UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU
I INFORMATIKU

# Upravljanje prihodima u avio industriji: Modeli kontrole kapaciteta i prebukiranosti

- završni rad -

Kandidat
Branka Marković

Mentor
Dr Zorana Lužanin

Novi Sad, 2014

**SADRŽAJ**

## PREDGOVOR

U ovom radu, bavićemo se matematičkim modelima koje avio kompanije koriste u praksi u cilju maksimizacije profita.

Za upravljanje prihodima možemo reći da je umetnost prodavanja prave karte pravom putniku u pravo vreme i po pravoj ceni. Upravljanje prihodima u avio industriji, nastalo je kao posledica Deregulacionog akta 1978. godine, i omogućilo avio kompanijama da koriste različite strategije kako bi maksimizirale prihod. Dve strategije koje avio kompanije intenzivno koriste u praksi, i na koje ćemo se koncentrisati u radu, su kontrola kapaciteta i prebukiranost.

Cilj kontrole kapaciteta je da odredi koliko sedišta, odnosno karti avio kompanija treba da proda određenoj putničkoj klasi uzimajući u obzir tražnje za kartama. Ograničavajući broj sedišta za ekonomsku i čuvajući za poslovnu putničku klasu koja je profitabilnija zbog više cene karte, avio kompanija može da poveća prihod.

Jedan od problema s kojim se avio kompanije suočavaju je taj da putnici sa kupljenom kartom otkažu rezervaciju ili se ne pojave na let. Stoga, u cilju kompenzacije gubitka nastalog usled nepojavljivanja putnika, avio kompanije praktikuju prebukiranje. Prebukiranje je strategija upravljanja prihodima, kojom se u cilju maksimizacije prihoda prodaje više karata nego što je raspoloživih sedišta u avionu. Ono što je zajedničko za sve ove modele prebukiranosti, je pronalaženje optimalne strategije prebukiranosti, odnosno optimalanog broja karata koji bi trebalo prodati.

Modeli koji se bave problemom upravljanja prihodima kojima ćemo se baviti u ovom radu, možemo podeliti na statičke i dinamičke modele. Zbog svoje jednostavnosti i primenljivosti na realnim podacima, statički modeli se naširoko koriste u praksi. Kod statičkog modela, dinamička priroda rezervacionog procesa, tj otkazivanje rezervacije u toku rezervacionog perioda je ignorisana. Za razliku od statičkih modela, dinamički modeli ne ignorišu dinamičku prirodu rezervacionog procesa, i pokušavaju da pronađu strategiju po kojoj buking operator odlučuje da li da prihvati ili da odbije zahtev za rezervaciju sedišta određene klase u datom trenutku. Na kraju, videćemo kako ove modele možemo numerički primeniti u upravljanju prihodima. Rad je baziran na rezultatima datim u [1], [2] i [3].

***

*Veliku zahvalnost dugujem svom mentoru, dr Zorani Lužanin, prvenstveno za stečeno znanje za vreme studija, kao i za stručne sugestije i pomoć prilikom izrade master rada.*

*Takođe, posebno bih zahvalila članovima komisije, profesorici Nataši Krejić i profesorici Dori Seleši na korisnim sugestijama.*

*Branka Marković*

# 1. UPRAVLJANJE PRIHODIMA U AVIO INDUSTRIJI

## 1.1 Pojam i karakteristike upravljanja prihodima

Avio industrija, kao i saobraćaj i hotelijerstvo, pripada grupi industija koje su ograničene fiksnim kapacitetom i kratkotrajnim rokom proizvoda. Problem sa kojim se avio kompanije svakodnevno suočavaju je kako raspodeliti fiksan broj sedišta i udovoljiti zahtevima potražnje, sa ciljem maksimizacije očekivanog prihoda.

Stoga, za upravljanje prihodima u avio industriji može se reći da je "*umetnost prodavanja prave karte pravom putniku u pravo vreme i po pravoj ceni*". Osnovne karakteristike upravljanja prihodima u avio-industriji mogu se sumirati kako sledi:

- *Relativno fiksan kapacitet.* Avion ima fiksan broj dostupnih sedišta uslovljenih ograničenošću veličine aviona; broj sedišta u avionu ne može biti povećan, odnosno smanjen.
- *Kratkotrajan rok inventara (sedišta).* Postoji krajnji rok do kog sedišta mogu biti prodata. Nakon poletanja aviona, sedišta se ne mogu prodati, i samim tim ne mogu generisati prihod.
- *Promenljivost potražnje.* Potražnja za mnogim destinacijama koje nudi avio-kompanija je sezonskog karaktera. Upravljanjem prihodima može se uticati na povećanje prihoda za vreme povećane potražnje.
- *Diferencijacija proizvoda.* U ekonomskoj klasi, iako se sedišta fizički ne razlikuju, cene sedišta se razlikuju jer su kupljena u različitim vremenskim trenucima.

Upravljanje prihodima vodi poreklo iz avio industrije. Za polaznu tačku razvoja upravljanja prihodima u avio-industriji može se reći da je Deregulacioni akt (*Airline Deregulation Act*) objavljen 1978.godine koji je doveo do ubrzane promene prilika u avio industriji. Pre deregulacije, struktura cena karti je bila relativno jednostavna i statična. Cena karte se formirala kolektivno, tako što se za cenu karte uzimao prosečan trošak leta (gorivo, plata radnika i slično) po putniku za sve avio kompanije. Avio kompanija koja je imala trošak leta po putniku koji je manji od prosečnog, nije imala pravo da ponudi kartu po nižoj ceni.

Nakon deregulacije, avio kompanije su dobile mogućnost slobodnog izbora cene karte. Takođe, po ovom aktu, novim prevoznicima je bilo omogućeno da uđu na tržište, nudeći cene karata u proseku niže za 50-70% u odnosu na vodeće prevoznike. Posledica akta je bio značajan transfer putnika osetljivih na cenu karte od vodećih prevoznika ka novim konkurentima. Međutim, velike kompanije su i dalje na svojoj strani imale prednosti koje male kompanije nisu: češće rasporede letova, veću ponudu destinacija, i afirmisano ime i reputaciju. Za mnoge poslovne putnike, takve pogodnosti su bile (i dalje jesu) znatno važnije od cene, rezultirajući manjim pomeranjima u tražnji poslovnih putnika za letovima vodećih kompanija.

Uprkos tome, vodeće kompanije su se suočavale sa sve većim kumulativnim gubicima prihoda uzrokovanim smanjivanjem tražnje regularnih putnika za njihovim letovima. Glavni problem vodećih kompanija je bio ponovno zadobijanje poverenja običnih putnika. Robert Crandall, izvršni direktor American Airlines-a u to vreme, je u mnogo čemu zaslužan za rešavanje ovog problema. Naime, on je zapazio da su neprodata sedišta u avionu već proizvedena po niskim troškovima. S obzirom da je većina troškova leta (plate, gorivo) fiksna, marginalni trošak prevoza dodatnog putnika je skoro jednak nuli.

Kao posledica deregulacije u avio industriji, upravljanje prihodima je postalo dosta kompleksnije i dinamičnije. Upravljanje prihodima možemo definisati kao strategiju avio kompanije koja treba da odluči koliko sedišta da proda i po kojoj ceni. Stoga, upravljanje prihodima uključuje sledeće strategije koje danas avio kompanije primenjuju:

- kontrola kapaciteta,
- formiranje cena karti,
- prebukiranost.

Kao posledica korićenja novih strategija, avio kompanije mogu da povećaju godišnji prihod za 4-5%, što je značajan broj s obzirom da se godišnji prihod avio kompanija kreće u rasponu od milijardu do 10 milijardi dolara.

U nastavku ćemo detaljnije definisati strategije koje avio kompanije danas koriste.

## 1.2 Kontrola kapaciteta

Cilj kontrole kapaciteta je da odredi koliko sedišta, odnosno karti avio kompanija treba da proda određenoj putničkoj klasi. Stoga, cilj je odrediti kompoziciju sedišta, odnosno koliko sedišta od ukupnog kapaciteta aviona rezervisati za poslovnu putničku klasu a koliko za ekonomsku, u slučaju dve putničke klase. Ograničavajući broj sedišta za ekonomsku i čuvajući za poslovnu putničku klasu koja je profitabilnija zbog više cene karte, avio kompanija može da poveća prihod.

U idealnom slučaju, avio kompanija bi htela da sve karte proda poslovnoj putničkoj klasi. Ali s obzirom da je moguće da tražnja za kartama poslovne klase manja od kapaciteta leta, avio kompanija nudi karte i po nižoj ceni za ekonomsku putničku klasu. Na taj način avio kompanija povećava prihod jer prazno sedište nakon poletanja aviona ne generiše prihod, dok niža cena prodate karte generiše.

Efekat kontrole kapaciteta se lako može videti ukoliko posmatramo jedan isti let, isto mesto polaska i destinacije, ali različite dane u nedelji ili vreme leta. Na primer, u petak popodne malo je verovatno da će putnik moći da kupi kartu po nižoj ceni zbog previsoke tražnje za kartama prve klase. Međutim, u sredu popodne, kada je tražnja za kartama prve klase smanjena, avio kompanije nude veći procenat karti po nižoj ceni.

## 1.3 Mrežna kontrola kapaciteta

Mrežna kontrola broja sedišta ima za cilj maksimizaciju prihoda nad celokupnom mrežom letova istovremeno. To znači da ukoliko imamo let sa jednim presedanjem, avio kompanija maksimizira ukupan prihod na celom letu a ne prihod od pojedinačna dva leta.
Da bismo detaljnije objasnili razliku u strategiji avio kompanije u slučaju pojedinačne i mrežne kontrole kapaciteta posmatrajmo sledeća dva primera.

Pretpostavimo da putnik putuje od mesta A do mesta B preko mesta C i spreman je da plati 800$ za ceo put (od A do C). Pretpostavimo takođe da avio-kompanija naplaćuje ovom putniku 500$ za deo puta od A do B i 300$ za deo puta od B do C. Dalje, posmatrajmo drugog putnika koji putuje od A do B i spreman je da plati 600$. Ukoliko bismo koristili pristup pojedinačne kontrole kapaciteta, prvi putnik bi bio odbijen na destinaciji od A do B jer je drugi putnik spreman da plati višu cenu karte na istoj destinaciji. To bi rezultiralo povećanjem prihoda avio-kompanije za 100$. Međutim, odbijanjem prvog putnika avio-kompanija gubi mogućnost da ostvari prihod kombinujući 2 leta. U slučaju da sedište koje je zauzeo drugi putnik na destinaciji od A do B ne bi bilo popunjeno na destinaciji od B do C, za avio kompaniju bi bilo profitabilnije da prihvati prvog putnika i ostvari prihod na obe destinacije.

Kao drugi primer, pretpostavimo da imamo slučaj da sedište koje je zauzeo drugi putnik na destinaciji od A do B nije popunjeno od B do C. Stoga, avio kompanija gubi potencijalni prihod na kraku od B do C, i ostvaruje dodatni prihod od 100$ na prvoj destinaciji leta. Međutim, ukoliko je ponuda prvog putnika prihvaćena, avio kompanija maksimizuje ukupan prihod na oba dela leta i ostvaruje dodatni prihod od 200$. Mrežna kontrola sedišta uzima u obzir celokupan prihod koji se ostvaruje po putniku, od putnikove polazne do krajnje destinacije.

Iako je mrežna kontrola kapaciteta daleko realnija nego pojedinačna, u ovom radu bavićemo se samo direktnim letovima i stoga pojedinačnom kontrolom kapaciteta kao strategijom avio kompanije.

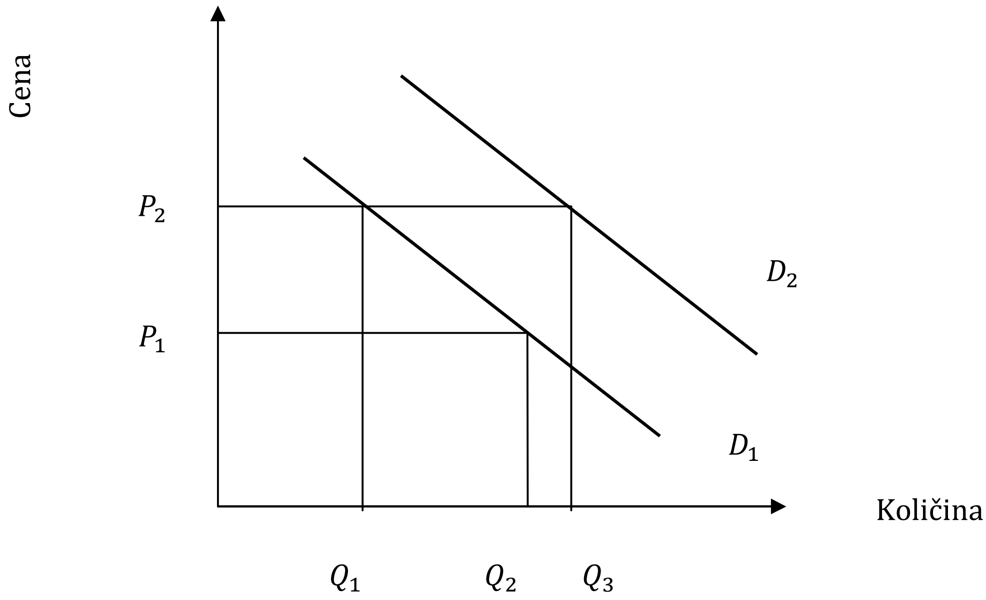
## 1.4 Formiranje cena karti

Diferencijalno formiranje cena je proces određivanja cene karte u zavisnosti od klase tako da je ukupan prihod maksimiziran. To znači da avio kompanija ima mogućnost izbora cene karte. Cena koja maksimizuje ukupan prihod zavisi od reakcije tržišta i marginalnih troškova, odnosno na formiranje cene karte utiču tržišna strana (tražnja) i priozvođačka strana (ponuda).

Tražnja je određena potrošačevom spremnošću i mogućnošću da kupi kartu. Obim prodaje predstavlja količinu kupljenih karata u zavisnosti od nivoa cene karte. Odnos cene i količine kupljenih (prodatih) karata jednostavno predstavlja krivu tražnje $D_1$ predstavljenu na slici. $P_1$ i $P_2$ na $y$-osi predstavljaju dva različita nivoa cena, a $Q_1$, $Q_2$, i $Q_3$, odgovarajuće količine prodatih karata. Ukupan prihod se računa množeći $P_1$ i $Q_1$, ili množeći $P_2$ i $Q_2$, i može se povećati na jedan od dva načina:

- smanjivanjem cene i povećanjem količine prodatih karata, ili
- povećanjem cene i smanjivanjem količine prodatih karata.

**Slika 1.1 Ukupan prihod**




Ovakva kretanja se zovu kretanja duž krive tražnje, i predstavljaju elastičnost cene, odnosno vezu između promene cene i promene tražene količine. Bitno je zapaziti da odnos cena-količina može da varira od tržišta do tržišta (kompanije se najčešće suočavaju sa elastičnijom krivom tražnje na tržištu ekonomske klase u odnosu na krivu tražnje na tržištu poslovne klase ).

Pored cene karte, na tražnju mogu uticati drugi faktori kao što su dobar marketing kompanije i ponuda promotivnih karata, kao i faktori kao što su niže cene karte ponuđene od strane konkurentskih kompanija na koje avio kompanija ne može da utiče. Ovi faktori mogu uticati porastom tražnje pomerajući krivu tražnje na desno ($D_2$), ili padom tražnje pomerajući krivu tražnje na levo ($D_1$). Stoga, porast tražnje u ovom slučaju može da dovede do porasta prihoda bez redukcije u ceni karte.

Međutim, kako su cene karte određene slobodnom tržišnom konkurencijom, kompanije se suočavaju sa cenom karte kao datom na većini tržišta. To implicira da avio kompanije mogu uticati na uvećanje prihoda jedino dobro organizovanom kontrolom kapaciteta.

## 1.5 Prebukiranost

Prebukiranje je proces prodaje više karata nego što je rasoloživih fizičkih sedišta u avionu. Prebukiranje se praktikuje u cilju kompenzacije gubitka zbog putnika koji otkažu rezervaciju i putnika koji se ne pojave na let. U proseku 15% ametričkih avio sedišta bi bilo nepotrebno upražnjeno da prebukiranje nije praktikovano. Štaviše, praktikovanje prebukiranosti doprinosi povećanju prihoda u proseku za milijardu dolara godišnje.
Iako prebukiranje može da generiše dodatni prihod, takođe može da dovede do troškova kompenzacije i troškova izazvanih gubitkom dobre volje kupaca koji prelaze kod konkurencije

ukoliko je broj putnika koji se pojave na let veći od kapaciteta aviona. U slučaju velikog broja konkurenata, ovi troškovi se ne mogu tolerisati. Stoga, rešavanja problema prebukiranosti podrazumeva pronalaženje optimalnog dodatnog broja karata izvan kapaciteta puštenih u prodaju u cilju maksimizacije neto profita, tj razlike prihoda generisanog prodajom dodatnih karata i troškova kompenzacije i gubitka dobre volje kupaca. Pre formalnog definisanja problema prebukiranosti, neophodno je istaći prirodu i karakteristike problema prebukiranosti u avio industriji:

- Buking operator mora da odluči o broju prekobrojnih pre početka procesa rezervacije karata.
- Buking operator ne može da posmatra broj putnika koji se ne pojave na let za vreme donošenja odluke o broju prekobrojnih.
- Sedište aviona je potrošno dobro, tj avio kompanija nema prihod od nepopunjenog sedišta.
- Broj putnika koji se ne pojavljuju na let je nepredvidiv, nestalan.
- Ako broj putnika koji se pojave na let prevazilazi kapacitet, putnici kojima je zabranjeno ukrcavanje se moraju kompenzovati.
- Ako broj putnika koji se pojave na let ne prevazilazi kapacitet, avio kompanije ima oportunitentni trošak nepopunjenog sedišta.

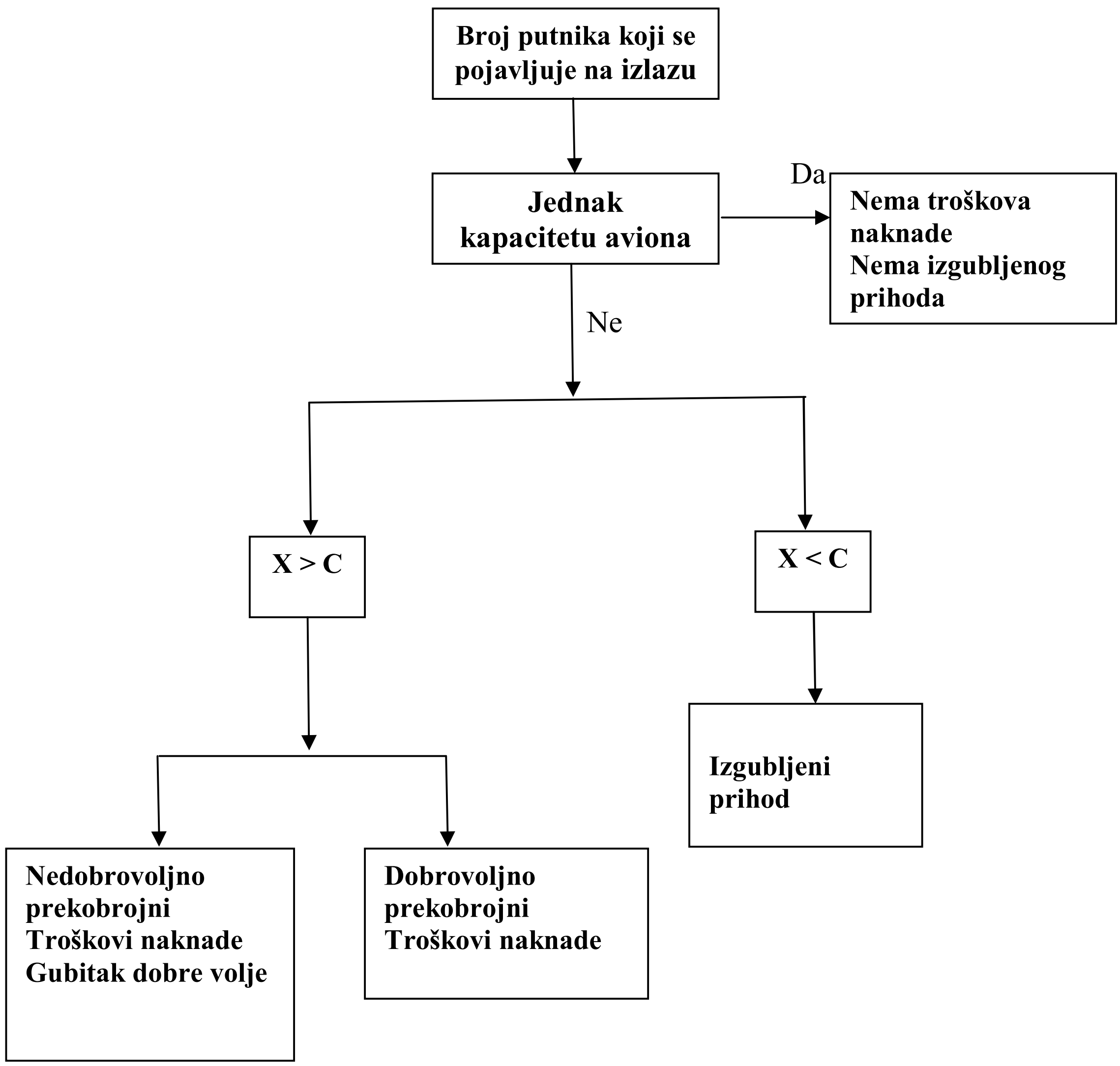
Formalno, prebukiranje je tehnika upravljanja prihodima avio kompanije, koja u cilju maksimizacije profita prodaje više karata nego što je raspoloživih sedišta u avionu, zbog putnika koji otkažu rezervaciju i putnika koji se ne pojave na let. Osnovni pojmovi vezani za problem prebukiranosti su sledeći [5]:

- **Putnici sa kartama** (***Ticketholders***): Putnici koji su kupili karte i avio kompanija već ima prihod od tih karata.
- **Putnici koji se pojavljuju na izlazu** (***Contenders or Shows-up***): Putnici sa kartama koji su se pojavili na izlazu do vremena predviđenog za ukrcavanje na let za koji su kupili kartu.
- **Putnici koji su se ukrcali** (***Boarded Passengers***): Putnici koji uspešno mogu da se ukrcaju na svoj let.
- **Prekobrojni putnici** (***Bumped Passengers***): Putnici koji su se pojavili na izlazu, ali nisu dobili mesta na svom letu.
- **Dobrovoljno prekobrojni putnici** (***Voluntarily Bumped Passengers***) : Prekobrojni putnici koji odustaju od svojih mesta u zamenu za neku vrstu naknade (obično novčanu) od strane avio kompanije.
- **Nedobrovoljno prekobrojni putnici** (***Involuntarily Bumped Passengers***): Prekobrojni putnici koji protiv svoje volje moraju da odustanu od leta.
- **Putnici koji se ne pojavljuju na let (*No-Shows*)** : Putnici koji su rezervisali kartu, ali se ne pojavljuju na let.

- **Putnici koji otkazuju rezervaciju (*Cancelation*) :** Putnici koji su rezervisali kartu ali su otkazali rezervaciju pre leta, za vreme buking perioda.
- **Troškovi naknade** (***Compensation Costs***): Ukupna novčana vrednost koju je avio kompanija dala prekobrojnim putnicima.
- **Kapacitet leta** (***Flight Capacity):*** Ukupan broj mesta na datom letu.
- **Prebukiranost** (***Overbooking***): Strategija prodavanja većeg broja karata za jedan let nego što je kapacitet tog leta.
- **Vreme čekanja** (***Waiting Time***): Vreme koje prekobrojni putnik mora da provede čekajući na naredni let ka svojoj destinaciji.
- **Koeficijent popunjenosti** (***Load Factor):*** Odnos broja popunjenih mesta u avionu i kapaciteta aviona.

Sledeća slika predstavlja shemu problema prebukiranosti. U idealnom slučaju, broj putnika sa kartom koji se pojavi na izlazu je jednak kapacitetu aviona, i prihod je maksimalan, avio kompanija nema gubitke.

**Slika 1.2 Shema problema prebukiranosti**

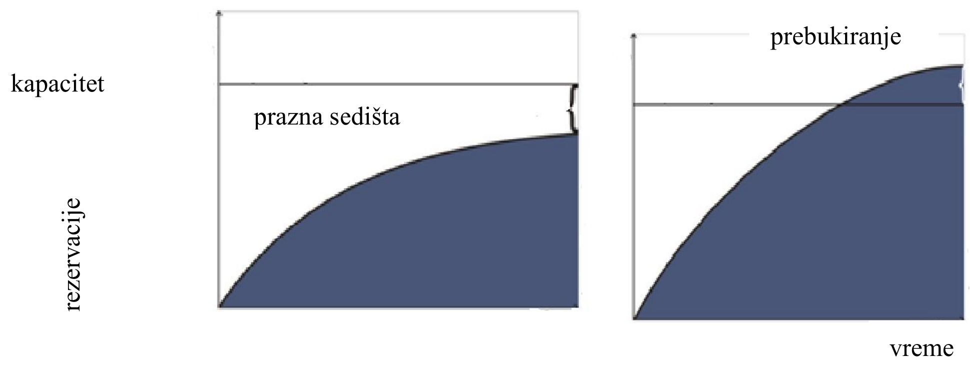


Međutim, ukoliko je taj broj manji od kapaciteta aviona, avio kompanija ima izgubljeni prihod jer prazno sedište po poletanju ne generiše prihod. Da bi smanjila izgubljeni prihod, avio kompanija praktikuje prebukiranje.

Iako prebukiranje može povećati prihod avio kompanije, takođe uključuje rizik ukoliko je broj putnika koji se pojavi na let veći od kapaciteta aviona. U drugom slučaju, ako je broj putnika koji se pojavi na izlazu veći od kapaciteta aviona, avio kompanija ima gubitke u vidu troškova naknade dobrovoljno i nedobrovoljno prebukiranim. To znači da će nekim od putnika koji su kupili karte će biti zabranjeno ukrcavanje, tj biće prekobrojni , dobrovolljno ili nedobrovoljno. U oba slučaja avio kompanija ima gubitak u vidu troškova kompenzacije prekobrojnim putnicima.

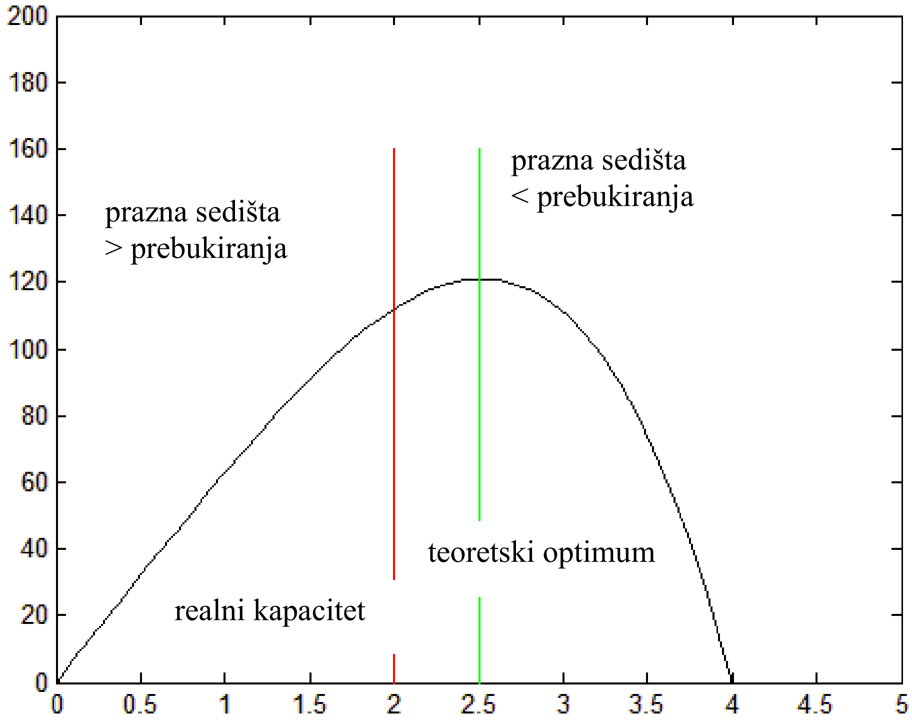
Osim naknade troškova, prekobrojni putnici će dobiti loš utisak o uslugama avio kompanije, što će se dugoročno odraziti na poslovanje avio kompanije. Međutim, procenjeno je da je gubitak prihoda veći ukoliko avio kompanija praktikuje prebukiranje nego ukoliko ga ne praktikuje.

**Slika 1.3 Izgubljen prihod i troškovi naknade**




Prema tome, cilj modela prebukiranosti je da pronađe otimalan nivo prebukiranosti koji minimizuje očekivani gubitak, odnosno maksimizira očekivani prihod. Intuitivno, optimalni nivo prebukiranosti dobijamo kada izjednačimo marginalni prihod ukoliko prihvatimo dodatnu rezervaciju, tj prodamo dodatnu kartu i marginalni trošak naknade od dodatnog prekobrojnog putnika.

**Slika 1.4 Otimalan nivo prebukiranosti**




U modelima prebukiranosti ćemo pokazati da ukupan prihod opada ukoliko je broj prodatih karata veći od optimalnog nivoa prebukiranosti, i raste ukoliko je broj prodatih karata manji od optimalnog nivoa prebukiranosti.

