UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Milan Rankov

Aktuarski modeli za zavisne rizike

- završni rad -

NOVI SAD, 2010.

P r e d g o v o r

Pojam zavisnosti star je, čini se, koliko i sama ljudska misao. Logika uzročno – posledičnih veza, koje u svetu današnjeg bivstvovanja nameću mnoga naučna, sociološka i ekonomsko – politička pitanja, danas vodi samo jednom – pokušaju jasnog definisanja, tj. formulisanja matematičkih modela i zakonitosti istih.

Iako ne postoji jedinstvena opšta definicija rizika, i često se uzima kao sinonim za mogućnost gubitka, verovatnoću gubitka, neizvesnost, odstupanje stvarnih od očekivanih rezultata, postoje elementi koji su zajednički u svim definicijama, a to su: neizvesnost i gubitak. U osiguranju rizik se često definiše kao mogući ekonomski štetan, neizvestan budući događaj na koji osiguranik ili neka druga zainteresovana lica ne mogu da utiču, pa je kao takav pogodan da bude predmet osiguranja. Razvojem misli i ideja o riziku, kao jednom od najbitnijih entiteta osiguranja, te kvalifikaciji i kvantifikaciji istog, u najvećem je doprinele teorija verovatnoće, koja je u koegzistenciji sa statistikom stvorila bazu aktuarske nauke.

Prvobitni matematički aparat u osiguranju zasnivao se na pojednostavljenim prepostavkama koje su onemogućavale definisanje modela koji na pravi način oslikavaju realnost. Pretpostavka o nezavisnosti među rizicima omogućila je da pomoću zakona velikih brojeva lako izračunamo premiju osiguranja. S druge strane, ova “lakoća“ u računanju često je dovodila do potcenjivanja premije osiguranja. Prepostavimo, na primer da osiguravajuća kompanija osigura od zemljotresa stan 1 i stan 2, koji se nalaze na istom spratu jedne zgrade. Ukoliko bi ta zgrada bila zahvaćena zemljotresom, bilo bi sasvim nerealno prepostaviti da jedan stan bude potpuno uništen u zemljotresu, a da drugi ne pretrpi nikakvu štetu. Dakle, premija utvrđena pod pretpostavkom o nezavisnosti ova dva slučaja manja je od fer premije koju bi ovi osiguranici trebali da plate. Osiguravajuća kompanija koja je osigurala više putnika na istom letu takođe je izložena riziku da istovremeno isplati više šteta koje nastaju kao posledica istog uzroka.

Slične primere nalazimo i kod životnih osiguranje, na primer, kod zajedničkog rentnog osiguranja (joint life), kod kojeg period trajanja plaćanja zavisi od ternutaka smrti osiguranih lica. Kako su ovi osiguranici često povezana lica (npr. supružnici) iskustvo je pokazalo da je i vreme njihove smrti na neki način povezano. Drugim rečima, smrt jednog supružnika, veoma često dovodi do pogoršanja zdravstvenog stanja ili čak do smrtnog ishoda drugog.

Vidimo da prepostavka o nezavisnosti u modernom svetu osiguranja nije realna. Ono što nam je sve više potrebno je egzaktno utvrđivanje povezanosti među rizicima koje omogućava zaključivanje o uzročno – posledičnim i stohastičkim odnosima među njima kao i predviđanje jednih na osnovu drugih. Dakle, efikasan menadžment rizika mora biti u mogućnosti da odgovori na pitanje da li je zavisnost među rizicima opasna i ako jeste u kojoj meri. U te svrhe koriste se alati koji omogućavaju kvantifikovanje, poređenje i modeliranje jačine zavisnosti među različitim rizicima. Upravo ovi alati kao i njihova primena u aktuarskoj matematici su tema ovog rada.

Ovom prilikom želim da se zahvalim svim profesorima i asistentima na saradnji i ukazanom znanju tokom studiranja. Posebno se zahvaljujem svom mentoru, dr Dori Seleši, za stručno i profesionalno usmeravanje kao i za svesrdnu pomoć koju mi je pružila pri izradi ovog rada. Zahvaljujem se i svima koji su mi, na bilo koji način pružili pomoć i podršku, prvenstveno svojoj porodici i prijateljima.

Novi Sad, 28.09.2010. Milan Rankov

S a d r ž a j

1

Modeliranje rizika

U poslovnom svetu rizik se često definiše kao događaj koji može, a ne mora da se dogodi i koji sa sobom nosi određene negativne finansijske posledice. Na osnovu ove definicije zaključujemo da rizike možemo predstaviti slučajnim promenljivama čiji skupovi vrednosti opisuju pomenute negativne posledice. U nastavku navodimo osnovne pojmove koje koristimo u modeliranju rizika.

1.1 FUNKCIJE KVANTILA

Pre nego što definišemo funkcije kvantila objasnićemo šta je jednakost u raspodeli, s obzirom da su aktuarima obično interesantnije funkcije raspodele slučajnih promenljivih nego same slučajne promenljive.

Definicija 1.1.1. Za dve slučajne promenljive X i Y kažemo da su jednake u raspodeli ako važi

$$F_X \equiv F_Y \text{ tj } F_X(x) = F_Y(x), \quad \text{za sve } x \in \mathbb{R}$$

Ovo zapisujemo sa $X =_d Y$.

Definicija 1.1.2. Za datu funkciju raspodele F_X, definišemo njene inverzne funkcije F_X^{-1} i F_X^{-1+} na jedan od sledeća dva načina

$$F_X^{-1}(p) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq p\} = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) < p\},$$

i

$$F_X^{-1+}(p) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) > p\} = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \leq p\}$$

za $p \in [0,1]$ gde po konvenciji uzimamo $\inf \varnothing = +\infty$ i $\sup \varnothing = -\infty$. ∇

Za dati nivo verovatnoće p, $F_X^{-1}(p)$ je p – ti kvantil od X (često se označava sa q_p).

Lema 1.1.3 Za bilo koji realan broj x i nivo verovatnoće p, važi sledeća nejednakost:

(i) $F_X^{-1}(p) \le x \Leftrightarrow p \le F_X(x)$;

(ii) $x \le F_X^{-1+}(p) \Leftrightarrow \Pr[X < x] = F_X(x-) \le p$.

Osobina 1.1.4 Ako slučajna promenljiva X ima neprekidnu funkciju raspodele F_X tada $F_X(X) : \mathcal{U}(0,1)$.

Osobina 1.1.5 Neka je X slučajna promenljiva sa ne nužno neprekidnom funkcijom raspodele F_X. Ako $U : \mathcal{U}(0,1)$ tada

$$X =_d F_X^{-1}(U) =_d \overline{F}_X^{-1}(U) =_d F_X^{-1+}(U) =_d \overline{F}_X^{-1+}(U). \tag{1.1}$$

1.2 STOP – LOSS TRANSFORMACIJA

Za datu slučajnu promenljivu X, slučajna promenljiva $(X - t)_+$, gde je $\xi_+ = \max\{\xi, 0\}$ predstavlja iznos za koji X prelazi dati prag t.

U osiguranju ovo t najčešće predstavlja odbitak ili samopridržaj (na primer, kod stop – loss ugovora o reosiguranju). Reosiguranje viška gubitka/šteta (stop – loss reinsurance) spada u neproporcionalna reosiguranja. Reosiguravač preuzima obavezu za naknadu štete iznad ugovorenog iznosa u određenoj vrsti osiguranja za izvesno vremensko razdoblje, obično za godinu dana. Osiguravač pre toga određuje svoj samopridržaj vezan za jednogodišnje obaveze. Reosiguranje mu pokriva samo višak šteta kao zbirni celogodišnji iznos koji prelazi samopridržaj (s tim što se visina te obaveze po pravilu ograničava). Naravno, osiguravač ne može utvrditi samopridržaj tako da svaku godinu završava povoljno prevaljujući gubitke na reosiguravača. Zbog toga se u praksi mogući gubici iz posla obično dele. Ovaj vid zaštite pokazao se nezamenljiv kod onih vrsta rizika gde postoje velika kolebanja godišnjih poslovnih rezultata. Stoga za ugovarače ima smisla samo kada se zaključuje na dugoročnoj osnovi jer se time izjednačavaju dobri i loši rezultati. Značajnu primenu reosiguranje viška gubitka našlo je, recimo, kod osiguranja useva i plodova i osiguranja od izlivanja vode.

Definicija 1.2.1. Funkcija $\pi_X(t) = E[(X-t)_+]$ naziva se ***stop – loss transformacija*** od X. *Kod stop – loss ugovora o reosiguranju ova veličina predstavlja očekivani iznos šteta koje je reosiguravač dužan da isplati cedentu (osiguravaču) . Dakle, očekivani iznos iznad samopridržaja.*

Osobina 1.2.2 Pretpostavimo da važi $E[|X|]<+\infty$. Stop – loss transformacija $\pi_X(t)$ ima sledeće osobine:

(i) Ona je opadajuća i konveksna;

(ii) $\lim_{t\to+\infty}\pi_X(t)=0$ i $\lim_{t\to-\infty}\{\pi_X(t)+t\}=E[X]$.

1.3 KOMONOTONOST

Definicija 1.3.1. Slučajni vektor $\boldsymbol{X}$ je ***komonoton*** ako i samo ako postoji slučajna promenljiva Z i neopadajuće funkcije $t_1,t_2...,t_n$ tako da važi

$$\boldsymbol{X} =_d (t_1(Z),t_2(Z)...,t_n(Z))^t. \qquad \nabla$$

U radu je korišćena oznaka $(X_1^C,...,X_n^C)$ za komonotoni slučajni vektor.

1.3.1 Komonotonost i Frechetova gornja granica

Definicija 1.3.2. Neka su $F_1,F_2...,F_n$ jednodimenzionalne funkcije raspodele. *Frechetov* prostor $\mathcal{R}_n(F_1,F_2...,F_n)$ sastoji se od svih n – dimenzionalnih funkcija raspodele $F_{\boldsymbol{X}}$ slučajnih vektora $\boldsymbol{X}$ čije su marginalne funkcije raspodele $F_1,F_2...,F_n$, tj.

$$F_i(x)=\Pr[X_i\le x], \quad x\in\mathbb{R}, \quad i=1,2,...,n. \qquad \nabla$$

Elementi skupa $\mathcal{R}_n(F_1,F_2...,F_n)$ su ograničeni od gore posebnom višedimenzionalnom funkcijom raspodele, koju nazivamo *Frechetova* gornja granica.

Definicija 1.3.3 Definišimo *Frechetovu* gornju granicu kao

$$W_n(\boldsymbol{x})=\min\{F_1(x_1),F_2(x_2)...,F(x_n)\}, \ \ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n.$$

Tada nejednakost

$$F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})\le W_n(\boldsymbol{x}) \tag{1.2}$$

važi za sve $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ i $\boldsymbol{X}\in\mathcal{R}_n(F_1,F_2...,F_n)$.

Teorema 1.3.4 Slučajni vektor $\boldsymbol{X}\in\mathcal{R}_n(F_1,F_2...,F_n)$ je *komonoton* ako i samo ako je njegova višedimenzionalna funkcija raspodele W_n.

1.4 MEĐUSOBNA ISKLJUČIVOST

Pojam međusobne isključivosti je, na neki način, suprotnost pojmu komonotonosti. U nastavku se bavimo rizicima, tj nenegativnim slučajnim promenljivama u *Frechetovom* prostoru $\mathcal{R}_n^+(F_1, F_2 ..., F_n)$, gde su F_i takvi da važi $F_1(0-) = F_2(0-) = ... = F_n(0-) = 0$.

Definicija 1.4.1. Za višediemenzionalni rizik $\boldsymbol{X}$ iz $\mathcal{R}_n^+(F_1, F_2 ..., F_n)$ kažemo da je ***međusobno isključiv*** ako važi

$$\Pr[X_i > 0, X_j > 0] = 0 \quad \text{za sve } i \neq j.$$

Drugim rečima, rizici $X_1, ..., X_n$ su međusobno isključivi kada najviše jedan od njih može biti različit od nule. Dakle, pretpostavka da je neki rizik različit od nule direktno implicira da su svih ostali jednaki nuli.

Opažamo da međusobna isključivost $\boldsymbol{X}$ ukazuje da je njena funkcija gustine raspodele f_X skoncentrisana oko osa.

Primedba 1.4.2. U dvodimenzionalnom slučaju međusobnu isključivost nazivamo ***kontramonotonost***. Dakle, za dvodimenzionalnu slučajnu promenljivu kažemo da je kontramonotona ako se njena raspodela može predstaviti kao $(t_1(Z), t_2(Z))$ za neku slučajnu promenljivu Z, rastuću funkciju t_1 i opadajuću funkciju t_2. Rastuća vrednost jedne komponente utiče na smanjenje druge.

Frechetova donja granica

Elementi prostora $\mathcal{R}_n(F_1, F_2 ..., F_n)$ su ograničeni odozdo sa funkcijom koju nazivamo *Frechetova* donja granica i koja je prikazana u sledećoj definiciji.

Definicija 1.4.3 Ako definišemo *Frechetovu* donju granicu kao

$$M_n(\boldsymbol{x}) = \max\left\{\sum_{i=1}^{n} F_i(x_i) - (n-1), 0\right\}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Nejednakost

$$M_n(\boldsymbol{x}) \leq F_X(\boldsymbol{x}) \tag{1.3}$$

važi za sve $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ i $\boldsymbol{X} \in \mathcal{R}_n(F_1, F_2 ..., F_n)$.

Egzistencija Frechetove donje granice u Frechetovom prostoru

Frechetove donje granice nisu uvek funkcije raspodele. Sledeći rezultat obezbeđuje potrebne i dovoljne uslove kada je M_n funkcija raspodele u $\mathcal{R}_n(F_1, F_2..., F_n)$.

Teorema 1.4.4 Potreban i dovoljan uslov da bi M_n bila odgovarajuća funkcija raspodele u $\mathcal{R}_n(F_1, F_2..., F_n)$ je da za svako $\boldsymbol{x}$ za koje $0 < F_j(x_j) < 1,\ j = 1, 2, ..., n,$ važi ili

$$\sum_{j=1}^{n} F_j(x_j) \le 1 \tag{1.4}$$

ili

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{F}_j(x_j) \le 1. \tag{1.5}$$

Međusobna isključivost i Frechetova donja granica

Frechetov prostor ne sadrži uvek međusobno isključive rizike. Potreban i dovoljan uslov daje sledeća teorema.

Teorema 1.4.5 *Frechetov* prostor $\mathcal{R}_n^+(F_1, F_2, ..., F_n)$ sadrži međusobno isključive rizike, ako i samo ako je zadovoljen sledeći uslov

$$\sum_{i=1}^{n} q_i \le 1 \text{ gde je } q_i = 1 - F_i(0) \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{1.6}$$

Teorema 1.4.6 Posmatrajmo *Frechetov* prostor $\mathcal{R}_n^+(F_1, F_2, ..., F_n)$ koji zadovoljava (1.6) i neka je $\boldsymbol{X} \in \mathcal{R}_n^+(F_1, F_2..., F_n)$. Tada je $\boldsymbol{X}$ međusobno isključiv ako i samo ako važi

$$M_n(\boldsymbol{x}) = F_X(\boldsymbol{x}),\ \ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.$$

2

Merenje i poređenje rizika

Razvijena tržišta pružaju nam mogućnost da trgujemo rizikom kao sa bilo kojom drugom robom. Kao najčešći učesnici ovog trgovanja susreću se osiguravajuće kompanije i banke koje kupuju rizik za odgovarajuću cenu koja je zapravo novačani izraz potencijalne opasnosti koju ovaj rizik nosi. Upravo ovo merenje opasnosti rizika biće centralni pojam u prvom delu ovog poglavlja.

Vekovima, funkcija osiguravača i reosiguravača bila je da prodaju pokriće rizika. U poslednjim decenijama u ovu aktivnost uključile su se i banke i druge finansijske institucije, pokušavajući da primljene rizike plasiraju na tržišta na kojima se oni mogu kontrolisati. Kao vid kontrole oni sve više koriste moderne tehnike merenja rizika i procene profitabilnosti određenog biznisa koji predstavlja potencijano mesto plasmana ovog rizika. Menadžeri osiguravajućih kompanija konstantno su pod pritiskom klijenata tj. osiguranika, s jedne, i akcionara, s druge strane. Prve interesuje, isključivo, finansijska sigurnost dok drugi insistiraju na odgovarajućem profitu na uložena sredstva koji smatraju srazmernim riziku koji su ovim ulaganjem prihvatili.

2.1 MERE RIZIKA

U osiguranju i finansijama susrećemo se sa različitim merama rizika, od onih najjednostavnijih koje ne oslikavaju relanost na najbolji način do onih najsloženijih koje su često veoma komplikovane za "rukovanje". Drugim rečima, nemoguće je govoriti o pravoj meri rizika jer svaka može biti na neki način prava ukoliko najbolje odgovara datoj situaciji i postavljenim pretpostavkama. Takođe, različite klase mera rizika odraz su različitih pristupa. Ipak poslednjih godina pojavila se značajna literatura koja opisuje sofisticiranu teoriju mera rizika. Prekretnica u ovom razvoju bio je aksiomatski pristup merama rizika.

S obzirom da rizike posmatramo kao nenegativne slučajne promenljive, merenje rizika je, zapravo, uspostavljanje odgovarajućeg preslikavanja između prostora slučajnih promenljivih i nenegativnih realnih brojeva $\mathbb{R}^+$. Dakle, realni broj koji predstavlja opštu meru rizika koji je opisan slučajnom promenljivom X označava se sa $\rho[X]$. Zaključujemo da mera rizika nije ništa drugo, do funkcionela koja riziku dodeljuje nenegativan realan broj.

Najvažnije je da razumemo koji vid rizičnosti neizvesnog ishoda data mera pokušava da oceni. Ne postoji mera rizika koja obuhvata celokupnu sliku opasnosti sadržane u nekoj realnoj situaciji već se svaka od njih bavi isključivo jednim aspektom ove opasnosti. Napravimo paralelu sa statistikom gde pojedine karakteristike raspodele imaju različito značenje i upotrebu. Tako, na primer, očekivanje koristimo kao meru centralne tendencije, disperziju kao meru rasipanja, koeficijent asimetrije kao meru asimetrije raspodele itd. Navedene zaključke formalizujemo sledećom definicijom.

Definicija 2.1.1 ***Mera rizika*** je funkcionela ρ koja preslikava rizik X u nenegativni realan broj $\rho[X]$, (koji može biti i beskonačan), koji predstavlja dodatni novac koji je potrebno dodati riziku X da bi ga učinili prihvatljivim. [1] ∇

Ideja je dakle, da ρ meri rizičnost tako da velike vrednosti $\rho[X]$ ukazuju da se radi o "opasnom" riziku. U slučaju da je X mogući gubitak nekog portfolia tokom nekog vremenskog perioda, $\rho[X]$ interpretiramo kao iznos kapitala koji je potrebno dodati kao "obezbeđenje" ovog portfolia kako bi on bio prihvatljiv sa aspekta interne ili eksterne kontrole rizika. U tom slučaju $\rho[X]$ se zove *riziko kapital portfolia*. Ove mere rizika koriste se za određivanje rezervi i margine solventnosti kao i iznosa minimalnog kapitala potrebnog za održavanje solventnosti kompanije[2].

2.1.1 VREDNOST POD RIZIKOM (VALUE – AT – RISK , VAR)

U poslednjoj deceniji primetan je rast upotrebe kvantila u aktuarskoj praksi. Zahvaljujući njihovoj jednostavnoj interpetaciji kvantili se sve više koriste u modernom menadžmentu rizika u obliku koncepta ***vrednost pod rizikom*** (*value – at – risk, VaR*). Ovaj pojam nam daje odgovor na pitanje: Kolike gubitke možemo očekivati u toku jednog dana, nedelje, godine...sa datom verovatnoćom? U današnjem finansijskom svetu VaR je postao vodeća mera rizika, s obzirom da su regulatorni organi širom sveta prihvatili ovaj model kao osnovu za utvrđivanje iznosa minimalnih sredstava koje kompanija mora da poseduje kada je izložena tržišnom riziku.

Definicija 2.1.2 Za dati rizik X i verovatnoću $p \in (0,1)$, odgovarajući VaR označavamo sa VaR[X ; p], i definišemo kao

---

[1] U poglavlju 2 [2] detaljno su predstavljene mere rizika koje se koriste za određivanje rezervi i minimalne visine kapitala za izbegavanje nesolventnosti. Navedene su mere rizika koje mere gornje repove funkcija raspodela. Zbog jednostavnosti razmatrani su tržišni modeli bez pretpostvake o iznosu kamatne stope.

[2] Vidi Panjer (1998)

$$\mathrm{VaR}[X;p] = F_X^{-1}(p). \qquad \nabla$$

Napomenimo još da VaR uvek postoji i da je iskazan u odgovarajućim novčanim jedinicama, tj. kao novčani gubitak. Često ćemo koristiti sledeću ekvivalenciju koja važi za svako $x \in \mathbb{R}$ i $p \in (0,1)$:

$$\mathrm{VaR}[X;p] \le x \Leftrightarrow p \le F_X(x) \tag{2.1}$$

Primena VaR u utvrđivanju solventnosti osiguravajućih kompanija

U poslovima osiguranja, proizvodni ciklus je obrnut, tj. premija se plaća unapred (osiguranik) pre nego što osiguravač isplati potencijalne štete osiguraniku. Portfolio može biti ugrožen ukoliko je njegov gubitak X pozitivan (ili ekvivalnetno, njegov profit -X negativan), tj. ukoliko je nemoguće ispuniti obaveze prema osiguranicima. Solventnost predstavlja finansijski kapacitet određenog rizičnog posla da u svakom trenutku odgovori na sve ugovorne obaveze. U cilju zaštite osiguranika, regulatorni organi nametnuli su određene zahteve u pogledu visine kapitala (solvency capital requirement, $\rho[X]$*) osigravajućih kompanija. Na ovaj način oni zahtevaju da iznos slobodnog kapitala, tj. suficit aktive nad obavezama (rezervama) bude uvek bar* $\rho[X]$. *Ovaj kapital koristi se kao obezbeđenje od rizika da premije zajedno sa rezervama i prihodima od investiranja ne budu dovoljne za pokrivanje budućih obaveza. Dakle,* $\rho[X]$ *se određuje tako da je „prilično sigurno” da se događaj* $\{X > \rho[X]\}$ *neće desiti. Na našem tržištu primeri ovih zahteva, koje određuje Narodna banka Srbije, su minimalni iznosi osnivnog kapitala kompanije, garanta rezerva i margina solventnosti.*

2.2 POREĐENJE RIZIKA

Prethodno smo definisali pojam mere rizika koji nam omogućava da izmerimo rizičnost budućeg slučajnog događaja a ovde dajemo formalizaciju intuitivnog poređenja slučajnih promenljivih, tj. iskaza da je slučajna promenljiva *X* „ opasnija”, tj. nosi veće rizik od slučajne promenljive *Y*. Ovo poređenje moglo bi se bazirati na jednoj meri rizika i potpunom poretku slučajnih promenljivih, ali s obzirom da je ovo poređenje previše grubo mi ćemo poređenje zasnivati na većem broju mera rizika. Na ovaj način dobijamo parcijalne poretke među slučajnim promenljivama, koji se nazivaju ***stohastičkim poretcima***.

Uopšteno govoreći, stohastički poredak je relacija poretka koja nam dozvoljava da poredimo mere verovatnoće. Najjednostavniji način da rangiramo rizične situacije je da izračunamo neku meru rizika i da prema njoj uporedimo date rizike. U praksi se, međutim, često dešava da, iako nam određena mera rizika najviše odgovara u datoj situaciji, vrednosti pridruženih parametara (nivoi verovatnoća za VaR i TVaR (*tail value–at–risk*), koeficijent averzije prema riziku za eksponencijalnu funkciju korisnosti itd.) nisu fiksirani za dati problem. Iz tog razloga aktuari zahtevaju mnogo više od jednostavnog poređenja baziranog na jednoj meri rizika. Naime, oni zahtevaju da rizik bude povoljniji u odnosu na veći broj mera rizika. Na ovaj način nastaje parcijalno uređenje (tj. više nije moguće porediti svaki par rizika posebno) koje se naziva stohastički poredak.

Istorijski gledano, stohastički poredak prvobitno se javlja u obliku majorizacije, koja je kasnije proširena na teoriju dilatacije i na kraju kao, neosporno, najbolji poznati oblik stohastičkog poretka javlja se ***stohastička dominacija*** koju je uveo *Lehmann* (1955) a nešto kasnije, detaljno razradili *Kamae*, *Krengel* i *O'Brien* (1977). Vremenom se razvija veći broj drugih poredaka koji pronalaze primenu u različitim oblastima, među kojima su najznačajnije: statistika, teorija redova čekanja, teorija pouzdanosti, ekonomija, biomatematika, aktuarska nauka, fizika i mnoge druge.

Intresovanje aktuara za stohastičke poretke prvobitno se javlja u ranim radovima *Borcha* (1961) i *Bühlmanna* (1977). U poslednjim decenijama interesovanje je poraslo do te mere da su stohastički poretci postali najznačajniji alat za poređenje rizičnosti različitih slučajnih situacija[3].

U nastavku ćemo porediti rizike pomoću transformacija slučajnih promenljivih. Tako, na primer, poređenjem funkcija raspodele dobijamo stohastičku dominaciju $\preceq_{\mathrm{ST}}$, poređenjem stop – loss trasformacija dobijamo konveksni poredak $\preceq_{\mathrm{SL},=}$ i stop – loss poredak $\preceq_{\mathrm{SL}}$, a poređenjem funkcija generatrisa momenata poredak $\preceq_{\mathrm{MGF}}$.

2.2.1 STOHASTIČKE RELACIJE PORETKA

Parcijalni poretci funkcija raspodele

Relacije poretka koje ćemo razmatrati u daljem radu su parcijalni poretci definisani na skupu funkcija raspodele. Definišimo ovaj pojam preciznije.

Definicija 2.2.1. Neka je S skup jednodimenzionalnih funkcija raspodele. Binarna relacija $\preceq$ je parcijalni poredak na skupu S ako za bilo koje elemente F_X , F_Y i F_Z iz skupa S važe sledeće osobine:

[3] Detaljan opis primene u aktuarstvu može se naći u knjigama *Goovaertsa* (1990), *Kaasa*, *Van Heerwaardena* i *Goovaertsa* (1994)

(i) Ako je $F_X \preceq F_Y$ i $F_Y \preceq F_Z$ onda je $F_X \preceq F_Z$ (tranzitivnost)

(ii) $F_X \preceq F_X$ (refleksivnost)

(iii) Ako je $F_X \preceq F_Y$ i $F_Y \preceq F_X$ onda je $F_X \equiv F_X$ (antisimetričnost)

Ako pored ovih uslova, za svaki par F_X i F_Y elemenata skupa S važi $F_X \preceq F_Y$ ili $F_Y \preceq F_X$, onda kažemo da je $\preceq$ relacija totalnog poretka.

Iako su relacije poretka koje ćemo u nastavku korisititi uglavnom definisane na skupovima funkcija raspodele, često se ne pravi razlika između relacija poretka definisanih za funkcije raspodele i odgovarajućih relacija slučajnih promenljivih. Tako na primer, pišemo $X \preceq Y$ a u stvari mislimo $F_X \preceq F_Y$. Drugim rečima, kada kažemo da je rizik X manji od rizika Y u odnosu na stohastičku relaciju porekta $\preceq$, mi zapravo tvrdimo da ovo poređenje važi za odgovarajuće funkcije raspodele ovih slučajnih promenljivih. Dakle, zajednička raspodela ovih slučajnih promenljivih je irelevantna jer su potrebne informacije sadržane u datim marginalnim raspodelama. Ako važi $X \preceq Y$ onda važi $X \preceq Y'$ za svaku slučajnu promenljivu Y' koja ima istu marginalnu raspodelu kao Y. U ovakvim situacijama, ne moramo pretpostaviti da su slučajne promenljive koje poredimo definisane na istom prostoru verovatnoća.

2.2.2 STOHASTIČKA DOMINACIJA

2.2.2.1 Stohastička dominacija i mere rizika

Stohastička dominacija i VaR

Da bi smo uporedili par rizika X i Y prirodan pristup bio bi da se oslonimo na pojam VaR, smatrajući da je slučajna promenljiva X manje „opasna” od Y ako važi VaR[X;α_0]$\leq$ VaR[Y;α_0] za dati nivo verovatnoće α_0. Međutim, ponekad je teško odrediti takvo α_0, te je sasvim moguće da za dva različita nivoa verovatnoće α_0 i α_1 istovremeno važi VaR[X;α_0] < VaR[Y;α_0] i VaR[X;α_1] > VaR[Y;α_1]. Iz ovog razloga uvodimo sledeći kriterijum: Pišemo X manje od Y ako je VaR od X manji od odgovarajućeg VaR Y , za bilo koji nivo verovatnoće.

Definicija 2.2.2 Neka su X i Y dve slučajne promenljive. Tada kažemo da je X manje od Y u ***stohastičkoj dominaciji***, što obeležavamo sa $X \preceq_{\mathrm{ST}} Y$, ako nejednakost $\mathrm{VaR}[X; p] \leq \mathrm{VaR}[Y; p]$ važi za svako $p \in [0,1]$.

