsilon\beta_2)A_2 + \dots + (v_k - \varepsilon\beta_k)A_k &= b. \end{aligned}$$

Uvode se oznake

$$x = (v_1 + \varepsilon\beta_1, \dots, v_k + \varepsilon\beta_k, 0, \dots, 0)$$

$$y = (v_1 - \varepsilon\beta_1, \dots, v_k - \varepsilon\beta_k, 0, \dots, 0)$$

$x, y \in R^n$ . Vidi se da je  $Ax = b$  i  $Ay = b$  odnosno, sistem jednačina u LPS ima dva rešenja  $x$  i  $y$ . Uz uslov  $v_i \pm \varepsilon\beta_i \geq 0, i = 1, \dots, k$  ona će uvek biti moguća rešenja LPS problema. Za dovoljno malo  $\varepsilon$  važi  $x \geq 0, y \geq 0$ . Tada je

$$v = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y,$$

što je nemoguće ako je  $v$  vrh skupa. Na osnovu protivurečnosti izvodi se zaključak da su vektori  $A_i, i = 1, \dots, k$ , linearne nezavisni, odnosno da je  $v$  bazično rešenje. Kako je  $\text{rang}(A) = r$

takvih vektora može biti najviše  $r$ ,  $k \leq r$ . Ako je  $r = k$  bazično rešenje  $v$  je nedegenerisano, a ako je  $k < r$  ono je degenerisano.

■

**Teorema 2.1.7:** Neka je u LPS problemu  $\text{rang}(A) = r = m$  i neka skup  $U_s$  nema degenerisanih vrhova i  $v$  je vrh sa bazom  $A_1, A_2, \dots, A_r$ , a

$$A_j = \gamma_{1j}A_1 + \gamma_{2j}A_2 + \dots + \gamma_{rj}A_r, j = 1, \dots, n \quad (2.1.4)$$

predstavlja razlaganje vektora  $A_j$  po vektorima baze. Definisano je  $Z_j$  kao

$$Z_j = \gamma_{1j}c_1 + \dots + \gamma_{rj}c_r, j = 1, \dots, n. \quad (2.1.5)$$

Ako postoji  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  takvo da je

$$\Delta_j = Z_j - c_j > 0, \quad (2.1.6)$$

tada vrh  $v$  nije rešenje LPS problema.

### Dokaz:

Pošto je  $v$  vrh važi  $v = (v_1, \dots, v_r, 0, \dots, 0)$  i

$$v_1A_1 + v_2A_2 + \dots + v_rA_r = b, \quad (2.1.7)$$

$$J(v) = \langle v, c \rangle = c_1v_1 + \dots + c_rv_r. \quad (2.1.8)$$

Treba pokazati da postoji  $x \in U_s$  tako da je

$$J(x) < J(v),$$

tj.  $v$  nije rešenje problema. Ako se pomnoži (2.1.4) sa  $\varepsilon > 0$  i to oduzme od (2.1.7) dobija se

$$(v_1 - \varepsilon\gamma_{1j})A_1 + (v_2 - \varepsilon\gamma_{2j})A_2 + \dots + (v_r - \varepsilon\gamma_{rj})A_r + \varepsilon A_j = b.$$

Na sličan način iz (2.1.5) i (2.1.8) se dobija

$$(v_1 - \varepsilon\gamma_{1j})c_1 + (v_2 - \varepsilon\gamma_{2j})c_2 + \dots + (v_r - \varepsilon\gamma_{rj})c_r + \varepsilon c_j = J(v) - \varepsilon(Z_j - c_j).$$

Neka je  $x = (v_1 - \varepsilon\gamma_{1j}, v_2 - \varepsilon\gamma_{2j}, \dots, v_r - \varepsilon\gamma_{rj}, 0, \dots, 0, \varepsilon, 0, \dots, 0) \in R^n$  gde je  $\varepsilon$  na  $j$ -tom mestu, i neka je  $\varepsilon$  izabrano tako da je  $x \geq 0$ . Tada je  $x$  moguće rešenje LPS problema i

$$J(x) = J(v) - \varepsilon(Z_j - c_j) < J(v).$$

Dakle  $v$  nije optimalno rešenje, što je i trebalo biti dokazano. Uzimanje prvih  $r$  vektor kolona matrice  $A$  za bazu vrha  $v$  ne umanjuje opštost, jer se prenumeracijom promenljivih to može postići.

■

**Posledica 2.1.8:** Neka je problem LPS regularan i neka je  $\text{rang}(A) = r = m$ . Ako je  $x^*$  bazično rešenje, tačka  $x^*$  će biti optimalno rešenje problema LPS u slučaju da važi

$$\Delta_j \leq 0, j = 1, \dots, n$$

gde je  $\Delta_j$  određeno sa (2.1.6).

**Definicija 2.1.7:** Veličine  $\Delta_j$  u (2.1.6) nazivaju se ocene bazičnog rešenja.

Prethodne stavke su veoma značajne pri rešavanju LPS problema simpleks metodom, o kojoj će više reči biti kasnije i koja se ističe kao jedna od najpoznatijih metoda za rešavanje problema LP. Postoje i druge metode za rešavanje problema linearнog programiranja, kao što su grafička metoda i metoda duala.

## 2.2 Grafička metoda za rešavanje problema linearнog programiranja

Radi lakšeg vizuelnog pristupa i uočavanja nekih opštih svojstava problema linearнog programiranja, prvo će biti predstavljena grafička metoda za rešavanje problema linearнog programiranja u dvodimenzionalnom slučaju. Grafička metoda se koristi za rešavanje problema sledećeg oblika

$$J(u) = \langle x, u \rangle \rightarrow \min (\max)$$

$$x \in U = \{x \in R^2, Ax \leq b, A \in R^{m,2}, b \in R^m, x_i \geq 0, i = 1,2\}.$$

Na narednim primerima predstavljena je geometrijska interpretacija problema LP.

**Primer 2.2.1** Data je funkcija cilja

$$J(x_1, x_2) = 3x_1 + 3x_2$$

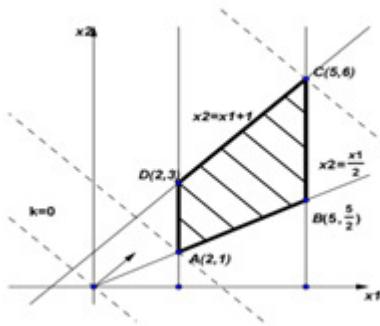
i skup ograničenja

$$U = \{(x_1, x_2) \in R^2; \begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leq 1, \\ -x_1 + 2x_2 &\geq 0, \\ x_1 &\leq 5, \\ x_2 &\geq 2, \\ x_1, x_2 &\geq 0 \}\}.$$

Odrediti tačke u kojima funkcija cilja dostiže minimalnu i maksimalnu vrednost na skupu  $U$ .

Dopustiv skup  $U$  predstavljen je na slici 1. Najpre se odredi presek ravni  $z = 0$  i  $z = 3x_1 + 3x_2$ . Presečna tačka dobija se rešavanjem jednačine  $3x_1 + 3x_2 = 0$  i to je prava  $x_2 = -x_1$ .

Gradijent funkcije cilja je vektor  $(3,3)$  tako da je funkcija cilja rastuća. Vektor  $\overrightarrow{OM}$ ,  $M = (3,3)$  je vektor normale na presečnu pravu  $x_2 = -x_1$ . Povlače se prave paralelne sa presečnom pravom u pravcu i smeru vektora  $\overrightarrow{OM}$ . Prvi presek sa dopustivim skupom  $U$  predstavlja minimum i to je tačka  $A(2,1)$ . Poslednji presek sa skupom  $U$  je maksimum i to je tačka  $C(5,6)$ .



Slika 1

Pošto je dopustiv skup ograničen zadatak se može rešiti i na drugi način, primenom teoreme 2.1.3. Kako linearna funkcija cilja nad ograničenim konveksnim dopustivim skupom dostiže svoj minimum (maksimum) u nekom vrhu, potrebno je izračunati vrednost funkcije cilja u svakom vrhu dopustivog skupa (slika 1) i utvrditi u kom vrhu je vrednost funkcije cilja najmanja (taj vrh je minimum) i u kom je najveća (taj vrh je maksimum). Dobijene su sledeće vrednosti

Vrh	$(2,1)$	$(5,5/2)$	$(5,6)$	$(2,3)$
Funkcija cilja	9	22,5	33	15

Zaključuje se da funkcija cilja dostiže minimum u tački **(2,1)**, a maksimum u tački **(5,6)**.

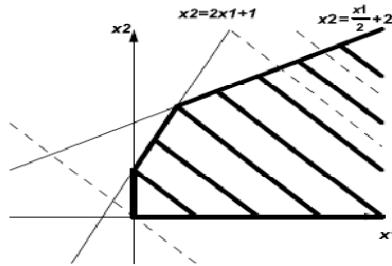
**Primer 2.2.2** Rešiti problem

$$J(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \rightarrow \min (\max)$$

$$(x_1, x_2) \in U = \{(x_1, x_2) \in R^2, 2x_1 + x_2 \geq 1, \\ -x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ x_1, x_2 \geq 0\}.$$

Dopustiv skup  $U$  prikazan je na slici 2, pri čemu se uočava da je skup neograničen.

Funkcija cilja dostiže minimum u tački **(0,0)**, dok tačka maksimuma ne postoji, jer funkcija cilja nije ograničena sa gornje strane.



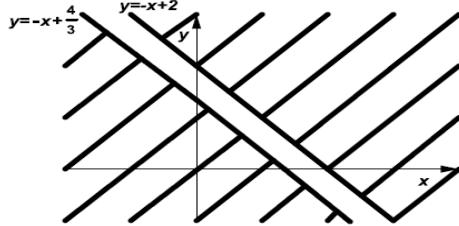
Slika 2

**Primer 2.2.3** Rešiti problem

$$J(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 \rightarrow \min$$

$$U = \{(x_1, x_2) \in R^2, x_1 + x_2 \geq 2, \\ 3x_1 + 3x_2 \leq 4, \\ x_1, x_2 \geq 0\}.$$

Dopustiv skup je dat na slici 3



Slika 3

Uočava se da je dopustiv skup prazan, tako da ovaj problem nema rešenje.

## 2.3 Simpleks metod

Simpleks metod je jedan od najznačajnijih, a samim tim i najpoznatijih tehniki za rešavanje problema LP. Nastao je 1947. godine i njegov tvorac je Džordž Dantzig. U ovom radu je naveden algoritam metoda za problem bez degeneracije. Algoritam je dat u dva dela. Prvi deo, tzv. sekundarni simpleks algoritam prepostavlja poznavanje polaznog vrha (mogućeg rešenja), a drugi deo tzv. primarni simpleks algoritam nalazi početni vrh za sekundarni simpleks algoritam ili konstantuje da je skup ograničenja prazan, tj. da problem nema rešenje.

### 2.3.1 Sekundarni simpleks metod

Kao što je već napomenuto sekundarni simpleks metod podrazumeva poznavanje polaznog vrha. Problem koji se rešava je oblika

$$J(x) = \langle c, x \rangle \rightarrow \min$$

$$x \in U = \{x \in R^n, Ax = b, x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n\}$$

$$A \in R^{m,n}, b \in R^m, b > 0, \text{rang}(A) = r < n.$$

Neka je  $v \in U$  vrh i neka  $A_1, A_2, \dots, A_r$  predstavljaju bazu vrha  $v$ , a  $v_1, v_2, \dots, v_r$  su bazične komponente vrha  $v$ , dok su nebazične komponente jednake nuli.

Matrica baze ima oblik  $B = (A_1, A_2, \dots, A_r) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{bmatrix}$ ,  $A_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{rj} \end{bmatrix}, j = 1, \dots, r$

$$\bar{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_r \end{bmatrix}, \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix}, \bar{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix}.$$

Matrica  $B$  se sastoji od  $r$  linearne nezavisnih vektora baze pa je njena determinanta različita od nule, što znači da je  $B$  regularna i da postoji njena inverzna matrica  $B^{-1}$ .

Pošto je  $v$  vrh važi

$$v_1 A_1 + v_2 A_2 + \cdots + v_r A_r = b, \text{ tj. } \bar{B} \bar{v} = b,$$

odakle sledi

$$\bar{v} = B^{-1}b.$$

Sistem  $Ax = b$  je ekvivalentan sa

$$\underbrace{x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_r A_r}_{B\bar{x}} + x_{r+1} A_{r+1} + \cdots + x_n A_n = b$$

$$B\bar{x} + x_{r+1} A_{r+1} + \cdots + x_n A_n = b.$$

Množenjem jednačine sa  $B^{-1}$  sa leve strane dobija se

$$\bar{x} + B^{-1} A_{r+1} x_{r+1} + \cdots + B^{-1} A_n x_n = B^{-1} b,$$

a kako je

$$\bar{v} = B^{-1}b,$$

sledi

$$\bar{x} + B^{-1} A_{r+1} x_{r+1} + \cdots + B^{-1} A_n x_n = \bar{v}. \quad (2.3.1.1)$$

Neka je

$$B^{-1} A_j = \begin{bmatrix} \gamma_{1j} \\ \gamma_{2j} \\ \vdots \\ \gamma_{rj} \end{bmatrix}, \quad j = r+1, \dots, n,$$

tada sledi

$$x_1 + \gamma_{1,r+1} x_{r+1} + \cdots + \gamma_{1,n} x_n = v_1$$

$$x_2 + \gamma_{2,r+1} x_{r+1} + \cdots + \gamma_{2,n} x_n = v_2$$

⋮

$$x_r + \gamma_{r,r+1} x_{r+1} + \cdots + \gamma_{r,n} x_n = v_n.$$

Na osnovu (2.3.1.1) je

$$\bar{x} + \sum_{j=r+1}^n B^{-1}A_j x_j = \bar{v}$$

tj.

$$\bar{x} = \bar{v} - \sum_{j=r+1}^n B^{-1}A_j x_j.$$

Dakle bazične komponente proizvoljne tačke  $x \in U$  se mogu izraziti preko njenih nebazičnih komponenti i preko bazičnih komponenti poznatog vrha. Vrednost funkcije cilja u proizvoljnoj tački  $x \in U$  se može predstaviti na sledeći način

$$\begin{aligned} J(x) &= \langle c, x \rangle = \sum_{j=1}^n c_j x_j = \sum_{j=1}^r c_j x_j + \sum_{j=r+1}^n c_j x_j = \\ &= \langle \bar{c}, \bar{x} \rangle + \sum_{j=r+1}^n c_j x_j = \\ &= \langle \bar{c}, \bar{v} - \sum_{j=r+1}^n B^{-1}A_j x_j \rangle + \sum_{j=r+1}^n c_j x_j = \\ &= \langle \bar{c}, \bar{v} \rangle - \langle \bar{c}, \sum_{j=r+1}^n B^{-1}A_j x_j \rangle + \sum_{j=r+1}^n c_j x_j = \\ &= \langle c, v \rangle - \sum_{j=r+1}^n \underbrace{(\langle \bar{c}, B^{-1}A_j \rangle - c_j)}_{\Delta_j} x_j = \\ &= J(v) - \sum_{j=r+1}^n \Delta_j x_j. \end{aligned}$$

Dakle

$$J(x) = J(v) - \sum_{j=r+1}^n \Delta_j x_j.$$

Ako je

$$\sum_{j=r+1}^n \Delta_j x_j \geq 0,$$

tj. ako je ispunjen uslov  $\Delta_j \geq 0, j = r + 1, \dots, n$ , tada sledi  $J(x) \leq J(v)$ .

Svaki LPS problem se može svesti na oblik

$$\begin{aligned}
J(x) &= \langle c, x \rangle \rightarrow \min \\
x_1 + \gamma_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + \gamma_{1,n}x_n &= b_1 \\
x_2 + \gamma_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + \gamma_{2,n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
x_r + \gamma_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + \gamma_{r,n}x_n &= b_r \\
x &\geq 0, b > 0.
\end{aligned} \tag{2.3.1.2}$$

Ekvivalentan zapis ovog problema je

$$J(x) = \langle c, x \rangle \rightarrow \min$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0,$$

gde je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \gamma_{1,r+1} & \gamma_{1,r+2} & \cdots & \gamma_{1,n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \gamma_{2,r+1} & \gamma_{2,r+2} & \cdots & \gamma_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & \gamma_{r,r+1} & \gamma_{r,r+2} & \cdots & \gamma_{r,n} \end{bmatrix}$$

matrica tipa  $r \times n$ ,  $\text{rang}(A) = r$ . Zbog pretpostavke da je  $b > 0$ , tačka  $v = (b, 0)$  je nedegenerisan vrh skupa  $U$ , gde  $0 \in R^{n-r}$ ,

$$U = \{x \in R^n, Ax = b, x \geq 0\}.$$

Jedinični vektori su baza vrha  $v$ . Vektor  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_r)$  označava bazične komponente proizvoljne tačke  $x \in U$ , a vektor  $\check{x} = (x_{r+1}, \dots, x_n)$  nebazične.

Nakon svođenja LPS problema na željeni oblik primenjuje se algoritam za sekundarni simpleks metod.

## Algoritam za sekundarni simpleks metod

Korak 1: Formira se tabela koja odgovara vrhu  $v$

	$x_{r+1}$	$\dots$	$x_k$	$\dots$	$x_n$	
$x_1$	$\gamma_{1,r+1}$	$\dots$	$\gamma_{1,k}$	$\dots$	$\gamma_{1,n}$	$v_1$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$x_s$	$\gamma_{s,r+1}$	$\dots$	$\gamma_{s,k}$	$\dots$	$\gamma_{s,n}$	$v_s$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$x_r$	$\gamma_{r,r+1}$	$\dots$	$\gamma_{r,k}$	$\dots$	$\gamma_{r,n}$	$v_r$
	$\Delta_{r+1}$	$\dots$	$\Delta_k$	$\dots$	$\Delta_n$	$J(v)$

gde je

$$\Delta_j = \langle \bar{c}, B^{-1}A_j \rangle - c_j, \quad j = r + 1, \dots, n.$$

Korak 2: Ako je  $\Delta_{r+1}, \Delta_{r+2}, \dots, \Delta_n \leq 0$  tada je  $v$  optimalno rešenje problema i postupak se završava, a  $J(v)$  je vrednost funkcije cilja u optimalnom rešenju. Inače, prelazi se na korak 3.

Korak 3: Odredi se  $\Delta_k = \max_{j \in I} \Delta_j$ ,  $I = \{j, j \in \{r + 1, \dots, n\}, \Delta_j > 0\}$ . Posmatra se kolona iznad  $\Delta_k$ . Ako u njoj nema pozitivnih elemenata, tj. ako je  $\gamma_{ik} \leq 0$ ,  $i = 1, \dots, r$  tada problem nema rešenje jer funkcija cilja nije ograničena sa donje strane na skupu  $U$  i postupak se završava. U suprotnom prelazi se na korak 4.

Korak 4: Odredi se  $s$  iz uslova

$$\frac{v_s}{\gamma_{s,k}} = \min_{i \in I_k} \frac{v_i}{\gamma_{i,k}}, \quad I_k = \{i, i \in \{1, \dots, r\}, \gamma_{i,k} > 0\}.$$

Element  $\gamma_{s,k}$  se naziva pivot.