## 1.6 Modeli upravljanja prihodima

Modeli koji se bave problemom upravljanja prihodima mogu se podeliti na:

- *statičke modele,*
- *dinamičke modele.*

## 1.7 Statički modeli

Zbog svoje jednostavnosti i primenljivosti na realnim podacima, statički modeli se naširoko koriste u praksi. Kod statičkog modela, dinamička priroda rezervacionog procesa, tj otkazivanje rezervacije u toku rezervacionog perioda je ignorisana. Pretpostavljamo da zahtevi za rezervaciju pristižu sekvencijalno, prvo pritižu zahtevi za rezervaciju sedišta ekonomske klase a zatim poslovne klase. Statički model određuje broj karata koje se puštaju u prodaju pre rezervacionog perioda, posmatrajući funkcije raspodele putnika koji otkazuju rezervaciju i putnika koji se ne

pojavljuju na let. Cilj je da se pronađe optimalan broj karata kji će se pustiti u prodaju za svaku putničku klasu, i taj broj se ne menja za vreme rezervacionog perioda.
Takođe, nema razlike između putnika koji se ne pojavljuju na let i putnika koji otkažu rezererervaciju, s obzirom da u slučaju otkazivanja rezervacije za vreme buking perioda može biti zamenjena rezervacijom od strane drugog putnika. Putnici koji otkažu let na kraju buking perioda mogu se posmatrati kao putnici koji se ne pojave na let. Stoga, značajan faktor u određivanju nivoa prebukiranosti je stopa putnika koji se pojave na let. Jedan od najčešće korišćenih modela pretpostavlja binomnu raspodelu broja putnika koji se pojavljuju na let. Drugi modeli pretpostavljaju normalnu ili beta raspodelu putnika koji se pojavljuju na let. Iako je statički model jednostavan i primenljiv na realnim podacima, ne uspeva da objasni dinamičku prirodu procesa rezervacije.

Možemo sumirati osnovne karakteristike statičkog modela kako sledi:

- Cilj statičkog modela je da izračuna optimalan broj karata koji se pusti u prodaju za svaku putničku klasu na početku rezervacionog perioda, koji zavisi od procene tražnje za kartama. Kada se jednom izračuna, broj karata se ne menja do poletanja aviona.
- Zahtevi za rezervaciju sedišta pristižu sekvencijalno, prvo se rezervišu karte ekonomske klase, zatim poslovne.
- Putnik može da otkaže rezervaciju ili da se ne pojavi na let, statički model ne pravi razliku između ove dve mogućnosti.
- Dinamička priroda procesa rezervacije se ignoriše.
- Podaci koji su potrebni je procena tražnje za kartama pojedinačne (svake) putničke klase.

### 1.8 Dinamički modeli

Dinamički model ne ignoriše dinamičku prirodu rezervacionog procesa, i pokušava da pronađe strategiju po kojoj buking operator odlučuje da li da prihvati ili da odbije zahtev za rezervaciju sedišta određene klase u trenutku *t*. Model je postavljen u vidu dinamičkog programiranja. Iako dinamički model posmatra realnije problem prebukiranosti, matematiči je dosta komplikovaniji od statičkog modela. Osnovne karakteristike dinamičkog modela možemo sumirati kako sledi:

- Cilj dinamičkog modela je odlučiti da li da prihvatimo ili odbijemo zahtev za rezervaciju sedišta u zavisnosti od vremena pristizanja zahteva u sistem i od trenutnog broja rezervisanih sedišta. To znači da se broj prodatih karata (prihvaćenih zahteva) može menjati za vreme rezervacionog perioda.
- Postoji razlika između putnika koji se ne pojave na let i putnika koji otkažu rezervaciju.
- Zahtevi za rezervaciju ne moraju da pristižu sekvencijalno.
- Podaci koji su potrebni je vreme pristizanja zahteva za rezervaciju od pojedinačne (svake) putničke klase.

Da sumiramo, u ovom radu bavićemo se dvema strategijama koje avio kompanije koriste u cilju maksimizacije prihoda na direktnom letu, kontrolom kapaciteta i metodom prebukiranosti.

Korišćenje drugih strategija kao što je formiranje cena karti, ili mrežne kontrole kapaciteta je izvan interesa ovog rada i može biti predmet budućeg istraživanja. U naredna dva poglavlja, počinjemo sa osnovnim matematičkim pojmovima koje ćemo koristiti u radu, prostorima verovatnoća i dinamičkim programiranjem.

# 2. PROSTOR VEROVATNOĆA

## 2.1 Osnovni pojmovi

U ovom poglavlju, definisaćemo osnovne pojmove teorije verovatnoće koji će nam pomoći u razumevanju modela upravljanja prihodima kojima ćemo se baviti u ovom radu. Ovi pojmovi uključuju između ostalog slučajnu promenljivu i njenu funkciju raspodele, očekivanje i disperziju. Takođe, pored definicije navešćemo i neke osobine ovih pojmova na koje ćemo se pozivati kasnije.

## 2.2 Slučajna promenljiva

Slučajna promenljiva je jedan od osnovnih pojmova u teoriji verovatnoće. Cilj je da se svakom elementarnom događaju $\omega \in \Omega$ dodeli numerička karakteristika $X(\,\omega)$. Detaljniji opis pojmova kao što su slučajan događaj, sigma algebru, prostor verovatnoća se moze naći u [4].

**<u>Definicija 2.1</u> [4]**
Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoće. Preslikavanje $X : \Omega \to \mathbb{R}$ se naziva slučajna promenljiva ako za svako $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ važi

$X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, gde je $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ Borelova $\sigma$ −algebra generisana poluzatvorenim intervalima.

Ekvivalentno, kažemo da je $X$ $\mathcal{F}$ −merljivo preslikavanje.

*Primer 2.1 :*

*i)* Neka je $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$ i $X : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna promenljiva definisana sa
$(k, l) = k + l$, odnosno $X$ je slučajna promenljiva koja predstavlja sumu brojeva koji se pojave prilikom bacanja dve kockice.

*ii)* Neka je $A$ događaj nad $\Omega$. Funkcija definisana sa

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1, \omega \in A \\ 0, \omega \notin A \end{cases}$$

je slučajna promenljiva koja se zove indikator događaja $A$, sa osobinom da je $1_{A \cap B} = 1_A 1_B$. Indikator događaja $A$ uzima vrednost 1 ukoliko se događaj $A$ desio, ili vrednost 0 ukoliko se događaj $A$ nije desio.

U gore navedenim primerima, slučajna promenljiva $X$ može uzeti samo konačan broj vrednosti. Slučajna promenljiva koja može uzeti konačan skup ili prebrojivo mnogo vrednosti se naziva

***diskretna slučajna promenljiva***. U ovom slučaju, verovatnoća da slučajna promenljiva uzme vrednost $k$ je jednaka

$$P(X = k) := P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) = k\}).$$

Primer slučajne promenljive koja može uzeti prebrojivo mnogo vrednosti je slučajna promenljiva sa Poasonovom raspodelom, i dat je u sekciji sa primerima slučajnih promenljivih.

Ukoliko slučajna promenljiva $X$ može uzeti neprebrojivo mnogo vrednosti, takva slučajna promenljiva se naziva ***neprekidna slučajna promenljiva***. U ovom slučaju, verovatnoća da slučajna promenljiva uzme vrednosti između dva realna broja $a$ i $b$ je jednaka

$$P(a \leq X \leq b) := P(\{\omega \in \Omega | a \leq X(\omega) \leq b\}).$$

### 2.3 Funkcija raspodele i verovatnoća raspodele slučajne promenljive

**Definicija 2.2 [4]**

Preslikavanje $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ definisano sa

$$F_X(x) = P(X \leq x) \ , \qquad x \in \mathbb{R}$$

se naziva *funkcija raspodele* slučajne promenljive $X$.

Funkcija raspodele jedinstveno određuje slučajnu promenljivu.

**Teorema 2.1 [4]**

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoće, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ slučajna promenljiva definisana nad tim prostorom, i $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ funkcija raspodele slučajne promenljive $X$. Tada važi:

- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
- $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$
- $x \leq y \implies F_X(x) \leq F_X(y)$
- $\lim_{x \to y^+} F_X(x) = F_X(y)$

**Definicija 2.3 [4]**

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoće i $X$ slučajna promenljiva definisana nad tim prostorom. Tada za svako $B \in \mathcal{B}$ i slučajnu promenljivu $X$ definišemo sledeću funkciju

$$P_X(B) = P\big(X^{-1}(B)\big) = P\{\omega \in \Omega | X(B) \in \mathcal{B}\},$$

koja se naziva *zakon raspodele* ili *verovatnoća raspodele* slučajne promenljive. Zakon raspodele označavamo sa $p_X$ i $f_X$ za slučajnu promenljivu diskretnog i neprekidnog tipa respektivno.

Ukoliko je slučajna promenljiva $X$ diskretnog tipa, funkcija $p_X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ je jednaka

$$p_X(x) = P(X = x),$$

odnosno jednaka je verovatnoći da se taj događaj desi

Ukoliko je slučajna promenljiva $X$ neprekidnog tipa, funkcija $f_X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ se naziva *gustina raspodele* slučajne promenljive, i jednaka je

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx},$$

odnosno jednaka je izvodu funkcije raspodele.

Primetimo da u slučaju slučajne promenljive neprekidnog tipa vrednost gustine raspodele u tački $x$ nije jednaka verovatnoći da se taj događaj desi, odnosno $f_X(x) \neq P(X = x)$.

**Teorema 2.2 [4]**
Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoće, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna promenljiva definisana nad tim prostorom, i $f_X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ gustina raspodele slučajne promenljive $X$ (neprekidnog tipa). Tada važi:

- $f_X(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$
- $\int_{x \in A} f_X(x)dx = P(X \in A)$

Analogno, iste osobine važe i za verovatnoću raspodele slučajne promenljive diskretnog tipa, gde je integral zamenjen sumom.

### 2.4 Matematičko očekivanje i disperzija

**Definicija 2.4 [4]**
Neka je $X$ slučajna promenljiva diskretnog tipa sa verovatnoćom raspodele $p_X(x)$ i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ proizvoljna funkcija. Tada, $g(X)$ je takođe slučajna promenljiva, i definišemo očekivanje od $g(X)$ na sledeći način

$$E[g(X)] = \sum_x g(x)p_X(x).$$

Ako je $X$ slučajna promenljiva neprekidnog tipa sa gustinom raspodele $f_X(x)$, tada je očekivanje od $g(X)$ definisano sa

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx.$$

Intuitivno, očekivanje od $g(X)$ je ponderisana srednja vrednost, sa ponderima $f_X(x)$ ili $p_X(x)$. Kao specijalni slučaj, očekivanje slučajne promenljive $X$, $E[X]$, se može naći ukoliko za funkciju $g$ izaberemo identičko preslikavanje, tj $g(x) = x$ ; $E[X]$ je poznato kao srednja vrednost slučajne promenljive $X$, broj oko koga se grupišu relativne učestalosti kada se broj ponavljanja eksperimenta neograničeno povećava.

**<u>Teorema 2.3</u> [4]**

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoće, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna promenljiva definisana nad tim prostorom, $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ proizvoljne funkcije. Tada važi

- $E[a] = a$, za svaku konstantu $a \in \mathbb{R}$
- $E[ag(X)] = aE[g(X)]$, za svaku konstantu $a \in \mathbb{R}$
- $E[g(X) + f(X)] = E[g(X)] + E[f(X)]$ (Linearnost u očekivanju)

**<u>Definicija 2.5</u> [4]**

Disperzija (varijansa) slučajne promenljive $X$ se može posmatrati kao mera koncentrisanosti raspodele slučajne promenljive oko srednje vrednosti. Formalno, disperzija slučajne promenljive $X$ se definiše na sledeći način

$$D[X] = E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right].$$

Koristeći osobine očekivanja, lako se može dobiti drugi oblik disperzije

$$E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right] = E\left[X - 2E[X]X + E^2[X]\right]$$
$$= E[X^2] - 2E[X]E[X] + E^2[X]$$
$$= E[X^2] - E^2[X],$$

gde druga jednakost sledi iz osobine linearnosti očekivanja i činjenice da je $E[X]$ konstanta u odnosu na spoljno očekivanje.

**Teorema 2.4 [4]**
Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoće, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna promenljiva definisana nad tim prostorom, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ proizvoljna funkcija. Tada važi

- $D[a] = 0$, za svaku konstantu $a \in \mathbb{R}$.
- $D[af(X)] = a^2 D[f(X)]$, za svaku konstantu $a \in \mathbb{R}$.

## 2.5 Primeri slučajnih promenljivih

U ovom delu daćemo primere najčešće korišćenih slučajnih promenljivih diskretnog i neprekidnog tipa koje ćemo koristiti u modelima prebukiranosti.

***Slučajne promenljive diskretnog tipa***

- *Bernulijeva raspodela*

Slučajna promenljiva ima Bernulijevu raspodelu, $X \sim \mathcal{B}(p)$, ukoliko je njena verovatnoća raspodele data sa:

$$p(x) = \begin{cases} p, & p = 1 \\ 1 - p, & p = 0 \end{cases}$$

gde je $p$ $(0 \leq p \leq 1)$ verovatnoća realizacije nekog događaja $A$.

- *Binomna raspodela*

Neka je $n$ broj izvođenja nezavisnih eksperimenata i verovatnoća realizacije događaja $A$ u svakom od tih eksperimenata konstanta i jednaka $p$. Ako je slučajna promenljiva $X$ jednaka broju realizacija događaja $A$ , tada $X$ ima binomnu raspodelu, $X \sim \mathcal{B}i\,(n, p)$, i njena verovatnoća raspodele je data sa

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}.$$

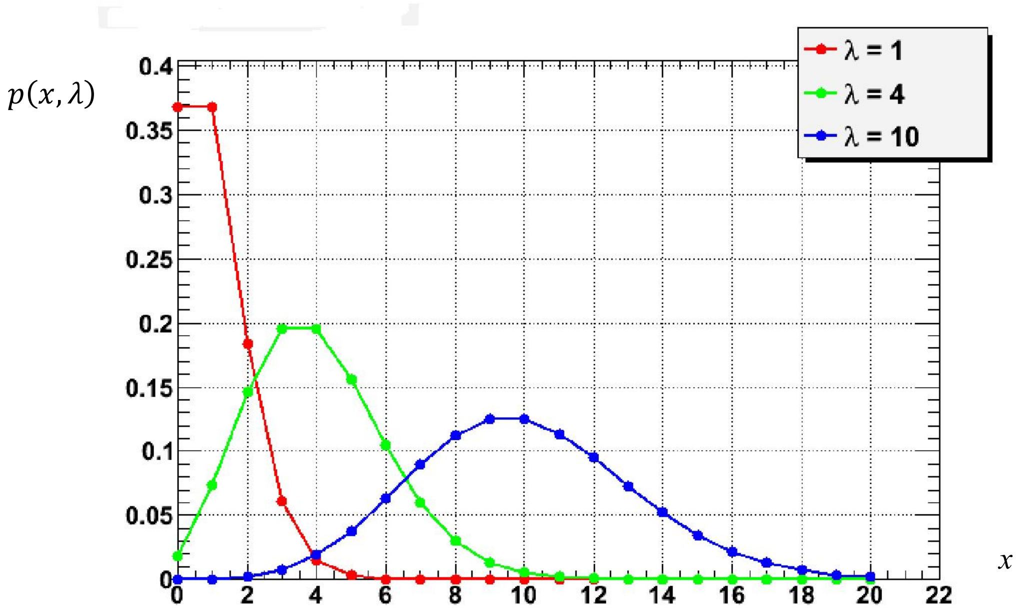
- *Poasonova raspodela*

Slučajna promenljiva ima Poasonovu raspodelu, $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, ukoliko je njena verovatnoća raspodele data sa

$$p(x, \lambda) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!},$$

gde je parametar $\lambda > 0$, i $x = 0, 1, 2, 3 \ldots$ Poasonova raspodela se primenjuje za modelovanje broja tzv. "retkih događaja", gde pod retkim događajem smatramo one gde se u kratkom vremenskom intervalu može odigrati najviše jedan takav događaj.

**Slika 2.1 Poasonova raspodela sa različitim vrednostima $\lambda$**




***Slučajne promenljive neprekidnog tipa***

- *Normalna raspodela*

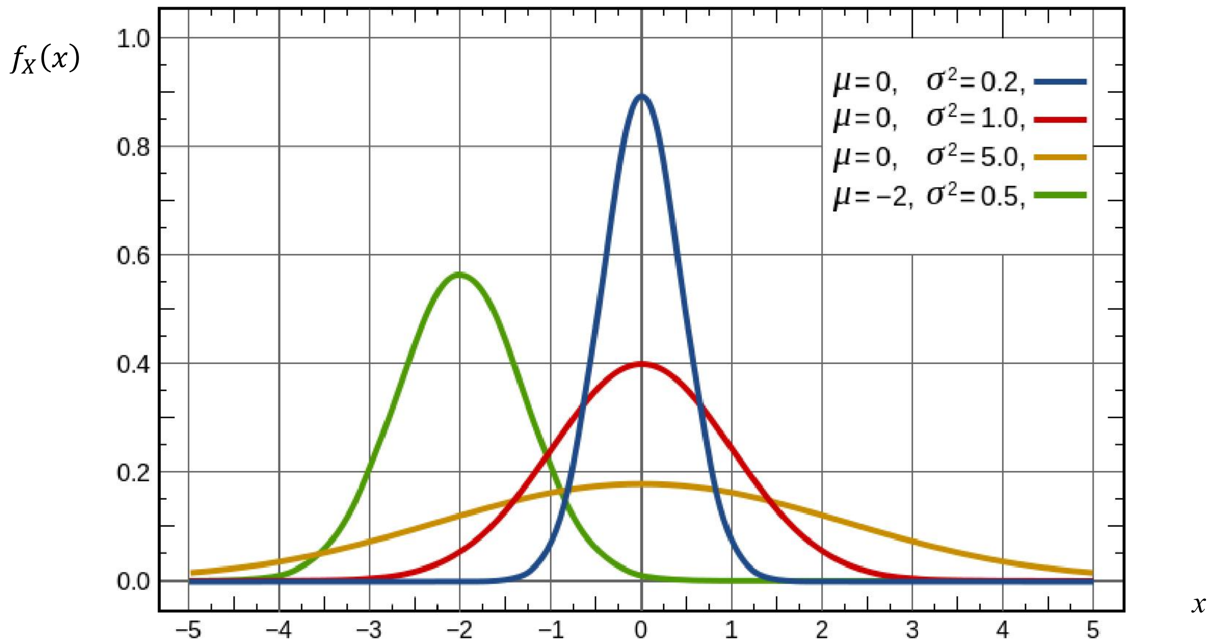
Slučajna pomenljiva ima normalnu raspodelu as parametrima $\mu$ i $\sigma$, $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , ukoliko je njena gustina raspodele data sa

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \ \ x \in \mathbb{R},$$

gde je $\mu$ matematičko očekivanje i $\sigma$ standardna devijacija. Funkcija raspodele je data sa

$$F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

**Slika 2.2 Normalna raspodela sa različitim vrednostima $\mu$ i $\sigma^2$**




Specijalno, za $\mu = 0$ i $\sigma = 1$ dobijamo tzv. *centriranu* normalnu raspodelu $\mathcal{N}(0, 1)$.

# 3. DINAMIČKO PROGRAMIRANJE

Intuitivno, dinamičko programiranje je jedan algoritam koji omogućava da se definiše optimalna strategija za rešavanje nekog problema. Iako se dinamičko programiranje može primeniti kako na determinističke, tako i na stohastičke probleme, u ovom radu fokusiraćemo se na stohastičke probleme, s obzirom da je odlučivanje u uslovima neizvesnosti ključno u problemu upravljanja prihodima. Pristup je baziran na [6], pri čemu sumiramo osnovne rezultate za problem konačnog horizonta, diskretnog vremena i diskretnog stanja koji se najčešće koristi u upravljanju prihodima.

## 3.1 Elementi dinamičkog programiranja

Dinamičko programiranje se bavi optimalnim upravljanjem sistema tokom vremena. Sistem je dinamički, i *stanje sistema* evoluira tokom vremena kao funkcija *kontrolne promenljive* i *slučajnog poremećaja*. Sistem generiše *funkciju nagrade* koja je funkcija stanja sistema i kontrolne promenljive. Cilj je da se pronađe *kontrolna strategija* (control policy) koja maksimizira ukupnu očekivanu nagradu sistema.

Vreme po kom sistem evoluira je konačno i diskretno, $t = 1,2,\dots,T$, gde je $t = 1$ prvi period, i $t = T$ poslednji period.. Osnovni pojmovi i pretpostavke vezane za dinamičko programiranje su sledeći

$x(t)$ : *stanje sistema* (promenljiva stanja), koje sumira bitne informacije iz prošlosti relevantne za buduću optimizaciju. Za stanje sistema se pretpostavlja da je diskretno i pripada konačnom skupu stanja $S_t$.

$u(t)$ : *kontrolna promenljiva*, koja treba da bude izabrana u trenutku $t$. Za kontrolnu promenljivu se pretpostavlja da diskretna i da može uzeti vrednosti iz konačnog skupa $U_t(x_t)$, koji može da zavisi od vremena $t$ i stanja $x(t)$.

$w(t)$ : *slučajni poremećaj*, koji je diskretna slučajna promenljiva sa poznatom raspodelom. Slučajni poremećaji $w(t), t = 1,2,\dots,T$ su nezavisni.

$f_t\big(x(t), u(t), w(t)\big)$ : *funkcija sistema*, koja određuje stanje sistema u sledećem periodu $t + 1$ i zavisi od stanja $x(t)$, kontrole $u(t)$ i slučajnog poremećaja $w(t)$

$$x(t+1) = f_t\big(x(t), u(t), w(t)\big).$$

$g_t\big(x(t), u(t), w(t)\big)$ : *funkcija nagrade,* koja određuje nagradu u periodu $t$ i zavisi od stanja $x(t)$, kontrole $u(t)$ i slučajnog poremećaja $w(t)$. Ukupna nagrada je aditivna, odnosno jednaka je

$$g_{T+1}\big(x(T+1)\big) + \sum_{t=1}^{T} g_t\big(x(t), u(t), w(t)\big),$$

gde je $g_{T+1}\big(x(T+1)\big)$ nagrada u poslednjem periodu.

Cilj dinamičkog programiranja je da maksimizira ukupnu očekivanu nagradu

$$E\left[g_{T+1}\big(x(T+1)\big) + \sum_{t=1}^{T} g_t\big(x(t), u(t), w(t)\big)\right],$$

birajući kontrole $u(1), u(2), \dots, u(T)$, koje mogu biti funkcije trenutnog stanja u obliku $u(t) = \mu_t\big(x(t)\big)$. Kolekcija takvih funkcija $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_T\}$ se naziva *strategija* i označava sa $\mu$ .

Primetimo da smo pretpostavili da kontrola zavisi samo od trenutnog stanja $x(t)$ i trenutnog vremenskog perioda $t$, ali da ne zavisi od informacija o *istoriji* procesa do trenutka $t$. Takve kontrole se nazivaju *Markovljeve kontrole*. S obzirom da su slučajni poremećaji $w(t), t = 1,2, \dots, T$ nezavisni i da funkcija sistema $f_t$ zavisi samo od trenutnog stanja, trenutne kontrole i trenutnog slučajnog poremećaja, može se pokazati da uvek postoji optimalna Markovljeva strategija, tako da je dovoljno posmatrati samo strategije ovog oblika.

Primenjeno na upravljane prihodima avio kompanije, $t$ je vreme preostalo do poletanja aviona, $x(t)$ je preostali kapacitet aviona koji može uzeti vrednosti između 0 i $C$, ili može biti trenutan broj rezervisanih sedišta u avionu. Primetimo da su ove dve mogućnosti recipročne jedna drugoj ukoliko ne uključimo mogućnost otkazivanja leta i metoda prebukiranosti.

Dalje, $w(t)$ predstavlja tražnju za avionskim kartama, odnosno zahtev za rezervaciju sedišta. Ukoliko avion raspolaže sa više putničkih klasa, pretpostavljamo da je vremenski period $t$ dovoljno mali tako da samo jedan zahtev za rezervaciju pristigne u sistem.

U najjednostavnijem slučaju, $u(t)$ uzima diskretne vrednosti : 0 ili 1, i predstavlja broj zahteva za rezervaciju koje avio kompanija prihvati. Kako u modelima, u svakom periodu $t$ najviše jedan zahtev pristigne u sistem, $u(t)$ uzima vrednost 1 ukoliko je zahtev prihvaćen, ili 0 ukoliko je zahtev odbijen.

Funkcija nagrade, $g_t\big(x(t), u(t), w(t)\big)$, predstavlja prihod avio kompanije u trenutku $t$ kao funkciju od parametara.

Cilj avio kompanije je da maksimizira ukupan očekivani prihod koji je jednak

$$E\left[g_{T+1}\big(x(T+1)\big)+\sum_{t=1}^{T} g_t\big(x(t),u(t),w(t)\big)\ \right]$$

tako što bira $T$ kontrola (strategija)

$$u(1),u(2),\dots,u(T)=\mu_1\big(x(1)\big),\mu_2\big(x(2)\big),\dots,\mu_T\big(x(T)\big)=\mu.$$

Ukupan prihod je aditivan i za prihod u poslednjem periodu pretpostavljamo da je jednak nuli, s obzirom da je vrednost praznog sedišta po poletanju aviona jednaka nuli.

Za dato početno stanje (početne uslove) $x(1)=x$, ukupan prihod generisan strategijom $\mu$ je jednak

$$V_1^{\mu}=E\left[g_{T+1}\big(x(T+1)\big)+\sum_{t=1}^{T} g_t\left(x(t),\mu_t\big(x(t)\big),w(t)\right)\ \right]$$

Drugim rečima, avio kompanija maksimizira ukupan očekivani prihod koji može da ostvari kada joj je preostalo $x$ sedišta da proda, i $T$ perioda do poletanja aviona. Očekivanje znači da je ocenjeno uslovno na putničke klase.

Optimalna strategija, označena sa $\mu^*$, je ona koja maksimizira ukupan očekivani prihod

$$V_1^{\mu^*}(x)=\max_{\mu\in\mathcal{M}} V_1^{\mu}(x),$$

gde je $\mathcal{M}$ skup dozvoljenih kontrola. U najjednostavnijem slučaju, $\mathcal{M}=\{0,1\}$.

### 3.2 Princip optimalnosti

*Princip optimalnosti*, koji predstavlja srž dinamičkog programiranja je formulisan i dokazan zahvaljujući Belmanu 1957. godine. Jednostavni princip kaže da, ukoliko je neka strategija optimalna za prvobitni problem, onda mora biti optimalna i za potproblem. Sada ćemo dati formalnu teoremu principa optimalnosti.

**Teorema 3.1 [7]**
Neka je $\mu^*=\{\mu_1^*,\mu_2^*,\dots,\mu_T^*\}$ optimalna strategija za prvobitan problem. Posmatrajmo podproblem prvobitnog problema definisan sa

$$V_t^{\mu}=E\left[g_{T+1}\big(x(T+1)\big)+\sum_{s=t}^{T} g_s\left(x(s),\mu_s\big(x(s)\big),w(s)\right)\ \right].$$

Tada je strategija $\{\mu_t^*, \mu_{t+1}^*, \dots, \mu_T^*\}$ rešenje podproblema.

Formalan dokaz nećemo dati, ali lako se može videti zašto teorema važi. Pretpostavimo da je $\mu^*$ rešenje prvobitnog problema, ali da $\{\mu_t^*, \mu_{t+1}^*, \dots, \mu_T^*\}$ nije rešenje podproblema. Tada postoji strateija $\hat{\mu} = \{\hat{\mu}_t, \hat{\mu}_{t+1}, \dots, \hat{\mu}_T\}$ koja je rešenje podproblema i $\{\mu_t^*, \mu_{t+1}^*, \dots, \mu_T^*\} \neq \{\mu_t^*, \mu_{t+1}^*, \dots, \mu_T^*\}$. Međutim, to znači da bi strategija

$$\left\{\mu_1^*, \mu_2^*, \dots, \mu_{t-1}^*, \hat{\mu}_t, \hat{\mu}_{t+1}, \dots, \hat{\mu}_T\right\}$$

generisala striktno veći prihod nego strategija $\mu^*$, što je u kontradikciji da je $\mu^*$ rešenje prvobitnog problema. Stoga, $\{\mu_t^*, \mu_{t+1}^*, \dots, \mu_T^*\}$ mora biti rešenje podproblema.

Princip optimalnosti sugeriše da se rešenje prvobitnog problema može dobiti rekurzivno, tako što se prvo reši podproblem poslednje faze za $t = T$, zatim se reši podproblem poslednje dve faze za $t = T, T-1$ i tako dok se ne dobije optimalna strategija za prvobitni problem.

Formalno, za svako $x$ i svako $t$, definišemo *vrednosnu funkciju*

$$V_t(x) = \max_{\mu \in \mathcal{M}} V_t^{\mu}(x).$$

Vrednosna funkcija daje optimalnu nagradu od trenutka $t$ do poslednjeg perioda, uslovno na stanje sistema $x$ u periodu $t$. Primetimo da je $V_1(x)$ je optimalna nagrada prvobitnog problema. To nas dalje dovodi do teoreme koja pronalazi optimalnu strategiju koristeći rekurzivnu vrednosnu funkciju.

**<u>Teorema 3.2</u> [7]**
Vrednosna funkcija $V_t(x)$ je jedinstveno rešenje rekurzije

$$V_t(x) = \max_{\boldsymbol{u}} E\left[g_t\big(x, u, w(t)\big) + V_{t+1}\left(f_t\big(x, u, w(t)\big)\right)\right],$$

za svako $t = 1,2, \dots, T$ i svako $x \in S_t$, sa graničnim uslovom $V_t(x) = g_{t+1}(x)$.
Štaviše, ako u $u^* = \mu_t^*(x)$, gornji izraz dostiže maksimum za svako $t = 1,2, \dots, T$ i svako $x \in S_t$, tada je $\mu^* = \{\mu_t^*, \mu_{t+1}^*, \dots, \mu_T^*\}$ optimalna strategija.

Dokaz teoreme nećemo dati, ali dokaz je analogan intuiciji dokaza predhodne teoreme.

### 3.3 Dinamičko programiranje i upravljanje prihodima

Pokažimo sada kako se dinamičko programiranje može primeniti na problem upravljanja prihodima.