Stohastička dominacija može biti okarakterisana i odgovarajućom inverznom funkcijom raspodele,

$$x \mapsto \mathrm{VaR}[X; F_Y(x)]. \tag{2.2}$$

Ovo zapravo nije ništa drugo do VaR od X za nivo verovatnoće $p = F_Y(x)$.

Teorema 2.2.3 Za dve slučajne promenljive X i Y važi $X \preceq_{\mathrm{ST}} Y$ ako i samo ako za svako x važi

$$\mathrm{VaR}[X; F_Y(x)] \leq x.$$

Za neprekidne slučajne raspodele imamo sledeću teoremu koja dopunjuje prethodnu teoremu.

Teorema 2.2.4 Neka su X i Y dve slučajne promenljive sa neprekidnim funkcijama raspodele. Tada važi $X \preceq_{\mathrm{ST}} Y$ ako i samo ako

$$F_X(\mathrm{VaR}[Y; p]) \geq p \text{ za svako } p \in (0, 1).$$

Uobičajene preferencije profitno orjentisanih donosioca odluka

Teorema 2.2.5 Za bilo koje slučajne promenljive X i Y važe sledeće ekvivalencije:

$$X \preceq_{\mathrm{ST}} Y \Leftrightarrow E[v(X)] \leq E[v(Y)] \tag{2.3}$$

za sve neopadajuće funkcije v, za koje ova očekivanja postoje, tj. za sve funkcije v, gde je $v' \geq 0$

Neke osobine stohastičke dominacije

U sledećoj teoremi navodimo glavne osobine poretka $\preceq_{\mathrm{ST}}$.

Teorema 2.2.6

(*i*) $X \preceq_{\mathrm{ST}} Y \Rightarrow t(X) \preceq_{\mathrm{ST}} t(Y)$ za svaku neopadajuću funkciju *t*.

(*ii*) Neka su $X_1, X_2, ..., X_n$ i $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ nezavisne slučajne promenljive. Ako važi $X_i \preceq_{\mathrm{ST}} Y_i$ za svako $i = 1, 2, ..., n$, tada za svaku rastuću funkciju $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\Psi(X_1, X_2, ..., X_n) \preceq_{\mathrm{ST}} \Psi(Y_1, Y_2, ..., Y_n).$$

(*iii*) Ako je $X \preceq_{\mathrm{ST}} Y$ i $E[X] = E[Y]$ tada važi $X =_d Y$.[4]

Prvi rezultat ukazuje da uvođenje odbitaka ili limita osiguravajućeg pokrića ne menja odnos u navedenom poretku, tj.

$$X \preceq_{\mathrm{ST}} Y \Rightarrow (X-d)_+ \preceq_{\mathrm{ST}} (Y-d)_+ \text{ za bilo koji odbitak } d.$$

$$X \preceq_{\mathrm{ST}} Y \Rightarrow \min\{X, \omega\} \preceq_{\mathrm{ST}} \min\{Y, \omega\} \text{ za bilo koji limit pokrića } \omega$$

Deo (*iii*) nam ukazuje da relaciju $\preceq_{\mathrm{ST}}$ ne možemo koristiti za poređenje slučajnih promenljivih sa istim očekivanjima. Ova osobina nema samo teoretski značaj, već se često pojavljuje i u praksi, kada, na primer, ocenjujemo parametre neke raspodele metodom momenata. Dakle, nekada nam je potreban stohastički poredak na osnovu kojeg smo u mogućnosti da poredimo slučajne promenljive sa istim očekivanjima. Upravo takav je konveksni poredak koji je opisan u sledećem poglavlju.

Napomenimo da zaključak (*iii*) važi i ako umesto $E[X] = E[Y]$ važi $E[t(X)] = E[t(Y)]$, za neku strogo rastuću funkciju *t*. Kombinujući (*i*) i (*iii*) vidimo da iz $X \preceq_{\mathrm{ST}} Y$ i $E[t(X)] = E[t(Y)]$ dobijamo $t(X) =_d t(Y)$ što nam s druge strane daje $X =_d Y$, kada je *t* strogo rastuća.

[4] Za dokaz vidi [2] str. 114

2.2.2.2 Višedimenzionalna uopštenja

Višedimenzionalna stohastička dominacija

Definicija 2.2.7 Data su dva slučajna vektora $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{Y}$. Kažemo da je $\boldsymbol{X}$ manje od $\boldsymbol{Y}$ u stohastičkoj dominaciji, i pišemo, $\boldsymbol{X} \preceq_{\mathrm{ST}} \boldsymbol{Y}$, ako je $E[t(X)] \le E[t(Y)]$ za svaku neopadajuću funkciju $t: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, pod uslovom da ova očekivanja postoje.

Navedimo sada drugu višedimenzionalnu generalizaciju jednodimenzionalne stohastičke dominacije koju nazivamo ***ortant poredak***.

Definicija 2.2.8 Ako važi

$$\overline{F}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) \le \overline{F}_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{x}) \text{ za sve } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \tag{2.4}$$

kažemo da je $\boldsymbol{X}$ manje od $\boldsymbol{Y}$ prema ***gornjem ortant porteku*** i pišemo $\boldsymbol{X} \preceq_{\mathrm{UO}} \boldsymbol{Y}$ a ako važi

$$F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) \ge F_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{x}) \text{ za sve } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \tag{2.5}$$

tada kažemo da je $\boldsymbol{X}$ manje od $\boldsymbol{Y}$ prema ***donjem ortant poretku*** i pišemo $\boldsymbol{X} \preceq_{\mathrm{LO}} \boldsymbol{Y}$ ∇

Razlog za uvođenje ovakve terminologije je to što se skupovi oblika $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{x} > \boldsymbol{a}\}$, za neko fiksirano $\boldsymbol{a}$, nazivaju ***gornji ortanti*** a skupovi oblika $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{a}\}$ za neko fiksirano $\boldsymbol{a}$ nazivaju ***donji ortanti***.

Primedba 2.2.9. Kada istovremeno važi $\boldsymbol{Y} \preceq_{\mathrm{LO}} \boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{X} \preceq_{\mathrm{UO}} \boldsymbol{Y}$ kažemo da je $\boldsymbol{X}$ manje od $\boldsymbol{Y}$ u ***saglasnom poretku***[5].

Ekvivalentni uslovi

Sledeći rezultat je karakterizacija višedimenzionalnog $\preceq_{\mathrm{ST}}$ na osnovu njegovog jednodimenzionalnog para.

---

[5] Ovaj pojam prvi put predstavio je Joe (1990)

Teorema 2.2.10 Za date n - dimenzionalne slučajne vektore $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{Y}$ važi $\boldsymbol{X}\preceq_{\mathrm{ST}}\boldsymbol{Y}$ ako i samo ako stohastička nejednakost $\Psi(\boldsymbol{X})\preceq_{\mathrm{ST}}\Psi(\boldsymbol{Y})$ važi za sve neopadajuće funkcije $\Psi:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Sledeći rezultat ukazuje da je za slučajne parove dovoljno proveriti stohastičku nejednakost iz prethodne teoreme za funkcije $\Psi:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ koje se mogu dekomponovati kao suma dve jednodimenzionalne funkcije t_1 i t_2 , tj. $\Psi(\boldsymbol{x}) = t_1(x_1) + t_2(x_2)$.

Teorema 2.2.11 Neka su (X_1, X_2) i (Y_1, Y_2) dva slučajna para. Tada $(X_1,X_2) \preceq_{\mathrm{ST}} (Y_1,Y_2)$ važi ako samo ako važi

$$t_1(X_1)+t_2(X_2)\preceq_{\mathrm{ST}} t_1(Y_1)+t_2(Y_2) \tag{2.6}$$

za sve neopadajuće funkcije t_1 i t_2.

Uopšteno govoreći, $\preceq_{\mathrm{ST}}$ se poklapa sa skoro sigurnim poređenjem što vidimo iz sledećeg rezultata.

Teorema 2.2.12 Slučajni vektori $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{Y}$ zadovoljavaju $\boldsymbol{X}\preceq_{\mathrm{ST}}\boldsymbol{Y}$ ako i samo ako postoje dva slučajna vektora $\tilde{\boldsymbol{X}}$ i $\tilde{\boldsymbol{Y}}$, definisana na istom prostoru verovatnoća, takva da važi $\tilde{\boldsymbol{X}} =_d \boldsymbol{X}$, $\tilde{\boldsymbol{Y}} =_d \boldsymbol{Y}$ i $\Pr[\tilde{\boldsymbol{X}} \le \tilde{\boldsymbol{Y}}] = 1$.

Teorema 2.2.13 Za date n - dimenzionalne slučajne vektore $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{Y}$ važi

(i) $\boldsymbol{X}\preceq_{\mathrm{UO}}\boldsymbol{Y}$ ako i samo ako,

$$E[\prod_{i=1}^{n} g_1(X_i)] \le E[\prod_{i=1}^{n} g_1(Y_i)] \tag{2.7}$$

za svaki niz $\{g_1, g_2,\ldots, g_n\}$ jednodimenzionalnih nenegativnih neopadajućih funkcija.

(ii) $\boldsymbol{X}\preceq_{\mathrm{UO}}\boldsymbol{Y}$ ako i samo ako,

$$E[\prod_{i=1}^{n} h_1(X_i)] \ge E[\prod_{i=1}^{n} h_1(Y_i)] \tag{2.8}$$

za svaki niz $\{h_1, h_2,\ldots, h_n\}$ jednodimenzionalnih nenegativnih nerastućih funkcija.

Na osnovu ove teoreme zaključujemo da važi

$$\boldsymbol{X} \preceq_{\mathrm{ST}} \boldsymbol{Y} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{X} \preceq_{\mathrm{UO}} \boldsymbol{Y} \;\text{ i }\; \boldsymbol{X} \preceq_{\mathrm{LO}} \boldsymbol{Y}. \tag{2.9}$$

Kao što je ranije naglašeno, često je teško ili nemoguće ustanoviti da važi $\boldsymbol{X} \preceq_{\mathrm{ST}} \boldsymbol{Y}$ na osnovu definicije 2.2.7 ili na osnovu navedenih ekvivalentnih uslova. Ipak, postoje nekoliko standardnih konstrukcija koje nas dovode do rangiranja u višedimenzionalnoj stohastičkoj dominaciji. Jedna od takvih data je u sledećoj teoremi.

Teorema 2.2.14 Neka su $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{Y}$ dva n – dimenzionalna slučajna vektora. Ako važi

$$X_1 \preceq_{\mathrm{ST}} Y_1, \tag{2.10}$$

$$[X_2 \mid X_1 = x_1] \preceq_{\mathrm{ST}} [Y_2 \mid Y_1 = y_1] \text{ kad god je } x_1 \le y_1, \tag{2.11}$$

i u opštem slučaju, za $i = 2, 3, \dots, n$

$$[X_i \mid X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}] \preceq_{\mathrm{ST}} [Y_i \mid Y_1 = y_1, \dots, Y_{i-1} = y_{i-1}] \tag{2.12}$$

kada je $x_j \le y_j$, $j = 1, 2, \dots, i-1$ tada je $\boldsymbol{X} \preceq_{\mathrm{ST}} \boldsymbol{Y}$.

2.2.3 KONVEKSNI I STOP – LOSS PORETCI

Definicija konveksnog poretka

Dok $\preceq_{\mathrm{ST}}$ poredi veličine slučajnih promenljivih, konveksni poredak je fokusiran na njihovu varijabilnost. On nam dozvoljava da poredimo parove slučajnih promenljivih sa istim očekivanjima[6]. Na osnovu Osobine 2.2.6 (iii) vidimo da poredak $\preceq_{\mathrm{ST}}$ ne možemo koristiti za poređenje ovakvih slučajnih promenljivih.

Definicija 2.2.15. Neka su date dve slučajne promenljive X i Y takve da važi $E[X] = E[Y]$. Kažemo da je X manje od Y u ***konveksnom poretku***, što pišemo $X \preceq_{\mathrm{SL},=} Y$, ako važi $\pi_X(t) \le \pi_Y(t)$ za sve $t \in \mathbb{R}$ (gde su π_X i π_Y stop – loss transformacije definisane u prvom poglavlju). ∇

[6] tokom ovog poglavlja podrazumevaćemo da sve slučajne promenljive imaju konačna očekivanja

Za date rizike X i Y, $X \preceq_{SL,=} Y$, dakle, znači da je čista premija za X i Y ista, ali je stop – loss premija za X uvek manja (ili jednaka) od odgovarajuće stop – loss premije Y , bez obzira na odbitak. Teorija koja se razvila iz ovoga ima višestruku primenu u aktuarskoj matematici. Ona nam omogućava da konstruišemo modele za ukupne štete iz kojih se može pokazati da ove stop – loss premije obezbeđuju gornje granice stvarnih stop – loss premija.

Direktna posledica definicije 2.2.15 je da iz $X \preceq_{SL,=} Y$ sledi $\min[Y] \leq \min[X]$ i $\max[Y] \geq \max[X]$ tako da Y ima širi interval vrednosti od X. Dokažimo ovo pretpostavljajući da je $\max[Y] < \max[X]$. Neka je t izabrano tako da važi $\max[Y] < t < \max[X]$. Tada je $\pi_Y(t) = 0 < \pi_X(t)$ što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je $X \preceq_{SL,=} Y$. Dakle, mora da važi $\max[Y] \geq \max[X]$. Slično se može pokazati i za $\min[Y] \leq \min[X]$.

Definicija stop - loss poretka

Dok $\preceq_{ST}$ poredi veličine slučajnih promenljivih, $\preceq_{SL,=}$ njihovu varijabilnost, stop – loss poredak $\preceq_{SL}$ kombinuje ove dve stvari: Ako je slučajna promenljiva manja od neke druge slučajne promenljive, u stop – loss poretku, to znači da je ona istovremeno i “manja” i “manje promenljiva” od druge promenljive. Stop – loss predak kao i konveksni poredak možemo definisati pomoću stop – loss premija (na osnovu čega je i dobio ime).

Definicija 2.2.16. Neka su date dve slučajne promenljive X i Y. Kažemo da je X manje od Y u stop – loss poretku, i pišemo $X \preceq_{SL} Y$, ako $\pi_X(t) \leq \pi_Y(t)$ za sve $t \in \mathbb{R}$.

Dakle, X je manje od Y u stop – loss smislu ako su stop – loss premije od X manje od odgovarajućih premija za Y za bilo koji nivo odbitka t. Ovaj poredak je veoma zastupljen u aktuarstvu. Veza između stop – loss poretka i konveksnog poretka očigledna je iz sledeće ekvivalencije

$$\left.\begin{array}{r} X \preceq_{SL} Y \\ \\ E[X] = E[Y] \end{array}\right\} \Leftrightarrow \quad X \preceq_{SL,=} Y.$$

2.2.3.1 Višedimenzionalna uopštenja

Višedimenzionalni konveksni poredak

Definicija 2.2.17. Za data dva slučajna vektora $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{Y}$, kažemo da je $\boldsymbol{X}$ manji od $\boldsymbol{Y}$ u višedimenzionalnom konveksnom poretku, što pišemo sa $\boldsymbol{X}\preceq_{\mathrm{SL},=}\boldsymbol{Y}$, ako $E[g(\boldsymbol{X})]\leq E[g(\boldsymbol{Y})]$ za sve konveksne funkcije $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, pod uslovom da ova očekivanja postoje. ∇

Višedimenzionalni stop – loss poredak

Definicija 2.2.18. Za data dva slučajna vektora $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{Y}$, kažemo da je $\boldsymbol{X}$ manji od $\boldsymbol{Y}$ u višedimenzionalnom stop – loss poretku, što pišemo sa $\boldsymbol{X}\preceq_{\mathrm{SL}}\boldsymbol{Y}$, ako $E[g(\boldsymbol{X})]\leq E[g(\boldsymbol{Y})]$ za sve neopadajuće konveksne funkcije $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, pod uslovom da ova očekivanja postoje. ∇

Iz poslednje dve definicije lako se zaključuje da za date n – dimenzionalne slučajne vektore $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{Y}$ važi $\boldsymbol{X}\preceq_{\mathrm{SL},=}\boldsymbol{Y} \Rightarrow \boldsymbol{X}\preceq_{\mathrm{SL}}\boldsymbol{Y}$. Štaviše, ispitujući definiciju 2.2.7, takođe zaključujemo da važi $\boldsymbol{X}\preceq_{\mathrm{ST}}\boldsymbol{Y} \Rightarrow \boldsymbol{X}\preceq_{\mathrm{SL}}\boldsymbol{Y}$.

Supermodularne i funkcije konveksne po pravcu

U nastavku navodimo neka od proširenja pojma konveksnosti u višedimenzionalnom slučaju koja nas dovode do definisanja novih poredaka, među kojima su simetrični konveksni poredak, komponentni konveksni poredak itd. Posebno koristan pokazao se pojam takozvane, konveksnosti po pravcu koja ima primenu u oblastima primenjene verovatnoće.

Uobičajena konveksnost, za razliku od konveksnosti po pravcu, ne uzima u obzir moguću strukturu poretka prostora. Iz tog razloga je pojam konveksnosti po pravcu našao primenu u ekonomskim modelima gde se istovremeno razmatraju koncepti kao što su averzija prema riziku i pozitivnost vektora cena.

Za definisanje pojma konveksnosti po pravcu neophodno je prethodno definisati pojam supermodularnosti.

Definicija 2.2.19 Funkcija $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ je ***supermodularna*** ako za svako $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ važi sledeća nejednakost

$$g(\boldsymbol{x})+g(\boldsymbol{y})\leq g(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y})+g(\boldsymbol{x}\vee\boldsymbol{y}),$$

gde operatori $\wedge$ i $\vee$ označavaju minimum i maksimum po kordinatama, respektivno. ∇

Supermodularnost funkcije može se iskazati i na ekvivalentan način zahtevajući da važi

$$
\begin{aligned}
& g(x_1,...,x_i+\varepsilon,...,x_j+\delta,...,x_n)-g(x_1,...,x_i+\varepsilon,...,x_j,...,x_n) \\
& \geq g(x_1,...,x_i,...,x_j+\delta,...,x_n)-g(x_1,...,x_i,...,x_j,...,x_n)
\end{aligned}
$$

za svako $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq i \leq j \leq n$ za svako $\varepsilon, \delta > 0$.

Intuitivno objašnjenje pojma supermodularnosti bilo bi sledeće: Neka su $x_1,...,x_n$ iznosi pojedinačnih šteta n osiguranika i neka je $g(x_1,...,x_n)$ gubitak koji osiguravajuća kompanija ima po osnovu ovih šteta. Supermodularnost g znači da su posledice rasta pojedinačne štete veće ukoliko su veće i ostale štete.

Osobina 2.2.20

(i) Ako je funkcija $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dva puta diferencijabilna tada je ona ***supermodularna*** ako i samo ako važi

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} g \geq 0 \quad \text{za svako } 1 \leq i \leq j \leq n$$

(ii) Ako je $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ***supermodularna*** tada je funkcija Ψ, definisana kao $\Psi(x_1,x_2,...,x_n) = g(t_1(x_1),t_2(x_2),...,t_n(x_n))$ takođe supermodulana kada su funkcije $t_i:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ i=1,2,...,n,$ sve istovremeno rastuće ili istovremeno opadajuće.

Sledeća definicija povezuje pojam supermodularnosti sa konveksnošću po pravcu.

Definicija 2.2.21. Funkcija g je ***konveksna po pravcu*** ako i samo ako je ispunjen jedan od sledećih ekvivalentnih uslova

(i) Funkcija g je supermodularna i konveksna po kordinatama.

(ii) Za svako $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ takve da je $\boldsymbol{x_1} \leq \boldsymbol{x_2}$ i $\boldsymbol{y} \geq 0$ važi

$$g(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{y})-g(\boldsymbol{x}_1) \leq g(\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{y})+g(\boldsymbol{x}_2). \qquad \nabla$$

Ako je g dva puta diferencijabilna, tada je konveksna po pravcu ako i samo ako su svi drugi izvodi nenegativni, tj.

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} g \geq 0 \quad \text{za svako } i, j.$$

Konveksnost po pravcu niti implicira niti je implicirana uobičajenom konveksnošću. Međutim, jednodimenzionalna funkcija je konveksna po pravcu ako i samo ako je konveksna.

Poretci konvenveksni po pravcu i poretci rastuće konveksni po pravcu
(*Directional and increasing directional convex orders*)

Definicija 2.2.22 Neka su $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{Y}$ dva n – dimenzionalna slučajna vektora. Pretpostavimo da za ove vektore važi

$$E[g(\boldsymbol{X})] \leq E[g(\boldsymbol{Y})] \text{ za sve funkcije konveksne po pravcu } g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

pod uslovom da ova očekivanja postoje. Tada kažemo da je $\boldsymbol{X}$ manje od $\boldsymbol{Y}$ u konveksnom po pravcu poretku što pišemo kao $\boldsymbol{X} \preceq_{\mathrm{DCX}} \boldsymbol{Y}$.

Definicija 2.2.23 Neka su $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{Y}$ dva n – dimenzionalna slučajna vektora. Pretpostavimo da za ove vektore važi

$$E[g(\boldsymbol{X})] \leq E[g(\boldsymbol{Y})] \text{ za sve neopadajuće funkcije } g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

koje su po pravcu konveksne, pod uslovom da ova očekivanja postoje. Tada kažemo da je $\boldsymbol{X}$ manje od $\boldsymbol{Y}$ u rastuće po pravcu konveksnom poretku $\boldsymbol{X} \preceq_{\mathrm{IDCX}} \boldsymbol{Y}$.

Glavna razlika između poretka konveksnog po pravcu i supermodularnog poretka je u tome što se kod drugog poredi samo struktura zavisnosti sa fiksnim marginalnim raspodelama, dok prvi uzima u obzir i promenljivost marginalnih raspodela.

3

Modeliranje zavisnosti

3.1 UVOD

Moderni finansijski menadžment rizika, a posebno menadžment rizika u osiguranju suočava se sa mnoštvom različitih faktora rizika. Veoma često ovi faktori su međusobno uslovljeni i nemoguće ih je posebno analizirati. Modeliranje efekata katastrofa koje pogađaju veći broj osiguranika istovremeno, kao što su zemljotresi, tornada, epidemije itd. i njihove međuzavisnosti nameće se kao jedan od osnovnih izazova sa kojima se suočavaju današnji aktuari. U ovom poglavlju bavimo se upravo tim problemom koristeći pojam ***kopula***. Suština ovog pristupa leži u činjenici da se zajednička raspodela više slučajnih promenljivih može predstaviti kao funkcija marginalnih raspodela tih promenljivih.

Sve informacije o vezi između slučajnih promenljivih obuhvaćene su njihovom (zajedničkom) višedimenzionalnom raspodelom. Neke od višedimenzionalnih raspodela nastale su direktnim proširivanjem marginalnih raspodela u više dimenzija. Ovakav tip raspodela ne daje nam informaciju o tipu veze između jednodimenzionalnih raspodela pa iz tog razloga koristimo koncept kopula. Ovaj pristup je pogodan jer ne postoje ograničenja za izbor marginalne raspodele, tj. moguće je izabrati različite marginalne raspodele za različit rezultat. Na primer, ako radimo sa dvodimenzionalnim ishodom koji predstavlja iznos štete i administrativne troškove obrade zahteva kod osiguranja od odgovornosti, tada možemo koristiti lognormalnu raspodelu kao model za troškove i raspodelu dužeg repa, kao što je *Paretova* za iznos šteta. Potrebno je samo „ubaciti" ove raspodele u odgovarajuću kopulu da bi dobili dvodimenzionalnu raspodelu. Kopule se uglavnom koriste za modeliranje zavisnosti među neprekidnim slučajnim promenljivama dok je njihova primena na diskretne raspodele prilično beznačajna zbog nepostojanja diskretnog analogona Osobini 1.1.4. Prvi put pojam kopula predstavio je *Sklar* 1959. godine (u kontekstu probabilističkih metričkih prostora) u teoremi koja danas nosi njegovo ime. Njegova ideja bila je da razdvoji zajedničku funkciju raspodele u deo koji opisuje strukturu zavisnosti (kopula) i deo koji opisuje samo marginalne raspodele. Izraz kopula (veznik) upotrebio je da ukaže na funkciju koja u suštini povezuje višedimenzionalnu funkciju raspodele sa njenim jednodimenzionalnim marginalnim raspodelama. Ubrzo potom pojavila se prva literatura koja se bavila statističkim osobinama i primenama kopula. U nastavku navodimo neke od osobina kopula koje će nam biti potrebne u daljem radu.

3.2 SKLAROVA TEOREMA I KOPULE

3.2.1 KOPULE

Datoj dvodimenzionalnoj funkciji raspodele F_X sa jednodimenzionalnim marginalnim raspodelama F_1 i F_2 za svaki par realnih brojeva $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ možemo pridružiti tri broja: $F_1(x_1)$, $F_2(x_2)$ i $F_X(\boldsymbol{x})$. Naravno, svaki od ova tri broja leži u jediničnom intervalu [0, 1]. Drugim rečima, za svaki par prirodnih brojeva $\boldsymbol{x}$ imamo tačku $(F_1(x_1), F_2(x_2))$ u jediničnom kvadratu i ovom paru brojeva odgovara broj $F_X(\boldsymbol{x})$ sa vrednostima u intervalu (0, 1). U nastavku ćemo videti da je ovo preslikvanje koje određuje vrednost zajedničke funkcije raspodele za svaki uređeni par vrednosti marginalnih raspodela, zaista funkcija koju nazivamo ***kopula***.

Definišimo sada kopulu u dvodimenzionalnom slučaju. U suštini, ova kopula je zajednička funkcija rapodele za dvodimenzionalni slučajni vektor sa uniformnim (0,1) marginalnim raspodelama.

Definicija 3.2.1 Dvodimenzionalna kopula C je funkcija koja preslikava jedinični kvadrat $[0,1]^2 = [0,1] \times [0,1]$ u jedinični interval [0,1] koja je neopadajuća, neprekidna sa desne strane i zadovoljava sledeće uslove:

(i) $\lim_{u_i \to 0} C(u_1, u_2) = 0$ za $i = 1, 2;$

(ii) $\lim_{u_1 \to 1} C(u_1, u_2) = u_2$ i $\lim_{u_2 \to 1} C(u_1, u_2) = u_1;$

(iii) C je supermodularna, tj. nejednakost

$$C(v_1, v_2) - C(u_1, v_2) - C(v_1, u_2) + C(u_1, u_2) \geq 0$$

važi za sve $u_1 \leq v_1, u_2 \leq v_2$.

3.2.2 SKLAROVA TEOREMA ZA NEPREKIDNE MARGINALNE RASPODELE

Ova teorema predstavlja osnovu teorije kopula kao i njihove primene. Ona zapravo objašnjava ulogu kopula u vezi između višedimenzionalnih funkcija raspodele i njihovih marginalnih raspodela.

Teorema 3.2.2 Neka $F_X \in \mathcal{R}_2(F_1, F_2)$ ima neprekidne marginalne funkcije raspodele F_1 i F_2. Tada postoji jedinstvena kopula C takva da za sve $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ važi

$$F_X(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)). \tag{3.1}$$

Obrnuto, ako je C kopula, a F_1 i F_2 jednodimenzionalne funkcije raspodele tada je funkcija F_X definisana sa (3.1) dvodimenzionalna funkcija raspodele čije su marginalne raspodele F_1 i F_2.

Dokaz. Kako su F_i neprekidni, Osobina 1.1.4 nam garantuje da $F_1(X_1)$ i $F_2(X_2)$ imaju uniformnu $\mathcal{U}(0,1)$ raspodelu. Neka je C zajednička funkcija raspodele para $(F_1(X_1), F(X_2))$, tj.

$$\begin{aligned} C(u_1,u_2) &= \Pr[F_1(X_1) \le u_1, F_2(X_2) \le u_2] \\ &= \Pr[X_1 \le F_1^{-1}(u_1), X_2 \le F_2^{-1}(u_2)] \\ &= F_X(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2)) \end{aligned}$$

gde je korišćena Lema 1.1.3(i). Odatle važi reprezentacija (3.1) jer je

$$\begin{aligned} F_X(x_1,x_2) &= \Pr[X_1 \le x_1, X_2 \le x_2] \\ &= \Pr[F_1\ (X_1) \le F_1\ (x_1), F_2\ (X_2) \le F_2\ (x_2)] \\ &= C(F_1\ (x_1), F_2\ (x_2)), \end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati. □

Kao što vidimo iz (3.1), C spaja marginalne raspodele F_1 i F_2 u zajedničku raspodelu F_X dvodimenzionalne slučajne promenljive $\boldsymbol{X}$. Struktura zavisnosti je potpuno opisana sa C i nezavisna je od oblika marginalnih raspodela F_1 i F_2. Prema tome, način na koji se a X_1 i X_2 „pomeraju zajedno" opisan je pomoću kopule, bez obzira na opseg u kojem posmatramo promenljive.

Slučajne promenljive $F_1(X_1)$ i $F_2\ (X_2)$ često nazivamo ***rangovima*** X_1 i X_2 tako da kopula postaje zajednička funkcija raspodele rangova.

Primebda 3.2.3. Primetimo da smo u dokazu teoreme 3.2.2 dobili izraz za kopulu C iz (3.1) kada su marginalne raspodele neprekidne, tj.