Korak 5: Prethodna tabela se transformiše u novu tabelu koja odgovara novom vrhu  $w$  za koji važi

$$J(w) \leq J(v).$$

Bazu vrha  $w$  čine vektori  $A_1, A_2, \dots, A_{s-1}, A_k, A_{s+1}, \dots, A_r$ . Proizvoljna tačka  $x \in U$  ima bazične komponente  $x_1, x_2, \dots, x_{s-1}, x_k, x_{s+1}, \dots, x_r$ , a nebazične  $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_{k-1}, x_s, x_{k+1}, \dots, x_n$ . Tabela koja odgovara novom vrhu  $w$  je oblika

	$x_{r+1}$	$\cdots$	$x_{k-1}$	$x_s$	$x_{k+1}$	$\cdots$	$x_n$	
$x_1$	$\gamma'_{1,r+1}$	$\cdots$	$\gamma'_{1,k-1}$	$\gamma'_{1,s}$	$\gamma'_{1,k+1}$	$\cdots$	$\gamma'_{1,n}$	$v'_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_{s-1}$	$\gamma'_{s-1,r+1}$	$\cdots$	$\gamma'_{s-1,k-1}$	$\gamma'_{s-1,s}$	$\gamma'_{s-1,k+1}$	$\cdots$	$\gamma'_{s-1,n}$	$v'_{s-1}$
$x_k$	$\gamma'_{k,r+1}$	$\cdots$	$\gamma'_{k,k-1}$	$\gamma'_{k,s}$	$\gamma'_{k,k+1}$	$\cdots$	$\gamma'_{k,n}$	$v'_k$
$x_{s+1}$	$\gamma'_{s+1,r+1}$	$\cdots$	$\gamma'_{s+1,k-1}$	$\gamma'_{s+1,s}$	$\gamma'_{s+1,k+1}$	$\cdots$	$\gamma'_{s+1,n}$	$v'_{s+1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_r$	$\gamma'_{r,r+1}$	$\cdots$	$\gamma'_{r,k-1}$	$\gamma'_{r,s}$	$\gamma'_{r,k+1}$	$\cdots$	$\gamma'_{r,n}$	$v'_r$
	$\Delta'_{r+1}$	$\cdots$	$\Delta'_{k-1}$	$\Delta'_s$	$\Delta'_{k+1}$	$\cdots$	$\Delta'_n$	$J(w)$

Transformacija se izvodi po sledećim pravilima:

1)  $x_s$  izlazi iz baze, a  $x_k$  ulazi u bazu

$$\gamma'_{k,s} = \frac{1}{\gamma_{s,k}}$$

3) Novi elementi vrste u kojoj je bio pivot su:

$$\gamma'_{k,j} = \frac{\gamma_{s,j}}{\gamma_{s,k}}, \quad j = r + 1, \dots, k - 1, k + 1, \dots, n$$

$$v'_k = \frac{v_s}{\gamma_{s,k}}$$

4) Novi elementi kolone u kojoj je bio pivot su:

$$\gamma'_{i,s} = -\frac{\gamma_{i,k}}{\gamma_{s,k}}, \quad i = 1, \dots, s - 1, s + 1, \dots, r$$

$$\Delta'_s = -\frac{\Delta_k}{\gamma_{s,k}}$$

5) Svi ostali elementi u tabeli dobijaju se na sledeći način:

$$\gamma'_{i,j} = \frac{\gamma_{i,j}\gamma_{s,k} - \gamma_{i,k}\gamma_{s,j}}{\gamma_{s,k}}, \quad i = 1, \dots, s - 1, s + 1, \dots, r, \quad j = r + 1, \dots, k - 1, k + 1, \dots, n$$

$$\Delta'_j = \frac{\gamma_{s,k}\Delta_j - \gamma_{s,j}\Delta_k}{\gamma_{s,k}}, \quad j = r + 1, \dots, k - 1, k + 1, \dots, n$$

$$v'_i = \frac{v_i\gamma_{s,k} - v_s\gamma_{i,k}}{\gamma_{s,k}}, \quad i = 1, \dots, s - 1, s + 1, \dots, r$$

$$J(w) = \frac{J(v)\gamma_{s,k} - v_s\Delta_k}{\gamma_{s,k}}$$

w je novi vrh pri čemu je

$$w_i = v'_i, \quad i = 1, \dots, s - 1, k, s + 1, \dots, r,$$

$$w_i = 0, \quad i = r + 1, \dots, k - 1, s, k + 1, \dots, n.$$

Vrh  $v$  se zamenjuje vrhom  $w$  i ponovo se vraća na korak 2 i postupak se ponavlja sa novom tabelom.

Treba napomenuti da se pivot bira u koloni sa maksimalnom vrednosti  $\Delta_i$  (korak 3). Takav postupak ne određuje put kojim se najbrže dolazi do rešenja. Maksimalna vrednost se uzima da bi algoritam bio jednoznačan, inače pivot se može birati u bilo kojoj koloni koja odgovara nekom  $\Delta_i > 0$ . Ne postoji pravilo izbora kolone u kojoj se određuje pivot koje bi garantovalo najbrži dolazak do rešenja.

Na sledećem primeru je ilustrovan sekundarni simpleks metod.

### Primer 2.3.1 Rešiti problem

$$\begin{aligned} J(x_1, x_2) &= 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max \\ 3x_1 + 3x_2 &\leq 12 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1 &\leq \frac{5}{2} \\ x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Funkcija cilja se pomnoži sa (-1) da bi se problem sveo na problem minimizacije i svakom  $i$ -tom ograničenju se dodaje dopunska promenljiva  $d_i \geq 0$ .

Dobija se ekvivalentan problem oblika

$$\begin{aligned} -J(x_1, x_2) &= -3x_1 - 2x_2 \rightarrow \min \\ 3x_1 + 3x_2 + d_1 &= 12 \\ 2x_1 + x_2 + d_2 &= 6 \\ x_1 + d_3 &= \frac{5}{2} \\ x_2 + d_4 &= 3 \\ x_1, x_2, d_1, d_2, d_3, d_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

Vektor  $v = (d_1, d_2, d_3, d_4, x_1, x_2) = (12, 6, \frac{5}{2}, 3, 0, 0)$  je vrh dopustivog skupa. Tablica pridružena ovom vrhu je oblika

	$x_1$	$x_2$	
$d_1$	3	3	12
$d_2$	2	1	6
$d_3$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$
$d_4$	0	1	3
$-J$	3	2	0

Pošto je  $\Delta_1 = 3$  i  $\Delta_2 = 2$  vrh  $v$  nije optimalno rešenje. Kako je

$$\max\{3,2\} = 3,$$

znači da će u narednom koraku  $x_1$  ući u bazu. Da bi se videlo koji element izlazi iz baze traži se  $\min\left\{\frac{12}{3}, \frac{6}{2}, \frac{5}{2}\right\} = \frac{5}{2}$ . Dakle iz baze izlazi  $d_3$ , a pivot je  $\gamma_{3,1} = 1$ . Primenom transformacija dobija se sledeća tabela koja odgovara novom vrhu  $w$  čije su bazične komponente

$$(d_1, d_2, x_1, d_4) = \left(\frac{9}{2}, 1, \frac{5}{2}, 3\right),$$

a nebazične  $d_3, x_2$ . Vrednost funkcije cilja u ovom novom vrhu je

$$-J(w) = -15/2.$$

	$d_3$	$x_2$	
$d_1$	-3	3	$9/2$
$d_2$	-2	$\frac{1}{2}$	1
$x_1$	1	0	$5/2$
$d_4$	0	1	3
$-J$	-3	2	$-15/2$

Ovaj vrh nije optimalno rešenje pa se ponavljanjem postupka dolazi do novog pivota ( $x_2$  ulazi u bazu, dok  $d_2$  izlazi) i dobija se tabela koja odgovara novom vrhu u kome je vrednost funkcije cilja manja nego u prethodnom.

	$d_3$	$d_2$	
$d_1$	<u>3</u>	-3	$3/2$
$x_2$	-2	1	1
$x_1$	1	0	$5/2$
$d_4$	2	-1	2
$-J$	1	-2	$-19/2$

Ni ovaj vrh nije optimalno rešenje, pa se ponovo vrši transformacija tabele i dobija se

	$d_1$	$d_2$	
$d_3$	$1/3$	-1	$1/2$
$x_2$	$2/3$	-1	<b>2</b>
$x_1$	$-1/3$	1	<b>2</b>
$d_4$	$-2/3$	1	1
$-J^*$	$-1/3$	-1	-10

Ova tabela je optimalna jer su ocene vrha negativne, tj.  $-\frac{1}{3} < 0$  i  $-1 < 0$ . Dakle optimalno rešenje problema je vrh

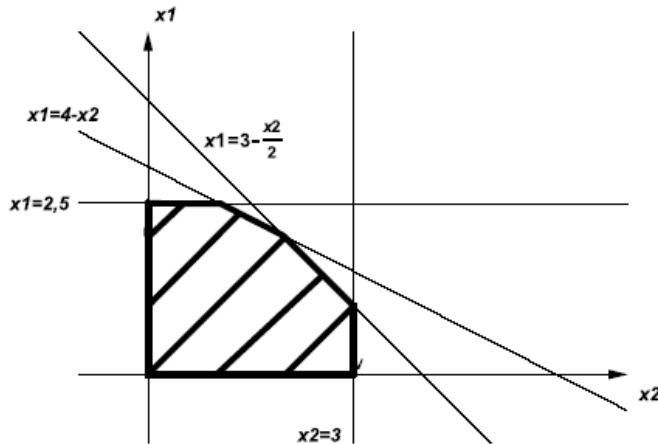
$$x_1^* = 2, x_2^* = 2$$

$$d_1^* = 0, d_2^* = 0, d_3^* = 1/2, d_4^* = 1.$$

Vrednost funkcije cilja u optimalnom rešenju je

$$-J^* = -10, \text{ tj. } J^* = 10.$$

Pošto je dati problem dvodimenzionalan može se rešiti i grafičkom metodom i rešenje je predstavljeno na slici 4.



Slika 4

Grafička metoda je potvrdila da je optimalno rešenje problema

$$x_1^* = x_2^* = 2.$$

U poglavlju 5 je prikazano rešavanje zadatka 2.3.1 pomoću programskog paketa LINDO.

### 2.3.2 Primarni simpleks metod

U slučaju da problem LP nema oblik (2.3.1.2) pogodan za primenu sekundarnog simpleks metoda, tada prvo treba primeniti primarni simpleks metod koji određuje početni vrh  $v$ , i zatim sistem ograničenja svodi na oblik (2.3.1.2) ukoliko skup  $U_s$  nije prazan. Ako je pak  $U_s$  prazan skup, algoritam to konstataže i završava se postupak konstatacijom da problem (2.3.1.2) nema smisla. Ukoliko je skup  $U_s$  neprazan može se desiti da u njemu postoje linearne zavisne jednačine tj. ograničenja. Primarni simpleks algoritam eliminiše te jednačine i sistem dovodi na oblik kod koga je rang matrice jednak broju ograničenja. Primarni simpleks algoritam se primenjuje na problem oblika

$$\begin{aligned} J(x) &= \langle c, x \rangle \rightarrow \min \\ x \in U &= \{x \in R^n, Ax = b, x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n\} \\ A &\in R^{m,n}, b \in R^m, b > 0. \end{aligned} \tag{2.3.2.1}$$

#### Algoritam za primarni simpleks metod

Korak 1: Problemu (2.3.2.1) se pridružuje pomoćni problem. Najpre se formira pomoćna funkcija cilja koja se dobije kao zbir veštačkih promenljivih.

$$J_1(z) = x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+m} \rightarrow \min. \tag{2.3.2.2}$$

Dobijeni pomoćni problem je oblika

$$\begin{aligned}
 J_1(z) &\rightarrow \min \\
 z \in Z &= \{z \in R^{m+n}, z = (x, w), z \geq 0, Cz = b\} \\
 C &= (A, E), C \in R^{m,m+n}, E \in R^{m,m}, b \in R^m \\
 z &= (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}), w = (x_{n+1}, \dots, x_{n+m}),
 \end{aligned} \tag{2.3.2.3}$$

gde su  $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$  veštačke promenljive i ima ih ukupno  $m$ .

$$Cz = b \Leftrightarrow Ax + Ew = b$$

$$[A \quad E] \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} = b.$$

Za  $w = 0$  skup  $Z$  se poklapa sa skupom  $U_s$ . Problem (2.3.2.3) ima istu formu kao (2.3.1.2) za  $r=m$ . Rang matrice  $C$  je  $m$ . Tačka  $v = (0, b)$  je vrh problema (2.3.2.3), pa se može primeniti sekundarni simpleks algoritam. Dakle, vrh skupa  $Z$  je  $x = 0, w = b$ , tj.  $v = (0, \dots, 0, b_1, \dots, b_m)$ .

Korak 2: Reši se problem (2.3.2.3) primenom sekundarnog simpleks algoritma. Neka je  $z^*$  rešenje tog problema. Važi  $J_1(z^*) \geq 0$ .

Korak 3: Ako je  $J_1(z^*) > 0$  algoritam se završava konstatacijom da zadatak (2.3.1.2) nema rešenje. Skup  $U_s$  je prazan. Inače, ide se na korak 4.

Korak 4: Kako je  $J_1(z^*) = 0$  i  $z^* = (v, 0)$  gde je  $v = (v_1, \dots, v_n)$  vrh skupa  $U_s$  i  $w = 0 \in R^m$ , formira se nova simpleks tabela za vrh  $v$  na osnovu simpleks tabele za vrh  $z^* = (v, 0)$ .

4.1) Izbriše se poslednja vrsta u tabeli vrha  $z^*$ .

4.2) Uoči se deo tabele u preseku vrsta koje odgovaraju veštačkim promenljivim  $(x_{n+1}, \dots, x_{n+m-r})$  koje su u bazi i kolona koje odgovaraju nebazičnim promenljivim  $(x_{r+1}, \dots, x_n)$ . Ako taj deo tabele ne postoji ide se na 4.3), a ako postoji ide se na 4.4).

4.3) Pošto ne postoje veštačke promenljive u bazi vrha  $z^*$ , baza vrha  $z^*$  se poklapa sa bazom vrha  $v$ . Neka u tabeli ima  $r$  bazičnih promenljivih, tada je  $\text{rang}(A)=r$ . Iz tabele se eliminišu one kolone koje odgovaraju veštačkim promenljivima (svi elementi su im nula) i poslednja vrsta se ispunjava na sledeći način

$$\Delta_i = \sum_{s=1}^r c_s \gamma_{s,i} - c_i, \quad i = r+1(1)n, \text{ i } J(v).$$

Prelazi se na sekundarni simpleks metod.

4.4) U uočenom delu tabele postoji  $\gamma_{n+p,k} > 0$ ,  $r+1 \leq k \leq n$ . Uzimajući  $\gamma_{n+p,k}$  kao pivot transformiše se tabela prema pravilima sekundarnog simpleks algoritma. Desne strane

odgovarajućih jednačina su jednake nuli, tako da se ostaje u istom vrhu. Menja se samo baza. Iz baze se izbacuje veštačka promenljiva  $x_{n+p}$ , a u bazu se uvodi promenljiva  $x_k$ . Iz tabele se briše kolona koja odgovara veštačkoj promenjivoj  $x_{n+p}$  (vektor je jednak nuli). Postupak se ponavlja sve dok ne nastupi 4.5) ili 4.6).

4.5) U bazi nema više veštačkih promenljivih i prelazi se na 4.3).

4.6) U uočenom delu tabele nema pozitivnih elemenata. Tada je moguće da su u  $(n+i)$ -toj jednačini svi koeficienti  $\gamma_{n+i,j} = 0$ . Ovakva jednačina se izostavlja iz daljeg razmatranja jer predstavlja identitet. Dalje, navedenom delu tabele odgovaraju samo jednačine kod kojih su svi koeficijenti negativni ili nula. Pošto su desne strane jednake nuli, jednačine su zadovljene samo u slučaju da su sve promenljive uz negativne koeficijente jednake nuli. Dakle, promenljive uz negativne  $\gamma_{n+p,j}$  se izjednačavaju sa nulom. To su anulirane promenljive. Nakon toga uočeni deo tabele predstavlja trivijalne identitete i izostavlja se iz daljeg razmatranja.

4.7) Kolone koje odgovaraju anuliranim promenljivima izostavljaju se iz daljeg razmatranja i u funkciji cilja početnog problema (2.3.2.1) se unose nule umesto anuliranih promenljivih. Popuni se poslednja vrsta sa

$$\Delta_i = \sum_{s=1}^r c_s \gamma_{s,i} - c_i, \quad i \in I, \text{ i } J(v),$$

gde je  $I$  skup indeksa koji odgovaraju promenljivim koje nisu anulirane u prethodnom koraku.

Korak 5: Primeni se sekundarni simpleks metod. U dobijenom optimalnom rešenju se na mesto anuliranih promenljivih stavljaju nule i tako se dobija  $x^* = (x_1, \dots, x_n)$  rešenje početnog problema (2.3.2.1).

Na narednom primeru ilustrovana je primena primarnog simpleks algoritma.

**Primer 2.3.2.1** Rešiti problem

$$J(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 \rightarrow \min$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 10$$

$$2x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 20$$

$$3x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 7x_5 = 30$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$$

Svakom ograničenju doda se veštačka promenljiva i formira se pomoćna funkcija cilja

$$J_1 = w_1 + w_2 + w_3 \rightarrow \min.$$

Novi skup ograničenja  $Z$  je

$$x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + w_1 = 10$$

$$2x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 - 4x_5 + w_2 = 20$$

$$3x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 7x_5 + w_3 = 30$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \text{ i } w_1, w_2, w_3 \geq 0.$$

Najpre treba minimizirati pomoćnu funkciju cilja  $J_1$  na  $Z$ . Poznat početni vrh je  $w = (10, 20, 30)$ ,  $x = 0$ .

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  su nebazične komponente, a  $w_1, w_2, w_3$  su bazične.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$w_1$	1	3	1	1	-2	10
$w_2$	2	6	1	3	-4	20
$w_3$	3	<u>10</u>	1	6	-7	30
$J_1$	6	19	3	10	-13	60
$J$	-1	1	1	1	-2	0

Primenjuje se sekundarni simpleks algoritam za minimizaciju pomoće funkcije cilja  $J_1$ .

Uzima se maksimalni pozitivan element iz vrste  $J_1 \max\{6, 19, 3, 10\} = 19$  i traži  $\min\left\{\frac{10}{3}, \frac{20}{6}, \frac{30}{10}\right\} = \frac{30}{10}$  pa je pivot 10. Transformacijom se dobija tabela koja odgovara novom vrhu.

	$x_1$	$w_3$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$w_1$	1/10	-3/10	7/10	-8/10	1/10	1
$w_2$	2/10	-6/10	4/10	-6/10	2/10	2
$x_2$	3/10	1/10	1/10	6/10	-7/10	3
$J_1$	3/10	-19/10	11/10	-14/10	3/10	3
$J$	-13/10	1	9/10	4/10	-13/10	-3

Ovaj vrh nije optimalan pa se dalje primenjuje sekundarni simpleks metod. Kako veštačka promenljiva više neće ući u bazu, briše se kolona koja joj odgovara.

	$x_1$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$w_1$	1/10	7/10	-8/10	1/10	1
$w_2$	2/10	4/10	-6/10	2/10	2
$x_2$	3/10	1/10	6/10	-7/10	3
$J_1$	3/10	11/10	-14/10	3/10	3
$J$	-13/10	9/10	4/10	-13/10	-3

Postupak se ponavlja

	$x_1$	$x_4$	$x_5$	
$x_3$	1/7	-8/7	1/7	10/7
$w_2$	1/7	-1/7	<u>1/7</u>	10/7
$x_2$	2/7	5/7	-5/7	20/7
$J_1$	1/7	-1/7	1/7	10/7
$J$	-10/7	10/7	-10/7	30/7

	$x_1$	$x_4$	
$x_3$	0	-1	0
$x_5$	1	-1	10
$x_2$	1	0	10
$J_1$	0	0	0
$J$	0	0	10

Sve veštačke promenljive su izašle iz baze i vrednost funkcije cilja  $J_1(z_*) = 0$ , pa je

$$v^* = (0, 10, 0, 0, 10)$$

vrh dopustivog skupa. Tabela pridružena ovom vrhu je

	$x_1$	$x_4$	
$x_3$	0	-1	0
$x_5$	1	-1	10
$x_2$	<u>1</u>	0	10
$J$	0	0	10

Dalje bi sledila primena sekundarnog simpleks metoda za minimizaciju funkcije  $J$ . Međutim, ova tabela je optimalna jer su ocene vrha nepozitivne. Optimalno rešenje problema je

$$x_1^* = 0, x_2^* = 10, x_3^* = 0, x_4^* = 0, x_5^* = 10.$$

Pored ovog rešenja daljom transformacijom, tj. primenom sekundarnog simpleksa dobija se novo optimalno rešenje

	$x_2$	$x_4$	
$x_3$	0	-1	0
$x_5$	-1	-1	0
$x_1$	<u>1</u>	0	10
$J$	0	0	10

Dakle, funkcija cilja takođe dostiže minimum i u vrhu  $\bar{v}^* = (10, 0, 0, 0, 0)$ . Pošto su ocene vrha nule postupak se nastavlja i dobija se nova tabela

	$x_1$	$x_4$	
$x_3$	0	-1	0
$x_5$	1	-1	10
$x_2$	1	0	10
$J$	0	0	10

identična sa tabelom koja odgovara optimalnom rešenju  $v^*$ . Na osnovu teoreme 2.1.3 zaključuje se da se minimum funkcije cilja dostiže u svakoj tački koja predstavlja konveksnu kombinaciju vrhova  $v^*$  i  $\bar{v}^*$ . Dakle, problem ima beskonačno mnogo rešenja.

## 2.4 Dualnost u linearном програмирању

Svakom problemu linearog programiranja može se pridružiti odgovarajući dualni problem koji ima značajna matematička svojstva. Analizom odnosa između primala i duala bavi se teorija dualnosti.

Neka je dat problem linearog programiranja u *simetričnom obliku*

$$\begin{aligned} P: \quad J_p(x) &= \langle c, x \rangle \rightarrow \max \\ x \in U &= \{x; \\ Ax &\leq b, \\ x &\geq 0, \\ c, x &\in R^n, b \in R^m, A \in R^{m,n}\}, \end{aligned}$$

gde je  $U$  dopustiv skup problema  $P$ .

Ovakav oblik problema naziva se *primal* ili primalni problem, a promenljive  $x_1, \dots, x_n$  su primalne promenljive. Odgovarajući *dual* ili dualni problem koji se pridružuje primalu je oblika

$$\begin{aligned} D: \quad J_d(y) &= \langle b, y \rangle \rightarrow \min \\ \text{nad dopustivim skupom} \quad y \in V &= \{y; \\ A^T y &\geq c, \\ y &\geq 0, \\ c \in R^n, b, y &\in R^m, A \in R^{m,n}\} \end{aligned}$$

pri čemu su  $y_i$  dualne promenljive.