Kada avio kompanija ima podatke o tražnji za kartama pojedine klase, vrednost kontole $u$ se bira sa ciljem maksimizacije prihoda u trenutku $t$ plus prihoda od trenutka $t$ do poletanja aviona ($t = 0$). Odnosno, maksimiziramo $f_j u + V_{t-1}(x-u)$, gde je $f_j$ cena karte za putničku klasu $j$. Iz predhodne teme, znamo da je vrednosna funkcija u trenutku $t$, $V_t(x)$, jednaka

$$V_t(x) = E\left[\max_{u\in\{0,1\}} f_j u + V_{t-1}(x-u)\right],$$

i da je kontrola $u$ rešenje maksimizacijskog problema. Gornja jednačina je Belmanova jednačina, sa graničnim uslovima $V_0(x) = 0$, za svako $x$, i $V_t(0) = 0$, za svako $t$. Granični uslovi imaju interpretaciju da avio kompanija u vreme poletanja aviona nema prihod od praznog sedišta, i da nema prihoda ukoliko se nijedno sedište ne rezerviše za vreme rezervacionog perioda.

Vrednost $u^*$ koja maksimizira desnu stranu Belmanove jednačine za svako $t$ i svako $x$ je optimalna strategija avio kompanije. Da bismo intuitivnije razumeli problem, definišimo sa

$$\Delta V_t(x) = V_t(x) - V_t(x-1)$$

očekivanu marginalnu vrednost sedišta. Ono što je u interesu avio kompanije da sazna kako se ova vrednost menja sa preostalim kapacitetom aviona $x$ i vremenom do poletanja aviona $t$. Osobine marginalne vrednosti sedišta su sledeće:

*(i)* $\Delta V_t(x+1) \leq \Delta V_t(x)$

Marginalna vrednost je je opadajuća po $x$, što znači da se oportunentni trošak dodatnog sedišta povećava kada je manji broj sedišta preostao da se rezerviše.

*(ii)* $\Delta V_{t+1}(x) \geq \Delta V_t(x)$

Marginalna vrednost je opadajuća po vremenu preostalom do poletanja leta, što znači da što je više vremena preostalo do poletanja aviona, veća je šansa da se capacitet aviona iskoristi efikasnije, veća je verovatnoća da se sedište proda višoj putničkoj klasi po većoj ceni.
Ove dve osobine su intuitivne i dosta olakšavaju problem dinamičkog programiranja, jer sada možemo Belmanovu jednačinu napisati kao

$$V_t(x) = V_{t-1}(x) + E\left[\max_{u\in\{0,1\}}\{f_j u + \Delta V_{t-1}(x-u), 0\}\right].$$

Značenje jednačine je sledeće : vrednost prihoda do poletanja aviona u trenutku $t$ (danas) je jednaka prihodu do poletanja aviona sutra plus očekivanom marginalnom prihodu donesene odluke (upoređujući cenu karte i oportunentnog troška). Drugim rečima optimalna strategija se donosi upoređujući cenu karte i smanjenja očekivanog ukupnog prihoda s obzirom da je avio kompanije preostalo jedno sedište manje.

Pokažimo da važi pojednostavljena Belmanova jednačina.

$$V_t(x) = E\left[\max_{u\in\{0,1\}} f_j u + V_{t-1}(x-u)\right]$$

$$= \max_{u\in\{0,1\}}\{E[f_j u] + E[V_{t-1}(x-u)]\}$$

$$= \max_{u\in\{0,1\}}\{E[f_j u] + E[V_{t-1}(x-u) + V_{t-1}(x) - V_{t-1}(x)]\}$$

$$\max_{u\in\{0,1\}}\{E[f_j u] + E[V_{t-1}(x-u) - V_{t-1}(x)] + E[V_{t-1}(x)]\}$$

Kako $V_{t-1}(x)$ ne zavisi od kontrole $u$ u trenutku $t$, može izaći ispred očekivanja, tj dobijamo pojednostavljenu Belmanovu jednačinu.

Koristeći vrednosnu funkciju možemo ukratko opisati strategije koje avio kompanija koristi u upravljanu prihodima, naime nivoe protekcije i buking granice. Ove strategije će detaljno biti objasnjene u narednim poglavljima.

Znamo da avio kompaija kontroliše prihod tako što kontroliše $u$, prihvatajući $(u = 1)$ ili odbijajući $(u = 0)$ zahtev za rezervaciju sedišta. Dalje, s obzirom da je $\Delta V_t(x)$ opadajuće po $x$, sledi da je $f_j u - \Delta V_t(x-u)$ rastuće po $x$. Za dato $t$, optimalno je prihvatati prisižuće zahteve sve dok $f_j u - \Delta V_t(x-u)$ ne postane negativno ili se ne dostigne $min\{D_j, x\}$, šta god prvo se desi. $D_j$ je tražnja za kartom putničke klase $j$.

Nivo protekcije $y_j^*$ je broj sedišta koje čuvamo za putnike klase $j$ i više putničke klase koji zahtevaju ili će poslati zahtev za rezervaciju sedišta u budućnosti. To je maksimalan broj $x$ takav je cena karte koju generiše zahtev je preniska da kompenzuje oportunentni trošak, odnosno da važi

$$y_j^* = max\{x: f_{j+1} < \Delta V_t(x)\}, \qquad j = 1,2, m-1.$$

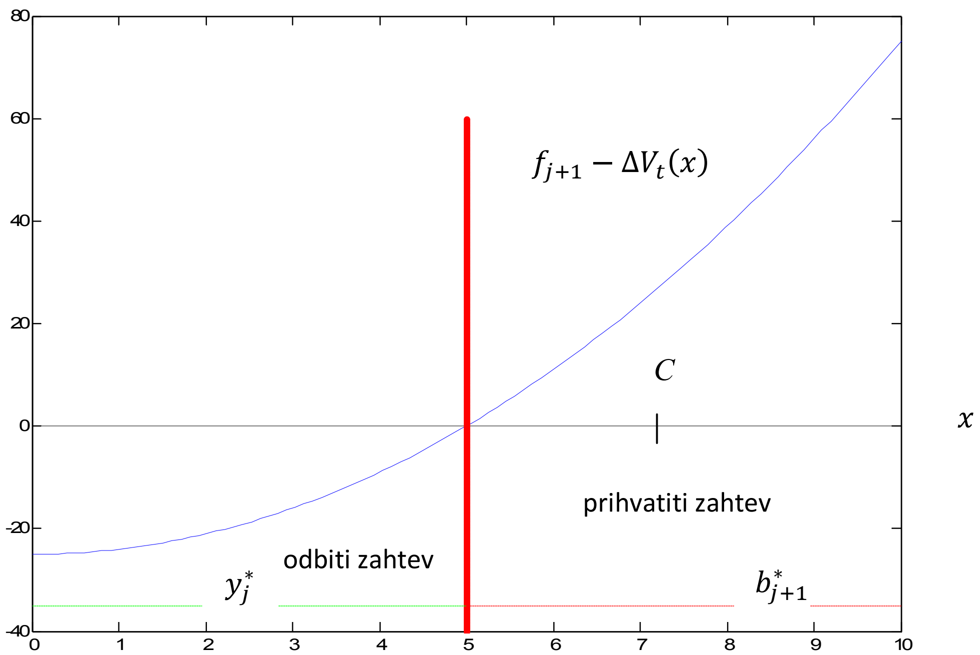
Stoga, optimalna strategija u trenutku $t+1$ je

$$u^*(t+1, x, D_{j+1}) = min\{(x - y_j^*), D_{j+1}\}.$$

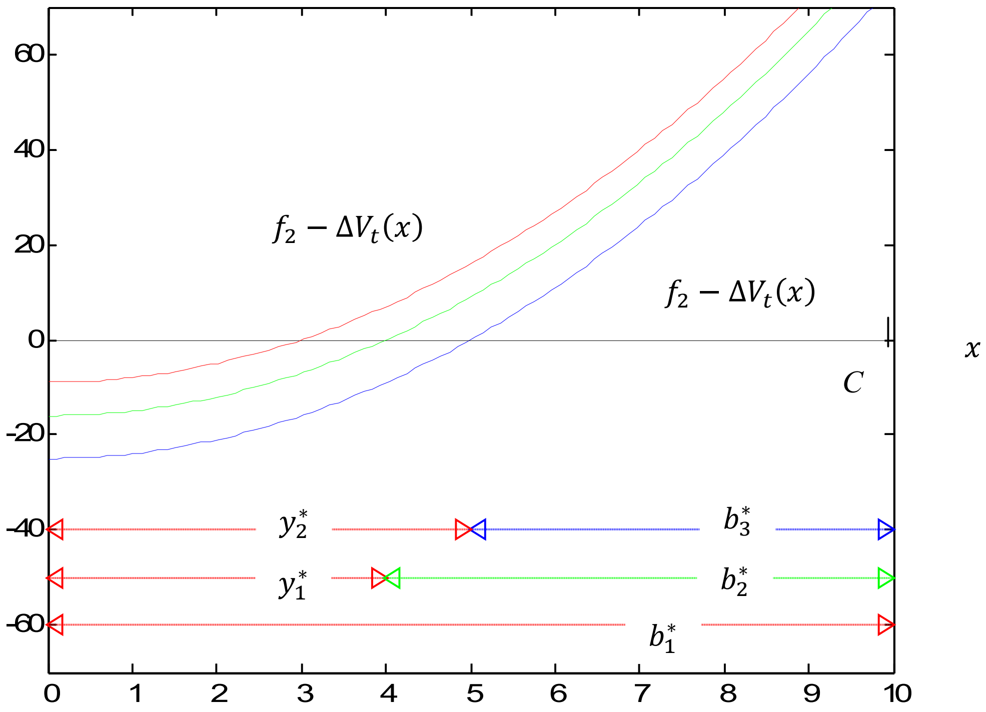
Buking granica za putničku klasu $j+1$, $b_{j+1}^*$, je je jednaka razlici kapaciteta aviona i nivoa protekcije za $y_j^*$ ili jednaka nuli ukoliko je ova razlika negativna. Buking granica predstavlja maksimalan broj sedišta sačuvan za putničku klasu $j+1$. Strategija je jdenostavno da se prihvate svi zahtevi za rezervaciju sedišta klase $j+1$ dok se ne pređe buking granica $b_{j+1}^*$.

Za ilustraciju Slika 3.1 i Slika 3.2 sumiraju što smo predhodno objasnili.

**Slika 3.1 Nivoi protekcije i buking granice za *j*-tu putničku klasu**



**Slika 3.2 Nivoi protekcije i buking granice za prvu, drugu i treću putničku klasu**




Da sumiramo, koristeći dinamičko programiranje u upravljanju prihodima, avio kompanija odlučuje da li da u nekom trenutku prihvati ili odbije zahtev za rezervaciju sedišta određene putničke klase. Jedna od dobrih strana dinamičkog programiranja je to što ne mora da se pretpostavi da zahtevi prostižu sekvencijalno, od najniže putničke klase do najviše. U praksi, dinamičko programiranje omogućava pronalaženje optimalne strategije u upravljanju prihodima, tako što u svakom čvoru drveta računa mogući prihod ukoliko se ta opcija izabere. Nedostatak dinamičkog programiranja je povećanje računskih operacija potrebnih da se optimalna strategija izračuna. To znači da za jedan let sa jednom putničkom klasom i 100 sedišta i 50 vremenskih perioda odlučivanja, broj potrebnih iteracija je $100 \times 50 = 5000$. Ali ukoliko imamo na primer 3 klase, broj potrebnih iteracija je $100 \times 50^3 = 125000000$. Takođe, dobra strana dinamičkog programiranja je ta što se može proširiti tako da dozvoljava mogućnost otkazivanja i nepojavljivanja na let, tj da inkorporira ponašanje putnika. Samim tim, mogućnost prebukiranosti postaje takođe moguća strategija za avio kompaniju, čime ćemo se detaljno baviti u nastavku rada.

# 4. STATIČKI MODELI

## 4.1 Statički model sa jednom putničkom klasom

Statički modeli prebukiranosti se fokusiraju na pronalaženje optimalne granice prebukiranosti sa ciljem maksimizacije očekivanog prihoda. U modelu sa jednom klasom pretpostavljamo da avio kompanija ima na raspolaganju jedan tip karte, tj karte za ekonomsku klasu. Zadatak je pronaći maksimalan broj karata $B$ iznad fiksnog kapaciteta leta $C$ koje bi avio kompanija trebala da proda ($B > C$). Ključna karakteristika statičkog modela je ta da je optimalna granica prebukiranosti $B$ nepromenljiva za vreme rezervacionog perioda, tj od početka prodaje karti do poletanja aviona.

Stoga, cilj je da se pronađe pravilo kojim odlučujemo koliko karata avio kompanija treba da proda da bi minimizirala troškove naknade u slučaju odbijenih putnika i troškove neiskorišćenog sedišta. Definišimo osnovne promenljive koje ćemo koristiti u prvom modelu:

| | |
|---|---|
| $f$ | Cena karte za let ekonomskom klasom, |
| $k$ | Stopa prebukiranosti takva da važi $(1 + k)C = B$, |
| $R^o$ | Trošak naknade u slučaju prekobrojnog putnika (dobrovoljno ili nedobrovoljno prekobrojnog), |
| $R^{sp}$ | Trošak neiskorišćenog sedišta, |
| $\alpha$ | Verovatnoća da se putnik sa kartom pojavi na izlazu, |
| $S$ | Broj putnika sa kartama koji su se pojavili na izlazu. |

Verovatnoća da se putik sa kartom pojavi na izlazu često zavisi od faktora kao što su dužina leta, vreme poletanja, destinacija i slično. Pertpostavljamo da je broj putnika koji se pojave na izlazu jednak $B\alpha$. Takođe, pretpostavljamo da $\alpha$ nije konstanta, već da ima verovatnoću raspodele $h(\alpha)$, gde $0 \leq \alpha \leq 1$. U idealnom slučaju, avio kompanija bi htela da proda $B$ karata tako da važi $B\alpha = C$. U slučaju da je $0 \leq \alpha \leq \frac{C}{B}$, avion poleće sa $C - B\alpha$ neiskorišćenih sedišta, pri čemu avio kompanija ima trošak jednak $R^{sp}(C - B\alpha)$. Ukoliko je $\alpha > \frac{C}{B}$, let ima $B\alpha - C$ prekobrojnih putnika, i avio kompanija ima ukupne troškove naknade jednake $R^o(B\alpha - C)$. Sada, kad $\alpha$ više nije konstanta, već slučajna promenljiva, ukupni očekivani troškovi $U(k)$ su jednaki sumi troškova neiskorišćenih sedišta i troškova naknade:

$$E[U(k)] = R^{sp}\int_0^1 h(\alpha)\,[C-(1+k)C\alpha]^+ d\alpha + R^0\int_0^1 h(\alpha)\,[(1+k)C\alpha - C]^+ d\alpha.$$

To je dalje jednako

$$E[U(k)] = R^{sp}\int_0^{\frac{1}{1+k}} h(\alpha)\,(C-(1+k)C\alpha)d\alpha + R^0\int_0^{\frac{1}{1+k}} h(\alpha)\,\big((1+k)C\alpha - C\big)d\alpha.$$

U nastavku ćemo dati formulaciju teoreme koja daje optimalnu stopu prebukiranosti $k$.

**Teorema 4.1 [1]**

Pretpostavimo da verovatnoća da se putnik pojavi na izlazu $\alpha$ ima verovatnoću raspodele $h(\alpha)$ i $0 \le \alpha \le 1$. Tada, optimalna stopa prebukiranosti $k$ je data sa

$$\frac{R^o}{R^o + R^{sp}} = \frac{\int_0^{\frac{1}{1+k}} h(\alpha)\alpha d\alpha}{\int_0^1 h(\alpha)\alpha d\alpha}.$$

**Dokaz [1]:**

S obzirom da je cilj avio kompanije maksimiziranje ukupnih prihoda, ili ekvivalentno minimiziranje ukupnih troškova, cilj je da nađemo $k$ tako da dobijemo globalni minimum ukupnih očekivanih troškova $E[U(k)]$ kao funkcije od $k$. Prvo moramo da proverimo da je $E[U(k)]$ konveksna funkcija od $k$. Diferenciranjem po $k$ i korišćenjem Lajbnicove formule dobijamo

$$\frac{dE[U(k)]}{dk} = \frac{d}{dk}[R^{sp}\int_0^{\frac{1}{1+k}} h(\alpha)\,(C-(1+k)C\alpha)d\alpha + R^0\int_0^{\frac{1}{1+k}} h(\alpha)\,\big((1+k)C\alpha - C\big)d\alpha]$$

$$= \frac{d}{dk}\left[R^{sp}\int_0^{\frac{1}{1+k}} h(\alpha)\,C\alpha d\alpha - R^{sp}\int_0^{\frac{1}{1+k}} h(\alpha)\,(1+k)C\alpha d\alpha\right]$$

$$+\frac{d}{dk}\left[R^0\int_0^{\frac{1}{1+k}} h(\alpha)\,(1+k)C\alpha d\alpha - R^0\int_0^{\frac{1}{1+k}} h(\alpha)\,C\alpha d\alpha\right]$$

$$= -\frac{1}{(1+k)^2}R^{sp}h\left(\frac{1}{1+k}\right)C - R^{sp}\int_0^{\frac{1}{1+k}} h(\alpha)\,C\alpha d\alpha$$

$$+ R^{sp}(1+k)\frac{1}{(1+k)^2}\frac{1}{1+k}Ch\left(\frac{1}{1+k}\right)$$

$$+\frac{1}{(1+k)^2}R^o\int_{\frac{1}{1+k}}^1 h(\alpha)\,C\alpha d\alpha + R^o(1+k)\frac{1}{(1+k)^2}\frac{1}{1+k}Ch\left(\frac{1}{1+k}\right)$$

$$-\frac{1}{(1+k)^2}R^0h\left(\frac{1}{1+k}\right)C$$

$$= R^o\int_{\frac{1}{1+k}}^1 h(\alpha)\,C\alpha d\alpha - R^{sp}\int_0^{\frac{1}{1+k}} h(\alpha)\,C\alpha d\alpha.$$

Diferenciranjem još jednom po $k$ dobijamo

$$\frac{dE^2[U(k)]}{dk^2} = -R^o \frac{1}{-(1+k)^2} \frac{1}{1+k} Ch\left(\frac{1}{1+k}\right) - R^{sp} \frac{1}{-(1+k)^2} \frac{1}{1+k} Ch\left(\frac{1}{1+k}\right)$$
$$= \frac{1}{(1+k)^3} Ch\left(\frac{1}{1+k}\right) (\,R^o + R^{sp}) \geq 0.$$

Stoga, $E[U(k)]$ je konveksna funkcija od $k$ i možemo naći njen minimum. Iz $\frac{dE[U(k)]}{dk} = 0$ dobijmo

$$0 = R^o C \left( \int_0^1 h(\alpha)\, \alpha d\alpha - \int_0^{\frac{1}{1+k}} h(\alpha)\, \alpha d\alpha \right) - R^{sp} C \left( \int_0^1 h(\alpha)\, \alpha d\alpha - \int_0^{\frac{1}{1+k}} h(\alpha)\, \alpha d\alpha \right)$$

Odatle sledi

$R^o C \int_0^1 h(\alpha)\, \alpha d\alpha = (R^{sp} C + R^o C) \int_0^{\frac{1}{1+k}} h(\alpha)\, \alpha d\alpha$, odnosno

$$\frac{R^o}{R^o + R^{sp}} = \frac{\int_0^{\frac{1}{1+k}} h(\alpha) \alpha d\alpha}{\int_0^1 h(\alpha) \alpha d\alpha},$$

što je i trebalo dokazati. ■

**Napomena 4.1** Primetimo da optimalna stopa prebukiranosti $k$ zavisi koju verovatnoću raspodele pretpostavimo za $\alpha$ . Na primer, ukoliko pretpostavimo da $\alpha$ ima uniformnu raspodelu na intervalu $[0.8, 1]$, tada je funkcija verovatnoću raspodele

$$h(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{1-0.8} = 5, & 0.8 \leq \alpha \leq 1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Ukoliko dalje pretpostavimo da je $R^o = R^{sp} = f$, odnosno naknada troškova jednaka je ceni karte, kao i trošku neiskorišćenog sedišta, tada možemo naći optimalnu stopu prebukiranosti koristeći teoremu.

$$\frac{f}{f+f} = \frac{\int_{0.8}^{\frac{1}{1+k}} 5\alpha d\alpha}{\int_{0.8}^1 5\alpha d\alpha}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\int_{0.8}^{\frac{1}{1+k}} 5\alpha d\alpha}{\int_{0.8}^1 5\alpha d\alpha}$$

$$\int_{0.8}^{\frac{1}{1+k}} 5\alpha d\alpha = 0.9\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{(1+k)^2} = 0.8^2 + 0.18$$

$$1 + k = 1.1043.$$

Stoga, optimalan broj karata kopi bi avio kompanija trebala da proda je $B = (1+k)C = 1.1043C$.

**Napomena 4.2** U ovom slučaju pretpostavljamo da je očekivani broj putnika koji se pojavi na izlazu jednak $B\alpha$, gde je verovatnoća da se putnik pojavi na izlazu $\alpha$ slučajna promenljiva i $B$ broj prodatih karata. Stoga, da bismo izračunali optimalnu stopu prebukiranosti, koristili smo očekivani broj putnika na izlazu umesto raspodelu. Ovaj jednostavan slučaj je privlačan zbog svoje jednostavnosti, iako možda nije optimalno koristiti srednju vrednost. U nastavku, pretpostavićemo da je broj putnika koji se pojavi na izlazu konstanta i izračunati optimalnu stopu prebukiranosti koristeći različite funkcije raspodele da modelujemo broj putnika koji se pojave na izlazu.

U nastavku pretpostavljamo sledeće:

1. Broj putnika koji se pojavi na izlazu je slučajna promenljiva sa binomnom raspodelom, odnosno $S(B) \sim \mathcal{B}i(B, \alpha)$, gde je $\alpha$ konstanta.
2. Verovatnoća da se jedan putnik sa kartom pojavi na izlazu je nezavisna od verovatnoće da se neki drugi putnik sa kartom pojavi na izlazu.
3. Putnici koji otkazu rezervaciju se tretiraju kao putnici kopi se nisu pojavili na let
4. Putnici koji su se pojavili na izlazu ali nisu dobili mesto na letu dobijaju naknadu troškova u iznosu $f + R$, gde je $R$ naknada iznad cene karte. Pretpostavićemo da svaki prekobrojni putnik dobija iste troškove naknade.
5. Grupne rezervacije (kupovine) karte nisu dozvoljene, i tretiraju se kao individualne rezervacije.

**Teorema 4.2 [1]**

Neka važe pretpostavke 1-5. Tada, prihvatamo $B + 1$ zahtev za rezervaciju (kupovinu) karte ako važi

$$\sum_{k=0}^{C-1} \binom{B}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{B-k} > \frac{R}{R+f} \; .$$

**Dokaz [1] :**

Neka je $U(B)$ prihod avio kompanije ukoliko proda $B$ karata. Tada je $U(B)$ jednak razlici između prihoda od prodatih karata od putnika kopi se pojave na izlazu i troškova naknade u slučaju prekobrojnih putnika:

$$U(B) = fS(B) - (R+f)[S(B) - C]^{+}.$$

Neka je $E[U(B)]$ očekivani prihod. Tada, cilj avio kompanije je da nađe optimalnu vrednost $B^*$ koja maksimizira očekivani prihod. Ako je $E[U(B)]$ konkavna funkcija od $B$, avio kompanija će prodati $B+1$ kartu ukoliko je $E[U(B+1)] - E[U(B)] > 0$. Stoga, optimalan broj prodatih karata $B^*$ je najveća vrednost od $B$ za koju važi predhodna nejednakost. Primetimo da je $E[[S(B) - C]^{+}] = 0,$ za $B \leq C$, što dalje implicira da je $E[U(B)]$ neopadajuća funkcija za $B \leq C$. Dalje treba da pokažemo da je $E[U(B)]$ konkavna funkcija za $B \geq C$.

$$E[U(B+1)] - E[U(B)]$$

$$= f(E[S(B+1)] - E[S(B)]) - (R+f)(E[[S(B+1) - C]^{+}] - E[[S(B) - C]^{+}])$$

$$= f(\alpha(B+1) - \alpha B)$$

$$-(R+f)\left(\sum_{i=C+1}^{B+1} \binom{B+1}{i} \alpha^{i}(1-\alpha)^{B+1-i}(i-C) - \sum_{i=C+1}^{B} \binom{B}{i} \alpha^{i}(1-\alpha)^{B-i}(i-C)\right).$$

Znamo da za binomne koeficjente važi $\binom{B+1}{i} = \binom{B}{i} + \binom{B}{i-1}$, što dalje implicira

$$= f\alpha - (R+f)[\, \alpha^{B+1}(B+1-C) + \sum_{i=C+1}^{B} \binom{B}{i} \alpha^{i}(1-\alpha)^{B+1-i}(i-C)$$

$$+ \sum_{i=C+1}^{B} \binom{B}{i-1} \alpha^{i}(1-\alpha)^{B+1-i}(i-C) - \sum_{i=C+1}^{B} \binom{B}{i} \alpha^{i}(1-\alpha)^{B-i}(i-C)]$$

$$= f\alpha - (R+f)[\, \alpha^{B+1}(B+1-C) + \sum_{i=C+1}^{B} \binom{B}{i-1} \alpha^{i}(1-\alpha)^{B+1-i}(i-C)$$

$$-\alpha \sum_{i=C+1}^{B} \binom{B}{i} \alpha^{i}(1-\alpha)^{B-i}(i-C)].$$

Neka je $k = i - 1$. Tada je gornji izraz jednak

$$= f\alpha - (R+f)[\ \alpha^{B+1}(B+1-C) + \sum_{k=C}^{B-1} \binom{B}{k} \alpha^{k+1}(1-\alpha)^{B-k}(k+1-C)$$

$$-\alpha \sum_{i=C+1}^{B} \binom{B}{i} \alpha^{i}(1-\alpha)^{B-i}(i-C)]$$

$$= f\alpha - (R+f)[\ \alpha^{B+1}(B+1-C) + \sum_{k=C}^{B} \binom{B}{k} \alpha^{k+1}(1-\alpha)^{B-k}(k+1-C)$$

$$-\sum_{i=C+1}^{B} \binom{B}{i} \alpha^{i}(1-\alpha)^{B-i}(i-C)]$$

$$= f\alpha - (R+f)[\ \alpha^{B+1}(B+1-C) + \sum_{k=C}^{B} \binom{B}{k} \alpha^{k+1}(1-\alpha)^{B-k}$$

$$= f\alpha - (R+f) \sum_{k=C}^{B} \binom{B}{k} \alpha^{k+1}(1-\alpha)^{B-k}.$$

Odatle sledi da je

$$E[U(B+1)] - E[U(B)] - (E[U(B)] - E[U(B-1)])$$

$$= -(R+f)[\sum_{k=C}^{B} \binom{B}{k} \alpha^{k+1}(1-\alpha)^{B-k} - \sum_{k=C}^{B-1} \binom{B-1}{k} \alpha^{k+1}(1-\alpha)^{B-1-k}\ ]$$

$$= -(R+f)[\alpha^{B+1} + \sum_{k=C}^{B-1} \binom{B-1}{k} \alpha^{k+1}(1-\alpha)^{B-k} + \sum_{k=C}^{B-1} \binom{B-1}{k-1} \alpha^{k+1}(1-\alpha)^{B-k}$$

$$-\sum_{k=C}^{B-1} \binom{B-1}{k} \alpha^{k+1}(1-\alpha)^{B-1-k}\ ]$$

$$= -(R+f)[\alpha^{B+1} + \sum_{k=C}^{B-1} \binom{B-1}{k-1} \alpha^{k+1}(1-\alpha)^{B-k} - \sum_{k=C}^{B-1} \binom{B-1}{k} \alpha^{k+2}(1-\alpha)^{B-1-k}]$$

Neka je $z = k+1$. Tada je gornji izraz jednak

$$= -(R+f)[\alpha^{B+1} + \sum_{z=C+1}^{B} \binom{B-1}{z-1} \alpha^{z}(1-\alpha)^{B-z} - \sum_{k=C}^{B-1} \binom{B-1}{k} \alpha^{k+1}(1-\alpha)^{B-k}]$$

$$= -(R+f)[\sum_{z=C}^{B} \binom{B-1}{k-1} \alpha^{k+1}(1-\alpha)^{B-k} - \sum_{z=C+1}^{B} \binom{B-1}{z-1} \alpha^{z+1}(1-\alpha)^{B-z}]$$

$$= -(R+f)\binom{B-1}{C-1} \alpha^{C+1}(1-\alpha)^{B-C}$$

$$< 0.$$

Kako je $E[U(B+1)] - E[U(B)]$ strogo opadajuća funkcija od $B$, za $B \geq C$, sledi da je $E[U(B)]$ konkavna funkcija od od $B$, za $B \geq C$. Stoga, avio kompanija će prodati $B+1$ kartu ako važi $E[U(B+1)] - E[U(B)] > 0$, odnosno ako važi

$$f\alpha - (R+f)\sum_{k=C}^{B} \binom{B}{k} \alpha^{k+1}(1-\alpha)^{B-k} > 0$$

$$f > (R+f)\left(1 - \sum_{k=0}^{C-1} \binom{B}{k} \alpha^{k+1}(1-\alpha)^{B-k}\right)$$

$$\sum_{k=0}^{C-1} \binom{B}{k} \alpha^{k+1}(1-\alpha)^{B-k} > \frac{R}{R+f},$$

što je i trebalo pokazati. ▪

**Napomena 4.3** U ovom slučaju, pretpostavljamo da je broj putnika sa kartom koji se pojavi na izlazu slučajna promenljiva sa binomnom raspodelom. Ukoliko putnici rezervišu karte ili otkažu rezervaciju karte u malim grupama, tada pretpostavka da se grupne rezervacije tretiraju kao individualne više ne važi, i raspodela više nije binomna.