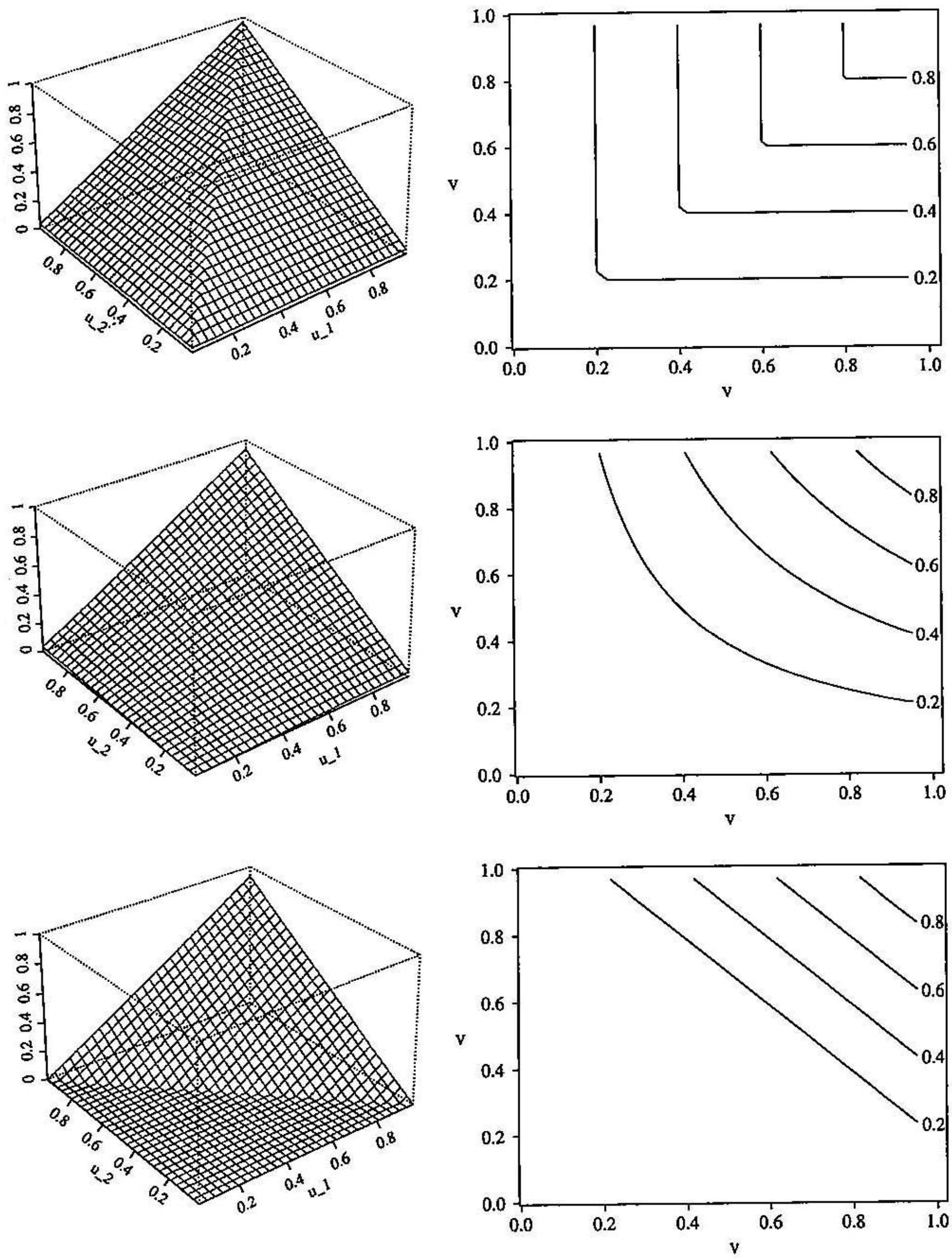
$$C(\boldsymbol{u}) = F_X(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2)), \quad \boldsymbol{u} \in [0,1]^2. \tag{3.2}$$

Na sledećim primerima ilustrovana je dekompozicija (3.1)

Primer 3.2.4. (**Nezavisna kopula** C_I) Posmatrajmo nezavisne slučajne promenljive X_1 i X_2 sa funkcijama raspodele, redom, F_1 i F_2. Njihova zajednička raspodela data je sa $F_X(\boldsymbol{x}) = F_1(x_1)F_2(x_2)$ a odgovarajuća kopula data je sa

$$C_I(u_1,u_2) = u_1 u_2, \ \ \boldsymbol{u} \in [0,1]^2.$$

Ova kopula naziva se nezavisna kopula i prikazana je na slici 3.1 sa funkcijom gustine jednakom 1 na jediničnom kvadratu. Ako X_1 i X_2 imaju funkciju raspodele datu sa (3.1) one su nezavisne ako i samo ako važi $C \equiv C_I$. ∇



Slika 3.1 Kopula Frechetove gornje granice C_U (gornja), Nezavisna kopula C_I (srednja), kopula Frechetove donje granice C_L (donja)

Primer 3.2.5. (**kopula *Frechetove* gornje granice** C_U) kopula *Frechetove* gornje granice koja se označava sa C_U (slika 3.1 gornja) definisana je kao

$$C_U(u_1, u_2) = \min\{u_1, u_2\}, \ \boldsymbol{u} \in [0,1]^2.$$

Ako X_1 i X_2 imaju funkciju raspodele (3.1) tada je X_2 neopadajuća funkcija X_1 ako i samo ako je $C \equiv C_U$.

3.3 VIŠEDIMENZIONALNE KOPULE

U ovom delu proširujemo pojam kopula na višedimenzionalni slučaj. Višedimenzionalnu kopulu možemo shvatiti kao zajedničku funkciju raspodele n – dimenzionalnog slučajnog vektora sa $\mathcal{U}(0,1)$ marginalnim raspodelama.

Definicija 3.3.1 N - dimenzionalna kopula C je funkcija koja preslikava jediničnu hiperkocku $[0,1]^n$ u jedinični interval [0,1] koja je neopadajuća, neprekidna sa desne strane i zadovoljava sledeće uslove:

(i) $C(u_1,...,u_{i-1},0,u_{i+1},...,u_n) = 0$ za $i = 1,2,...,n;$

(ii) $C(1,...,1,u_i,1,...,1) = u_i$ za $i = 1,2,...,n;$

(iii) Za svako $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta} \in [0,1]^n$ gde je $\alpha_i < \beta_i$ za $i = 1,2,...,n;$

$$\Delta_{\alpha_1,\beta_1}\Delta_{\alpha_2,\beta_2}...\Delta_{\alpha_n,\beta_n}C(\boldsymbol{u}) \geq 0$$

za svako $\boldsymbol{u} \in [0,1]^n$, gde je

$$\Delta_{\alpha_i,\beta_i}C_X(\boldsymbol{u}) = C_X(u_1,...,u_{i-1},\beta_i,u_{i+1},...,u_n) - C_X(u_1,...,u_{i-1},\alpha_i,u_{i+1},...,u_n)$$

3.3.1 SKLEROVA TEOREMA O REPREZENTACIJI

Svaku funkciju raspodele F_X slučajnog vektora $X \in \mathcal{R}_n(F_1, F_2,..., F_n)$ možemo zameniti sa

$$F_X(\boldsymbol{x}) = C(F_1(x_1), F_2(x_2),..., F_n(x_n)), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \tag{3.3}$$

u smilslu kopule C. Ako su marginalne raspodele F_1, F_2,..., F_n neprekidne tada je data kopula jedinstvena i eksplicitno data sa

$$C(\boldsymbol{u}) = F_X(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2), ..., F_2^{-1}(u_n)), \qquad \boldsymbol{u} \in [0,1]^n;$$

C je, dakle, funkcija raspodele slučajnog vektora $(F_1(X_1), F_2(X_2), ..., F_n(X_n))$, koji ima $\mathcal{U}:(0,1)$ marginalne raspodele na osnovu Osobine 1.1.4. Ako $F_1, F_2, ..., F_n$ nisu sve neprekidne, i dalje se može pokazati da zajednička funkcija raspodele može biti predstavljena kao i u (3.3), mada u tom slučaju C više nije jedinstvena.

Primedba 3.3.2. Korisno je spomenuti da formula

$$\overline{F}_X(\boldsymbol{x}) = C(\overline{F}_1(x_1), \overline{F}_2(x_2), ..., \overline{F}_n(x_n)), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{3.4}$$

definiše zajedničku funkciju preživljavanja funkcija $\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n$. Višedimenzionalne raspodele date sa (3.3 i (3.4) se u opštem slučaju razlikuju. ∇

Primedba 3.3.3. Napomenimo da ako $\boldsymbol{X}$ ima kopulu C i ako vektor $(U_1, U_2, ..., U_n)$ ima istu kopulu tada je

$$\boldsymbol{X} =_d (F_1^{-1}(U_1), F_2^{-1}(U_2), ..., F_2^{-1}(U_n)).$$

Ovaj rezultat je, ustvari, proširenje Osobine 1.1.5 na višedimenzionalni slučaj. ∇

Funkcija gustine verovatnoće koja odgovara kopuli C postoji skoro svuda na $[0,1]^n$ (tj. svuda osim možda na skupu Lebegove mere 0) i data je sa

$$c(\boldsymbol{u}) = \frac{\partial^n}{\partial u_1 ... \partial u_n} C(\boldsymbol{u}).$$

Ovu gustinu možemo koristiti za definisanje apsolutno neprekidnih i singularnih delova C, kao i u dvodimenzionalnom slučaju.

Funkcija gustine verovatnoće od $\boldsymbol{X}$ sa kopulom C i marginalnim funkcijama raspodele može se iskazati u sledećem obliku

$$f_X(\boldsymbol{x}) = \left(\prod_{i=1}^{n} f_i(x_i) \right) c(F_1(x_1), ..., F_n(x_n)), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.$$

3.3.2 FUNKCIONALNA INVARIJANTNOST

Sledeća teorema pokazuje jednu korisnu osobinu kopula reprezentacije zavisnosti. Naime, struktura zavisnosti koja je obuhvaćena kopulom je invarijantna u odnosu na neopadajuće i neprekidne transformacije marginalnih raspodela .

Teorema 3.3.4 Neka je $\boldsymbol{X}$ n – dimenzionalni slučajni vektor sa kopulom C i neka su $t_1, t_2, ..., t_n$ neopadajuće i neprekidne funkcije. Tada i slučajni vektor

$$(t_1(X_1), t_2(X_2), ..., t_n(X_n))$$

ima istu kopulu C.

Ova teorema nam govori da je za kompletnu zavisnost među slučajnim promenljivama $(X_1, X_2, ..., X_n)$ odgovorna kopula, jer način na koji se ove promenljive 'pomeraju zajedno' zavisi isključivo od kopula bez obzira na skalu kojom merimo svaku od ovih slučajnih promenljivih. Dodajmo još da neopadajuće transformacije ne utiču na rang slučajne promenljive.

3.3.3 PRIMERI VIŠEDIMENZIONALNIH KOPULA

Za kraj navodimo primere kopula kojim ćemo se baviti u daljem radu.

3.3.3.1 Kopula *Frechetove* gornje granice (C_U)

Kopula *Frechetove* gornje granice, koja se označava sa C_U, definisana je sa

$$C_U(\boldsymbol{u}) = \min\{u_1, u_2, ..., u_n\}, \quad \boldsymbol{u} \in [0,1]^n.$$

Napomenimo da važi da je $\boldsymbol{X}$ komonoton, ako i samo ako, $C = C_U$.

Primedba 3.3.5. Svaka kopula C zadovoljava nejednakost

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{n} u_i - (n-1), 0\right\} \le C(\boldsymbol{u}) \le C_U(\boldsymbol{u})$$

za svako $\boldsymbol{u} \in [0,1]^n$. Leva strana gornje nejednakosti je višedimenzionalno proširenje dvodimenzionalne kopule *Frechetove* donje granice C_L . Međutim, u opštem slučaju ovo ne ispunjava uslove da bi bilo kopula[7].

[7] Za dokaz vidi [2] str.227

3.3.3.2 Nezavisna kopula

Nezavisna kopula, koja se označava sa C_I definisana je sa

$$C_I(\boldsymbol{u}) = \prod_{i=1}^{n} u_1 \qquad \boldsymbol{u} \in [0,1]^n.$$

Napomenimo da ako vektor $\boldsymbol{X}$ ima kopulu C_I tada su komponetne ovog vektora X_i međusobno nezavisne.

4

Merenje zavisnosti

U ovom delu razmatramo veze među kopulama kao i mere zavisnosti među parovima slučajnih promenljivih. Svrha ovih mera je da formalizuju činjenicu da je verovatnoća nastanka velikih vrednosti zavisnih slučajnih promenljivih, istovremeno, velika, dok je verovatnoća da prva promenljiva primi veliku vrednost uz malu vrednost druge slučajne promenljive, mala. U nastavku su predstavljeni *Pearsonov*, *Kendallov* i *Spearmanov* koeficijent korelacije kao i neke strukture zavisnosti među kojima su pozitivna kvadrantna zavisnost i njeno n – dimenzionalno uopštenje (pozitivna ortant zavisnost), uslovni rast itd.

4.1 UVOD

Proučavanje pojma pozitivne zavisnosti među slučajnim promenljivama koje je počelo 1966. radovima *E.L Lehmanna*, dovelo je do brojnih značajnih rezultata kako u statističkoj teoriji, tako i u različitim primenama. Aktuarska nauka je jedna od mnogih u kojima ova problematika poprima sve veći značaj u poslednje vreme.

Kao što je poznato, linearni koeficijent korelacije, koji je do sedamdesetih godina bio praktično jedina mera zavisnosti, je funkcija marginalnih raspodela. Zbog toga svaka promena oblika marginalne raspodele nužno utiče na promene vrednosti ovog koeficijenta. U opisivanju zavisnosti pomoću kopula koristićemo mere zavisnosti koje zavise isključivo od posmatrane kopule i nikako od marginalnih raspodela jer ni sama kopula ne zavisi od oblika marginalnih raspodela.

Očigledno je da je konstrukcija kopula usko povezana sa merama zavisnosti. Pokušaćemo kratko da objasnimo vezu između ova dva koncepta. Dakle, marginalne raspodele F_1 i F_2 možemo ubaciti u bilo koju kopulu, što znači da nam one ne daju nikakvu direktnu informaciju o „uparivanju". S druge strane, bilo koji par marginalnih raspodela možemo ubaciti u kopulu C, tako da C ne daje nikakve informacije o marginalnim raspodelama. Stoga je razumno očekivati da su veze među marginalnim raspodelama zajedničke raspedele F_X određene samo kopulom C. Međitim, kao što je zapazio *Marshall* (1996) stvari nisu tako jednostavne. Problem potiče od činjenice da kopula nije jedinstvena ako bar jedna od marginalnih raspodela nije neprekidna.

Pokažimo sada da ne postoji ne konstantna mera zavisnosti koja zavisi samo od kopule.

Teorema 4.1.1 Neka je η neka mera zavisnosti i neka je F_X proizvoljna dvodimenzionalna funkcija raspodele sa kopulom C. Tada važi

$$\eta(F_X) = \eta(C_X) \text{ za svako } F_X \Rightarrow \eta \text{ je konstanta.}$$

Problemi dolaze od neneprekidne prirode posmatranih slučajnih promenljivih. Kasnije ćemo videti da pod pretpostavkom neprekidnosti dobijamo interesantne rezultate.

U nastavku ćemo se baviti ispitivanjem nekih klasičnih skalarnih mera jačine zavisnosti među parovima rizika. S obzirom na to, cilj ovog dela je da razjasni osnovne ideje merenja zavisnosti(linearnu korelaciju i korelaciju ranga) koje je neophodno razumeti za uspešno modeliranje fenomena zavisnosti. Na kraju je dat pregled različitih struktura zavisnosti za korelirane rizike među kojima su pozitivna kvadrantna zavisnost (*positive quadrant dependence*) i uslovni rast (*conditional incrasingness*).

4.2 MERE SAGLASNOSTI

Scarsini (1984) je definisao određene poželjne osobine za meru veze između dve slučajne promenljive i uveo pojam " mere saglasnosti" koji se odnosi na mere koje zadovoljavaju pomenute osobine. Intuitivna ideja na kojoj se ovaj koncept temelji je sledeća: Slučajne promenljive X_1 i X_2 su ***saglasne*** kada se velike vrednosti X_1 pojavljuju u istovremeno sa velikim vrednostima X_2.

Definicija 4.2.1. Funkcionela r (-,-) koja dodeljuje relalan broj svakom paru realnih slučajnih promenljivih X_1 i X_2 (tj. svakoj dvodimenzionalnoj funkciji raspodele F_X ovog para) je mera saglasnosti ako zadovoljava sledeće uslove:

P1 $r(X_1, X_2) = r(X_2, X_1)$ - simetričnost;

P2 $-1 \leq r(X_1, X_2) \leq 1$ - normalizovanost;

P3 $r(X_1, X_2) = 1$ ako i samo ako su X_1 i X_2 komonotone;

P4 $r(X_1, X_2) = -1$ ako i samo ako su X_1 i X_2 kontramonotone;

P5 za $t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strogo monotono,

$$r(t(X_1), X_2) = \begin{cases} r(X_1, X_2) & \text{ako je } t \text{ rastuća} \\ -r(X_1, X_2) & \text{ako je } t \text{ opadajuća.} \end{cases}$$

Primedba 4.2.2. Naravno, možemo definisati i druge poželjne osobine s'tim da vodimo računa da one nisu u kontradikciji sa ovih pet osnovnih. Na primer, mogli bismo pretpostaviti sledeću osobinu

$$r(X_1, X_2) = 0 \text{ ako i samo ako su } X_1 \text{ i } X_2 \text{ nezavisne} \tag{4.1}$$

Međutim, ovo je u kontradikciji sa aksiomom P5. Tačnije, ne postoji netrivijalna mera zavisnosti koja zadovoljava ova dva uslova istovremeno[8].

Postoje brojni načini za razmatranje i merenje zavisnosti. Prvi i najvažniji među njima je *Pearsonov* koeficijent korelacije koji meri linearnu zavisnost među parovima slučajnih promenljivih, ali koji nije invarijantan u odnosu na monotone transformacije kordinatnih osa. U nastavku ćemo predstaviti ovaj koeficijent koji ustvari zadovljava samo osobine P1 i P2, te stoga nije mera saglasnosti. Kao što ćemo videti, ostale mere ostaju nepromenjene pri strogo rastućim transformacijama slučajnih promenljivih. U ove mere spadaju, između ostalih, *Kendalovo* tau i *Spearmanovo* ro koji mere oblik zavisnosti poznatiji kao 'saglasnost' (concordance). U poglavljima 4.2.3 i 4.2.4, videćemo da rang koeficijenti korelacije zadovoljavaju osobine P1 – P5 pod uslovom da su X_1 i X_2 neprekidne.

4.2.2 PEARSONOV KOEFICIJENT KORELACIJE

Pearsonov koeficijent korelacije je mera veze dve slučajne promenljive koja opisuje stepen linearne povezanosti.

Definicija 4.2.3. Za slučajni par (X_1, X_2) koji ima marginalne raspodele sa konačnim varijansama, *Pearsonov* koeficijent korelacije r_p je definisan kao

$$r_p(X_1, X_2) = \frac{\mathbb{C}[X_1, X_2]}{\sqrt{V[X_1]V[X_2]}}$$

Primedba 4.2.4. Varijanse od X_1 i X_2 moraju biti konačne kako bi *Pearsonov* linearni koeficijent korelacije bio definisan. Ovo je nedostatak mera zavisnosti koji uzrokuje probleme kada radimo sa raspodelama sa teškim repom. Aktuari neživotnih osiguranja, koji modeliraju gubitke u različitim poslovima sa beskonačnom varijansom moraju biti svesni ove činjenice.

---

[8] Za dokaz teoreme vidi [2] str. 247

4.2.2.1 Osobine

Funkcionalna invarijantnost (functional invariance)

Ozbiljan nedostatak *Pearsonovog* koeficijenta korelacije, kao što smo već spomenuli da r_p nije invarijantan u odnosu na strogo rastuće transformacije t_1 i t_2 tj. za slučajne promenljive X_1 i X_2 u opštem slučaju važi

$$r_p(t_1(X_1), t_2(X_2)) \neq r_p(X_1, X_2). \tag{4.2}$$

Međutim, r_p se ponaša na predvidiv način kada su transformacije t_1 i t_2 linearne. Između ostalog, r_p zadovoljava uslov linearnosti

$$r_p(a_1X_1 + b_1, a_2X_2 + b_2) = \operatorname{sign}(a_1a_2)r_p(X_1, X_2),$$

gde su a_1, $a_2 \neq 0$, b_1, $b_2 \in \mathbb{R}$ i $\operatorname{sign}(x) = 1$ ako je $x > 0$ a -1 ako je $x < 0$. Dakle, r_p je invarijantan u odnosu na strogo rastuće linearne transformacije.

Vrednosti Pearsonovog koeficijenta korelacije i jačina zavisnosti

Poznato je da vrednost r_p ne mora biti pouzdan indikator stepena zavisnosti. S jedne strane, nezavisnost dve slučajne promenljive automatski implicra i nepostojanje korelacije među njima tj. $r_p = 0$ dok obrnuto ne važi u opštem slučaju.

Postoje, dakle, situacije u kojima ne postoji korelacija među slučajnim promenljivama ali postoji jaka nelinearna povezanost. Samo u posebnim slučajevim, na primer, kod višedimnezionalne normalne raspodele nekoreliranost implicira nezavisnost.

4.2.2.2 Kopule i r_p

Kao što je naglašeno u (4.2) r_p nije invarijantan u odnosu na rastuće nelinearne transformacije. Ova karakteristika postaje nam jasnija ako r_p zapišemo u sledećoj formi

$$r_p(X_1, X_2) = \frac{1}{\sqrt{V[X_1]V[X_2]}} \int_0^1 \int_0^1 (C(u_1, u_2) - u_1u_2) dF_1^{-1}(u_1) dF_2^{-1}(u_1).$$

Dakle, r_p ne zavisi samo od kopule već i od marginalnih raspodela.

4.2.2.3 Dopustiv skup

Na osnovu *Caushy – Schwarzove* nejednakosti, r_p uvek leži u intervalu [-1,1] tako da je uslov P2 zadovoljen. *Pearsonov* koeficijent korelacije sadrži informacije o jačini i pravcu linearne veze između dve slučajne promenljive:

$$r_p(X_1, X_2) = \text{sign}(a) \Leftrightarrow \Pr[X_2 = aX_1 + b] = 1,$$

za neke konstante a ($a > 0$ ako $r_p(X_1 , X_2) = 1$ i $a < 0$ ako $r_p(X_1 , X_2) = -1$) i $b \in \mathbb{R}$. Ako linearna veza između X_1 i X_2 nije moguća, dopustiv skup za $r_p(X_1 , X_2)$ je dodatno sužen. Najčešća zabluda u vezi sa *Pearsonovim* koeficijentom korelacije i zavisnosti glasi: Za proizvoljne marginalne funkcije raspodele F_1 i F_2 slučajnih promenljivih X_1 i X_2, moguće je postići sve linearne korelacije između -1 i 1 definisanjem odgovarajuće zajedničke raspodele. Ovakav stav je, naravno pogrešan, što se lako može dokazati pomoću kontraprimera kao u sledećoj osobini.

Osobina 4.2.5 Neka su X_1 i X_2 slučajne promenljive sa nosačem $\mathbb{R}^+$, tj. takve da su $F_1(x) < 1$ i $F_2(x) < 1$ za sve $x > 0$. Tada važi $r_p(X_1 , X_2) > -1$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da $r_p(X_1 , X_2) = 1$, što implicira

$$X_2 = aX_1 + b \text{ za } a < 0, b \in \mathbb{R}.$$

Sledi da za svako $x_2 < 0$,

$$\begin{aligned} F_2(x_2) &= \Pr\left[X_1 \geq \frac{x_2 - b}{a}\right] \\ &\geq \Pr\left[X_1 > \frac{x_2 - b}{a}\right] \\ &= \overline{F}_1\left(\frac{x_2 - b}{a}\right) > 0 \end{aligned}$$

jer je desna krajnja tačka nosača F_i ustvari $+\infty$. Ovo je očigledno u suprotnosti sa pretpostavkom da je $F_2(0) = 0$.

Granice Pearsonovog koeficijenta korelacije

Ispitajmo sada koje su to korelacije (veze) moguće među datim marginalnim raspodelama. Poznato je da, osim ako se marginalne respodele dve slučajne promenljive razlikuju samo u parametru skaliranja (vidi poglavlje 5.2.2.5 iz [2]), opseg *Pearsonovog* r_p je uži od [-1, 1] i zavisi od marginalnih raspodela F_1 i F_2.

Teorema 4.2.6 Za svako $\boldsymbol{X}$ u $\mathcal{R}_2^+(F_1, F_2)$, $r_p(X_1, X_2)$ je ograničeno sa

$$r_p^{\min}(F_1, F_2) \leq r_p(X_1, X_2) \leq r_p^{\max}(F_1, F_2), \tag{4.3}$$

gde je za $U : \mathcal{U}(0,1)$,

$$r_p^{\min}(F_1, F_2) = \frac{\mathbb{C}[F_1^{-1}(U), F_2^{-1}(1-U)]}{\sqrt{\mathbb{V}[X_1]\mathbb{V}[X_2]}}$$

i

$$r_p^{\max}(F_1, F_2) = \frac{\mathbb{C}[F_1^{-1}(U), F_2^{-1}(U)]}{\sqrt{\mathbb{V}[X_1]\mathbb{V}[X_2]}}.$$

Teorema 4.2.6 nam ukazuje da vrednosti ± 1 za r_p u opštem slučaju nije moguće dobiti u $\mathcal{R}_2^+(F_1, F_2)$.

Ekstremne vrednosti r_p i potpuna zavisnost

U nastavku pokazujemo da kada su granice iz (4.3) dostignute, X_1 i X_2 moraju biti komonotone/kontramonotone.

Teorema 4.2.7 Neka je $X \in \mathcal{R}_2^+(F_1, F_2)$ i $U : \mathcal{U}(0,1)$. Tada važi sledeća ekvivalencija:

$$r_p(X_1, X_2) = r_p^{\max}(F_1, F_2) \Leftrightarrow \boldsymbol{X} =_d (F_1^{-1}(U), F_2^{-1}(U)), \tag{4.4}$$

i

$$r_p(X_1, X_2) = r_p^{\min}(F_1, F_2) \Leftrightarrow \boldsymbol{X} =_d (F_1^{-1}(U), F_2^{-1}(1-U)), \tag{4.5}$$

4.2.3 KENDALLOV KOEFICIJENT KORELACIJE RANGA

U opštem slučaju, kovarijansa nam ne daje potpunu informaciju o strukturi zavisnosti slučajnog para. Iz tog razloga stručnjaci proučavaju i druge koncepte zavisnosti kao što su npr, ***korelacije ranga***. Kendalov koeficijent korelacije ranga (tzv. *Kendalovo tau*) je neparametarska mera veze bazirana na broju slaganja i neslaganja u uzorku posmatranja para slučajnih promenljivih. Slaganje se javlja kada se posmatrani parovi menjaju na isti način dok neslaganje imamo u slučaju da se oni menjaju na različite načine.

Tačnije, posmatrani par je saglasan ako se veće vrednosti X_1 javljaju sa većim vrednostima X_2. Za par kažemo da je neskladan ako se realizacije X_1 sa većim vrednostima javljaju sa manjim vrednostima X_2. Ako su (X_1, X_2) i (X'_1, X'_2) međusobno nezavisni i imaju istu raspodelu onda za njih kažemo da se saglasni ukoliko važi

$$(X_1 - X_1^{'})(X_2 - X_2^{'}) > 0,$$

a da su nesaglasni ukoliko važu obrnuta nejednakost. Dakle, možemo zapisati

$$\Pr[\text{saglasnost}] = \Pr[(X_1 - X_1^{'})(X_2 - X_2^{'}) > 0]$$

i

$$\Pr[\text{nesaglasnost}] = \Pr[(X_1 - X_1^{'})(X_2 - X_2^{'}) < 0].$$

Ideja o upotrebi verovatnoća saglasnosti i nesaglasnosti dolazi od činjenice da su verovatnoće događaja koji uključuju samo veze nejednakosti između slučajnih promenljivih invarijantne u odnosu na rastuće transformacije ovih promenljivih. Stoga, definisanje mera zavisnosti iz ovih verovatnoća obezbeđuje da one zavise samo od odgovarajuće kopule.

Definisanjem pojmova saglasnosti i nesaglasnosti u mogućnosti smo da predstavimo *Kendallov* koeficijent korelacije ranga.

Definicija 4.2.8. *Kendallov* koeficijent korelacije ranga za slučajni par (X_1, X_2) je definisan na sledeći način

$$r_K(X_1, X_2) = \mathbf{Pr}[\text{concordance(saglasnosti)}] - \mathbf{Pr}[\text{discordance(nesaglasnosti)}].$$

Ako su marginalne raspodele X_1 i X_2 neprekidne gornji izraz možemo zapisati kao

$$r_K(X_1, X_2) = 2\Pr[(X_1 - X_1^{'})(X_2 - X_2^{'}) > 0] - 1,$$

gde je $(X_1^{'}, X_2^{'})$ nezavisna kopija (X_1, X_2), tj, $(X_1, X_2) =_d (X_1^{'}, X_2^{'})$ i dva slučajna para su međusobno nezavisna.