Lako se može uočiti da za parove zadataka  $P$  i  $D$  važi sledeće:

- 1) matrica skupa ograničenja dualnog problema  $D$  predstavlja transponovanu matricu skupa ograničenja primalnog problema  $P$ ;
- 2) nejednakosti u skupu ograničenja primala i duala su suprotno orijentisane;
- 3) ulogu slobodnih članova u skupu ograničenja duala imaju koeficijenti iz funkcije cilja primala i obrnuto;

- 4) u dualu funkcija cilja  $J_d(y)$  se minimizira, dok se u primalu funkcija cilja  $J_p(x)$  maksimizira.

Problem LP koji nije zadat u simetričnom obliku se može lako transformisati na simetričan oblik sledećim pravilima:

- 1) problem minimizacije funkcije  $J_p(x)$  se može svesti na problem maksimizacije funkcije  $-J_p(x)$ ;
- 2) ograničenje tipa  $\geq$  se množenjem sa  $(-1)$  svodi na ograničenje tipa  $\leq$ ;
- 3) ograničenje oblika  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$  se može zameniti sa dva ograničenja  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i$  i  $-\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq -b_i$ ;
- 4) ako za promenljivu  $x_j$  ne postoji nikakav uslov koji ograničava njen znak, tj. neograničena je po znaku, tada se uvodi smena  $x_j = x_j^+ - x_j^-$ , gde su  $x_j^+$  i  $x_j^-$  nenegativne;
- 5) ako promenljiva  $x_j$  treba da ispunjava ulov  $x_j \leq 0$ , tada se u problem uvodi smena  $x_j' = -x_j$ , gde je  $x_j' \geq 0$ .

Sada će biti naveden jedan od mogućih prikaza dualnog problema sa ekonomskog aspekta.

**Primer 2.4.1** Firma  $\alpha$  je definisala problem: Neka postoje tri mašine za proizvodnju tri različita proizvoda i neka je  $a_{ij}$  vreme (u satima) rada  $j$ -te mašine potrebno za izradu  $i$ -tog proizvoda. Neka je  $b_j$  nedeljni kapacitet radnog vremena na  $j$ -toj mašini, a  $c_i$  cena  $i$ -tog proizvoda.

Firma  $\beta$  želi da iznajmi mašine firme  $\alpha$ . Da bi ponuda firme  $\beta$  bila atraktivna ona mora da ponudi toliko novca po svakom proizvodu koliko bi firma  $\alpha$  dobila kada bi sama izrađivala proizvode. Logično je da firma  $\beta$  želi da minimizira ukupnu sumu troškova. Matematički model zahteva obe firme je sledeći.

Neka je  $x_i$  količina  $i$ -tog proizvoda koji treba proizvesti da bi dobit bila optimalna. Matematički model iz ugla firme  $\alpha$  ima oblik

$$\begin{aligned} c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 &\rightarrow \max \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &\leq b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &\leq b_3 \\ x_i &\geq 0, i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Ako  $d_i$  predstavlja cenu rentiranja  $i$ -te mašine za jedan sat, matematički model iz ugla firme  $\beta$  je

$$b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3 \rightarrow \min$$

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3 \geq c_1$$

$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3 \geq c_2$$

$$a_{13}y_1 + a_{23}y_2 + a_{33}y_3 \geq c_3$$

$$y_i \geq 0, i = 1, 2, 3.$$

Navedeni problemi predstavljaju par dualnih problema.

Izučavanjem matematičkih svojstava odnosa primal-dual bavi se teorija dualnosti, a neka od tih svojstava su ovde navedena.

**Teorema 2.4.1 (teorema slabe dualnosti):** Ako je  $x \in U$  dopustivo rešenje primala i ako je  $y \in V$  dopustivo rešenje duala, tada važi

$$\langle c, x \rangle \leq \langle y, b \rangle$$

odnosno

$$J_p(x) \leq J_d(y).$$

**Dokaz:**

Pošto

$$x \in U \text{ sledi } Ax \leq b$$

i množenjem skalarno obe strane sa  $y$  dobija se

$$\langle y, Ax \rangle \leq \langle y, b \rangle.$$

Kako iz

$$y \in V \text{ sledi } A^T y \geq c,$$

množeći skalarno obe strane sa  $x$  dobija se

$$\langle A^T y, x \rangle \geq \langle c, x \rangle.$$

Dakle, važi

$$\langle c, x \rangle \leq \langle A^T y, x \rangle = \langle y, Ax \rangle \leq \langle y, b \rangle$$

■

**Posledica 2.4.2:** Neka je  $x^*$  dopustivo rešenje primala, a  $y^*$  dopustivo rešenje duala i neka je  $\langle c, x^* \rangle = \langle y^*, b \rangle$ , tada je  $x^*$  optimalno rešenje primala i  $y^*$  optimalno rešenje duala.

**Dokaz:**

Pošto je  $\langle c, x^* \rangle = \langle y^*, b \rangle$ , prema prethodnoj teoremi važi

$$\langle c, x \rangle \leq \langle y^*, b \rangle = \langle c, x^* \rangle, \text{ za } x \in U,$$

gde je

$$U = \{x \in R^n; Ax \leq b, x \geq 0\}.$$

Lako je zaključiti da je  $x^*$  optimalno rešenje problema  $P$ . Analogno iz

$$\langle b, y \rangle \geq \langle c, x^* \rangle = \langle b, y^* \rangle, \text{ za } y \in V,$$

gde je

$$V = \{y \in R^n; yA \geq c, y \geq 0\},$$

sledi da je  $y^*$  optimalno rešenje dualnog problema  $D$ .

■

**Teorema 2.4.3 (teorema jake dualnosti):** Za svaki par zadatka primal-dual važi jedan od sledeća tri iskaza:

- 1) Oba zadatka primal-dual imaju optimalno rešenje. Neka je  $x^*$  optimalno rešenje primala, a  $y^*$  optimalno rešenje duala. Tada važi da je vrednost funkcije cilja primala u njegovom optimalnom rešenju jednaka vrednosti funkcije cilja duala u njegovom optimalnom rešenju, tj.

$$\begin{aligned} J_p(x^*) &= J_d(y^*) \\ \langle c, x^* \rangle &= \langle b, y^* \rangle. \end{aligned}$$

- 2) Ni primal ni dual nemaju rešenje, jer su dopustivi skupovi prazni.
- 3) Jedan od problema nema dopustivo rešenje, a drugi ima dopustivo rešenje, ali nema optimalno rešenje jer funkcija cilja nije ograničena na dopustivom skupu.

Uvođenjem dopunskih promenljivih  $z \in R^m$  i  $\pi \in R^n$  dobijaju se ekvivalentni oblici problema. Pošto važi

$$\alpha \leq \beta \text{ ako i samo ako postoji } \gamma \geq 0 \text{ takvo da važi } \alpha + \gamma = \beta,$$

dovoljeno je uvođenje dopunskih promenljivih u primal.

Novi oblik primala je

$$\begin{aligned}
 c_1x_1 + \cdots + c_nx_n &\rightarrow \max \\
 a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + z_1 &= b_1 \\
 &\vdots \\
 a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n + z_m &= b_m \\
 x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m &\geq 0.
 \end{aligned}$$

U dual se takođe mogu uvesti dopunske promenljive, jer važi

$$\alpha \geq \beta \text{ ako i samo ako postoji } \gamma \geq 0 \text{ takvo da je } \alpha - \gamma = \beta.$$

Novodobijeni oblik duala je

$$\begin{aligned}
 b_1y_1 + \cdots + b_my_m &\rightarrow \min \\
 a_{11}y_1 + \cdots + a_{1m}y_m - \pi_1 &= c_1 \\
 &\vdots \\
 a_{n1}y_1 + \cdots + a_{nm}y_n - \pi_n &= c_n \\
 y_1, \dots, y_m, \pi_1, \dots, \pi_n &\geq 0.
 \end{aligned}$$

Ako primalni problem sadrži  $n$  promenljivih i  $m$  ograničenja, tada dualni problem sadrži  $m$  promenljivih i  $n$  ograničenja.

Za svaku nejednakost (bilo da je reč o primalu ili dualu) u kojoj je dopunska promenljiva pozitivna, vrednost odgovarajuće promenljive primala ili duala je nula. Ovo tvrđenje se naziva *slaba komplementarnost*.

**Definicija 2.4.1:** Uslovi slabe komplementarnosti su :

$$\begin{aligned}
 u_i &\equiv y_i z_i = y_i(b_i - A_i x) = 0, \quad i = 1, \dots, m \\
 v_j &\equiv \pi_j x_j = (A_j^T y - c_j)x_j = 0, \quad j = 1, \dots, n.
 \end{aligned}$$

- Ako je  $A_i x < b_i$  tada za neko  $i$  važi  $y_i = 0$ .
- Sa druge strane ako je  $y > 0$  iz uslova  $A_i x \leq b_i$  i prethodne konstatacije važi  $A_i x = b_i$ .
- Slično ako je  $A_j^T y > c_j$  tada je za neko  $j$   $x_j = 0$ .
- Sa druge strane ako je  $x > 0$  iz uslova  $A_j^T y \geq c_j$  i prethodne konstatacije važi  $A_j^T y = c_j$ .

**Teorema 2.4.4:** Neka je vektor  $x$  dopustivo rešenje primala  $P$  i  $y$  je dopustivo rešenje duala  $D$ , tada  $x$  i  $y$  zadovoljavaju slabu komplementarnost ako i samo ako je  $c^T x = y^T b$ .

**Dokaz:**

Pošto je  $x$  dopustivo rešenje primala  $P$  sledi  $u_i \geq 0$  za svako  $i = 1, \dots, m$  i analogno, pošto je  $y$  dopustivo rešenje duala  $D$  sledi  $v_j \geq 0$  za svako  $j = 1, \dots, n$ .

Neka je  $u = \sum_{i=1}^m u_i$  i  $v = \sum_{j=1}^n v_j$ ,

tada važi

$$\begin{aligned} u + v &= \sum_{i=1}^m u_i + \sum_{j=1}^n v_j = \sum_{i=1}^m y_i(b_i - A_i x) + \sum_{j=1}^n (A_j^T y - c_j)x_j = \\ &= \sum_{i=1}^m y_i b_i - \sum_{i=1}^m y_i A_i x + \sum_{j=1}^n A_j^T y x_j - \sum_{j=1}^n c_j x_j = \\ &= \sum_{i=1}^m y_i b_i - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n y_i a_{ij} x_j + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m y_i a_{ij} x_j - \sum_{j=1}^n c_j x_j = \\ &= y^T b - c^T x. \end{aligned}$$

Dakle,  $u + v = 0$  pošto  $x$  i  $y$  zadovoljavaju slabu komplementarnost, a odatle sledi  $y^T b = c^T x$ .

Sa druge strane ako je  $y^T b = c^T x$  tada važi  $u + v = 0$ , a pošto su oba vektora nenegativna sledi  $u = 0, v = 0$ , tj. ispunjen je uslov slabe komplementarnosti. ■

**Posledica 2.4.5:** Ako je  $x$  dopustivo rešenje za  $P$  i  $y$  dopustivo rešenje za  $D$ , i ako  $x$  i  $y$  zadovoljavaju slabu komplementarnost, tada je  $x$  optimalno rešenje za  $P$  i  $y$  je optimalno rešenje za  $D$ .

**Teorema 2.4.6 (teorema slabe komplementarnosti):** Neka je  $x^*$  dopustivo rešenje primala i  $y^*$  dopustivo rešenje duala i neka je

$$\langle Ax^* - b, y^* \rangle = 0$$

$$\langle x^*, y^* A - c \rangle = 0.$$

Tada je  $x^*$  optimalno rešenje primala, a  $y^*$  optimalno rešenje duala.

**Posledica 2.4.7:** Neka su  $x^*$  i  $y^*$  dopustiva rešenja primala i duala i neka važe sledeće implikacije

$$y_i^* > 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* = b_i$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^* < b_i \Rightarrow y_i^* = 0$$

$$x_j^* > 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i^* = c_j$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i^* > c_j \Rightarrow x_j^* = 0.$$

Tada su  $x^*$  i  $y^*$  optimalna rešenja primala i duala respektivno.

**Teorema 2.4.8 (teorema jake komplementarnosti):** Neka parovi zadataka primal-dual imaju bar jedno dopustivo rešenje, tada postoji bar jedan par optimalnih rešenja  $x^*$ ,  $y^*$  tako da važi

$$b - Ax^* + y^* > 0$$

$$y^*A - c + x^* > 0.$$

**Teorema 2.4.9:** Za problem linearog programiranja važi da je dual duala primal.

Postoje specijalni oblici problema linearog programiranja čija se rešenja jednostavnije dobijaju rešavajući dualni problem. Neka je dat primal oblika

$$J_p(x) = \langle c, x \rangle \rightarrow \min$$

$$Ax \geq b,$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n$$

$$c, x \in R^n, \quad b \in R^m, \quad A \in R^{m,n}$$

$$c \geq 0, b \geq 0.$$

Množenjem sa (-1), dobija se ekvivalentan oblik

$$-J_p(x) = \langle -c, x \rangle \rightarrow \max$$

$$-Ax \leq -b$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n$$

$$c, x \in R^n, \quad b \in R^m, \quad A \in R^{m,n}$$

$$c \geq 0, b \geq 0.$$

Odgovarajući dual ovog problema je oblika

$$-J_d(y) = \langle -b, y \rangle \rightarrow \min$$

$$-A^T y \geq -c$$

$$y_i \geq 0, i = 1, \dots, m$$

$$y \in R^m$$

$$c \geq 0, b \geq 0.$$

Posle množenja duala sa (-1), dobija se

$$J_d(y) = \langle b, y \rangle \rightarrow \max$$

$$A^T y \leq c$$

$$y_i \geq 0, i = 1, \dots, m$$

$$y \in R^m$$

$$c \geq 0, b \geq 0.$$

Ovaj problem se jednostavno rešava primenom sekundarnog simpleks algoritma.

Sada će biti navedena pravila za prevođenje najopštijeg oblika problema linearнog programiranja u njegov dual.

### Pravila za prevodjenje najopštijeg oblika problema linearнog programiranja u odgovarajući dual

- 1) Koeficijenti u funkciji cilja primala postaju slobodni članovi u ograničenjima duala.  
Slobodni članovi u ograničenjima primala postaju koeficijenti u funkciji cilja duala.  
Broj promenljivih primala jednak je broju ograničenja duala i obrnuto, broj promenljivih duala jednak je broju ograničenja primala. Ako je  $A$  matrica ograničenja primala onda je  $A^T$  matrica ograničenja duala.
- 2) Ako je primal problem maksimuma, onda je dual problem minimuma.
- 3) Svakom ograničenju oblika  $\leq$  u primalu odgovara vezana promenljiva  $y_i \geq 0$  u dualu.
- 4) Svakoj vezanoj promenljivoj u primalu  $x_j \geq 0$ , odgovara ograničenje oblika nejednakosti sa istim znakom  $\geq$  u dualu.

- 5) Svakom ograničenju oblika jednakosti u primalu, odgovara slobodna promenljiva  $y_i \in R$  u dualu.
- 6) Svakoj slobodnoj promenljivoj u primalu odgovara ograničenje oblika jednakosti u dualu.

### Formulacija dualnog problema u opštoj formi

Neka je dat najopštiji oblik primala

$$J_p(x) = \langle c, x \rangle \rightarrow \max$$

$$Ax \leq b,$$

$$Cx = g,$$

$$x_j \geq 0, j \in I$$

$$A \in R^{m,n}, C \in R^{s,n}, b \in R^m, g \in R^s, c, x \in R^n$$

$$I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}.$$

Dualne promenljive označene su sa  $y = (p, g)$ ,  $p \in R^m$ ,  $g \in R^s$ . Dualni problem dobijen korišćenjem prethodno navedenih pravila za prevodenje je sledećeg oblika

$$J_d(y) = \langle b, p \rangle + \langle g, q \rangle \rightarrow \min$$

$$(-c + A^T p + C^T q)_j \geq 0, j \in I$$

$$(-c + A^T p + C^T q)_j = 0, j \notin I$$

$$p \geq 0.$$

### **3 Teorija igara**

Teorija igara predstavlja matematičku formalizaciju i analizu procesa racionalnog odlučivanja u uslovima usaglašenih interesa učesnika u igri, konflikta ili delimičnog konflikta njihovih interesa kao i okolnostima rizika i neizvesnosti. Teorija igara analizira proces odlučivanja u kojem učestvuje više osoba, tj. analizira sve one situacije kada konačno rešenje ne zavisi samo od onog učesnika (igrača) koji donosi odluku, nego i od odluka svih ostalih učesnika. Dodatna složenost problema odlučivanja kojima se bavi teorija igara je okruženje unutar kog se donosi odluka, koje je nepredvidivo i promenljivo, kao i interesi učesnika koji su često sukobljeni. Zbog toga se za izraz pobjede u određenoj igri koristi termin "nadigrati". Situacije u kojima igrači imaju međusobno potpuno suprotstavljene interese (ili delimično suprotstavljene) i u kojima svaki igrač želi da zauzme poziciju koja je u suprotnosti sa željama i namerama drugog (ostalih) igrača nazivaju se konfliktne. Igrač ne mora biti pojedinac, već to može biti korporacija, država, stranka, neki tim i sl. Stvarne konfliktne situacije su veoma složene, pa zbog toga intuitivne predstave o uzajamnom odnosu suprotstavljenih strana u nekoj igri zamenjuju precizno utvrđena pravila. Pravilima je određeno pod kojim uslovima igra počinje, koliko igrača u njoj učestvuje, koje su strategije igračima na raspolaganju, kao i krajnji rezultat (isplata igre). Teorija igara polazi od pretpostavke da će svaki igrač koji učestvuje u igri davati prednost većoj isplati u odnosu na manju tj. racionalno se ponašati.

Osnivači teorije igara Fon Nojman i Morgenšttern naglašavaju razlikovanje termina igre gde se kao sinonimi koriste različiti pojmovi „game“ (igra) i „plays“ (igranje). Igra se sastoji od jednog niza poteza, a igranje od jednog niza izbora. U svakodnevnom jeziku to se često poistovećuje. Potezi u igri mogu biti sukcesivni (prvo jedan igrač, pa drugi) ili istovremeni. Strategija predstavlja plan razvoja igre. Ona se zapravo ogleda u izboru određene vrednosti promenljive koja je u opsegu odlučivanja igrača. Preciznije, to je skup detaljnih instrukcija o tome koji potez bi bilo racionalno odigrati u svakom zamislivom stanju igre, uključujući i ona stanja koja u konkretnim realizacijama neće biti dostignuta. Zapravo igrač donosi unapred niz odluka za sve buduće situacije. Optimalna strategija predstavlja opis na koji način bi igrač mogao da igra da bi za sebe postigao najpovoljniji ishod. Strategijski skup predstavlja skup svih akcija (ili poteza) kojima svaki igrač raspolaže pri donošenju svojih odluka. Birajući jednu od svojih raspoloživih strategija igrači određuju jedan ishod igre. Ako se jedan igrač dosledno pridržava izbora jedne strategije, tada je reč o čistoj strategiji (pure strategy). Verovatnoća izbora čiste strategije je jednakna jedinici.

## **3.1 Vrste igara**

Igre se mogu deliti po raznim osnovama: prema broju igrača, prema broju raspoloživih strategija, prema funkciji vremena, prema izboru strategija, prema tome da li je suma konstantna ili promenljiva.

### ***Podela prema broju igrača***

Prema broju igrača igre se dele na igre sa dve, tri, ...,  $n$  osoba. Igre sa dva igrača najviše se koriste u teoriji igara. Ovo nije slučajno budući da se i u svakodnevnom životu najviše susrećemo sa ovakvim tipom igara (npr. šah). Ove igre detaljno su analizirane u teoriji igara. Cilj je da se stanje opiše formom koja je dobro poznata, tj. igrom čije karakteristike su unapred poznate i zapravo predvidive. Igre sa  $n$  igrača su generalizacije igara u kojima učestvuju dva igrača. U daljem izlaganju akcenat je na igrama u kojima učestvuju dva igrača.

### ***Podela prema broju raspoloživih strategija***

Prema broju raspoloživih strategija igre se dele na igre sa konačnim i beskonačnim brojem strategija. Ako bar jedan igrač ima beskonačan skup strategija, reč je o igri sa beskonačnim brojem strategija.

### ***Podela prema funkciji vremena***

U zavisnosti od toga da li su strategije igrača u funkciji vremena, govori se o dinamičkim ili statičkim igramama. Ako igrači svoje odluke donose istovremeno tada se radi o statičkim igramama, a u suprotnom govori se o dinamičkim igramama.

### ***Podela prema izboru strategija***

Izbor strategije u igri može biti deterministički ili stohastički. Igre gde je izbor strategija slučajan (npr. bacanje kocke) nazivaju se stohastičke igre.