Empirijske studije su pokazale da normalna raspodela daje dobru aproksimaciju za funkciju tražnje. Stoga, u nastavku ćemo broj putnika koji se pojavi na izlazu (koji smo modelovali binomnom raspodelom) aproksimirati normalnom raspodelom. Kako je u predhodnom slučaju broj putnika koji se pojavi na izlazu imao binomnu raspodelu, odnosno $S|B \sim \mathcal{B}i(B,\alpha)$, ukoliko aproksimiramo normalnom raspodelom, broj putnika ima normalnu raspodelu sa parametrima $\mu$ i $\sigma^2$, gde je $\mu = \alpha B$ i $\sigma^2 = \alpha(1-\alpha)B$.

**<u>Teorema 4.3</u> [1]**

Neka je $f$ cena karte, $R^o$ naknada troškova prekobrojnom putniku, $\alpha$ verovatnoća da se putnik sa kupljenom kartom pojavi na let i broj putnika koji se pojavi na izlazu ima nornalnu raspodelu, $S|B\sim\mathcal{N}(\alpha B,\ \alpha(1-\alpha)B)$. Tada je optimalna granica prebukiranosti $B$ (optimalan broj prodatih karata ) je određena sledećim izrazom

$$\Phi\left(\frac{(C-\alpha B)}{(\alpha(1-\alpha)B)^2}\right)=\frac{R^o}{f+R^o}+\frac{\varphi\left(\frac{(C-\alpha B)}{(\alpha(1-\alpha)B)^2}\right)\sqrt{1-\alpha}}{2\sqrt{B\alpha}},$$

gde su $\Phi(\cdot)$ i $\varphi(\cdot)$ funkcija raspodele i gustina raspodele standardne normalne raspodele $\mathcal{N}(0,1)$.

**Dokaz [1]:**

Avio kompanija ima za cilj da maksimizira očekivani prihod koji je jednak prihodu od prodatih karata ukoliko je broj putnika koji se pojavi na izlazu manji od kapaciteta aviona. Ukoliko je broj putnika na izlazu veći od kapaciteta aviona, prihod je umanjen za troškove naknade. Odnosno, prihod avio kompanije je jednak

$$U(B,S)=\begin{cases} fS, & 0\le S\le C\\ fC-R^o(S-C), & S>C,\end{cases}$$

i stoga očekivani prihod je jednak

$$E[U(B,S)]=\int_0^C fS\theta(S|B)\,dS+\int_C^\infty\big(fC-R^o(S-C)\big)\theta(S|B)dS,$$

gde je $\theta(S|B)$ gustina raspodele uslovne raspodele, $\theta(S|B)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, gde je je $\mu=\alpha B$ i $\sigma^2=\alpha(1-\alpha)B$. Neka je $\Theta(C)=\int_{-\infty}^C\theta(S|B)dS$ uslovna funkcija raspodele slučajne promenljive $S$. Tada je

$$\Theta(C)=\int_{-\infty}^C\theta(S|B)dS=\int_{-\infty}^C\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dS=\int_{-\infty}^{\frac{C-\mu}{\sigma}}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\Phi\left(\frac{C-\mu}{\sigma}\right).$$

Koristeći poslednji izraz u izrazu za očekivani prihod dobijamo

$$E[U(B,S)]=\int_{-\infty}^\infty fS\theta(S|B)\,dS-\int_C^\infty fS\theta(S|B)\,dS-\int_{-\infty}^0 fS\theta(S|B)\,dS$$

$$+\int_C^\infty\big(fC-R^o(S-C)\big)\theta(S|B)dS$$

$$= f\mu - (f + R^o)\int_C^\infty S\theta(S|B)\, dS + (f + R^o)\int_C^\infty C\theta(S|B) dS$$

$$= f\mu - (f + R^o)\int_C^\infty S\theta(S|B)\, dS + (f + R^o)C\big(1 - \Theta(C)\big)$$

$$\int_C^\infty S\theta(S|B)\, dS = \int_{-\infty}^\infty S\theta(S|B)\, dS - \int_{-\infty}^C S\theta(S|B)\, dS = \mu - \int_{-\infty}^C \mathrm{S}\, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dS$$

$$= \mu + \int_{-\infty}^{e^{-\frac{(C-\mu)^2}{2\sigma^2}}} \sigma^2\, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} d\left(e^{-\frac{(S-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right) - \mu \int_{-\infty}^C \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(S-\mu)^2}{2\sigma^2}} dS = \mu + \sigma^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(C-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$-\mu\, \Theta(C) = \mu\big(1 - \Theta(C)\big) + \sigma^2\theta(C) = \mu\left(1 - \Phi\left(\frac{C-\mu}{\sigma}\right)\right) + \sigma\varphi\left(\frac{C-\mu}{\sigma}\right)$$

Ubacivanjem poslednjeg izraza u uzraz za očekivane prihode dobijamo

$$E[U(B,S)] = f\mu - (f + R^o)\left(\mu\left(1 - \Phi\left(\tfrac{C-\mu}{\sigma}\right)\right) + \sigma\varphi\left(\tfrac{C-\mu}{\sigma}\right)\right) + (f + R^o)C\left(1 - \Phi\left(\tfrac{C-\mu}{\sigma}\right)\right) =$$

$$f\mu - (f + R^o)\left(\sigma\varphi\left(\tfrac{C-\mu}{\sigma}\right) - (C - \mu)\left(1 - \Phi\left(\tfrac{C-\mu}{\sigma}\right)\right)\right).$$

Diferenciranjem po $B$ i izjednačavanjem izvoda sa nulom dobijamo

$$0 = \frac{\partial E[U(B,S)]}{\partial B} = f\alpha - (f + R^o)\left[\varphi\left(\frac{C-\mu}{\sigma}\right)\frac{\sigma}{2B} + \sigma\frac{\partial\varphi\left(\frac{C-\mu}{\sigma}\right)}{\partial B} + \alpha\left(1 - \Phi\left(\frac{C-\mu}{\sigma}\right)\right)\right]$$

$$+(f + R^o)(C - \mu)\frac{\partial\Phi\left(\frac{C-\mu}{\sigma}\right)}{\partial B}$$

S obzirom da je $\sigma\frac{\partial\varphi\left(\frac{C-\mu}{\sigma}\right)}{\partial B} + (C - \mu)\frac{\partial\Phi\left(\frac{C-\mu}{\sigma}\right)}{\partial B} = 0$, dobijamo da je

$\alpha\left(1 - \Phi\left(\frac{C-\mu}{\sigma}\right)\right) = \frac{f\alpha}{f+R^o} - \varphi\left(\frac{C-\mu}{\sigma}\right)\frac{\sigma}{2B}$ , odakle dobijamo izraz za optimalnu granicu prebukiranosti (optimalan broj prodatih karata)

$$\Phi\left(\frac{C-\mu}{\sigma}\right) = \frac{R^o}{f + R^o} - \varphi\left(\frac{C-\mu}{\sigma}\right)\frac{\sigma}{2\mu}$$

odnosno $\Phi\left(\frac{(C-\alpha B)}{(\alpha(1-\alpha)B)^2}\right)=\frac{R^o}{f+R^o}+\frac{\varphi\left(\frac{(C-\alpha B)}{(\alpha(1-\alpha)B)^2}\right)\sqrt{1-\alpha}}{2\sqrt{B\alpha}}$, što je i trebalo pokazati. ∎

Predhodne tri teoreme su jedan od jednostavnih načina da izračunamo optimalan broj karata koje avio kompanija odluči da proda, odnosno optimalna granica prebukiranosti. U tim slučajevima, ignorisali smo tražnju putnika za kartama i pretpostavili da će avio kompanija prodati sve karte koje pusti u prodaju. Ova pretpostavka je opravdana u slučaju da imamo jednu putnu klasu, što ćemo i pokazati u nastavku. Ukoliko imamo više putnih klasa, na primer, poslovnu i ekonomsku, izračunavanje optimalne granice je komplikovanije, i trebalo bi uključiti tražnju za kartama ekonomske i poslovne klase.

**<u>Teorema 4.4</u> [1]**

Neka važe uslovi predhodne teoreme. Tada, optimalna granica prebukiranosti ne zavisi od tražnje putnika za kartama.

**Dokaz [1]:**

Neka je $U(B,D,S)$ ukupan prihod čiju očekivanu vrednost avio kompanija želi da maksimizira. Primetimo da za razliku od predhodne tri teoreme, dopuštamo da prihod zavisi od tražnje za kartama $D$. Tada je broj putnika koji se pojavi na izlazu modelovan slučajnom promenljivom $S(min\{B,D\})$, koja sada zavisi i od $D$. Neka je $D$ slučajna promenljiva sa gustinom raspodele $g(x)$. Tada je očekivani prihod jednak

$$E[U(B,D,S)]=\int_0^\infty f\,E[\,S(min\{B,x\})]g(x)dx-\int_0^\infty (R+f)[S(min\{B,x\})-C]^+g(x)dx$$

$$\int_0^B fE[S(x)]\,g(x)dx+\int_B^\infty fE[S(B)]\,g(x)dx-(R+f)\int_o^B E[S(x)-C]^+g(x)dx$$

$$-(R+f)\int_o^B E[S(B)-C]^+g(x)dx.$$

Diferenciranjem po $B$ i izjednačavanjem izvoda sa nulom dobijamo

$$0=\frac{\partial E[U(B,D,S)]}{\partial B}=fS(B)g(B)+\int_B^\infty f\frac{\partial E[S(B)]}{\partial B}g(x)dx-fS(B)g(B)$$

$$-(R+f)\,E[S(B)-C]^+g(B)+(R+f)\,E[S(B)-C]^+g(B)$$

$$-(R+f)\int_B^\infty \frac{\partial E[S(B)-C]^+}{\partial B}g(x)dx.$$

$$= f\frac{\partial E[S(x)]}{\partial B}Pr\{D \geq B\} - (R+f)\frac{\partial E[S(B)-C]^{+}}{\partial B}Pr\{D \geq B\}.$$

Stoga, dobili smo da je

$$f\frac{\partial E[S(x)]}{\partial B} = (R+f)\frac{\partial E[S(B)-C]^{+}}{\partial B}$$

odnosno da tražnja *D* ne utiče na broj karata koje avio kompanija pusti u prodaju. ∎

## 4.2 Statički model sa više putničkih klasa

U statičkom modelu sa jednom klasom, posmatrali smo slučaj kada su sve karte za let identične, odnosno svi putnici lete istom klasom. Međutim, većina avio kompanija prodaje karte za različite klase, najčešće poslovnu i ekonomsku klasu. Iz tog razloga, uopštićemo osnovni model uvođenjem više klasa na letu. Prvo ćemo definisati strategije koje avio kompanija koristi u modelu sa više klasa.

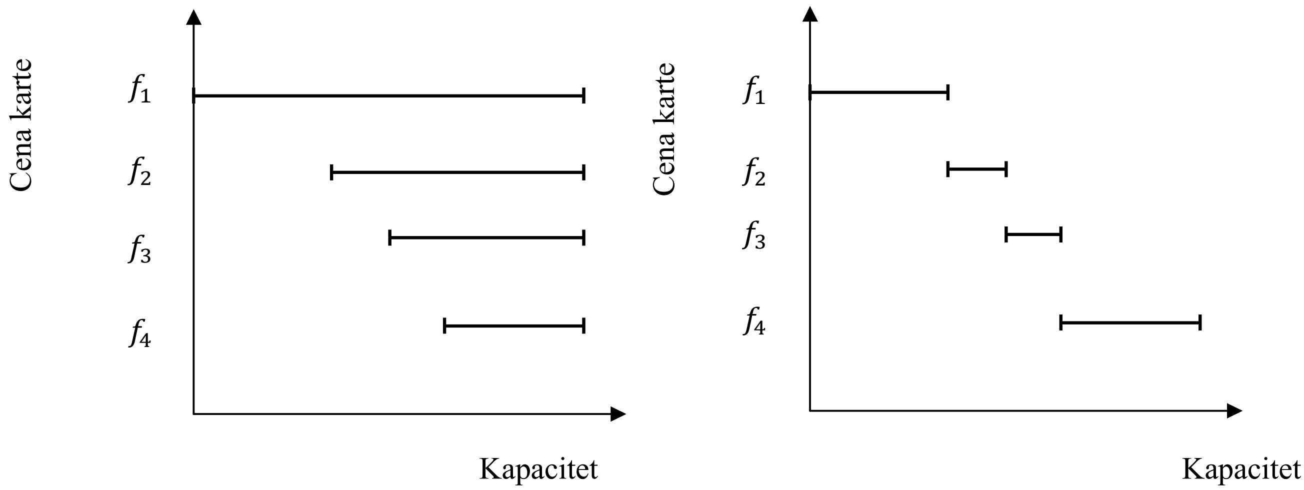
***Buking granice*** su kontrole (strategije) koje određuju *maksimalan* broj karata koje mogu biti prodate svakoj klasi u određenom vremenskom trenutku. Razlikujemo dve vrste buking granica:

- *Parcijalne*
- *Umetnute*

U slučaju parcijalnih buking granica, ukupan dostupan kapacitet je podeljen na odvojene blokove, svaki blok predstavlja broj sedišta dostupan datoj klasi. Na primer, ukoliko je dostupan kapacitet 30 sedišta, parcijalne buking granice mogu biti 12 sedišta za prvu klasu , 10 sedišta za drugu klasu, i 8 sedišta za treću klasu. Slika 4.1 ilustruje ovaj koncept.

U slučaju umetnutih buking granica, kapaciteti dostupni svakoj klasi se preklapaju na hijerarhijski način : klasi sa višom cenom karte dostupan je kapacitet rezervisan za klase sa nižom cenom karte. Stoga, buking granica za prvu klasu je ukupan dostupan kapacitet. Na primer, sa istim dostupnim kapacitetom od 30 sedišta, i umetnutim buking granicama od b1=30, b2=18 i b3=8 za klase 1, 2, i 3 respektivno, prihvatili bismo najviše 8 putnika treće klase , 18 putnika druge klase, i 30 putnika prve klase.

**Slika 4.1 Parcijalne i umetnute buking granice**



Glavni cilj umetnitih buking granica je da zaštiti sedišta namenjena poslovnoj klasi, odnosno ograniči broj sedišta prodatih ekonomskoj klasi dozvoljavajući joj sedišta koja bi u krajnjoj liniji ostala nepopunjena. U slučaju parcijalnih granica, zahtev za rezervaciju za prvu klasu neće biti prihvaćen čak i ako sva sedišta druge klase nisu popunjena. Stoga, avio kompanija ograničava mogućnost da prihvati neočekivani porast tražnje za sedištima prve klase i gubi potencijalni prihod ukoliko ne koristi umetnute granice. Kako je očekivani prihod avio kompanije ukoliko koristi umetnute granice veći ili jednak od očekivanog prihoda ukoliko koristi parcijalne granice , koncentrisaćemo se na modele sa umetnutim granicama.

***Nivo protekcije*** za datu klasu je *minimalan* broj sedišta koji treba da bude sačuvan za tu klasu i dostupan svim višim putničkim klasama. Nivo protekcije za datu klasu je jednostavno razlika između sopstvene buking granice i buking granice naredne klase.

Za sada, pretpostavljamo da avio kompanija ne prodaje više karata nego što je kapacitet leta, da nema putnika koji se nisu pojavili na let ili otkazali rezervaciju. Tada, cilj avio kompanije da odluči koliko karata da proda prvoj klasi, koliko drugoj klasi tako da ukupan broj karata ne premašuje kapacitet leta. Prvo ćemo sumirati osnovne pretpostavke i optimalnu strategiju Littlewood-ovog modela sa dve klase, a zatim proširiti model i dozvoliti nepojavljivanje na let, otkazivanje rezervacije i korišćenje strategije prebukiranosti.

### 4.3 Littlewood-ov model sa dve putničke klase

Littlewood je prvi predložio kako pronaći optimalnu strategiju avio kompanije u slučaju dve putničke klase sa umetnutim granicama. Intuitivno, ideja je da se izjednači marginalni prihod od prodaje karata dveju klasa, odnosno prestati sa prodajom karata druge klase ukoliko je očekivani prihod od prodaje karte prve klase veći od očekivanog prihoda od prodaje karte druge klase.

Primetimo da pretpostavka iz modela sa jednom putničkom klasom da avio kompanija prodaje karte po principu ko prvi dođe dobije kartu, više ne važi. Ukoliko bi pretpostavka važila, avio kompanija bi najverovatnije popunila let prodajom karata putnicima ekonomske klase još na početku rezervacionog perioda. Putnici koji bi kasnije kupili karte, najčešće putnici poslovne klase, bi platili višu cenu karte ali avio kompanija ne bi imala više karata da im proda. U tom slučaju, avio kompanija bi imala trošak neoptimalno iskorišćenog sedišta. Stoga, u ovom modelu pretpostavljamo da zahtevi za rezervaciju karte ekonomske klase pristižu pre zahteva za rezervaciju karte poslovne klase. Cilj je da se pronađe optimalna strategija, odnosno optimalna granica prodatih karata ekonomske klase da bi se sačuvala sedišta poslovne klase.

Najjednostavniji model upravljanja prihodima pretpostavlja dve klase sa cenama karata $f_1 > f_2$, gde je $f_1$ cena karte za prvu (poslovnu) klasu i $f_2$ cena karte za drugu (ekonomsku) klasu.

Kapacitet aviona je $C$, i ne postoji mogućnost otkazivanja rezervacije, nepojavljivanja na let i prebukiranosti. Slučajna promenliva kojom modelujemo tražnju za rezervaciju sedišta i njena funkcija raspodele klase $j, j \in \{1,2\}$, su označene sa $D_j$ i $F_j(\cdot)$, respektivno. Pretpostavljamo da se tražnja za rezervaciju sedišta ekonomske klase realizuje prva. Neka je $y_1$ nivo protekcije za poslovnu klasu i $b_1$ i $b_2$, buking granice za poslovnu i ekonomsku klasu. Problem koji se postavlja je koliko zahteva za rezervaciju sedišta ekonomske klase treba prihvatiti pre nego što se realizuje tražnja prve klase.

Logika rešavanja problema je sledeća : neka je $x$ preostali kapacitet aviona, i pristiže zahtev za rezervaciju sedišta poslovne klase. Ukoliko se zahtev prihvati, avio-kompanija ostvaruje prihod $f_2$. Ukoliko se zahtev ne prihvati, $x$-to sedište će biti prodato po ceni $f_1$ ako je tražnja prve klase jednaka $x$ ili veća, odnosno ako je $D_1 \geq x$. Stoga, očekivani marginalni dobitak od rezervisanja $x$-tog sedišta za prvu klasu je $f_1 P(D_1 \geq x)$. Dakle, logično je prihvatiti zahtev druge klase sve dok je cena karte druge klase veća od očekivanog marginalnog dobitka, odnosno ako važi :

$$f_2 \geq f_1 P(D_1 \geq x).$$

Primetimo da je desna strana u gornjem izrazu opadajuća po $x$, što implicira da postoji optimalni nivo protekcije $y_1^*$ tako da prihvatamo zahtev ekonmske klase ako je preostali kapacitet veći od $y_1^*$ ( $x \geq y_1^*$ ), odnosno odbijemo zahtev ekonomske klase ako je preostali kapacitet manji od $y_1^*$ ( $x \leq y_1^*$ ). Formalno, $y_1^*$ zadovoljava

$f_2 < f_1 P(D_1 \geq y_1^*)$ i

$f_2 \geq f_1 P(D_1 \geq y_1^* + 1)$.

U slučaju da je funcija raspodele $F_1(x)$ tražnje prve klase neprekidna, nivo protekcije $y_1^*$ se može izračunati na jednostavniji način :

$f_2 = f_1 P(D_1 > y_1^*)$ , odnosno , $y_1^* = F_1^{-1}\left(1 - \frac{f_2}{f_1}\right)$,

što je poznato kao *Littlewood-ovo pravilo*.

Optimalna strategija za rešavanje najjednostavnijeg problema upravljanja prihodima je :

- Postavljanje nivoa protekcije $y_1^*$ za prvu klasu, dobijenog Littlewood-ovim pravilom,
- Postavljanje buking granice za drugu klasu $b_2^* = C - y_1^*$,
- Korićenje kontrole licitirane cene, sa licitiranom cenom $\pi(x) = f_1 P(D_1 > y_1^*)$.

Dokaz za optimalnu strategiju ćemo dati u generalizovanom modelu sa $n$ klasa koji se nalazi u nastavku.

*Primer 4.1 :*

Pretpostavimo da je $D_1 : \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , odnosno $D_1$ ima normalnu raspodelu sa sredinom $\mu$ i standardnom devijacijom $\sigma$. Tada, koristeći Littlewood-ovo pravilo dobijamo $F_1(y_1^*) = 1 - \frac{f_2}{f_1}$ , što dalje implicira da je optimalni nivo protekcije za prvu klasu jednak:

$$y_1^* = \mu + \Phi^{-1}\left(1 - \frac{f_2}{f_1}\right)\sigma,$$

gde je $\Phi^{-1}(\cdot)$ inverzna funkcija funkcije standardne normalne raspodele $\mathcal{N}(0,1)$. Stoga, za poslovnu klasu čuvamo dovoljno sedišta da zadovolji njenu tražnju, $\mu$, plus - minus faktor koji zavisi od odnosa cena karata i standardne devijacije tražnje.

Ako je $f_2/f_1 > 0.5$, optimalni nivo protekcije za prvu klasu je manji od aritmetičke sredine dveju očekivanih tražnji; ako je $f_2/f_1 < 0.5$, optimalni nivo protekcije za prvu klasu je veći od aritmetičke sredine dveju očekivanih tražnji. U suštini, što je količnik $f_2/f_1$ manji, više sedišta ostavljamo za prvu klasu. Ovo ima intuitivnog smisla jer spremni smo da prihvatimo veoma nisku cenu karte druge klase samo ako su šanse da prodamo kartu po višoj ceni veoma male.

Da sumiramo, Littlewood-ovo pravilo kojim određujemo optimalan nivo protekcije za poslovnu klasu $y_1^*$ iz jednakosti $f_2 = f_1 P(D_1 > y_1^*)$ nam kaže kada avio kompanija treba da prestane da prodaje karte za ekonomsku klasu i koliko sedišta da sačuva za poslovnu klasu.

### 4.4 Littlewood-ov model sa dve putničke klase i metodom prebukiranosti

Littlewood-ovo pravilo kao strategija avio kompanije ne uzima u obzir mogućnost otkazivanja rezervacije i nepojavljivanja na let, kao ni korišćenje prebukiranosti. Stoga, od interesa bi bilo modifikovati Littlewood-ovo pravilo tako da uzima u obzir gore pomenute mogućnosti. Funkcije raspodele tražnje za kartom prve ili druge klase ostaju nepromenjene. Razlika se ogleda u tome da svaki prihvaćen zahtev za rezervaciju sedišta ne generiše siguran ostvareni prihod zbog mogućnosti otkazivanja ili nepojavljivanja na let. Neka je

$\alpha_1$ verovatnoća da se putnik sa kartom ekonomske klase pojavi na izlazu,

$\alpha_2$ verovatnoća da se putnik sa kartom poslovne klase pojavi na izlazu,

gde su $0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1$, i pretpostavljamo da su ova dva događaja nezavisna. Dalje, pretpostavljamo da zahtevi za rezervaciju sedišta pristižu prvo od ekonomske klase a zatim od poslovne. Pretpostavimo da je jedan takav zahtev poslat avio kompaniji. U tom slučaju, avio kompanija treba da odluči da li da prihvati rezervaciju i time smanji broj karti poslovne klase za jedan, ili da odbije zahtev. Sada, $y_1^*$ predstavlja optimalni nivo protekcije za poslovnu klasu koji avio kompanija želi da nađe uzimajući u obzir nepojavljivanje putnika i mogućnost prebukiranosti.

Ukoliko avio kompanija prihvati zahtev za rezervaciju još jednog sedišta ekonomske klase, tada će za poslovnu klasu ostati $y_1 - 1$ sedište. U suprotnom, ukoliko avio kompanija odbije zahtev, za poslovnu klasu ostaje $y_1$sedište.

Ukoliko je zahtev prihvaćen, i prodaja karata ekonomske klase je završena, avio kompanija će generisati prihod jednak

$$U(1) = f_1\alpha_1 min\{y_1 - 1, D_1\} + f_2\alpha_2.$$

Ukoliko je zahtev odbijen, prihod je jednak

$$U(0) = f_1\alpha_1 min\{y_1, D_1\}.$$

Stoga, očekivani prihod je

$$E[U(1)] = f_1\alpha_1(\sum_{D_1=0}^{y_1-1} D_1 p_1(D_1) + \sum_{D_1=y_1}^{\infty} (y_1 - 1)p_1(D_1)) + f_2\alpha_2$$

$$E[U(0)] = f_1\alpha_1(\sum_{D_1=0}^{y_1-1} D_1 p_1(D_1) + \sum_{D_1=y_1}^{\infty} y_1 p_1(D_1)).$$

Optimalni nivo protekcije za poslovnu klasu $y_1^*$ mora biti takav da je daje veći prihod, odnosno da je optimalno prihvatiti rezervaciju ako je $E[U(1)] \geq E[U(0)]$.

$$f_1\alpha_1(\sum_{D_1=0}^{y_1-1} D_1 p_1(D_1) + \sum_{D_1=y_1}^{\infty} (y_1 - 1)p_1(D_1)) + f_2\alpha_2$$
$$\geq f_1\alpha_1(\sum_{D_1=0}^{y_1-1} D_1 p_1(D_1) + \sum_{D_1=y_1}^{\infty} y_1 p_1(D_1)).$$

Sledi da zahtev za rezervaciju sedišta poslovne klase treba da bude prihvaćen ako važi

$$f_2\alpha_2 \geq f_1\alpha_1 \sum_{D_1=y_1}^{\infty} p_1(D_1).$$

Najmanji broj $y_1^*$ koji zadovoljava gornju nejednakost je optimalan nivo protekcije za poslovnu klasu, čime dobijamo izmenjeno Littlewood-ovo pravilo.

**Napomena 4.4** Iz gornje jednačine dobijamo samo otpimalan nivo protekcije za poslovnu klasu $y_1^*$. Međutim, ne možemo da dobijemo optimalnu granicu prebukiranosti $B_1$ i $B_2$ za obe klase. Međutim, možemo izračunati optimalnu granicu prebukiranosti za prvu klasu ${B_1}^*$, koja je dostupna za sve klase, a zatim optimalnu granicu prebukiranosti za drugu klasu koristeći ${B_2}^* = {B_1}^* - {y_1}^*$. Rezultat je da će svaka klasa biti prebukirana za isti procenat. Optimalne granice prebukiranosti možemo izračunati koristeći ponderisanu cenu karte kako sledi

$$\bar{f} = \frac{\sum_{i=1}^{2} f_i E[D_i]}{\sum_{i=1}^{2} E[D_i]}.$$

Stoga, ukupan očekivani prihod koji avio kompanija želi da maksimizira je jednak

$$\bar{f}S(min\{B_1, D\}) - RE[S(min\{B_1, D\}) - C]^+,$$

gde je kao i ranije $R$ trošak naknade u slučaju prekobrojnog putnika (dobrovoljno ili nedobrovoljno prekobrojnog), i $D = D_1 + D_2$ ukupna tražnja za kartama prve i druge klase. Iz predhodnog poglavlja sa jednom putničkom klasom, znamo da tražnja za kartama ne utiče na optimalnu granicu prebukiranosti, pa je očekivani prihod jednak

$$\bar{f}S(B_1) - RE[S(B_1) - C]^+.$$

Dalje, optimalnu granicu prebukiranosti ${B_1}^*$ možemo pronaći koristeći drugo ili treće pravilo iz predhodnog poglavlja, kada $S$ ima binonmu ili normalnu raspodelu.

Modeli koje smo posmatrali u ovom poglavlju su statički, što znači da broj karti koje avio kompanija treba da proda je određen na početku rezervacionog perioda. Strategijom optimalne granice prebukiranosti, avio kompanija maksimizira očekivani prihod, odnosno minimizira očekivani trošak. Strategije koje smo razmatrali su optimalne ukoliko zahtevi za rezervaciju pristižu prvo od ekonomske klase a zatim od poslovne, i ukoliko se predviđenja tražnja ne menja u toku rezervacionog perioda.

U stvarnosti, realizovana tražnja ne mora da bude jednaka predviđenoj, i avio kompanija ima mogućnost da menja granicu prebukiranosti za vreme rezervacionog perioda. Stoga, ukoliko možemo da dobijemo podatke realizovane tražnje za vreme rezervacionog perioda, možemo koristiti statički model više puta što je u stvari aproksimacija za dinamički model o kom ćemo reći više u sledećem poglavlju.

## 4.5 Littlewood-ov model sa $n$ putničkih klasa

Model sa $n > 2$ klasa je generalizacija modela sa dve klase. Neka su klase numerisane tako da važi $f_1 > f_2 > \cdots > f_n$, odnosno cena karte u najvišoj putničkoj klasi je veća od cene karte u drugoj klasi, dok je cena karte u poslednjoj putničkoj ($n$ −toj) klasi najniža. Pretpostavljamo da tražnja za sedištem u $n$ −toj klasi stiže u prvom periodu (period $n$), tražnja za sedištem u $n-1$-oj stiže u periodu $n-1$, tražnja za sedištem u prvoj klasi stiže u poslednjem periodu (period 1). Kako postoji korespodencija između broja klasa i broja perioda, oba ćemo indeksirati sa $j$.

Neka $x$, kao i u modelu sa dve klase, predstavlja preostali kapacitet aviona. Na početku svakog perioda $j$, tražnje $D_j, D_{j-1}, \cdots, D_1$ se nisu još realizovale. U svakom periodu $j$, sledeći događaji se dešavaju:

- Realizacija tražnje $D_j$, dobijamo posmatranu vrednost tražnje.
- Odlučujemo koju vrednost (količinu) $u$ tražnje $D_j$ da prihvatimo, pri čemu je prihvaćena količina manja od preostalog kapaciteta, odnosno $u \leq x$. Stoga, optimalna kontrola $u^*$ je funkcija perioda $j$, preostalog kapaciteta $x$, i tražnje $D_j$, $u^* = u^*(j, x, D_j)$.
- Ostvaruje se prihod $f_j u$, i prelazimo u sledeći period $j-1$ sa preostalim kapacitetom $x-u$.