4.2.3.1 Osobine

Invarijantnost *Kendallovog* rang koeficijenta korelacije u odnosu na strogo monotone transformacije je očigledna: Ako su t_1 i t_2 neopadajuće neprekidne funkcije definisane na skupu vrednosti X_1 i X_2, respektivno, tada važi

$$r_K(t_1(X_1), t_2(X_2)) = r_K(X_1, X_2). \tag{4.6}$$

Ovo sledi direktno iz činjenice da su $t_1(X_1) - t_1(X_1^{'})$ i $X_1 - X_1^{'}$ istog znaka. Isto primenimo i na $t_1(X_2) - t_1(X_2^{'})$ i $X_2 - X_2^{'}$.

Ako su X_1 i X_2 međusobno nezavisni tada je $r_K(X_1, X_2) = 0.$ Ovo je takođe lako dobiti jer

$$\begin{aligned} r_K(X_1, X_2) &= 2\Pr[(X_1 - X_1^{'})(X_2 - X_2^{'}) > 0] - 1 \\ &= r_K(X_1, X_2) = 2(\Pr[X_1 - X_1^{'} > 0, X_2 - X_2^{'} > 0] + \\ &+ \Pr[X_1 - X_1^{'} < 0, X_2 - X_2^{'} < 0]) - 1 \\ &= 2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) - 1 = 0. \end{aligned}$$

4.2.3.2 Kopule i *Kendallov* koeficijent korelacije ranga

U specijalnom slučaju, kada X_i imaju neprekidne marginalne funkcije raspodela F_1 i F_2, (4.6) pokazuje važi

$$r_K(F_1(X_1), F_2(X_2)) = r_K(X_1, X_2)$$

tako da vrednost *Kendallovog* rang koeficijenta korelacije zavisi samo od rangova X_1 i X_2, dakle od kopule (X_1, X_2).

Označavajući sa $(X_1^{'}, X_2^{'})$ nezavisnu kopiju (X_1, X_2) i uz pretpostavku da ove slučajne promenljive imaju neprekidne marginalne raspodele, *Kendallov* koeficijent korelacije ranga možemo zapisati u obliku

$$\begin{aligned} r_K(X_1, X_2) &= 2\Pr[(X_1 - X_1^{'})(X_2 - X_2^{'}) > 0] - 1 \\ &= 4\Pr[X_1 \le X_1^{'}, X_2 \le X_2^{'}] - 1. \end{aligned}$$

Dakle, r_k za slučajni par (X_1, X_2) neprekidnih slučajnih promenljivih sa kopulom C možemo predstaviti kao

$$r_K(X_1,X_2)=4\int_0^1\int_0^1 C(u_1,u_2)dC(u_1,u_2)-1= \\ =4E[C(U_1,U_2)]-1, \tag{4.7}$$

gde (U_1,U_2) predstavlja par slučajnih promenljivih sa uniformnom (0,1) raspodelom sa zajedničkom funkcijom raspodele C.

5.2.3.4 Dopustiv skup

Za sve raspodele, r_k postoji i prima vrednosti iz intervala [-1,1]. Maksimalnu vrednost 1 dostiže kada je $X_2 = t\,(X_1)$ gde je t rastuća funkcija. Ovo je očigledno ako r_k zapišemo kao

$$r_K(X_1,t(X_1))=2\Pr[(X_1-X_1^{'})(t(X_1)-t(X_1^{'}))>0]-1=1,$$

jer $X_1-X_1^{'}$ i $t(X_1)-t(X_1^{'})$ imaju isti znak. Na sličan način zaključujemo da minimalnu vrednost – 1 ovaj koeficijent dostiže kada važi $X_2 = t\,(X_1)$ gde je t neka opadajuća funkcija.

Sada ćemo dokazati da je $r_K(X_1,X_2)=\pm 1$ ako i samo ako se raspodela slučajnog para $\boldsymbol{X}$ podudara sa jednom od *Frechetovih* granica.

Teorema 4.2.9 Neka je $X\in\mathcal{R}_2(F_1,F_2)$ sa F_1 i F_2 neprekidnim i strogo rastućim, i neka U ima U (0,1) raspodelu. Tada važi sledeća ekvivalecija:

$$r_K(X_1,X_2)=1 \Leftrightarrow \boldsymbol{X}=_d (F_1^{-1}(U),F_2^{-1}(U)), \tag{4.8}$$

i

$$r_K(X_1,X_2)=-1 \Leftrightarrow \boldsymbol{X}=_d (F_1^{-1}(U),F_2^{-1}(1-U)). \tag{4.9}$$

4.2.4 SPEARMANOV KOEFICIJENT KORELACIJE RANGA

Definicija 4.2.10 *Spearmanov* koeficijent korelacije ranga r_S za par neprekidnih slučajnih promenljivih X_1 i X_2 je identičan *Pearsonovom* koeficijentu korelacije za rangove F_1 i F_2 :

$$r_S(X_1,X_2)=r_P(F_1(X_1),F_2(X_2)).$$

Dakle, *Spearmanov* koeficijent korelacije ranga tzv *Spearmanovo* ro predstavlja običnu linearnu korelaciju između slučajnih promenljivih U_1 i U_2 , gde su U_1 i U_2 transformacije slučajnih promenljivih tj. $U_1 = F_1\,(X_1)$ i $U_2 = F_2\,(X_2)$. Kako su U_1 i U_2 obe uniformne slučajne promenljive sa očekivanjem ½ i disperzijom ½ , *Spearmanov* koeficijent možemo zapisati kao

$$r_S(X_1, X_2) = \frac{E[F_1(X_1)F_2(X_2)] - E[F_1(X_1)]E[F_2(X_2)]}{\sqrt{D[F_1(X_1)]D[F_2(X_2)]}}$$
$$= 12E[F_1(X_1)F_2(X_2)] - 3$$
$$= 12E[U_1U_2] - 3,$$

Prethodni izraz možemo dobiti i na sledeći način

$$r_S(X_1, X_2) = 3(\Pr[(X_1 - X_1^{\perp})(X_2 - X_2^{\perp}) > 0] - \Pr[(X_1 - X_1^{\perp})(X_2 - X_2^{\perp}) < 0]),$$

gde je $(X_1^{\perp}, X_2^{\perp})$ nezavisna verzija (X_1, X_2) tj. $(X_1^{\perp}, X_2^{\perp})$ je slučajni vektor sa nezavisnim komponentama, tako da važi $X_1 =_d X_1^{\perp}, X_2 =_d X_2^{\perp}$ i (X_1, X_2) i $(X_1^{\perp}, X_2^{\perp})$ su međusobno nezavisni. Ovo direktno sledi iz

$$\begin{aligned} r_S(X_1, X_2) &= 3(2\Pr[(X_1 - X_1^{\perp})(X_2 - X_2^{\perp}) > 0] - 1) \\ &= 3(4\Pr[X_1 < X_1^{\perp}, X_2 < X_2^{\perp}] - 1) \\ &= 12F_X(X_1^{\perp}, X_2^{\perp}) - 3 \\ &= 12\int_0^1\int_0^1 C(u_1, u_2)du_1du_2 - 3 \\ &= 12\int_0^1 u_1u_2dC(u_1, u_2) - 3 \\ &= 12E(U_1U_2) - 3, \end{aligned} \tag{4.10}$$

gde (U_1, U_2) definisano gore ima istu kopulu C kao $\boldsymbol{X}$ i marginalne raspodele $\mathcal{U}(0,1)$.

Spearmanov koeficijent korelacije ranga je stoga proporcionalan verovatnoći saglasnosti umanjenoj za verovatnoću nesaglasnosti para slučajnih vektora sa istim marginalnim raspodelama, gde jedan od njih ima nezavisne komponente.

4.2.4.1 Osobine

Isto kao r_K i r_S je invarijantan u odnosu na strogo monotone transformacije, tj. ako su t_1 i t_2 strogo rastuće (ili opadajuće) funkcije defisane na skupu vrednosti X_1 i X_2 , respektivno, tada važi

$$r_S(t_1(X_1), t_2(X_2)) = r_S(X_1, X_2). \tag{4.11}$$

Takođe, ako su X_1 i X_2 međusobno nezavisni tada je $r_S(X_1, X_2) = 0.$

Kao što je ranije naglašeno *Spearmanov* koeficijent korelacije ranga je obično *Pearsonovo* r_P za rangove. Stoga, ako pretpostavimo da su marginalne funkcije raspodele F_1 i F_2 neprekidne i definišemo $U_1 = F_1(X_1)$ i $U_2 = F_2(X_2)$, $r_S(X_1, X_2)$ možemo zapisati kao

$$r_S(X_1, X_2) = r_P(U_1, U_2) = \frac{E[U_1U_2] - 1/4}{\sqrt{1/12}}. \tag{4.12}$$

4.2.4.2 Kopule i Spearmanov koeficijent korelacije ranga

Vraćajući se na izraz izveden za *Pearsonov* koeficijent korelacije, nalazimo da je

$$\begin{aligned} r_S(X_1, X_2) &= r_P(F_1(X_1), F_2(X_2)) \\ &= 12\int_0^1\int_0^1 (C(u_1, u_2) - u_1u_2)du_1du_2. \end{aligned}$$

4.2.4.3 Dopustiv skup

Dokažimo sada za *Spearmanov* koeficijent teoremu analnognu teoremi 4.2.9.

Tvrđenje 4.2.11 Neka je $\boldsymbol{X} \in \mathcal{R}_2(F_1, F_2)$ sa F_1 i F_2 neprekidnim i strogo rastućim, i neka U ima $\mathcal{U}(0,1)$ raspodelu. Tada važi sledeća ekvivalecija:

$$r_S(X_1, X_2) = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{X} =_d (F_1^{-1}(U), F_2^{-1}(U)), \tag{4.13}$$

i

$$r_S(X_1, X_2) = -1 \Leftrightarrow \boldsymbol{X} =_d (F_1^{-1}(U), F_2^{-1}(1-U)). \tag{4.14}$$

4.2.5 Veza između Kendalovog i Spearmanovog rang koeficijenta korelacije

Vrednosti ovih koeficijenta se često veoma razlikuju. Od pedesetih godina prošlog veka pojavio se veliki broj radova koji se bave vezama između ove dve mere zavisnosti. Sledeći rezultat utvrđuje koliko se vrednosti ova dva koeficijenta mogu razlikovati.

Teorema 4.2.12 Nejednakosti

$$\frac{3r_K - 1}{2} \le r_S \le \frac{1 + 2r_K - r_K^2}{2} \quad \text{važi za } r_K \ge 0$$

i

$$\frac{r_K^2 + 2r_K - 1}{2} \le r_S \le \frac{1 + 3r_K}{2} \quad \text{važi za } r_K \le 0.$$

4.3 STRUKTURE ZAVISNOSTI

4.3.1 POJAM POZITIVNE ZAVISNOSTI

Jasno je da pozitivne vrednosti mera saglasnosti ukazuju na pozitivnu zavisnost realizacija slučajnih promenljivih X_1 i X_2. U ovom poglavlju, pokušaćemo da preciznije definišemo pojam pozitivne zavisnosti.

4.3.2 POZITIVNA KVADRANTNA ZAVISNOST (PQD)

Intuitivno tumačenje pojma pozitivne kvadrante zavisnosti bilo bi sledeće: Ako su rizici X_1 i X_2 PQD tada je verovatnoća da oni istovremeno uzmu "velike" vrednosti veća nego u slučaju da su ovi rizici nezavisni. Drugim rečima važi

$$\Pr[X_1 > x_1, X_2 > x_2] \geq \Pr[X_1 > x_1]\Pr[X_2 > x_2]$$

Definicija 4.3.1. Za slučajni par $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$ kažemo da je pozitivno kvadrantno zavisan (PQD) ako važi

$$X_1 \preceq_{\text{ST}} [X_1 \mid X_2 > x_2] \text{ za svako } x_2 \text{ tako da važi } \overline{F_2}(x_2) > 0$$

$$X_2 \preceq_{\text{ST}} [X_2 \mid X_1 > x_1] \text{ za svako } x_1 \text{ tako da važi } \overline{F_1}(x_1) > 0$$

Prvi koncept pozitivne zavisnosti definisan je pomoću $\preceq_{\text{ST}}$. Ovo pokazuje da svaka komponenta slučajnog para postaje veća (u $\preceq_{\text{ST}}$ smislu) kada je poznato da druga komponentna prelazi neki prag. Ovo tumačenje se poklapa sa intuitivnim shvatanjem pozitivne zavisnosti.

4.3.2.1 Ekvivalentni uslovi

Definiciju pozitivne kvadrantne zavisnosti možemo predstaviti na različite ekvivalentne načine.

Osobina 4.3.2 Neka je $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$ slučajni par u $\mathcal{R}_2(F_1, F_2)$. Tada je $\boldsymbol{X}$ PQD ako i samo ako je zadovoljen jedan od sledećih ekvivalentnih uslova.

(i) $\overline{F_x}(x_1, x_2) \geq \overline{F_1}(x_1)\overline{F_2}(x_2)$ za svako $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

(ii) $F_x(x_1, x_2) \geq F_1(x_1)F_2(x_2)$ za svako $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

(iii) $\Pr[X_2 > x_2 \mid X_1 > x_1] \geq \overline{F_2}(x_2)$ za svako $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tako da važi $\overline{F_1}(x_1) > 0$

(iv) $\Pr[X_1 > x_1 \mid X_2 > x_2] \geq \overline{F_1}(x_1)$ za svako $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tako da važi $\overline{F_2}(x_2) > 0$

Iz ove definicije vidimo da kada je $\boldsymbol{X}$ PQD, verovatnoća da su njegove komponente istvremeno velike ili male je veća nego u situaciji kada su X_1 i X_2 nezavisne. Kao što je gore pomenuto uslovi (iii) i (iv) interpretirani intuitivno znače da činjenica da je X_1 veliko (tj. $X_1 > x_1$) povećava verovatnoću da je i X_2 veliko.

4.3.2.2 Osobine

Pozitivna kvadrantna zavisnost poseduje sledeću zanimljivu osobinu.

Osobina 4.3.3 (X_1, X_2) PQD $\Rightarrow$ $(t_1(X_1), t_2(X_2))$ PQD za sve neopadajuće neprekidne funkcije t_1 i t_2.

Osobina 4.3.3 ukazuje na činjenicu da je pojam pozitivne kvadrantne zavisnosti karakteristika odgovarajuće kopule što formalno navodimu u sledećem rezultatu.

Posledica 4.3.4 Neka je $\boldsymbol{X}$ slučajni par sa kopulom C. Tada je $\boldsymbol{X}$ PQD ako i samo ako važi

$$C(u) \geq C_I(u) \text{ za sve } u \in [0,1]^2.$$

4.3.2.3 Pozitivna kvadrantna zavisnost i koeficijenti korelacije

PQD rizici su pozitivno korelirani.[9]

Osobina 4.3.5 Razmotrimo $\boldsymbol{X} \in \mathcal{R}_2(F_1, F_2)$. Ako je (X_1, X_2) PQD tada je $r_{\mathrm{P}}(X_1, X_2) \geq 0$. Obrnuto u opštem slučaju ne važi, sa izuzetkom normalne dvodimenzionalne raspodele.

Ispitajmo sada rang koeficijente korelacije. U suštini, implikacije osobine 4.3.5 važe i za ove mere zavisnosti.

Osobina 4.3.6 Ako je (X_1, X_2) PQD tada je $r_{\mathrm{K}}(X_1, X_2) \geq 0$ i $r_{\mathrm{S}}(X_1, X_2) \geq 0$.

Takođe postoji i sledeći rezultat koji povezuje nezavisnost i nekoreliranost u PQD slučaju.

[9] sledi neposredno iz Osobine 1.6.13 [2]

Osobina 4.3.7 Neka je $\boldsymbol{X} \in \mathcal{R}_2(F_1, F_2)$ PQD. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) $\boldsymbol{X}$ ima nezavisne komponente

(ii) $r_{\mathrm{P}}(X_1, X_2) = 0$;

(iii) $r_{\mathrm{K}}(X_1, X_2) \geq 0$;

Sledeći rezultat sledi iz osobina 4.3.3 i 4.3.5.

Teorema 4.3.8 Slučajni par $\boldsymbol{X}$ je PQD ako i samo ako

$$\mathbb{C}[t_1(X_1), t_2(X_2] \geq 0 \tag{4.15}$$

za sve neopadajuće neprekidne funkcije t_1 i t_2, pod uslovom da očekivanja postoje.

4.3.2.4 Pozitivna kvadrantna zavisnost i konveksni poredak

Sledeći rezultat pokazuje da pojam pozitivne kvadrantne zavisnosti može biti korišćen za razmatranje efekata pretpostavke o nezavisnosti u slučaju kada su rizici ustvari pozitivno zavisni.

Teorema 4.3.9 Ako su rizici X_1 i X_2 PQD tada važi

$$X_1^{\perp} + X_2^{\perp} \preceq_{\mathrm{ST},=} X_1 + X_2,$$

gde je $(X_1^{\perp}, X_2^{\perp})$ nezavisna verzija (X_1, X_2)

Teorema ukazuje da ako su nam date marginalne raspodele i ako su X_1 i X_2 PQD, pretpostavka o nezavisnosti bi nas dovela da stop – loss premije koja je manja od fer premije.

Životno osiguranje

Iz osobine 4.3.2, lako zaključujemo da kada je $\boldsymbol{X}$ PQD, važe sledeće stohastičke nejednakosti

$$\min\{X_1^{\perp}, X_2^{\perp}\} \preceq_{\mathrm{ST}} \min\{X_1, X_2\} \quad \text{i} \quad \max\{X_1^{\perp}, X_2^{\perp}\} \preceq_{\mathrm{ST}} \max\{X_1, X_2\} \tag{4.16}$$

Formula (4.16) objašnjava korisnost pozitivne kvadrantne zavisnosti u različitim situacijama, s obzirom da ona sugeriše prirodan način za dobijanje izračunljivih granica za maksimum ili minimum PQD rizika.

Primer 4.3.10. Razmotrimo živote starosti (x_1) i (x_2) sa preostalim trajanjem života $T(x_1)$ i $T(x_2)$, respektivno. Zajednički životni status postoji dok su obe individue žive. Ovaj status ima preostalo trajanje života

$$T_{(x_1,x_2)} = \min\{T_{(x_1)}, T_{(x_2)}\}.$$

S druge strane, status poslednjeg preživelog postoji dok jer bar jedna individua živa. U ovom slučaju preostalo trajanje života ovog statusa dato je sa

$$T_{\overline{(x_1,x_2)}} = \max\{T_{(x_1)}, T_{(x_2)}\}.$$

Pretpostavimo sada da je $\boldsymbol{T} = (T_{(x_1)}, T_{(x_2)})$ PQD. Uvedimo sada i sledeće oznake

$$T^{\perp}_{(x_1,x_2)} = \min\{T^{\perp}_{(x_1)}, T^{\perp}_{(x_2)}\}$$

i

$$T^{\perp}_{\overline{(x_1,x_2)}} = \max\{T^{\perp}_{(x_1)}, T^{\perp}_{(x_2)}\}$$

Iz (4.16), sledi da važe nejednakosti

$$T^{\perp}_{(x_1,x_2)} \preceq_{\mathrm{ST}} T_{(x_1,x_2)} \;\text{ i }\; T_{\overline{(x_1,x_2)}} \preceq_{\mathrm{ST}} T^{\perp}_{\overline{(x_1,x_2)}},$$

što implicira sledeće nejednakosti za "čistu" premiju rentnog osiguranja:

$$\ddot{a}^{\perp}_{(x_1,x_2)} \le \ddot{a}_{(x_1,x_2)} \;\text{ i }\; \ddot{a}_{\overline{(x_1,x_2)}} \le \ddot{a}^{\perp}_{\overline{(x_1,x_2)}},$$

pri čemu oznaka „$\perp$" ukazuje da je renta bazirana na $T^{\perp}_{(x_1,x_2)}$ ili $T^{\perp}_{\overline{(x_1,x_2)}}$. Ovo znači da za preostala trajanja života koja su PQD, pretpostavka o nezavisnosti (pri čemu su marginalne funkcije raspodele nepromenjene) vodi do „potcenjivanja" jedinične neto premije (i rezervi) uzajamnog (zajedničkog) rentnog osiguranja. U drugom slučaju, tj. kod zajedničke rente za slučaj doživljenja dolazi do precenjivanja premije. Slične zaključke možemo doneti i za osiguranje života u slučaju smrti kao i u slučaju doživljenja. ∇

4.3.2.5 Uopštenje za *n* rizika: Kumulativna zavisnost i pozitivna ortant zavisnost

Kumulativna zavisnost (Cumulative dependence – CD)

Definicija 4.3.11. Slučajne promenljive X_1, $X_2,\ldots,X_n$ su ***kumulativno zavisne*** (CD) ako su slučajni parovi $(\sum_{i=1}^{j-1} X_i, X_j)$ PQD za $j = 2,3,\ldots,n$.

Sledeća osobina objašnjava značaj kumulativne zavisnosti u aktuarskoj nauci.

Osobina 4.3.12 Ako je $\boldsymbol{X}$ CD onda važi sledeća nejednakost

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^{\perp} \preceq_{\mathrm{SL},=} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Na osnovu ove osobine zaključujemo da bi pretpostavka o međusobnoj nezavisnosti komponenata CD vektora $\boldsymbol{X}$ vodila ka "potcenjivanju" stop – loss premija. U tom slučaju osiguravač bi naplaćivao premiju koja je manja od fer premije tj. zasnovana je na manjem riziku od stvarnog ukupnog rizika posmatranog portfolia.

Pozitivna ortant zavisnost

Definicija 4.3.12. Slučajni vektor $\boldsymbol{X}$ je ***pozitivno donje ortant zavisan*** (*positively lower orthant dependent* - PLOD) ako za svako $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ važi nejednakost

$$\Pr[\boldsymbol{X} \le \boldsymbol{x}] \ge \Pr[\boldsymbol{X}^{\perp} \le \boldsymbol{x}] = \prod_{i=1}^{n} \Pr[X_i \le x_i] \tag{4.17}$$

i slično, $\boldsymbol{X}$ je ***pozitivno gornje ortant zavisan*** (*positively upper orthant dependent* - PUOD) ako za svako $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ važi nejednakost

$$\Pr[\boldsymbol{X} > \boldsymbol{x}] \ge \Pr[\boldsymbol{X}^{\perp} > \boldsymbol{x}] = \prod_{i=1}^{n} \Pr[X_i > x_i] \tag{4.18}$$

∇

Intuitivno, (4.18) znači da je veća verovatnoća da istovremeno prime velike vrednosti komponente X_1, $X_2,\ldots X_n$ nego iste kompnente nezavisnog vektora sa istim marginalnim raspodelama. U slučaju kada istovremeno važe (4.17) i (4.18) kažemo da je ***X pozitivno ortant zavisan*** (POD).

Na osnovu (4.17) i (4.18) lako je zaključiti da ako je $\boldsymbol{X}$ PQD tada važe nejednakosti

$$\min X_i^{\perp} \preceq_{\mathrm{ST}} \min X_i \ \text{ i } \max X_i \preceq_{\mathrm{ST}} \max X_i^{\perp} \tag{4.19}$$

Ove nejednakosti mogu se naći u literaturi *Baccelli* i *Makowski* (1989) gde je objašnjena i primena pozitivne kvadrantne zavisnosti u različitim situacijama.

Razmotrimo sada osobinu 4.3.12 za POD rizike. U ovom slučaju, međutim $\preceq_{\mathrm{SL},=}$ mora biti zamenjeno sa slabijim $\preceq_{\mathrm{MGF}}$.

Osobina 4.3.13 Ako je X POD tada važi sledeća nejednakost

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^{\perp} \preceq_{\mathrm{MGF}} \sum_{i=1}^{n} X_i \ .$$

4.3.3 USLOVNI SEKVENCIJALNI RAST (CONDITIONAL INCREASINGNESS IN SEQUENCE)

Sledeća struktura zavisnosti, koju nazivamo uslovni sekvencijalni rast, dobija se zahtevenjem da uslovne raspodele rastu u $\preceq_{\mathrm{ST}}$ smislu kako rastu vrednosti odgovarajućih slučajnih promenljivih.

Definicija 4.3.1. Slučajni vektor $\boldsymbol{X}$ ima osobinu ***uslovnog sekvencijalnog rasta*** (*conditional increasingness in sequence* – CIS) ako za sve $i = 1,2,\ldots,n$, važi

$$[X_i \mid X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_{i-1} = x_{i-1}] \preceq_{\mathrm{ST}} [X_i \mid X_1 = y_1, X_2 = y_2, \ldots, X_{i-1} = y_{i-1}]$$

za sve $x_1 \le y_1, x_2 \le y_2, \ldots, x_{i-1} \le y_{i-1}$ na skupu svih mogućih ishoda X_i. ∇

4.3.3.1 Veza sa stohastičkom dominacijom

Nije teško primetiti da su zadovoljeni uslovi teoremea 2.2.14 ako su slučajni vektori CIS. Ovo nas dovodi do sledećeg rezultata.

Teorema 4.3.2 Ako su $\boldsymbol{X}$ ili $\boldsymbol{Y}$ CIS, $X_1 \preceq_{\mathrm{ST}} Y_1$ i

$$[X_i \mid X_1 = x_1, \ldots, X_{i-1} = x_{i-1}] \preceq_{\mathrm{ST}} [Y_i \mid Y_1 = x_1, \ldots, Y_{i-1} = x_{i-1}]$$

za sve x_j , $j = 1,2,\ldots,i - 1$, tada je $\boldsymbol{X} \preceq_{\mathrm{ST}} \boldsymbol{Y}$.

4.3.3.2 Uslovni rast (*conditional increasingness* - CI)

Sada ćemo definisati jači koncept zavisnosti koji je usko povezan sa CIS.

Definicija 4.3.3. N – dimenzionalni slučajni vektor $\boldsymbol{X}$ je ***uslovno rastući*** (CI) ako je $(X_{\pi(1)},...,X_{\pi(n)})$ CIS za sve permutacije π skupa $\{1,2,\ldots, n\}$, tj. ako za svako i važi

$$[X_i \mid X_j = x_j,\ j \in J] \preceq_{\mathrm{ST}} [X_i \mid X_j = x_j',\ j \in J]$$

kada je $x_j \le x_j'$, gde $J \in \{1,2,...,n\}$ i $i \notin J$. ∇

Za razliku od uslovnog sekvencijalnog rasta, uslovni rast je simetričan koncept zavisnosti.

Primedba 4.3.4. Pokažimo da implikacija

$$\boldsymbol{X} \text{ je CI} \Rightarrow \boldsymbol{X} \text{ je CIS}$$

važi samo u datom smeru. Uzmimo $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$ sa uniformnom raspodelom na (1,1), (1,2), (2,1) i (2,3). Tada važi da je $\boldsymbol{X}$ CIS, ali

$$\Pr[X_1 \ge 0 \mid X_2 = 0] = \frac{1}{2} > 0 = \Pr[X_1 \ge 2 \mid X_2 = 2],$$

Tako da $\boldsymbol{X}$ nije CI. ∇

4.3.3.3 Uslovni rast i kopule

Proveravanje uslovnog rasta je jednostavno u dvodimenzionalnom slučaju gde postoji potpuna karakterizacija CI kopula

Osobina 4.3.5 Dvodimenzionalna kopula C je CI ako i samo ako je C konkavna po svakoj promenljivoj kada je druga promenljiva fiksirana.

4.4 SUPERMODULARNI POREDAK

Definicija 4.4.1 Neka su $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{Y}$ dva n – dimenzionalna slučajna vektora takva da važi $E[g(\boldsymbol{X})] \leq E[g(\boldsymbol{Y})]$ za sve supermodularne funkcije $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, pod uslovom da ova očekivanja postoje. Tada kažemo da je $\boldsymbol{X}$ manje od $\boldsymbol{Y}$ u supermodularnom poretku i pišemo $\boldsymbol{X} \preceq_{\text{SM}} \boldsymbol{Y}$.

Teorema 4.4.2 Za svako $\boldsymbol{X} \in \mathcal{R}_n(F_1,...,F_n)$, važi

$$\boldsymbol{X} \preceq_{\text{SM}} (F_1^1(U),...,F_n^1(U)),$$

gde su U uniformne slučajne promenljive, tj. $U : \mathcal{U}(0,1)$.

Teorema 4.4.3 Posmatrajmo Frechetov prostor $\mathcal{R}_n^+(F_1,...,F_n)$, koji zadovoljava (1.6). Neka je $\boldsymbol{X}$ međusobno isključiv rizik u $\mathcal{R}_n^+(F_1,...,F_n)$. Tada $\boldsymbol{X} \preceq_{\text{SM}} \boldsymbol{Y}$ važi za sve $\boldsymbol{Y} \in \mathcal{R}_n(F_1,...,F_n)$.