### ***Igre sa konstantnom i promenljivom sumom***

Isplata za svakog igrača u igri rezultat je izabrane strategije tog igrača, ali i akcija svih ostalih učesnika u igri. Prema krajnjem ishodu (ukupnoj isplati) igre mogu biti sa konstantnom ili promenljivom sumom.

Igre dva igrača u opštem smislu su predstavljene matricama (tablicama) čiji su elementi uređeni parovi. Igrač 1 ostvaruje svoju strategiju birajući jednu od vrsta matrice, dok igrač 2 ostvaruje strategiju birajući kolonu. Ćelija koja se nalazi u preseku izabranih strategija naziva se

rezultat igre. Prvi član uređenog para rezultata igre predstavlja dobitak igrača 1, a drugi član dobitak igrača 2. U daljem izlaganju podrazumevano je da su oba igrača racionalna, tj. žele da maksimiziraju dobitak. Negativan dobitak je gubitak.

**Definicija 3.1.1:** *Igra sa konstantnom sumom* je igra u kojoj je bez obzira na strategije zbir dobitaka oba igrača uvek jednak.

Specijalan slučaj igara sa konstantnom sumom su *igre nulte sume*, kod kojih je zbir dobitaka igrača jednak nuli. U tom slučaju dobitak jednog igrača predstavlja gubitak drugog igrača. Kod ovih igara umesto uređenih parova u tablicama piše se samo prvi član tog para, on predstavlja dobitak igrača 1 i automatski gubitak igrača 2.

U nastavku je dat primer matrične igre gde je  $C$  matrica plaćanja,  $C \in R^{m,n}$ . Vektor  $a = (a_1, \dots, a_m)$  je skup strategija igrača 1, pri čemu  $a_i$  podrazumeva da igrač 1 bira  $i$ -tu vrstu matrice plaćanja  $C$ . Vektor  $b = (b_1, \dots, b_n)$  je skup strategija igrača 2, gde  $b_j$  podrazumeva da igrač 2 bira  $j$ -tu kolonu matrice plaćanja  $C$ .

Funkcija  $c(a_i, b_j)$  predstavlja vrednost igre ako igrač 1 odigra strategiju  $a_i$ , a igrač 2 strategiju  $b_j$ .

Vrednost igre  $c(a_i, b_j)$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$  će dalje biti predstavljana kao  $c_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$  za koje važi

$$c_{ij} = c(a_i, b_j) = (x_{ij}, y_{ij}) \in R^2 \text{ ako je bimatrična igra u pitanju ili}$$

$$c_{ij} = c(a_i, b_j) = x_{ij} \in R^1 \text{ ako je u pitanju igra nulte sume.}$$

Dakle, matrica plaćanja  $C$  ima sledeći oblik

	$b_1$	...	$b_j$	...	$b_n$
$a_1$	$c_{11}$	...	$c_{1j}$	...	$c_{1n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$a_i$	$c_{i1}$	...	$c_{ij}$	...	$c_{in}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$a_m$	$c_{m1}$	...	$c_{mj}$	...	$c_{mn}$

Ako igrač 1 odigra strategiju  $a_i$ , a igrač 2 strategiju  $b_j$ , tada je rezultat igre  $c_{ij} = (x_{ij}, y_{ij})$ , gde  $x_{ij}$  predstavlja dobitak igrača 1, a  $y_{ij}$  dobitak igrača 2. U slučaju da je ovo igre nulte sume tada dobitak jednog igrača upravo predstavlja gubitak drugog, tj. važi  $x_{ij} = -y_{ij}$  pa rezultat igre može biti predstavljen kao  $c_{ij} = (x_{ij}, -x_{ij})$  ili u jednodimenzionalnoj formi  $c_{ij} = x_{ij}$ . Matrica plaćanja ove igre je

	$b_1$	...	$b_j$	...	$b_n$
$a_1$	$x_{11}$	...	$x_{1j}$	...	$x_{1n}$
:	:	:	:	:	:
$a_i$	$x_{i1}$	...	$x_{ij}$	...	$x_{in}$
:	:	:	:	:	:
$a_m$	$x_{m1}$	...	$x_{mj}$	...	$x_{mn}$

tj.

$$C = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}.$$

Sve igre konstantne sume se lako mogu svesti na igre nulte sume.

## 3.2 Predstavljanje igara

Sve igre se mogu predstaviti na tri različita načina, kao igre u ekstenzivnoj formi, kao igre u normalnoj formi i kao igre u obliku karakteristične funkcije. Na koji način će se predstaviti igra zavisi od prirode problema. U nastavku su prikazane igre nulte sume u ekstenzivnoj i normalnoj formi.

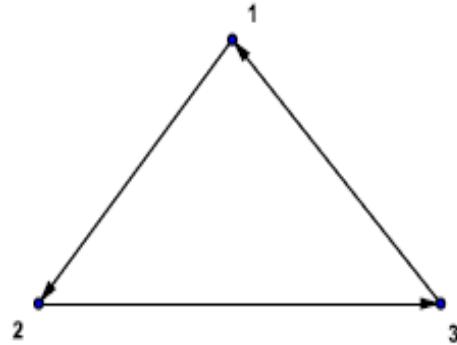
### Igra u ekstenzivnoj formi

Svaku situaciju karakteriše odgovarajuća raspoloživost informacija, kao i precizna procedura odvijanja igranja. Neophodno je da se razviju igre koje će odražavati tok igre kao i njenu informacionu strukturu. U ovakvim situacijama koriste se igre u ekstenzivnoj formi koje se predstavljaju u obliku drveta. Drvo predstavlja skup čvorova i grana povezanih na odgovarajući način. Svaka grana predstavlja jednu raspoloživu akciju za igrača koji donosi odluku u tom čvoru

odlučivanja, dok čvor, ukoliko nije krajnji čvor igre, predstavlja poziciju u igri gde jedan od igrača mora da doneše odluku (tj. rezultat toka igre do date etape). Početna tačka igre se naziva koren ili inicijalni čvor. Čvorovi kojima se igra završava zovu se krajnji ili terminalni čvorovi i često se njihove vrednosti označavaju kao rezultat igre.

Da bi se uspešno prikazale igre u ekstenzivnoj formi moraju biti ispunjeni sledeći uslovi:

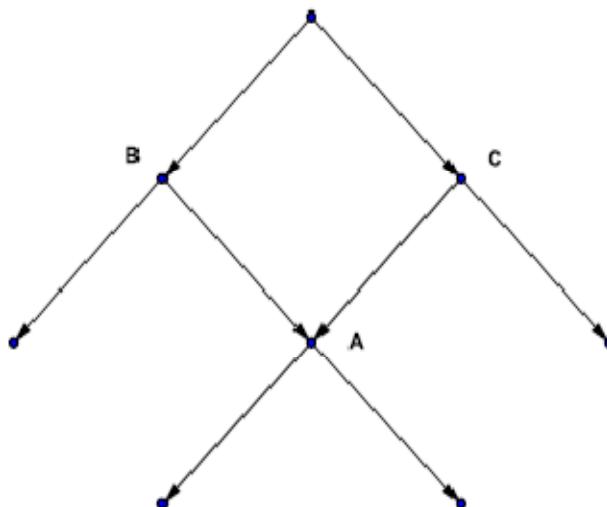
1. Nije dozvoljena cirkularnost, što znači da se ne sme dogoditi situacija kao na slici 5.



Slika 5

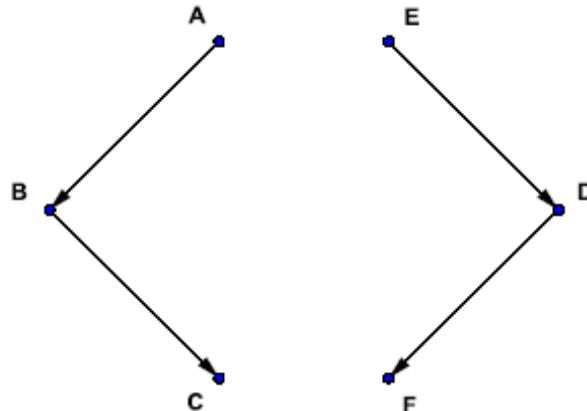
U ovom primeru je nemoguće utvrditi početni čvor, kao ni terminalne čvorove igre.

2. Nije dozvoljena višestrukost, što znači da do svakog čvora odlučivanja, koji nije inicijalni može da vodi najviše jedna grana, a ne kao na slici 6 gde do čvora A vode dve grane tj. do čvora A se može stići iz čvorova B i C.



Slika 6

3. Nije dozvoljena odvojenost strategija kao što vidimo na slici 7. Ovaj grafik ne predstavlja igru u obliku drveta, tj. ove dve igre nisu deo jedne igre.



Slika 7

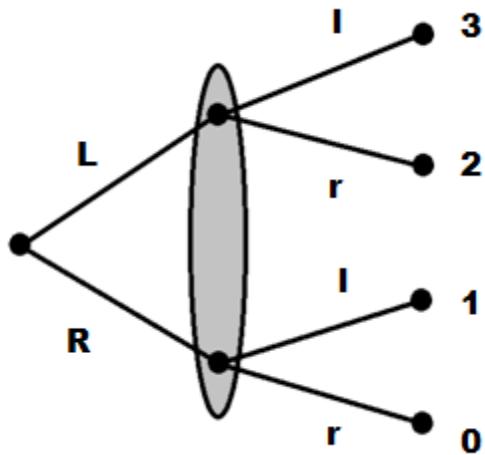
### Igra u normalnoj formi

Kod ovih igara naglasak nije na proceduralnosti i toku igre, niti na njenim informacionim aspektima, kao u ranijem slučaju. Bitna stavka je da igrači u isto vreme donose odluke. Oni ne moraju da donešu odluke baš u isto vreme, ali budući da nemaju mogućnost da saznaju kako je odigrao njihov protivnik, izgleda kao da se odluke donose istovremeno. Ovaj oblik se najčešće primenjuje u slučajevima kad u igri učestvuju dva igrača. U ovakovom načinu prikazivanja igara data je matrica u kojoj vrste predstavljaju raspoložive akcije prvog igrača, a kolone akcije drugog igrača. Svaki od igrača ima na raspolaganju određen broj strategija. Sve raspoložive akcije jednog igrača čine njegov strategijski skup. Ovde je naveden primer igre nulte sume u normalnoj formi

	1	r
L	3	2
R	1	0

Obrazloženje: ako igrač 1 bira strategiju L, a igrač 2 bira strategiju l, tada će igrač 1 ostvariti dobitak 3, a igrač 2 dobitak -3, tj. gubitak 3.

Ova igra se može predstaviti i u ekstenzivnoj formi na sledeći način (slika 8)



Slika 8

Igrač 1 kreće iz inicijalnog čvora i ima na raspolaganju dve strategije L i R, izborom jedne od njih dolazi se do sledećeg čvora, u kome je na potezu igrač 2. On ne zna izbor igrača 1 (igra je istovremena, pa su čvorovi odlučivanja igrača 2 obeleženi sivo) tako da mora doneti odluku za svaki čvor.

### 3.3 Rešavanje igara

Neki tipovi igara omogućavaju lakše pronalaženje rešenja, a samim tim i viši stepen predvidivosti. U teoriji igara se razlikuju mnoge vrste igara i postoji mnoštvo različitih načina rešavanja, koji se uglavnom izvode za jednostavnije igre. U nastavku će biti predstavljena neki karakteristični načini rešavanja.

#### 3.3.1 Eliminacija dominiranih strategija

Koncept dominacije predstavlja traženje odgovora na pitanje koje strategije racionalan igrač nikad neće odigrati. Kaže se da strategija u  $k$ -toj vrsti matrice plaćanja dominira nad strategijom u  $i$ -toj vrsti ako je  $x_{kj} \geq x_{ij}$  za svako  $j$ . Striktna dominacija je definisana sa  $x_{kj} > x_{ij}$  za svako  $j$ . Strategija u  $k$ -toj vrsti je *dominirajuća*, a strategija u  $i$ -toj vrsti je *dominirana*. Slično važi i za kolone. Igrač 1 nema interesa da igra dominiranu strategiju, jer mu odgovarajuća dominirajuća strategija donosi bolji ili u najgorem slučaju isti dobitak, dok igrač 2 nema interesa da odigra dominirajuću strategiju, jer želi da minimizira gubitak. Uklanjanjem dominirane strategije može se desiti da bude uklonjena i neka od optimalnih strategija, međutim ako dođe do ovog slučaja to znači da postoji više optimalnih strategija u igri, i sigurno ostaje bar jedna. Ovakvim postupkom u nekim slučajevima moguće je doći čak i do konačnog rešenja igre uklanjanjem nepoželjnih strategija sve dok ne ostane po jedna za oba igrača.

Najpre će biti predstavljena primena ovog koncepta na primeru igre nulte sume.

U igramama nulte sume dobitak jednog igrača predstavlja gubitak drugog igrača. Sledeća matrica igre predstavlja igru nulte sume.

	$B_1$	$B_2$	$B_3$
$A_1$	7	6	9
$A_2$	5	4	6
$A_3$	8	7	10

Potrebno je imati u vidu da igrač 1 čije su strategije  $A_1, A_2$  i  $A_3$ , nastoji da ostvari maksimalan dobitak u ovoj igri, s druge strane igrač 2 čije su strategije  $B_1, B_2$  i  $B_3$  nastoji da minimizira svoj gubitak. Svaki igrač polazi od toga da je njegov protivnik racionalan i da će igrati tako da za sebe ostvari najbolji mogući rezultat. Igrač 1 upoređujući strategije  $A_1$  i  $A_2$  može da zaključi da mu strategija  $A_1$  donosi veći dobitak (lako se proverava:  $7 > 5, 6 > 4, 9 > 6$ ). U ovom slučaju je strategija  $A_2$  dominirana strategijom  $A_1$ , tj.  $A_1$  je dominantna u odnosu na strategiju  $A_2$ . Eliminacijom strategije  $A_2$  nastaje sledeća tabela

	$B_1$	$B_2$	$B_3$
$A_1$	7	6	9
$A_3$	8	7	10

Ako igrač 2 analizira tabelu, njegova logika je obrnuta. On nastoji da minimizira svoj gubitak. Ukoliko posmatra raspoložive strategije  $B_2$  i  $B_3$  jasno je da mu strategija  $B_2$  donosi manji gubitak u odnosu na strategiju  $B_3$  bez obzira koju strategiju odigrao igrač 1. Strategija  $B_3$  je dominirana strategijom  $B_2$ , tako da se igra redukuje na sledeći oblik

	$B_1$	$B_2$
$A_1$	7	6
$A_3$	8	7

Sa stanovišta igrača 1, strategija  $A_1$  je dominirana strategijom  $A_3$  i shodno tome nova tabela dobija naredni oblik

	$B_1$	$B_2$
$A_3$	8	7

Sledeći na potezu je igrač 2 čija je situacija krajnje jednostavna pa se tako dolazi do tabele

	$B_2$
$A_3$	7

Ovaj oblik predstavlja i konačno rešenje igre jer skupovi strategija oba igrača sadrže po jedan element, tj. mogućnost izbora, a samim tim i neizvesnost više ne postoji. Postavlja se pitanje šta je ravnoteža igre, ekvilibrijum, a šta ravnotežni rezultat. U ovom primeru ravnotežu igre predstavljaju raspoložive strategije  $A_3$  i  $B_2$ . Kombinacija ravnotežnih strategija dovodi do ravnotežnog rezultata igre. Na ovaj postupak bi trebalo da računaju igrači tako što bi igrač 1 trebalo da eliminiše dominirane strategije igrača 2, a igrač 2 dominirane strategije igrača 1.

Na sledećem primeru igre promenljive opšte sume prikazan je koncept dominiranih strategija. Kao što je rečeno, igre promenljive sume su one igre u kojima se u zavisnosti od strategija igrača ostvaruju različite vrednosti igre.

Neka je data igra predstavljena tabelom

	Levo	Sredina	Desno
Gore	(1,0)	(1,2)	(0,1)
Dole	(0,3)	(0,1)	(2,0)

Parovi unutar ćelija ove tabele isplate igre označavaju dobitak prvog i drugog igrača, jer sad dobitak jednog igrača nije jednak gubitku drugog. Tako npr. kombinacija Gore-Levo donosi igraču 1 dobitak od 1, a igraču 2 dobitak 0.

Data tabela je raščlanjena na dve tabele, tako što prva predstavlja isplate igrača 1, a druga isplate igrača 2.

	Levo	Sredina	Desno
Gore	1	1	0
Dole	0	0	2

Igrač 1

	Levo	Sredina	Desno
Gore	0	2	1
Dole	3	1	0

Igrač 2

Za igrača 1 ne postoje dominantna i dominirana strategija, dok igrač 2 ako je racionalan neće odigrati strategiju Desno, jer je ona dominirana u odnosu na strategiju Sredina. Nova tabela je oblika

	Levo	Sredina
Gore	(1,0)	(1,2)
Dole	(0,3)	(0,1)

Sada se menja situacija i za igrača 1. Njemu je strategija Gore bolja od strategije Dole. Shodno tome, on ukoliko je racionalan neće odigrati strategiju Dole. Tako se dobija nova tabela

	Levo	Sredina
Gore	(1,0)	(1,2)

Daljom analizom iz pozicije igrača 2, strategija Sredina dominira nad strategijom Levo. Tako da sledeća tabela ima oblik

	Sredina
Gore	(1,2)

Ovo je zapravo i konačno rešenje početne igre ili ravnotežni rezultat igre. Eliminacijom dominiranih strategija, svakom igraču ostaje na raspolaganju samo jedna strategija koja se naziva ravnotežnom strategijom.

Pored ovog koncepta postoji postupak eliminacije slabo dominiranih strategija. Ako postoji bar jedna isplata u dominiranoj strategiji koja je jednaka isplati u dominantnoj strategiji, reč je o *slaboj dominaciji*. To je prikazano na sledećem primeru.

Neka je data igra

	Levo	Desno
Gore	(0,2)	(0,2)
Dole	(-1,-1)	(1,1)

Strategije igrača 2 su Levo i Desno. Obe strategije igraču 2 donose istu isplatu ako igrač 1 odigra strategiju Gore, međutim ako igrač 1 odigra suprotno, igraču 2 je isplativija strategija Desno ( $-1 < 1$ ). Strategija Desno slabo dominira strategijom Levo i sledeća tabela je

	Desno
Gore	(0,2)
Dole	(1,1)

Primenom striktne dominacije za igrača 1 dolazi se do konačnog rešenja

	Desno
Dole	(1,1)

Kako se tema ovog rada bazira na igrama nulte sume, kod kojih dobitak jednog igrača predstavlja gubitak drugog, u nastavku izlaganja akcenat će biti upravo na ovim igrama.

### **3.3.2 Fon Nojmanovo rešenje**

Fon Nojmanovo rešenje predstavlja jedno od rešenja za opšti slučaj. Reč je o rezultatu koji je među najpoznatijima u teoriji igara. Ovo rešenje zapravo podrazumeva totalnu zaštitu od rizika za oba igrača. Svaki igrač vodeći se ovim rešenjem bira onu strategiju koja mu omogućava maksimalni od svih minimalnih dobitaka svake strategije, tj. igrač zna svoj siguran dobitak koji se ne može smanjiti uticajem suparnika, već naprotiv može samo da se uveća. U nastavku sledi prikaz kako se dolazi do ovog rešenja u čistim i mešovitim strategijama.

Posmatra se matrica plaćanja

$$C = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}.$$

Ako igrač 1 odigra strategiju  $a_i$  tada je njegov siguran dobitak jednak minimumu svih dobitaka date vrste tj.

$$a_i = \min_j x_{ij}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Igrač 1 je racionalan, pa maksimiziranjem sigurnih dobitaka po vrstama ostvaruje *donju granicu vrednosti igre*

$$\alpha = \max_i a_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Strategija koja obezbeđuje nalaženje donje granice igre naziva se maksmin strategija.

Ako igrač 2 odigra strategiju  $b_j$  tada je njegov siguran gubitak jednak maksimumu svih dobitaka date kolone

$$\beta_j = \max_i x_{ij}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Minimiziranjem sigurnih gubitaka po kolonama igrač 2 ostvaruje *gornju granicu vrednosti igre*

$$\beta = \min_j \beta_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Uvek važi nejednakost

$$\alpha \leq \beta$$

tj. donja granica vrednosti igre je uvek manja ili jednaka od gornje granice vrednosti igre, odnosno za bilo koje  $k$  i  $l$  važi

$$\min_j x_{kj} \leq x_{kl} \leq \max_i x_{il}.$$

Ukoliko važi

$$\alpha = \beta$$

tada postoji sedlasta tačka igre i njena vrednost je  $\alpha$  tj.  $\beta$ . Optimalna vrednost igre se nalazi u sedlastoj tački i za oba igrača ako su racionalni, optimalno je da biraju strategije koje definišu sedlastu tačku.