Redosled događaja je pretpostavljen iz analitičkih razloga; optimalnu kontrolu $u^*$ izvodimo kao da je odluka koju količinu tražnje da prihvatimo doneta *posle* poznavanja realizovane tražnje $D_j$. U stvarnosti, tražnja $D_j$ se realizuje tokom perioda $j$, i optimalna kontrola mora da se pronađe *pre* posmatranja celokupne tražnje $D_j$ . Međutim, ispostavlja se da nam u pronalaženju optimalne kontrole nije potrebno prvenstveno poznavanje $D_j$, pa pretpostavka o poznavanju $D_j$ nije restiktivna.

Neka $V_j(x)$ predstavlja vrednosnu funkciju na početku perioda $j$. Kada je realizovana vrednost $D_j$ posmatrana, vrednost $u$ je izabrana tako da maksimizuje prihod ostvaren u periodu $j$ plus prihod koji će se ostvariti u preostalim periodima, u periodima $j-1, \ldots, 1$ :
$f_j u + V_{j-1}(x-u)$,

sa ograničenjem $0 \leq u \leq min\{D_j, x\}$ . Vrednosna funkcija na početku perioda $j$, $V_j(x)$, je stoga očekivana vrednost optimizacije gornjeg problema. Dakle, Belmanova jednačina glasi :

$$V_j(x) = E\left[\max_{0 \leq u \leq \min\{D_j, x\}} \left\{f_j u + V_{j-1}(x-u)\right\}\right]$$

sa graničnim uslovima $V_0(x) = 0,\ x = 0,1,..,C$.

Vrednosti $u^*$ koje maksimiziraju desnu stranu gornje jednakosti za svako $j$ i svako $x$ formiraju strategiju optimalne kontrole za ovaj model.

Posmatramo slučaj kada tražnja i kapacitet uzimaju diskretne vrednosti. Definišimo sa

$$\Delta V_j(x) \equiv V_j(x) - V_j(x-1)$$

očekivanju marginalnu vrednost kapaciteta u periodu $j$, odnosno očekivani prihod $x$-tog sedišta.

**<u>Teorema 4.5</u> [1]**

*Za marginalne vrednosti* $\Delta V_j(x)$ funkcije vrednosti $V_j(x)$ važi sledeće :

*(i)* $\Delta V_j(x+1) \leq \Delta V_j(x), \quad za\ \forall x, j$

*(ii)* $\Delta V_{j+1}(x) \geq \Delta V_j(x), \quad za\ \forall x, j.$

Interpretacija teoreme je sledeća : za dati period $j$, marginalna vrednost je opadajuća funkcija od preostalog kapaciteta; za dati preostali kapacitet, marginalna vrednost je rastuća funkcija broja preostalih perioda.

**Dokaz [1] :**

U dokazu ćemo koristiti sledeću lemu čiji se dokaz nalazi u nastavku.

**<u>Lema 4.1</u> [1]**

Neka je funkcija $g : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ konkavna, i funkcija $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ definisana sa

$$f(x) = \max_{a=0,1,\dots,m} \{ar + g(x-a)\}$$

za svako fiksno $r \geq 0$ i nenegativan ceo broj $m \leq x$. Tada je $f(x)$ takođe konkavna za $x \geq 0$.

Prvo dokazujemo deo (i) propozicije, da je marginalna vrednost $\Delta V_j(x)$ nerastuća po $x$ (odnosno da je $V_j(x)$ konkavna funkcija od $x$ ). Dokaz sprovodimo indukcijom po $j$.

1. Za $j = 0$:
   Primetimo da je u poslednjem periodu, periodu 0, $V_{n+1}(x) = 0$ za sve $x$, što je trivijalno konkavna funkcija od $x$.
2. Pretpostavimo da je $V_{j-1}(x)$ konkavna funkcija od $x$.
3. Pokažimo da je $V_j(x)$ konkavna funkcija od $x$. Podsetimo se da je

$$V_j(x) = E\left[\max_{0 \leq u \leq \min\{D_j, x\}} \{f_j u + V_{j-1}(x-u)\}\right]$$

Unutrašnja maksimizacija je upravo oblika kao u lemi sa $m = min\{D_j, x\}$. Stoga, sledi da je funkcija

$$H_j(D_j, x) = \max_{0 \leq u \leq \min\{D_j, x\}} \{f_j u + V_{j-1}(x-u)\}$$

konkavna po $x$ za bilo koju realizaciju $D_j$. Kako je $V_j(x) = E_{D_j}[H(D_j, x)]$, $V_j(x)$ je ponderisana aritmetička sredina funkcija konkavnih po $x$, sledi da je $V_j(x)$ takođe konkavna po $x$.

Dokaz (ii):

Deo (ii) govori da je marginalna vrednost za fiksan kapacitet $x$, manja u periodu $j$ nego u periodu $j+1$. Dokaz sledi na osnovu sledećih nejednakosti:

$$
\begin{aligned}
\Delta V_j(x) = \\
& E\left[r_j\, min\left\{D_j, \left(x - y_{j-1}^*\right)^+\right\} + V_{j-1}\left(x - min\left\{D_j, \left(x - y_{j-1}^*\right)^+\right\}\right)\right] \\
& -E\left[r_j\, min\left\{D_j, \left(x - 1 - y_{j-2}^*\right)^+\right\} + V_{j-1}\left(x - min\left\{D_j, \left(x - 1 - y_{j-2}^*\right)^+\right\}\right)\right] \\
\geq\ & E\left[r_j\, min\left\{D_j, \left(x - y_{j-2}^*\right)^+\right\} + V_{j-1}\left(x - min\left\{D_j, \left(x - y_{j-2}^*\right)^+\right\}\right)\right] \\
& -E\left[r_j\, min\left\{D_j, \left(x - 1 - y_{j-2}^*\right)^+\right\} + V_{j-1}\left(x - 1 - min\left\{D_j, \left(x - y_{j-2}^*\right)^+\right\}\right)\right] \\
\geq\ & E\left[\Delta V_{j-1}\left(x - min\left\{D_j, \left(x - y_{j-1}^*\right)^+\right\}\right)\right] \\
\geq\ & \Delta V_{j-1}(x).
\end{aligned}
$$

Prva nejednakost sledi zato što je $y_{j-1}^*$ optimalni nivo protekcije u periodu $j-1$, druga nejednakost sledi iz nenegativnosti $min\left\{D_j, \left(x - y_{j-2}^*\right)^+\right\} - min\left\{D_j, \left(x - 1 - y_{j-2}^*\right)^+\right\}$, i poslednja nejdnakost sledi iz dokazanog dela pod (i) da je $\Delta V_{j-1}(x)$ opadajuća funkcija od $x$.

**Dokaz Leme 4.1 [1]:**

Koristićemo sledeću definiciju konkavnosti:

**<u>Definicija 4.1</u> [1]**
Funkcija definisana na skupu nenegativnih celih brojeva $g : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ je konkavna ako važi $g(x+1) - g(x)$ je nerastuća za $x \geq 0$.

Primetimo prvo da smenom promenljivih $y = x - a$, možemo napisati $f(x) = \hat{f}(x) + rx$, gde je $\hat{f}(x) = \max_{x-m \leq y \leq x}\{-ar + g(y)\}$.

Analizirajmo funkciju $\hat{f}(x)$. Neka je $y^* = arg\max_{y \geq 0}\{-ar + g(y)\}$. Kako je $g(y)$ konkavna, $-ar + g(y)$ je takođe konkavna, neopadajuća za $y \leq y^*$, i nerastuća za $y > y^*$. Stoga, za dato $m$ i $r$,

$$
\hat{f}(x) = \begin{cases} -xr + g(x) & x \leq y^* \\ y^* r + g(y^*) & y^* \leq x \leq y^* + m \\ -(x-m)r + g(x-m) & x \geq y^* + m \end{cases}
$$

Za $x \leq y^*$, koristeći činjenicu da je $g(x)$ konkavna dobijamo:

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(x+1) - \hat{f}(x) &= -r + g(x+1) - g(x) \\
&\leq -p + g(x) - g(x-1) \\
&= \hat{f}(x) - \hat{f}(x-1).
\end{aligned}
$$

Za $y^* \leq x \leq y^* + m$, sledi da je $\hat{f}(x+1) - \hat{f}(x) = 0$, što je trivijalno konkavna funkcija od $x$ na ovom intervalu.

Konačno, za $x \geq y^* + m$, koristeći činjenicu da je $g(x)$ konkavna dobijamo:

$$\begin{aligned} \hat{f}(x+1) - \hat{f}(x) &= -r + g(x+1-m) - g(x-m) \\ &\leq -p + g(x-m) - g(x-1-m) \end{aligned}$$
$$= \hat{f}(x) - \hat{f}(x-1).$$

Kako je $f(x) = \hat{f}(x) + rx$, i $\hat{f}(x)$ konkavna za $x \geq 0$, sledi da je $f(x)$ konkavna za $x \geq 0$.

∎

Teorema optimalne strategije daje smernice na koji način pronaći optimalne nivoe protekcije $y_j^*$. Iz Belmanove jednačine i definicije $\Delta V_j(x)$ dobijamo:

$$V_{j+1}(x) = V_j(x) + E\left[\max_{0 \leq \mathrm{u} \leq \min\{\mathrm{D}_{j+1}, x\}} \left\{\sum_{z=1}^{\mathrm{u}} f_{j+1} - \Delta V_j(x+1-z)\right\}\right]$$

pri čemu je suma jednaka nuli ukoliko je $u = 0$.

Kako je $\Delta V_j(x)$ opadajuća po $x$, iz (i) sledi da su članovi sume $f_{j+1} - \Delta V_j(x+1-z)$ opadajući po $z$. Stoga, optimalno je povećavati $u$ sve dok članovi $f_{j+1} - \Delta V_j(x+1-z)$ ne postanu negativni ili se ne dostigne gornja granica $\min\{\mathrm{D}_{j+1}, x\}$, šta god se prvo desi.

Optimalni nivoi protekcije $y_j^*$ se mogu onda definisati sa

$$y_j^* \equiv \max\{x : f_{j+1} < \Delta V_j(x)\}, \quad j = 1,2,\dots,n-1.$$

Optimalne kontrole su tada date sa

$$u^*(j+1, x, D_{j+1}) = min\left\{(x - y_j^*)^+, D_{j+1}\right\},$$

$(x - y_j^*)^+$predstavlja višak preostalog kapaciteta u odnosu na nivo protekcije , odnosno maksimalan broj sedišta koji smo spremni da prodamo klasi $j+1$.

Ukoliko koristimo optimalne buking granice date sa

$$b_j^* = C - y_{j-1}^* \ , \quad j = 2, \dots, n,$$

optimalne kontrole su tada date sa

$$u^*(j+1, x, D_{j+1}) = min\left\{\left(b_{j+1}^* - (C - x)\right)^+, D_{j+1}\right\}.$$

Ukoliko koristimo optimalne licitirane cene date sa

$$\pi_{j+1}(x) = \Delta V_j(x)$$

optimalne kontrole su tada date sa

$$u^*(j+1, x, D_{j+1}) = \begin{cases} 0, & f_{j+1} < \pi_{j+1}(x) \\ max\{z : \ f_{j+1} \geq \ \pi_{j+1}(x - z)\}, & f_{j+1} \geq \pi_{j+1}(x) \end{cases}$$

Teorema optimalne strategije implicira da važi sledeći odnos između nivoa protekcije $y_1^* \leq y_2^* \leq \cdots \leq y_n^*$. Ako se $f_{j+1}$ povećava sa $j$, a kriva $\Delta V_j(x)$ opada sa $j$, tada optimalni nivo protekcije $y_j^*$opada sa $j$.
Littlewood-ov statički model sa $n$ klasa možemo sumirati sledećom teoremom.

**<u>Teorema 4.6</u> [1]**
Za statički model sa $n$ klasa optimalne kontrole su date sa :

(i) Nivoima protekcije definisanim sa

$$y_j^* \equiv \max\{x : \ f_{j+1} < \ \Delta V_j(x)\} \ , \quad j = 1,2, \dots, n-1.$$

(ii) Buking granicama definisanim sa

$$b_j^* = C - y_{j-1}^* \ , \quad j = 2, \dots, n.$$

### 4.6 Model očekivanog marginalnog prihoda sedišta

Kao što smo videli u predhodnom modelu, računanje optimalne strategije ne predstavlja veliki računski problem. Međutim, ovaj model nije mnogo korišćen u praksi. Jedan od razloga je taj što se deregulacija avio industrije desila sedamdesetih godina dvadesetog veka, deceniju pre razvoja teorije optimalne kontrole. Jedini model optimalne kontrole u to vreme je bio već pomenuti LIttlewood-ov model sa dve putničke klase.

Mnoge avio kompanije koriste jedan od statičkih modela koji ćemo opisati u nastavku, prvi put pomenut u [2], koji pokušavaju da uopšte Littlewood-ov model na $n$ klasa. Jedan od razloga njihove popularnosti je taj što su jednostavniji da se kodiraju, i u većini slučajeva dobija se prihod koji je blizu optimalnog, sa 0.5 procenata moguće razlike.

Pretpostavka da zahtevi za rezervaciju pristižu sekvencijalno, u rastućem poredku od najniže putničke klase do najviše i dalje važi, i takođe da se cene karte takve da $f_1 > f_2 > \cdots > f_n.$ Kao i u predhodnom modelu, neka je $F_j(x)$ funkcija raspodele tražnje za kartom putničke klase $j$, ali u ovom modelu, zbog jednostavnosti, pretpostavljamo da su tražnje slučajne promenljive neprekidnog tipa.

U ovom modelu, koristimo aproksimaciju tako da se problem svodi na problem dve klase u svakom periodu, a aproksimaciju dobijamo agregacijom tražnji; tražnja za kartama više putničke klase (buduća tražnja) je sumirana u jednu tražnju.

Pretpostavimo da se nalazimo u periodu $j+1$, kada želimo da odredimo nivo protekcije $y_j$, odnosno koliko sedišta da sačuvamo za tu klasu $j$-tu putničku klasu i dostupan svim višim putničkim klasama. Definišimo buduću agregatnu tražnju za kartama $j, j-1, \dots, 1$ putničke klase sa

$$S_j = \sum_{k=1}^{j} D_k,$$

i neka je ponderisani prihod od putničkih klasa $1, \dots, j$ jednak

$$\bar{f}_j = \frac{\sum_{k=1}^{j} f_k E[D_k]}{\sum_{k=1}^{j} E[D_k]}.$$

Tada je nivo protekcije $y_j$ određen Littlewood-ovim pravilom za dve putničke klase, odnosno

$$P(S_j > y_j) = \frac{f_{j+1}}{\bar{f}_j}.$$

Kako se za tražnju za kartama jedne putničke klase pretpostavlja da je nezavisna od tražnje za kartama druge putničke klase, kao i da ima normalnu raspodelu sa parametrima $\mu_j$ i $\sigma_j^2$, dobijamo da je nivo protekcije jednak

$$y_j = \mu + z_\alpha \sigma,$$

gde su $\mu = \sum_{k=1}^{j} \mu_k$ , $\sigma^2 = \sum_{k=1}^{j} \sigma_k^2$ očekivanje i disperzija agregatne tražnje i $z_\alpha = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{f_{j+1}}{\bar{f}_j}\right)$, gde je $\Phi^{-1}(x)$ inverzna funkcija funkcije raspodele slučajne promenljive sa standardnom normalnom raspodelom. Gore opisanim postupkom računamo nivoe protekcije za svaki period $j$.

Ovaj model ćemo numerički primeniti na problem avio kompanije, i uporediti ga sa Littlewood-ovim modelom sa $n$ putničkih klasa.

# 5. DINAMIČKI MODELI

U predhodnom poglavlju, koristeći statički model pronašli smo optimalnu granicu prebukiranosti na početku rezervacionog perioda, koja se ne menja do poletanja aviona. U statičkom modelu, strategija avio kompanije se sastojala od odluke da prihvati zahtev za rezervaciju sedišta ukoliko optimalna granica prekobrojnosti nije premašena, ili da odbije zahtev ukoliko je granica premašena. Ovakva strategija je optimalna ukoliko pretpostavimo da zahtevi za rezervaciju pristižu sekvencijalno, prvo od ekonomske klase a zatim od poslovne, i ukoliko nema promene funkcije raspodele tražnje.

U stvarnosti, problem prebukiranosti je dinamičkog karaktera – avio kompanija ima mogućnost da promeni granicu prebukiranosti, odnosno koliko karata da proda, za vreme rezervacionog perioda kako se vreme poletanja aviona približava. U ovom poglavlju, bavićemo se modelima sa više putničkih klasa koji ne pretpostavljaju sekvencijanost u pristizanju zahteva za rezervaciju, već zahtevi mogu pristizati po nekom drugom paternu. Ovi modeli će biti diskretnog, dinamičkog tipa, gde je tražnja za kartom neke klase modelovana Poasonovim procesom, koji dalje implicira korišćenje diskretnog Markovljevog procesa odlučivanja. Dalje, stanje sistema će zavisiti od vremena preostalog do poletanja aviona, kao i od broja rezervisanih karata u svakoj klasi. Takođe, dozvolićemo mogućnost da putnik otkaže rezervaciju, i stoga, da bi minimizirala izgubljeni prihod, avio kompanija ima mogućnost prebukiranja leta.

Rezervacioni period je podeljen na periode odlučivanja, koji su dovoljno mali tako da samo jedan događaj (zahtev za rezervaciju ili otkazivanje rezervacije) može da se desi za vreme jednog perioda odlučivanja. Ovi periodi ne moraju biti iste dužine, uobičajeno su kraći što je vreme poletanja aviona bliže.

Strategija koju avio kompanija primenjuje u ovim modelima sastoji se u sledećem : odluka da li da prihvati ili odbije zahtev za rezervaciju karte u zavisnosti od vremena kada je zahtev pristigao. Ova odluka se bazira na upoređivanju prihoda ukoliko se zahtev prihvati i izgubljenog prihoda ako bi sedište prodala kasnije višoj putničkoj klasi, s ciljem maksimizacije prihoda.

Dinamičke kontrole korišćene u [3] biće diskutovane u ovom poglavlju. Prvi model predstavlja jednostavno proširenje osnovnog modela u [3], i dozvoljava prebukiranost, nepojavljivanje na let i otkazivanje rezervacije. Drugi model dozvoljava grupno otkazivanje rezervacije, nepojavljivanja na let i troškove naknade.

## 1.1 Elementi dinamičkih modela

U ovom poglavlju, ne pretpostavljamo da zahtevi za rezervaciju pristižu skevencijalno, tj da prvo pristižu zahtevi za rezervaciju karte poslednje klase, i tek na kraju prve. Rezervacioni period, za vreme kog zahtevi pristižu modeliraćemo kao diskretni dinamički proces, gde tražnja za kartom bilo koje klase je modelovana Poasonovim procesom, koji dalje upućuje na korišćenje Markovljevog procesa odlučivanja. Stanje takvog modela zavisi od vremena do poletanja aviona i od broja rezervisanih sedišta. S obzirom da dozvoljavamo mogućnost otkazivanja rezervacije, avio kompanija ima mogućnost korišćenja metoda prebukiranosti.

Prvo ćemo dati pretpostavke koje važe za prvi i drugi model. Kao i u predhodnim modelima, posmatramo let aviona kapaciteta $C$ koji leti direktno od tačke A do tačke B, odnosno bez presedanja. Pretpostavljamo da avion raspolaže sa $m$ putničkih klasa, gde 1 predstavlja prvu putničku klasu (najvišu), a $m$ ekonimsku (najnižu) putničku klasu, i zahtevi za rezervaciju ne pristižu sekvencijalno. Svaki putnik može rezervisati najviše jedno sedište, odnosno kupiti jednu kartu. Grupne rezervacije sedišta nisu dozvoljene. U trenutku pristizanja zahteva za rezervaciju sedišta, odluka avio kompanije da li da prihvati ili odbije zahtev uključuje 3 faktora: broj već rezervisanih sedišta, vreme do poletanja aviona i putnička klasa zahteva za rezervaciju.

Oba modela dele sledeće pretpostavke :

(1) Kapacitet leta je $C$; let je direktan i u jednom pravcu,
(2) Let raspolaže sa $m$ putičkih klasa ($m$ –najniža, 1- najviša) ,
(3) Zahtev za rezervaciju sedišta svake klase je vremenski zavisan proces ,
(4) Putnici sa kartom mogu da otkažu rezervaciju za vreme rezervacionog perioda, tj do poletanja aviona,
(5) Putnici sa kartom mogu da se ne pojave na let,
(6) Prebukiranost je dozvoljena, sa definisanom naknadom troškova,
(7) Odbijen zahtev za rezervaciju se smatra izgubljenim prihodom, odnosno putnik čiji je zahtev odbijen neće više kupiti kartu kod iste avio kompanije,
(8) $x$ predstavlja trenutan broj rezervisanih sedišta,
(9) $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ je rezervacioni vektor, gde $x_i$ predstavlja trenutan broj sedišta rezervisanih za klasu $i$.
(10) $U_t(x)/\widehat{U_t}(x)$ predstavlja maksimalni očekivani prihod s obzirom da je broj rezervisanih sedišta $x$ i $t$ perioda je preostalo do poletanja aviona.

## 1.2 Osnovni model

U ovom modelu, problem maksimizacije prihoda formulišemo koristeći Markovljev proces odlučivanja, u kom je stanje sistema ukupan broj trenutno rezervisanih sedišta. Pretpostavimo da ima $T$ perioda odlučivanj koji zajedno čine rezervacioni period (vreme od puštanja karata u prodaju do poletanja aviona), numerisanih u obrnutom hronološkom redu, $t = T, T-1, \dots, 1, 0$, pri čemu period $T$ odgovara početku rezervacionog perioda, i period 0 odgovara poletanju aviona. Pored pretpostavki koje važe za oba modela, pretpostavljamo sledeće:

- Nema troškova naknade za putnike koji otkažu rezervaciju ili se ne pojave na let.
- U svakom periodu $t = T, T-1, \dots, 1, 0$, jedan i samo jedan od sledećih događaja može da se desi:

1) dolazak putnika, odnosno zahtev za rezervaciju sedišta u klasi $i$ , $i = 1, \dots, m$ ,
2) otkazivanje rezervacije od strane putnika koji već ima rezervaciju ,
3) nulti događaj, odnosno zahtev za rezervaciju sedišta u klasi 0.

Definišimo sa

* $p_{it}$ $-$ verovatnoću da se desi zahtev za rezervaciju sedišta u klasi $i$ u periodu $t$,
* $q_t(x)$ $-$ verovatnoću otkazivanja rezervacije u periodu $t$,
* $p_{0t}(x)$ $-$ verovatnoću da se desi nulti događaj u periodu $t$ (verovatnoća da nema rezervacije u periodu $t$). Sa pretpostavkom da u svakom periodu najviše jedan zahtev za rezervaciju ili jedno otkazivanje rezervacije može da se desi, dobijamo da važi:

$$\sum_{i=1}^{m} p_{it} + q_t(x) + p_{0t}(x) = 1, \quad \text{za } \forall x \text{ i } \forall t \geq 1.$$

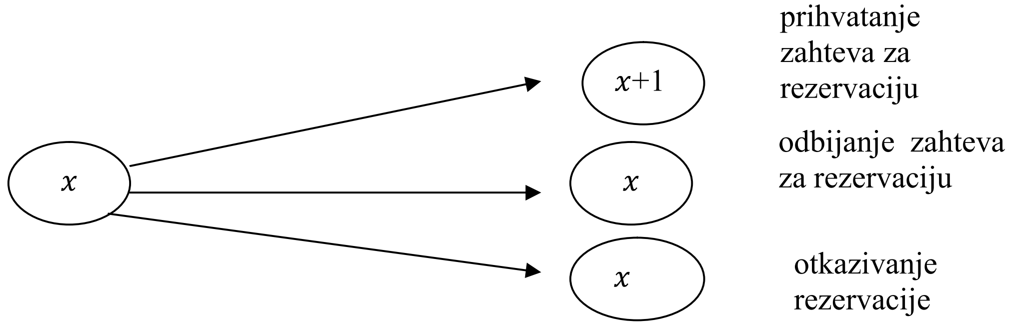
- Verovatnoća otkazivanja rezervacije i verovatnoća nepojavljivanja na let ne zavise od klase kojoj putnik pripada, što implicira da je $x$ jednodimenzionalna promenljiva stanja.
- $q_t(x)$ je neopadajuća i konkavna funkcija od $x$, za $\forall t$, $n = T, T-1, \dots, 1, 0$. Pretpostavka da je $q_t(x)$ neopadajuća po $x$ izražava znači da što je veći broj sedišta već bukiran, veća je verovatnoća da će rezervacija sedišta biti otkazana. Pretpostavka da je $q_t(x)$ konkavna po $x$ je dodata iz tehničkih razloga (u dokazu da je strategija prebukiranosti optimalna ).
- Pretpostavljamo da je $q_t(x) = xq_t$, gde je $q_t$ prosečna verovatnoća otkazivanja rezervacije u trenutku $t$. Putnici otkazuju rezervaciju nezavisno jedni od drugih.
- Putnik koji ima rezervisanu kartu ne pojavljuje na let sa verovatnoćom $\beta$. Stoga, $1-\beta$ je verovatnoća da se putnik pojavi na let. Zato što se svaki putnik sa rezervacijom pojavljuje na let sa verovatnoćom $1-\beta$ , broj putnika koji se ne pojavljuju na let, $Y(x)$, ima binomnu $\mathcal{B}(x, 1-\beta)$ raspodelu.

- Ako je u trenutku poletanja aviona broj putnika koji se pojavi na let jednak $Y(x) = y$ , uvodimo kaznenu funkciju prebukiranosti $\pi(y)$. Pretpostavljamo da je $\pi(y)$ nenegativna, konveksna i neopadajuća funkcija od $y$ za $y \geq 0$, i $\pi(y) = 0$, za $y \leq C$.

**Napomena 5.1** Primetimo da pretpostavljamo da su zahtevi za rezervaciju sedišta nezavisni od ukupnog broja već rezervisanih sedišta, dok verovatnoća otkazivanja rezervacije i verovatnoća nepojavljivanja na let zavise od ukupnog broja trenutno rezervisanih sedišta, ali ne i od broja trenutno rezervisanih sedišta u svakoj (pojedinačnoj ) klasi.

Cilj avio kompanije je da maksimizira očekivani prihod od početka rezervacionog perioda do vremena poletanja aviona. U svakom trenutku $t$, jedna od tri mogućnosti prikazanoj na sledećoj slici može da se desi

**Slika 5.1 Prihvatanje, odbijanje ili otkazivanje rezervacije**




S obzirom da na početku rezervacionog perioda, broj rezervisaih sedišta je jednak nuli, i u svakom periodu samo jedan zahtev može biti prihvaćen, sledi da za svaki period $t$ važi $x \leq T - t$. Stoga optimalna vrednosna funkcija (funkcija cilja) $U_t(x)$ je određena rekurzivno

$$U_t(x) = \sum_{i=1}^{m} p_{it} max\{f_{it} + U_{t-1}(x+1), U_{t-1}(x)\} + q_t(x)U_{t-1}(x-1) + p_{0t}U_{t-1}(x)$$

za $x \leq T - t,\ t \geq 1$; i
$U_0(x) = E[-\pi(Y(x))]$,
za $0 \leq x \leq T$.

## 1.3 Optimalna strategija

Ako u periodu $t$ pristigne zahtev za rezervaciju sedišta klase $i$, avio kompanija treba da odluči da li da prihvati zahtev i generiše prihod u visini cene karte $f_{it}$ , ili da odbije zahtev i sačuva sedište za sledeći zahtev. Iz predhodne jednačine, vidimo da se strategija svodi na upoređivanje $f_{it} + U_{t-1}(x+1)$ i $U_{t-1}(x)$. Stoga, prihvatićemo zahtev ukoliko je

$f_{it} + U_{t-1}(x+1) \geq U_{t-1}(x)$, odnosno, $f_{it} \geq U_{t-1}(x+1) - U_{t-1}(x)$.

Razliku $U_{t-1}(x+1) - U_{t-1}(x)$ nazivamo oportunentni trošak ukoliko prihvatimo zahtev za rezervaciju sedišta klase $i$ u periodu $t$. Upoređujući prihod generisan ukoliko je zahtev prihvaćen i oportunentni trošak, ukoliko je prvo veće, prihvatamo zahtev.

**<u>Definicija 5.1</u> [3]**
Za svaki period $t$ i za svaku putničku klasu $i$ definišemo optimalnu granicu prebukiranosti $B_{it}$ :
$B_{it} = min\{x \geq 0 : U_{t-1}(x+1) - U_{t-1}(x) \geq f_{it}\}$.

Ako je $f_{it} \geq U_{t-1}(x+1) - U_{t-1}(x)$ za svako $x$, generisani prihod je uvek veći od oportunentnog troška, avio kompanija treba da prihvati zahtev za rezervaciju sedišta za svako $x$. To u stvari znači da uopšte ne postoji granica, i stoga možemo reći da je $B_{it} = \infty$. Ukoliko je oportunentni trošak $U_{t-1}(x) - U_{t-1}(x+1)$ neopadajući po $x$ kako $x$ raste, s obzirom da $f_{it}$ ne zavisi od $x$, možemo da nađemo $B_{it}$ koje zadovoljava

$f_{it} \geq U_{t-1}(x) - U_{t-1}(x+1)$, za $0 \leq x \leq B_{it}$ ,
$f_{it} < (x) - U_{t-1}(x+1)$, za $x \geq B_{it}$.

Ukoliko postoji više granica prebukiranosti koje zadovoljavaju gornje nejednakosti, izabraćemo najmanju. Stoga, $B_{it}$ je dobro definisano.