Supermodularni, stop – loss i konveksni poretci

Primetimo da na osnovu definicije 2.2.21 sledi

$$\boldsymbol{X} \preceq_{\text{SM}} \boldsymbol{Y} \Rightarrow \boldsymbol{X} \preceq_{\text{DCX}} \boldsymbol{Y}.$$

Teorema 4.4.4 Neka su $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{Y}$ dva slučajna vektora. Ako $\boldsymbol{X} \preceq_{\text{SM}} \boldsymbol{Y}$ tada važi $\Psi(\boldsymbol{X}) \preceq_{\text{SL}} \Psi(\boldsymbol{Y})$ za svaku neopadajuću supermodularnu funkciju $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Posledica 4.4.5 Neka su $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{Y}$ dva slučajna vektora za koje važi $\boldsymbol{X} \preceq_{\text{SM}} \boldsymbol{Y}$ i neka su $t_1,...,t_n$ neopadajuće, nenegativne funkcije. Tada važi $t_1(X_1),...,t_n(X_n) \preceq_{\text{SL}} t_1(Y_1),...,t_n(Y_n)$.

5

Stohastička ograničenja funkcija zavisnih rizika

Ovo poglavlje bavi se ograničenjima funkcija koreliranih rizika, prema različitim stohastičkim poretcima. Na početku je naveden opšti postupak za izvođenje gornje i donje stop – loss granice za rastuće, konveksne po pravcu funkcije potencijalno zavisnih rizika $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Primeri koji su navedeni uključuju određivanje granica, u $\preceq_{SL,=}$ smislu, sume $S = \sum_i^n X_i$ osiguranih rizika čija su očekivanja i disperzije poznati.

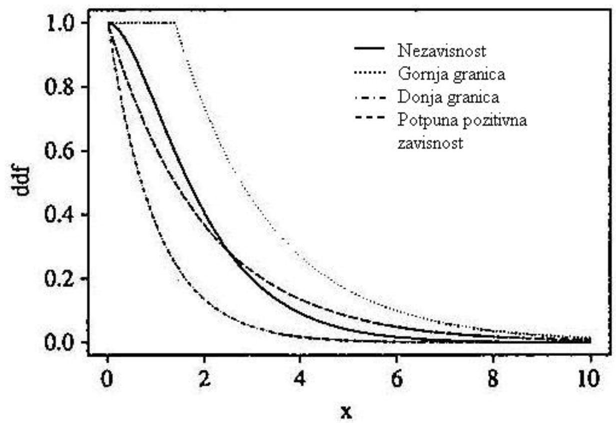
U nastavku je pokazano kako se izračunavaju granice verovatnoća funkcije preživljavanja $\Pr[S > s]$, kao i granice očekivanja $E[g(S)]$ monotonih ali ne nužno konveksnih funkcija g. Pomoću ovog metoda dobićemo granice od S u $\preceq_{ST}$ smislu.

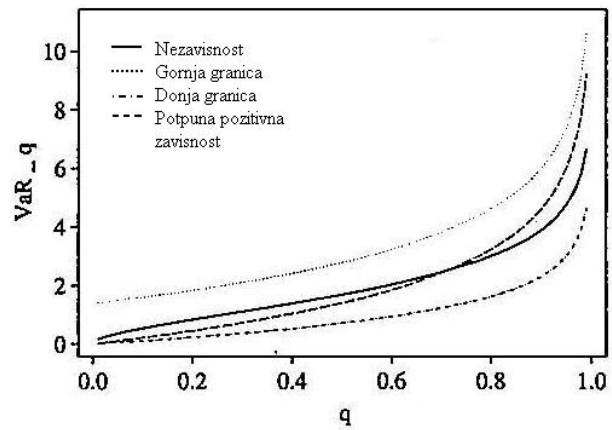
5.1 UVOD

Cilj ovog poglavlja je da odredi i oceni mogući uticaj zavisnosti, pa s tim u vezi, razmotrimo primer gde su X_1 i X_2 eksponencijalne slučajne promenljive sa istim raspodelama, tj. X_1: $\mathcal{E}(1)$ i X_2: $\mathcal{E}(1)$. U nastavku poglavlja ćemo pokazati da za sve $x \in \mathbb{R}^+$ važi sledeća nejednakost

$$e^{-x} \leq \Pr\left[X_1 + X_2 > x\right] \leq e^{\frac{-(x-2\ln 2)_+}{2}} \tag{5.1}$$

Donja granica dobija se direktno jer očigledno važi $\Pr\left[X_1 + X_2 > x\right] \geq \Pr\left[X_1 > x\right]$. Drugi deo dobija se na nešto složeniji način. Gore navedena nejednakost daje nam mogućnost merenja uticaja zavisnosti funkcije preživljavanja. Slika 5.1 (levo) prikazuje granice zajedno sa vrednostima koje odgovaraju nezavisnosti i potpunoj zavisnosti (tj. $X_1 = X_2$). Jasno je da verovatnoća da $X_1 + X_2$ "dvostruko prebaci" svoje očekivanje u velikoj meri zavisi od strukture korelacije između X_1 i X_2 i da se kreće u rasponu od 0 do 3 puta vrednosti dobijene pod pretpostavkom nezavisnosti. Uočavamo, takođe, da potpuna pozitivna zavisnost povećava verovatnoću da $X_1 + X_2$ prekorači neki gornji prag utvrđen pod pretpostavkom nezavisnosti, dok istovremeno smanjuje verovatnoću da bude ispod datog donjeg praga.





Slika 5.1 Uticaj zavisnosti na funkcije preživljavanja (levo) i VaR (desno) za sumu dve eksponencijalne $\mathcal{E}(1)$ slučajne promenljive

da posmatramo uticaj zavisnosti je ispitivanjem VaR. Za gore navedene, eksponencijalne slučajne promenljive, nejednakost

$$-\ln(1-q) \leq \mathrm{VaR}[X_1 + X_2; q] \leq 2(\ln 2 - \ln(1-q)) \tag{5.2}$$

važi za sve $q \in (0,1)$. Slika 5.1 (desno) pokazuje granice (5.2), zajedno sa vrednostima koje odgovaraju nezavisnosti i potpunoj zavisnosti. Iz ovog jednostavnog primera uočavamo da struktura zavisnosti može imati veoma jak uticaj na vrednosti verovatnoća prekoračenja ili VaR.

Posmatrajmo sada portfolio sačinjen od $n \geq 2$ polisa i neka su $X_1 + ... + X_n$ odgovarajući nenegativni iznosi šteta u nekom posmatranom periodu. Postoji brojna literatura koja se bavi ukupnim iznosom šteta $S = X_1 + ... + X_n$ u slučaju kada su rizici X_i međusobno nezavisni. Jedan od pristupa modeliranju ovog problema je tzv. ***model individualnog rizika*** *koji predstavlja ukupan gubitak kao sumu $S = X_1 + ... + X_n$ fiksnog broja, n, polisa osiguranja gde je X_i iznos štete i – te polise. Ovi iznosi su međusobno nezavisne slučajne promenljive koje ne moraju imati istu raspodelu ali uglavnom imaju pozitivnu verovatnoću u nuli tj. verovatnoću da se šteta ne dogodi. Model individualnog rizika koristimo da saberemo sve štete nekog fiksnog broja ugovora o osiguranju. Model individualnog rizika prevashodno je razvijen za životno osiguranje gde je q_i verovatnoća nastanka smrtnog ishoda (stopa mortaliteta) i – tog osiguranika a b_i fiksna dobit koja se isplaćuje u tom slučaju. Raspodela iznosa osiguravatelja tada je data sa*

$$X_i : \begin{pmatrix} b_i & 0 \\ q_i & 1-q_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, ..., n$$

U tom slučaju očekivanje i varijansa ukupnih šteta su

$$E(S)=\sum_{i=1}^{n} b_i q_i \qquad \text{i} \qquad D(S)=\sum_{i=1}^{n} b_i^2 q_i (1-q_i),$$

gde druga jednakost sledi iz nezavisnosti.
Funkcija generatrisa verovatnoća ukupnih šteta je

$$P_S(z)=\prod_{i=1}^{n}(1-q_i+q_i z^{b_i}).$$

U specijalnom slučaju kada su svi rizici jednaki i $q_i = q$ *i* $b_i = 1$ *pgf (pgf – funkcija generatrisa verovatnoća) se svodi na*

$$P_S(z)=[1+q(z-1)]^n,$$

i tada S ima binomnu raspodelu sa parametrima n i q.

Model individualnog rizika možemo generalizovati na sledeći način. Neka je $X_i = I_i B_i$, *gde su* $I_1,\ldots I_n$, $B_1,\ldots,B_n$ *nezavisni. Slučajne promenljive* I_i *su indikator promenljive koje uzimaju vrednost 1 sa verovatnoćom* q_i *i vrednost 0 sa verovatnoćom* $1 - q_i$. *Ova promenljiva pokazuje da li i – ta polisa proizvodi štetu. Naravno, u tom slučaju ona ima vrednost 1. Slučajna promenljiva* B_i *predstavlja iznos štete pod uslovom da se šteta pojavi i može imati bilo koju raspodelu. U slučaju životnog osiguranja,* B_i *je konstantna sa svom verovatnoćom u vrednosti* b_i. *Ako uzmemo da je* $\mu_i = E(B_i)$ *i* $\sigma_i^2 = D(B_i)$ *imamo*

$$E(S)=\sum_{i=1}^{n} q_i \mu_i \quad \text{i} \quad D(S)=\sum_{i=1}^{n}[q_i\sigma_i^2+q_i(1-q_i)\mu_i^2]$$

Kada su rizici različiti, verovatnoće definisane sa pgf (3.10)[10] *mogu se izračunati tačno ili aproksimativno. Normalna, gama, lognormalna ili bilo koja raspodela može se koristiti za ovu aproksimaciju. Ovo se najčešće radi izjednačavanjem prvih nekoliko momenata. Kako normalna, gama i lognoramlna raspodela imaju sve po dva parametra, srednja vrednost i varijansa su dovoljni za ovu aproksimaciju.*

Postoje dva metoda izračunavanja raspodele ukupnih šteta u individualnom modelu:

- *Direktno izračunavanje i*
- *Rekurzivno izračunavanje*

Kod prvog metoda raspodela za S može se dobiti konvolucijom raspodela X_i *tj. važi da je raspodela verovatnoće ukupnih gubitaka data kao*

$$f_S(x)=f_{X_1}*f_{X_2}*\ldots*f_{X_n}(x), \qquad (*)$$

gde je

[10] Vidi [11]

$$f_{X_i}(x)=\begin{cases} p_i=1-q_i, & x=0 \\ q_i, & x=1. \end{cases}$$

Raspodela verovatnoće (*) može se izračunati rekurzivno koristeći parcijalne sume $S_i=S_{i-1}+X_i$ *za i = 2,3,…, n počevši sa* $S_1=X_1$. *Dakle, važi*

$$f_{S_i}(x)=\begin{cases} f_{S_{i-1}}(x)f_{X_i}(0), & x<b_i \\ f_{S_{i-1}}(x)f_{X_i}(0)+f_{S_{i-1}}(x-b_i)f_{X_i}(b_i), & x\ge b_i \end{cases}$$
$$=\begin{cases} p_i f_{S_{i-1}}(x), & x<b_i \\ p_i f_{S_{i-1}}(x)+q_i f_{S_{i-1}}(x-b_i)f, & x\ge b_i. \end{cases}$$

Drugi pristup je rekurzivno izračunavanje koji se može naći u [11].

U ovom poglavlju bavićemo se slučajem u kojem pretpostavka o nezavisnosti ne važi, tj. slučajne promenljive X_i poseduju određeni stepen korelacije.

Pod pretpostavkom da je marginalna funkcija raspodele slučajne promenljive X_i, F_i poznata za svako $i=1,2,...,n,$ na osnovu teoreme 4.4.2 i posledice 4.4.5 znamo da stop – loss premije za S maksimalne kada su X_i komonotoni. Pod dodatnim pretpostavkama, struktura zavisnosti koja minimizira stop – loss premije od S je međusobna isključivost. U opštem slučaju, komonotonost i međusobna isključivost daju nam granice za $E[g(S)]$ za neku monotono konveksnu funkciju g. U nastavku pokazujemo kako se određuje gornja stop – loss granica bilo koje konveksne po pravcu, rastuće funkcije $\Psi(X_1+...+X_n)$, $n\ge 2$ potencijalno zavisnih rizika u situacijama kada su marginalne raspodele delimično ili potpuno poznate, ili čak kada je dostupna informacija o kopuli koja opisuje odnos zavisnosti među X_i – ovima.

Takođe su izvedene granice za vrednosti $E(g(S))$ *za neku funkciju g koja je monotona ali ne obavezno konveksna. Ove granice su, takođe, veoma interesantne aktuarima. Pretpostavimo, na primer, da osiguravač traži od reosiguravača stop – loss ugovor sa odbitkom* $d\ge 0$. *U nedostatku odgovarajućih informacija o mogućoj zavisnosti među rizicima* X_i, *reosiguravača mogu interesovati granice verovatnoće* $\Pr[S>d]$ *kada je on u obavezi da cedentu (osiguravaču) isplati iznos* $S-d$. *U ovom slučaju nam komonotonost ne pomaže jer indikator funkcija skupa* $\{S-d>0\}$ *jeste neopadajuća ali nije konveksna. Kao drugi primer, pretpostavimo da aktura interesuje* $\mathrm{VaR}[S;\varepsilon]$. *U praksi se obično uzima suma* $\sum_{i=1}^{n}\mathrm{VaR}[X_i;\varepsilon]$. *Međutim, za ne – eliptične portfolie može važiti*

$$\sum_{i=1}^{n}\mathrm{VaR}[X_i;\varepsilon]<\mathrm{VaR}[S;\varepsilon].$$

5.2 POREĐENJE RIZIKA SA FIKSNOM STRUKTUROM ZAVISNOSTI

5.2.1 PROBLEM

U slučaju fiksne strukture zavisnosti među rizicima (tj. kopule), moglo bi se pomisliti da rizičniji pojedinačni rizici, X_i znače i rizičniji ukupan portfolio S. Ispostavilo se da je ova pretpostavka tačna za $\preceq_{\mathrm{ST}}$ poredak, ali u opštem slučaju ne važi, čak ni za $\preceq_{\mathrm{SL}}$. Bez obzira na ovo, ukoliko važe dodatni uslovi za kopulu (tzv uslovni rast) moguće je dobiti željeni rezultat.

5.2.2 POREĐENJE SLUČAJNIH VEKTORA SA FIKSNOM STRUKTUROM ZAVISNOSTI PREMA STOHASTIČKOJ DOMINACIJI

Za dva slučajna vektora $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{Y}$ sa nezavisnim komponentama, očigledno važi sledeće

$$X_i \preceq_{\mathrm{ST}} Y_i\,,\ \text{ za } i = 1,2,,...,n \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{X} \preceq_{\mathrm{ST}} \boldsymbol{Y}.$$

U ovom konkretnom slučaju, višedimenzionalna stohastička dominacija je ekvivalentna jednodimenzionalnoj stohastičkoj dominaciji za sve marginalne raspodele.

Cilj ovog poglavlja je da pokaže da u ranije navedenim rezultatima ključna pretpostavka nije nezavisnost, već činjenica da dva slučajna vektora imaju iste strukture zavisnosti (tj. iste kopule). Dakle, uvek kada dva slučajna vektora imaju istu strukturu zavisnosti, uslovi višedimenzionalne stohastičke dominacije se lako obezbeđuju ispitivanjem marginalnih raspodela svake od komponenti slučajnog vektora. Rezultate koji su dole navedeni dobili su *Scarsini*(1985) i *Müller* i *Scarsini* (2001).

Teorema 5.2.1 Neka su $\boldsymbol{X} \in \mathcal{R}_n(F_{1,}F_2,...,F_n)$ i $\boldsymbol{Y} \in \mathcal{R}_n(G_1,G_2,...,G_n)$ dva slučajna vektora koja imaju zajedničku kopulu C (ne nužno jedinstvenu). Tada važi

$$\boldsymbol{X} \preceq_{\mathrm{ST}} \boldsymbol{Y} \quad \Leftrightarrow \quad X_i \preceq_{\mathrm{ST}} Y_i \quad \text{ za } i = 1,2,,...,n.$$

Dokaz. Kako je smer $\Rightarrow$ očigledan, dokazaćemo samo smer $\Leftarrow$. Kako je $X_i \preceq_{\mathrm{ST}} Y_i$ za svako i, znamo da važi $F_i^{-1}(u_i) \le G_i^{-1}(u_i)$ za sve $u_i \in [0,1]$. Stoga, ako uzmemo da $\boldsymbol{U}$ ima istu raspodelu kao C dobijamo da važi

$$\left(F_1^{-1}(U_1), F_2^{-1}(U_2),...,F_n^{-1}(U_n)\right) \le \left(G_1^{-1}(U_1), G_2^{-1}(U_2),...,G_n^{-1}(U_n)\right)$$

pa važi $\boldsymbol{X} \preceq_{\mathrm{ST}} \boldsymbol{Y}$ na osnovu teoreme 2.2.12. □

Primetimo da pod uslovima koji važe u prethodnoj teoremi, važi i sledeće

$$X_i \preceq_{\mathrm{ST}} Y_i \quad \text{za } i = 1,2,,...,n \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i \preceq_{\mathrm{ST}} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Y_i$$

za bilo koje $\alpha_1.....\alpha_n \geq 0$. Dakle, jednodimenzionalna stohastička dominacija je zatvorena u odnosu na sabiranje slučajnih promenljivih pod uslovom da je struktura zavisnosti svih sabiraka ista.

5.2.3 POREĐENJE SLUČAJNIH VEKTORA SA FIKSNOM STRUKTUROM ZAVISNOSTI PREMA KONVEKSNOM PORETKU

Posmatrajmo dva slučajna vektora $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{Y}$, kod kojih su komponente vektora $\boldsymbol{X}$ dominantne u konveksnom poretku (dominated in the convex order) nad odgovarajućim komponentama vektora $\boldsymbol{Y}$. Pokušaćemo da nađemo uslove pod kojima će svaka pozitivna linearna kombinacija komponenata vektora $\boldsymbol{X}$ biti dominantna u konveksnom poretku nad istom pozitivnom linearnom kombinacijom komponenata vektora $\boldsymbol{Y}$.

S obzirom da je konveksna funkcija pozitivne kombinacije komponenata vektora konveksna po pravcu u tački, konveksnost po pravcu postaje interesantan alat za rešavanje gore pomenutih problema. Teorema slična teoremi 5.2.1 važi za konveksan poredak ali samo ako su komponente slučajnog vektora nezavisne (tj. $C \equiv C_I$) pa on nije od velike pomoći. Jasno je da je nemoguće očekivati da iz konveksnog poretka marginalnih raspodela zaključimo nešto o konveksnom poretku sume komponenata ako su one negativno zavisne. U finansijskoj literaturi ovaj fenomen je poznat pod nazivom "hedžing" rizika. Pretpostavimo da smo vlasnici neke akcije, čiji prihod opisuje slučajna promenljiva X_1. Rizik možemo smanjiti investirajući u neku drugu rizičnu aktivu koja je u negativnoj korelaciji sa X_1, na primer, prodajna opcija na našu akciju. Pretpostavimo dalje, da ova opsija daje prihod

$$X_2 = \max\{K - X_1, 0\}$$

i da za nju treba da platimo iznos od $E[X_2]$. Uporedimo sada sledeće dve situacije. Prvu, u kojoj posedujemo pomenutu akciju i novac u iznosu $E[X_2]$ u gotovini (tj. naš portfolio je $\boldsymbol{X} = (X_1, E[X_2])$) sa drugom u kojoj imamo prodajnu opciju (tj. naš portfolio sada je $\boldsymbol{X}' = (X_1, X_2)$). Portfolio $\boldsymbol{X}'$ je manje rizičan od portfolia $\boldsymbol{X}$ tj. važi

$$X_1 + X_2 \preceq_{\mathrm{SL},=} X_1 + E[X_2],$$

iako je $E[X_2] \preceq_{\mathrm{SL},=} X_2$. Dakle, jasno je da nam je potrebna neka pretpostavka o pozitivnoj zavisnosti. Sledeći rezultat, za koji su zaslužni *Müller* i *Scarsini* (2001), pokazuje da ako pretpostavimo da oba vektora[11] $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{Y}$ imaju istu CI kopulu, tada za ove su ovi vektori uporedivi u konveksnom po pravcu poretku.

Teorema 5.2.2 Neka su $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{Y}$ dva n – dimenzionalna slučajna vektora sa zajedničkom CI kopulom C i pretpostavimo da važi $X_i \preceq_{\mathrm{SL},=} Y_i$ za sve $i = 1,2,\ldots, n$. Tada važi $\boldsymbol{X} \preceq_{\mathrm{DCX}} \boldsymbol{Y}$.

Kao direktna posledica gornje teoreme dobija se sledeći rezultat.

Posledica 5.2.3 Neka $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{Y}$ zadovoljavaju uslove iz prethodne teoreme. Tada za sve nenegativne konstante $\alpha_1, \alpha_{2,\ldots,} \alpha_n$, važi

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i \preceq_{\mathrm{SL},=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Y_i \,.$$

5.3 STOP – LOSS GRANICE FUNKCIJA ZAVISNIH RIZIKA

5.3.1 POZNATE MARGINALNE RASPODELE

Sada ćemo odrediti gornju i donju stop – loss granicu za rastuću, konveksnu po pravcu funkciju $\Psi(X_1,\ldots, X_n)$, $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Najjednostavniji primeri rastućih funkcija konveksnih po pravcu, su linearne kombinacije

$$\Psi(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\,, \text{ gde su } \alpha_1,\ldots,\alpha_n > 0\,.$$

Pretpostavimo da su nam poznate marginalne raspodele $F_1,\ldots, F_n$ i da možemo naći kopule C^- i C^+ tako da važi

$$C^- \preceq_{\mathrm{SM}} C \preceq_{\mathrm{SM}} C^+. \tag{5.3}$$

Na osnovu Teoreme 4.4.4 imamo da važi

[11] Marginalne raspodele ovih vektora su uporedive u konveksnom smislu,

$$\Psi(X_1^-,...,X_n^-) \preceq_{\mathrm{SL}} \Psi(X_1,...,X_n) \preceq_{\mathrm{SL}} \Psi(X_1^+,...,X_n^+) \tag{5.4}$$

kad god $(X_1^-,...,X_n^-)$ i $(X_1^+,...,X_n^+)$ imaju zajedničke marginalne raspodele $F_1,\dots, F_n$

ali različite kopule C^- i C^+ umesto kopule C.

Teorema 4.4.2 ukazuje da se *Frechetova* gornja granica nameće kao prirodni izbor za C^+ dok je za C^- najlogičnije uzeti C_I.

5.3.2 Nepoznate marginalne raspodele

5.3.2.1 Opšti postupak

Jedan od osnovnih problema aktuarske nauke je određivanje ekstremnih vrednosti u odnosu na neki stohastički poredak. Zaista, ponekad aktuari donose odluke na osnovu najmanje prihvatljivog rizika koji određuju na osnovu nepotpunih informacija koje su im dostupne. Ovo čine tako što u datim klasama rizika odrede ekstreme u odnosu na neki stohastički poredak, koji u stvari predstavljaju preferencije aktuara iskazane kroz pojmove „dobar“ i „loš“ rizik.

Pretpostavimo sada da su marginalne funkcije raspodela slučajnih promenljivih $X_1,\dots, X_n$ nepoznate ali je na osnovu nekih parcijalnih informacija o njima moguće naći donju granicu $X_{i,\min}^-$ i gornju granicu $X_{i,\max}^+$ u $\preceq_{\mathrm{SL},=}$ smislu, slučajnih promenljivih X_i. Tačije, $X_{i,\min}^-$ i $X_{i,\max}^+$ su definisane tako da zadovoljavaju sledeće

$$X_{i,\min}^- \preceq_{\mathrm{SL},=} X_i \preceq_{\mathrm{SL},=} X_{i,\max}^+ \text{ za } i = 1,...,n$$

Pretpostavimo dalje da su C^- i C^+ iz jednakosti (5.3) i (5.4) CI. Nezavisna kopula i *Frechetova* gornja granica očigledno zadovoljavaju ove zahteve.

Pod ovim uslovima koji važe za C^- i C^+, direktnom primenom teoreme 5.2.2 dobijamo

$$\Psi(X_{1,\min}^-,...,X_{n,\min}^-) \preceq_{\mathrm{SL}} \Psi(X_1^-,...,X_n^-) \tag{5.5}$$

i

$$\Psi(X_1^-,...,X_n^-) \preceq_{\mathrm{SL}} \Psi(X_{1,\max}^+,...,X_{n,\max}^+) \tag{5.6}$$

gde $(X_{1,\min}^-,...,X_{n,\min}^-)$ ima kopulu C^- a $(X_{1,\max}^+,...,X_{n,\max}^+)$ kopulu C^+.

Prednost ovog pristupa je u tome što se u izboru stop – loss granica možemo osloniti na jednodimenzionalna iskustva što je pokazano u nastavku.

5.3.2.2 Ograničeni rizici sa datim očekivanjima

Pretpostavimo da je $E[X_i] = \mu_i$ i $\Pr\left[0 \le X_i \le b_i\right] = 1$ za poznate konstante μ_i i b_i $i = 1, 2, ..., n$. Radi jednostavnosti, pretpostavimo da bez gubitka opštosti važi

$$\frac{\mu_1}{b_1} \ge ... \ge \frac{\mu_n}{b_n} \ge \frac{\mu_{n+1}}{b_{n+1}} = 0.$$

Na osnovu zadatka 3.5.21 (Vidi [2]) o konveksnom poretku slučajne promenljive sa skupom vrednosti iz intervala $[a , b]$ i očekivanjem μ poznato je da važi $X_i \preceq_{\mathrm{SL},=} X_{i,\max}^{+}$ gde je funkcija raspodele $X_{i,\max}^{+}$ data sa

$$F_{i,\max}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - \dfrac{\mu_i}{b_i}, & 0 \le x \le b_i, \\ 1, & x \ge b_i \end{cases} \tag{5.7}$$

Dakle, ako je , na primer, $\Psi(X_1, ..., X_n) = X_1 + ... + X_n$, na osnovu (5.4) i (5.6) moguće je zaključiti da važi

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i \preceq_{\mathrm{SL},=} \sum_{i=1}^{n} F_{i.\max}^{-1}(U) = S_{\max}, \tag{5.8}$$

gde U ima uniformnu raspodelu, tj. $U : \mathcal{U}(0,1)$. Sledeći rezultat daje eksplicitan izraz za funkciju raspodele $S_{\max}$, kao i za njenu stop – loss transformaciju.

Osobina 5.3.1 Definišimo sledeće

$$\mu_i^* = \sum_{j=1}^{i} \mu_i, \qquad b_i^* = \sum_{j=1}^{i} b_j, \qquad i = 1, \dots, n$$

pri čemu je $b_0^* = 0$ i $b_{n+1}^* = \infty$. Tada važi

(i) funkcija raspodele $F_{\max}$ slučajne promenljive $S_{\max}$ eksplicitno je data sa

$$F_{\max}(x) = \left(1 - \frac{\mu_i}{b_i}\right) \mathbb{I}\left[b_{i-1}^* \le x < b_i^*\right] \tag{5.9}$$

(ii) stop – loss premija $\pi_{S_{\max}}(d)$, koja predstavlja gornju granicu $\pi_S(d)$ data je u formi

$$\pi_{S_{\max}}(d) = \left(\mu_n^* - \mu_{i+1}^* + \frac{\mu_{i+1}}{b_{i+1}}\left(b_{i+1}^* - d\right)\right) \mathbb{I}\left[b_i^* \le d < b_{i+1}^*\right] \tag{5.10}$$

za $i = 1, \dots, n-1$.

Dokaz. Za dokazivanje (5.9) koristimo činjenicu da za svako $x \ge 0$, važi

$$\begin{aligned} F_{\max}(x) &= \Pr\left[\sum_{i=1}^{n} F_{i,\max}^{-1}(U) \le x\right] \\ &= 1 - \frac{\mu_i}{b_i} + \sum_{i=1}^{n} \Pr\left[b_i^* \le x \,\middle|\, \frac{\mu_{i+1}}{b_{i+1}} \le 1 - U \le \frac{\mu_i}{b_i}\right] \times \Pr\left[\frac{\mu_{i+1}}{b_{i+1}} \le 1 - U \le \frac{\mu_i}{b_i}\right] \end{aligned}$$

Kako U: $\mathcal{U}(0,1)$ iz gornjeg izraza dobijamo

$$F_{\max}(x) = 1 - \frac{\mu_i}{b_i} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\mu_i}{b_i} - \frac{\mu_{i+1}}{b_{i+1}}\right) \mathbb{I}\left[b_i^* \le x\right]$$

što se lako svodi na (5.9).