Najjednostavniji slučaj matričnih igara nulte sume su matrične igre koje poseduju sedlastu tačku. Ako postoji element  $x_{ij}$  u matrici plaćanja  $C$  sa osobinom

- 1)  $x_{ij}$  je minimalni element u  $i$ -toj vrsti matrice  $C$
- 2)  $x_{ij}$  je maksimalni element u  $j$ -toj koloni matrice plaćanja  $C$ ,

tada je  $x_{ij}$  sedlasta tačka matrice plaćanja,

$$\max_j \min_i x_{ij} = \min_i \max_j x_{ij} = x_{i^*j^*}.$$

Primer igre nulte sume predstavljen je sledećom tabelom

	Levo	Centar	Desno
Gore	8	1	6
Sredina	9	-2	-8
Dole	-6	-4	8

Svaki igrač ima potpune informacije o raspoloživim strategijama, kako svojim tako i svoga protivnika – ali isto tako zna i rezultate koji mogu da nastupe kombinacijom različitih izabranih strategija. To znači da svaki igrač jasno razlikuje koji mu je rezultat povoljniji od drugog i takvog se stava pri svom izboru doslovno pridržava. Fon Nojman je ponudio sledeće rešenje rukovodeći se kriterijumom opreznosti ili kriterijumom pesimizma. Prvi igrač nastoji da osigura dobitak koji ne zavisi od akcije njegovog protivnika (ako bi birao strategiju Gore siguran dobitak je 1). Igrač 1 traži najmanji broj u svakoj vrsti ove tabele, što znači da dobija rešenja 1, -8 i -6. On će birati strategiju koja mu obezbeđuje maksimalni od ovih minimalnih dobitaka, to je strategija Gore. Minimalan siguran dobitak iznosi 1. Ovaj rezultat prikazan je tabelom

	Levo	Centar	Desno	Min
Gore	8	1	6	<u>1</u>
Sredina	9	-2	-8	-8
Dole	-6	-4	8	-6

Ponašanje igrača 2 sledi istu logiku s tim što on želi da minimizira siguran gubitak. Dolazi do rešenja tražeći maksimum po kolonama, tj. dobija 9, 1, 8. Minimiziranjem gubitka dolazi do rešenja 1, što je predstavljeno sledećom tabelom

	Levo	Centar	Desno
Gore	8	1	6
Sredina	9	-2	-8
Dole	-6	-4	8
Max	9	<u>1</u>	8

Zaključak je da je konačno rešenje ove igre ravnotežni par čistih strategija Gore-Centar, a ravnotežni rezultat igre je 1. To je iznos dobitka igrača 1, a istovremeno iznos gubitka igrača 2.

Za ovakve igre, kod kojih se rešenje može pronaći na predstavljeni način, kaže se da imaju sedlastu tačku. Ovakva strategija se naziva „maxmin“ odnosno „minmax“ strategija. Logika ovakvih igara je da svaki igrač želi da se osigura. Fon Nojman je dokazao da u ovakovom tipu igre postoji neka garantovana vrednost koja ne zavisi od akcija drugog igrača.

Veliki broj matričnih igara ne poseduje sedlastu tačku. Ukoliko igre nemaju sedlastu tačku, Fon Nojman je dokazao da i u ovim igramama postoji rešenje igre, ali u takozvanom prostoru mešovitih strategija. Pretpostavlja se da se igra ponavlja više puta i postavlja se pitanje koliko puta treba igrati koju strategiju tako da se osigura maksimalni očekivani dobitak, odnosno minimalni očekivani gubitak. Rešenje treba tražiti u mešovitim strategijama koje uključuju izbor čistih strategija sa određenom verovatnoćom.

**Teorema 3.3.2.1 (minmax teorema):** Za svaku konačnu igru dve strane sa nultom sumom važi:

- 1) Postoji realni broj  $v$  koji se naziva vrednost igre.
- 2) Postoji mešovita strategija za igrača 1 koja mu osigurava najveći očekivani minimalni dobitak jednak vrednosti igre, bez obzira koju mešovitu strategiju igra igrač 2.
- 3) Postoji mešovita strategija za igrača 2 koja mu osigurava najmanji očekivani maksimalni gubitak jednak vrednosti igre, bez obzira koju mešovitu strategiju igra igrač 1.
- 4) Bilo koja matrična igra sa matricom plaćanja  $C$  ima sedlastu tačku u prostoru mešovitih strategija, tj. postoje vektori verovatnoća  $p$  i  $q$  takvi da je

$$\max_p \min_q p^T C q = \min_q \max_p p^T C q = v.$$

Za igru kažemo da je *fer* ukoliko je  $v = 0$ . Ako je  $v > 0$  tada je na dobitku igrač 1 tj. na gubitku je igrač 2, a ako je  $v < 0$  tada je na dobitku igrač 2 tj. na gubitku je igrač 1.

Vektor  $p$  predstavlja verovatnoću izbora strategija igrača 1

$$p = (p_1, \dots, p_m), \\ p_i \geq 0, \sum_{i=1}^m p_i = 1,$$

gde  $p_i, i = 1, \dots, m$  predstavlja učestalost sa kojom igrač 1 igra čistu strategiju  $a_i$ .

Vektor  $q$  predstavlja verovatnoću izbora strategija igrača 2

$$q = (q_1, \dots, q_n) \\ q_j \geq 0, \sum_{j=1}^n q_j = 1,$$

gde  $q_j, j = 1, \dots, n$  predstavlja učestalost sa kojom igrač 2 igra čistu strategiju  $b_j$ .

Očekivani rezultat igrača 1, koji igra mešovitu strategiju datu vektorom  $p$ , kada igrač 2 igra čistu strategiju  $b_j$  je

$$\sum_{i=1}^m p_i x_{ij}.$$

Očekivani rezultat igrača 2, koji igra mešovitu strategiju datu vektorom  $q$ , kada igrač 1 igra čistu strategiju  $a_i$ , je

$$\sum_{j=1}^n q_j x_{ij}.$$

Očekivani rezultat igre u opštem slučaju kada igrač 1 igra mešovitu strategiju datu vektorom  $p$  i igrač 2 igra mešovitu strategiju datu vektorom  $q$  je

$$p^T C q = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i q_j x_{ij}.$$

Sledeća tabela opisuje igru nulte sume dva igrača. Ako se postupi po rešenju koje je predložio Fon Nojman vidi se da ova igra nema odgovarajuće rešenje u prostoru čistih strategija.

	1	r
L	3	1
R	2	4

Minimalne vrednosti po vrstama iznose 1 i 2, a maksimalne vrednosti po kolonama tabele iznose 3 i 4. Ne postoji takva kombinacija čistih strategija igrača 1 i igrača 2 koja ispunjava zahtev da su te strategije medjusobno najbolji odgovori. Dakle, igra nema rešenje u prostoru čistih strategija. Stoga se rešenja ove igre traže na drugi način, tj. u prostoru mešovitih strategija. Zapravo treba izračunati verovatnoće kojima će igrači birati svoje strategije, ali tako da budu zadovoljeni određeni uslovi. Prepostavka je da će igrač 1 birati strategiju L sa verovatnoćom  $p$ , a strategiju R sa komplementarnom verovatnoćom  $1-p$ . Raspodela verovatnoće igrača 1 može biti predstavljena narednom tabelom

	1	r
L	p	p
R	1-p	1-p

Tabela za igrača 1 ima sledeći oblik

	l	r
L	3p	1p
R	2(1-p)	4(1-p)

Ukoliko igrač 2 bira strategiju l tada je očekivani dobitak za igrača 1

$$3p+2(1-p),$$

što predstavlja zbir iznosa isplate igre pomnoženih ovim verovatnoćama. Ukoliko igrač 2 izabere strategiju r, tada je očekivani dobitak igrača 1

$$1p+4(1-p).$$

Budući da igrač 1 ne zna kako će odigrati igrač 2, on nastoji da se osigura i da mu vrednost koju će ostvariti u igri ne zavisi od toga kako se ponaša igrač 2. Da bi igrač 1 bio indiferentan (ravnodušan), očekivani dobitak u oba slučaja mora biti

$$3p+2(1-p) = 1p+4(1-p).$$

Kada se ova jednačina reši po  $p$  vidi se da je ona zadovoljena za  $p=\frac{1}{2}$ . Ukoliko igrač 1 sa ovom verovatnoćom bira strategiju L i sa verovatnoćom  $\frac{1}{2}$  strategiju R tada je njegov očekivani dobitak u igri  $\frac{5}{2}$ .

Analogno, da bi igrač 2 bio indiferentan treba da važi

$$3q+1(1-q) = 2q+4(1-q).$$

Rešenje ove jednačine je  $q = \frac{3}{4}$ . Ako igrač 2 sa ovom verovatnoćom bira strategiju l i sa verovatnoćom  $\frac{1}{4}$  bira strategiju r tada je njegov očekivani gubitak  $\frac{5}{2}$ . Dakle, kako je reč o igri nulte sume očekivani dobitak igrača 1 je jednak očekivanom gubitku igrača 2. Bitno je takođe imati u vidu da su ova dva skupa mešovitih strategija u ravnoteži. To znači da nijedan igrač ne može da poboljša svoju poziciju promenom ove strategije, ukoliko se drugi igrač pridržava svoje. Ako se radi o igrama gde igrači imaju na raspolaganju više od dve strategije takođe je moguće doći do rešenja, a o tome će više biti reči u nastavku.

### **3.3.3 Nesingularne matrične igre**

Ako je matrica plaćanja nesingularna, rezultat za matrične igre dimenzija  $2 \times 2$  se može uopštiti i za igre dimenzija  $m \times n$ .

Kao što je napomenuto mešovita strategija za igrača 1 izražena je vektorom verovatnoća

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$$

$$\sum_{i=1}^m p_i = 1,$$

gde  $p_i$  predstavlja verovatnoću tj. učestalost pri ponavljanju igre kojom igrač 1 igra čistu strategiju  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Slično, za igrača 2 mešovita strategija je

$$q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$$

$$\sum_{j=1}^n q_j = 1,$$

gde  $q_j$  predstavlja učestalost sa kojom igrač 2 igra čistu strategiju  $b_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Očekivani rezultat igrača 1 kada igra mešovitu strategiju vektorom  $p$ , ako igrač 2 igra čistu strategiju  $b_j$  je

$$\sum_{i=1}^m p_i x_{ij},$$

gde  $x_{ij}$  predstavlja isplatu ako igrač 1 odigra strategiju  $a_i$ , a igrač 2 odigra strategiju  $b_j$ . Slično, očekivani rezultat za igrača 2 kada igra mešovitu strategiju vektorom  $q$ , ako igrač 1 igra čistu strategiju  $a_i$  je

$$\sum_{i=1}^n q_j x_{ij}.$$

U opštem slučaju, ako igrač 1 igra mešovitu strategiju  $p$ , a igrač 2 mešovitu strategiju  $q$ , očekivani rezultat igre je

$$p^T C q = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i q_j x_{ij}.$$

Ukoliko igrač 1 igra optimalnu mešovitu strategiju  $p^*$ , onda će njegov očekivani rezultat biti najmanje jednak optimalnoj vrednosti igre  $v^*$ , bez obzira na strategiju igrača 2, tj. važi

$$\sum_{i=1}^m p_i^* x_{ij} \geq v^*, \text{ za svako } j = 1, 2, \dots, n.$$

Analogno važi i za igrača 2 kad igra optimalnu strategiju  $q^*$ , tj. važi

$$\sum_{j=1}^n q_j^* x_{ij} \leq v^*, \text{ za svako } i = 1, 2, \dots, m.$$

Na osnovu prikazanih zakonitosti sledi *teorema ekvilibrijuma strategija (Snou-Šplijeva teorema)*.

**Teorema 3.3.3.1:** Neka je data igra sa matricom plaćanja  $C$  dimenzija  $m \times n$ , gde igrač 1 ima optimalnu mešovitu strategiju definisanu vektorom  $p^*$ , a igrač 2 vektorom  $q^*$ . Tada je

$$\sum_{i=1}^m p_i^* x_{ij} = v^*, \text{ za svako } j \text{ za koje je } q_j > 0 \text{ i}$$

$$\sum_{j=1}^n q_j^* x_{ij} = v^*, \text{ za svako } i \text{ za koje je } p_i > 0.$$

Ova teorema može se koristiti u rešavanju igara dimenzija  $m \times n$  sa nesingularnom matricom plaćanja  $C$ . Ako igrač 1 igra optimalnu mešovitu strategiju  $p^*$  čiji je svaki element pozitivan, tada iz teoreme ekvilibrijuma sledi da optimalna mešovita strategija  $q^*$  igrača 2 zadovoljava sledeću jednakost

$$\sum_{j=1}^n q_j^* x_{ij} = v^*, \text{ za } i = 1, 2, \dots, m.$$

Ovaj izraz se drugačije može zapisati na sledeći način

$$Cq^* = v^* I_m,$$

gde je  $I_m$  jedinični vektor kolona dimenzija  $m$ . Vrednost igre  $v^*$  ne sme biti jednaka nuli, jer bi tada matrica  $C$  bila singularna. Sada se rešava data jednačina po  $q^*$

$$q^* = C^{-1} v^* I_m.$$

Optimalna vrednost igre  $v^*$  se određuje iz uslova  $I_m^T q^* = 1$ , jer je suma verovatnoća jednakica, gde je  $I_m^T$  transponovani jednični vektor kolona.

Množeći prethodnu jednačinu sa leve strane sa  $I_m^T$  dobija se

$$1 = v^* I_m^T C^{-1} I_m$$

$$v^* = \frac{1}{I_m^T C^{-1} I_m},$$

iz čega sledi da je optimalna strategija  $q^*$  oblika

$$q^* = \frac{C^{-1} I_m}{I_m^T C^{-1} I_m}.$$

Na analogan način dobija se optimalna strategija  $p^*$ , u slučaju da je svaki element optimalne mešovite strategije  $q^*$  veći od nule i ona je oblika

$$p^* = \frac{I_m^T C^{-1}}{I_m^T C^{-1} I_m}.$$

Pokazani postupak je direktno primenljiv samo u slučaju kada je kvadratna matrica igre nesingularna. Međutim, singularnost se lako može izbeći dodavanjem određene konstante svakom elementu matrice. Tako se optimalna strategija igrača neće menjati, a vrednost igre se uvećava za tu konstantu. Sledеći primer predstavlja ilustraciju postupka.

**Primer 3.3.3.1** Data je tabela plaćanja u igri dva igrača

	A	B	C
a	0	1	-2
b	1	-2	3
c	-2	3	-4

Matrica igre je singularna tako da se gornji postupak ne može direktno primeniti. Ako se svakom elementu ove matrice doda jedinica, ona postaje nesingularna i pogodna za primenu prethodno stečenog saznanja.

	A	B	C
a	1	2	-1
b	2	-1	4
c	-1	4	-3

Primenom postupka traženja inverzne matrice za datu matricu dobija se

$$C^{-1} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 13 & -2 & -7 \\ -2 & 4 & 6 \\ -7 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

pa je vrednost ove modifikovane igre

$$v^* = \frac{1}{I_m^T C^{-1} I_m} = 1,$$

a vrednost početne igre je

$$v^* - 1 = 0.$$

Vrednosti optimalnih mešovitih strategija su

$$p^* = \frac{I_m^T C^{-1}}{I_m^T C^{-1} I_m} = \left( \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right)$$

za igrača 1 i

$$q^* = \frac{C^{-1} I_m}{I_m^T C^{-1} I_m} = \left( \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right)$$

za igrača 2.

Efikasnost ovakvog načina rešavanja mešovitih igara posebno dolazi do izražaja kada su u pitanju neke specijalne klase igara kao što su npr. igre čija je matrica plaćanja dijagonalna ili trougaona. Treba međutim napomenuti da u slučaju igre sa trougaonom matricom plaćanja navedeni postupak ne garantuje u opštem slučaju nenegativnost vektora  $p$  i  $q$ , pa to može biti problem.

Neka je data matrična igra sa dijagonalnom matricom plaćanja

$$C = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_m \end{bmatrix}.$$

Prepostavka je da su svi dijagonalni elementi pozitivni  $d_i > 0, i = 1, \dots, m$ , tada je

$$\begin{aligned} p_i d_i &= v, i = 1, \dots, m \\ p_i &= \frac{v}{d_i}, i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Sumiranjem prethodnih jednačina dobija se

$$1 = v \sum_{i=1}^m \frac{1}{d_i}$$

$$v = \frac{1}{\sum_{i=1}^m \frac{1}{d_i}}.$$

Slično za igrača 2 važi

$$q_j = \frac{v}{d_j}, j = 1, \dots, n.$$

Ukoliko je matrica plaćanja trougaona

$$C = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ 0 & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix},$$

tada se dobijaju sledeće jednačine za igrača 2

$$\sum_{j=1}^n q_j x_{1,j} = v$$

$$\sum_{j=2}^n q_j x_{2,j} = v$$

⋮

$$q_{n-1} x_{n-1,n-1} + q_n x_{n-1,n} = v$$

$$q_n x_{n,n} = v.$$

Iz poslednje jednačine se dobija vrednost za  $q_n$  u zavisnosti od  $v$ , a ubacivanjem ove jednačine u prethodnu dobija se vrednost za  $q_{n-1}$  u zavisnosti od  $v$  i tako dalje sve dok se ne dobiju sve vrednosti vektora  $q = (q_1, \dots, q_n)$  u zavisnosti od  $v$ . Iz uslova da je suma verovatnoća jednak jedinici dobija se vrednost igre  $v$ , a samim tim i vrednosti verovatnoća igrača 2. Sličan postupak se vrši i za igrača 1.

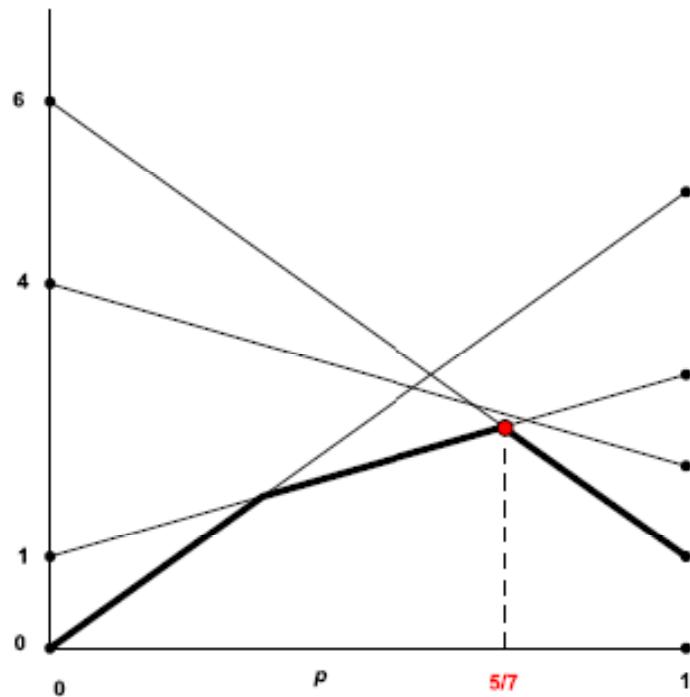
### 3.3.4 Grafičko rešavanje mešovitih matričnih igara

Grafički način rešavanja moguće je primeniti samo na igre gde bar jedan od igrača ima na raspolaganju dva izbora. Ovakve igre su predstavljene tabelama sa dve vrste ili dve kolone, dakle u pitanju su igre dimenzije  $2 \times n$  ili  $m \times 2$ .

Kao primer, data je sledeća tabela

	A	B	C	D
a	2	3	1	5
b	4	1	6	0

Igrač 1 igra svoju mešovitu strategiju tako što prvu vrstu igra sa verovatnoćom  $p$ , a drugu sa verovatnoćom  $1-p$ . Ako igrač 2 odigra prvu kolonu, tada je za igrača 1 očekivani rezultat  $2p+4(1-p)$ . Za ostale izbore igrača 2, očekivani rezultati igrača 1 biće  $3p+(1-p)$ ,  $p+6(1-p)$  i  $5p$ . Dobijaju se četiri linearne funkcije po  $p$  za  $p \in [0,1]$ . Za fiksnu vrednost  $p$ , igrač 1 ostvaruje očekivani rezultat koji je jednak minimalnoj vrednosti koja se dobije kad se za dato  $p$  izračunaju četiri linearne funkcije. Ove četiri funkcije su grafički prikazane na slici 9, a navedene minimalne vrednosti su prikazane na obvojnici, koja je na grafiku predstavljena debljom linijom.