Optimalno pravilo sugeriše da će avio kompanija prihvatiti zahtev za rezervaciju sedišta klase $i$ u periodu $t$ ako važi $x < B_{it}$. Ovaj zahtev će biti prihvaćen ukoliko je broj prihvaćenih rezervacija striktno manji od optimalne granice prebukiranosti $B_{it}$. Stoga, ukoliko želimo da pronađemo optimalnu granicu prebukiranosti $B_{it}$ za putničku klasu $i$ u trenutku $t$, treba da pokažemo da je oportunentni trošak $U_t(x) - U_t(x+1)$ neopadajući po $x$. Poslednje važi ako je optimalna funkcija cilja $U_t(x)$ konkavna po $x$.

**<u>Teorema 5.1</u> [3]**
Za svako $t = 0,1,\ldots,T$ , $U_t(x)$ je konkavna i nerastuća po $x$.

Dokaz će biti dat kasnije, s obzirom da predhodno treba da pokažemo leme koje ćemo koristiti u dokazu.

**<u>Teorema 5.2</u> [3]**
Za svako $t = 0,1,\dots,T$, oportunentni trošak $U_t(x) - U_t(x+1)$ je nerastuća funkcija po $x$, $x = 0,1,\dots,T-t-1$.

Stoga, klučna tačka za optimalnost granice prebukiranosti je konkavnost optimalne funkcije cilja $U_t(x)$. Sledeće tri leme čiji ćemo dokaz dati su klučne za dokaz konkavnosti optimalne funkcije cilja.

**<u>Lema 5.1</u> [3]**

Neka je $g(s): \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ konkavna po $s$. Neka je $f(s): \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ definisana sa

$$f(s) = \max_{a=0,1,\dots,m} \{ar + g(s+a)\}, \qquad s \geq 0$$

za dati realan broj $r$ i nenegativan ceo broj $m$. Tada je $f(s)$ konkavna po $s$.

**Dokaz [3]:**

Definišimo sa

$$\tilde{f}(s) = \max_{s \leq t \leq s+m} \{tr + g(t)\}, \qquad s \geq 0.$$

Tada je $f(s) = \tilde{f}(s) - sr$.

Neka je $t^* = \mathrm{argmax}_{s \leq t \leq s+m}\{tr + g(t)\}$. Tada, s obzirom da je $g$ konkavna funkcija važi

$$\tilde{f}(s) = \begin{cases} (s+m)r + g(s+m), s+m \leq t^* \\ t^*r + g(t^*), \qquad s \leq t^* \leq s+m \\ \qquad sr + g(s),\ t^* \leq s. \end{cases}$$

Za $1 \leq s \leq t^* - m$,

$$\tilde{f}(s-1) - \tilde{f}(s) = g(s-1+m) - g(s+m) - r$$

$$\leq g(s+m) - g(s+1+m) - r$$

$$= \tilde{f}(s) - \tilde{f}(s+1).$$

Za $t^* - m \leq s \leq t^*$, iz definicije $t^*$ sledi da je

$$\tilde{f}(s-1) \leq t^* r + g(t^*) = \tilde{f}(s) \geq \tilde{f}(s+1),$$

što dalje daje

$$\tilde{f}(s-1) - \tilde{f}(s) \leq 0 \leq \tilde{f}(s) - \tilde{f}(s+1).$$

Konačno, za $s > t^*$

$$\begin{aligned} \tilde{f}(s-1) - \tilde{f}(s) &= g(s-1) - g(s) - r \\ &\leq g(s) - g(s+1) - r \\ &= \tilde{f}(s) - \tilde{f}(s+1). \end{aligned}$$

Stoga, $= \tilde{f}(s) - \tilde{f}(s+1)$ je neopadajuća po $s$, i $\tilde{f}$ je konkavna po $s \geq 0$. Sledi da je $f(s) = \tilde{f}(s) - sr$ takođe konkavna po $s \geq 0$, što je i trebalo pokazati.

■

**Lema 5.2** **[3]**

Neka je $f(y): \mathbb{R}_0{}^+ \to \mathbb{R}$, $y \geq 0$ neopadajuća konveksna funkcija. Za svaki nenegativan ceo broj $x$, neka je $Y(x) \sim \mathcal{B}(x, \gamma)$ slučajna promenljiva sa binomnom raspodelom i neka je $h(x) \coloneqq E\big[f\big(Y(x)\big)\big]$. Tada je $h(x)$ neopadajuća i konveksna.

**Lema 5.3** **[3]**

Neka je $H(x): \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ definisana sa $H(x) = g(x)f(x-1) + \big(\omega - g(x)\big)f(x)$, gde je $\omega - g(x) \geq 0$, $g(x)$ je konkavna, neopadajuća funkcija po $x$, i $f$ je konkavna nerastuća funkcija po $x$. Tada je $H(x)$ nerastuća, konkavna funkcija po $x$.

**Dokaz [3]:**

Neka je $\zeta(x) = f(x) - f(x+1)$. Kako je $f$ je konkavna nerastuća funkcija po $x$, sledi da je $\zeta(x) \geq 0$, i $\zeta(x)$ je neopadajuća po $x$. Iz definicije funkcije $H(x)$ znamo da je $H(x+1) = g(x+1)f(x) + \big(\omega - g(x+1)\big)f(x+1)$. Tada je

$H(x) - H(x+1) = g(x)\zeta(x-1) + \big(\omega - g(x+1)\big)\zeta(x) \geq 0$

Sledi da je $H(x)$ nerastuća funkcija po $x$. Dalje, koristeći predhodno dobijeni izraz, dobijamo

$$[H(x) - H(x+1)] - [H(x+1) - H(x+2)]$$

$$= g(x)\big(\zeta(x-1)-\zeta(x)\big)+\big(\omega-g(x+2)\big)\big(\zeta(x)-\zeta(x+1)\big)$$

$$+\zeta(x)[g(x+2)-g(x+1)-(g(x+1)-g(x))].$$

Kako je $\zeta(x)$ neopadajuća funkcija po $x$ prva dva člana u gornjem izrazu su negativna ili nula. Slično, kako je $g(x)$ neopadajuća i konkavna funkcija po $x$, sledi da je $g(x+1)-g(x)$ nerasuća po $x$, pa je i treći član negativan ili jednak nuli. Sledi da je ceo izraz

$$[H(x)-H(x+1)]-[H(x+1)-H(x+2)]\leq 0,$$

što dalje daje da je $H(x)-H(x+1)$ neopadajuća po $x$. Koristeći predhodno datu definiciju konkavnosti, dobijamo da je $H(x)$ konkavna. Dakle, $H(x)$ je nerastuća, konkavna funkcija po $x$, što je i trebalo dokazati.

▪

Koristeći leme 5.1, 5.2 i 5.3 sada ćemo dokazati teoremu konkavnosti optimalne funkcije cilja $U(x)$.

**Dokaz Teoreme 5.1 [3]:**

Teoremu ćemo dokazati indukcijom po $t$. Prvo treba da pokažemo da je $U_0(x)=E[-\pi(Y(x))]$ konkavna i nerastuća po $x$.

Pokažimo da je $U_0(x)$ nerastuća i konkavna po $x$. Kako je $\pi(\cdot)$ nenegativna, konveksna i neopadajuća i $Y(x)\sim\mathcal{B}(x,1-\beta)$, koristeći drugu lemu sledi da je $E[\pi(Y(x))]$ je neopadajuća i konkavna po $x$, pa koristeći osobinu linearnosti očekivanja sledi da je $U_0(x)$ nerastuća i konkavna po $x$.

Pretpostavimo da je $U_{t-1}(x)$ nerastuća i konkavna po $x$. Definišimo sa $g_{it}$

$$g_{it}=max\{f_{it}+U_{t-1}(x+1),U_{t-1}(x)\}.$$

Sada, koristeći definiciju za $U_t(x)$ i $g_{it}$, imamo da je

$$U_t(x)=\sum_{i=1}^{m}p_{it}g_{it}+q_t(x)U_{t-1}(x-1)+p_{0t}U_{t-1}(x), 0\leq x\leq T-t, t\geq 1.$$

Koristeći prvu lemu, $g_{it}$ je konkavna funkcija po $x$. Primetimo da je ovo samo specialni slučaj prve leme, kad je $m=1$. Dalje, $g_{it}$ je takođe nerasuća, s obzirom da je maksimum dve nerastuće funkcije. Definišimo sa

$H_{t-1}(x) = q_t(x)U_{t-1}(x-1) + p_{0t}U_{t-1}(x)$. Tada je

$p_{0t} = 1 - \sum_{i=1}^{m} p_{it} - q_t(x) = \omega - q_t(x) \geq 0$, gde je $\omega \geq 0$ i ne zavisi od $x$.

Prema indukcijskoj pretpostavci znamo da je $(x)$ nerastuća i konkavna po $x$. Takođe znamo da je $q_t(x)$ konkavna i neopadajuća po $x$. Stoga, koristeći treću lemu, sledi da je $H_{t-1}(x)$ konkavna i nerastuća po $x$. Znamo da je

$$U_t(x) = \sum_{i=1}^{m} p_{it}g_{it} + H_{t-1}(x).$$

Kako je $U_t(x)$ suma dve konkavne, nerastuće funkcije po $x$ (s obzirom da su $f$ i $g$ konkavne funkcije), sledi da je $U_t(x)$ konkavna, nerastuća funkcija po $x$, što je i trebalo pokazati.

∎

## 5.4 Generalizacija osnovnog modela

U ovom odeljku ćemo opisati generalizaciju predhodnog modela. Predhdni model ćemo proširiti tako što ćemo dozvoliti da važe sledeće pretpostavke:

- Verovatnoća da putnik otkaže rezervaciju ili se ne pojavi na let zavisi od putničke klase kojoj putnik pripada,
- Troškovi naknade u slučaju otkazivanja rezervacije ili nepojavljivanja na let zavise od putničke klase kojoj putnik pripada.

Druga pretpostavka je realna, odnosno to je ono što avio kompanija praktikuje u stvarnosti.

Neka su $p_{it}$, $q_{it}$, i $p_{0t}$ verovatnoća da u se u trenutku $t$ desi zahtev za rezervaciju sedišta klase $i$, verovatnoća otkazivanja rezervacije sedišta klase $i$ u trenutku $t$, i verovatnoća da nema rezervacije u trenutku $t$, za dati rezervacioni vektor $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Pretpostavljamo da važi

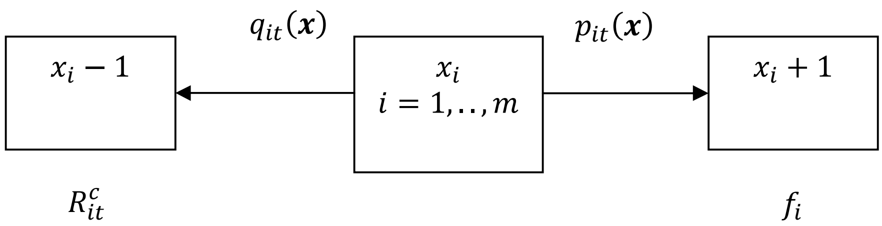
$$\sum_{i=1}^{m} p_{it}(\boldsymbol{x}) + q_{it}(\boldsymbol{x}) + p_{0t}(\boldsymbol{x}) = 1, \text{za } \forall \boldsymbol{x} \text{ i } \forall t \geq 1.$$

U trenutku poletanja aviona, putnik sa kartom klase $i$ ima verovatnoću $\beta_i$ da se ne pojavi na izlazu. Stoga, broj putnika sa putničkom kartom klase $i$, $Y(x_i)$ , koji se pojave na let ima binomnu raspodelu $\mathcal{B}(x_i, 1-\beta_i)$. Neka je

$$y = Y(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} Y(x_i)$$

ukupan broj putnika koji se pojavi na let, i $\pi(y)$ kao i pre, kaznena funkcija prebukiranosti koja je nenegativna, konveksna i neopadajuća funkcija od $y$ za $y \geq 0$, i $\pi(y) = 0$, za $y \leq C$.
U trenutku $t$, moguća je jedna od mogućnosti

**Slika 5.2 Pristizanje zahteva i otkazivanje rezervacije**




Kao i u predhodnom modelu, cilj je da se maksimizira očekivani ukupan prihod od početka rezervacionog perioda do poletanja aviona, s početnim rezervacionim vektorom $\boldsymbol{x} = (0,0, \ldots, 0)$, odnosno bez ijednog rezervisanog sedišta u trenutku $T$. Putnik koji rezerviše putničku kartu klase $i$ u trenutku $t$ plaća $\hat{f}_{it}$. Neka je

$$\chi_t = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \colon x_1 \geq 0, i = 1,2, \ldots, m, \ \textstyle\sum_i x_i \leq T - t\}.$$

Kao funkcija stanja sistema $\boldsymbol{x} \in \chi_t$, neka je $\widehat{U}_t(\boldsymbol{x})$ maksimalni očekivani prihod kada je rezervisano $x$ sedišta, koji je određen rekurzivno

$$\widehat{U}_t(x) = \sum_{i=1}^{m} p_{it}(\boldsymbol{x}) max\{\hat{f}_{it} + \widehat{U}_{t-1}(\boldsymbol{x} + e_i), \widehat{U}_{t-1}(\boldsymbol{x})\} + q_{it}(\boldsymbol{x})(-R_{it}^{c} + \widehat{U}_{t-1}(\boldsymbol{x} - e_i)) + p_{0t}(\boldsymbol{x})\widehat{U}_{t-1}(\boldsymbol{x})$$

za $\boldsymbol{x} \in \chi_t$ i $t \geq 1$,

$\widehat{U}_0(x) = E\left[-\pi\big(Y(\boldsymbol{x})\big) - \sum_{i=1}^{m}\big(x_i - Y(x_i)\big) R_i^{ns}\right]$, za $\boldsymbol{x} \in \chi_0$, gde je $e_i$ jedinični vektor sa jedinicom na $i$-tom mestu.

*Buking strategija* : Iz gornje jednačine dobijamo da prihvatamo zahtev za rezervaciju sedišta klase $i$ u trenutku $t$ ako važi

$$\hat{f}_{it} \geq \widehat{U}_{t-1}(\boldsymbol{x}) - \widehat{U}_{t-1}(\boldsymbol{x} + e_i).$$

Kako u generalnom modelu dozvoljavamo da verovatnoća otkazivanja rezervacije i nepojavljivanja na let zavisi od putničke klase kojoj putnij pripada, neophodno je da pratimo ceo rezervacioni vektor a ne samo ukupan broj rezervisanih sedišta (sumu). Stoga, promenljiva stanja $\boldsymbol{x}$ je višedimenziona. Takođe, u generalnom modelu dozvoljavamo troškove naknade za razliku od predhodnog modela. S obzirom da se model računski komplikuje što je dimenzija problema veća (više putničkih klasa), pokušaćemo da u pojedinim slučajevima problem redukujemo na jednodimenzionalni. Jednodimenzionalna aproksimacija, u nekim slučajevima, ne odstupa mnogo od optimalne višedimenzionalne, i zato se može koristiti umesto nje.

## 5.5 Generalni model sa troškovima naknade

U ovom odeljku, detaljnije se bavimo troškovima naknade u slučaju otkazivanja rezervacije ili nepojavljivanja na let. Pretpostavljamo da odbijamo sve dodatne zahteve za rezervaciju, počinjući od stanja $\boldsymbol{x}$ i trenutka $t$.

Neka je $H_t(\boldsymbol{x})$ ukupni očekivani gubitak prihoda od trenutka $t$ do trenutka 0 (do poletanja aviona), koji avio kompanija ima zbog otkazivanja rezervacije i nepojavljivanja na let. Tada je

$$H_t(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} p_{it}(\boldsymbol{x}) H_{t-1}(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} q_{it}(\boldsymbol{x})(R_{it}^{c} + H_{t-1}(\boldsymbol{x} - e_i)), \qquad \boldsymbol{x} \in \chi_t$$

$$H_t(\boldsymbol{x}) = E\left[\textstyle\sum_{i=1}^{m} \left(x_i - Y(x_i)\right) R_i^{ns}\right] = \textstyle\sum_{i=1}^{m} \beta_i \, x_i R_i^{ns}, \quad \boldsymbol{x} \in \chi_0.$$

Definišimo dalje sa $U_t(\boldsymbol{x}) = \widehat{U}_t(\boldsymbol{x}) + H_t(\boldsymbol{x})$ maksimalni očekivani prihod (umanjen za troškove naknade) od trenutka $t$ do poletanja aviona. Koristeći jednačine za $\widehat{U}_t(\boldsymbol{x})$ i $H_t(\boldsymbol{x})$ dobijamo

$$\widehat{U}_t(x) = \sum_{i=1}^{m} p_{it}(\boldsymbol{x}) max\{\hat{f}_{it} - [H_{t-1}(\boldsymbol{x} + e_i) - H_{t-1}(\boldsymbol{x})] + U_{t-1}(\boldsymbol{x} + e_i), U_{t-1}(\boldsymbol{x})\}$$
$$+ \sum_{i=1}^{m} q_{it}(\boldsymbol{x})(U_{t-1}(\boldsymbol{x} - e_i)) + p_{0t}(\boldsymbol{x}) U_{t-1}(\boldsymbol{x}), \qquad \text{za } \boldsymbol{x} \in \chi_t,$$

$U_0(x) = E\left[-\pi\big(Y(\boldsymbol{x})\big)\right]$, za $\boldsymbol{x} \in \chi_0$,
gde je $H_{t-1}(\boldsymbol{x} + e_i) - H_{t-1}(\boldsymbol{x})$ očekivani marginalni trošak naknade u slučaju otkazivanja rezervacije ili nepojavljivanja na let.

*Buking strategija* : Avio kompanija će prihvatiti zahtev za rezervaciju sedišta klase $i$ u trenutku $t$ ukoliko važi

$$\hat{f}_{it} - [H_{t-1}(\boldsymbol{x} + e_i) - H_{t-1}(\boldsymbol{x})] \geq U_{t-1}(\boldsymbol{x}) - U_{t-1}(\boldsymbol{x} + e_i).$$

## 5.6 Pojednostavljivanje na jednodimenzionalni slučaj

U ovom delu, pokazaćemo da kada su verovatnoća nepojavljivanja na let i verovatnoća otkazivanja rezervacije nezavisne od putničke klase, problem može biti pojednostavljen na jednodimenzionalni slučaj, umesto da rešavamo višedimenzionalni problem.

Uvodimo sledeće pretpostavke.

- *Pretpostavka 1* : $q_{it}(\boldsymbol{x}) = q_{it}(x_i)$, za sve $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $t = T, T-1, \dots, 1$, odnosno, verovatnoća otkazivanja rezervacije sedišta klase $i$ zavisi od broja rezervisanih sedišta za tu klasu ali ne i od broja sedišta rezervisanih za neku drugu klasu.

**<u>Lema 5.4</u> [3]**
Pretpostavimo da gornja pretpostavka važi. Tada važi

$$H_t(x) = \sum_{i=1}^{m} H_{it}(x_i),$$

gde funkcije $H_{it}(x_i)$ zadovoljavaju sledeće rekurzivne jednačine

$$\begin{cases} H_{it}(x_i) = \big(1 - q_{it}(x_i)\big)H_{i,t-1}(x_i) + q_{it}(x_i)\left(R_{it}^{c} + H_{i,t-1}(x_i - 1)\right), x_i \geq 0, t \geq 1 \\ H_{it}(x_i) = \beta_i x_i R_i^{ns},\ x_i \geq 0. \end{cases}$$

Dokaz je jednostavan i može biti pokazan indukcijom po $t$.

- *Pretpostavka 2* : $q_{it}(\boldsymbol{x}) = x_i q_{it}$ za sve $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $t = T, T-1, \dots, 1$, odnosno, svaki putnik otkazuje rezervaciju nezavisno od drugih putnika, i verovatnoća otkazivanja zavisi samo od putničke klase kojoj putnik pripada.

Definišimo sa $G_{it}(x_i) = H_{i,t-1}(x_i + 1) - H_{i,t-1}(x_i)$ marginalni očekivani trošak naknade u slučaju otkazivanja rezervacije sedišta putničke klase $i$ u trenutku $t$.

**<u>Lema 5.5</u> [3]**
Neka važi druga pretpostavka. Tada je

$$G_{it}(x_i) = G_{it}(x_i - 1).$$

Dalje, definišimo sa $G_t(i)$ tako da zadovoljava rekurzivne jednačine

$$G_t(i) = q_{i,t-1}R_{i,t-1}^c + \left(1 - q_{i,t-1}\right)G_{t-1}(i), \qquad t \geq 2$$

$$G_1(i) = \beta_i R_i^{ns}, \qquad i = 1,2, \dots, m$$

gde je $G_t(i)$ očekivani trošak naknade u slučaju otkazivanja rezervacije koji je nezavisan od $x_i$. Tada imamo

$$G_{it}(x_i) = G_t(i).$$

**Dokaz [3]:**

Dokaz dajemo indukcijom po $t$.

$$G_{i1}(x_i) = H_{i0}(x_i + 1) - H_{i0}(x_i) = \beta_i R_i^{ns}$$

$$G_{i1}(x_i - 1) = H_{i0}(x_i) - H_{i0}(x_i - 1) = \beta_i R_i^{ns}.$$

Stoga, važi da je $G_{i1}(x_i) = G_{i1}(x_i - 1)$. Pokažimo da važi $G_{it}(x_i) = G_t(i)$ za $t \geq 2$.

Pretpostavimo da važi $G_{i,t-1}(x_i) = G_{i,t-1}(x_i - 1)$.

$$G_{it}(x_i) = H_{i,t-1}(x_i + 1) - H_{i,t-1}(x_i)$$

$$= \left(q_{i,t-1}(x_i + 1) - q_{i,t-1}(x_i)\right) R_{i,t-1}^c + \left(1 - q_{i,t-1}(x_i + 1)\right) G_{i,t-1}(x_i)$$

$$+ q_{i,t-1}(x_i) G_{i,t-1}(x_i - 1), \quad x_i \geq 0, t \geq 2$$

$$= \left((x_i + 1)q_{i,t-1} - x_i q_{i,t-1}\right)R_{i,t-1}^c + \left(1 - (x_i + 1)q_{i,t-1}\right)G_{i,t-1}(x_i) + x_i q_{i,t-1} G_{i,t-1}(x_i - 1)$$

$$= q_{i,t-1}R_{i,t-1}^{c} + \left(1 - q_{i,t-1}\right)G_{i,t-1}(x_i) - x_i q_{i,t-1}G_{i,t-1}(x_i) + x_i q_{i,t-1}G_{i,t-1}(x_i - 1)$$

$$= q_{i,t-1}R_{i,t-1}^{c} + \left(1 - q_{i,t-1}\right)G_{i,t-1}(x_i) - x_i q_{i,t-1}\left[G_{i,t-1}(x_i) - G_{i,t-1}(x_i - 1)\right]$$
$$= q_{i,t-1}R_{i,t-1}^{c} + \left(1 - q_{i,t-1}\right)G_{i,t-1}(x_i)$$

$$G_{it}(x_i - 1) = H_{i,t-1}(x_i) - H_{i,t-1}(x_i - 1)$$

$$= q_{i,t-1}R_{i,t-1}^{c} + \left(1 - x_i q_{i,t-1}\right)G_{i,t-1}(x_i) + (x_i - 1)q_{i,t-1}G_{i,t-1}(x_i - 1)$$

$$= q_{i,t-1}R_{i,t-1}^{c} + G_{i,t-1}(x_i) - q_{i,t-1}G_{i,t-1}(x_i) - x_i q_{i,t-1}\left(G_{i,t-1}(x_i) - G_{i,t-1}(x_i - 1)\right)$$

$$= q_{i,t-1}R_{i,t-1}^{c} + G_{i,t-1}(x_i) - q_{i,t-1}G_{i,t-1}(x_i - 1)$$

Stoga, dobijamo

$$G_{i,t-1}(x_i) = G_{i,t-1}(x_i - 1)$$

$$G_{it}(x_i) = G_{it}(x_i - 1).$$

Znamo da $G_t(i)$ zadovoljavaju

$$G_t(i) = q_{i,t-1}R_{i,t-1}^{c} + \left(1 - q_{i,t-1}\right)G_{t-1}(i), \qquad t \geq 2$$

$$G_1(i) = \beta_i R_i^{ns}, \qquad i = 1,2, \ldots, m.$$

Kako $G_t(i)$ i $G_{it}(x_i)$ zadovoljavaju iste rekurzivne jednačine, dobijamo da je $G_{it}(x_i) = G_{it}(x_i)$, što je i trebalo pokazati.

∎

U ovom slučaju, rekurzivne jednačine imaju formu

$$U_t(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} p_{it}(\boldsymbol{x}) max\left\{\hat{f}_{it} - G_t(i) + U_{t-1}(\boldsymbol{x} + e_i), U_{t-1}(\boldsymbol{x})\right\} + \sum_{i=1}^{m} q_{it}(\boldsymbol{x})(U_{t-1}(\boldsymbol{x} - e_i))$$
$$+ p_{0t}(\boldsymbol{x})U_{t-1}(\boldsymbol{x}), \qquad \text{za } \boldsymbol{x} \in \chi_t,$$

$$U_0(x) = E\left[-\pi\left(Y(\boldsymbol{x})\right)\right], \text{ za } \boldsymbol{x} \in \chi_0.$$

*Buking strategija* : Avio kompanija će prihvatiti zahtev za rezervaciju sedišta klase $i$ u trenutku $t$ ukoliko važi

$$\hat{f}_{it} - G_t(i) \geq U_{t-1}(\boldsymbol{x}) - U_{t-1}(\boldsymbol{x} + e_i).$$

Znamo da $U_t(\boldsymbol{x})$ zadovoljava rekurzivnu jednačinu koja zavisi od vektora $\boldsymbol{x}$, tako da problem višedimenzionalnosti nije eliminisan.

- *Pretpostavka 3* : $q_{it}(\boldsymbol{x}) = x_i q_t$ za sve $\boldsymbol{x} \in \chi_t$ , $t = T, T-1, \dots, 1, i = 1,2, \dots, m$, odnosno verovatnoća da putnik otkaže rezervaciju je ista za sve putničke klase u trenutku $t$.
- *Pretpostavka 4 :* $p_{it}(\boldsymbol{x}) = p_{it}$, za sve $\boldsymbol{x} \in \chi_t$ , $t = T, T-1, \dots, 1, i = 1,2, \dots, m$, odnosno zahtevi za rezervaciju pristižu u sistem nezavisno od broja trenutno već rezervisanih sedišta.
- *Pretpostavka 5 :* $\beta_i = \beta$, $i = 1,2, \dots, m$, odnosno verovatnoća da putnik otkaže rezervaciju ne zavisi od putničke klase kojoj pripada.

**Teorema 5.2** **[3]**

Neka važe pretpostavke 3,4, i 5. Tada optimalna vrednosna funkcija $U_t(\boldsymbol{x})$ ne zavisi od trenutnog broja rezervisanih karti za svaku pojedinačnu putničku klasu $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, već samo od ukupnog broja trenutno rezervisanih karti $x = \sum_{i=1}^{m} x_i$, i važi

$$U_t(\boldsymbol{x}) = U_t(x) = \sum_{i=1}^{m} p_{it} max\{\hat{f}_{it} - G_t(i) \ + U_{t-1}(x+1), U_{t-1}(x)\} + x q_t U_{t-1}(x-1)$$

$$+(1 - \sum_{i=1}^{m} p_{it} - x q_t) U_{t-1}(x), \qquad \text{za } 0 \leq x \leq T - t, t \geq 1$$

$$U_0(\boldsymbol{x}) = U_0(x) = E[-\pi(Y(x))], \qquad \text{za } 0 \leq x \leq T.$$

**Dokaz [3]:**

Dokaz ćemo dati indukcijom po $t$.

Pretpostavimo da $U_0(\boldsymbol{x}) = U_0(x) = E[-\pi(Y(x))]$ važi, odnosno da $U_0(\boldsymbol{x})$ zavisi samo od ukupnog broja rezervisanih sedišta $x = \sum_{i=1}^{m} x_i$.

Pretpostavimo da teorema važi za $t-1$,gde $t \geq 1$ odnosno $U_{t-1}(\boldsymbol{x}) = U_{t-1}(x)$. Koristeći rekurzivnu jednačinu nakon predhodne leme, pretpostavke 3,4, i 5 i da važi $\sum_{i=1}^{m} p_{it} + \sum_i x_i q_t + p_{0t}(\boldsymbol{x}) = 1$, dobijamo da tvrđenje važi za $t$, odnosno da $U_t(\boldsymbol{x}) = U_t(x)$.

∎

Da sumiramo generalni model, ukoliko verovatnoća otkazivanja rezervacije ili nepojavljivanja na let ne zavisi od putničke klase kojoj putnik pripada, generalni model se može pojednostaviti tako da umesto da pratimo broj rezervisanih sedišta za svaku klasu, sada je dovolnjo pratiti samo ukupan broj rezervisanih sedišta.

Ukoliko uporedimo pojednostavljeni generalni model i prvi model gde nismo dozvoljavali troškove naknade, vidimo da važi $f_{it} = \hat{f}_{it} - G_t(i)$ i $q_t(x) = xq_t$. Kako je $q_t(x)$ konkavna po $x$, rezultate iz prvog modela mogu biti primenjeni i ovde.

# 6. NUMERIČKA PRIMENA STATIČKOG I DINAMIČKOG MODELA

U ovom poglavlju, statičke i dinamičke modele opisane u predhodnim poglavljima ćemo primeniti na problem avio kompanije, izračunati numerički strategije koje avio kompanija primenjuje (nivoe protekcije i buking granice/granice prebukiranosti), kao i očekivani i generisani prihod nastao primenom pomenutih strategija.

Na početku ćemo ukratko sumirati algoritam svakog od modela koji ćemo primeniti, i naglasiti osnovne pretpostavke. Za sada pretpostavljamo da nema mogućnosti otkazivanja rezervacije i nepojavljivanja na let, samim tim i prebukiranosti, a kasnije ćemo tu mogućnost dozvoliti.