Za dokaz (5.10) primetimo da za $b_i^* \le d < b_{i+1}^*$ važi

$$\pi_{S_{\max}}(d) = \sum_{j=i+1}^{n} \left(b_j^* - d\right)\left(\frac{\mu_j}{b_j} - \frac{\mu_{j+1}}{b_{j+1}}\right)$$

što možemo zapisati u obliku

$$\pi_{S_{\max}}(d)=\frac{\mu_{i+1}}{b_{i+1}}b_{i+1}^{*}+\sum_{j=i+2}^{n}\frac{\mu_j}{b_j}\left(b_j^{*}-b_{j-1}^{*}\right)-\frac{\mu_{i+1}}{b_{i+1}}d=\frac{\mu_{i+1}}{b_{i+1}}\left(b_{i+1}^{*}-d\right)+\mu_n^{*}-\mu_{i+1}^{*}.$$

čime je ovaj dokaz završen. □

5.4 STOHASTIČKE GRANICE FUNKCIJA ZAVISNIH RIZIKA

5.4.1 STOHASTIČKE GRANICE SUME DVA RIZIKA

Posmatrajmo sumu $S=X_1+X_2$ dva potencijalno zavisna rizika X_1 i X_2. Pokazaćemo da postoje slučajne promenljive $S_{\min}$ i $S_{\max}$ takve da važi

$$\Pr\left[S_{\min}\le s\right]\le\Pr\left[S\le s\right]\le\Pr\left[S_{\max}\le s\right],\quad s\in\mathbb{R} \tag{5.12}$$

ili, drugim rečima $S_{\max}\preceq_{\mathrm{ST}} S\preceq_{\mathrm{ST}} S_{\min}$. Za takve slučajne promenljive iz (2.3) imamo da važi

$$E[g(S_{\max})]\le E[g(S)]\le E[g(S_{\min})], \tag{5.13}$$

za sve neopadajuće funkcije g, pod uslovom da ova očekivanja postoje.

Za $i=1,2,$ neka X_i predstavlja rizik sa funkcijom raspodele F_i i levom granicom $F_i^{-}(s)=\Pr[X_i<s]$ definisanom za sve $s\in\mathbb{R}$. Uvodimo

$$F_{\min}(s)=\sup_{x\in\mathbb{R}}\max\left\{F_1^{-}(x)+F_2^{-}(s-x)-1,0\right\} \tag{5.14}$$

i

$$F_{\max}(s)=\inf_{x\in\mathbb{R}}\min\left\{F_1(x)+F_2(s-x),1\right\}. \tag{5.15}$$

Sada ćemo dokazati da postoje slučajne promenljive kojima odgovaraju $F_{\min}$ i $F_{\max}$.

Lema 5.4.1 Postoje slučajne promenljive $S_{\min}$ i $S_{\max}$ takve da važi

$$F_{\min}(s)=\Pr[S_{\min}<s]\ \text{ i }\ F_{\max}(s)=\Pr[S_{\max}\le s],\ s\in\mathbb{R} \tag{5.16}$$

Dokaz. Očigledno je da su $F_{\min}$ i $F_{\max}$ neopadajuće na svojim domenima pa na osnovu primedbe *Rudina* (1974), str.39 imamo da je $F_{\min}(s)$ neprekidne s leva dok je $F_{\max}(s)$ neprekidna s desna. Sve što nam ostaje da proverimo je ove funkcije imaju vrednosti limesa 0, odnosno 1 kada *s* teži -∞, odnosno +∞.

Pokazaćemo samo za $F_{\max}$ jer se za $F_{\min}$ izvodi na sličan način. Prvo ćemo pokazati za smer kada *s* teži -∞. Uzmimo fiskno $\varepsilon > 0$ i izaberimo u_0 tako da važi $F_1(u_0) < \varepsilon/2$. Sada ćemo izabrati s_0 tako da važi $F_2(s_0 - u_0) < \varepsilon/2$. Tada je $F_{\max}(s_0) < \varepsilon$ a s obzirom da je funkcija neopadajuća važi i $F_{\max}(s) < \varepsilon$ za svako $s \le s_0$.

Za slučaj kada $s \to \infty$ izaberimo u_1 tako da važi $F_1(u_1) > 1-\varepsilon$. Uzmimo sada s_1 tako da je zadovoljeno $F_2(s_1 - u_1) > 1-\varepsilon$. Primetimo da važi

$$\inf_{u \le u_1} \min\left\{F_1(u) + F_2(s_1 - u), 1\right\} \ge F_2(s_1 - u_1) > 1 - \varepsilon$$

i

$$\inf_{u \le u_1} \min\left\{F_1(u) + F_2(s_1 - u), 1\right\} \ge F_1(u_1) > 1 - \varepsilon$$

odakle dobijamo $F_{\max}(s) > 1-\varepsilon$. Kako je $F_{\max}$ neopadajuća , dokaz je završen. □

Kao što je već napomenuto, ove slučajne promenljive, $S_{\min}$ i $S_{\max}$, čija je egzistencija garantovana lemom 5.4.1 su zapravo one za koje važe nejednakosti (5.12) i (5.13) na šta ukazuje sledeća teorema.

Teorema 5.4.2 Ako je $S = X_1 + X_2$ a $F_{\min}$ i $F_{\max}$ definisane sa (5.14) i (5.15) tada važi

$$F_{\min}(s) \le F_s(s) \le F_{\max}(s) \text{ za sve } s \in \mathbb{R} \tag{5.17}$$

Dokaz. Za proizvoljno *s* i *x* iz ℝ, jasno je da iz $X_1 > x$ i $X_2 > s - x$ sledi $S > s$, tako da važi

$$F_s(s) \le \Pr[X_1 \le x \text{ or } X_2 \le s - x] \le F_1(x) + F_2(s - x),$$

odakle očigledno sledi $F_s(s) \le F_{\max}(s)$ svuda. Da bi pokazali drugu nejednakost primetimo

$$\Pr[X_1 < x] + \Pr[X_2 < s - x] - \Pr[X_1 < x, X_2 < s - x] \le 1$$

odakle sledi da je

$$\max\left\{F_1^-(x)+F_2^-(s-x)-1,0\right\}\leq \Pr\left[X_1<x, X_2<s-x\right]\leq F_2(s),$$

što je traženi rezultat. $\square$

Primedba 5.4.3. Da bismo videli da (5.17) zaista implicira (5.12), pa stoga i (5.13), dovoljno je posmatrati $\Pr\left[S_{\min}<s+1/n\right]\leq \Pr\left[S\leq s+1/n\right]$ za sve cele brojeve $n\geq 1$, pa u graničnom slučaju važi $\Pr\left[S_{\min}\leq s\right]\leq F_s(s)$.

Kao posledica teoreme 5.4.2, funkcije raspodele $S_{\min}$ i $S_{\max}$ predstavljaju najbolje moguće granice za $S=X_1+X_2$ u $\preceq_{\mathrm{ST}}$ smislu.

U nastavku navodimo neke primere koji se koriste u aktuarskoj praksi.

Primer 5.4.4 Ako su slučajen promenljive $X_i : \varepsilon(\alpha_i),\ i=1,2,$ lako se pokazuje da je funkcija raspodele sume $S=X_1+X_2$ ograničena sa od dole sa "pomerenom" eksponencijalnom raspodelom oblika

$$F_{\min}=\overline{\theta}+\varepsilon(\alpha_1+\alpha_2),$$

gde je $\overline{\theta}=(\alpha_1+\alpha_2)\log(\alpha_1+\alpha_2)-\alpha_1\log(\alpha_1)-\alpha_2\log(\alpha_2).$ Takođe je ograničena od gore sa

$$F_{\max}=\varepsilon(\max\{\alpha_1,\alpha_2\}).$$

∇

Primer 5.4.5. Ako su slučajen promenljive $X_i : Par(\alpha_i),\ i=1,2,$ lako se pokazuje da je funkcija raspodele sume $S=X_1+X_2$ ograničena sa od dole sa *Pareto* raspodelom oblika

$$F_{\min}=Par(\alpha,\tilde{\lambda})+\tilde{\lambda}-\lambda_1-\lambda_2,$$

gde je $\tilde{\lambda}=(\lambda_1^{\beta}+\lambda_2^{\beta})^{1/\beta}$ i $\beta=\alpha/(\alpha+1)$.. Takođe je ograničena od gore sa

$$F_{\max}=Par\{\alpha,\max(\lambda_1,\lambda_2)).$$ ∇

5.4.2 STOHASTIČKE GRANICE SUME VIŠE RIZIKA

Prethodna ideja može biti proširena bez mnogo poteškoća i na slučaj $n \geq 3$ polisa X_i sa funkcijama raspodele F_i i levim limesima $F_i^-, 1 \leq i \leq n$. Definišimo sada hiperravan

$$\sum(s) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \middle| x_1 + ... + x_n = s \right\}$$

i definišimo

$$F_{\min}(s) = \sup_{x \in \sum(s)} \max\left\{ \sum_{i=1}^{n} F_i^-(x_i) - (n-1), 0 \right\} \tag{5.18}$$

i

$$F_{\max}(s) = \inf_{x \in \sum(s)} \min\left\{ \sum_{i=1}^{n} F_i(x_i), 1 \right\} \tag{5.19}$$

Može se pokazati egzistencija slučajnih promenljivih $S_{\min}$ i $S_{\max}$ za koja (5.16) i dalje važi sa ovim proširenim definicijama $F_{\min}$ i $F_{\max}$. Sledeća teorema predstavlja uopštenje teoreme 5.4.2.

Teorema 5.4.6 Ako je $S = X_1 + ... + X_n$, a $F_{\min}$ i $F_{\max}$ su definisani sa (5.18) i (5.19), tada važi

$$F_{\min}(s) \leq F_S(s) \leq F_{\max}(s) \text{ , za sve } s \in \mathbb{R}. \tag{5.20}$$

5.4.3 POBOLJŠANJE GRANICA SUMA POZITIVNO ZAVISNIH RIZIKA

U ovom delu opisaćemo kako da modifikujemo rezultate date u 5.4.1 i 5.4.2 u cilju sužavanja granica raspodele ukupnih zahteva $S = X_1 + ... + X_n$ u slučajevima kada su nam dostupne dodatne informacije o strukturi zavisnosti pojedinačnih rizika. Ova poboljšanja moguća su samo u slučajevima kada su marginalne funkcije raspodele svakog pojedinačnog rizika poznate (što smo do sada podrazumevali).

Posmatrajmo za početak slučaj $n = 2$ i pretpostavimo da su slučajne promenljive X_1 i X_2 pozitivno zavisne, što je uobičajena pretpostavka u aktuarskoj praksi. Pretpostavimo, šta više, da je par (X_1 , X_2) PQD. Sledeća teorema pokazuje nam da je u ovom slučaju moguće poboljšati granice (5.17).

Teorema 5.4.10 Neka je (X_1, X_2) PQD i $S = X_1 + X_2$. Tada važi

$$F^*_{\min}(s) \le F_s(s) \le F_{\max}{}^*(s) \text{ za sve } s \in \mathbb{R},$$

gde je

$$F^*_{\min}(s) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{F_1(x) F_2(s-x)\} \tag{5.21}$$

$$F^*_{\max}(s) = 1 - \sup_{x \in \mathbb{R}} \{\overline{F_1}(x) \overline{F_2}(s-x)\} \tag{5.22}$$

za sve $s \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Na osnovu pretpostavke, imamo

$$F_1(x) F_2(s-x) \le \Pr[X_1 \le x, X_2 \le s-x] \le F_S(s),$$

za poizvoljno $x \in \mathbb{R}$, što nam daje donju granicu. Na isti način kao i u dokazu 5.4.2, takođe dobijamor

$$F_S(s) \le \Pr[X_1 \le x \text{ or } X_2 \le s-x] = F_1(x) + F_2(s-x) - F_1(x) F_2(s-x)$$

bez obzira na izbor x, što nam predstavlja gornju granicu. □

Primedba 5.4.11. S obzirom da u opštem slučaju važi

$$\max\{F_1(x) + F_2(s-x) - 1, 0\} \le F_1(x) F_2(s-x)$$

i

$$F_1(x) + F_2(s-x) - F_1(x) F_2(s-x) \le \min\{F_1(x) + F_2(s-x), 1\}$$

zaključujemo da mora da važi

$$F_{\min}(s) \le F^*_{\min}(s) \le F_S(s) \le F^*_{\max}(s) \le F_{\max}(s)$$

Dakle, PQD uslov vodi ka užim granicama. ∇

Navedimo i upštenje gornjih rezultata za slučaj $n \ge 3$.

Teorema 5.4.12 Neka su $X_1,...,X_n$ slučajne promenljive sa funkcijama raspodela $F_1,...,F_n$ redom. Neka je $S = X_1 + ... + X_n$ i pretpostavimo da su X_i POD. Tada važi

$$\sup_{x\in\sum(s)}\left\{\prod_{i=1}^{n} F_i(x_i)\right\} \le F_S(s) \le 1 - \sup_{x\in\sum(s)}\left\{\prod_{i=1}^{n} \overline{F_i}(x_i)\right\}, \tag{5.23}$$

za $s \in \mathbb{R}$, gde je $\Sigma(s)$ definisano na isti način kao i u delu 5.4.2.

5.4.4 STOHASTICKE GRANICE FUNKCIJA DVA RIZIKA

Pretpostaimo da želimo da odredimo granice funkcije raspodele $\Psi(X_1, X_2)$ u obliku marginalnih raspodela F_1 i F_2.

Teorema 5.4.13 Za datu neopadajuću i neprekidnu funkciju $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, i proizvoljne vrednosti s i x iz $\mathbb{R}$ definišimo neprekidnu funkciju $\varphi_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa $t \mapsto \varphi_x(t) = \Psi(x,t)$. Tada nejednakost

$$F_{\min}(s|\Psi) \le \Pr\left[\Psi(X_{1,}X_2) \le s\right] \le F_{\max}(s|\Psi) \tag{5.24}$$

važi za $s \in \mathbb{R}$, gde je

$$F_{\min}(s|\Psi) = \sup_{t_1\in\mathbb{R}} \max\left\{F_1(t_1) + F_2\left(\varphi_{t_1}^{-1+}(s)\right) - 1, 0\right\}$$

i

$$F_{\max}(s|\Psi) = \inf_{t_1\in\mathbb{R}} \min\left\{F_1(t_1) + F_2\left(\varphi_{t_1}^{-1+}(s)\right), 1\right\}.$$

Dokaz. Na osnovu leme 1.1.3 jasno je da važi $X_1 > x$ i $X_2 > \varphi_x^{-1+}(s)$ zajedno impliciraju $\Psi(X_1, X_2) > s$. Tada za svako $s\in\mathbb{R}$ važi

$$\begin{aligned}\Pr\left[\Psi(X_1, X_2) \le s\right] &\le \Pr\left[X_1 \le x \ or \ X_2 \le \varphi_x^{-1+}(s)\right] \\ &\le \min\left\{F_1(x) + F_2\left(\varphi_x^{-1+}(s)\right), 1\right\}.\end{aligned}$$

Na osnovu toga, imamo

$$\Pr\left[\Psi(X_1, X_2) \le s\right] \le \inf_{x\in\mathbb{R}} \min\left\{F_1(x) + F_2\left(\varphi_x^{-1+}(s)\right), 1\right\},$$

što je u stvari desna strana nejednakosti (5.24). Da bi smo dobili i levu dovoljno je uočiti da za svako $s \in \mathbb{R}$ važi,

$$\begin{aligned}\Pr\left[\Psi\left(X_1, X_2\right) \le s\right] &\ge \Pr\left[X_1 \le x, X_2 \le \varphi_x^{-1+}\left(s\right)\right] \\ &\ge \max\left\{F_1\left(x\right) + F_2\left(\varphi_x^{-1+}\left(s\right)\right) - 1, 0\right\}\end{aligned}$$

odakle najbolje donje ograničenje dobijamo uzimajući supremum. □

Primedba 5.4.14. Bitno je napomenuti da $F_{\min}\left(\cdot \mid \Psi\right)$ može biti predstavljena u obliku

$$F_{\min}\left(s \mid \Psi\right) = \sup_{(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2 \mid \Psi(t_1,t_2)=s} \max\left\{F_1\left(t_1\right) + F_2\left(t_2\right) - 1, 0\right\} \tag{5.25}$$

ali u opštem slučaju ne važi

$$F_{\max}\left(s \mid \Psi\right) = \inf_{(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2 \mid \Psi(t_1,t_2)=s} \min\left\{F_1\left(t_1\right) + F_2\left(t_2\right), 1\right\}. \tag{5.26}$$

Objašnjenje za ove zaključke je sledeće. Uslov $\Psi\left(t_1, t_2\right) = s$ je ekvivalentan sa $\varphi_{t_1}\left(t_2\right) = s$ što je isto što i

$$\begin{cases}\varphi_{t_1}\left(t_2\right) \le s \\ \varphi_{t_1}\left(t_2\right) > s - \varepsilon, \text{ za sve } \varepsilon > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_2 \le \varphi_{t_1}^{-1+}\left(s\right) \\ t_2 \le \varphi_{t_1}^{-1+}\left(s - \varepsilon\right), \text{ za sve } \varepsilon > 0\end{cases}$$

na osnovu leme 1.1.3, tj.

$$\varphi_{t_1}^{-1+}\left(s-\right) \le t_2 \le \varphi_{t_1}^{-1+}\left(s\right).$$

S obzirom da je $\max\{F_1(t_1) + F_2(t_2), 1\}$ neopadajući po (t_1, t_2), sledi da je supremum sa desne strane (5.25) uzet kao krajnja desna tačka intervala $[\varphi_{t_1}^{-1+}(s-), \varphi_{t_1}^{-1+}(s)]$ implicirajući jednakost (5.25). Međutim, ovaj način rasuđivanja ne možemo primeniti na neopadajuću funkciju $\min\{F_1(t_1) + F_2(t_2), 1\}$ za koju moramo uzmeti infimum. ∇

Williamson i *Downs* (1990, Teorema 3) su pokazali da je u opštem slučaju nemoguće konstruisati uže granice od onih navedenih u teoremi 5.4.13. Za slučaj kada je $\Psi\left(x_1, x_2\right) = x_1 + x_2$, teorema 5.4.13 se svodi na teoremu 5.4.2.

5.4.5 POBOLJŠANJE GRANICA FUNKCIJA RIZIKA POD PRETPOSTAVKOM POZITIVNE KVADRANTNE ZAVISNOSTI

Kao što je to bio slučaj i kod sume koreliranih rizika, granice funcije raspodele od $\Psi(X_1, X_2)$ moguće je popraviti kada su X_i PQD.

Teorema 5.4.15 Neka je (X_1, X_2) PQD sa marginalnim raspodelama F_1 i F_2. Za datu neopadajuću i neprekidnu funkciju $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, nejednakosti

$$F_{\min}^{*}(s|\Psi) \le \Pr\left[\Psi(X_1, X_2) \le s\right] \le F_{\max}^{*}(s|\Psi) \tag{5.27}$$

važe za svako $s \in \mathbb{R}$, gde su

$$F_{\min}^{*}(s|\Psi) = \sup_{t_1 \in \mathbb{R}}\left\{F_1(t_1)F_2\left(\varphi_{t_1}^{-1+}(s)\right)\right\}$$

i

$$F_{\max}^{*}(s|\Psi) = \inf_{t_1 \in \mathbb{R}}\left\{F_1(t_1) + F_2\left(\varphi_{t_1}^{-1+}(s)\right) - F_1(t_1)F_2\left(\varphi_{t_1}^{-1+}(s)\right)\right\}.$$

Gore pomenuti autori *Williamson* i *Downs* (1990, Teorema 3) su takođe dokazali da su u ovom slučaju definisane granice najbolje moguće.

5.4.6 STOHASTIČKE GRANICE FUNKCIJA VIŠE RIZIKA

Navedimo sada i višedimenzionalno uopštenje teoreme 5.4.13.

Teorema 5.4.16 Neka je $\boldsymbol{X}$ n – dimenzionalni slučajni vektor sa marginalnim funkcijama raspodele $F_1,\ldots,F_n$. Za datu neopadajuću neprekidnu funkciju $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ i proizvoljne $s, x_1, x_2,\ldots, x_{n-1}$ iz $\mathbb{R}$ definišimo neprekidnu funkciju $\varphi_{x_1,\ldots,x_{n-1}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa

$$t \mapsto \varphi_{x_1,\ldots,x_{n-1}}(t) = \Psi(x_1,\ldots,x_{n-1},t).$$

Tada nejednakosti

$$F_{\min}(s|\Psi) \le \Pr\left[\Psi(X_1,\ldots,X_n) \le s\right] \le F_{\max}(s|\Psi) \tag{5.28}$$

važe za sve $s \in \mathbb{R}$, pri čemu je

$$F_{\min}(s|\Psi) = \sup_{(t_1,\ldots,t_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}} \max\left\{\sum_{i=1}^{n-1} F_i(t_i) + F_n\left(\varphi_{t_1,\ldots,t_{n-1}}^{-1+}(s)\right) - (n-1), 0\right\}$$

i

$$F_{\max}\left(s\middle|\Psi\right)=\inf_{(t_1,\ldots,t_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1}}\min\left\{\sum_{i=1}^{n-1}F_i\left(t_i\right)+F_n\left(\varphi_{t_1,\ldots,t_{n-1}}^{-1+}\left(s\right)\right),1\right\}.$$

Dokaz. Jasno je da iz $X_1>x_1, X_2>x_2\ldots X_{n-1}>x_{n-1}$ and $X_n>\varphi_{x_1,\ldots,x_{n-1}}^{-1+}\left(s\right)$ sledi $\Psi\left(X_1,\ldots,X_n\right)>s$ tako da važi

$$\begin{aligned}\Pr\left[\Psi\left(X_1,\ldots,X_n\right)\le S\right]&\le\Pr\left[X_1\le x_1 \text{ or } \ldots\text{or } X_{n-1}\le x_{n-1} \text{ or } X_n\le\varphi_{x_1,\ldots,x_{n-1}}^{-1+}\left(s\right)\right]\\ &\le\sum_{i=1}^{n-1}F_i\left(x_i\right)+F_n\left(\varphi_{x_1,\ldots,x_{n-1}}^{-1+}\left(s\right)\right),\end{aligned}$$

gde desna nejednakost sledi iz (5.28). Za levu nejednakost dovoljno je primetiti da važi

$$\Pr\left[\Psi\left(X_1,\ldots,X_n\right)\le s\right]\ge\max\left\{\sum_{i=1}^{n-1}F_i\left(t_i\right)+F_n\left(\varphi_{t_1,\ldots,t_{n-1}}^{-1+}\left(s\right)\right)-\left(n-1\right),0\right\},$$

čime je dokaz završen. □

Primedba 5.4.17. Prilagodimo sada primedbu 5.4.14 za višedimenzionalni slučaj. Uslov $\Psi\left(t_1,\ldots,t_n\right)=s$ je ekvivalentan sa

$$\begin{cases}\varphi_{t_1,\ldots,t_{n-1}}\left(t_n\right)\le s\\ \varphi_{t_1,\ldots,t_{n-1}}\left(t_n\right)>s-\in,\in>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t_n\le\varphi_{t_1,\ldots,t_{n-1}}^{-1+}\left(s\right)\\ t_n>\varphi_{t_1,\ldots,t_{n-1}}^{-1+}\left(s-\in\right),\in>0\end{cases}$$

tj.

$$\varphi_{t_1,\ldots,t_{n-1}}^{-1+}\left(s-\right)\le t_n\le\varphi_{t_1,\ldots,t_{n-1}}^{-1+}\left(s\right).$$

Za supremum nad $\left\{\left(t_1,\ldots,t_n\right)\in\mathbb{R}^n\middle|\Psi\left(t_1,\ldots,t_n\right)=s\right\}$ uzeta je krajnja desna tačka intervala $\left[\varphi_{t_1,\ldots,t_{n-1}}^{-1+}\left(s-\right),\varphi_{t_1,\ldots,t_{n-1}}^{-1+}\left(s\right)\right]$, što implicira da se (5.25) lako proširuje na 3 i više dimenzija uzimajući da je

$$F_{\min}\left(s\middle|\Psi\right)=\sup_{(t_1,\ldots,t_n)\in\mathbb{R}^n\middle|\psi(t_1,\ldots,t_n)=s}\max\left\{\sum_{i=1}^{n}F_i\left(t_i\right)-\left(n-1\right),0\right\}$$

Potpuno isto kao i u dvodimenzionalnom slučaju, analogija (5.26) takođe ne važi u opštem slučaju. ∇

5.4.7 POBOLJŠANJE GRANICA FUNKCIJA RIZIKA POD PRETPOSTAVKOM POZITIVNE ORTANT ZAVISNOSTI

Pretpostavimo sada da nam je poznata struktura zavisnosti među X_i – ovima tj. da su ovi rizici POD. Ova pretpostavka omogućava nam da popravimo granice funkcije $\Psi\left(X_1,...,X_n\right)$ definisane sa (5.28).

Teorema 5.4.18 Neka je $\boldsymbol{X}$ POD n – dimenzionalni slučajni vektor sa marginalnim funkcijama raspodele $F_1,\ldots,F_n$. Za datu neopadajuću neprekidnu funkciju $\Psi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ sledeće nejadnakosi važe za svako $s\in\mathbb{R}$

$$F^*_{\min}\left(s\middle|\Psi\right)\le \Pr\left[\Psi\left(X_1,...,X_n\right)\le s\right]\le F^*_{\max}\left(s\middle|\Psi\right) \tag{5.29}$$

pri čemu su nove granice definsane sa

$$F^*_{\min}\left(s\middle|\Psi\right)=\sup_{(t_1,...,t_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1}}\left\{\prod_{i=1}^{n-1}F_i\left(t_i\right)\times F_n\left(\varphi^{-1+}_{t_1,....,t_{n-1}}\left(s\right)\right)\right\},$$

i

$$F^*_{\max}\left(s\middle|\Psi\right)=\inf_{(t_1,...,t_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1}}\left\{1-\prod_{i=1}^{n-1}\overline{F}_i\left(t_i\right)\times \overline{F}_n\left(\varphi^{-1+}_{t_1,....,t_{n-1}}\left(s\right)\right)\right\}.$$

5.4.8 SLUČAJ DELIMIČNO POZNATIH MARGINALNIH RASPODELA

U dosadašnjem radu smo podrazumevali da su marginalne funkcije $F_1,\ldots,F_n$ potpuno poznate a u nastavku ovog poglavlja ispitaćemo slučaj kada su one nepoznate ali su nam dati njihovi prvi momenti (ili očekivanje i varijansa ili očekivanje, varijansa i koeficijent asimetrije) i gornja granica (ukoliko postoji). Da bismo dobili granice funkcije F_S dovoljno je, da svaku F_i ograničimo sa dve ekstremne funkcije raspodele dobijene na osnovu informacija o X_i koje su nam dostupne.

Uzmimo nenegativnu slučajnu promenljivu Y za koju su nam poznati samo očekivanje, μ i standardna devijacija, σ. Na osnovu radova *Kaasa* i *Goovaertsa* (1985) znamo da postoje dve funkcije raspodele, recimo $M^{(\mu,\sigma)}$ i $W^{(\mu,\sigma)}$ takve da važi

$$M^{(\mu,\sigma)}\left(s\right)\le F_Y\left(s\right)\le W^{(\mu,\sigma)}\left(s\right) \tag{5.30}$$

za sve $s\geq 0$. Primeri ovih ekstremnih raspodela za različite vrednosti s date su u Tabeli 5.1 gde δ_2 predstavlja drugi momentat Y, tj. $\delta_2=E[\,Y^2]$.

Tabela 5.1 Eksremne raspodele iz (5.30), kada su poznata dva momenta

s	$M^{(\mu,\sigma)}$	$W^{(\mu,\sigma)}(s)-M^{(\mu,\sigma)}(s)$
$0<s<\mu$	0	$\dfrac{\sigma^2}{(s-\mu)^2+\sigma^2}$
$\mu<s<\dfrac{\delta^2}{\mu}$	$\dfrac{s-\mu}{s}$	$\dfrac{\mu}{s}$
$s>\dfrac{\delta^2}{\mu}$	$\dfrac{(s-\mu)^2}{(s-\mu)^2+\sigma^2}$	$\dfrac{\sigma^2}{(s-\mu)^2+\sigma^2}$

Ukoliko nam je pored momenata poznato da postoji i gornja granica b za Y, tj. $\Pr[Y \leq b] = 1$, ekstremne raspodele iz (5.30) možemo modifikovati za taj faktor, tj.

$$M^{(\mu,\sigma,b)}(s) \leq F_Y(s) \leq W^{(\mu,\sigma,b)}(s) \tag{5.31}$$

za svako $s \geq 0$. Pregled ovih izraza dat je u Tabeli 5.2.