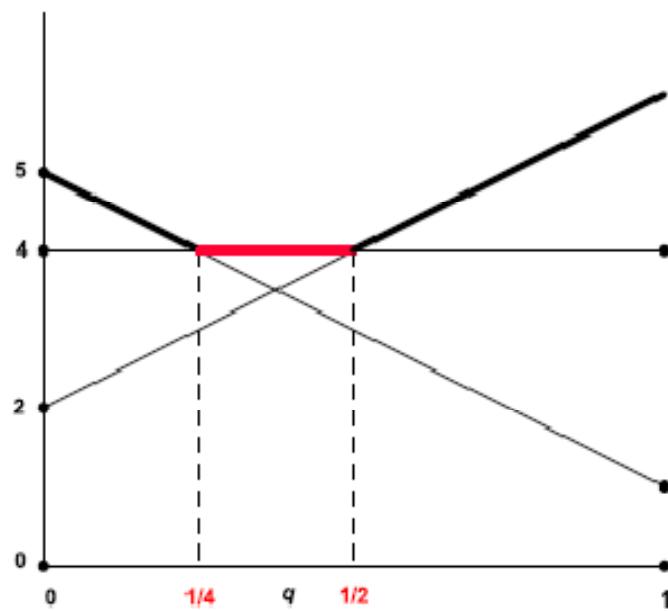
Slika 9

Interes igrača 1 je da maksimizira svoj očekivani rezultat, tako da će on birati ono  $p$  koje odgovara maksimalnoj vrednosti na obvojnici. U ovom slučaju ta vrednost je  $p^* = \frac{5}{7}$ . Očekivani rezultat za igrača 1 je  $\frac{17}{7}$  sa optimalnom mešovitom strategijom  $(\frac{5}{7}, \frac{2}{7})$ . Ako se gleda početna matrica plaćanja, optimalna mešovita strategija za igrača 1 je  $(\frac{5}{2}, \frac{2}{7})$ , a za igrača 2 je  $(0, \frac{5}{7}, \frac{2}{7}, 0)$ .

Sličnim postupkom rešavaju se i igre formata  $m \times 2$ , u kojima dakle igrač 2 ima na raspolaganju dve strategije

	A	B
a	1	5
b	4	4
c	6	2

Neka je  $q$  verovatnoća sa kojom igrač 2 igra prvu kolonu, odnosno  $1-q$  verovatnoća igranja druge kolone. Očekivani rezultat igrača 2 za tri strategije koje su na raspolaganju igraču 1 je respektivno  $1q+5(1-q)$ ,  $4q+4(1-q)$  i  $6q+2(1-q)$ . Za fiksnu vrednost  $q$  igrač 2 će sigurno ostvariti očekivani rezultat koji se nalazi kao maksimalna vrednost kad se za dato  $q$  izračunaju ove tri linearne funkcije. Navedene maksimalne vrednosti se nalaze na obvojnici predstavljenoj na slici 10.



Slika 10

Zaključak je da  $q$  koje daje minimalnu od ovih maksimalnih vrednosti leži u zatvorenom intervalu  $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$  i daje željenu minimalnu vrednost igre 4.

### **3.4 Nešov ekvilibrijum**

Zaključci do kojih je došao Džon Neš napravivši bitan pomak u rešavanju igara, a samim tim i veliki napredak u ekonomiji, imaju veliku ulogu u igramu sa promenljivom, tj. opštom sumom. Put do Nešovog ekvilibrijuma podrazumeva racionalno ponašanje svih učesnika igre, što zapravo znači da svaki igrač želi da odigra što bolje za sebe u datoj situaciji. Dakle, do Nešovog ekvilibrijuma se dolazi analizom strategija racionalnog igrača u svakom od poteza njegovog suparnika. Tačka u kojoj su strategije oba igrača racionalne naziva se Nešov ekvilibrijum. Drugim rečima Nešov ekvilibrijum je takav izbor strategija, da nijedan igrač nema interes da od njega odstupi. Jednostrano odstupanje ma kog igrača od Nešovog ekvilibrijuma dovodi do toga da taj igrač ostvaruje lošiji rezultat. U tom smislu Nešov ekvilibrijum definiše optimalne strategije za sve igrače. Dakle, kod igara nulte sume u prostoru čistih strategija Nešov ekvilibrijum je u stvari sedlasta tačka, a u prostoru mešovitih strategija on se poklapa sa minmaks ekvilibrijumom.

Radi lakšeg razumevanja, Nešov ekvilibrijum je ilustrovan sledećim primerom bimatrične igre dva igrača, tj. igre dva igrača sa promenljivom sumom. Data je matrica

	M	N
L	(6,4)	(5,3)
R	(4,2)	(3,1)

Ako igrač 2 odigra strategiju M, očigledno je da je za igrača 1 isplativije da odigra L ( $6 > 4$ ). Ako pak igrač 2 odigra strategiju N, za igrača 1 je takođe isplativija strategija L ( $5 > 3$ ). Racionalne strategije igrača 1 su podvučene u sledećoj tabeli

	M	N
L	(6,4)	(5,3)
R	(4,2)	(3,1)

Ako igrač 1 odigra strategiju L, igrač 2 će birati strategiju M, a ako igrač 1 odigra strategiju R, igrač 2 će birati strategiju M. Racionalne strategije igrača 2 su podvučene u narednoj tabeli

	M	N
L	(6,4)	(5,3)
R	(4,2)	(3,1)

Spajanjem ovih tabela dolazi se do tačke (tačaka) ekvilibrijuma ako ona postoji

	M	N
L	<b>(6,4)</b>	(5,3)
R	(4,2)	(3,1)

Tačka **(6,4)** predstavlja uzajamno najbolja rešenja za oba igrača. Izborom strategije L igrača 1 i strategije M od strane igrača 2 dolazi se do Nešovog ekvilibrijuma.

Do ovog rešenja moglo se doći i metodom eliminacije dominiranih strategija. Bitno je istaći da rešenje koje se dobija eliminacijom dominiranih strategija predstavlja Nešovo rešenje igre, dok obrnuto ne mora da važi. Nešov kriterijum je obuhvatniji od kriterijuma dominacije, što se vidi na sledećem primeru.

**Primer 3.4.1** Data je bimatrična igra

	Levo	Sredina	Desno
Gore	(0,4)	(4,0)	(5,3)
Centar	(4,0)	(0,4)	(5,3)
Dole	(3,5)	(3,5)	(6,6)

Primena kriterijuma dominacije nije od koristi u traženju rešenja ove igre, međutim primena Nešovog kriterijuma daje rešenje sa ravnotežnim rezultatom igre **(6,6)**.

Osnovni cilj rešavanja igara je oslobođanje od rizika što je najbolje ilustrovano rešenjima koja je ponudio Fon Nojman. Ova rešenja su pesimistička, tj. uopšte se ne analizira strategija protivnika i svaki njegov potez smatra se racionalnim. Naime, igrač 1 računa da će njegov protivnik, tj. igrač 2 odigrati baš onaj potez koji igraču 1 najmanje odgovara. Ovo tvrđenje jeste tačno u igramu nulte sume, međutim u bimatričnim igramu ovo pravilo ne mora da važi. Džon Neš tvrdi da racionalan igrač nikad neće odigrati onu strategiju koja mu manje odgovara. Dakle analizom strategija protivnika može se doći do zaključka koje strategije racionalan igrač neće odigrati. Efikasnost ovog postupka pokazana je na sledećem primeru. Neka je data matrica

	M	N
L	(2,0)	(2,2)
R	(-1000,1)	(4,2)

Rešavanjem igre minmaks kriterijumom, tj. obezbeđivanjem sigurnog dobitka bez obzira na ponašanje druge strane dobija se isplata igre (2,2). Uklanjanjem rizika igrač 1 će odigrati strategiju L, a igrač 2 strategiju N.

Primenom Nešovog kriterijuma ravnoteža se dostiže u tački (4,2), tj. ukoliko igrač 1 odigra strategiju R , a igrač 2 strategiju N.

Uočava se da je Nešov kriterijum doneo veći dobitak igraču 1.

## 4 Linearno programiranje i igre nulte sume

Postoje razne tehnike za rešavanje igara nulte sume. Neke od njih su opisane u ranijem izlaganju i mogu se primeniti samo pri rešavanju određenih tipova igara.

U ovom poglavlju predstavljena je primena linearног programiranja u rešavanju igara nulte sume. Ekvivalencija minmaks teoreme u teoriji igara i teoreme jake dualnosti u linearном programiranju je značajan korak u rešavanju igara nulte sume. Iako je ova veza između linearног programiranja i teorije igara izložena još sredinom prošlog veka, dokaz ekvivalencije ove dve teoreme kompletiran je tek nedavno.

Svaka igra nulte sume može se svesti na problem linearног programiranja i obrnuto. Svođenje igre nulte sume na problem linearног programiranja omogućava da se pomoću teoreme jake dualnosti izvede dokaz minmaks teoreme. Svođenje problema linearног programiranja i njegovog duala na igre nulte sume prvi je predstavio Dantzig u svom radu [5] još 1951. godine. Cilj njegovog rada bio je dokazivanje ekvivalencije minmaks teoreme igre nulte sume i teoreme jake dualnosti u linearном programiranju. Međutim, Dantzig je istakao da postoji jedan slučaj za koji izvođenje dokaza teoreme jake dualnosti na osnovu minmaks teoreme nije kompletno. Ovaj nedostatak upotpunjeno je u radu [6].

Najpre će biti pokazano kako se igra nulte sume prevodi na problem linearног programiranja.

Neka je data igra nulte sume predstavljena matricom plaćanja  $C$

$$C = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix},$$

čije se rešenje može naći u skupu mešovitih strategija. Sa stanovišta igrača 1 potrebno je odrediti njegovu mešovitu strategiju  $p = (p_1, \dots, p_m)$  tako da osigura maksimalan mogući dobitak bez obzira na izbor strategije igrača 2.

Ako igrač 1 igra mešovitu strategiju  $p$ , a igrač 2 igra čistu strategiju  $b_j$ , tada je očekivani dobitak igrača 1

$$p^T C_j = \sum_{i=1}^m p_i x_{ij}.$$

U najgorem slučaju dobitak igrača 1 je  $\min_j p^T C_j$ . Igrač 1 je racionalan i želi da maksimizira svoj dobitak igrajući mešovitu strategiju  $p^* \in \arg \max_p \min_j p^T C_j$  koja mu obezbeđuje maksimalni od svih minimalnih dobitaka, tj. daje minmaks vrednost igre. Problem maksimizacije igrača 1 je oblika

$$\max \left\{ \min_j p^T C_j \right\}, \quad \sum_{i=1}^m p_i = 1, \quad p_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Funkcija cilja ovog problema nije linearna jer je definisana pomoću operatora minimuma. Međutim uvođenjem nove promenljive  $v$  koja predstavlja vrednost igre ovaj problem se može pretvoriti u problem linearног programiranja. Pošto je  $v \leq \min_j p^T C_j$  dobija se ekvivalentan problem linearног programiranja oblika

$$P_M: \begin{aligned} & \max_p v \\ & v \leq p^T C_j, j = 1, \dots, n \\ & p_i \geq 0, i = 1, \dots, m \\ & \sum_{i=1}^m p_i = 1. \end{aligned}$$

Analogno, ako igrač 2 igra mešovitu strategiju  $q = (q_1, \dots, q_n)$ , a igrač 1 odigra čistu strategiju  $a_i$  dobija se očekivani gubitak igrača 2

$$C_i q = \sum_{j=1}^n q_j x_{ij}.$$

Igrač 2 ograničava svoj gubitak sa  $\max_i C_i q$ . On želi da minimizira svoj gubitak igrajući strategiju  $q^* \in \arg \min_q \max_i C_i q$  koja daje minmaks vrednost igre.

Problem minimizacije igrača 2 je

$$\min_q \left\{ \max_i C_i q \right\}, \quad \sum_{j=1}^n q_j = 1, \quad q_j \geq 0$$

i on se može prevesti na ekvivalentan problem linearног programiranja oblika

$$D_M: \begin{aligned} & \min_q v \\ & v \geq C_i q, i = 1, \dots, m \\ & q_j \geq 0, j = 1, \dots, n \\ & \sum_{j=1}^n q_j = 1. \end{aligned}$$

Linearni programi  $P_M$  i  $D_M$  su dualni jedan drugom i za njih važi teorema jake dualnosti, a njena direktna posledica je minmaks teorema.

**Teorema 4.1:** Za igru nulte sume sa datom matricom plaćanja  $C$ , postoje  $p$  i  $q$  takvi da je  $p$  dopustivo rešenje problema  $P_M$  i  $q$  je dopustivo rešenje  $D_M$ , a vrednost igre je  $v = p^T C q$ . Vektori  $p$  i  $q$  su optimalne strategije igrača.

**Teorema 4.2[1]:** Za igru nulte sume sa matricom  $C$ , sa dopustivim rešenjima  $p$  za  $P_M$  i  $q$  za  $D_M$ , zajednička vrednost igre je  $v = p^T C q$  ako i samo ako su ispunjeni uslovi slabe komplementarnosti.

**Dokaz:**

Pošto je  $v = p^T C q = \sum_{i,j} p_i x_{ij} q_j$  sledi

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n q_j (p^T C_j - v) = \\ &= \sum_{j=1}^n q_j \left( \sum_{i=1}^m p_i x_{ij} - v \right) = \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i x_{ij} q_j - \sum_{j=1}^n q_j v = \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i x_{ij} q_j - v. \end{aligned}$$

Ako su ispunjeni uslovi slabe komplementarnosti tada je

$$\sum_{j=1}^n q_j (p^T C_j - v) = 0,$$

pa direktno sledi da je

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i x_{ij} q_j - v = 0 \\ & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i x_{ij} q_j = v. \end{aligned}$$

Sa druge strane ako je

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i x_{ij} q_j = v$$

tada je

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i x_{ij} q_j - v = 0,$$

pa je ispunjen uslov komplementarnosti

$$\sum_{j=1}^n q_j (p^T C_j - v) = 0.$$

■

Ovim je dokazano da je minmaks teorema posledica teoreme jake dualnosti.

Kao što je pomenuto svođenje primalnog problema i njegovog duala na igru nulte sume prvi put je prikazao Dantzig u svom radu [5].

Neka je dat problem linarnog programiranja

$$\begin{aligned}
 P: \quad J_p(x) &= \langle c, x \rangle \rightarrow \max \\
 x \in U &= \{x; \\
 Ax &\leq b, \\
 x &\geq 0, \\
 c, x \in R^n, b \in R^m, A \in R^{m,n} \},
 \end{aligned}$$

i njegov dual

$$\begin{aligned}
 D: \quad J_d(y) &= \langle b, y \rangle \rightarrow \min \\
 y \in V &= \{y; \\
 A^T y &\geq c, \\
 y &\geq 0, \\
 c \in R^n, b, y \in R^m, A \in R^{m,n} \}.
 \end{aligned}$$

Za dati par zadataka konstruiše se simetrična igra nulte sume sa optimalnim strategijama koje su ujedno rešenja ovih problema linearнog programiranja.

**Definicija 4.1:** Igra nulte sume dva igrača se zove *simetrična* ako za matricu plaćanja  $M$  važi  $M = -M^T$ .

**Definicija 4.2:** Igra nulte sume dva igrača je fer ako je vrednost igre  $v = 0$ .

**Lema 4.3:** U simetričnim igrama nulte sume dva igrača svaka maksmin strategija  $p^*$  za igrača 1 je ujedno i minmaks strategija za igrača 2 i svaka minmaks strategija  $q^*$  za igrača 2 je maksmin strategija za igrača 1.

**Dokaz:** Neka je  $M$  matrica plaćanja simetrične igre nulte sume dva igrača. Prepostavlja se da je  $p^*$  maksmin strategija za igrača 1 i  $q^*$  minmaks strategija za igrača 2 tj.

$$pM(q^*)^T \leq p^*M(q^*)^T \leq p^*Mq^T$$

za sve strategije  $p$  i  $q$ . Transponovanjem se dobija

$$q^*M^Tp^T \leq q^*M^T(p^*)^T \leq qM^T(p^*)^T.$$

Zbog osobine matrice plaćanja  $M = -M^T$  sledi

$$q^*(-M)p^T \leq q^*(-M)(p^*)^T \leq q(-M)(p^*)^T$$

što je ekvivalentno

$$q^*Mp^T \geq q^*M(p^*)^T \geq qM(p^*)^T.$$

Zaključak je da je  $p^*$  minmaks strategija za igrača 2, a  $q^*$  maksmin strategija za igrača 1. ■

**Teorema 4.4:** Svaka simetrična igra nulte sume dva igrača je fer.

**Dokaz:** Neka je  $M$  simetrična igra nulte sume dva igrača, tada je na osnovu minmaks teoreme i leme 4.3

$$\nu = (p^*)^T M q^* = (q^*)^T M^T p^* = -(q^*)^T M p^* = -(p^*)^T M q^* = -\nu.$$

Sledi da je  $\nu = 0$ , pa je igra fer. ■

Dakle za dat par zadataka  $P$  i  $D$  konstruiše se simetrična igra nulte sume sa matricom plaćanja  $M$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & A & -b \\ -A^T & 0 & c \\ b^T & -c^T & 0 \end{bmatrix}.$$

Ova igra je fer i važi da je optimalna strategija za igrača 1 optimalna i za igrača 2. Neka je vektor  $\bar{p} = (\bar{y}, \bar{x}, \bar{t})^T$  optimalna strategija ove igre gde  $\bar{x} \in R^n$ ,  $\bar{y} \in R^m$  i  $\bar{t}$  je skalar.

Za datu igru važi minmaks teorema.

**Teorema 4.5 [6]:** Za dati par zadataka  $P$  i  $D$  i odgovarajuću simetričnu igru nulte sume sa matricom plaćanja  $M$  postoji vektor optimalnih strategija

$$\bar{p} = \begin{bmatrix} \bar{y} \\ \bar{x} \\ \bar{t} \end{bmatrix}$$

takov da važi

$$M\bar{p} \leq 0, e^T \bar{p} = 1, \bar{p} \geq 0, \quad (4.1)$$

gde je  $e$  vektor čije su sve komponente jedinice tj.

$$e = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**Teorema 4.6 [5]:** 1) Ako je  $\bar{t} > 0$  tada je  $\frac{\bar{x}}{\bar{t}}$  optimalno rešenje primala  $P$ , a  $\frac{\bar{y}}{\bar{t}}$  optimalno rešenje duala  $D$ .

2) Ako je  $\bar{t} = 0$  i  $b^T \bar{y} - c^T \bar{x} < 0$ , tada primal ili dual (ili oba) nemaju dopustiva rešenja pa time ni optimalna.

Međutim, Dantzig nije rešio problem u slučaju kada je  $\bar{t} = 0$  i  $b^T \bar{y} - c^T \bar{x} = 0$ .

Dakle, svođenje problema linearog programiranja na igru nulte sume, koju je dao Dantzig koristeći  $M$  kao matricu plaćanja nije potpuno. Na ovaj nedostatak on ukazuje ističući da ako je  $\bar{t} = 0$  u rešenju igre nulte sume to ne znači da ne postoji rešenje problema linearog programiranja  $P$  i  $D$ . Tokom godina ekvivalencija problema linearog programiranja i igara nulte sume i ekvivalencija minmaks teoreme i teoreme jake dualnosti bile su prihvачene iako je postojao ovaj nedostatak. Kompletan dokaz ekvivalencije između minmaks teoreme i teoreme jake dualnosti kao i upotpunjeno svođenje LP problema na igre nulte sume predstavljeno je u radu [6].

Ključna stvar u analizi je naredna teorema.

**Teorema 4.7[6]:** Ako postoje  $\hat{x}$  i  $\hat{y}$  takvi da su ispunjeni uslovi

$$A\hat{x} < b, \hat{x} \geq 0 \text{ i } A^T \hat{y} > c, \hat{y} \geq 0 \quad (4.2)$$

tada je  $\bar{t} > 0$ .

### Dokaz:

Na osnovu (4.1) važi

$$\begin{bmatrix} 0 & A & -b \\ -A^T & 0 & c \\ b^T & -c^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{y} \\ \bar{x} \\ \bar{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\bar{x} - b\bar{t} \\ -A^T \bar{y} + c\bar{t} \\ b^T \bar{y} - c^T \bar{x} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{y} \\ \bar{x} \\ \bar{t} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e^T \begin{bmatrix} \bar{y} \\ \bar{x} \\ \bar{t} \end{bmatrix} = 1.$$

Ako je  $\bar{t} = 0$ , tada važi

$$A^T \bar{y} \geq 0, \bar{y} \geq 0$$

$$A\bar{x} \leq 0, \bar{x} \geq 0$$

$$c^T \bar{x} \geq b^T \bar{y}$$

$$e^T \bar{x} + e^T \bar{y} = 1.$$

Za  $\bar{y} \neq 0$  i koristeći  $A\hat{x} < b$  i  $A^T \bar{y} \geq 0$  dobija se

$$\bar{y}^T (A\hat{x} - b) < 0 \Rightarrow b^T \bar{y} > \bar{y}^T A\hat{x} \geq 0.$$

Na osnovu

$$c^T \bar{x} \geq b^T \bar{y}$$

dobija se

$$c^T \bar{x} \geq b^T \bar{y} > 0 \Rightarrow \bar{x} \neq 0.$$

Iz  $A^T \hat{y} > c$  i  $A\bar{x} \leq 0$  sledi

$$\bar{x}^T (A^T \hat{y} - c) > 0 \Rightarrow c^T \bar{x} < \bar{x}^T A^T \hat{y} = \hat{y}^T A \bar{x} \leq 0.$$

Na osnovu prethodnog sledi kontradikcija

$$0 < c^T \bar{x} < 0.$$

Ako je  $\bar{y} = 0$  tada zbog  $e^T \bar{x} + e^T \bar{y} = 1$  sledi  $\bar{x} \neq 0$  i koristeći sličan princip kao u prethodnom delu dokaza samo za  $\bar{x}$  dobija se kontradikcija

$$0 < b^T \bar{y} < 0,$$

pa sledi  $\bar{t} > 0$ .