## 6.1 Statički modeli

Osnovne pretpostavke statičkih modela su sledeće:

- Cene avionskih karti su poređane u opadajućem poretku, cena karte prve putničke klase je veća od cene karte druge putničke klase, odnosno putničke klase su numerisane tako da važi $f_1 > f_2 > \cdots > f_n$.
- Tražnja za kartama jedne putničke klase je nezavisna od tražnje za kartama neke druge klase.
- Tražnja za kartama je slučajna promenjiva neprekidnog tipa.
- Zahtevi za rezervaciju pristižu sekvencijalno u sistem, prvo se rezervišu karte ekonomske putničke klase, a zatim poslovne.

Koristićemo sledeću notaciju:

- $n$ je broj putničkih klasa,
- $f_j$ je cena karte putničke klase $j$, $j = 1, \dots, n$,
- C je kapacitet aviona,
- $D_j$ je tražnja za kartama putničke klase $j$, $F_j(\cdot)$ je njena funkcija raspodele,
- $D_j$ ima normalnu raspodelu sa parametrima $\mu_j$ i $\sigma_j^2$.

### 6.1.1 Littlewood-ov model sa $n$ putničkih klasa

U statičkom modelu koncentisaćemo se na jednu od strategija koje avio kompanije koriste u praksi da bi maksimizirale prihod, tzv. nivoe protekcije. Podsetimo se da je nivo protekcije za datu putničku klasu $j$ je minimalan broj sedišta koji treba da bude sačuvan za tu klasu i dostupan svim višim putničkim klasama. U statičkom modelu sa $n$ klasa pokazali smo da optimalne nivoe protekcije dobijamo iz sledećih jednačina

$$f_2 = f_1 P(D_1 > y_1^*)$$
$$f_3 = f_1 P(D_1 > y_1^*, D_1 + D_2 > y_2^*\ )$$
$$f_{j+1} = f_1 P\big(D_1 > y_1^*, D_1 + D_2 > y_2^*\ , \dots, D_1 + D_2 + \cdots D_j > y_j^*\ \big).$$

Ove jednačine možemo interpretirati na sledeći način: verovatnoća da će se karte putničke klase $j$ i više klase prodati je proporcionalana odnosu cena karti. Kako su u ovom slučaju tražnje za kartama slučajne promenljive neprekidnog tipa, za računanje optimalnih nivoa protekcije datim gornjim jednakostima, koristićemo Monte Karlo integraciju.

Glavna ideja je da slučajno izaberemo veliki broj $K$ vektora tražnje $\big(D_1^k, \dots, D_n^k\ \big), k = 1, \dots, K$ znajući funkcije raspodeli tražnji, i sortirati vrednosti iz uzorka da bismo našli $y_j^*$ koje zadovoljavaju gornje jednačine. Stoga, u Monte Karlo integraciji primenjujemo sledeće korake:

**Algoritam**

**Korak 1.** Generisati i sačuvati $K$ slučajnih vektora tražnje $D^k = \big(D_1^k, \dots, D_n^k\ \big)$.

Za $k = 1, \dots, K$ i $j = 1, \dots, n-1$ izračinati parcijalne sume

$$S_j{}^k = D_1^k + \cdots + D_j^k,$$

i formirati vektor $S^k = \big(S_1^k, \dots, S_n^k\ \big)$.

Postavimo brojač na $j = 1$ i iniciramo listu $\mathcal{K} = \{1\ , \dots, K\}$.

**Korak 2.** Sortirati vektore $S^k\ , k = 1, \dots, K$ prema $j$-toj komponenti u rastućem poretku, tako da važi

$$S_j^{[1]} \leq S_j^{[2]} \leq \cdots \leq S_j^{[K]},$$

gde sada zagrade [ ] znači da je u pitanju sortirani vektor.

**Korak 3.** Definišimo sa $l^* = \left\lfloor \frac{f_{j-1}}{f_j} |\mathcal{K}| \right\rfloor$, gde je $\lfloor\ \ \rfloor$ oznaka za ceo deo nekog broja. Izračunajmo optimalni nivo protekcije $y_j^* = \frac{1}{2}\Big(S_j^{[l^*]} + S_j^{[l^*+1]}\Big)$.

**Korak 4.**

**Korak 5.** Definišimo listu sada sa $\big\{k \in \mathcal{K} :\ S_j^k > y_j\big\}$ i povećajmo brojač za 1, $j \rightarrow j+1$

Ako je $j = n-1$ stani, inače vrati se na korak 2.

### 6.1.2 Model očekivanog marginalnog prihoda sedišta

U ovom modelu, koristimo aproksimaciju predhodnog modela tako da se problem svodi na problem dve klase u svakom periodu. Aproksimaciju dobijamo agregacijom tražnji; tražnja za kartama više putničke klase (buduća tražnja) je sumirana u jednu tražnju. Ovaj metod koristi Littlewood-ovo pravilo koje podestimo se u slučaju dve putničke klase daje optimalni nivo protekcije $y_1^*$ dat sa

$$f_2 = f_1 P(D_1 > y_1^*).$$

U slučaju sa tri putničke klase, model očekivanog prihoda sedišta koristi gornje pravilo da nađe $y_1^*$, ali sada koristi sumu tražnji $D_1$ i $D_2$ da nađe $y_2$,

$$f_3 = \bar{f}_2 P(D_1 + D_2 > y_2),$$

gde je $\bar{f}_j = \frac{\sum_{k=1}^{j} f_k E[D_k]}{\sum_{k=1}^{j} E[D_k]}$ sada ponderisani prihod od putničkih klasa $1, \dots, j$.

U slučaju da tražnje imaju normalnu raspodelu, kao što pretpostavljamo u primeni modela, nivo protekcije za putničku klase $j, j-1, \dots, 1$ jednak je

$$y_j = \mu + z_\alpha \sigma,$$

gde je $\mu = \sum_{k=1}^{j} \mu_k$ , $\sigma^2 = \sum_{k=1}^{j} \sigma_k^2$ očekivanje i disperzija agregatne tražnje,

$z_\alpha = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{f_{j+1}}{\bar{f}_j}\right)$, $\Phi^{-1}(\cdot)$ je inverzna funkcija funkcije raspodele slučajne promenljive sa standardnom normalnom raspodelom.

Zapazimo da $y_j$ nije optimalni nivo protekcije kao u slučaju sa nivoom protekcije koji dobijamo u Liitlewood-ovom modelu sa $n$ klasa, i stoga nema zvezdicu u notaciji.

### 6.1.3 Statički model sa metodom prebukiranosti

U ovom modelu, za razliku od predhodna dva statička modela, dozvolićemo mogućnost da se putnik ne pojavi na let ili otkaže rezervaciju. Za početak, pretpostavljamo da avio kompanija ima na raspolaganju jedan tip karte, tj karte za ekonomsku klasu sa cenom $f$. Statički modeli prebukiranosti se fokusiraju na pronalaženje optimalne granice prebukiranosti sa ciljem maksimizacije očekivanog prihoda. Zadatak je pronaći maksimalan broj karata $B$ iznad fiksnog kapaciteta leta $C$ koje bi avio kompanija trebala da proda ($B > C$). Ključna karakteristika statičkog modela je ta da je optimalna granica prebukiranosti $B$ nepromenljiva za vreme rezervacionog perioda, tj od početka prodaje karti do poletanja aviona. Definišimo osnovne pretpostavke ovog modela :

- Putnici koji otkazu rezervaciju se tretiraju kao putnici koji se nisu pojavili na let
- Putnici koji su se pojavili na izlazu ali nisu dobili mesto na letu dobijaju naknadu troškova u iznosu $f + R$, gde je $R$ naknada troškova iznad cene karte. Pretpostavićemo da svaki prekobrojni putnik dobija iste troškove naknade.
- Broj putnika koji se pojavi na izlazu ima binomnu raspodelu, odnosno $S|B \sim \mathcal{B}i(B, \alpha)$. Ukoliko aproksimiramo normalnom raspodelom, broj putnika ima normalnu raspodelu sa parametrima $\mu$ i $\sigma^2$, gde je $\mu = \alpha B$ i $\sigma^2 = \alpha(1-\alpha)B$, gde je $\alpha$ verovatnoća da se putnik sa kupljenom kartom pojavi na izlazu.

Podesetimo se da smo pokazali da je tada je optimalna granica prebukiranosti $B$ (optimalan broj prodatih karata ) je određena sledećim izrazom

$$\Phi\left(\frac{(C-\alpha B)}{(\alpha(1-\alpha)B)^2}\right) = \frac{R}{f+R} + \frac{\varphi\left(\frac{(C-\alpha B)}{(\alpha(1-\alpha)B)^2}\right)\sqrt{1-\alpha}}{2\sqrt{B\alpha}},$$

gde su $\Phi(\cdot)$ i $\varphi(\cdot)$ funkcija raspodele i gustina raspodele standardne normalne raspodele $\mathcal{N}(0,1)$. Iz gornjeg izraza ćemo računati različite granice prebukiranosti u zavisnosti od visine troškova naknade.

Ukoliko imamo više od jedne putničke klase, možemo izračunati nivoe protekcije. Neka su $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ vektor verovatnoća koji redom predstavlja verovatnoću da se putnik sa kartom prve, druge, $n$-te klase ne pojavi na let. Tada, iz modela očekivanog prihoda sedišta dobijamo da na primer za nivo protekcije za drugu putničku klasu $y_2$ važi

$$\alpha_3 f_3 = \alpha_2 \bar{f}_2 P(D_1 + D_2 > y_2).$$

Primetimo da je jedina razlika u odnosu na osnovni model ta da je sada očekivani prihod sedišta jednak verovatnoći da se putnik pojavi na let (koja je predhodno bila 1), puta cena karte. Iz ovoga dobijamo nivoe protekcije

$$y_j = \mu + z_\alpha \sigma,$$

gde je sada $z_\alpha = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha_{j+1} f_{j+1}}{\alpha_j \bar{f}_j}\right)$.

## 6.2 Dinamički model

Predhodni statički modeli su našli primenu u praksi najviše zbog njihove jednostavnosti i računske složenosti dinamičkog modela. Međutim, statički model ignoriše dinamičku prirodu rezervacionog procesa, s obzirom da pretpostavlja da tražnja pristiže sekvencijalno. Stoga, ključna karakteristika dinamičkog modela je upravo ta da uključuje vremensku promenljivost i vremensku zavisnost tražnje. Osnovne pretpostavke dinamičkog modela možemo sumirati kako sledi

- Rezervacioni period je podeljen na $T+1$ perioda odlučivanja, periodu $t = T, T-1, \dots, 1, 0$, pri čemu $t = T$ predstavlja početak rezervacionog perioda, i $t = 0$ predstavlja kraj rezervacionog perioda, odnosno poletanje aviona.
- Tražnja za kartama jedne putničke klase je nezavisna od tražnje za kartama neke druge klase.
- Tražnja za kartama je modelovana kao stohastički proces sa poznatim funkcijama raspodele.
- U svakom periodu $t$ najviše jedan zahtev za rezervaciju pristiže u sistem.
- Verovatnoća da se desi zahtev za rezervaciju sedišta u nekoj putničkoj klasi zavisi od perioda u kom zahtev pristiže u sistem.
- Odluka da li da se prihvati ili odbije zahtev za rezervaciju sedišta neke putničke klase mora biti doneta u istom periodu u kom je zahtev pristigao.

Koristićemo sledeću notaciju:

- $n$ je broj putničkih klasa,
- $f_j$ je cena karte putničke klase $j$, $j = 1, \dots, n$,
- $C$ je kapacitet aviona,
- $x$ j prerostali kapacitet aviona,
- $p_{jt}$ je verovatnoća da se desi zahtev za rezervaciju sedišta u klasi $j$ u periodu $t$,
- $p_{0t}$ je verovatnoća da se desi nulti događaj u periodu $t$ (verovatnoća da nema rezervacije u periodu $t$).
- $V_t(x)$ je maksimalni očekivani prihod od perioda $t$ do poletanja aviona, ukoliko je preostalo $x$ sedišta za rezervaciju.

U dinamičkom modelu, tražnja za kartama neke putničke klase u nekom trenutku je predstavljena verovatnoćom da se desi zahtev za rezervaciju sedišta te klase u datom periodu, odnosno $p_{jt}$. Rezervacioni period je podeljen na periode odlučivanja u kom najviše jedan zahtev od neke putničke klase pristiže u sistem. Ukoliko je pristigao zahtev za sedište prve klase, taj zahtev će uvek biti prihvaćen. Stoga, u samoj srži problema je da li da se prihvati zahtev za rezervaciju sedišta druge, treće, odnosno poslednje putničke klase.

Da bismo odlučili da li da pristigli zahtev prihvatimo ili odbijemo, izvešćemo uslov pod kojim zahtev prihvatamo. Ukoliko prihvatimo zahtev za na primer $j$-tu putničku klasu, onda je maksimalni očekivani prihod od perioda $t$ do poletanja aviona, $V_t(x)$, jednak ceni karte $f_j$, plus maksimalni očekivani prihod od perioda $t-1$ do poletanja aviona, ali sa smanjenim preostalim kapacitetom $x$, tj $V_{t-1}(x-1)$, odnosno važi

$$V_t(x) = f_j + V_{t-1}(x-1).$$

Ukoliko odbijemo zahtev, maksimalni očekivani prihod od perioda $t-1$ do poletanja aviona je sada sa neizmenjenim preostalim kapacitetom $x$, $V_{t-1}(x)$. Iz ovoga sledi da zahtev prihvatamo ako važi

$$f_j + V_{t-1}(x-1) \geq V_{t-1}(x).$$

Kako imamo tri mogućnosti, da zahtev bude prihvaćen, odbijen ili da nema zahteva u datom periodu, gornji uslov treba da uključi ta tri slučaja. Ukoliko ne pristigne zahtev sa verovatnoćom $p_{0t}$, očekivani prihod je $p_{0t}V_{t-1}(x)$. Ukoliko pristigne zahtev za rezervaciju sedišta prve putničke klase sa verovatnoćom $p_{1t}$, taj zahtev se uvek prihvata i očekivani prihod je $p_{1t}\big(f_1 + V_{t-1}(x-1)\big)$. Ukoliko pristigne zahvev za rezervaciju sedišta neke druge putničke klase sa verovatnoćom $p_{jt}$, tada je očekivani prihod jednak $p_{jt}\max\Big(f_j + V_{t-1}(x-1),\ V_{t-1}(x)\Big)$.

Da sumiramo, dobijamo sledeću rekurzivnu jednačinu

$$V_t(x) = \begin{cases} p_{0t}V_{t-1}(x) + p_{1t}\big(f_1 + V_{t-1}(x-1)\big) + \sum_{j=2}^{n} p_{jt}\max\Big(f_j + V_{t-1}(x-1), V_{t-1}(x)\Big), & t > 0, x > 0 \\ 0, \quad \text{inače}. & \end{cases}$$

Ukoliko sa $\Delta V_t(x)$ definišemo oportunentni trošak držanja sedišta od perioda $t$ do peioda $t$, $\Delta V_t(x) = V_t(x) - V_{t-1}(x)$, gornju jednačinu možemo napisati kao

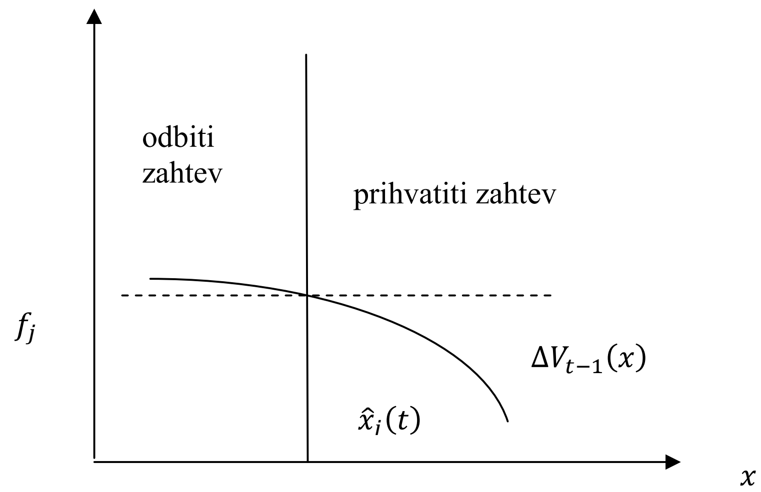
$$V_t(x) - V_{t-1}(x) = \sum_{j=1}^{n} p_{jt}\max\big(f_j - \Delta V_{t-1}(x), 0\big).$$

Stoga, uslov za prihvatanje zahteva za rezervaciju sedišta sada postaje $f_j \geq \Delta V_{t-1}(x)$.

Kao što smo pokazali u predhodnom poglavlju, $\Delta V_t(x)$ je nerastuća po $x$, za fiksirano $t$, odnosno što je više preostalih sedišta u nekom periodu, to je manja njihova očekivana marginalna vrednost. Ova osobina $\Delta V_t(x)$ nam može pomoći da odredimo skup kritičnih vrednosti u zavisnosti od kojih prihvatamo ili odbijamo zahtev. Na sledećoj slici vidimo da postoji $\hat{x}_j(t)$, tako da ukoliko je $x \geq \hat{x}_j(t)$ tada je $\Delta V_{t-1}(x) < f_j$ i zahtev je prihvaćen, i ukoliko je je $x < \hat{x}_j(t)$ tada je $\Delta V_{t-1}(x) > f_j$ i zahtev je odbijen.

Stoga, za svaki period $t$, i za svaku putničku klasu $j$, kritične vrednosti $\hat{x}_j(t)$ će biti izračunate, i zahtev za rezervaciju će biti prihvaćena ako je $x \geq \hat{x}_j(t)$, ili odbijen ako je $x < \hat{x}_j(t)$.

**Slika 6.1 Prihvatanje ili odbijanje zahteva**




U predhodnim poglavljima, objasnili smo dve strategije koje avio kompanije koriste, buking granice i nivoe protekcije. Podestimo se, buking granice su kontrole koje određuju maksimalan broj karata koje mogu biti prodate svakoj klasi u određenom vremenskom trenutku. Stoga, kritične vrednosti se lako mogu prebaciti u buking granice koristeći $b_j(t) = x - \hat{x}_j(t) + 1$.

### 6.3 Poasonov proces i modeliranje procesa pristizanja zahteva

Kao što vidimo u gornjoj rekurzivnoj jednačini, da bismo koristili dinamički model potebno je da generišemo verovatnoće $p_{jt}$. Stoga, da bismo procenili strategije koje avio kompanija koristi u dinamičkom modelu, prvo treba da modeliramo proces pristizanja zahteva za rezervaciju sedišta u rezervacioni sistem. Taj proces bi trebao da generiše slučajan broj zahteva u svakom trenutku rezervacionog perioda, i time eksplicitno modeluje vremensku zavisnost tražnje. Poasonov proces je proces koji se najčešće koristi u dinamičkim modelima upravljanja prihodima, i u nastavku ćemo pojasniti kako koristimo Poasonov proces u dinamičkom modelu.

U toku rezervacionog perioda, avio kompanija prikuplja podatke u različitim vremenskim intervalima, koji ne moraju biti iste dužine, i najčešće postaju sve kraći što se vreme poletanja aviona bliži. Na primer, ako avio kompanija počne da prodaje karte 180 dana pre leta, intervali u kojima se mogu prikupljati podaci su 150-i dan, 120, 100,80,60,45,30,25,20,15,14,..,1.

Neka je takvih intervala $K$, i za vreme $k$-tog intervala $k = 1, \dots, K$, neka je $\mu_j^k$ broj očekivanih zahteva za rezervaciju sedišta klase $j$ u $k$-tom intervalu. Tada je ukupan broj očekivanih zahteva za rezervaciju (svih putničkih klasa) jednak $\mu^k = \mu_1^k + \mu_2^k + \cdots + \mu_n^k$. Sada, da bismo koristili dinamički model, s obzirom da u njemu najviše jedan zahtev može da pristigne u sistem, svaki interval $k$ treba da podelimo na $\nu^k$ perioda odlučivanja, tako da za vreme jednog perioda jedan zahtev pristigne. Tada je broj zahteva za rezervaciju sedišta u intervalu $k$ ima Poasonovu raspodelu sa očekivanjem $\mu^k/\nu^k$. Koristeći verovatnoću raspodele promenljive sa Poasonovom raspodelom, imamo da je verovatnoća da se u intervalu $k$ desi $s$ zahteva je jednaka

$$P(s) = \frac{(\mu^k/\nu^k)^s e^{-(\mu^k/\nu^k)}}{s!}, s = 0, 1, 2, \dots$$

Da bismo odredili na koliko perioda odlučivanja treba da podelimo interval $k$, $\nu^k$, $\nu^k$ povećavamo dok verovatnoća da se dese dva ili više zahteva ne bude manja od nekog zadatog $\varepsilon$, tj dok ne važi $P(s \geq 2) \leq \varepsilon$. Zamenjujući verovatnoću raspodele, $\nu^k$ može biti izračunato iz

$$1 - P(0) - P(1) \leq \varepsilon, \text{odnosno } 1 - e^{-(\mu^k/\nu^k)} - \mu^k/\nu^k e^{-(\mu^k/\nu^k)} \leq \varepsilon.$$

Stoga, ukupno imamo $T = \nu^1 + \nu^2 + \cdots + \nu^K$ perioda odlučivanja, i da bismo koristili dinamički model, ostaje još da izračunamo verovatnoće $p_{jt}$. Kako je $p_{jt}$ verovatnoća da se desi tačno jedan zahtev za rezervaciju sedišta klase $j$ u trenutku $t$ zamenjujući $s = 1$ u verovatnoću raspodele, (sada sa $\mu_j^k$ umesto $\mu^k$ ), dobijamo

$$p_{jt} = \mu_j^k/\nu^k \ e^{-(\mu_j^k/\nu^k)},$$

za svaku putničku klasu $j, j = 1, .., n$ i svaki period odlučivanja $t$, $t = T, T - 1, .., 1, 0$.
Kako možemo primetiti, jedini podatak koji nam je potreban da bi modelovali proces pristizanja zahteva za rezervaciju su $\mu_j^k$.

## 6.4 Simulacija

U ovom delu, objasnićemo kako ćemo simulirati pristizanje zahveva za rezervaciju sedišta za vreme rezervacionog perioda. Simulacija se često koristi pri analiziranju problema koji su previše komplikovani da bi se samo tretirali čisto teoretski. Simulacija je numerički eksperiment, gde je za model za posmatrani problem napisan kod, koji ponavljamo za različite vrednosti ulaznih podataka. Kako ćemo u radu koristiti simulaciju slučajne promenljive, simulaciju možemo posmatrati kao stohastičku simulaciju.

Cilj simulacije je da generišemo proces pristizanja zahteva za rezervaciju za vreme rezervacionog perioda, za koji pretpostavljamo da se može koristiti Poasonov proces. Sada ćemo ukratko opisati Poasonov proces i algoritam korišćen u kodu u njegovom generisanju.

Neka je $N(t)$ broj događaja koji se desi u vremenskom intervalu $[0, t]$ i neka je $n = 0, 1,2, ...$ broj takvih događaja. Tada je $P_n(t) = P\{N(t)\} = n$ je verovatnoća da se tačno $n$ događaja desi u vremenskom intervalu $[0, t]$. Ako verovatnoća $P_n(t)$ ispunjava uslove 1-3 i $\{N(t): t \geq 0\}$ ispunjava uslove 4-6, tada se $\{N(t): t \geq 0\}$ naziva *Poasonovim procesom* ili *procesom prebrojavanja*.

1. Broj događaja koji se desi u jednom vremenskom intervalu je nezavisan od broja događaja koji se desi u u drugom nepreklapajućem vremenskom intervalu.
2. Verovatnoća da se jedan događaj desi u kratkom vremenskom intervalu $[t, t + h]$ je proporcijalan dužini vremenskog intervala.. Tačnije, $P_1(h) = \lambda h + \varepsilon$, gde $\varepsilon$ teži nuli, i $\lambda$ je parametar raspodele i predstavlja prosečan broj događaja.
3. Verovatnoća da se desi više od jednog događaja u kratkom vremeskom intervalu $[t, t + h]$, tj $P_n(h) = \varepsilon,\ n > 1$.
4. priraštaji $N(t_2) - N(t_1)$ i $N(t_4) - N(t_3)$ su nezavisni za svako $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$,
5. za svako $t_1 < t_2$, priraštaj ima Poasonovu raspodelu sa parametrom $\lambda(t_2 - t_1)$,
6. $N(t_0) = 0$.

U simulaciji, pristizanje zahteva za rezervaciju u sistem generišemo Poasonovim procesom. Koristićemo definiciju procesa koristeći vreme čekanja. Neka je $T_i$ vreme kada se $i$-ti događaj desio, i $W_i = T_i - T_{i-1}$ vreme čekanja između $i - 1$-og i $i$-tog događaja. Tada je $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} I(T_n \leq t)$, i $\{N(t): t \geq 0\}$ se naziva Poasonovim procesom ako važi

1. $N(t)$ je tačkasti proces[1],
2. vremena čekanja $W_i$ su nezavisna i imaju eksponencijalnu raspodelu sa intenzitetom $\lambda$, tj sa očekivanjem $1/\lambda$.

Stoga, u generisanju Poasonovog procesa koristimo sledeći algoritam.

**Algoritam**

**Korak 1.** Definisati $T_0 = 0$.
**Korak 2.** Za $i = 1, 2, ..., n$

---

[1] Pojam tačkastih procesa se može naći u [7]. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoće. Tačkasti proces je niz slučajnih promenljivih $(T_n)_{n\geq 1}$ definisan nad datim prostorom verovatnoće tako da važi

*(i)* $P(0 < T_1 \leq T_2 \leq \cdots) = 1$,
*(ii)* $P(T_n < T_{n+1}, T_n < \infty) = P(T_n < \infty), n \geq 1$,
*(iii)* $P(\lim_{n\to\infty} T_n = \infty) = 1$.

**Korak 2a.** Generisati slučajnu promenljivu $E$ sa eksponencijalnom raspodelom i intenzitetom $\lambda$,
**Korak 2b.** $T_i = T_{i-1} + E$.

### 6.5 Numerička primena

U ovom delu, glavni cilj je da prikažemo razlike u statičkim i dinamičkom modelu, odnosno njihovom računanju strategija koje avio kompanija primenjuje u upravljanju prihodima. Posmatraćemo direktan let bez presedanja, sa kapacitetom aviona od 80 sedišta, i 4 putničke klase. Cena karte, srednja vrednost tražnje i standardna devijacija su prikazani u sledećoj tabeli.

**Tabela 6.1 : Cena karte i tražnja za četri putničke klase**

| Putnička klasa | Cena karte | Srednja vrednost tražnje | Standardna devijacija tražnje |
|---|---|---|---|
| 1 | 1050 | 20 | 3.1 |
| 2 | 950 | 30 | 5.8 |
| 3 | 699 | 40 | 7.1 |
| 4 | 520 | 50 | 11.3 |

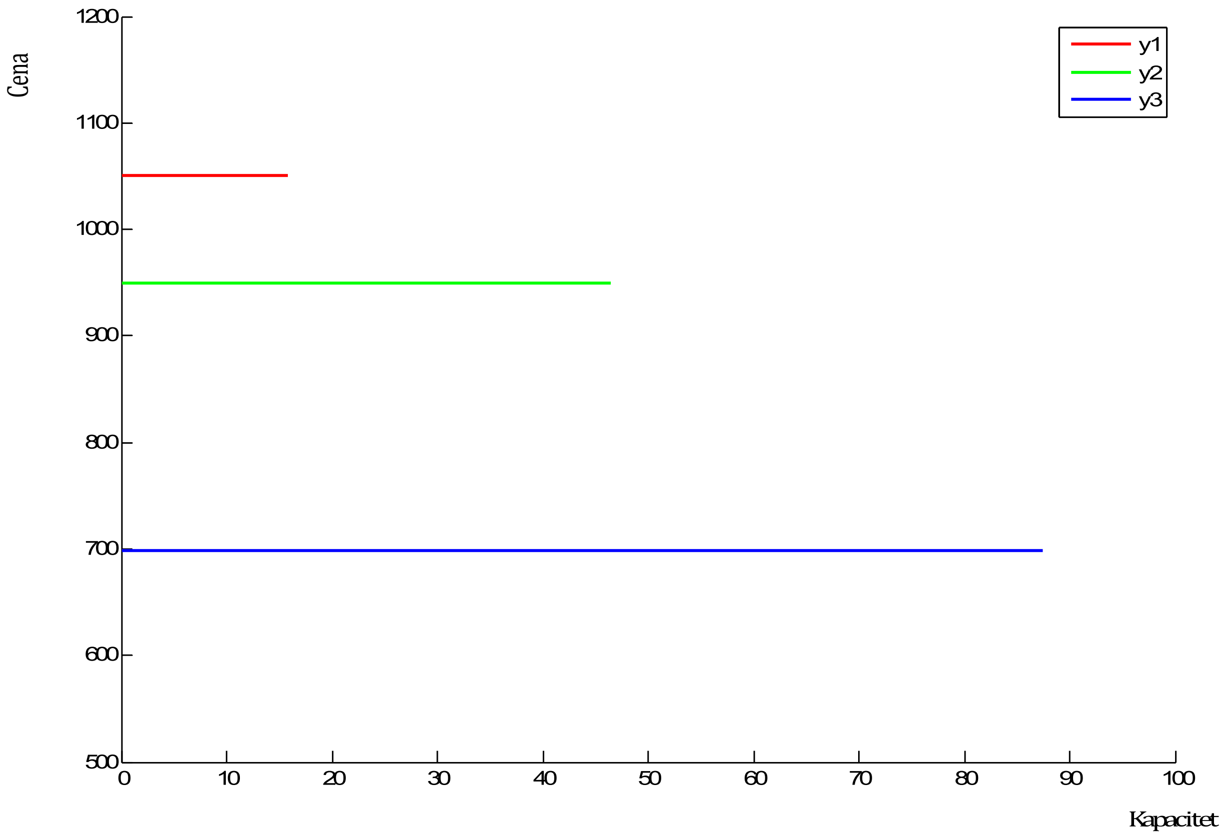
Za početak, uporedićemo dva statička modela, u kom avio kompanija nema mogućnosti prebukiranja, Littlewood-ov model i model očekivanog marginalnog prihoda sedišta. U Littlewood-ovom modelu smo koristili predhodno opisanu Monte Karlo simulaciju sa brojem ponavljanja jednakom 100 000. U sledećoj tabeli su prikazani rezultati dva modela, nivoi protekcije, odnosno minimalan broj sedišta koji treba da bude sačuvan za tu klasu i dostupan svim višim putničkim klasama.