Tabela 5.2 Ekstremne raspodele iz (5.31), kada su poznata dva momenta i gornja granica

s	$M^{(\mu,\sigma,b)}(s)$	$W^{(\mu,\sigma,b)}(s)-M^{(\mu,\sigma,b)}(s)$
$0<s<\mu-\dfrac{\sigma^2}{b-\mu}$	0	$\dfrac{\sigma^2}{(s-\mu)^2+\sigma^2}$
$\mu-\dfrac{\sigma^2}{b-\mu}<s<\dfrac{\delta_2}{\mu}$	$\dfrac{\sigma^2+(\mu-b)(\mu-s)}{sb}$	$\dfrac{\sigma^2+\mu(\mu-b)}{s(s-b)}$
$s>\dfrac{\delta^2}{\mu}$	$\dfrac{(s-\mu)^2}{(s-\mu)^2+\sigma^2}$	$\dfrac{\sigma^2}{(s-\mu)^2+\sigma^2}$

Ako nam je osim dva momenta poznat i koeficijent asimetrije, moguće je odrediti uže granice tako da

$$M^{(\mu,\sigma,\gamma)}(s)\leq F_Y(s)\leq W^{(\mu,\sigma,\gamma)}(s) \tag{5.32}$$

važi za svako $s \geq 0$. Izrazi ekstremnih granica dati su u Tabeli 5.3 pri čemu su korišćene sledeće oznake: Sa δ_3 označen je koeficijent asimetrije Y, tj. $\delta_3 = E[Y^3]$,

$$\beta_1(s)=\frac{\gamma+3\sigma^2+\mu^3-s\delta_2}{\delta_2-s\mu}, \quad \beta_2(s)=\frac{\delta_2-s\mu}{\mu-s}$$

$$\alpha_\pm=\frac{\delta_3-\mu\delta_2\pm\sqrt{(\delta_3-\mu\delta_2)^2-4\sigma^2\left(\mu\delta_3-\delta_2^2\right)}}{2\sigma^2}$$

Tabela 5.3 Eksremne raspodele iz (5.32), kada su poznata tri momenta

s	$M^{(\mu,\sigma,\gamma)}(s)$	$W^{(\mu,\sigma,\gamma)}(s)-M^{(\mu,\sigma,\gamma)}(s)$
$0<s<\alpha_-$	0	$\dfrac{\mu-\beta_2(s)}{s-\beta_2(s)}$
$\alpha_-<s<\dfrac{\delta_2}{\mu}$	$\dfrac{\sigma^2+(\mu-s)(\mu-\beta_1(s))}{s\beta_1(s)}$	$\dfrac{\sigma^2+(\mu-\beta_1(s))\mu}{s(s-\beta_1(s))}$
$\dfrac{\delta_2}{\mu}<s<\alpha_+$	$\dfrac{\mu-s}{\beta_2(s)-s}$	$\dfrac{\mu-\beta_2(s)}{s-\beta_2(s)}$
$s>\alpha_+$	$\dfrac{\sigma^2+(\mu-s)(\mu-\beta_1(s))}{s\beta_1(s)}+\dfrac{\sigma^2+(\mu-s)\mu}{(\beta_1(s)-s)\beta_1(s)}$	$\dfrac{\sigma^2+(\mu-\beta_1(s))\mu}{s(s-\beta_1(s))}$

Kao i u slučaju (5.31) kada je poznata gornja granica b od Y, eksrtemne raspodele moguće je modifikovati tako da

$$M^{(\mu,\sigma,\gamma,b)}(s)\leq F_Y(s)\leq W^{(\mu,\sigma,\gamma,b)}(s) \tag{5.33}$$

važi za svako $s \geq 0$. Ektremne raspodele u ovom slučaju date su u Tabeli 5.4, pri čemu su korišćene sledeće oznake:

$$\zeta=\frac{\gamma+3\sigma^2+\mu^3-b\delta_2}{\delta_2-b\mu},\quad \beta_2^*(s)=\frac{\gamma+3\sigma^2+\mu^3-(b+s)\delta_2+bs\mu}{\delta_2-(b+s)\mu+bs}$$

Tabela 5.4 Ekstremne raspodele iz (5.33), kada su poznata tri momenta i gornja granica

s	$M^{(\mu,\sigma,\gamma,b)}(s)$	$W^{(\mu,\sigma,\gamma,b)}(s)-M^{(\mu,\sigma,\gamma,b)}(s)$
$0 < s < \alpha_{-}$	0	$\dfrac{\sigma^2+\left(\mu-\beta_2^*(s)\right)(\mu-b)}{\left(s-\beta_2^*(s)\right)(s-b)}$
$\alpha_{-} < s < \zeta$	$\dfrac{\sigma^2+(\mu-s)\left(\mu-\beta_1(s)\right)}{s\beta_1(s)}$	$\dfrac{\sigma^2+\left(\mu-\beta_1(s)\right)\mu}{s\left(s-\beta_1(s)\right)}$
$\zeta < s < \alpha_{+}$	$\dfrac{\sigma^2+(\mu-s)(\mu-b)}{\left(\beta_2^*(s)-s\right)\left(\beta_2^*(s)-b\right)}$	$\dfrac{\sigma^2+\left(\mu-\beta_2^*(s)\right)(\mu-b)}{\left(s-\beta_2^*(s)\right)(s-b)}$
$s > \alpha_{+}$	$\dfrac{\sigma^2+(\mu-s)\left(\mu-\beta_1(s)\right)}{s\beta_1(s)}+\dfrac{\sigma^2+(\mu-s)\mu}{\left(\beta_1(s)-s\right)\beta_1(s)}$	$\dfrac{\sigma^2+\left(\mu-\beta_1(s)\right)\mu}{s\left(s-\beta_1(s)\right)}$

Neka su μ_i, σ_i, i γ_i očekivanje, standardna devijacija i koeficijent asimetrije odgovarajuće funkcije raspodele F_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Na osnovu Tabela 5.1 i 5.3 vidimo da važi

$$M_i(s) \le F_i(s) \le W_i(s), \text{ za } i = 1, 2, \ldots, n, \tag{5.34}$$

pri čemu $M_i(W_i)$ uzimamo umesto $M^{(\mu_i,\sigma_i)}$ ili $M^{(\mu_i,\sigma_i,\gamma_i)}$ ($W^{(\mu_i,\sigma_i)}$ ili $W^{(\mu_i,\sigma_i,\gamma_i)}$). Ako postoje b_i tako da $F_i(b_i) = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, tada (5.34) postaje

$$M_i^{(b_i)}(s) \le F_i(s) \le W_i^{(b_i)}(s), \text{ za } i = 1, 2, \ldots, n \tag{5.35}$$

gde $M_i^{(b_i)}(W_i^{(b_i)})$ predstavlja ili $M^{(\mu_i,\sigma_i,b_i)}$ ili $M^{(\mu_i,\sigma_i,\gamma_i,b_i)}$ ($W^{(\mu_i,\sigma_i,b_i)}$ ili $W^{(\mu_i,\sigma_i,\gamma_i,b_i)}$), $i = 1, 2, \ldots, n$. Tada važi

$$\widetilde{F}_{\min}(s) \le F_S(s) \le \widetilde{F}_{\max}(s) \quad \text{za sve } s \ge 0, \tag{5.36}$$

gde je za $s \in \mathbb{R}$,

$$\widetilde{F}_{\min}(s) = \sup_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\sum(s)} \max\left\{\sum_{i=1}^{n}\lim_{k\to\infty} M_i\left(x_i - \frac{1}{k}\right) - (n-1), 0\right\},$$

i

$$\widetilde{F}_{\max}(s) = \inf_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\sum(s)} \min\left\{\sum_{i=1}^{n} W_i(x_i), 1\right\}.$$

Naravno, kada postoje b_i takvi da važi $F_i(b_i)=1$, $i=1,2,\ldots,n$, u izrazima za $\widetilde{F}_{\min}$ i $\widetilde{F}_{\max}$, M_i i W_i zameljujemo sa $M_i^{(b_i)}$ i $W_i^{(b_i)}$, respektivno. Ako su rizici X_i POD, tada (5.36) važi sa sledećim "popravljenim" granicama:

$$\widetilde{F}_{\min}(s) = \sup_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\sum(s)} \left\{\prod_{i=1}^{n} M_i(x_i)\right\}$$

i

$$\widetilde{F}_{\max}(s) = 1 - \sup_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\sum(s)} \left\{\prod_{i=1}^{n}\left(1 - W_i(x_i)\right)\right\}.$$

5.5 PRIMENE U FINANSIJAMA

5.5.1 STOHASTIČKE GRANICE SADAŠNJIH VREDNOSTI

Neka je V_k sadašnja vrednost u trenutnku 0 iznosa α_k uplaćenih u trenucima k, k = 1, 2,.... Označimo sa F_k funkciju raspodele V_k. Stohastička diskontovana vrednost u trenutku 0 uplata α_t izvršenih u trenucima t = 1, 2,...,n data je sa

$$Z_n = V_1 + V_2 + \ldots + V_n. \tag{5.37}$$

Posmatrajmo, na primer, osiguravajuću kompaniju koja se suočava sa plaćanjima α_t u trenucima t = 1, 2,...,n; Sadašnja vrednost ovih n determinističkih plaćanja data je sa (5.37).

Iznosi V_i koji figurišu u (5.37) očigledno su u korelaciji, tako da uobičajena pretpostavka o njihovoj nezavisnosti nije primenljiva u relanosti. Zato nam je za tačan izraz funkcije raspodele Z_n potrebno poznavanje zajedničke raspodele slučajnog vektora $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$, koja nam često nije dostupna. *Goovaerts*, *Dhaene* i *De Schepper* (2000) su predložili da se ovaj problem prevaziđe aproksimiranjem Z_n sa $\tilde{Z}_n$

$$\tilde{Z}_n = F_1^{-1}(U) + F_2^{-1}(U) + \ldots F_n^{-1}(U),$$

gde $U : \mathcal{U}(0,1)$ a F_i^{-1} su kvantil funkcije odgovarajućih funkcija raspodele F_i. Očigledno važi $E[Z_n] = E[\tilde{Z}_n]$ i na osnovu teoreme 4.4.2 i posledice 4.4.5 znamo da je $Z_n \preceq_{\mathrm{SL},=} \tilde{Z}_n$.

S obzirom da je Z_n manje od $\tilde{Z}_n$ u konveksnom smislu, aproksimacija $\tilde{Z}_n$ se smatra manje poželjnom donosiocima odluka koji imaju manju toleranciju rizika. Osim toga, funkcija raspodele $\tilde{Z}_n$ data je u eksplicitnom obliku i vrlo je "jednostavna za rukovanje".

Pokušajmo da odredimo donje i gornje granice za Z_n u $\preceq_{ST}$ smislu, pomoću metoda opisanog ranije u ovom poglavlju.

5.5.2 Stohastički anuiteti

Neka je δ_s kontinuirana kamatna stopa u trenutku s i neka funkcija Y_t predstavlja zarađenu kamatu do trenutka t, tj.

$$Y_t = \int_0^t \delta_s ds.$$

Slučajna sadašnja vrednost (u trenutku 0) isplate jedne novčane jedinice u trenutku t data je pomoću diskontnog faktora $e^{-Y_t}, t \geq 0.$ Dakle,

$$V_t = e^{-Y_t}, t \geq 0.$$

Postoje dva osnovna pristupa modeliranja „kamatne slučajnosti". U prvom modeliramo Y_t a drugi predstavlja modeliranje δ_s. Kod prvog pristupa posmatramo Y_t kao sumu determinističkog drifta nagiba δ i volatilnost koja je opisana *Wienerovim* procesom, tj.

$$Y_t = \delta t + \sigma W_t,\ t \in \mathbb{R}^+ \tag{5.38}$$

gde je σ nenegativna konstanta a $\{W_t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ je standardno Braunovo kretanje. U ovom slučaju V_t ima lognormalnu raspodelu sa parametrima - δt i $\sigma^2 t$. Diskontovani novčani tok Z_n dat je u obliku

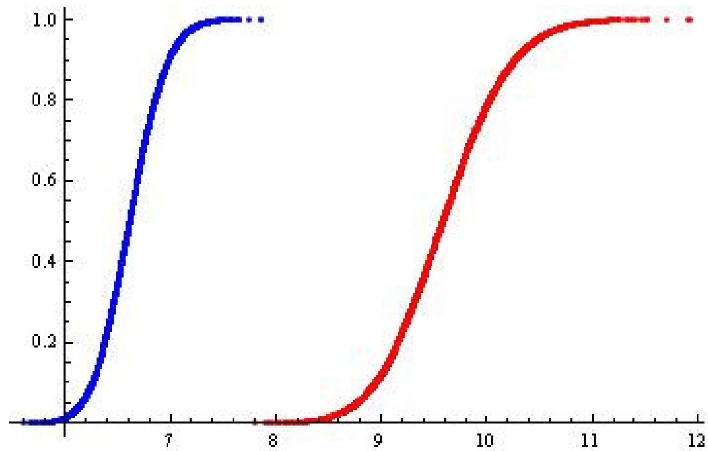
$$Z_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{-\delta i - X_i}$$

pri čemu $X_i : \mathcal{N}(0, i\sigma^2)$ a δ je očekivana kontinuirana kamatna stopa. Konveksno gornje ograničenje $\tilde{Z}_n$ za Z_n dato je sa

$$\tilde{Z}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{-\delta i - \sigma\sqrt{i}\Phi^{-1}(U)}\ , \tag{5.39}$$

gde je Φ funkcija raspodele standardizovane normalne slučajne promenljive a $U : \mathcal{U}(0,1)$.

Na sledećem grafiku data je funkcija raspodele slučajne promenljive (5.39) za n = 10 (levo) i n = 20 (desno) koja je prikazana i na sledećim slikama sa odgovarajućim granicama.



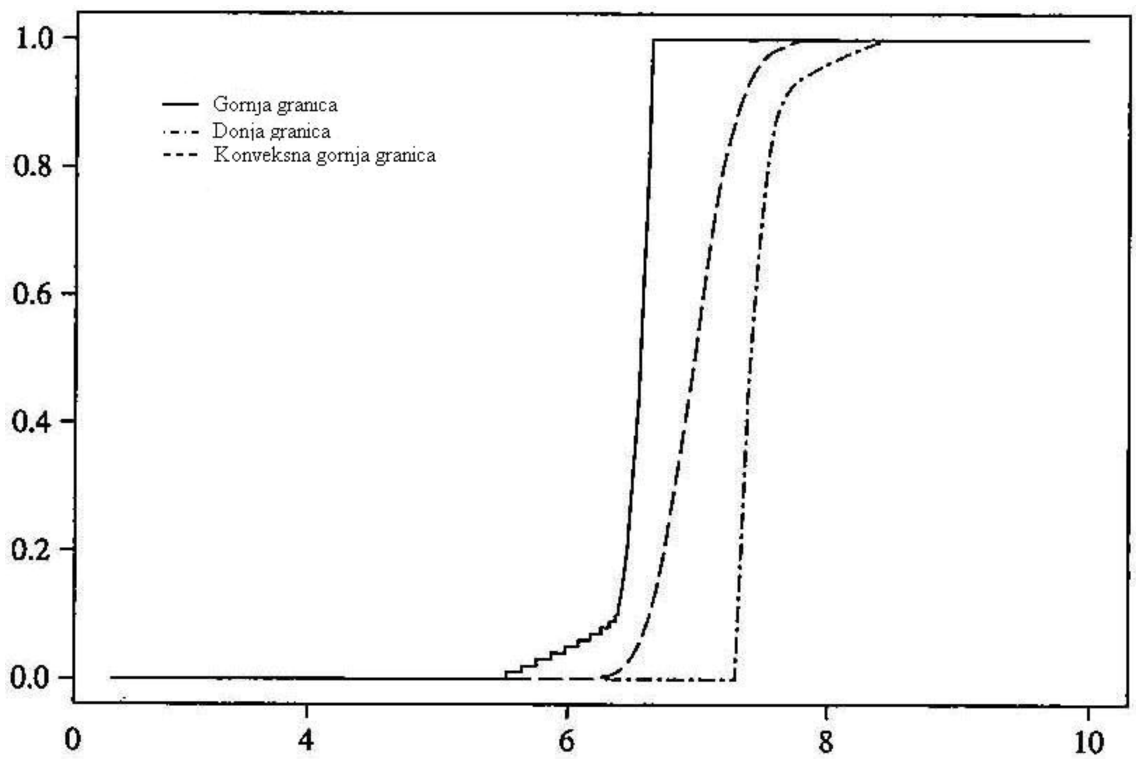
Grafik 1

Funkciju preživljavanja za $\tilde{Z}_n$ dobijamo iz

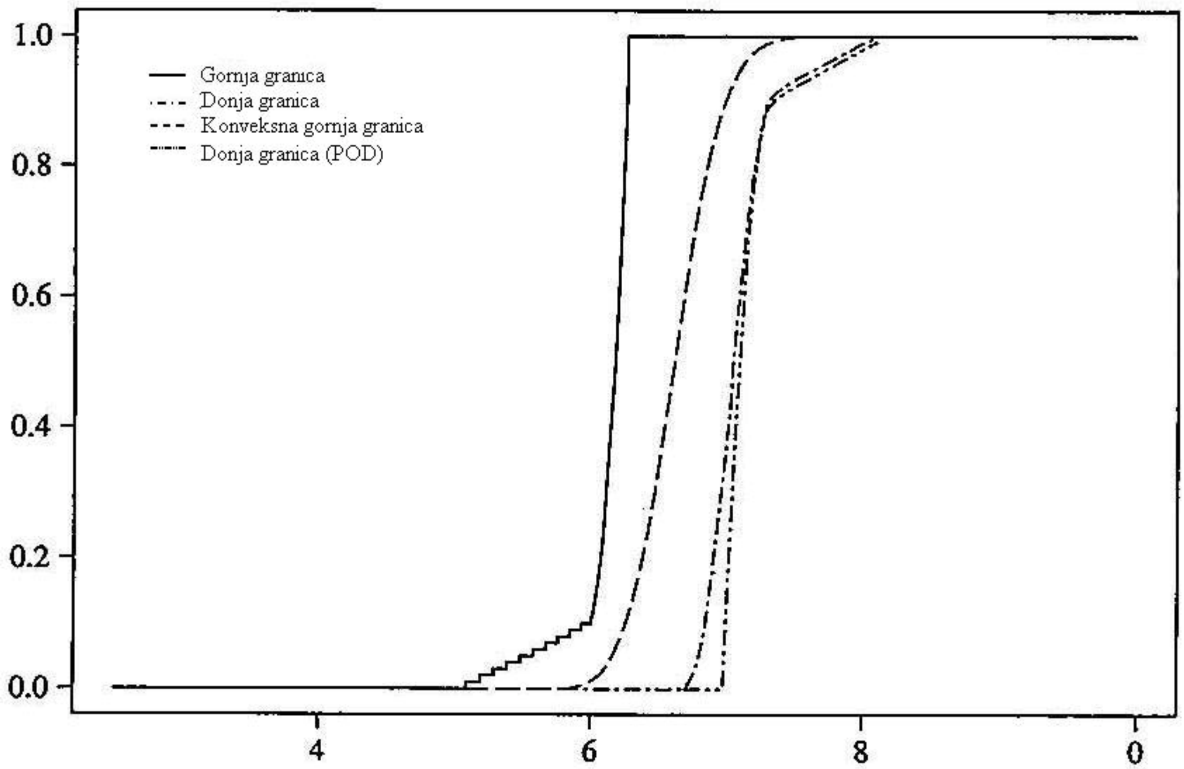
$$\Pr[\tilde{Z}_n > x] = 1 - F_{\tilde{Z}_n}(x) = \Phi(v_x)$$

gde je v_x rešenje jednačine

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \,\mathrm{e}^{-\delta i - \sigma\sqrt{i}\sigma v_x} = x.$$

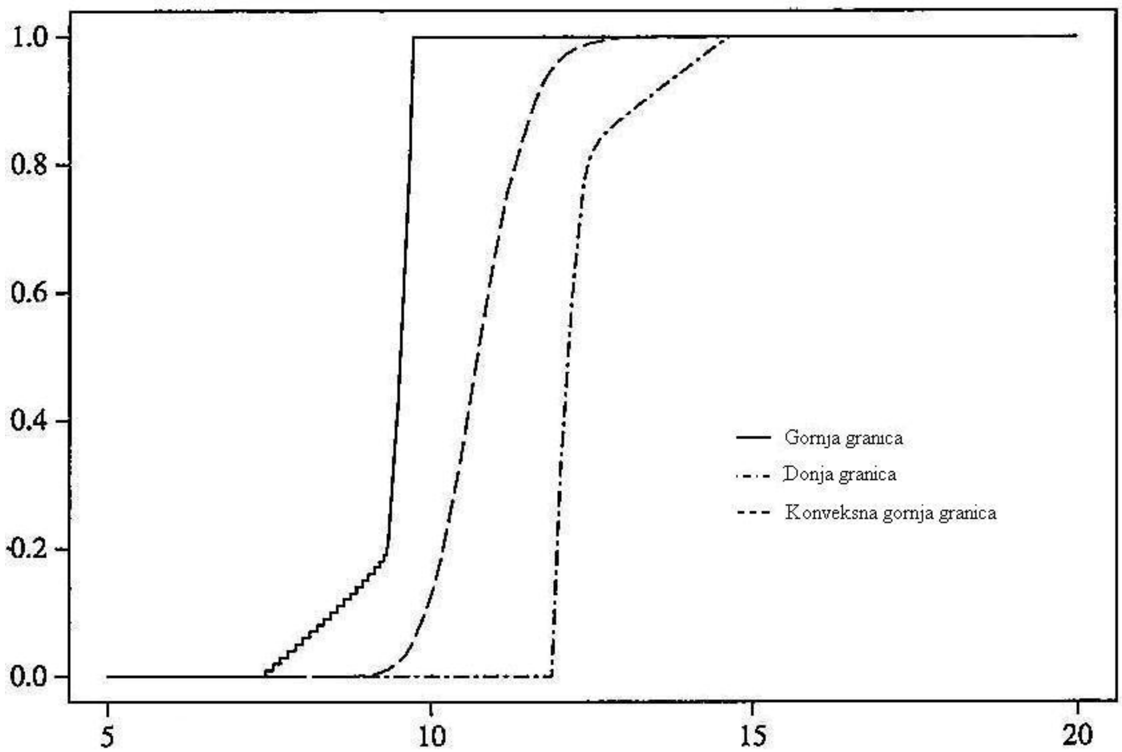


Slika 5.2 Grafik granica iz teoreme 5.4.13 i funkcija raspodele $\tilde{Z}_{10}$ za (5.38) sa δ = 0.08 i σ = 0.02

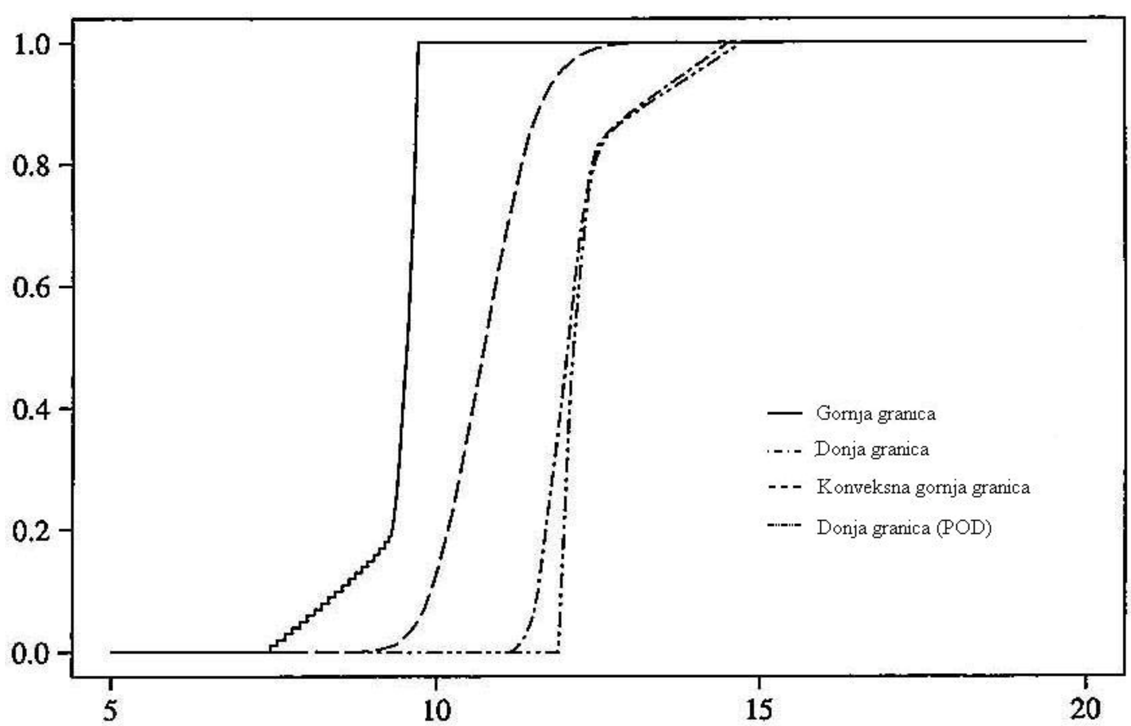


Slika 5.3 Grafik granica (5.23) i funkcija raspodele $\tilde{Z}_{10}$ za (5.38) sa δ = 0.08 i σ = 0.02

Slika 5.2 prikazuje funkcije $F_{\min}$ i $F_{\max}$ iz teoreme 5.4.13. Između njih je aproksimacija $F_{\tilde{Z}_n}$ nepoznate funkcije F_{Z_n} za $n = 10$, $\delta = 0.08$ i $\sigma = 0.02$. Na slici 5.4 prikazane su iste funkcije za $n = 20$. Upoređujući funkciju raspodele konveksne aproksimacije (5.39) sa stohastičkim granicama iz teoreme 5.4.13, uočavamo, na osnovu slika 5.2 i 5.4, da (5.39) leži u samom centru dopustivog prostora ograničenog sa $F_{\min}$ i $F_{\max}$. Ovo nam ukazuje na činjenicu da je (5.39) dobar izbor. Na slikama 5.3 i 5.5, pretpostavili smo da su V_i POD i izračunali smo popravljene granice date u teoremi 5.4.12. Primetimo da je ustvari, samo donja granica popravljena. Zaista, obe granice raspodele sume slučajnih promenljivih bolje su u slučaju kada su skupovi svih mogućih ishoda datih slučajnih promenljivih oblika $[a_i, b_i]$ pri čemu važi $-\infty < a_i < b_i < +\infty$. Ako je b_i jednako $+\infty$, pod pretpostavkom POD biće poboljšana samo donja granica. U navedenom primeru date slučajne promenljive su lognormalne sa skupom svih mogućih ishoda u obliku $[0, +\infty)$.