■

Za par zadatka  $P$  i  $D$  kaže se da je strogo dopustiv ako važe pretpostavke teoreme 4.7, tj. ako važi (4.2).

**Teorema 4.8:** LP sa neneagativnim promenljivima sadrži najmanje jedno bazično rešenje. Ako takav LP problem ima optimalno rešenje, tada on ima najmanje jedno bazično optimalno rešenje.

**Teorema 4.9[6]:** Neka su  $P$  i  $D$  strogo dopustivi, tada postoje dopustiva rešenja  $x^*$  i  $y^*$  za  $P$  i  $D$  takva da važi  $c^T x^* = b^T y^*$ , pa su  $x^*$  i  $y^*$  optimalna rešenja za  $P$  i  $D$  respektivno.

**Dokaz:** Na osnovu teorema 4.5. i 4.7. sledi da postoje  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}$  tako da važi

$$\begin{aligned} A\bar{x} &\leq b\bar{t}, \quad \bar{x} \geq 0 \\ A^T \bar{y} &\geq c\bar{t}, \quad \bar{y} \geq 0 \\ c^T \bar{x} &\geq b^T \bar{y} \\ e^T \bar{x} + e^T \bar{y} + \bar{t} &= 1 \end{aligned}$$

pri čemu je  $\bar{t} > 0$ .

Smenom  $x^* = \frac{\bar{x}}{\bar{t}}$  i  $y^* = \frac{\bar{y}}{\bar{t}}$  dobija se

$$\begin{aligned} Ax^* &\leq b, \quad x^* \geq 0, \\ A^T y^* &\geq c, \quad y^* \geq 0, \\ c^T x^* &\geq b^T y^*. \end{aligned}$$

Očigledno su  $x^*$  i  $y^*$  dopustiva rešenja za  $P$  i  $D$  respektivno. Na osnovu teoreme slabe dualnosti i  $c^T x^* \geq b^T y^*$  dobija se  $c^T x^* = b^T y^*$ , što sa posledicom 2.4.2 implicira da su  $x^*$  i  $y^*$  optimalna rešenja za  $P$  i  $D$  respektivno.

■

Pokazano je da minmaks teorema obezbeđuje rešenja strogo dopustivih dualnih problema. Dodavanjem dovoljno velikih promenljivih  $u$  i  $v$ , kao i konstanti  $\gamma$  i  $\beta$ , od problema  $P$  i  $D$  mogu se izvesti novi strogo dopustivi problemi  $\tilde{P}$  i  $\tilde{D}$ .

Neka je

$$\begin{aligned} \tilde{P}: \quad & c^T x - \gamma u \rightarrow \max \\ & Ax - eu \leq b \\ & e^T x \leq \beta \\ & x, u \geq 0, \end{aligned}$$

gde su  $\gamma$  i  $\beta$  pozitivni skalari. Njegov dual je

$$\begin{aligned} \tilde{D}: \quad & b^T y + \beta v \rightarrow \min \\ & A^T y - ev \geq c \\ & -e^T y \geq -\gamma \\ & y, v \geq 0. \end{aligned}$$

Lako se može potvrditi koristeći dovoljno velike  $u$  i  $v$  da su  $\tilde{P}$  i  $\tilde{D}$  strogo dopustivi. Odatle se zaključuje primenom teoreme 4.9 da postoji  $x^*, u^*, y^*, v^*$  takvi da važi

$$\begin{aligned} & Ax^* - eu^* \leq b \\ & e^T x^* \leq \beta \\ & x^*, u^* \geq 0 \\ & A^T y^* + ev^* \geq c \\ & -e^T y^* \geq -\gamma \\ & y^*, v^* \geq 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$c^T x^* - \gamma u^* = b^T y^* + \beta v^*.$$

Sada se posmatra veza između problema  $P, D$  i  $\tilde{P}, \tilde{D}$ .

**Teorema 4.10[6]:** Ako je  $u^* = v^* = 0$ , tada su  $x^*, y^*$  optimalna rešenja za  $P$  i  $D$  i važi  $c^T x^* = b^T y^*$ .

**Dokaz:** Sledi direktno na osnovu (4.3) i posledice 2.4.2. ■

Sada se pokazuje da je dodeljivanjem dovoljno velikih parametara  $\beta$  i  $\gamma$ , moguće rešiti probleme  $\tilde{P}$  i  $\tilde{D}$  umesto problema  $P$  i  $D$ .

Razmatra se parametarski problem linearne programiranja

$$P(u): \quad \begin{aligned} c^T x &\rightarrow \max \\ Ax &\leq b + ue \\ e^T x &\leq \beta \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

gde je  $\tilde{U}$  skup nenegativnih  $u$  za koje je  $P(u)$  dopustiv i neka je  $f(u)$  ( $u \in \tilde{U}$ ) vrednost funkcije cilja u optimalnom rešenju problema  $P(u)$ . Pošto je  $P(u)$  ograničen on ima optimalno rešenje ukoliko ima dopustivo rešenje. Neka je  $\{x^i, i = 1, 2, \dots, k\}$  skup svih bazičnih rešenja problema  $P$ , i neka je  $\beta$  definisano na sledeći način

$$\beta = \max \left\{ 1, \max_{\{i, i=1, \dots, k\}} \left( \sum_{j=1}^n x_j^i \right) \right\}.$$

Na osnovu definicije  $\beta$  jasno je da ako je  $\bar{x}$  dopustivo bazično rešenje za  $P$ , tada je  $\bar{x}$  dopustivo za  $P(0)$ .

**Teorema 4.11[6]:** Ako je  $u^* = 0, v^* > 0$  tada je  $P$  neograničen.

**Dokaz:** Prepostavlja se da postoji optimalno rešenje za  $P$ . Na osnovu teoreme 4.8 postoji bazično optimalno rešenje  $\bar{x}$  za  $P$ . Iako  $e^T \bar{x} < \beta$ , implicira da  $x = \bar{x}, u = 0$  je dopustivo (dakle i optimalno) rešenje za  $P(0)$ . Koristeći  $c^T x^* - \gamma u^* = b^T y^* + \beta v^*$  dobija se

$$0 = b^T y^* + \beta v^* - c^T \bar{x} = (y^*)^T (b - A\bar{x}) + v^* (\beta - e^T \bar{x}) + ((y^*)^T A + e^T v^* - c^T) \bar{x}.$$

Svi članovi u prethodnom izrazu su nenegativni i kako je  $v^* > 0$ , sledi  $e^T \bar{x} = \beta$ , što je u kontradikciji sa prepostavkom  $e^T \bar{x} < \beta$ . Znači  $P$  ima dopustivo rešenje ali nema optimalno rešenje. Pošta je skup dopustivih rešenja za  $P$  zatvoren, zaključak je da je  $P$  neograničen. ■

Sada će biti posvećena pažnja konstrukciji parametra  $\gamma$ . Može se proveriti da za sve  $u \in \tilde{U}$ , važi  $\underline{\alpha} < f(u) < \bar{\alpha}$  gde je

$$\underline{\alpha} = \beta \min \left\{ 0, \min_{j=1, \dots, n} c_j \right\} - 1,$$

$$\bar{\alpha} = \beta \max \left\{ 0, \max_{j=1, \dots, n} c_j \right\} + 1.$$

Neka je

$$\delta = \min_{\{u_i > 0, i=1, 2, \dots, l\}} u_i$$

gde je  $\{(x^i, u_i), i = 1, 2, \dots, l\}$  skup svih bazičnih rešenja  $\tilde{P}$ , tada se  $\gamma$  definiše na sledeći način

$$\gamma = \frac{\bar{\alpha} - \underline{\alpha}}{\delta}.$$

**Teorema 4.12[6]:** Ako je  $P(0)$  dopustiv, tada je  $u^* = 0$ .

**Dokaz:** Prepostavlja se, bez smanjenja opštosti, da je  $(x^*, u^*)$  bazično optimalno rešenje za  $\tilde{P}$ . Neka je  $P(0)$  dopustiv (i ako je  $f(0)$  vrednost funkcije cilja u optimalnom rešenju) i  $u^* > 0$ , tada važi

$$f(0) = c^T x^* - \gamma u^* = f(u^*) - \gamma u^* < \bar{\alpha} - \gamma \delta = \underline{\alpha} < f(0)$$

što je kontradiktorno, pa je dakle  $u^* = 0$ . ■

Na osnovu svega prikazanog sledi da minmaks teorema implicira teoremu jake dualnosti.

**Teorema 4.13[6]:** Ako  $P$  ima optimalno rešenje tada  $D$  takođe ima optimalno rešenje. Osim toga vrednost funkcije cilja u optimalnom rešenju  $P$  je ista kao vrednost funkcije cilja u optimalnom rešenju  $D$ .

**Dokaz:** Teoreme 4.5 i 4.7 impliciraju postojanje optimalnih rešenja  $(x^*, u^*)$  i  $(y^*, v^*)$  za  $\tilde{P}$  i  $\tilde{D}$  respektivno. Pošto  $P$  ima optimalno rešenje, znači da je dopustiv i ograničen, i na osnovu definicije za  $\beta$  takođe je i  $P(0)$ . Odatle na osnovu teoreme 4.12 sledi  $u^* = 0$  i iz teoreme 4.11 sledi  $v^* = 0$ , pa na osnovu teoreme 4.10 sledi da su  $x^*$  i  $y^*$  optimalna rešenja za  $P$  i  $D$ . ■

Kako je prikazano u ovom delu, polazeći od parova zadataka primal-dual linearog programiranja  $P$  i  $D$ , mogu se konstruisati linearni programi  $\tilde{P}$  i  $\tilde{D}$  sa dovoljno velikim  $\beta$  i  $\gamma$  i dobiti optimalna rešenja ovih problema rešavajući odgovarajuću igru nulte sume. Posebno se mogu definisati parametri  $\beta_p, \gamma_p$  u problemu  $\tilde{P}$ . Slično se mogu definisati parametri  $\beta_d, \gamma_d$  za problem  $\tilde{D}$ . Definisanjem

$$\beta = \max\{\beta_p, \beta_d\}; \quad \gamma = \max\{\gamma_p, \gamma_d\}$$

i rešavanjem problema  $\tilde{P}$  i  $\tilde{D}$ , dobija se optimalno rešenje primal  $P$  i optimalno rešenje duala  $D$ , ili se dolazi do zaključka da nijedan od njih nema optimalno rešenje.

**Teorema 4.14[6]:** Neka su  $x^*, u^*, y^*, v^*$  optimalna rešenja parova zadataka  $\tilde{P}$  i  $\tilde{D}$ . Tada važi:

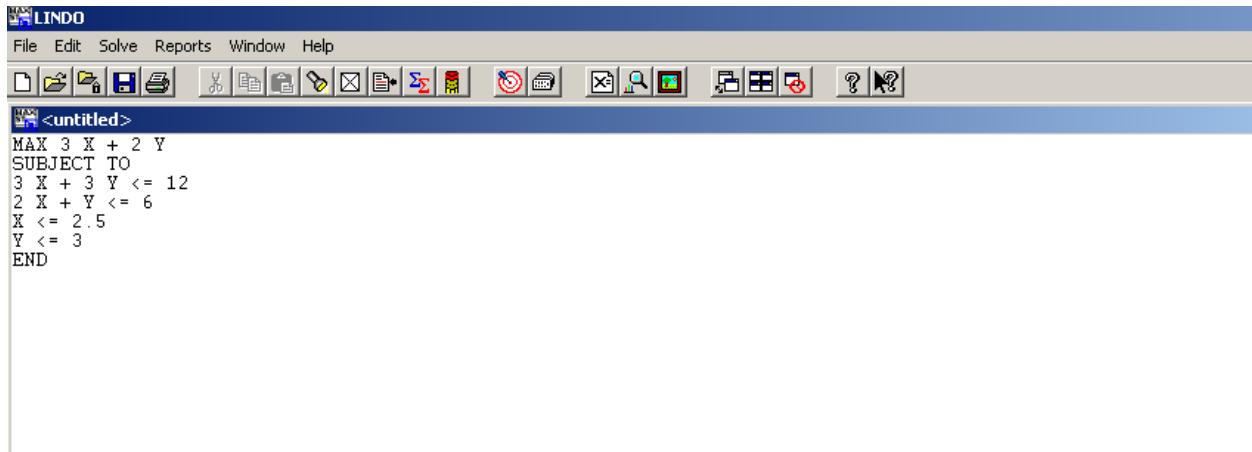
- 1) Ako je  $u^* = v^* = 0$  tada su  $x^*$  i  $y^*$  optimalna rešenja parova zadataka  $P$  i  $D$  respektivno.
- 2) Ako važi  $u^* = 0, v^* > 0$  tada problem  $P$  nema rešenje jer je funkcija cilja neograničena, a problem  $D$  nema dopustivo rešenje.

- 3) Ako važi  $u^* > 0, v^* = 0$  tada problem  $P$  nema dopustivo rešenje, a problem  $D$  nema optimalno rešenje jer je funkcija cilja neograničena.
- 4) Ako važi  $u^* > 0, v^* > 0$  tada problemi  $P$  i  $D$  nemaju dopustivo rešenje.

## 5 Programski paket LINDO

Jedan od programskih paketa pogodnih za rešavanje problema linearnog programiranja je LINDO. Na slici 11 prikazana je primena ovog paketa za rešavanje zadatka 3.2.1.

Korak 1: Pokrene se LINDO i unese problem na sledeći način (slika 11)

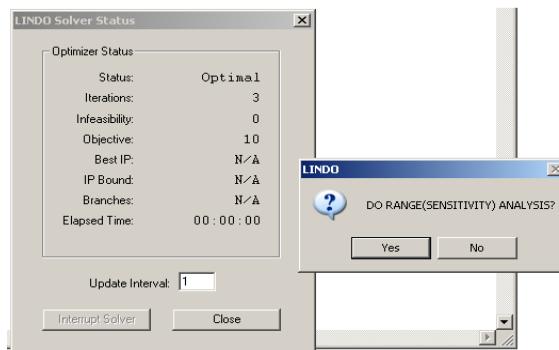


```
MAX 3 X + 2 Y
SUBJECT TO
3 X + 3 Y <= 12
2 X + Y <= 6
X <= 2.5
Y <= 3
END
```

Slika 11

Nakon toga bira se aplikacija .

Korak 2: Pojavljuje se prozor „LINDO Solver Status“, na osnovu koga se mogu pročitati informacije o rešavanju problema (slika 12).



Slika 12

Korak 3: Pojavljuje se još jedan prozor. Izborom „YES“ prikazuje se rešenje problema. Rezultat je prikazan na slici 13.

```

LINDO
File Edit Solve Reports Window Help
Reports Window

LP OPTIMUM FOUND AT STEP      3
OBJECTIVE FUNCTION VALUE
 1)    10.00000
VARIABLE      VALUE      REDUCED COST
  X        2.000000        0.000000
  Y        2.000000        0.000000

ROW   SLACK OR SURPLUS      DUAL PRICES
 2)    0.000000        0.333333
 3)    0.000000        1.000000
 4)    0.500000        0.000000
 5)    1.000000        0.000000

NO. ITERATIONS=      3

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

VARIABLE      CURRENT COEFFICIENT RANGES
             COEF      ALLOWABLE INCREASE      ALLOWABLE DECREASE
  X        3.000000        1.000000        1.000000        0.500000
  Y        2.000000        1.000000
ROW      CURRENT RIGHTHAND SIDE RANGES
             RHS      ALLOWABLE INCREASE      ALLOWABLE DECREASE
 2        12.000000        1.500000        1.500000
 3        6.000000        0.500000        1.000000
 4        2.500000        INFINITY        0.500000
 5        3.000000        INFINITY        1.000000

```

*Slika 13*

Dakle, optimalno rešenje problema je  $x^* = 2$  i  $y^* = 2$ , a vrednost funkcije cilja u optimalnom rešenju je 10.

### **Zadatak 5.1** Rešiti matričnu igru sa matricom plaćanja

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

**Rešenje:** Matrična igra se prevodi na problem linearnog programiranja. Parovi zadataka primal-dual su sledećeg oblika

$$P: \quad v \rightarrow \max$$

$$p_2 - 2p_3 \geq v$$

$$p_1 - 2p_2 + 3p_3 \geq v$$

$$-2p_1 + 3p_2 + 4p_3 \geq v$$

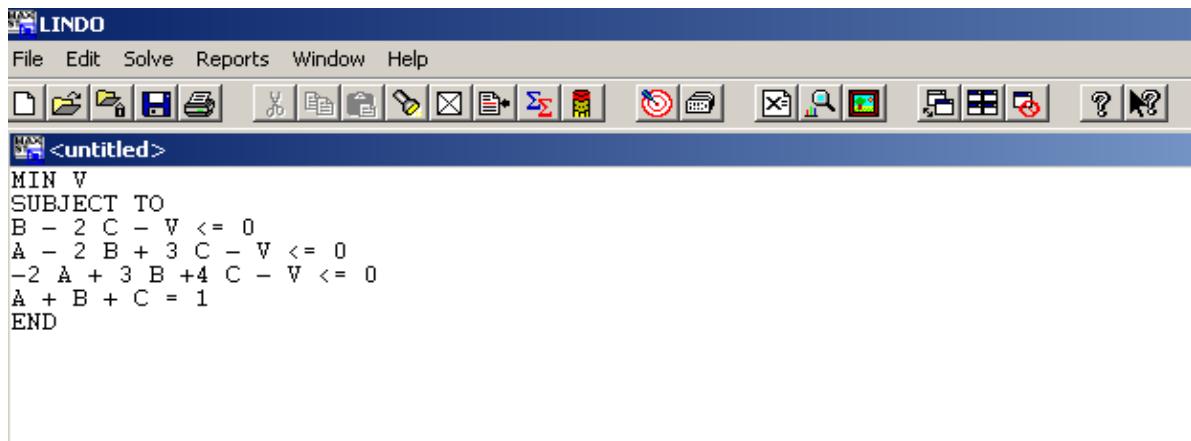
$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

$$p_1, p_2, p_3 \geq 0$$

i

$$D: \quad w \rightarrow \min$$
$$q_2 - 2q_3 \leq w$$
$$q_1 - 2q_2 + 3q_3 \leq w$$
$$-2q_1 + 3q_2 + 4q_3 \leq w$$
$$q_1 + q_2 + q_3 = 1$$
$$q_1, q_2, q_3 \geq 0.$$

Rešavanjem duala u LINDU dobija se sledeće rešenje za strategiju igrača 2



LINDO

File Edit Solve Reports Window Help

MIN V  
SUBJECT TO  
B - 2 C - V <= 0  
A - 2 B + 3 C - V <= 0  
-2 A + 3 B + 4 C - V <= 0  
A + B + C = 1  
END

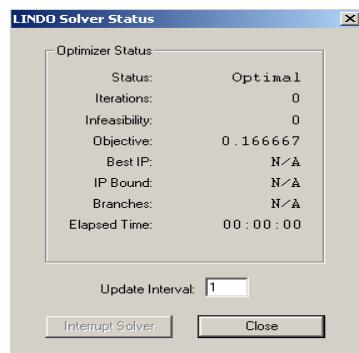
LINDO Solver Status

Optimizer Status:	
Status:	Optimal
Iterations:	0
Infeasibility:	0
Objective:	0.166667
Best IP:	N/A
IP Bound:	N/A
Branches:	N/A
Elapsed Time:	00 : 00 : 00

Update Interval: 1

Interrupt Solver Close

Slika 14



Slika 15

```

LINDO
File Edit Solve Reports Window Help
Reports Window

LP OPTIMUM FOUND AT STEP      0

OBJECTIVE FUNCTION VALUE
1)    0.1666667

VARIABLE      VALUE      REDUCED COST
V            0.166667    0.000000
B            0.333333    0.000000
C            0.083333    0.000000
A            0.583333    0.000000

ROW  SLACK OR SURPLUS      DUAL PRICES
2)    0.000000      0.583333
3)    0.000000      0.333333
4)    0.000000      0.083333
5)    0.000000     -0.166667

NO. ITERATIONS=      0

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE      CURRENT      ALLOWABLE      ALLOWABLE
              COEF      INCREASE      DECREASE
V            1.000000    INFINITY      1.000000
B            0.000000    1.000000    2.000000
C            0.000000    1.000000    3.500000
A            0.000000    4.000000    0.500000

RIGHTHAND SIDE RANGES
ROW      CURRENT      ALLOWABLE      ALLOWABLE
        RHS      INCREASE      DECREASE
2       0.000000    0.285714    4.000000
3       0.000000    0.500000    1.000000
4       0.000000    2.000000    1.000000
5       1.000000    INFINITY    1.000000

```

*Slika 16*

Dakle, optimalna vrednost funkcije cilja je  $w^* = 0,1666667$ , a mešovita strategija igrača 2 je

$$q^* = (0.583, 0.333, 0.083).$$

Rešavanjem primala se dobija optimalna vrednost funkcije cilja  $v^* = 0,1666667$  i optimalna strategija igrača 1 i to je

$$p^* = (0.583, 0.333, 0.083).$$

## **6 Zaključak**

Sredinom prošlog veka razvile su se razne metode za rešavanje problema linearog programiranja. Jedna od najefikasnijih i najpoznatijih metoda je simpleks metoda, koju je utemeljio Džordž Dantzig. Danas postoje razni programski paketi koji uspešno rešavaju probleme linearog programiranja nezavisno od njihovih dimenzija. Jedan od ovih paketa je Lindo. Linearno programiranje našlo je značajnu primenu u teoriji igara čiji je utemeljivač Džon fon Nojman. Postoje mnoge vrste igara i razni načini njihovog rešavanja. U ovom radu predstavljena je primena linearog programiranja u rešavanju igara nulte sume. Veza između linearog programiranja i teorije igara izložena je još sredinom prošlog veka, ali dokaz ekvivalencije minmaks teoreme i teoreme jake u potpunosti je izведен tek nedavno.