**Table 6.2 : Nivoi protekcije dobijeni primenom dva statička modela**

| Putnička klasa | Littlewood-ov model sa 4 putničke klase | Model očekivanog marginalnog prihoda sedišta |
|---|---|---|
| 1 | 15.8092 | 15.8107 |
| 2 | 46.5329 | 46.4103 |
| 3 | 87.8354 | 87.4346 |
| 4 | | |

Znamo da nam Littltewood-ov model daje optimalne nivoe protekcije za svaku putničku klasu $y_j^*$, dok nam model očekivanog marginalnog prihoda sedišta daje njihovu approksimaciju $y_j$. Kao prvo, možemo primetiti da za oba tipa nivoa protekcije važi $y_1 \leq y_2 \leq y_3$, odnosno $y_1^* \leq y_1^* \leq y_3^*$, kao što je opisano u teoretskom delu i što možemo videti na slici.

**Slika 6.2 Nivoi protekcije dobijeni primenom statističkog modela**




Dalje, možemo primetiti da numerički, oba modela daju skoro identične rezultate. Littlewood-ov model nije mnogo korišćen u praksi, jedan od razloga je taj što se deregulacija avio industrije desila sedamdesetih godina dvadesetog veka, deceniju pre razvoja teorije optimalne kontrole. Stoga, bar u ovom slučaju, možemo reći da je model očekivanog marginalnog prihoda sedišta dobra aproksimacija Littlewood-ovog modela, i da se optimalni nivoi protekcije i nivoi protekcije dobijeni aproksimacijom skoro ne razlikuju. Oba modela kažu da treba sačuvamo najmanje 15 sedišta za prvu putničku klasu, najmanje 46 sedišta za prvu i drugu putničku klasu, i najmanje 86 sedišta za prvu, drugu i treću putničku klasu. Podsetimo se da druga strategija avio kompanije, odnosno buking granice $b_j^*$ koje određuju maksimalan broj karata koje mogu biti prodate svakoj klasi se jednostavno mogu izračunati koristeći $b_j^* = C - y_{j-1}^*$ .

U predhodna dva modela nije bilo dozvoljeno putnicima da otkažu rezervaciju ili se ne pojave na let, a samim tim nismo koristili metod prebukiranosti. Sada, dozvolićemo putnicima da otkažu rezervaciju ili se ne pojave na let, što u statičkom modelu ne pravi razliku. U modelu sa jednom klasom, potrebna nam je prosečna cena karte koja bi u ovom slučaju bila ponderisana cena karte sa ponderima srazmernim udelu tražnje za kartom pojedine putničke klase u ukupnoj tražnji, tj cena je jednaka $\frac{20}{20+30+40+50}1050 + \frac{30}{20+30+40+50}950 + \frac{40}{20+30+40+50}699 + \frac{50}{20+30+40+50}520 = 793$. Verovatnoća da se putnik pojavi na let, $\alpha$, kao i troškovi naknade iznad visine karte u slučaju nepojavljivanja na let, $R$, su dati u sledećoj tabeli. Cilj je da nađemo granicu prebukiranosti $B$, odnosno maksimalan broj karata koji avio kompanija treba da proda iznad kapaciteta $B > C,$ ili stopu prebukiranosti $k$ za koju važi $C(1 + k) = B$. Rezultati su prikazani u sledećoj tabeli.

**Tabela 6.3 Granica prebukiranosti i stopa prebukiranosti**

| Troškovi naknade | Verovatnoća da se putnik sa kupljenom kartom pojavi na let | Granica prebukiranosti | Stopa prebukiranosti |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.9 | 309 | 2.8625 |
| 100 | 0.9 | 93 | 0.1625 |
| 300 | 0.9 | 91 | 0.1375 |
| 500 | 0.9 | 90 | 0.1250 |

Kao što je i očekivano, ukoliko avio kompanija nema troškove naknade više od cene karte, avio kompanija će prebukirati let u velikoj meri, sa stopom prebukiranosti čak 286%. Naravno, kako troškovi naknade rastu avio kompanija sve manje koristi prepukiranost, čija stopa pada na 16, 13, 12 % kako troškovi naknade rastu. Podsetimo se da u ovom modelu koristimo troškove naknade dobrovoljno prekobrojnim putnicima, tj samo kratkoročne troškove plaćanja prenoćišta ili pomeranja na drugi let. Dugoročne troškove koje avio kompanija ima, naime gubitak dobre volje putnika i samim tim gubitak usled smanjene tražnje i prelaska kod konkurencije, ne koristimo u ovom modelu. Dugoročni gubici se teško mogu izmeriti, ali verovatno bi uticali na smanjenje stope prebukiranoosti koju avio kompanija koristi.

Kao što je napomenuto, statički modeli ignorišu dinamičku prirodu rezervacionog perioda, odnosno, strategije koje avio kompanija koristi, nivoi protekcije ili granica prebukiranosti, se određuju pre puštanja karti u prodaju i ne menjaju se tokom vremena. Stoga, u nastavku ćemo primeniti dinamički model u kom su strategije vremenski zavisne, odnosno zavise u kom delu rezervacionog perioda se nalazimo. Da bismo primenili dinamički model, potrebni su nam podaci o tražnji za kartama pojedinačne putničke klase za vreme rezervacionog perioda. Kako avio kompanija prikuplja podatke u pojedinim vremenskim trenucima, a ne kontinuirano, rezervacioni period je podeljen na 10 vremenskih intervala. Na primer, prvi interval može biti od 180-og do 150-og dana od puštanja karti u prodaju, sledeći od 150-0g do 130-og, poslednji interval može biti od trećeg dana pre poletanja aviona do trenutka poletanja aviona. Tražnje za kartama pojedine putničke klase su date u sledećoj tabeli.

**Table 6.4 Tražnja za kartama tokom rezervacionog perioda**

| | | Vremenski interval | | | | | | | | | | Ukupna tražnja |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
| Putnička klasa | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 3 | 5 | 4 | 3 | 20 |
| | 2 | 0 | 0 | 2 | 2 | 4 | 6 | 7 | 4 | 3 | 2 | 30 |
| | 3 | 2 | 5 | 7 | 8 | 9 | 5 | 4 | 0 | 0 | 0 | 40 |
| | 4 | 8 | 11 | 15 | 9 | 5 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 50 |

Primetimo da četvrta putnička klasa najviše rezerviše na početku rezervacionog perioda, dok prva klasa najviše rezerviše na kraju rezervacionog perioda. Što je putnička klasa viša, to je verovatnje da će rezevisati bliže poletanju aviona. Sada, da bismo koristili dinamički model, svaki vremenski interval treba da podelimo na vremenske periode odlučivanja, tako da u svakom periodu odlučivanja najviše jedan zahtev pristiže u sistem. Podsetimo se, to radimo tako što sa pragom tolerancije $\varepsilon$ dozvoljavamo da se dese više od jednog zahteva u jednom vremenskom intervalu, koje možemo izabrati proizvoljno malo. Što je manje $\varepsilon$, odnosno što je manja tolerancija, dobijamo više perioda odlučivanja. Za $\varepsilon$ uzimamo vrednost 0.3, što nam daje broj perioda odlučivanja u svakom vremenskom intervalu.

**Tabela 6. 5 Broj perioda odlučivanja za $\boldsymbol{\varepsilon = 0.3}$**

| | Vremenski interval | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Broj | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| perioda odlučivanja | 10 | 15 | 22 | 19 | 19 | 14 | 13 | 9 | 7 | 5 |

To nam daje ukupno $T$ =10+15+22+19+19+14+13+9+7+5=133 perioda odlučivanja, u kojima može da pristigne zahtev za rezervaciju karte pojedine putničke klase ili da ne pristigne nijedan zahtev, i avio kompanija treba da odluči da li da pristigli zahtev prihvati ili da odbije. Sada, kada imamo broj perioda odlučivanja za svaki vremenski interval, možemo izračunati verovatnoću da se u nekom periodu odlučivanja desi zahtev za rezervaciju karte pojedine putničke klase, $p_{jt}$, ili se nijedan zahtev ne desi, $p_{0t}$, koristeći formulu datu u dinamičkom modelu.

**Tabela 6. 6 Verovatnoće da se desi ili ne desi zahtev za rezervaciju karte**

| | Verovatnoća da se desi zahtev za rezervaciju karte putničke klase $j$ | | | | Verovatnoća da se ne desi nijedan zahtev za rezervaciju |
|---|---|---|---|---|---|
| | $p_{jt}$ | | | | $p_{0t}$ |
| Period odlučivanja $t$ | $j$ =1 | $j$ =2 | $j$ =3 | $j$ =4 | |
| 133 | 0 | 0 | 0.0830 | 0.2764 | 0.6406 |
| 132 | 0 | 0 | 0.0830 | 0.2764 | 0.6406 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 103 | 0 | 0.1167 | 0.2315 | 0.3585 | 0.2934 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 79 | 0.0905 | 0.1167 | 0.2528 | 0.2950 | 0.2451 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 61 | 0.1637 | 0.2042 | 0.2717 | 0.2023 | 0.1580 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 47 | 0.1637 | 0.2681 | 0.1811 | 0.0947 | 0.2923 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 31 | 0.2222 | 0.2926 | 0.1516 | 0 | 0.3335 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 16 | 0.3033 | 0.2042 | 0 | 0 | 0.4925 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 9 | 0.2681 | 0.1637 | 0 | 0 | 0.5681 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 2 | 0.2222 | 0.1167 | 0 | 0 | 0.6611 |
| 1 | 0.2222 | 0.1167 | 0 | 0 | 0.6611 |

Primetimo da verovatnoća da se desi zahtev za rezervaciju karte prve putničke klase je nula na početku rezervacionog perioda, i da ova verovatnoća ima veću vrednost što se poletanje aviona, odnosno kraj rezervacionog perioda bliži. Suprotno važi za četvrtu putničku klasu, verovatnoća da se desi zahtev za rezervaciju karte četvrte putničke klase je najveća na početku rezervacionnog perioda, dok je jednaka nuli na što je poletanje aviona bliže.

Kao što smo napomenuli, strategije koje koristi avio kompanija u statičkom modelu ne zavise od toga koliko je vremena prošlo od početka rezervacionog perioda, buking granice i nivoi protekcije ne zavise od vremena. Međutim, u dinamičkom modelu podsetimo se, koristimo kritične vrednosti, koje nalazimo za svaku putničku klasu i za svaki period odlučivanja. Ukoliko je preostali kapacitet manji od kritične vrednosti, zahtev za rezervaciju odbijamo, u suprotnom, zahtev prihvatamo. U sledećoj tabeli dajemo kritične vrednosti koje su izračunate koristeći metod opisan u kratkom pregledu dinamičkog modela.

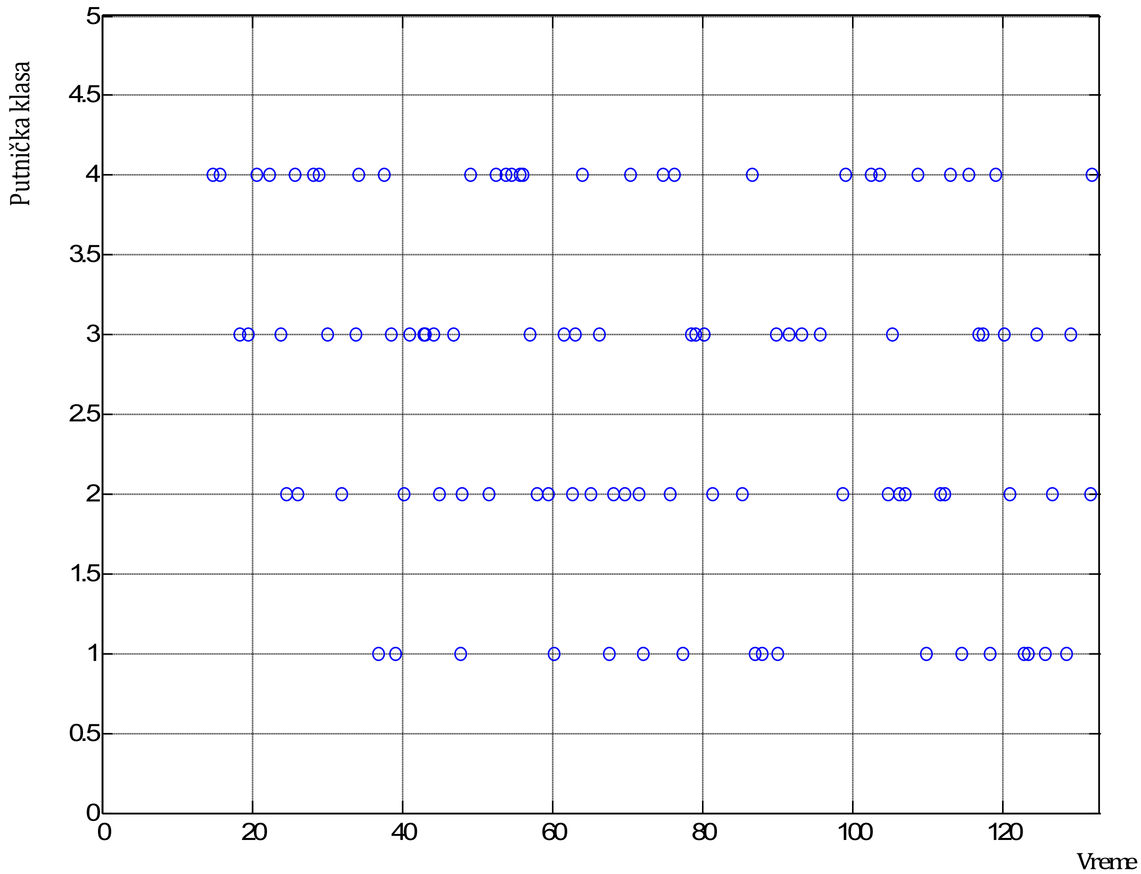
**Tabela 6.7 Kritične vrednosti za putničku klasu *j***

| | Kritične vrednosti za putničku klasu $j$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| Period odlučivanja $t$ | $j$ =1 | $j$ =2 | $j$ =3 | $j$ =4 |
| 133 | 1 | 22 | 44 | 72 |
| 132 | 1 | 22 | 44 | 72 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 103 | 1 | | 43 | 63 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 79 | 1 | 21 | 37 | 50 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 47 | 1 | 14 | 24 | 28 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 31 | 1 | 10 | 15 | 17 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 16 | 1 | 5 | 7 | 8 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 9 | 1 | 2 | 4 | 5 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Kritične vrednosti za prvu klasu se ne menjaju sa vremenom, s obzirom da ćemo zahtev za rezervaciju karte prve putnička klase uvek prihvatiti jer je cena karte najviša. Kritične vrednosti opadaju s vremenom jer što smo bliži poletanju aviona to je manje preostalog kapaciteta, odnosno slobodnih sedišta.

Sada, simuliramo vreme pristizanje zahteva u rezervacioni sistem kao što je opisano u dinamičkom modelu, čiji rezultat možemo videti na sledećoj slici.

**Slika 6.1 Simulacija pristizanja zahteva za rezervaciju u sistem**



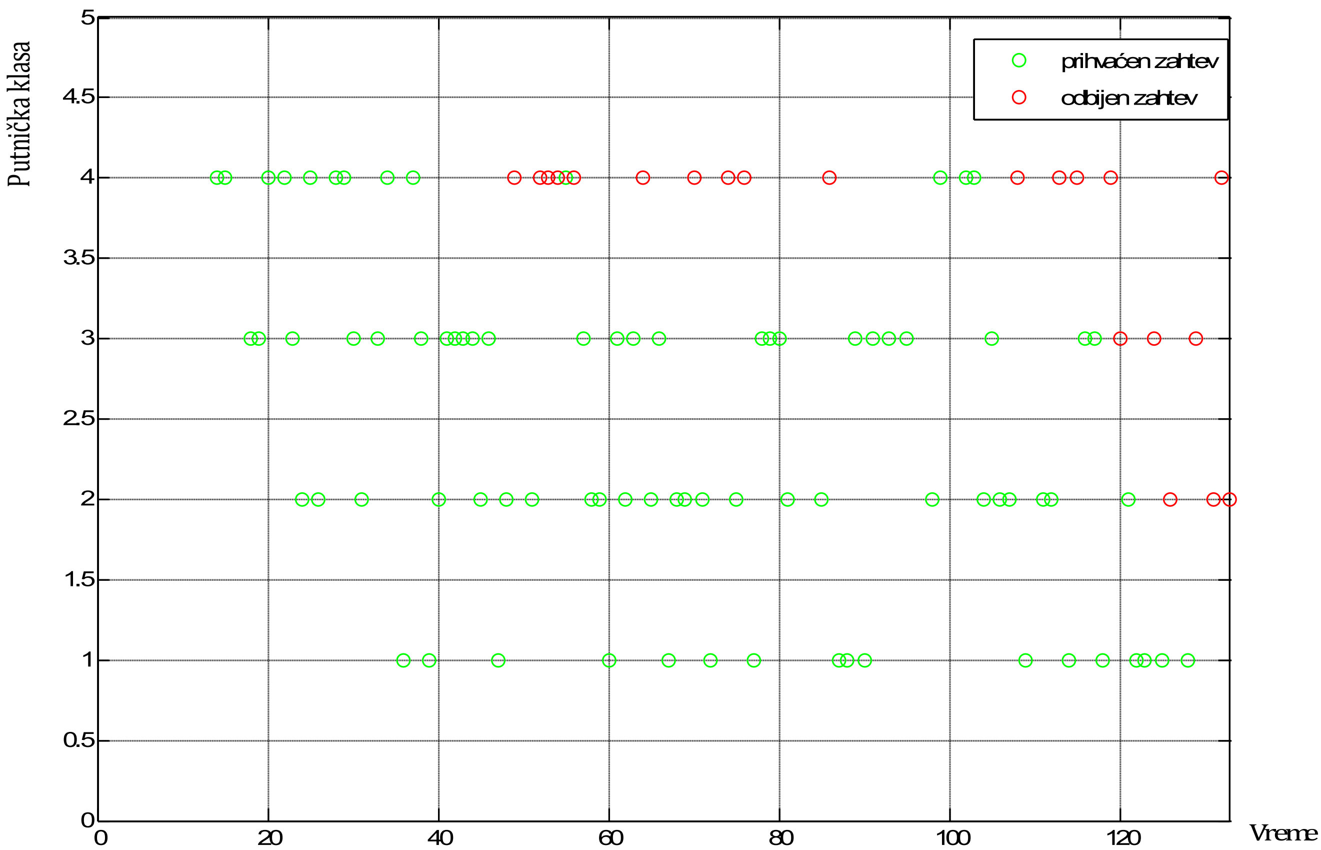

Na $x$-osi je vreme pristizanja zahteva za rezervaciju u sistem, na $y$-osi je putnička klasa kojoj zahtev pripada. Tako na primer, možemo videti da se do 20-og perioda, desilo nekoliko zahteva za rezervaciju treće i četvrte putničke klase, i nijedan zahtev za rezervaciju karte druge i prve putničke klase. Da bismo mogli da koristimo kritične vrednosti ova vremena transformišemo u nula-jedan matricu sa sa brojem vrsta jednakom broju perioda odlučivanja i brojem kolona jednakom broju putničkih klasa. Element na preseku $j$-te kolone i $t$-te vrste dobija vrednost jedan, ako se u periodu odlučivanja $t$ desio zahtev za rezervaciju sedišta putničke klase $j$. Matrica je prikazana u sledećoj tabeli.

**Table 6.8 Simulacija pristizanja zahteva za rezervaciju u sistem**

| | Putnička klasa $j$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| Period odlučivanja $t$ | $j$ =1 | $j$ =2 | $j$ =3 | $j$ =4 |
| 133 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 132 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 103 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 79 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 5 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |

Svaki put kada zahtev za rezervaciju sedišta pristigne u sistem, avio kompanija poredi kritične vrednosti i preostali kapacitet. Ukoliko je preostali kapacitet manji od kritične vrednosti, zahtev za rezervaciju odbijamo, u suprotnom, zahtev prihvatamo i preostali kapacitet se smanjuje za jedan. Rezultati optimizacije su prikazani na slici.

**Slika 6.2 Odluka prihvatanja ili odbijanja zahteva**




Na $x$-osi je kao i pre vreme pristizanja zahteva za rezervaciju u sistem, na $y$-osi je putnička klasa kojoj zahtev pripada, crvenom je označen zahtev koji je odbijen, zelenom zahtev koji je prihvaćen. U sledećoj tabeli dajemo pregled odbijenih zahteva po putničkim klasama i periodima odlučivanja.

**Table 6.9 Odbijeni zahtevi po putničkim klasama i periodima odlučivanja.**

| Period odlučivanja | 49 | 52 | 53 | 56 | 64 | 70 | 74 | 76 | 86 | 108 | 113 | 115 | 119 | 120 | 124 | 126 | 129 | 131 | 132 | 133 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Putnička klasa | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 2 | 3 | 2 | 4 | 2 |

Primetimo da među odbijenim zahtevima, nema zahteva za rezervaciju sedišta prve putničke klase, ti zahtevi se uvek prihvataju jer generišu najveći prihod. Takođe, što smo bliži poletanju aviona, avio kompanija odbija zahteve za rezervaciju od strane druge i treće putničke klase, u iščekivanju zahteva od strane prve putničke klase. Koristeći ovu strategiju, dobijamo da avio kompanija generiše prihod od 64 885.

# ZAKLJUČAK

U ovom radu, bavili smo se matematičkim modelima koje avio kompanije koriste u upravljanju prihodima, sa ciljem njihove maksimizacije. Upravljanje prihodima je dosta komplikovan proces koji u praksi podrazumeva procenjivanje tražnje za kartama, kontrolu kapaciteta, korišćenje prebukiranosti, slobodno formiranje cena karti, kao i praćenje konkurencije. Proces upravljanja prihodima je u suštini dinamički, s obzirom da se parametri menjaju od početka rezervacionog perioda, odnosno puštanja karti u prodaju do poletanja aviona. U pojednostavljenom kontekstu, koncentrisali smo se na dve strategije od mnogih koje avio kompanije danas koriste, kontrolu kapaciteta i metod prebukiranosti.

Na početku, bavili smo se statičkim modelom sa jednom putničkom klasom koji dozvoljava da putnik sa kupljenom kartom otkaže rezervaciju ili se ne pojavi na let, i samim tim korišćenje metoda prebukiranosti. Iako dosta pojednostavljen, model pomaže da se razume pojam i karakteristike metoda prebukiranosti. Zatim smo proširili osnovni model uvođenjem više putničkih klasa, i na taj način dozvolili korišćenje i druge strategije avio kompanjie, kontrole kapaciteta. Oba modela, zbog svoje jednostavnosti, našla su primenu u praksi avio kompanija, iako ignorišu dinamičku prirodu rezervacionog procesa.

U nastavku, modeli koje smo razmatrali bili su dinamički, modeli koji ne ignorišu dinamičku prirodu rezervacionog procesa i ne pretpostavljaju sekvencijalnost u pristizanju zahteva. Za razliku od statičkih modela, dve pomenute strategije menjaju vrednosti tokom rezervacionog perioda kako se vrednost pojedinih parametara menja. Na kraju, numerički smo primenili statički i dinamički model, kako bismo dobili bolji uvid u pomenute strategije.

Naravno, pomenuti modeli su dosta pojednostavljeni. U praksi, avio kompanije maksimiziraju prihod na celoj mreži letova a ne samo na jednom direktnom letu kao što je ovde slučaj. Takođe, drugi faktori kao što su konkurencija i gubitak dobre volje zbog korišćenja prebukiranosti utiču na upravljanje prihodima. Slično, vremenski raspored letova u toku dana i nedelje, formiranje cena karti korišćenjem aukcija su druge strategije od kojih avio kompanije korist u upravljanju prihodima. A zahvaljujući ubrzanom razvoju u avio industriji, novih strategija će sigurno biti još više.

## LITERATURA


[1] Kevin Littlewood ; *Forecasting and Control of Passenger Bookins*; AGIFORS Symposium Proc. 12; 1972

[2] Peter Belobaba; *Air travel demand and airline seat inventory management*; Cambridge, MA: Flight Transportation Laboratory, Massachusetts Institute of Technology; 1987

[3] Subramanian Janakiram, Shaler Stidham Jr, Conrad J. Lautenbacher; *Airline yield management with overbooking, cancellations, and no-shows*; Transportation Science 33.2, 147-167; 1999

[4] Danijela Rajter – Ćirić; *Verovatnoća*; Prirodno-matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku, Novi Sad; Prvo izdanje; 2008

[5] Team 180; *Optimal overbooking*; 2002

[6] Bertsekas, D. P; *Dynamic programming and optimal control* (Vol. 1, No. 2). Belmont, MA: Athena Scientific; 1995

[7] Martin Jacobsen, *Point process theory and applications*. Birkhũser Boston; 2006.

**BIOGRAFIJA**

Branka Marković je rođena 18. avgusta 1987. godine u Šapcu. Završila je osnovnu školu “Mileva Kosovac” 2002.godine, a potom upisuje prirodno-matematički smer „Šabačke gimnazije“ u Šapcu. Nakon završene gimnazije, 2006. godine upisala je osnovne studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer Matematika finansija. Osnovne studije je završila u julu 2011 sa prosečnom ocenom 9.81. Nakon završenih osnovnih studija iste godine upisuje master studije na istom fakultetu, smer Primenjena matematika. Položila je sve ispite predviđene planom i programom, i time stekla uslov za odbranu master rada. Od septembra 2011. godine je student doktorskih studija na Ekonomskom fakultetu u Pragu.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
**RBR**
Identifikacioni broj:
**IBR**
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
**TD**
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
**TZ**
Vrsta rada: Master teza
**VR**
Autor: Branka Marković
**AU**
Mentor: dr Zorana Lužanin
**MN**
Naslov rada: Upravljanje prohodima u avio industriji: Modeli kontrole kapaciteta i prebukiranosti
**MR**
Jezik publikacije: Srpski (latinica)
**JP**
Jezik izvoda: s/e
**JI**
Zemlja publikovanja: Srbija
**ZP**
Uže geografsko područje: Vojvodina
**UGP**
Godina: 2014
**GO**
Izdavač: Autorski reprint
**IZ**
Mesto i adresa: Novi Sad, Prirodno-matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku, Trg Dositeja Obradovića 4
**MA**
Fizički opis rada: (6, 88, 0, 9, 15, 7, 0)
(broj poglavlja, br. strana, br. literarnih citata, br. tabela, br. slika, br. grafika, br. priloga)
**FO**
Naučna oblast: Matematika
**NO**
Naučna disciplina: Matematički modeli u ekonomiji
**ND**
**Ključne reči:** kontrola kapaciteta, prebukiranost, upravljanje prihodima, dinamičko programiranje

**PO**
**UDK:**

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku
**ČU**
Važna napomena:
**VN**
Izvod:
U ovom radu su prikazani matematički modeli koji analiziraju dve strategije koje avio kompanije koriste u cilju maksimizacije profita, kontrolu kapaciteta i prebukiranost. U modelima kontrole kapaciteta izračunali smo koliko sedišta avio kompanija treba da proda određenoj putničkoj klasi. U modelima prebukiranosti, uzimajući u obzir nepojavljivanje na let i otkazivanje rezervacije, izračunali smo optimalan broj karata koji bi trebalo prodati izvan granice kapaciteta.
**IZ**

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 10.5.2012.
**DP**
Datum odbrane:
**DO**
Članovi komisije:
**KO**

*Predsednik:* dr Nataša Krejić, redovni profesor, Prirodno-matematičkog fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

*Mentor:* dr Zorana Lužanin, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet,Univerzitet u Novom Sadu

*Član:* dr Dora Seleši, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE KEY
WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
**ANO**
Identification number:
**INO**
Document type: Monograph type
**DT**
Type of record: Printed text
**TR**
Contents code: Master thesis
**CC**
Author: Branka Marković
**AU**
Mentor: Zorana Lužanin, Ph.D.
**MN**
**Title:** Airline revenue management: capacity control and overbooking models
**TI**
Language of text: Serbian
**LT**
Language of abstract: Serbian
**LA**
Country of publication**:** Serbia
**CP**
Locality of publication: Vojvodina
**LP**
Publication year: 2014
**PY**
Publisher: Author's reprint
**PU**
Publ. place: Novi Sad, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Department of mathematics and informatics, Trg Dositeja Obradovića 4
**PP**
Physical description: (6, 88, 0, 9, 15, 7, 0)
**PD**
Scientific field: Mathematics
**SF**
Scientific discipline: Mathematical Models in Economics
**SD**
**Key words:** airline revenue management, capacity control, overbooking, dynamic programming

**SKW**

**UC:**

Holding data: In library of Department of Mathematics
**HD**
Note:
**N**
Abstract:
In this thesis we describe mathematical models that investigate two predominately used strategies in airline revenue management, the capacity control and overbooking. Specifically, the first set of model deals with optimally allocating the remaining seat capacity to different fair classes. In the second set of models, we consider no-shows and cancellations and estimate the optimal number of seats to be overbooked.
**AB**

Accepted by the Scientific Board on: 10.5.2012.
**ASB**
Defended:
**DE**
Thesis defend board:
**DB**

*President:* Nataša Krejić, Ph.D., Full Professor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Novi Sad

*Member:* Zorana Lužanin, Ph.D., Full Professor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Novi Sad

*Member:* Dr Dora Seleši, Ph.D., Associate Professor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Novi Sad