Slika 5.4 Grafik granica iz teoreme 5.4.13 i funkcija raspodele $\tilde{Z}_{20}$ za (5.38) sa δ = 0.08 i σ = 0.02



Slika 5.5 Grafik granica (5.23) i funkcija raspodele $\tilde{Z}_{20}$ za (5.38) sa δ = 0.08 i σ = 0.02

Drugi pristup u modeliranju kamatne slučajnosti je modeliranje δ_s . Na primer, kamatna stopa može biti definisana sledećom diferencijalnom jednačinom

$$d\delta_t = -\alpha(\delta_t - \delta)dt + \sigma dW_t \tag{5.40}$$

gde su α i σ nenegativne konstante, a početni uslovi dati sa $\delta_0 = \delta \geq 0$. Dakle $\{\delta_t, t \geq 0\}$ je jedan *Ornstein – Uhlenbeckov* proces. Funkcija akumulirane kamate $\{Y_t, t \geq 0\}$ je stoga *Gaussov* proces sa funkcijom očekivanja

$$t \mapsto \mu_t = \delta t + (\delta_0 - \delta)\frac{1-\exp(-\alpha t)}{\alpha}$$

i autokovarijansom $(s,t) \mapsto \mathbb{C}[Y_s, Y_t] \equiv \omega(s,t)$, gde je

$$\omega(s,t) = \frac{\sigma^2}{\alpha^2}\min(s,t) + \frac{\sigma^2}{2\alpha^3}\{-2 + 2\,\mathrm{e}^{-\alpha s} + 2\,\mathrm{e}^{-\alpha t} - \mathrm{e}^{-\alpha(t-s)} - \mathrm{e}^{-\alpha(t+s)}\};$$

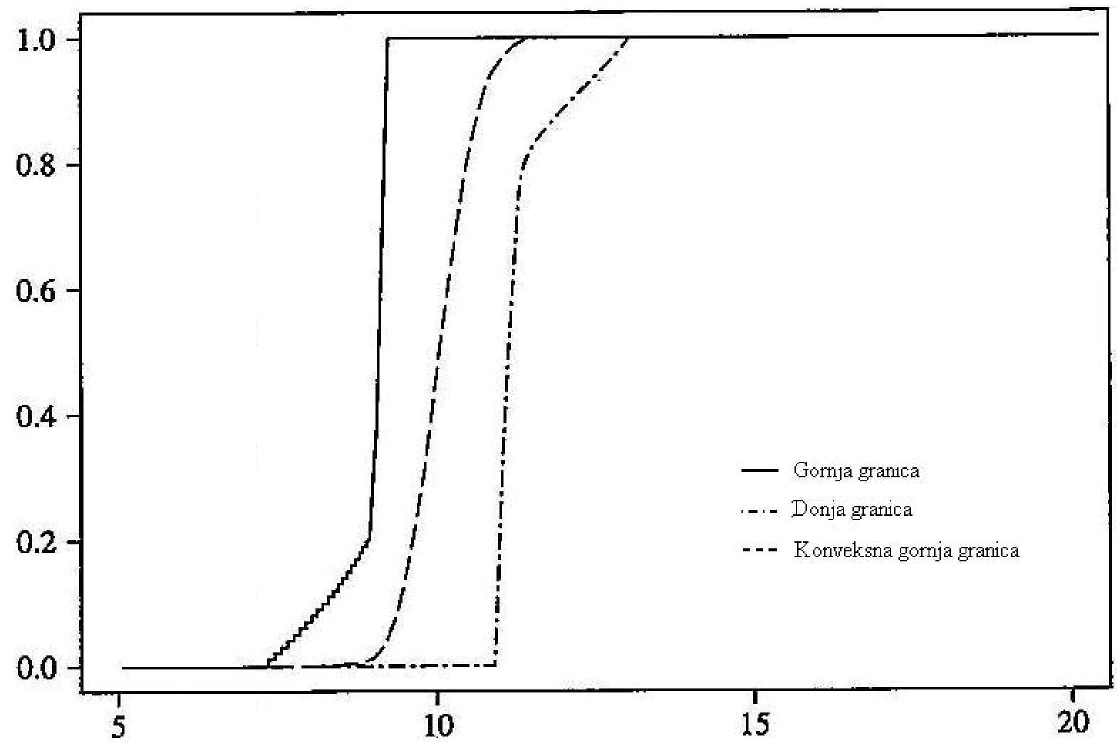
Tada je

$$Z_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{-Y_i},$$

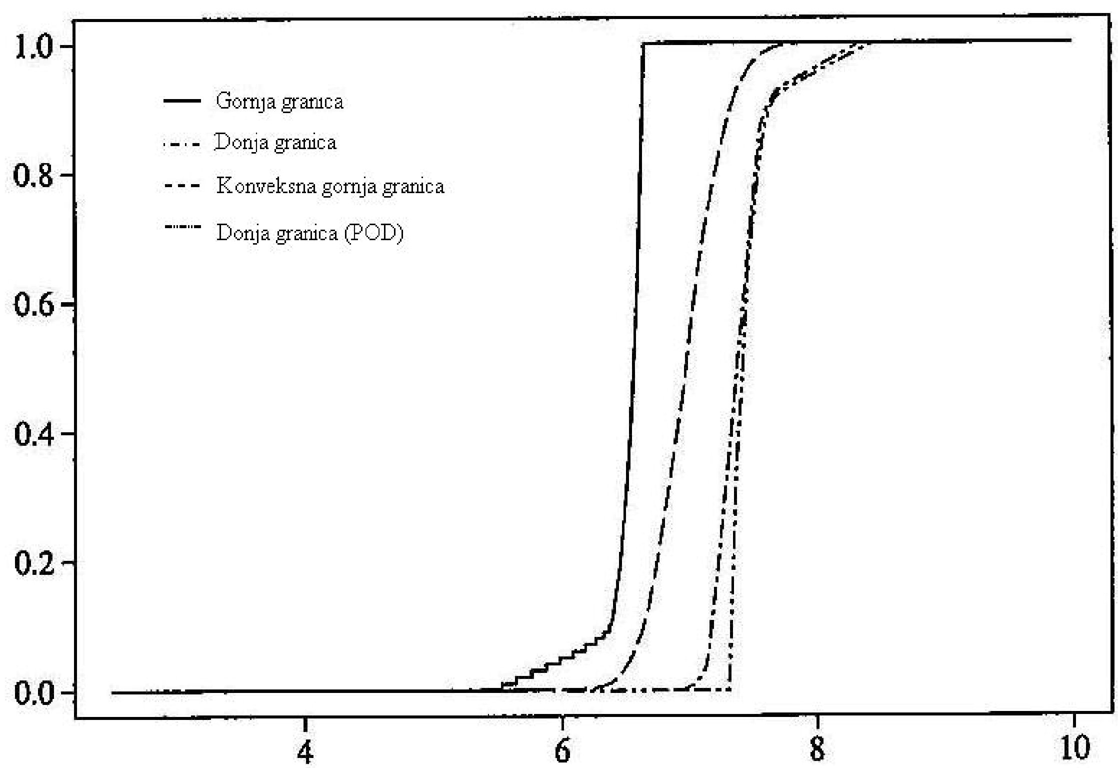
gde je Y_i normalna slučajna promenljiva sa očekivanjem μ_i i varijansom $\omega(i,i)$. U ovom slučaju konveksna gornja granica $\tilde{Z}_n$ dobija se kao

$$\tilde{Z}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{-\mu_i - \sqrt{\omega(i,i)}\Phi^{-1}(U)}$$

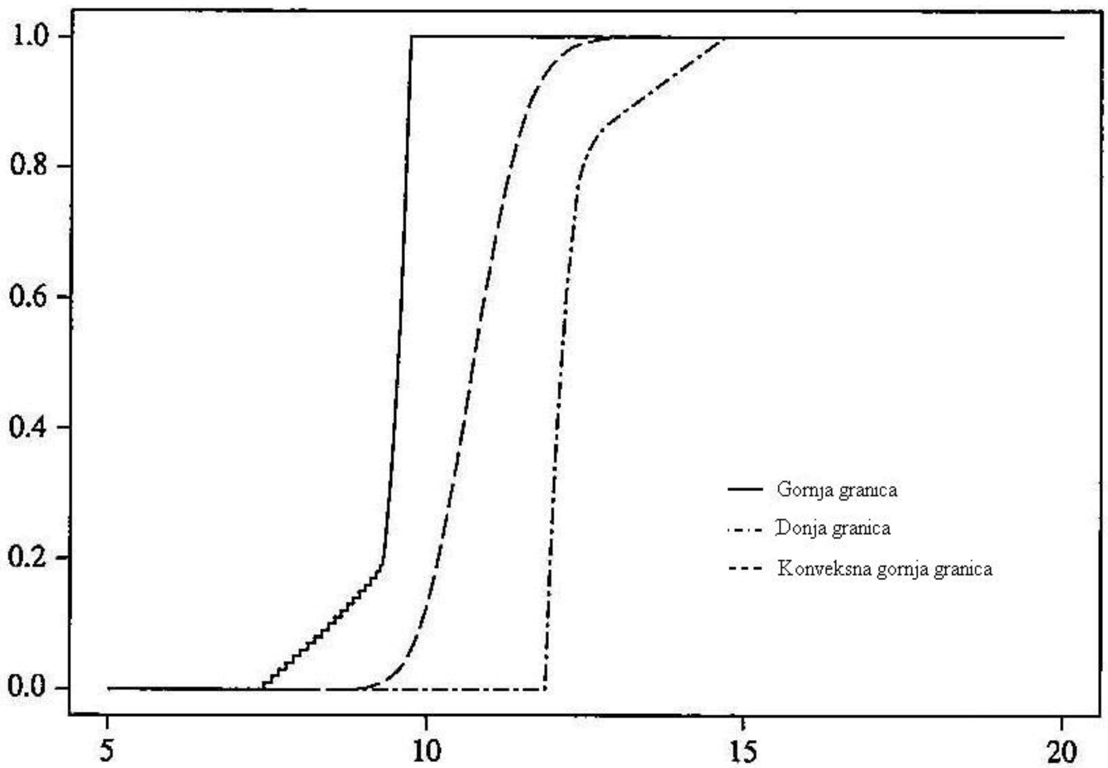
gde $U : \mathcal{U}(0,1)$. Slika 5.6 pokazuje granice kumulativne funkcije raspodele Z_{10} iz (5.40) pri čemu je $\delta = 0.06$, $\delta_0 = 0.08$, $\alpha = 0.3$ i $\sigma = 0.01$, kao i kumulativnu funkciju raspodele za $\widetilde{Z}_{10}$. Slika 5.8 pokazuje iste granice za Z_{20}. Zaključci koji su spomenuti za slike 5.2 i 5.4 važe i u ovom slučaju. Takođe POD pretpostavka nas i ovde dovodi do umerenog poboljšanja što je prikazano na slikama 5.7 i 5.8.



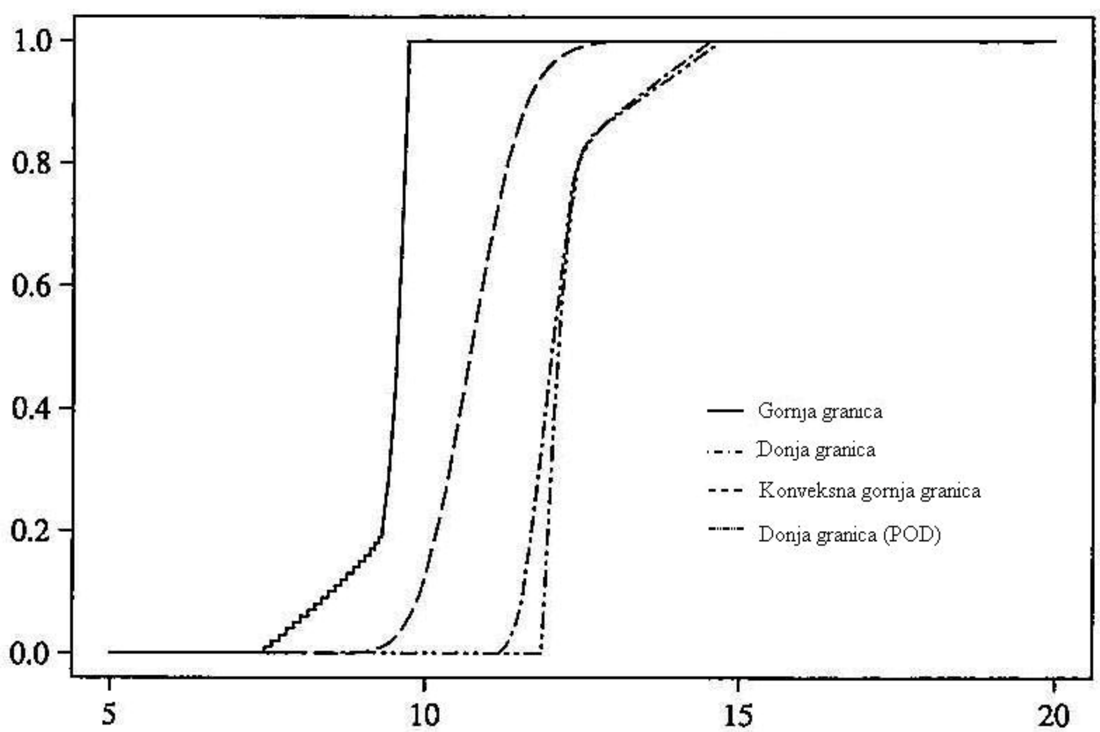
Slika 5.6 Grafik granica iz teoreme 5.4.13 i funkcija raspodele $\tilde{Z}_{10}$ za (5.40) sa $\delta = 0.06$, $\delta_0 = 0.08$ i $\alpha = 0.3$ i $\sigma = 0.01$



Slika 5.7 Grafik granica (5.23) i funkcija raspodele $\tilde{Z}_{10}$ za (5.40) sa $\delta = 0.06$, $\delta_0 = 0.08$, $\alpha = 0.3$ i $\sigma = 0.01$



Slika 5.8 Grafik granica iz teoreme 5.4.13 i funkcija raspodele $\tilde{Z}_{20}$ za (5.40) sa $\delta = 0.06$, $\delta_0 = 0.08$ i $\alpha = 0.3$ i $\sigma = 0.01$



Slika 5.9 Grafik granica (5.23) i funkcija raspodele $\tilde{Z}_{20}$ za (5.40) sa $\delta = 0.06$, $\delta_0 = 0.08$, $\alpha = 0.3$ i $\sigma = 0.01$

5.5.3 ŽIVOTNA OSIGURANJA

Posmatrajmo privremeno rentno osiguranje[12] osiguranika starosti x sa korigovanim budućim trajanjem života K, pri čemu koristimo sledeću aktuarsku notaciju

- $\Pr[k < K \leq k+1] = {}_{k|}q_x$ - verovatnoća da lice starosti x umre između k – te i k + 1 – ve godine
- $\Pr[K > n] = {}_n p_x$ - verovatnoća da lice starosti x živi više od n godina

Pretpostavimo još da je K nezavisno od slučajnih diskontnih faktora V_1, V_2, V_3,…Neto premija ove polise za jedinicu osigurane sume data je sa

$$a_{x:\overline{n}|} = E[a^0_{x:\overline{n}|}],$$

uz

$$a^0_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} 0 & \text{ako } K = 0, \\ Z_K, & \text{ako } K = 1, ..., n-1, \\ Z_n, & \text{ako } K \geq n, \end{cases}$$

gde je Z definisano kao u (5.37). Drugim rečima, slučajna promenljiva $a^0_{x:\overline{n}|}$ predstavlja buduća plaćanja osiguravajuće kompanije. Dakle, ukoliko osiguranik umre odmah po zaključenju ugovora, osiguravajuća kompanija ne isplaćuje ništa, što je jedan od vidova zaštite osiguravajućih kompanija od negativne selekcije, tj. pokušaja osiguranika koji npr. pate od neke teške bolesti i kojima je smrtni ishod u bliskoj budućnosti izvestan događaj, da kupe osiguranje. Ukoliko osiguranik doživi između 1 i n – 1 godina, biće mu isplaćen iznos Z_K koji predstavlja sadašnju vrednost rentnih isplata tokom ovog perioda. Ukoliko osiguranik nadživi trajanje osiguranja, ukupan iznos koji mu je isplaćen predstavljen je sa Z_n što je istovremeno i maksimalni mogući benefit koji on može da ostvari.

Definisanjem određenih uslova na K, neto jediniča premija za ovu polisu je

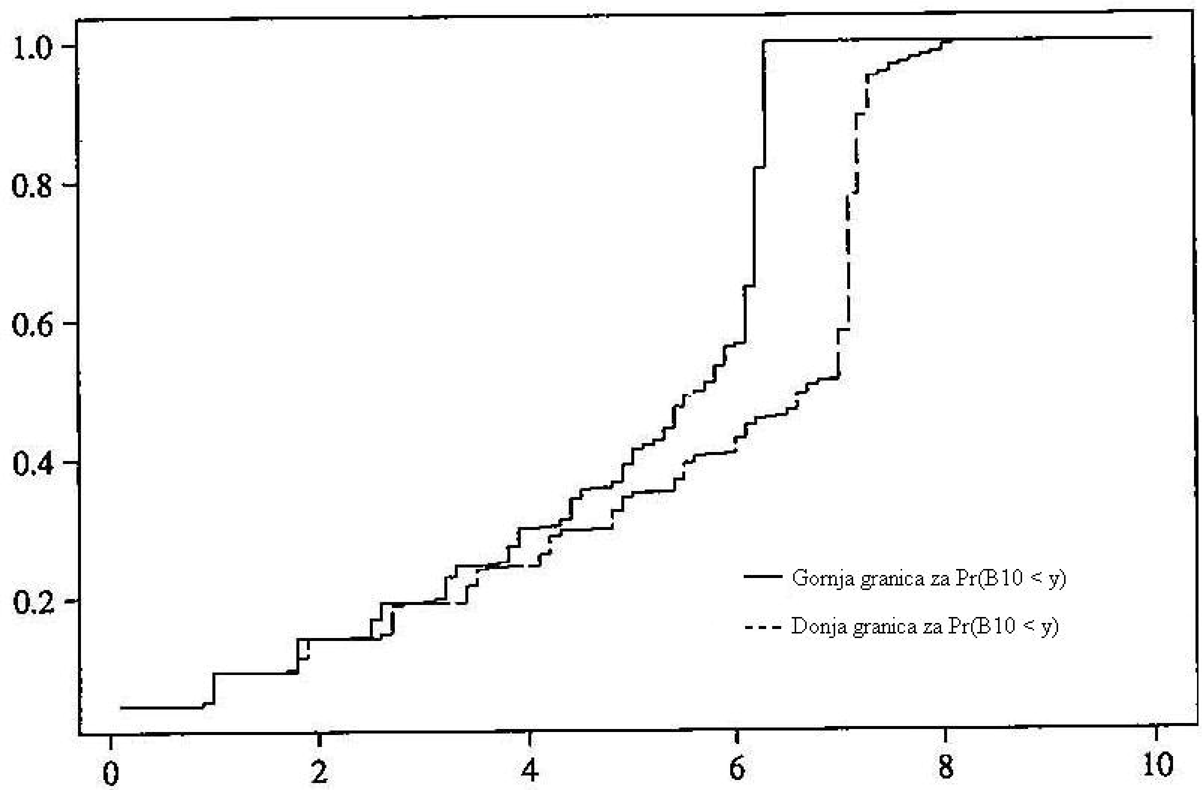
$$a_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n-1} E[Z_k]_{k|}q_x + E[Z_n]_n p_x$$

Kumulativna funkcija raspodele od $a^0_{x:\overline{n}|}$ takođe se dobija definisanjem uslova za K na sledeći način:

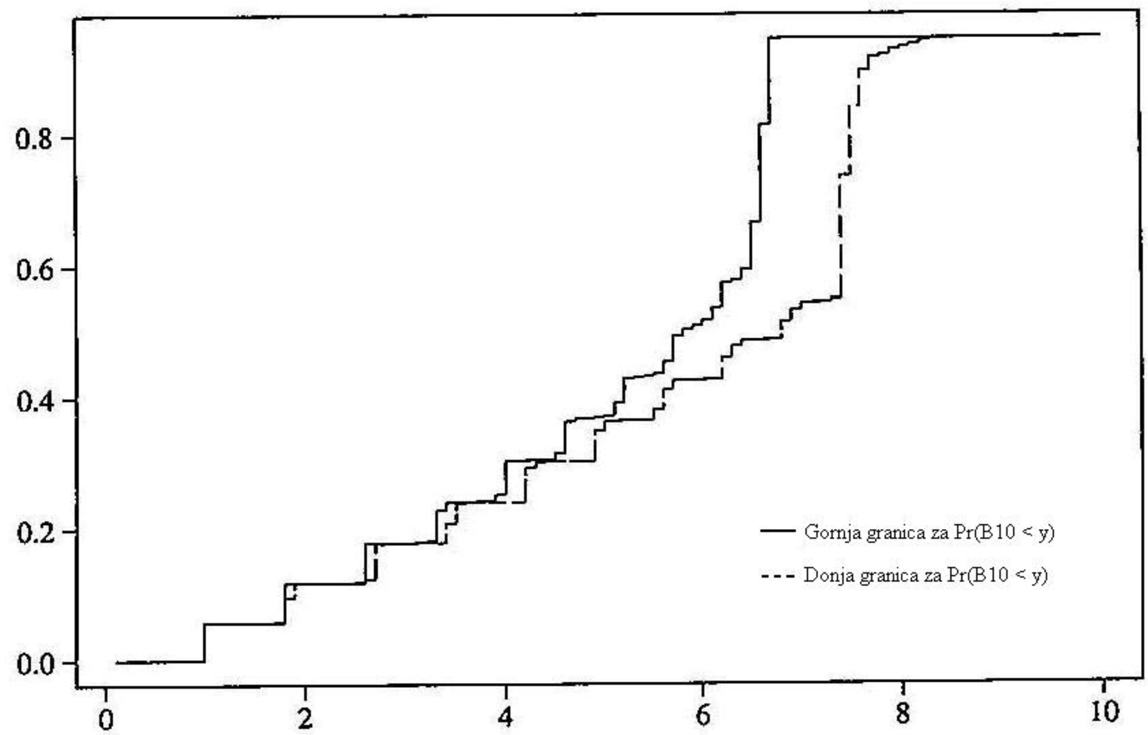
[12] Renta koja se isplaćuje najviše n puta pod uslovom da je osiguranik živ za sve vreme njenog primanja.

$$\Pr[a^0_{x:\overline{n}|} \le y] = q_x + \sum_{k=1}^{n-1} \Pr[Z_k \le y]_{k|}q_x + \Pr[Z_n \le y]_n\, p_x.$$

Ne postoji eksplicitni izraz za $\Pr[a^0_{x:\overline{n}|} \le y]$, ali koristeći gore opisan pristup moguće je naći stohastički dominantne granice za $a^0_{x:\overline{n}|}$. Slika 5.10 prikazuje granice za $\Pr[a^0_{x:\overline{n}|} \le y]$ za lice starosti 45 i model (8.38) sa $\delta = 0.06$ i $\sigma = 0.02$. Ista stvar, za model (5.40) predstavljena je na slici 5.11 sa $\delta = 0.06$, $\delta_0 = 0.08$, $\alpha = 0.3$ i $\sigma = 0.01$.



Slika 5.10 Granice za $\Pr[a^0_{x:\overline{10}|} \le y]$ za $x = 45$ i (5.38) sa $\delta = 0.08$ i $\sigma = 0.02$



Slika 5.11 Granice za $\Pr[a^{0}_{x:\overline{10|}} \leq y]$ za $x = 45$ i (5.40) sa $\delta = 0.06$, $\delta_0 = 0.08$, $\alpha = 0.3$ i $\sigma = 0.02$

Za ove numeričke primere korišćene su standradne tablice smrtnosti (*Makehamov* model). Granice na slikama 5.10 i 5.11 daju dobar uvid u opasnost sadržanu u stohastičkoj kamatnoj stopi kombinovanoj sa stohastičkom smrtnosti. Napomenimo još i to da se konveksna aproksimacija *Goovaertsa*, *Dheaenea* i *De Scheppera* (2000) može primeniti i ovom slučaju.

D O D A T A K

Kod programa u programskom jeziku Mathematica korišćen za grafik u glavi 5

```
N1=10000;
U1=RandomReal[{0,1},N1];
s1=InverseCDF[NormalDistribution[0,1],U1];

Z1= Sum[Exp[-0.08*i-0.02*Sqrt[i]*s1],{i,10}];
Z2= Sum[Exp[-0.08*i-0.02*Sqrt[i]*s1],{i,20}];
qForm[data_]:=Sort[Transpose[{Range[Length[data]]/Length[data],Sort[data]}]]
raspodela1=qForm[Z1];
raspodela2=qForm[Z2];

For[i=1,i≤N1,i++,{a=raspodela1[[i,1]],raspodela1[[i,1]]=raspodela1[[i,2]],raspodela1[[i,2]]=
a}];
For[i=1,i≤N1,i++,{c=raspodela2[[i,1]],raspodela2[[i,1]]=raspodela2[[i,2]],raspodela2[[i,2]]=
c}];


ListPlot[{raspodela1,raspodela2},PlotStyle→{Blue,Red}]
```

L I T E R A T U R A

[1] Borch K., *Utility concept applied to theory of insurance,* Astin Bulletin1, 245 – 255, 1961.

[2] Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M., Kaas, R., *Actuarial theory for dependent risks,* John Wiley, 2005.

[3] Denuit, M., Genest C., Marceau, E., *Stochastic bounds on sums of dependent risks*, Institut de statistique et de recherche opérationnelle, Université libre de Bruxelles, Case postale 210, Campus de la plaine, Boulevard du triomphe, 1050 Bruxelles, Belgium, 1999.

[4] Gooverts, M.J., Kaas, R., Van Heerwarareden, A.E., and Bauwelinekx, T. *Effective Actuarial Methods,* North – Holland, Amsterdam, New York, Oxford, Tokyo, 1990.

[5] Gooverts, M.J., Dhaene, J., and De Schepper A., *Stochastic upper bounds for present value functions,* Journal of Risk and Insurance 67, 1 – 14, 2003.

[6] Gooverts, M.J., Kaas, R., *Some problems in actuarial financeinvolving sums of dependent risks,* Universiteit van Amsterdam, FEE, Afd. KE, Roetersstraat 11, 1018 WB, 2002

[7] Joe, H., *Multivariate concordance,* Journal of Multivariate Ananlysis 35, 12 – 30, 1990.

[8] Lehmann, E.L., *Ordered families of distribution ,* Annals of Mathematical Statistics 26, 399 – 419, 1955.

[9] Marshall, A.W., *Copulas, marginals, and joint distribution,* Institute of Mathematical Statistics, Hayward, CA, pp 213 – 222, 1996.

[10] Panjer, H.H., *Financial Economics,with Applications to Investments, Insurance and Pensions,* Actuarial Foundation, 1998.

[11] Rankov, M., *Primena rekurzivnih modela u aktuarstvu,* Prirodno – matematički fakultet, Novi Sad, 2008.

[12] Scarsini, M., *On measures of concordance,* Stochastica 8, 201- 218.

[13] Siniša Ostojić, *Osiguranje i upravljanje rizicima*, Data Status, Beograd, 2007.

[14] Stuart A. Klugman, Harry H. Panjer, Gordon E. Willmont, *Loss Models – from data to decision*, Wiley Interscience, 2004.

[15] www.wikipedia.org

B I O G R A F I J A

Milan Rankov rođen je 15. marta 1984. godine u Vrbasu. Završio je Osnovnu školu „Petefi Brigada” u Kuli, a potom i prirodno – matematički smer Gimnazije „Žarko Zrenjanin” u Vrbasu. Po završetku gimnazije, 2003. godine upisao je studije matematike finansija na Prirodno – matematičkom fakultetu u Novom Sadu. Diplomirao je 12. juna 2008. sa prosečnom ocenom 9,57 i stekao zvanje diplomirani matematičar – matematika finansija. Iste godine u oktobru upisao je master studije na Prirodno – matematičkom fakultetu u Novom Sadu i položio sve ispite predviđene nastavnim planom i programom. Od 04. januara 2010. zaposlen je kao aktuar u kompaniji *Neživotno osiguranje Basler a.d.o*.

Novi Sad, 28.09.2010. Milan Rankov

UNIVERZITET U NOVOM SADU

PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: *Monografska dokumentacija*

TD

Tip zapisa: *Tekstualni štampani materijal*

TZ

Vrsta rada: *Završni rad*

VR

Autor: *Milan Rankov*

AU

Mentor: *Dr Dora Seleši, docent Prirodno – matematičkog fakulteta u Novom Sadu*

MN

Naslov rada: *Aktuarski modeli za zavisne rizike*

MR

Jezik publikacije: *Srpski (latinica)*

JP

Jezik izvoda: *Srpski / Engleski*

JI

Zemlja publikovanja: *R Srbija*

ZP

Uže geografsko područje: *Vojvodina*

UGP

Godina: *2010*

GO

Izdavač: *Autorski reprint*

IZ

Mesto i adresa: *Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno - matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4*

MA

Fizički opis rada: (5, 82, 0, 4, 12, 1, 1)

(*broj poglavlja/ broj strana/ broj lit. citata/ br. tabela/ br. slika/ br. grafika/ br. priloga*)

FO

Naučna oblast: *Matematika*

NO

Naučna disciplina: *Aktuarska matematika*

ND

Ključne reči: *Rizik, zavisnost, marginalna raspodele, zajednička raspodela, Stop – loss premija, VaR, Stohastiče relacije poretka, Stohastička dominacija, Konveksni poredak, stop – loss poredak, kopula, korelacija, stohastička granica, konveksna granica*, *aktuarstvo*

PO

UDK:

Čuva se: *U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku*

ČU

Važna napomena: *nema*

VN

Izvod:

IZ

Predmet ovog završnog rada je modeliranje zavisnih rizika. Koncept rizika, zajedno sa pojmovima teorije verovatnoće, ukratko je opisan u prvom poglavlju. Na početku drugog poglavlja predstavljen je koncept mera rizika gde je naglašena ulogu VaR (Vrednost – pod - rizikom) u modernom upravljanju rizicima. Drugo poglavlje bavi se poređenjem rizika pomoću stohastičkih poredaka. Zavisnost među rizicima i mere jačinu ove zavisnosti objašnjeni su u trećem i četvrtom poglavlju. Kombinovanjem stohastičkih poredaka i teorije mere rizika sa osnovama upravljanja rizikom i stohastičkom zavisnosti, peto poglavlje definiše stohastičke granice funkcija zavisnih rizika čineći ovaj rad vodičom za upravljanje modernim finansijskim rizikom.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 07.07.2009.

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: *Dr Danijela Rajter-Ćirić, vanredni profesor Prirodno – matematičkog fakulteta u Novom Sadu*

Član: Dr Sanja Rapajić*, docent Prirodno – matematičkog fakulteta u Novom Sadu*

Član: Dr Dora Seleši, *docet Prirodno – matematičkog fakulteta u Novom Sadu, Mentor*

UNIVERSITY OF NOVI SAD

FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification umber:

INO

Document type: *Monograph type*

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents Code: *Master's thesis*

CC

Author: *Milan Rankov*

AU

Mentor: *Dr Dora Seleši, Assistant Professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad*

MN

Title: *Actuarial models for dependent risks*

TI

Language of text: *Serbian*

LT

Language of abstract: *Serbian / English*

LA

Country of publication: *Serbia*

CP

Locality of publication: *Vojvodina*

LP

Publication year: *2010*

PY

Publisher: *Author's reprint*

PU

Publ. place: Novi Sad, Department of mathematics and informatics, Faculty of Science and Mathematics, Trg Dositeja Obradovića 4

PP

Physical description: (5, 82, 0, 4, 12, 1, 1)

PD

Scientific discipline: *Actuarial mathematics*

SD

Key words: *Risk, Dependence, marginal distribution, joint distribution, stop - loss premium, VaR, Stochastic order relations, stochastic dominance, convex order, stop - loss order, copula, correlation, stochastic borders, convex borders, actuarial*

SKW

UC:

Holding data: *In library of Department of Mathematics and Informatics*

HD Note: *none*

Abstract:

AB

The subject of this mater's thesis is modeling of dependent risks. Notion of risk together with probability background is briefly described in the first chapter. At the beginning of second chapter, concept of risk measure is presented emphasizing the role of VaR (Value – at – Risk) in modern risk management. In addition, second chapter explains how to compare the danger of risks using stochastic orderings. Interaction between risks and measures of strength of their association are explained in third and fourth chapter. Combining coverage of stochastic order and risk measure theories with the basics of risk management and stochastic dependence, fifth chapter provides stochastic bounds on functions of dependent risks making this work an guide to managing modern financial risk.

Accepted by Scientific Board on: 07.07.2009.

ASB

Defended:

De

Thesis defend board:

DB

President: *Dr Danijela Rajter-Ćirić, Associate Professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad*

Member: *Dr Sanja Rapajić, Assistant Professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad*

Member: *Dr Dora Seleši, Assistant Professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, advisor*