Dokazom ekvivalencije ove dve teoreme dat je velik doprinos razvoju teorije igara, kao jedne od bitnijih disciplina savremenih ekonomskih shvatanja. Poznati matematički modeli kao i programski paketi kreirani za rešavanje problema linearog programiranja se uspešno mogu primenjivati i na rešavanje matričnih igara dva igrača bez obzira na dimenziju problema.

## **7 Dodatak**

### **Džon fon Nojman**



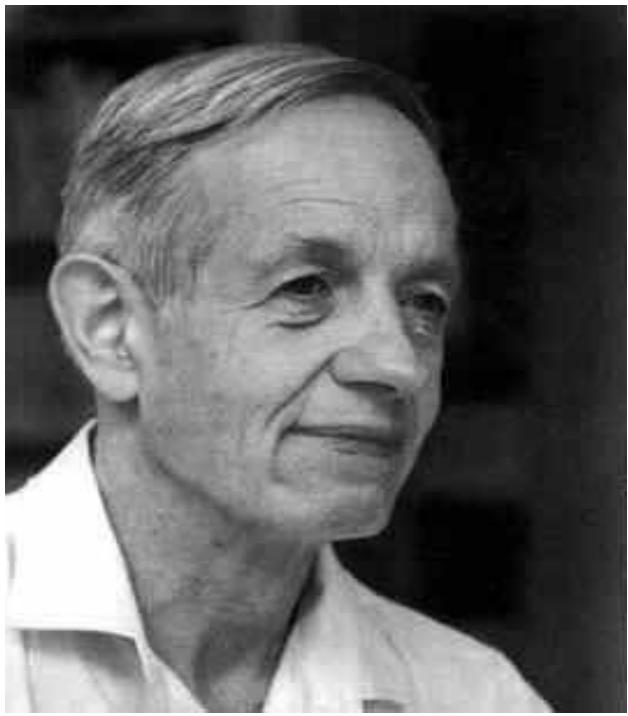
Rodio se 28.12.1903. u Budimpešti kao Janoš Nojman. Poticao je iz bogate jevrejske porodice. Otac advokat 1913. god. kupio je titulu fon, pa je tako njegova porodica stekla plemićku titulu. Sa šest godina mogao je da deli napamet osmocifrene brojeve, a već sa osam je pročitao sve 44 knjige svetske istorije i komunicirao sa ocem na starogrčkom jeziku. Smatra se da je sa 12 godina bio na nivou postdiplomca, nadaren fotografskim pamćenjem. Godine 1911. upisao je Luterovu gimnaziju u Budimpešti. Postao je najmlađi docent u istoriji Berlinskog univerziteta, na kome je ostao do 1930. godine kada se sa dva brata i majkom preselio u Ameriku i jedini je zadržao prezime

fon Nojman. U Berlinu je radio kao privatni predavač. Do 30. godine objavio je 36 radova, od kojih je čak 10 objavio sa svojih 25 godina. Prelazak porodice u Ameriku bio je iniciran pozivom sa Prinstona, gde je bio odabran kao jedan od četvorice za prvi nastavni kadar instituta "Institute For Advanced Study" na kome je radio kao profesor do kraja života. Godine 1937. postao je državljanin Amerike, a godinu kasnije dobio je nagradu za doprinos matematičkoj analizi.

Napisao je 150 naučnih radova, od kojih 60 iz čiste matematike, 20 iz fizike i 60 iz primenjene matematike. Matematika, računarstvo, kibernetika, nuklearna bomba, teorija igara, rata i konflikta, veštačka evolucija i primena matematike na kvantnu fiziku bili su predmet njegovog interesovanja. Dao je veliki doprinos numeričkoj analizi, teoriji skupova, statistici, funkcionalnoj analizi i ekonomiji. Smatra se osnivačem teorije igara.

Bio je ekscentrik, voleo je da jede, piće, uživao je u brzoj vožnji. Ženio se dva puta i imao je čerku iz prvog braka, koja je profesor na Univerzitetu u Minhenu. Godine 1957. dijagnostikovan mu je rak kostiju, koga je verovatno izazvala izloženost radijaciji tokom testiranja atomske bombe ili u kasnijem radu na nuklearnom oružju na Los Alamosu. Fon Nojman je umro nekoliko meseci posle uspostavljanja dijagnoze trpeći jake bolove. Rak se proširio i na njegov mozak i onemogućio mu sposobnost mišljenja. Umro je pod obezbedenjem vojske da ne bi nenamerno otkrio vojne tajne dok je bio pod jakim lekovima.

## Džon Neš



Džon Neš je rođen 13. juna 1928. godine u Virdžiniji. Potiče iz obrazovane porodice, otac mu je bio inženjer, a majka je studirala jezike. Prema rečima njegovih roditelja, Džon Neš je još u detinjstvu pokazivao interesovanje za knjige, ali istovremeno nije pokazivao interes za igru sa drugom decom.

U početku njegovog školovanja nastavnici nisu primećivali njegovu genijalnost, pa ga nisu ni podsticali. Međutim školska nastava nije mnogo privukla njegovu pažnju, što je izazivalo nezadovoljstvo kod njegovih nastavnika. Uprkos tome što nije bio marljiv i što je pokazivao slab interes za svakodnevni rad u školi, kod kuće je krajnje brižljivo radio

stvari koje su mu bile interesantne. Već sa dvanaest godina je pokazivao interes za naučne eksperimente koje je samostalno izvodio u svojoj sobi. Sa četrnaest godina je počeo da se interesuje za složenije matematičke probleme, inspirisan knjigom "Men of mathematics".

Godine 1941. počeo je da uči hemiju na Blufild koledžu (Bluefield College) gde je pokazao sposobnosti za rešavanje složenijih matematičkih problema. S namerom da postane hemijski inženjer u junu 1945. godine primljen je na Institut za tehnologiju "Karnegi" (Carnegie Institute of Technology). Ovaj put nastavnici su primetili njegov dar za matematiku, te su ga ohrabrili da se u potpunosti preusmeri na nju. Kolege iz tog perioda su ga smatrali staromodnim, nezrelim i vrlo neobičnim.

Dobio je ponude da usavrši matematiku na Harvardu, Čikagu, Prinstonu i Mičigenu. Godine 1948. na inicijativu čuvenog matematičara Takera opredelio se za Prinston. Taker je u preporuci upotrebio rečenicu "Ovaj čovek je genije". Njegov pristup studijama bio je krajnje neobičan. U početku je pokazao interesovanje za neke grane matematike – topologiju, logiku, geometriju, algebru i teoriju igara. Nije odlazio na predavanja, niti je matematiku učio iz knjiga ili udžbenika, već je samostalno pronalazio i rešavao probleme koji su mu bili interesantni. Upravo zato mnoga rešenja do kojih je Neš došao predstavljaju potpuno originalne pristupe. Kolege sa Prinstona ga opisuju kao usamljenog i zamišljenog, prepunog "čudnih ideja" iz različitih oblasti matematike i fizike.

Poznato je da je u nekoliko navrata razgovarao sa Ajnštajnom o problemu gravitacije i nekim drugim pitanjima, ali fizičar nije obratio značajniju pažnju na njega. Neš je stručno sarađivao i družio se sa Lojdjom Šeplijem i Martinom Šubikom. Voleli su da igraju šah, a za vreme partija su diskutovali o problemima koji se tiču teorije igara. Zaključke su predstavljali u svojim radovima.

Za vreme trajanja doktorskih studija Neš je počeo da razvija matematičke principe teorije igara. Godine 1949. napisao je tekst u kojem raspravlja o postojanju ravnoteže u nekooperativnoj igri sa  $n$  učesnika. Njegova doktorska disertacija pod naslovom "Non-cooperative games" (Nekooperativne igre) prihvaćena je 1950. godine. Iste godine počeo je saradnju sa RAND korporacijom. Ta saradnja je trajala nekoliko godina. Tamo je primenjivao teoriju igara na probleme iz oblasti vojnih odnosa i diplomacije. U to vreme se zahuktavao hladni rat. U oblasti čiste matematike objavio je brojne i značajne rade.

Džon Neš je od 1952. godine predavao na čuvenom MIT-u. Njegov način predavanja i ocenjivanja bio je zaista neobičan, ali nepopularan među studentima. Godine 1959. držao je kurs o teoriji igara, koji je započeo jednim pitanjem upućenim studentima: "Zašto ste vi ovde?"

Za vreme boravka na MIT-u nastupilo je teško vreme za Neša. Imao je ozbiljne porodične probleme i tada su počeli da se pojavljuju i prvi znaci njegove bolesti koja će se za nekoliko godina pojaviti u punoj snazi. Godine 1957. on se oženio sa Ališom Lard, koja je bila njegov student. Sa njom je dobio sina. Zdravlje je počelo da ga popušta naglo i bilo je samo pitanje vremena kada će doći do potpunog sloma. Njegova supruga, nakon nekoliko meseci njegovog bizarnog ponašanja i bez njegove saglasnosti, odvela ga je na lečenje na psihijatrijsku kliniku u blizini Bostona. Nakon izlaska iz bolnice, neko vreme su proveli u Evropi, a zatim su se vratili u SAD i preselili u Prinston. Međutim umesto da se njegovo zdravstveno stanje poboljša, ono se naglo pogoršalo. U pitanju je bila jasno izražena paranoidna šizofrenija. Neprestano je oko sebe video komuniste koji ga progone i umišljao je da mu rade o glavi, kao i razne telefonske pozive od ljudi koji se ne slažu sa njegovim mišljenjem. Takođe je osećao je da osoblje univerziteta neprijateljski nastrojeno prema njemu. Ovaj period svog života Neš opisuje kao težak i košmaran san iz kojeg nije bilo buđenja ni olakšanja. Supruga, majka i sestra bez njegove saglasnosti su ga smestile u bolnicu, a Ališa se ubrzo razvela od njega.

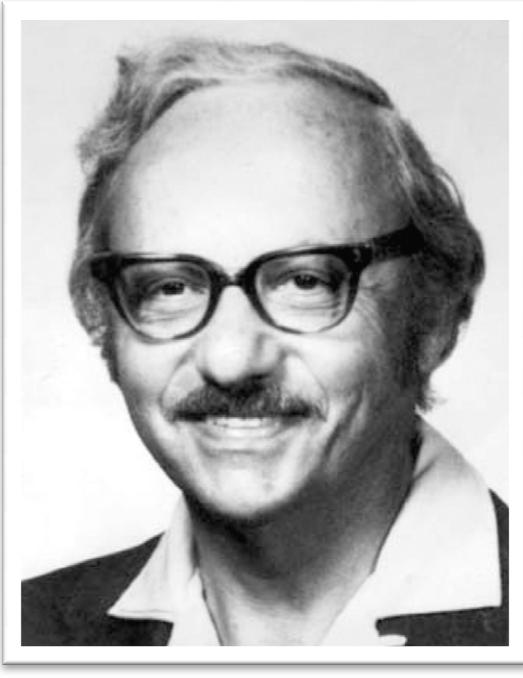
Oko 1970. godine Neš je počeo polako da se oporavlja, mada je i dalje bio izolovan i izgledao kao da je trajno izgubljen za svet i događaje oko sebe. Počeo je da iz dana u dan odlazi na Prinston. Tadašnji studenti su pričali da su svakodnevno vidjali tihog, čudnog čoveka koji se šunjaо hodnicima gde su se nalazila odeljenja matematike i fizike i koji je ponekad ispisivao čudne formule na tabli ili po prozorima. Prozvali su ga duhom.

Devedesetih godina Neš se ipak delimično oporavio od šizofrenije i počeo je da radi intenzivno na polju matematike. Verovao je da se neće oporaviti ukoliko ne bude video napredak u svom radu.

Džon Neš je dobitnik ugledne Fon Nojmanove nagrade, član je Udruženja ekonometričara, kao i Američke akademije nauka i umetnosti. Krajem 1994. godine Džon Neš, Rajnhart Zelten i Džon Haršanji su dobili Nobelovu nagradu za unapređenje teorije igara i njene primene u ekonomskoj nauci. Tek nakon toga je poraslo interesovanje za teoriju igara. Šira javnost bila je zaintrigirana pominjanjem imena Džon Neš. Pažnju šire javnosti posebno je prihvukao članak o njegovom životu koji je objavila Silvija Nazar u "Njujork tajmsu". Ona je ovaj članak nakon nekoliko godina istraživanja njegovog života dopunila i napisala knjigu pod nazivom "A beautiful mind - A biography of John Forbes Nash Jr" (Blistavi um - biografija Džona Forbsa Neša Juniora). Međutim ova biografija nije pisana uz Nešovu dozvolu, niti sa njegovim aktivnim učešćem, te se postavlja pitanje koliko je ona verodostojna. Prema motivima ove knjige snimljen je istoimeni film, koji je postigao veliku popularnost širom sveta.

Zanimljivo je da ime Džona Neša nije bilo poznato u stručnim krugovima. Za njega i njegove radove znao je samo uski krug ljudi. Sa druge strane, njegovi rezultati u oblasti teorije igara nisu bili ni brzo ni lako prihvaćeni u ekonomiji. Prošlo je pola veka od objavljivanja njegovih radova do dobijanja Nobelove nagrade. Ideje koje je Neš predstavio ranih pedesetih godina prošlog veka nisu se lako probijale kroz zatvorene krugove akademskih ekonomista.

## Džordž Bernard Dantzig



Džordž Bernard Dantzig rođen je u Portlandu, Oregon. Srednje ime je dobio po piscu Bernardu Šou. Sin nemačkog matematičara Tobiasa Dantziga, prijatelja Hernrija Poenkarea i francuske lingvistkinje Anje Ourison. Dvadesetih godina odselili su se u Vašington, gde je Anja postala lingvista u "Library of Congress", a Tobias profesor na "University of Maryland". Džord je pohađao "Powell Junior School" i "Central High School", gde se zainteresovao za geometriju, naročito za kompleksnu geometriju zahvaljujući svom ocu.

Diplomirao je matematiku i fiziku 1936. godine na "University of Maryland", a master diplomu je stekao na "University of Michigan" 1938. Posle dve godine koje je proveo na "Bureau of Labor Statistics", pristupio je doktorskom programu na "University of California", proučavajući statistiku u klasi Džerzija Nojmana.

Za vreme Drugog svetskog rata, Džordž je napustio program doktorskih studija i pridružio se "U.S. Air Force Office of Statistical Control". Godine 1946, vratio se na univerzitet i završio svoju doktorsku disertaciju.

Godine 1952. pridružio se matematičkom odseku RAND korporacije, 1960. postao je profesor na Departmanu za industrijsko inženjerstvo na Berkliju, gde je osnovao i upravljaо centrom za operaciona istraživanja. Prešao je 1966. godine na "Stanford faculty" kao profesor operacionih istraživanja i računarske nauke. Godinu dana potom, projekat operacionih istraživanja prerasta u zaseban departman. U Austriji je vodio Metodološku grupu na Internacionalmu institutu za primenu analitičkih sistema (IIASA) u Laksenburgu. Kanie je postao profesor transportne nauke na Stanfordu, gde je radio do svoje penzije 1985.

Bio je član Nacionalne akademije za nauku, Nacionalne akademije za inženjerstvo i Američke akademije za umetnost i nauku. Dobio je mnoga odlikovanja, uključujući i prvu Džon fon Nojmanovu nagradu 1974, nacionalnu medalju za nauku 1975. Matematičko društvo za programiranje odalo je čast Dantzigu ustanovivši prestižnu nagradu sa njegovim imenom, koja se dodelje od 1982.

Umro je 13.05.2005. u svojoj kući u Stanfordu u devedesetoj godini života.

## **Literatura**

- [1] Amy Greenwald, Game-Theoretic Artificial Intelligence, 2007
- [2] Berge, Claude and Ghoulia-Houri, Programming, games and transport networks, London, 1965
- [3] Drew Fudenberg, Jean Tirole, Game Theory, 1993
- [4] Elmer G. Wiens, Operational Research-Game Theory, 2010
- [5] G.B. Dantzig, A Proof of the equivalence of the programming problem and the game problem, Activity Analysis of Production and Allocation, T.C. Koopmans Edt., John Wiley & Sons, 1951
- [6] Ilan Adler, On the Equivalence of Linear Programming Problems and Zero-Sum Games, 2010
- [7] Karloff H., Linear programming, Boston 1991
- [8] Kojić Z., Operaciona istraživanja, Centar vojnih škola, Beograd, 1987
- [9] Krčevinac S., Čangalović M., Kovačević-Vujčić V., Martić M., Vujošević M., Operaciona istraživanja, FON, Univerzitet u Beogradu, 2006.
- [10] Pannell, David J., Introduction to linear programming, San Francisco, 1972
- [11] Surla K., Lozanov-Crvenković Z., Operaciona istraživanja-zbirka zadataka, Univerzitet u Novom Sadu, PMF, Novi Sad, 2002
- [12] T.E.S. Raghavan “Zero-Sum Two-person Games” Handbook of game theory with economic applications, volume 2, R.J. Aumann, S. Hart Edt, 1994.
- [13] [www.gametheory.net](http://www.gametheory.net)

## **Kratka biografija**

Milan Šovljanski rođen je 01.11.1985. godine u Novom Sadu gde je završio osnovnu školu "Vuk S. Karadžić" kao đak generacije. Godine 2004. završio je gimnaziju "Svetozar Marković" i upisao je Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, smer matematika-finansija. Diplomirao je 2009. godine i upisao master studije na PMF-u. Do avgusta 2010. polažio je sve ispite predviđene planom i programom.



UNIVERZITET U NOVOM SADU  
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: master rad

VR

Autor: Milan Šovljanski

AU

Mentor: dr Sanja Rapajić, vanredni profesor

MN

Naslov rada: Primena linearnog programiranja u rešavanju igara nulte sume

NR

Jezik publikacije: srpski

JP

Jezik izvoda: s/en

JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2011

GO

Izdavač: autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4

MA

Fizički opis rada: (7/90/13/18/5/10/0)

(broj poglavlja/strana/lit. citata/tabela/slika/grafika/priloga)

FO

Naučna oblast: matematika

NO

Naučna disciplina: primenjena matematika

ND

Predmetne odrednice, ključne reči:

linearno programiranje, dualnost u linearnom programiranju, teorija igara, igre nulte sume.

PO

UDK

Čuva se:

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod:

U radu je predstavljena primena linearнog programiranja u rešavanju igara nulte sume. Ona je bazirana na dokazu ekvivalencije minmaks teoreme u teoriji igara i teoreme jake dualnosti u linearном programiranju.

IZ

Datum prihvatawa teme od strane NN veća: 22.10.2010.

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: dr Zorana Lužanin, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Član: dr Nenad Teofanov, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Mentor: dr Sanja Rapajić, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD  
FACULTY OF SCIENCE  
KEY WORDS DOCUMENTATION

Acession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: monograph type

DT

Type of record: printed text

TR

Contents code: master thesis

CC

Author: Milan Šovljanski

AU

Mentor: Dr Sanja Rapajić, associate professor

MN

Title: Application of linear programming in solving the zero-sum games

TI

Language of text: Serbian

LT

Language of abstract: s/en

LA

Country of publication: Republic of Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2011

PY

Publisher: author's reprint

PU

Publication place: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4

PP

Physical description: (7/90/13/18/5/10/0)

(chapters/pages/literature/tables/pictures/graphs/additional lists)

PD

Scientific field: mathematics

SF

Scientific discipline: applied mathematics

SD

Subject, key words:

linear programming, duality, game theory, zero-sum games

SKW

UC

Holding data:

HD

Note:

N

Abstract:

Application of linear programming in solving zero-sum games is presented in this thesis. It is based on relationship between two-person zero-sum games and linear programming and equivalence between Minmax Theorem of game theory and The Strong Duality Theorem of linear programming.

AB

Accepted on Scientific board on: 22.10.2010.

AS

Defended:

DE

Thesis Defend board:

DB

President: Dr Zorana Lužanin, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Member: Dr Nenad Teofanov, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Mentor: Dr Sanja Rapajić, associate professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad